

Σ Ε Ι Ρ Α Σ

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Δ Ο Τ Σ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΠΙΓΡΑΦΩΝ ΣΤΑΔΙΟΜΕΤΡΙΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

Λ Α Ρ Ι Σ Σ Α Ι Ο Τ

Τ Ο Μ Ο Σ Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο Σ

Περιέχων τὴν Συμβολικὴν Λογισμὴν τὰ περὶ Λογαρίθμων, τὰ περὶ Ἐξισώσεων, τὰ περὶ Σειρῶν, καὶ τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας.



ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ: ΤΗΣ ΑΤΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΟΥΤ.

Α Ω Ζ.

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

Σελίδι 11, εἴχῃ 17, Μετίνων, Γράφει, Μετίνωναι.
 — Σελ. 14, εἴχ. 18. Τό, Γρ. Τόν. — Σελ. 24, εἴχ. 30.
 Εἶν ἡ, Γρ. Εἶν ἡ. — Σελ. 25, εἴχ. 14, 45¹²₈. Γρ.
 54¹²₈ — Σελ. 34, εἴχ. 16, Τάξις, Γράφ. Σύνταξις. — Σελ.
 35, εἴχ., 9, Εἰλήφθων, Γρ. Εἰλήφθω. Σελ. 39, εἴχ. 23. ἱεά-
 λειφον τὸ μὲν. Σελ. 44, εἴχ. 9. Τῷδε, Γρ. Τῷτε. — Σελ. 48.
 εἴχ. 21, Εῖφαίνη, Γρ. Εἰμφαίνη. — Σελ. 58, εἴχ. 15, $\frac{x}{10}$,
 Γρ. $\frac{x}{20}$. Σελ. 63, εἴχ. 12, Τρισί, Γρ. Δυσί. — Σελ. 68, εἴχ.
 24, (441), Γρ. (440). — Σελ. 70, εἴχ. 23, (488),
 Γρ. (388). Σελ. 74, εἴχ. 22, 85 =, Γρ. 85 = β. —
 Σελ. 75, εἴχ. 11, 2β 3γ. — Γρ. 2β — 3γ. — Σελ. 78,
 εἴχ. 9, $\frac{v}{9} + \frac{a}{5}$, Γρ. $\frac{v}{9} = \frac{a}{5}$. — Σελ. 80, εἴχ. 5,
 $\psi \frac{a}{2}$, Γρ. $\psi = \frac{a}{2}$. — Σελ. 87, εἴχ. 17, (134), Γρ. (459).
 — Σελ. 94, εἴχ. 27. Ἀνυπαρχτέσης, Γρ. Ἐνυπαρχέσης. —
 Σελ. 95, εἴχ. 19, Τριτοβαθμῆ, Γρ. Τεταρτοβαθμῆ, εἴχ.
 21, Σύν δύν, Γρ. Σύντρεις. — Σελ. 103, εἴχ. 14. υΧχ,
 Γρ. υ = χ. — Σελ. 111, εἴχ. 11. $\frac{\beta}{2} +$, Γρ. $\frac{\beta}{2} -$. εἴχ. 19.
 $\frac{\beta}{2} +$, Γρ. $\frac{\beta}{2} -$. — Σελ. 119, εἴχ. 2, $\frac{1}{x}$, Γρ. $\frac{1}{2}$. —
 εἴχ. 21, πρ + η, Γρ. πρ = η. — Σελ. 121, εἴχ. 27,
 x = 4, Γρ. x = 4. — Σελ. 123, εἴχ. 9, μ = ν, Γρ.
 μ + ν. — Σελ. 126, εἴχ. 20, Τῶν ἀρτί, Γρ. Τῶν ἀρτί.
 — Σελ. 138, εἴχ. 20, (125), Γρ. (430). — Σελ. 148,
 εἴχ. 16, 549, Γρ. 543. — Σελ. 149, εἴχ. 11. = υ²,
 Γρ. + υ². — Σελ. 152, εἴχ. 4, $\frac{v^4}{4a^2} =$, Γρ. $\frac{v^4}{4a^2} +$. —
 Σελ. 153, εἴχ. 10, (128), Γρ. (126). Σελ. 156, εἴχ.

18. $\frac{1}{2}$ Γρ. $\frac{1}{2}$. Σελ. 189. εἰχ. 27. ΟΓκ, Γρ. ΟΚκ. — Σελ.
 194, εἰχ. 1, Γ, Γρ. Κ — εἰχ. 25. Γ. Γρ. Κ. — Σελ.
 195, εἰχ. 3, Γ, Γρ. Κ. — Σελ. 199, εἰχ. 16 ΑΓ, Γρ.
 ΑΚ, ε. 17, ΓΗ Γρ. ΚΗ. — Σελ. 203, εἰχ. 15, Τ^ατερ-
 ρεν, Γρ. Ε^ανερδεν. — Σελ. 209, εἰχ. 9. Γο, Γρ. Κο. —
 Σελ. 212. εἰχ. 22. (84). Γρ. (102). — Σελ. 224. εἰχ.
 12, Ε^ασι $> 90^\circ$, τῶν δὲ $< 90^\circ$. Γρ. Ε^ασι τῶν μὲν ἀμβλείων
 μέτρον $> 90^\circ$, τῶν δὲ ὀξείων $< 90^\circ$. — Σελ. 233.
 εἰχ. 17. (220). Γρ. (209). Σελ. 240. εἰχ. 28. (225)
 γρ. (228). — Σελ. 242. εἰχ. 8. Ἰ^ασαι, Γρ. Ἰ^ασα. — Σελ.
 251. εἰχ. 8 Δυνατόν, Γρ. Δυνατόν. — Σελ. 269. εἰχ. 24.
 (51). Γρ. (5). — Σελ. 284. εἰχ. 25. Ο' κύκλος, Γρ.
 Κύκλος. — Σελ. 287. εἰχ. 11, 365, Γρ. 366. — Σελ.
 288. εἰχ. 22, ΚΚ², Γρ. ΑΚ², — εἰχ. 26. ΑΑ², Γρ.
 ΚΑ². — Σελ. 292, εἰχ. 13, (31) Γρ. (34). — Σελ.
 297, εἰχ. 22. (236) Γρ. (240). — Σελ. 307, εἰχ. 16.
 (339) Γρ. (338). — Σελ. 308, εἰχ. 23, 292, Γρ. 392.
 — Σελ. 309, εἰχ. 20, (398) Γρ. (397). Σελ. 317.
 εἰχ. 28, Ε^απακήκεσα, Γρ. Ε^απανήκεσσα. — Σελ. 323. εἰχ.
 16. (249) Γρ. (449). — εἰχ. 25. (268). Γρ. (298).
 — Σελ. 324. εἰχ. 10 (405) Γρ. (396). — Σελ. 328.
 εἰχ. 1, (237), Γρ. (239). Τα ἐν σελίδι 318, § 437
 μετιών, ὅρα τὸ 99 χῆμα.



Σ Ε Ι Ρ Α

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Τμήματος δευτέρου τῆ συμβολικῆς λογισμῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ λογαρίθμων.

313. **Λ**ογάρισμοι καλεῖται ποσότητες ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ χωρῆσαι ἀντιστροφῶς ἐτέραις, συνισώσαις γεωμετρικὴν πρόοδον.

Εἴαν τὸ α , πᾶσιν πρὸς τὸ δοκὺν ἐξαιρεκνίζον ποσότητα, ἀρθῇ ἐφεξῆς ἐπὶ βαθμοῖς, ὧν τῇ μὲν πρώτῃ δεσικτης εἴη 0, τῇ δὲ δευτέρῃ 1, καὶ ἐφεξῆς ὡσχύτως, συζητήσεται ἡδε ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\frac{\alpha^0}{\alpha^1} : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^6$ (276), ἣς οἱ δείκται συνισῶσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $\div 0.1.2.3.4.5.6$ κτ' ὅθεν ἀποτελούνται αἱ ἐφεξῆς δύο πρόοδοι Β καὶ Δ

$$\frac{\alpha^0}{\alpha^1} : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^6 : \alpha^7 : B$$

$$\div 0.1.2.3.4.5.6.7. \Delta$$

Τόμ. Β.

Α

ἕκαστος ἐν ὅροις τῶν ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ Δ καλεῖται
 λογάρριθμος τῷ αὐτῷ συστοιχέντος ἐπὶ τῆς γεωμετρι-
 κῆς προόδου $B \cdot 2$ φέρ' εἰπεῖν ὁ ἐν τῇ B ἔστι λογάρριθμος
 τῷ ἐν τῇ Δ $a^2 \cdot 3$ δέ ἐστι λογάρριθμος τῷ a^3 κτ.

314. Νῦν ἐν ἑὸν ἐπὶ τῆς B προόδου ὑποτεθῇ $a=10$,
 ἡ πρόοδος γενήσεται $\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : \kappa\tau.$ ἐκτιμώντες δὲ τὰς βαθμῆς, ἐπεὶ $10^0=1$
 (59) ἔχομεν τὴν πρόοδον $\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 \kappa\tau.$

Εἰάν ταύτῃ τῇ γεωμετρικῇ προόδῳ B ὑπερρωθῇ ἀν-
 τίστοιχος ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος Δ , προκύψουσιν αἱ ἐξῆς
 δύο πρόοδοι, ἡ μὲν γεωμετρικὴ, ἀριθμητικὴ δὲ ἡ ἐτέρα
 $\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000$
 $\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$

315. Οἷκον οὐ μὲν ἐστι λογάρριθμος τῆς 1· 1 δὲ τῷ
 $10^0 \cdot 2$ δὲ τῷ $100 \cdot 3$ δὲ τῷ 1000 , καὶ ὅτως ἐξῆς· κατὰ
 τὴν φύσιν ἄρα τῶνδε τῶν δύο προόδων, ὁ λογάρριθμος,
 φέρ' εἰπεῖν, 3 τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν δύο ποσότητων 100
 καὶ 1000, εἴτ' ἐν τῷ 100000, εὑρεθήσεται συναφθέντος
 τῷ κατὰ τὸν πολλαπλασιαστέον 100 λογαριθμῷ 2 τῷ τῷ
 πολλαπλασιασῇ 1000 λογαριθμῷ 3

316. Τὸναντίον δὲ ὁ 4 λογάρριθμος τῷ 10000 πη-
 λίκῃ, τῷ διαίρεσει τῆς 1000000 ποσότητος διὰ τῆς 100
 προκίπτοντος, εὑρεθήσεται, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ 2 λογάρριθμος
 τῷ διαίρετε ἀπὸ τῷ κατὰ τὸν διαιρετέον 1000000 λογα-
 ρίθμῳ 6.

317. Τῷ παντὸς ὅρου βαθμῆς ὁ λογάρριθμος εὑρεθή-
 σεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τῷ ὅρου τῷδε λογάρριθμος
 ἐπὶ τὸν τῷ βαθμῇ δείκτην· ὅτως εὑρεθήσεται ὁ λογ. ἀριθ.

μος τῷ ἀπὸ 100 κύβη 1000000, πολλαπλασιασθέντος τοῦ 3 κινδινῷ δείκτη ἐπὶ τὸν τῷ 100 λογάριθμον 2.

318. Τὸναντίον δὲ θηρευθήσεται ὁ πάσης ῥίζης παντός ὅρα λογάριθμος, διαιρεθέντος τῷ κατὰ τὸν ὅρον λογαριθμὸν διὰ τῷ ἐπισήμῳ· ἔτιω εἰρεθήσεται 3 λογάριθμος τῷ 1000, ὅς ἐστι ῥίζα τετραγωνικὴ τῷ 1000000, διαιρεθέντος τῷ κατὰ τὸν 1000000 λογαριθμὸν 6 διὰ τῷ 2 τετραγωνικῷ ἐπισήμῳ. Πάντα δὲ τὰ ἤδη εἰρημένα ἐπαληθεύοντα δείκνυται γενικώτερον ἐπὶ τῶν προειλημμένων δύο προόδων Β ἔ Δ.

319. Ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν $\div 0.1.2.3.4$ κτ. παρέχει τὸς λογαριθμοὺς πάντων τῶν ἀριθμῶν τῶν συμπεριλειμμένων ἐν τῇ κατὰ τὸ δεκαπλάσιον χωρῆσιν γεωμετρικῇ προόδῳ $\div 1:10:100:1000:10000:100000$ κτ., ὡς ἰδεῖν ἐνταῦθα ἐνεσι

$\div 1:10:100:1000:10000:100000:1000000:10000000:100000000$ κτ
 $\div 0.1.2.3.4.5.6.7$ κτ

320. Ἡ, ὅπερ ἐστὶν ἀμέλει τούτων, ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 0, 1, 2, 3, 4 κτ. παρέχει τὸς λογαριθμοὺς πάντων τῶν κατὰ τὸ ἐφεξῆς βαθμῶν $10^0.10^1.10^2$ κτ., εἴτ' ἐν τῷ 10, ἔχοντας δείκτην ὀλοχερῇ ἀριθμόν· ἀλλὰ γὰρ τῷ κατὰ 1 λογαριθμῷ ὅτιος 0, τῷ δὲ κατὰ τὸν 10 ὅτιος 1, οἱ λογάριθμοι τῷ 2, 3, 4 κτ. ἔσγε τὸν 10, ἔσονται πάντως κλασματικοὶ ἀριθμοί· ὥσ-αὐτως δὲ τῷ μὲν κατὰ τὸν 10 λογαριθμῷ ὅτιος 1, τῷ δὲ κατὰ τὸν 100 ὑπάρχοντος 2, οἱ τῶν μεταξὺ 10 ἔ 100 ἀριθμῶν λογάριθμοι ἔσονται 1 μετὰ τινος κλάσματος.

Ἐν γένει δὲ, ὁ ἐτινοσέν ἀριθμῷ, μὴ περιλαμβανόμενος ἐν τῇ δεκαπλάσιῳ προόδῳ $\div 1:10:100$ κτ, λογάριθμος ἔσεται κλασματικῷ.

321. Εὐτεῦθεν ἄρα ἐν παντὶ λογαριθμῷ δύο διακρίνονται ἀριθμοὶ, ὅτε ὀλοχερὴς, τετέστιν ὁ πρὸς ἀριστερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς γεγραμμένος χαρακτήρ (Ἀριθ. 224), καὶ οἱ κλασματώδεις δεκαδικοὶ χαρακτήρες, οἱ κατὰ δεξιάν· ὁ δὲ ὀλοχερὴς καλεῖσθαι εἴωθε τὸ χαρακτηριστικὸν τῷ λογαριθμῷ· ἔτι καὶ ἐπὶ τῷ λογαριθμῷ 1, 0791812, ὅς ἐστι τῷ ἀριθμῷ 12, ὁ μὲν 1 ὀλοχερὴς ἐστὶ τὸ χαρακτηριστικόν, πάντες δὲ οἱ ἐπόμενοι εἰσὶ δεκαδικοί.

322. Τὸ χαρακτηριστικὸν περιέχει ἀεὶ τοσαύτας μονάδας πλὴν μιᾶς, ἐξ ὧν χαρακτήρων σύγκειται ὁ ἀντιστοιχὸς αὐτῷ ἀριθμὸς, ἢ, ὁ ταυτὸν, οἱ χαρακτήρες τῷ ἀριθμῷ μονάδι ὑπερβάλλουσι τὰς τῷ ἀντιστοιχῷ λογαριθμῷ μονάδας· καὶ γὰρ, ὡς παντὶ ἐνεσὶν ἰδεῖν, τὸ χαρακτηριστικὸν ἀπάντων τῶν μέχρι 10 ἀριθμῶν ἐστὶ 0· τὸ δὲ τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 περιλαμβανομένων ἐστὶ 1· 2 δὲ τὸ πάντων τῶν μεταξὺ 100 καὶ 1000, καὶ ἐξῆς ἔτι· γνωστὸν ἄρα τῷ ἐν παντὶ λογαριθμῷ χαρακτηριστικῷ, αὐτὰ καὶ ἐξέσαι συναγαγεῖν, ἐξ ὧν σύγκειται χαρακτήρων ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ὥτινι ἀπανήκει ὁ λογαριθμὸς ἔτι· ἐξ ἐναντίας δὲ τῷ φυσικῷ ἀριθμῷ γνωσθέντος, γνωστήσεται καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν τῷ ἐν αὐτῷ λογαριθμῷ.

Εἰάν τὸ χαρακτηριστικὸν ᾗ 3, ἐκ τούτου συναχθήσεται, ὡς ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ὃ ἀπανήκει ὁ λογαριθμὸς, ἔχει χαρακτήρας 4· εἰάν δ' ἀριθμὸς τις συγκένηται ἐκ 3 χαρακτήρων, γνωστήσεται ἐκ τούτου, ὅτι ὁ τῷ κατ' αὐτὸν λογαριθμῷ χαρακτηριστικὸς ἐστὶ 2.

323. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εὑρίσκονται ἐν ἰδίῳ τεύχει οἱ

πίνακες τῶν λογαριθμῶν, καὶ τῶν ἡμιτόνων, ἅμα δὲ καὶ ἡ ἀναγκαία ἐρμηνεία τῆς αὐτῶν χρήσεως. (*)

324. Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς τῶν κλασμάτων ἀτοπίας, δεῖν ἐνέστησαν προσεπιγράψαι κατὰ τὰ δεξιὰ τῶν ἐν τοῖς τῷ 10 βαθμοῖς δεικτῶν τὰλάχισον 7 δεκαδικὰ (Ἀριθ. 232) ὅθεν ἀντὶ τῆς πρόδοις $\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \kappa. \tau.$, πρόεισιν ἡ $\div 10^0,0000000 : 10^1,0000000 : 10^2,0000000 : 10^3,0000000$ κτ. ἐπὶ τοίνυν τῆς καινῆς πρόδοις $\div 10^0,0000000 : 10^1,0000000$ κτ. αἰεὶ ἐπαύξοντες μονάδαι τὰ ἐπὶ τῷ δείκτῃ τῷ πρώτῳ ὄρα δεκαδικὰ, ἀπ' ἀρχῆς τῷ 100,0000000 μέχρι τέλους τῷ 101,0000000 ἔξομεν πρόδον γεωμετρικὴν συγκεκλιμένην ἐκ δέκα μιλιονίων ὄρων, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι 100,0000000, ὁ δὲ δεύτερος 100,0000001, ὁ δὲ τρίτος 100,0000002 ... ὁ δὲ δέκατος 100,0000009 ὁ δὲ πρὸ τῷ ἐσχάτῳ 100,9999999.

325. Ἐν τοῖς παντοίοις τατοιῶν ὅροις, οἵτινες ἅπαντες βαθμοὶ εἰσιν ἐπιδήλως τῷ 10, εἴς τις ἰσοδυναμήσει τῷ 2, μετὰ βραχὺ δὲ ἕτερός τις ἰσοθενήσει τῷ 3, καὶ ἐξῆς ὅτως ἕως τῷ 10 ὡσαύτως ἀπ' ἀρχῆς τῷ 101,0000000 μέχρι τέλους τῷ 102,0000000, ἀποληφθήσεται πρόδος δέκα μιλιονίων περιέχουσα ὄρας, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι 101,0000000, ὁ δὲ δεύτερος 101,0000001 κτ. ἐν αὐτοῖς δὲ τοῖς ὅροις ὁ πρῶτος μὲν ἰσοδυναμήσει τῷ 10, ἕτερος δέ τις τῷ 11, καὶ

(*) Τοιοῦτο Γεώργιος Βέγγας ἐξέδοτο ἐν Λειψία τὸ δεύτερον κατὰ τὸ 1800 ἔτος, ὃ ποθ' ἡμῖν, εὐκαιρίας τυχοῦσι, μεταφραζέν ἐκδοθήσεται· ἔστι γὰρ ἐπιεικῶς καὶ τοὺς πίνακας, εἴτι καὶ ἄλλο πλήρες, καὶ τὰ περὶ τῆς εὐρέσεως τῶν λογαριθμικῶν τύπων εὐμεθόδως πάνυ πραγματευόμενον, καὶ τὴν τῶν πινάκων χρῆσιν εὐκρινέστατα ἐξημυνόμενον.

ἔξῃς ἔσως ἔσγε τὸν 100. Ταῦτὸν δὲ ρητέον περὶ πάντων τῶν ὄρων τῶν ἐν τῇ δεκαπλῇ προσῶ $\div 100,0000000$: $101,0000000$: $102,0000000$: $103,0000000$ κτ.

326. Ἀπαντες ἄρα οἱ Φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἔσως ἔσονται βαθμοὶ τῷ 10, οἱ δὲ τούτων δείκται γενήσονται οἱ αὐτοὶ λογάριθμοι τούτων τῶν ἀριθμῶν.

Ἀλλὰ γὰρ ἴν' εὐρεθῇ, ὅς τις ἐστὶν ὁ ἰδιαίτερος δείκτης τοῦ τοῦ 10 βαθμοῦ, ἰσχυμένου παντὶ φυσικῷ ἀριθμῷ, εἴτ' οὖν ὁ λογάριθμος παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, τῷ ἔστιν, ὅπερ ὑπὸ Νεπέρου, ἀνδρὸς εὐγενῆς, τῶν λογαρίθμων εὐρέτε, ἀνέπτυκται, καὶ μὴν καὶ ἄλλων, ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης ἐκπονησάντων· ἡμεῖς δὲ ἤδη ιδέαν οἶόν τινα τῆς τούτων εὐρέσεως παράσχωμεν ἐπὶ τῷ κατὰ τὸν 9 ἀριθμὸν λογαρίθμῳ.

327. Ἰν' ἔν' εὐρωμεν τὸν τῷ 9 λογάριθμον, ὑποσυνάπτωμεν τῷ 1 καὶ 10 ἑκάτερω ἑπτὰ δεκαδικά· ὅθεν ὁ μὲν ἔσται 1,0000000, ὁ δὲ 10,0000000· ζητῶμεν εἴτα μεταξὺ αὐτῶν διὰ πράξεων πολλῶν ἱκανῆς μέσας γεωμετρικῶς ἀναλόγους μέχρι τῷ 9,0000000, ὅς ἔστιν ἴσος τῷ 9· γράφομεν ὡσαύτως τῷ 0 λογαρίθμῳ τῆς 1, καὶ τῷ 1 λογαρίθμῳ τῷ 10 ἑκατέρω ἑπτὰ δεκαδικά· ὅθεν ὁ μὲν ἔσται 0,0000000, ὁ δὲ 1,0000000· καὶ ζητῶμεν μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, τὸν δίκην λογαρίθμῳ συσχοῦντα τῷ ἄρτι εὐρημένῳ μέσῳ γεωμετρικῶς ἀναλόγῳ.

ΠΡΑΞΙΣ ΠΡΩΤΗ. Εἰς εὐρεσιν τῷ πρώτῳ μέσῳ γεωμετρικῶς ἀναλόγῳ μεταξὺ 1,0000000, καὶ 10,0000000, γράφομεν $\div 1,0000000$: x : $10,0000000$ · ὁ ἔν' μέσος ζητούμενος ἀνάλογος x ἔσται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῷ

ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένης, ἢ $\sqrt{10,00000000000000} = 3,1622777$ πλὴν ἐνὸς μικρᾷ δεῖν δεκαμυλινιστημορίῃ (254).

Ζητῶμεν ἐξῆς τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῆ 0,0000000 λογαρίθμου τῆς 1, καὶ τῆ 1,00000000 λογαρίθμου τῆ 10 κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον ἔτω $\div 0,0000000 \cdot \chi \cdot 1,0000000 (108)$, τὸ χ ἄρα ὀφείλει ἐξισῆσθαι τῷ ἡμίσει τῆ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὁρος ἐστὶν ἴσος τῷ 0, ἐπομένως $\chi = 1,0000000 = 0,5000000$, ὅς ἐστιν ὀζητέμενος μέσος ἀριθμητικῶς ἀνάλογος, καὶ δὴ ὁ λογάριθμος τῆ ἄρτι εὑρημένῃ μέσῃ γεωμετρικῶς ἀναλόγῃ 3, 162 κτ.

ΠΡΑΞΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ. Ἐπεὶ ὁ εὑρέσις μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος ἐλάττων ἐστὶν ἢ 9,0000000· τῆτα δὴ χάριν ζητῶμεν δεύτερον μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῆ 3,1622777 καὶ 10,0000000 γράφοντες $\div 3,1622777 \cdot \chi : 10,0000000$ · καὶ πράξει ὁμοίᾳ τῇ προτέρᾳ εὑρήσομεν $\chi = 5,6324132$ δεύτερον μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον· ζητῶμεν εἴτα τὸν λογάριθμον τῆδε τῆ μέσῃ ἀναλόγῃ, εἴτ' ἔν τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων λογαρίθμων τῆς πρὸ ταύτης συνεχῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἔτω $\div 0,5000000 \cdot \chi \cdot 1,0000000$, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ἡμίσει τῆ τῶν ἄκρων ἀθροίσματος, εἴτ' ἔν 0,7500000, λογάριθμος τῆ 5,6234132.

Τῆς δὲ πράξεως ὁμοίως ἐπαναλαμβάνομένης εὑρήσομεν τρίτον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο προλαβόντων ἰσῶν γεωμετρικῶς μὲν τὸν 7,4989421, ἀριθμητικῶς δὲ, εἴτ' ἔν λογάριθμον τῆδε τῆ γεωμετρικῆς, τὸν 0,8750000.

Διὰ δὲ τῆς τετάρτης πράξεως τέταρτος γεωμετρικῶς μὲν μέσος ἀνάλογος εὑρεθήσεται ὁ 8,6596432, ἀριθμητικῶς δὲ ὁ 0,9375000.

Ο' δὲ γεωμετρικῶς μέσος ἀνάλογος 9,30572204, ὁ διὰ τῆς πέμπτης εὐρισκόμενος πράξεως, ἐπεὶ ὑπερέχει τῷ ζη-
ταμένῳ 9,0000000, ζητητέον ἤδη μέσον ἀναλογον μεταξὺ
τάτετε καὶ τῷ 8,65 κτ. ἔτω $\div 8,6596432 : \chi : 9,305$
7204· ὅθεν προκύψει κοινὸς μέσος ἀνάλογος γεωμετρικῶς
8,6768713· ὁ δὲ αὐτῷ λογάριθμος, τὸ ἡμισὺ ἐστὶ τῶ ἀθροί-
σματος τῶν κατὰ τὰς προηγησαμένων ὁρὰς λογαρίθμων,
εἴτ' ὅν 0,9531250.

Τῷδε δὲ τῷ μέσῳ γεωμετρικῶς ἀναλόγῳ 8,92 κτ. ἐλάτ-
τους ὅντος τῷ ζηταμένῳ, εὐρίσκωμεν καινὸν ἄλλον μεταξὺ
τάτετε καὶ τῷ 9,3057204, καὶ ἔτις ἐξῆς μέχρις εἰκοσῆς
πέμπτης πράξεως, ἐξ ἧς πρᾶξις ὁ 9,0000000, εἴτ' ὅν
9, καὶ λογάριθμος αὐτῷ ὁ 0,9542425.

Ἰδὲ δὴ ὑπ' ὧν καὶ ὁ πίναξ τῶν δε τῶν
πράξεων.

	Μέσοι γεωμε- τρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογά- ριθμοι.
α'.	1, 0000000 3, 1622777 10, 0000000	0, 0000000 0, 5000000 1, 0000000
β'.	10, 0000000 5, 6234132 3, 1622777	1, 0000000 0, 7500000 0, 5000000
γ'.	10, 0000000 7, 4989421 5, 6234132	1, 0000000 0, 8750000 0, 7500000
δ'.	10, 0000000 8, 6596432 7, 4989421	1, 0000000 0, 9375000 0, 8750000
ε'.	10, 0000000 4, 3057204 8, 6596432	1, 0000000 0, 9687500 0, 9375000

	Μέσαι γεωμε- τρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογά- ριθμοί.
ζ.	9, 3057204 8, 9768713 8, 6596432	0, 9687500 0, 9531250 0, 9375000
ζ.	9, 3057204 9, 1398170 8, 9768713	0, 9375000 0, 9604375 0, 9531250
η.	9, 1398170 9, 0579777 8, 9768713	0, 9609375 0, 9570312 0, 9531250
θ.	9, 0579777 9, 0173333 8, 9768713	0, 9570312 0, 9550781 0, 9531250
ι.	9, 0173333 8, 9970796 8, 9768713	0, 9550781 0, 9541015 0, 9531250
ια.	9, 0173333 9, 0072008 8, 9978796	0, 9550781 0, 9545898 0, 9541015
ιβ.	9, 0072008 9, 0021388 8, 9970796	0, 9545898 0, 9543457 0, 9541015
ιγ.	9, 0021388 8, 9996088 8, 9970796	0, 9542457 0, 9542236 0, 9551015
ιδ.	9, 0021388 9, 0008737 8, 9996088	0, 9543457 0, 9542846 0, 9542236
ιε.	9, 0008737 9, 0002412 8, 9996088	0, 9542846 0, 9542541 0, 9542236
ισ.	9, 0002412 8, 9995250 8, 9996088	0, 9542541 0, 9542388 0, 9542236
ιζ.	9, 0002412 9, 0000831 8, 9999250	0, 9542541 0, 9542465 0, 9542388

	Μέσσι γεωμε- τρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογά- ριθμοι.
ιη.	9, 0000831 9, 0000041 8, 9999250	0, 9542465 0, 9542427 0, 9542388
ιβ.	9, 0000541 8, 9999650 8, 9999250	0, 9542271 0, 9542408 0, 9542388
κ.	9, 0000541 8, 9999845 8, 9999650	0, 9542408 0, 9542421 0, 9542408
κα.	9, 0000541 8, 9999943 8, 9999845	0, 9542278 0, 9542422 0, 9542421
κε.	9, 0000541 8, 9999992 8, 9999943	0, 9542427 0, 9542424 0, 9542422
κγ.	9, 0000541 9, 0000016 8, 9999992	0, 9542427 0, 9542425 0, 9542424
κδ.	9, 0000016 9, 0000004 8, 9999992	0, 9542425 0, 9542424½ 0, 9542424
κε.	9, 0000004 8, 9999998 8, 9999992	0, 9542424½ 0, 9542424½ 0, 9542424
κς.	9, 0000004 9, 0000000 8, 9999998	0, 9542424½ 0, 9542424½ 0, 9542424½

Προστέθη δὲ ἐν τῇ κδ. πράξει ἡ ἐφεξῆς ἐπὶ τῶν λο-
γαριθμῶν τὰ κλάσματα εἰς πλείω εὐκρίνειαν· ἤρξαντο
γὰρ ἐκείθεν ἰσάλληλοι γίνεσθαι οἱ λογάριθμοι· ἕκῃν λο-
γάρημος τῷ 9, 0000000, εἴτ' ἐν τῷ 9, εἰσιν ὁ 0, 9542424½.
λαμβάνεται μέντοι ἐν τῇ χρήσει ὡς λογάρημος τῷ 9,
εἴτε ὁ 0, 9542424, εἴτε ὁ 0, 9542425, ὅτι ἀνεπαρίσθη-
τον ὅλως τὸ διάπτωμ.

Διὰ τῆς αὐτῆς τῶν πράξεων ὁδὸ ἰσθιν εὐρεθήσεται ὅ,τε τῷ 8 καὶ τῷ 7 οἱ λογάριθμοι.

328. Εὐρόντες τέλος τὸν λογάριθμον τῷ 9, τῷ 8 καὶ τῷ 7, ἀταλαιπώρως ἤδη εὐρήσομεν τὸν τῷ 2, λαμβάνοντες τὸ τρίτον τῷ κατὰ τὸν 8 (318), τὸν δὲ τῷ 4, διπλασιάζοντες τὸν τῷ 2 (317), τὸν δὲ τῷ 3, τὸ ἡμισυ λαμβάνοντες τῷ κατὰ τὸν 9 (318), τὸν δὲ τῷ 5, ἀφαιρῶντες τῷ κατὰ τὸν 10 ὡς διαιρετέον τὸν τῷ 2 ὡς διαιρέτω (316)· τὸν δὲ τῷ 6, συνάπτοντες τῷ τῷ 2 τὸν τῷ 3 (315.)

329. Ὡσαύτως δὲ, συνάπτοντες, ἀφαιρῶντες, πλαπλασιάζοντες, ῥᾶστα εὐρήσομεν τῆς τῶν ὑπὲρ τὸν 10 ἀριθμῶν λογαρίθμους ὄντων ἥτοι βαθμῶν τῶν ἐλασσόνων ἢ 11 ἀριθμῶν, ἢ γινομένων ἐν γένει ὑπὸ δύο παραγόντων, ὧν ἤδη εὑρηται οἱ λογάριθμοι.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 11, 13, 17, 19 κτ. ἀποτέυξεται τῶν ἐλπίδων, εἴ τις ζητήσῃ τῆς τούτων λογαρίθμους ὡσαύτως· μετιένων ἢν τῆς τούτων χρεῶν, καθάπερ καὶ τὸν τῷ 9.

330. Χρηθαι δὲ δεῖ ἐπὶ τῇ εὐρέσει τῶν λογαρίθμων πλείοσι δεκαδικοῖς, ἵν' ἐξῇ τὸν τῷ ἀληθεῖ μᾶλλον πελάζοντα λογάριθμον εὐρίσκειν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10, 10 καὶ 100 κτ. ἀριθμῶν· ἐπεὶ γὰρ συχνάκις ἀδύνατον εὑρεῖν τελείαν τετραγωνικὴν ρίζαν, ἥτις εἴη ὁ ζητούμενος μέσος ἀνάλογος, ἐπάνανγκες καὶ τὸν τῷ λογάριθμον ἀτελῆ εἶναι· ἀλλὰ γὰρ διὰ τῶν δεκαδικῶν ἔγγιον γινόμενα τῆς ἀληθῆς ρίζης παντὸς βαθμοῦ εἰς ἄπειρον (144)· εἰ ἢν χρησώμεθα ἑπτὰ δεκαδικοῖς, ἢ ἑλπειψις τῶν λογαρίθμων ἔσιν ἐξ ἀνάγκης ἐλάσσων μονάδος τῆς ἐνδεξιά τῶν δεκαδικῶν ἐσχάτης τάξεως, ὅ ἐστιν ἐλάσσων ἢ $\frac{1}{10000000000}$.

331. Τῷ δὲ τὸ ἔλειμμα μᾶλλον ἔτι ἀναιπαίθητον ἔσαι, εἰ, καθάπερ ἐπὶ πολλῶν λογαριθμικῶν πινάκων, τεθῶσι 10, μᾶλλον δὲ 14 δεκαδικά.

Ἐξέσαι δὲ ἔδεν ἥσσαν εἰς κατάσρῳσιν λογαριθμικῶν πίνακος, λαβεῖν ἄλλην πρόοδον, ἢ τὴν δεκαπλῆν, εἰ γὰρ ἐπὶ τῆς προόδου $\frac{\dots}{\dots} \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3$ κτ. ὑποτεθῇ πρὸς τὸ δοκῶν $\alpha=2$, ἡ πρόοδος $\frac{\dots}{\dots} \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2$ κτ. γενήσεται $\frac{\dots}{\dots} 1 : 2 : 4 : 8$ κτ. αἱ δὲ δύο πρόοδοι Β, Δ (313) ἀποκατασταθήσονται $\frac{\dots}{\dots} 1 : 2 : 4 : 8$ κτ. Β,

$\frac{\dots}{\dots} 0 . 1 . 2 . 3 .$ κτ. Δ. ὣτως ἔν

ὁ τῆς Δ ὅρος 2 ἔχει λογάριθμος τῆς Β ὅρα 4· ὁ δὲ 3 ἔσαι λογάριθμος τῆς 8 ἢ ἐφεξῆς ὡσαύτως· ἀλλὰ πάσης γὰρ ἄλλης ἐπίπροθεν ἄγουσιν οἱ Γεωμέτραι τὴν χωρῆσιν κατὰ τὸ δεκαπλῆν διὰ τὴν μεγάλην εὐμάρειαν τῶν τῶν δεκαδικῶν ὑπολογισμῶν.

Λογισμὸς τῶν ἐν ταῖς κλασματικαῖς

ποσότησι λογαρίθμων.

332. Ἐὰν διαιρεθῇ α^1 διὰ α^2 πηλίκον πρόεισιν α^{-1} (55)· διδομένης ἄρα τῷ α δυνάμεως ἡστινὸς ἔν, μείζονος μέντοι ἢ 1, α^1 διαιρεθὲν διὰ α^2 αἰεὶ προάξει κλάσμα τῆς μονάδος ἑλάττω· ἐκὲν τὸ μὲν α^{-1} , ὃ ἐστὶ πηλίκον τῆς α^1 διαιρεθέντος διὰ α^2 , ἐξείκονίζει κλάσμα τῆς μονάδος ἥττω, ὃ δὲ δείκτης — 1, ὁ λογάριθμος δηλονότι τέτε τῆς πηλίκου, ἔστιν αἰεὶ λειπτικός.

333. Ἐν γένει δὲ τῆς 1 λογαρίθμος ὄντος 0 (315) ὁ παντὸς κλάσματος, ἐλάττωτος τῆς μονάδος, λογάριθμος ἔσαι ἐλάττων τε 0, τουτέστι λειπτικός· τὰν ἀπλῶν, δείκτης λειπτικός κείμενος ἐπὶ γράμματος ὡς

ποταθήμεναι ἐμφανθῆναι ἀριθμὸν, τῆς μονάδος ὑπερκειμένηον, σημεῖαι πέντε καὶ σμα τῆς μονάδος ἐλάττω (149).

ὅκην ἐάν ἢ $\alpha = 10$, ἐπεὶ $\alpha^{-1} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2} = \frac{1}{10} = \frac{1}{\tau\theta}$,

$\alpha^{-2} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2} = \frac{1}{\tau\theta\theta}$ ἢ ἐξῆς ἀσπίτως τ' ἀνέκτα-

λιν δι' λογαριθμὸς τῆ μέν $\frac{1}{\tau\theta}$ ἔσται — 1, τῆ δι' $\frac{1}{\tau\theta\theta}$ ἔσται — 2, κτ.

334. Παρὰ ταῦτα δι', ἐάν ἐπὶ τῆ συνήθους τῶν λογαριθμῶν συνήματος, γητέσιν, ὅ βέλους ἔσιν ἢ δεκάπλῃ πρόοδος, ἀντίηθῃ ἢ ἐλάττωθῃ μὲν ἢ πλείοσι μονάσι τὸ ἡμετηροσινὸν τῆ καὶ ἕνα τινὲ ἀριθμὸν λογαριθμῶν, μὴδ' ὅ, τῆς τῶν δεκάδικῶν μεταστροφῶν, τῶνδε διὰ 10 ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιασθήσεται ἢ διαιρηθήσεται, ὅσα μονάδες ᾗται προσεθήσονται ἢ ἀφαιρεθήσονται*). ἐάν, φέρεῖ εἶπεν, τὸ τῆ κατὰ τὸν 180 λογαριθμὸς 2, 255273 ἡμετηροσινὸν μὴδὲ ἀντίηθῃ, γημενῖται ὁ 3, 255273 ἔσται λογαριθμὸς τῆ 1800 τῶν κατὰ δι', ἐάν ἀπ' αὐτοῦ μὴδὲς ἀφαιρεθῇ, ὁ 1, 255273 ἔσται λογαριθμὸς τοῦ 18.

335. Τέλει δι', διότιν ἀριθμὸν φυσικῶν μετρίων τῆ 900, μὴδὲν ἀπ' ἢ μὴδὲ, ἢ διὰ μονάσι διαιρούμενον, καὶ αἱ διαιρούμαι αὐτῶν μὴ ἔσιν ἀνελιοι τῆς τῶν ἐπ' αὐτῆς λογαριθμῶν, διόναται μέντοι ἐκλαμβάνεσθαι τοιαῦται διόχα τινὸς ἀξιολόγη διαιρέματος, ὃ δι' τοσούτων ἐλάττωθήσεται, ὅσα μετρίος ἔσονται αἱ ἀριθμοί. ἐ-

*) Εἰς πλείους μέρητοι κατὰλόγῳ τῶν λογαριθμῶν ἐπὶ παρακῆς ἔχουσιν αὐτὸ ὅλον τῆς, παρὰ αὐτὴν εἰρηται (323) λογαριθμὸς πέντε καὶ.

πὶ τῶν ἀριθμῶν, φέρε, 900, 901, 902, τῖθεμένων ἐξ μόνων δεκαδικῶν, ἔχομεν τὴν ἐξῆς ἀναλογίαν: ὁ 2 (διαφορὰ τῆ 902 πρὸς 900) πρὸς τὴν 1 (διαφ. τῆ 900 πρὸς 901) λόγον ἔχει, ὃν ὁ 964 (διαφ. τῆ κατὰ τὸν 900 λογαριθμοῦ πρὸς τὸν τῆ 902) πρὸς τὸν 482 (διαφ. τῶν τῆ 900 καὶ 901).

Ἐκ δὲ δὴ τούτων ἐξαυρόμεθα τὴν τῶν ἐφεξῆς, ὧν πάνυτι χρηζόμεν ἐν τῷ τῶν λογαριθμῶν λογισμῷ προβλημάτων, ἐπίλυσιν.

336. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Κλάσματος Δοθέντος εὑρεῖν τὸν αὐτῆ λογαριθμόν.

ΛΤΣΙΣ. Ἀφ' ἑλε ἀπὸ τῆ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν λογαριθμοῦ τὸν τῆ παρονομαστῆ· ἢ ἐν διαφορὰ ἔσαι τῆ κλάσματος λογαριθμὸς, εἴτ' ἐν τῆ πηλίκῃ, ὃ παρίσχησιν ἀληθῶς τὴν δύναμιν τῆ κλάσματος.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶν γὰρ κλάσμα πηλίκον ἐστὶ σεσημειωμένον, πρὸς ἢ τὴν τῆ λογαριθμοῦ εὔρεσιν ἀφ' ἑλεν χρὴ τὸν λογαριθμόν, εἴτ' ἐν τῷ δείκτῃ τῆ διαιρέτε, ἀπὸ τῆ λογαριθμοῦ, εἴτ' ἐν τῆ δείκτε τῆ διαιρέτε (316).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἰς εὔρεσιν τῆ λογαριθμοῦ τῆ κλάσματος $\frac{7}{9}$, ζητητέον ἐν ταῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τὸν τῆ 7 λογαριθμόν, ὅς ἐστι, 0, 845098, καὶ τὸν τῆ 9, ὅς ἐστι 0, 954243· ἐπεὶ δὲ ὁ τῆ παρονομαστῆ, ὅς ἐστιν ἀφαιρέτεος, μείζων ἐστὶ τῆ πρώτε, ἀφ' ἢ ἔσαι ἢ ἀφαίρεσις, ἀφαιρέτεον τὰνάπαλιν, εἴτ' ἐν τὸν πρώτον ἀπὸ τῆ δευτέρου, καὶ γραπτέον ἐν ἀποφατικῷ σημείῳ τὴν διαφορὰν· ὅτως ἐν λογαριθμὸς τῆ $\frac{7}{9}$ ἐστὶν ὁ — 0, 109145.

337. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὸν λογαριθμόν ἀριθμοῦ ὀλοχρεῖς σὺν κλασματώδει.

ΛΤΣΙΣ. Ἀνακτέον ἐπὶ κλάσμα τὸν ὀλοχρεῖ (Α'.

ριθ. 170), ἢ ζητητέον τὸν λογάριθμον τῷ ὅλκῳ κλάσματος, ὡς ἀνωτέρω (336).

Ι'ν' εὐρεθῇ ὁ λογάριθμος τῷ $4 + \frac{2}{3}$, ἀναχθέντος τοῦ 4 ἐπὶ τρίτα, ἢ συναφθέντος τῷ $\frac{2}{3}$, ζητητέον τὸν τῷ $\frac{1}{3}$ λογάριθμον, ἀφαιρῶντας τὸν τῷ 3 ἀπὸ τῷ κατὰ τὸν 14 λογαριθμῷ.

338. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὐρεῖν τὸν λογάριθμον ὁ λοχερεῖς ἀριθμῷ πάντων τῶν ἐν τοῖς πίναξιν μεζονος.

ΛΤΣΙΣ. Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς ὁ 580420. Ξετέον δὲ ὅτι ὁ μέγιστος τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμῶν ἐστὶν ὁ 10000· ἀποκοπτέον ἔν τῷ προτεθέντος ἀριθμῷ ἐκ δεξιῶν ἰκανὸς χαρακτῆρας, ὥστε τὸν λειπόμενον εὐρίσκεισθαι ἐν τοῖς πίναξιν, δύο φέρει εἰπεῖν χαρακτῆρας· λείπεται ἔν 5804, ὃ λογάριθμος εὐρίσκεται ἐν τοῖς πίναξιν, ὁ 3,763727· ἀνζητέον δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τῷδε τῷ λογαριθμῷ τοσαῖς δε μονάσιν, ὅσοι χαρακτῆρες ἀφῆρηνται ἀπὸ τῷ δοθέντος ἀριθμῷ, δύο δηλονότι ἐπὶ τῷ παρόντος ὑποδείγματος· πρόεισιν ἔν 3,763727 λογάριθμος τῷ $5804 \times 100 = 580400$ (334).

Ἰνα δ' ἐκ τούτου εὐρεθῇ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τῷ μὲν 580400 ἔχῃ, τῷ δὲ 580420, ζητητέον ἐν τοῖς πίναξιν, πόσῳ ὁ λογάριθμος τῷ 5805 ὑπέρεκειται τῷ κατὰ τὸν 5804. αὕτη ἔν ἡ ὑπεροχὴ, ἡ ἢ διαφορὰ εὐρεθίσεται σεσημειωμένη κατὰ πλευρὰν τῶν λογαριθμῶν· ἔσαι δὴ διαφορὰ μεταξὺ τῷ κατὰ τὸν 5804 ἢ 5805 λογαριθμῶν ὁ 75· εἰάν ἔν αὐξηθῇ δις μονάσι τὸ τῷ 5805 λογαριθμῷ χαρακτηριστικὸν 3, ἀποληφθήσεται ὁ λογάριθμος τῷ $5805 \times 100 = 580500$ · ἐξῆς δὲ φημί· εἰάν ὁ 100, διαφορὰ τῷ 580500 ὑπὲρ τὸν 580400, ἔχη 75 διαφορὰν τῶν λογαριθμῶν αὐτῶν, πόσῳ παρέρχεται

ὁ 20; (335)· ἐντεῦθεν ἡ ἀναλογία $100 : 75 :: 20 : \chi$
 $= 15$ · συναπτομένε ἄρα τῷ 15 τῷ 5, 763727 λογα-
 ριθμῷ τῷ 580400, ποριθήσεται ὁ ζητούμενος λογάριθ-
 μος τῷ 580420.

339. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν ἀριθμὸν φυσικόν,
 ᾧτινι ἐκπλήκει λογάριθμος μὴ ἐκπίπτων τῶν ἐν τοῖς πί-
 νάξιν ὁρίων.

ΛΤΣΙΣ. α'. Εἰάν τις ο λογάριθμος κείται ἐν τοῖς
 πίναξιν, ἀπόνως εὑρεθήσεται κατ' ἀρισερὰν αὐτῷ ὁ φυσικὸς
 ἀριθμὸς ᾧτινι ἐκπλήκει. β'. Εἰάν ὁ δεδομένος λογάριθμος
 ὑπάρχη μεταξὺ τῶν ἐν τοῖς πίναξι περιεχομένων, εἰ ἔσι
 μείζων μὲν τῷ πρώτῳ, ἐλάττω δὲ τῷ δευτέρῳ, ὡς ἔσι,
 φέρεῖ εἰπεῖν, ὁ 3, 928961 ὅσις ἐστὶ μείζων μὲν τῷ λογαριθ-
 μῷ τῷ 8491, ἐλάττω δὲ τῷ 8492, ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς,
 ᾧτινι ἔτος ἐκπλήκει, ἢ ὅς ἐστιν ὁ ζητούμενος, ἔσαι 8491
 σύντινι κλάσματι.

Γ' ἄρα τετὶ τὸ κλάσμα εὑρεθῶ, φημί: εἰάν 51.
 διαφορὰ εὑρισκομένη ἐν τοῖς πίναξι μεταξὺ τῷ λογαριθμῷ
 τῷ 8491 ἢ τῷ 8492, διδῶ 1 μεταξὺ τούτων τῶν δύο
 ἀριθμῶν διαφορὰν, πόσον πρέζεται ὁ 2, διαφορὰ μετα-
 ξὺ τῶν λογαριθμῶν τῷ 8491 καὶ τῷ 8492 μετάτινος
 κλάσματος; ἐκ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν $51 : 1 : 2 : \chi = \frac{2}{51}$
 ἔσαι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $8491 + \frac{2}{51}$.

340. Α' Μ' εἰάν ἀριθμὸς, ὡς ἐνταῦθα, ὁ μεταξὺ
 δύο προσεχῶν ἀριθμῶν κειμένων ἐν τοῖς πίναξιν, ἥττων ἢ
 τῷ 900, αἱ διαφοραὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐκ' ἂν τῷ
 λαμβῶν ἐκληφθεῖσαν ὡς ἀνάλογοι ταῖς διαφοραῖς τῶν ἐν
 αὐτοῖς λογαριθμῶν, τοσάτω δὲ ἥττων, ὅσῳ ὁ φυσικὸς ἀ-
 ριθμὸς ἔσεται ἐλάττω· ὅπερ εὐχερῶς φανήσεται, εἰ
 ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν πινάκων δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ, ἢ αἱ δια-

φοραὶ τῶν ἐν αὐτοῖς λογαριθμῶν, ἐν τούτῳ ἔν ἑν εὐρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ὥστιν ἐπανήκει ὁ δεδομένος λογαριθμὸς, τοῖς ἐξῆς χρήσειν.

Ἐς ὧ γὰρ δοθεὶς λογαριθμὸς ὁ 1,099680, ὃς ἀπαντᾷ μεταξὺ τῷ κατὰ τὸν 12 καὶ τῷ κατὰ 13· ἔκβη ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ὥστιν ὅτος ἐπανήκει, ἔσαι 12 σύντινι κλάσματι· ἑν ἑν εὐρεθῇ τυτὶ τὸ κλάσμα, αἰξομεν (334) τὸ χαρακτηριστικὸν τῷ προτεθέντος λογαριθμοῦ τοσαῖς δεμονάσι, ὥστε μὴ ὑπερέχειν τῶν περιλαμβανομένων ἐν τοῖς ἀνὰ χεῖρας πίναξι, δύο, φέρ' εἰπεῖν, μονάσιν· ὅθεν ἔσαι 3,099680, λογαριθμὸς ὡς ἐγγύς ἐπανήκων τῷ 1258· ἀποκόπτομεν δὲ εἴτα ἐκ δεξιῶν τυτὶ τῷ ἀριθμῷ δύο χαρακτῆρας ὡς δεκαδικὰς, ἐπεὶ (334) τὸ χαρακτηριστικὸν δυοὶ μονάσιν ἠΐξήσαμεν· ἔσαι ἔν 12,58 ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πλὴν σχεδὸν ἑξῆς (Α'ριθ. 225).

341. Ἐάν δ' ἐπὶ τῆς τελευταίας περιπτώσεως ἢ τῷ λογισμῷ ἀκριβεία ἀπαιτῇ ἐπὶ τῶν λογαριθμῶν πλείω ἢ ἐξ δεκαδικῶν, ἐφαρμοσέον τοῖς ἐλάττωσιν ἢ 2000 τὰ ἤδη εἰρημένα ἐπὶ τῶν ὑπὲρ 900 ἀριθμῶν· δυοῖν γὰρ ἀριθμῶν οἱ λογαριθμοί, ὅσῳ πλείω περιέχουσι δεκαδικὰ, τοσάτω πλείω περιέξουσιν καὶ αἱ τῶν λογαριθμῶν αὐτῶν διαφοραὶ, καὶ δὴ ἀνεπαιδιώτερον αἱ τῶν λογαριθμῶν καὶ τῶν ἀριθμῶν διαφοραὶ τῆς ἀναλογίας ἐκπεσύνται.

342. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Εὐρεῖν ἀριθμὸν φυσικόν, ὥστιν ἐπανήκει λογαριθμὸς δοθεὶς, ὑπερκεῖμενος τῶν ἐν τοῖς πίναξι περιεχομένων.

ΛΤΣΙΣ. Δεδότω ὁ λογαριθμὸς 9,797299· ἀφαιρέσειν ἔν τῷ κατ' αὐτὸν χαρακτηριστικῷ τοσαύτας μονάδας, ὥστε μὴ ὑπερέχειν τὸν λειπόμενον τῶν ἐν τοῖς ἀνὰ χεῖρας πίναξι περιεχομένων· ὁ φέρ' εἰπεῖν μονάδας· γειήσεται ἔν ὁ

δοθεὶς 3, 797299, ὅς ἐστι μεταξὺ τῆ κατὰ τὸν 6271 καὶ τῆ κατὰ τὸν 6270· ὁ τῆτε ἄρα ἀριθμὸς ἐστὶν 6270 μετὰ τινος κλάσματος, ὅστινος εὐρεθέντος κατὰ τὸν ἄρτι δεδειγμένον τρόπον (341) ἐκπορίζεται ὁ ἀριθμὸς $6270 + \frac{3}{8}$ · ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰ ἀπὸ τῆ ἐν ἀρχῇ δεδομένου λογαριθμοῦ ἀφαιρεθέντα ἐξ δεκαδικῶν, πολλαπλασιασθέν τὸν 6270 $+ \frac{3}{8}$ ἐπὶ 1000000 (Ἀριθ. 200)· ἐστὶν ἄρα ὁ τῆ ἐν ἀρχῇ δοθέντος λογαριθμοῦ ἀριθμὸς $627000000 + \frac{1100000}{8}$, εἴτ' ἐν ἀναγωγῇ τῆ κλάσματος ἐφ' ὅλου χερῇ $6270449275 + \frac{3}{8}$.

343. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'. Λειτουργικῶς λογαριθμοῦ δοθέντος, εὐρεῖν τὸν οἰκείον αὐτῷ ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνάγκη πᾶσα κλάσμα εἶναι τὸν ἀριθμὸν τόνδε, τῆς μονάδος ἑλαττον (333)· ἔσω τῶνν δοθεὶς λογαριθμὸς ὁ — 3, 029789· συναπτεόν ἐν τῷ τῆτε χαρακτηριστικῷ — 3, μονάδας τινὰς ὑπαρκτικὰς, φέρ' εἰπεῖν, 5· ἢ ὅπερ ταύτῳ, ἀφαιρετέον τὸν 3, 029789 ἀπὸ τῆ 5, 000000· ἔκθεν καταλειφθήσεται 1, 970211 λογαριθμὸς ἀριθμῷ, κειμένῳ ἐν τοῖς πίναξιν μεταξὺ 93 καὶ 94. Θῶμεν ἔν ὡς ἐστὶν ὁ ζητούμενος· ἐπεὶ δὲ 5 συνήψαμεν τῷ τῆ δοθέντος λογαριθμοῦ χαρακτηριστικῷ, ἐκ τῆτε χρὴ τὸν 93 διὰ 100000 διελεῖν (334). τὸ ἄρα κλάσμα $\frac{1970211}{100000}$ ἐστὶν ἀριθμὸς, ὅς ἐζητεῖτο πλὴν $\frac{1970211}{100000}$ περίπευ.

Χρήσις τῶν Λογαριθμῶν.

344. Α'. Δυνάμεθα δι' αὐτῶν τῆτε βαθμὸς χηματίσειν, καὶ τὰς αὐτῶν ρίζας ἐξάγειν.

345. Ἰν' εὐρωμεν, φέρε, τὸν ἀπὸ ἀριθμῷ τινος τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτῷ λογαριθμόν· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῷ διπλῷ τῆτε λογαριθμῷ ἔσαι ὁ ζητούμενος τε-

τράγωνος· ἔτις ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀπὸ 139 τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτὸν λογαριθμὸν, ὃν εὕρισκομεν ἐν τοῖς πῖναξιν ὄντα 2, 1430148· ὁ δὲ τέττε διπλῆς 4, 2860296, ἔσαι λογάριθμος ἐν τοῖς πῖναξι τῷ 19321, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ 139 τετράγωνος (317).

346. Ι'ν' εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τίνος κύβον, τριπλασιάζομεν τὸν αὐτὸν λογάριθμον· καὶ ἐν γένει, ἵνα πάντα ἀριθμὸν παντὸς βαθμοῦ θηρευώμεθα, πολλαπλασιάζομεν τὸν τῷ ἀριθμῷ λογάριθμον ἐπὶ τὸν δείκτην (317).

Ι'να, φέρε, τὸν τέταρτον τῷ 11 εὕρωμεν βαθμὸν, ζητῶμεν ἐν τοῖς πῖναξι τὸν τῷ 11 λογάριθμον, ὅς ἐστιν 1, 0413927· τέττον τετραπλασιάζοντες (317), εὕρισκομεν ἐν τοῖς πῖναξι τὸν 4, 1655708, λογάριθμον ὄντα ὡς ἐγγίσα τῷ 14641, ἣτις ἐστὶν ἡ τετάρτη ζητούμενη τῷ 11 δύναμις.

347. Β'. Τῶναντιον δὲ, πρὸς ῥίζης ἀπάσης ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ ἐξαγωγήν, διαιρῶμεν διὰ τῷ ἐπισήμῃ τὸν λογάριθμον τῷ προτιθεμένῳ ἀριθμῷ (318), ὃ ἐστὶ λαμβάνομεν τὸ ἡμισυ τῷ δὲ τῷ λογαριθμῷ πρὸς ἐξαγωγήν τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ τρίτον πρὸς ἐξαγωγήν κυβικῆς, καὶ ἑξῆς ἔτις.

Ι'να φεῖν εἴπειν εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τῷ 138 24 λαμβάνομεν τὸ τρίτον τῷ κατὰ τὸν δὲ τὸν ἀριθμὸν ἐν τοῖς κανονίοις κειμένῳ λογαριθμῷ 4, 1406336, εἴτ' ἐν τὸν 1, 3802112, ὅς εὕρισκεται ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος τῷ 24, ἣτις ἐστὶν ἡ ζητούμενη κυβικὴ ῥίζα (118).

348. Γ'. Διὰ τῶν λογαριθμῶν, τὸν μὲν πολλαπλασμὸν εἰς πρόθεσιν, τὴν δὲ διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν τρέψαι δυνάμεθα κατὰ τὰς δε.

Κεῖνω γὰρ πολλαπλασιάσαι τὸν 320 ἐπὶ 27:

λαμβάνοντες ἐν ἑκ τῶν κανονίων τὴς τῶν δύο ἀριθμῶν λογαριθμοῦς, εἴτ' ἐν τὸν 2, 5051499 ἢ 1, 4313638, ἢ συνάπτοντες αὐτὴς, εὐρίσκωμεν ἐν τοῖς κανονίοις τὸ τέτων ἀθροισμα 3, 9365137 λογάριθμον ὄντα τῷ 8640, ὅς ἐστι τὸ γινόμενον, ὃ ἐζητεῖτο (315).

349. Ἰνα δὲ διέλωμεν 4500 διὰ 18, ἀφαιρῶμεν τὸν τῷ διαιρέτῃ 18 λογάριθμον ἀπὸ τῷ κατὰ τὸν 4500 διαιρετέον· ἢ ἐν διαφορὰ 2, 3979400 εὐρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι λογάριθμος τῷ 250, ὅς ἐστι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

350. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰσέον μέντοι ὡς αἱ διὰ τῶν λογαριθμῶν αὗται ἀποτελέμεναι πράξεις ἢ εἰσὶν αἱ ἀκριβῶς ἀσφαλεῖς, διὰ τὰ ὅποιαν περιεμπέκτοντα τοῖς λογαριθμοῖς ἀφευκτα διαπτώματα (330).

351. Δ'. Εὐτεῖθεν ἄρα δυνάμεθα διὰ τῶν λογαριθμῶν μετατρέψαι ἅπασαν γεωμετρικὴν τῶν τριῶν μέθοδον, εἰς ἀριθμητικὴν, ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν εἰσάγοντες τὴς αὐτῶν λογαριθμοῦς· ἢ συνάψει μὲν ἀντὶ πολλαπλασιασμῷ, ἀφαιρέσει δὲ ἀντὶ διαιρέσεως χρώμενοι (207).

Δι' ἐνὸς ὑποδείγματος τὸ πᾶν διαλευκανθήσεται· κείδω γὰρ ἐκτελέσαι τὴν γεωμετρικὴν τῶν τριῶν μέθοδον $250 : 1000 :: 19 : \chi$ · ἀντὶ ἐν τῶν 250, ἢ 1000 ἢ 19 ἀντικατασταθήτωσαν οἱ κατ' αὐτὴς λογάριθμοι, ἢ ἔτω γενέσθω ἡ ἀριθμητικὴ τῶν τριῶν μέθοδος 2, 3979400· 3, 0000000· 1, 2787536· χ (207)· συνάψει τοίνυν τῶν μέσων, γινεται 4, 2787536, ἢ ἀφαιρέσει τοῦ γνωστῷ ἄκρῳ εὐρίσκεται διαφορὰ 1, 8808136 λογάριθμος, ἢ ἀριθμὸς εὐρίσκεται ἐπὶ τῶν κανονίων ὁ 76, ἄκρος ὅς ἐζητεῖτο ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας $250 : 1000 :: 19 : \chi = 76$ (240).

352. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Φανήσεται ἐν τῇ Τριγωνο-

μετρία, ὡς αὕτη ἡ τῆς γεωμετρικῆς ἐπὶ τὴν ἀριθμητικὴν μέθοδον τῶν τριῶν μεταβολὴ ἐκ ὀλίγον ἐπιτέμνει τὰς πράξεις.

353. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Οὔταν μὴ μεγάλης ἀκριβείας δεώμεθα, τῶν ἐν 8 δεκαδικοῖς λογαριθμῶν παραλιμπάνειν δυνάμεθα τὰ δύο ἐν δεξιοῖς ἔχοντα· μελησει δὲ μίτον, εἰάν οἱ δύο ἔχοντες ὅροι ὑπερέχωσι τῷ 50, αὔξειν μονάδι τὸ ἐν δεξιοῖς πρῶτον τῶν περιλειπομένων δεκαδικῶν.

Ὡς δ' αὐτως ἐν γένει, ὅταν ἡ τῷ ἑσχάτῳ δεκαδικῷ διαίρεσις καταλοίπῃ ἄτερ μὴ ἐκτελῇται, τὸ δὲ κατάλοιπον μείζον ἢ τῷ ἡμίσεως διαιρέτῃ, αὐξητέον τὸ πηλίκον μονάδι.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῷ λογαριθμῷ 2,70251380, εἰάν ἀποβαλεῖν βυλώμεθα τὰ δύο ἔχοντα δεκαδικὰ 80, γράφειν εἰκὸς 4 ἀντὶ τῷ 3 ἑσχάτῳ ὅρῳ· ὅθεν ἔσαι 2,702514· ὁ γὰρ 80 πρὸς τὸν 3 ἀναφερόμενος ἰσοδυναμεῖ τῷ $10^{\frac{2}{3}}$ (Ἀριθ. 231) ἐκέν εἰάν μὲν τεθῇ 4 ἀντὶ 3, ὁ ἀριθμὸς 4 ἔσαι μείζων τῷ ζητούμενῃ τῷ $10^{\frac{2}{3}}$ · εἰάν δὲ μείνῃ ὁ 3, ἔσαι ἐλάττω τῷ δικαίῳ τῷ $10^{\frac{2}{3}}$ · ἐλάχιστων ἄρα ἔσαι ἡ ἀπάτη εἰάν γράψωμεν 4 ἀντὶ 3, ἀπορρίψαντες τὸν 80· ἀλλ' εἰάν γὰρ τὰ δύο ἔχοντα δεκαδικὰ ὥσι 50, ὡς ἐπὶ τῷ 2,70251350, ἀδιάφορον ἔσαι ἀπορρίψαντας τὸ 50 εἴτε εἶσαι 3, ὅς ἔσαι ἐλάχιστων τῷ δικαίῳ τῷ $10^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$, ἢ θεῖναι 4, ὅς ἔσαι μείζων τῷ αὐτῷ $10^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

Ἰνα δὲ λάβωμεν τὸ πέμπτον τῷ 4,02315709, γράφομεν 0,80463142· εἰάν μὲν γὰρ ληθῇ 2 ὡς πέμπτον τῷ 9, ὁ 2 ἔσαι μείζων τῷ $\frac{1}{2}$ · εἰάν δὲ ληθῇ 1, ἔσαι ἐλάττω τῷ δικαίῳ τῷ $\frac{1}{2}$.

354. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Ἐν τῷ ἐφεξῆς Κεφαλῇ

φανήσεται πλείων τις ἢ χρήσις, ἐν περισπικτικωτέρα δὲ,
ἢ τῶν λογαριθμῶν.

Μέθοδος γενικὴ τῷ ἐξάγειν ὠντινωνδὴ πο-
τε ποσοτήτων ῥίζας ὑπερτέρας τῷ
τρίτῳ βαθμῷ.

355. Ἄπας βαθμὸς, ὃ ἂν ὁ δείκτης τῷ 2 πολλα-
πλάσιος εἴη, θεωρεῖται ἔχει ὡς τετράγωνον· ὅπως α^4
θεωρηθεῖται ἂν ὡς τετράγωνον ἀπὸ ῥίζης α^2 . εἴγε $\alpha^2 \times \alpha^2$
 $= \alpha^4$. ὡσαύτως δὲ α^6 θεωρηθεῖται ἂν ὡς τὸ ἀπὸ α^3 τε-
τράγωνον, καὶ α^8 ὡς τὸ ἀπὸ α^4 κτ. καὶ ἄλλως δὲ ἐκλαθεῖν
ὡς κύβον δυνάμειν πάντα βαθμὸν, ὃ ἂν ὁ δείκτης εἴη τῷ 3
πολλαπλοῦς· α^3 γὰρ ἔστιν ὁ τοῦ α κύβος, α^6 δὲ ὁ τῷ α^2 ,
 α^9 ὁ τῷ α^3 κτ. ἐξέσαι ἄρα διὰ τῆς ἐν ἔξει θεωρίας τῆς
ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης, α. εὑρεῖν ἀ-
πόνως τὴν παντὸς βαθμῶ ῥίζαν, διαιρῶντας ἅπαξ ἢ πλεο-
νάκις τὸν δείκτην διὰ 2, ἢ διὰ 3, ἔς τ' ἂν γένηται = 1.
β'. ἀναγαγεῖν εἰς κατωτέρας δυνάμεις τὰς, ὧν ὁ δείκτης
διαίρεσιμος ἢ διὰ 2, ἢ 3, καὶ μὴ διὰ τῆς διαίρεσεως
ταύτης γένηται = 1.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἴσω ἐξαγαγεῖν τὴν τετάρτην ῥίζαν
τῷ 390625· ἐξάγομεν ὅτι τῷ πρώτῳ τὴν τετραγωνικὴν
ῥίζαν = 625, εἴτα ταύτης τῆς καινῆς ῥίζης τὴν ῥίζαν
αὐτῆς τὴν τετραγώνειον = 15· ὡσαύτως ἐπὶ $\sqrt[3]{244140625}$,
ἐξάγομεν πρῶτον τὴν κυβικὴν ῥίζαν 625· β'. $\sqrt[2]{625} = 25$.
γ'. $\sqrt[2]{25} = 5$, ἢ δωδεκάτη ζητούμενη ῥίζα· ἐπὶ δὲ
 $\sqrt[4]{100000000000000}$, λαμβάνομεν $\sqrt[2]{1000000000000}$
0000 = 10000000 ἐσδόμην ῥίζαν τῷ προτεθέντος ἀριθμῷ.

356. Ἀλλὰ γὰρ ἡ μέθοδος αὕτη, ὥσπερ ῥᾶση τὴν πρᾶξιν, ἐνθ' ἂν ἐξῇ χώραν ἔχειν, ἔτω κ' θανμάσιος· ἀχρηστὴ μέντοι ἁ. ἐπὶ τῶν βαθμῶν, ὧν ὁ δείκτης μῆτε τοῦ 2, μῆτε τοῦ 3 πολλαπλάσιος εἴη, οἷοι εἰσιν οἱ πέμπτοι, ἔσδομοι κτ. βαθμοὶ· β'. κ' ἐφ' ὧν ὁ δείκτης τῇ δια 2 ἢ 3 διαιρέσει ἢ γίνεταί $= 1$, ὡς ἐπὶ τῆς ιδ'. δυνάμεως.

357. Ἡ μὲν οὖν ἐξαγωγή τῶν ριζῶν παντὸς συμβολικοῦ βαθμοῦ ἀτεχνῶς εὐμαρεςάτη πέφυκεν· ὑποτυπώσαντες γὰρ πρὸ ὀφθαλμῶν τὴν σειρὰν πάντων τῶν ὄρων, ὧν ἔχειν ὀφείλει ὁ προκείμενος βαθμὸς, δυωνύμῃ (106) τριωνύμῃ κτ ρίζης (117), ἀταλαιπώρως ἕκαστον ριζικὸν ὄρον εὐρήσομεν.

358. Ἐπὶ δὲ τῶν ἀριθμητικῶν ποσοτήτων τὸν αὐτὸν χεδιάσαντες συμβολικὸν τύπον, ὅς ἐμφαίνει πάντας τὰς ὄρας, τὰς ἐμπεριειλημμένους τῷ προκειμένῳ ἀπὸ δυωνύμῃ ρίζης βαθμῷ (113) κ' τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διασεύλαντες εἰς κόμματα, ὧν ἕκαστον ἐκ δεξιῶν ἀρχῆς γινομένης, περιέχει τόσας χαρακτῆρας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ἐπίσημον τῆς ἐξαγομένης ρίζης, ζητῶμεν τὴν μεγίστην ρίζαν τοῦ πρώτου ἐν ἀρισεροῖς κόμματος, κ' τὸν αὐτῆς ἀφαιρῶμεν βαθμὸν, κ' τὰλλα πάντα διεκπεραίνομεν τοῖς ἤδη ὑποτυπωθεῖσι (133, 140) τὰς πράξεις ἀναλόγως ἐπαναλαμβάνοντες, ἢ κ' διὰ τοῦ δυωνύμῃ τύπου ἐπὶ δύναμιν κλασματικὴν αἰρομένης (153).

359. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ ἄντις εἶποι ὅσω ρᾶδιον πᾶσα ρίζα διὰ τῶν λογαρίθμων ἐξάγεται· καὶ τῶν βαθμῶν δῆπε ἀτελῶν ὄντων) ἀγαπήσοιμεν μόνῃ τῇ ὀλοχερεὶ ρίζῃ· αὐτίκα γὰρ τὴν ἀτελῇ κυβικὴν ρίζαν τῇ 9285 εὐρίσκομεν, λαμβάνοντες τῇ κατ' αὐτὸν λογαρίθμου τὸ τρίτον $= 1$, 322594, ὅς ἐστιν ὅτι ἔγγιστα λογαρίθμος τοῦ 21 τῆς ζητούμενης ἐν ὀλοχερέσιν ἀτελοῦς ρίζης· καὶ προσεπιζητήσασιν καὶ δεκαδικάτινα, καὶ τηνικάδε ἡ ρίζα ὡς ὀλοχερῆς

ἔσεται μικρὸς τις ἀριθμὸς· ἵνα φέρε ἑξαγάγωμεν τὴν ἑξό-
μην ρίζαν τῷ 8086, τὸ ἑξόμον τῷ κατ' αὐτὸν λογαριθμῷ
ἔσιν = 0,558248, ὧς τινι τιθέντες χαρακτηριστικὸν τὸν 3,
ἀπολαμβάνομεν καινὸν λογαριθμὸν 3,558248, ἐπανήκοντα
ὡς ἔγγιστα τῷ 3616, = 3,616 (334) ρίζῃ ἐγγίσει τῷ 8
086· ἀλλ' εἴπερ βυλομένοις ἢ προθεῖναι τῇ ρίζῃ δεκαδι-
κὰ τοσάδε, ὥς τε ὑπερβαίνειν τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀπαν-
τώντων ἀριθμῶν, ἐπὶ τῷτο τῷ ἐφεξῆς χρησόμενα τρόπῳ.

360. Ἐςω ἑξαγαγεῖν τὴν πέμπτην ρίζαν τῷ 9970,
ὃ λογαριθμὸς = 3,998695, ὃ τὸ πέμπτον = 0,799739·
τετήτω ὅν χαρακτηριστικὸν ὁ 3· καὶ εὐρεθήσεται διὰ προσεγ-
γίσεως 6305, ταυτὸν εἰπεῖν 6,305 (334) ὃ ὁ ἐν τοῖς
κανονίοις λογαριθμὸς = 0,799685 ἐλάττων ἐστὶ τῷ 0,799
739 λογαριθμῷ, ἐξ ἑξ συγκειμένα δεκαδικῶν, καὶ δὴ ἐγγύ-
τερος ἢ ἐκεῖνος τῆς ἀληθοῦς ρίζης τῇ διαφορᾷ 54.

Ἐπὶ τούτοις τὰ 6305 καὶ 6306 ἐχόντων 69 διαφο-
ρὰν τῶν καθ' ἑαυτὴς λογαριθμῶν (ὡς ἰδεῖν ἔνεστιν ἐν τοῖς
κανονίοις) 6,3050, καὶ 6,3060 ἔχουσιν ὡσαύτως 69 δια-
φορὰν τῶν καθ' ἑαυτοὺς λογαριθμῶν· καὶ γὰρ ὁ μὲν τοῦ
6305 λογαριθμὸς ἔσεται ὁ 3,799685, ὁ δὲ τῷ 63050
ἔσαι ὁ 4,799685· ἀλλὰ διὰ τὰ τρία δεκαδικὰ τὰ ἐν τῷ
ἀριθμῷ 6,305, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ 6,3050 τέσσαρα, ἀπο-
κοπτέον τῆς χαρακτηριστικῆς 3 καὶ 4· καὶ δὴ ἔσονται ἰσάλη-
λοι ἔτσι οἱ λογαριθμοί· ταυτὸν δὲ κρατεῖ κατὰ τῷ λογα-
ριθμῷ τῷ 6,306 καὶ τῷ 6,3060· ἔτσι 6,3050 καὶ 6,3060
ἔχουσι τὴν αὐτὴν τῶν λογαριθμῶν διαφορὰν = 69, ἣν ἔ-
χουσι καὶ οἱ τῶν 63050, καὶ 63060.

Ἐκ δὲ δὴ τούτων βασανίζομεν τὸ πρῶτον ζητούμενον
δεκαδικὸν 9 διὰ τῆς ἐξῆς τῶν τριῶν μεθόδων : 10 : 69 :: 9 :
x, ὅπερ ἐστὶν ἡ μεταξὺ τῶν 63050, 63060 ἀριθμῶν δια-

φορὰ 10, πρὸς τὴν τῶν κατ' αὐτὰς λογαρίθμων διαφορὰν 69, ὡς τὸ βασανιζόμενον δεκαδικόν 9, πρὸς χ, ἥτις ἐστὶν ἡ ζητούμενη μεταξὺ τῆ κατὰ τὸν 63050 λογαρίθμου, καὶ τῆ κατὰ τὸν 63060 συν ζηταμένῳ τινὶ δεκαδικῷ διαφορὰ· ἔστιν ἄρα $\chi = 62 \frac{1}{10}$.

Α'λλὰ πᾶσα δύναμις τῆ χ ὑπερέχουσα τὸν 54, ὅς ἐστιν ὑπεροχὴ τῆ λογαρίθμου τῆς ἀληθοῦς ρίζης ὑπὲρ τὸν λογάριθμον τῆ 6,305, ἔσαι λίαν μεγάλη· καὶ γὰρ συναφθείσης τῷ τῆ 6,305 λογαρίθμῳ, γενήσεται λογάριθμος ἀριθμὸς τὴν ἀληθῆ ὑπερβαίνοντος ρίζαν· ἔκῃν βασανιδήτω ὁ 8· $10:69::8:\chi = 55 \frac{1}{10}$ · βασανιδήτω εἶτα ὁ 7· $10:69::7:\chi = 48 \frac{1}{10}$, ἥστινος μὴ ὑπερκειμένης τῆ 54, ἔσαι ὁ 7 τὸ πρῶτον ζητούμενον δεκαδικόν· ὑπὲρ δὲ τῆ δευτέρου, βασανιδήτω αὐτὴς νέος 9 (*) $100:69::79:\chi = 45 \frac{1}{10}$, ἥς ὑπερεχούσης τὸν 54, ἐξητάδῳ ὁ 8· $100:69::78:\chi = 53 \frac{1}{10}$ · 8 ἄρα ἔσαι τὸ δεύτερον δεκαδικόν· ὑπὲρ δὲ τῆ τρίτης γενέσθω σάυτως, $1000:69::789:\chi = 54 \frac{1}{10}$, βασάνων δὲ ἐξῆς γινομένων, μόνος ὁ 2 εὐρίσκεται καλῶς ἔχων· ἔκῃν ἡ μάλλον τῆς ἀληθοῦς ἐγγὺς γινομένη πέμπτη ρίζα τῆ 9970, ἐκτιθέμενη διὰ χαρακτήρων ἑπτὰ, ἔστιν 6,305782· ὁ δὲ δὴ πρόδηλον· καὶ γὰρ ὁ ζητούμενος λογάριθμος τῆ προτεθέντος ἤδη ἀριθμοῦ ἔστιν $= 0,799738 \frac{1}{10}$ (337), ἐλάσσωσιν τῆ λογαρίθμου 0,799739 τῆς ζητούμενης ρίζης·

(*) Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, δι' ἧς βασανίζεται ἕκαστον γραφησόμενον δεκαδικόν, ἔχει πρῶτον μὲν ὅρον τὴν 1 συν τοσέτοις 0, ὅσα εἰσὶ τὰ προσεζευγμένα τῷ δοθέντι ἀριθμῷ 6305 δεκαδικὰ συν τῷ βασανιζομένῳ· δεύτερον δὲ ὅρον τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων· τρίτον δὲ τὰ προσεζευγμένα δεκαδικὰ συν τῷ βασανιζομένῳ.

ἐὰν δ' ὁτος αὐξηθῇ μονάδι ἐν τῇ ἐσχάτῃ τάξει τῶν δεκαδικῶν $= 6,305783$, ὁ αὐτὸς εὐρεθεὶς (337) λογάριθμος $= 0,799739 \frac{1}{1000}$ ὑπερέξει τὸν τῆς ζητούμενης ρίζης λογάριθμον.

1^{ον} ἄρα γνωστῇ εἰ μήτις ἀπάτη παρενέπεσε τὰ δεκαδικὰ τιθεμένοις, ἀρκεῖ σκοπεῖν, εἰ ὁ τῷ ὅλκῳ ἀριθμῷ εὐρεθεὶς λογάριθμος μὴ εἴη ἐλάσσων τῷ πεμπτημορίῳ (ἐπὶ τῷ ἐν χερσὶν ἀμέλει ὑποδείγματος) τῷ λογαρίθμῳ τῷ προσληθέντος βαθμῷ, καὶ εἰ τῷ ἀριθμῷ τῷδε αὐξηθέντος μονάδι, ὁ κατ' αὐτὸν λογάριθμος μὴ εἴη μείζων τῷδε τῷ πεμπτημορίῳ.

361. Βυλομένοις δὲ ἐξαγαγεῖν ρίζαν ἀριθμῷ μείζονος τῶν ἐν τοῖς κανονίοις, τὴν κυβικὴν, φέρ' εἰπεῖν, τῷ 89700950, ζητητέον τὸ πρῶτον τὸν αὐτὸς λογάριθμον (338), $= 7,952796 \frac{1}{1000000}$, ὃ τρίτημόριον ὅτι ἔγγισα $= 2,650932 \frac{1}{1000}$ (*) αὐξημένῃ δὲ ἐξῆς μονάδι τῷ κατὰ τόδε τὸ τρίτον χαρακτηριστικῷ, ἔσαι 3,65 κτ. λογάριθμος γεδύνει τοῦ 4476· ἀποκοπέντος δ' ἐκ δεξιῶν τῷδε τοῦ ἀριθμοῦ ἐνὸς δεκαδικοῦ, διὰ τὴν τῷ χαρακτηριστικῷ προσθεῖσαν μονάδα, ἀποτελεῖται 447,6· τέλος δὲ ληφθήσεται ὁ τοῦδε τοῦ καινοῦ ἀριθμοῦ λογάριθμος $= 2,650890$, ἐλάττων τοῦ τῆς ρίζης ἀληθοῦς λογαρίθμου $2,650932 \frac{1}{1000}$ τῇ διαφορᾷ $42 \frac{1}{1000000}$. Τῆς δὲ τῶν μεταξὺ 44760, καὶ 44770 λογαρίθμων διαφορᾶς οὐσης 97, γένοιτ' ἂν ἐνταῦθα $10 : 97 :: 9 : x$ (360)· ἐπαναληφθεῖη δὲ τὰ τῆς πράξεως, ὥς περ ἐπὶ τοῦ πρώτου ὑποδείγματος, ὀλιγωρουμένης αἰεὶ τῆς τοῦ x δυνάμεως τῆς ὑπερκειμένης τοῦ $42 \frac{1}{1000000}$.

(*) Διαίρω τὸν τῷ $\frac{1}{1000000}$ ἀριθμητὴν, ἵνα γίνηται καὶ τὸ τρίτον τῷ κλάσματος δεκαδικόν (Ἀριθ. 222).

362. Ἐν δὲ τοῖς καθόλου ὑπολογισμοῖς, ὅπως ἂν εἴη χρῆσθαι τοῖς λογαριθμοῖς, ἴδωμεν διὰ βραχέων· αὐτίκα ἔν ἡ λέξις λογάριθμος τῷ λ σημαίνεται προτιθεμένη τῆς ποσότητος, ἣς ἔστι λογάριθμος· οἷον λα τὸν τῷ α ἐμφαίνει λογάριθμον· λχ, τὸν τῷ χ, κτ. ἐπεὶ δὲ οἱ λογάριθμοι δείκται εἰσι βαθμῶν (313), τοῖς τῶν δεικτῶν ἰδιώμασι τὸν νῦν προσέχοντες ὑποσυνάψομεν τὰ ἐφεξῆς· ἐὰν τοίνυν παραγόμενον ζητῆται ἐκ πολλῶν ποσοτήτων, ἐκδηλωθῆναι δύναται διὰ τῆς τῶν λογαριθμῶν προσθέσεως· ἔτις οὖν αβγ ἐκδηλωθῆναι δύναται διὰ λα + λβ + λγ, ἢ 3 γδ λογαριθμικῶς ἂν παρασταῖ διὰ λ3 + λγ + λδ· τῆς δὲ πολυωνύμου ποσότητος νμ + α — χ δηλωθήσεται ἔτις λ (νμ + α — χ), ἥπερ δῆλον· ἢ δὲ διαίρεσις τῶν ποσοτήτων λογαριθμικῶς δι' ἀφαιρέσεως παράσταται· οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ παρασταθῆναι λογαριθμικῶς

δύναται λα — λβ (55)· ἢ δὲ ποσότης $\frac{\alpha\mu}{\rho}$ παραστα-

θῆναι δύναται ἔτις λα + λμ — λρ· τὸ δὲ $\frac{\gamma\delta}{\nu\rho}$ ἔτις (λγ + λδ) — (λν + λρ)· τῆς δὲ ποσότητος τῶν ποιητῶν τῷ διαιρέτῃ συνάπτοντες, ἀφαιρέμεν ἀπὸ τῷ ἀθροίσματος τῶν κατὰ τῆς ποιητῆς τῷ διαιρετέος λογαριθμῶν·

τὸ δὲ $\frac{\beta\zeta - \mu\rho}{2\nu}$ ἔτις λ (βζ — μρ) — (λ2 + λν).

363. Ἐπειδὴ ποσότητες εἰς βαθμοὺς ἐξάγονται, πολλαπλασιαζομένων τῶν τῶν ποσοτήτων δεικτῶν ἐπὶ τὸν τῶν βαθμῶν δείκτην (82)· ἐὰν α ὑψότεον προκείμεται ἐπὶ τὸν δεύτερον βαθμὸν λογαριθμικῶς, δηλωθήσεται διὰ τῷ τύπῳ 2λα· τὸν δὲ χ³ δηλώσει ὁ τύπος 3λχ· τὸν

δὲ χ^{ν} ὁ $\nu\lambda\chi$ · τὸν δὲ $\alpha^{\nu-2}$ ὁ $\nu\lambda\alpha$ — $\pi\lambda\alpha$ · ἔσι γὰρ
 $\alpha^{\nu-2} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^2}$ (163)· τὸ δὲ $\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^2}$ λογαριθμικῶς ἂν πα-
 ραταίῃ $\lambda\alpha - \pi\lambda\alpha$ (362)· ἐκ δὲ τῶν καὶ ἑτεράτινα σχή-
 ματα κατανοῆσαι δυνάμεθα· οἷον τὴν $\alpha^{\nu-1}$ $\chi\omega$ λογαριθ-
 μικῶς παρίσῃσιν ἡ $\nu\lambda\alpha$ — $\mu\lambda\alpha + \lambda\chi + \lambda\omega$ · τὴν δὲ α^{ν}
 $\chi^3 - \mu$ ἡ $\nu\lambda\alpha + 3\lambda\chi$ — $\nu\lambda\chi + \lambda\mu$ · τὴν δὲ $\alpha^{\nu} \mu^{-3}$ ἡ
 $\nu\lambda\alpha - 3\lambda\mu$ · ἔσι γὰρ $\alpha^{\nu} \mu^{-3} = \frac{\alpha^{\nu+1}}{\mu^3} = \frac{\alpha^{\nu}}{\mu^3}$ (149)·

τὴν $\chi^{\frac{1}{4}}$ λογαριθμικῶς ἐμφαίνει ἡ $\frac{1}{4}\lambda\chi = \frac{3\lambda\chi}{4}$, ὅ ἐστι πολ-
 λαπλασιασέον τὸν τῷ χ λογάριθμον ἐπὶ 3, τὸν δὲ πα-
 ραγόμενον διαιρετέον διὰ 4, καὶ τῷ προκύπτοντος λογα-
 ριθμοῦ ζητητέον τὸν ἀριθμὸν, ὀριθείσης δὴ πρὶν πρότερον τῆς
 δυνάμεως τῷ χ · ἔσω γὰρ $\chi = 36$ · ἐκὼν $\chi^{\frac{1}{4}} = 36^{\frac{1}{4}} =$
 $\sqrt[4]{36}$ (219)· καὶ λογαριθμικῶς $\frac{3\lambda \cdot 36}{4}$ · ἐπεὶ δὲ ἐκ

τῶν κανονίων ἔσι $\lambda 36 = 1,5563025$, ὃς πολλαπλασια-
 σθεὶς μὲν ἐπὶ 3 ποιεῖ 4,6689075, διαιρεθεὶς δὲ διὰ 4,
 δίδωσι πηλίκον 1,1672268, ὧτινι ἀντιστοιχεῖ ἐν τοῖς κα-

νονίοις ἀριθμὸς 14,7· ἄρα $36^{\frac{1}{4}}$, ἡ $\sqrt[4]{36} = 14,7$

ὡσαύτως ὁ τύπος $\frac{\chi^{\nu}}{\mu}$ λογαριθμικῶς ἂν ἐκτεθείῃ $\frac{\nu\lambda\chi}{\mu}$,
 καὶ $(\nu\mu + \rho\chi)^{\frac{1}{4}}$ ἐκτεθείῃ $\frac{1}{4}\lambda(\nu\mu + \rho\chi)$ κτ.

364. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Γεωμετρικῆς προσδὲ δοθέν-
 τος τῷ πρώτῳ ὄρει α , καὶ τῷ ἐσχάτῳ ω , καὶ τῷ πηλίκῳ μ ,
 εὑρεῖν λογαριθμικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὄρων χ

ΛΤΣΙΣ. Ἐσιν $\omega = \alpha\mu\chi^{-1}$ (262)· ὁ λογαριθμικῶς
 ἂν ἐκτεθείῃ (362) $\lambda\omega = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu - \lambda\mu$
 $\quad \quad \quad + \lambda\mu \quad \quad + \lambda\mu$

$$\begin{array}{r} \lambda\omega + \lambda\mu = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu \quad (\text{Α'ριθ. 13}) \\ - \lambda\alpha \quad - \lambda\alpha \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\text{Α'ριθ. 14})$$

διαίρεσει διὰ λμ

$$\frac{\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \frac{\chi\lambda\mu}{\lambda\mu} \quad (219)$$

εἴτ' ἔν

$$\frac{\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \chi$$

τῆτ' ἔσι

$$\frac{(\lambda\omega - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu} = \chi, \text{ ταυτὸν εἰπεῖν}$$

$$\frac{(\lambda\omega - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1 = \chi \cdot \text{τύπος λογα.}$$

ριθμικὸς τῷ ζητῶμενῳ ἀριθμῷ τῶν ὄρων χ . ἔσω ἔν
 $\alpha = 2$, $\epsilon\omega = 1458$, $\epsilon\mu = 3$. ἔσαι ἔν κατὰ τὸν ἤδη

ἔξελεχθέντα τύπον $\chi = \frac{(\lambda \cdot 1458 - \lambda\alpha)}{\lambda\beta} + 1$. ἔσι δὲ

ἐκ τῶν λογαριθμικῶν κανονίων

$$\lambda \cdot 1458 = 3,1637575$$

ὁ δὲ ἀφαιρεθησόμενος $\lambda \cdot 2 = 0,3010300$

$$\hline 2,8627275$$

ἔσι δὲ $\lambda \cdot 3 = 0,4771212$. διηρήσῃ τοίνυν 2,8627275

δὲ 0,4771212 $28627275 \mid 6$

$$4771212$$

πηλίκον ἔν πρόεισιν 6, ἀλογομένῃ τῷ λειψάνῃ 5· ἔ
 γὰρ ἂν ἐπ' ἀκριβὲς εὐρεθείη πηλίκον ἐν τοῖς λογαριθμοῖς.
 ἔκῃν $6 + 1 = \chi =$ τῷ ζητῶμένῳ τῶν ὄρων ἀριθμῷ· ἔκῃν
 οἱ μὲν ὅροι τῆς προόδου εἰσὶν 7· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει
 ἔτω $\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$ · ἐκ τέττε δὴ

τῷ προβλήματος, ὡς ὅμοια, εἴπη παρείκοι, συνησειέτις, ὅσ' ἂν βέλῃται, ἡλική ἢ τῶν λογαριθμικῶν τύπων χρήσις, κατάδηλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ μεγεθῶν συμμέτρων καὶ ἀσύμμετρων.

365. Πᾶσα μὲν ποσότης δυναμένη δι' ἀριθμῶν εἴτε ὀλοχρεῦς, εἴτε κλασματώδης παρίστανται, λογικὴ ποσότης καλεῖται, οἷον 4 ὀργιαί, $\frac{2}{3}$ ὀργιαῖς· τὴναντίον δὲ ἢ διὰ μηδενὸς ἀριθμῶν ἐκτιθεμένη, ἄλογος, ἢ ἄρρήτος ὀνομάζεται· τοιαῦται εἰσὶν, ὡς δειχθήσεται, αἱ ῥίζαι πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3 κτ, οἵτινες ἐκ εἰσὶ βαθμοὶ ἐντελεῖς ἀφ' ὀλοχρεῦς ἀριθμῶν.

366. Δύω μεγέθη πρὸς ἀλλήλα παραβαλλόμενα, σύμμετρα μὲν ἀλλήλοις λέγονται, ἢ ἐν λόγῳ, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν ἢ τὸ πηλίκον ἀκριβῶς ἐκτιθεῖται ἔχη δι' ἀριθμῶν ὀλοχρεῦς, ἢ κλασματώδης· τὴναντίον δὲ, ἀσύμμετρα, ἢ ἐν λόγῳ ἄρρήτῳ, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν διὰ μηδενὸς ἔχη ἀριθμῶν ἐκδηλῶνται· τοιαύτη ἐστὶ πᾶσα ῥίζα βαθμῶν ἀτελεῖς, παραβαλλομένη πρὸς αὐτὸν τὸν βαθμὸν· ἔτις ἐν $\sqrt{2}$ καὶ 2, ἢ $\sqrt{2}$ καὶ 3 εἰσὶ ποσὰ ἀλλήλοις ἀσύμμετρα, ἢ ἐν λόγῳ ἄρρήτῳ.

Ἀλλ' εἰ καὶ βαθμοὶ δύο ἀτελεῖς ἀλλήλοις εἰσὶν ἀσύμμετροι, αἱ ἄρρητοι αὐτῶν ῥίζαι ἐκ εἰσὶ παρὰ τῆτο καὶ αὐταὶ ἀσύμμετροι· ἔωσαν γὰρ δύο βαθμοὶ ἀτελεῖς 32, 50· ἐπεὶ ἐν δυνάμεθα θεωρεῖν τὸν μὲν 32 ὡς τὸ διπλῶν

τῆ ἀπὸ 4 τετραγώνου, εἴτ' ἔν $4^2 \times 2$, τὸν δὲ 50 ὡς τὸ διπλὸν τῆ ἀπὸ 5 τετραγώνου, εἴτ' ἔν $= 5^2 \times 2$, ἄρα ῥίζα μὲν τῆ 32 ἔσαι $4 \times \sqrt{2}$, ἡ δὲ τῆ 50, $5 \times \sqrt{2}$. φημί ἔν ὡς αὗται αἰδύω ἄρξῃται ῥίζαι $4 \times \sqrt{2}$, $5 \times \sqrt{2}$, εἰσι πρὸς ἀλλήλας σύμμετροι· εἰσι γὰρ δύο γινόμενα, οἷς κοινὸς ὁ $\sqrt{2}$ παράγων· ἄρα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ ἕτεροι παράγοντες 4, καὶ 5, εἴτ' ἔν ἐσι $4 \times \sqrt{2} : 5 \sqrt{2} :: 4 : 5$ (306).

367. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἐὰν ποσὸν, τέλειος βαθμὸς ὑπάρχον, πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕτερον ποσὸν, ὑπάρχον καὶ αὐτὸ βαθμὸς τέλειος, ἔσαι καὶ τὸ γινόμενον ἐξ αὐτῶν βαθμὸς αὐτοῖς ὁμοταγῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ $\alpha^2 \beta^2$ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο τετραγώνων α^2, β^2 , ἔσι καὶ αὐτὸ τετράγωνον τέλειον· εἴγε ἔχει ῥίζαν τετραγωνικὴν τελείαν τὴν $\alpha^{\frac{2}{2}} \beta^{\frac{2}{2}} = \alpha\beta$ · καὶ αὖ $\alpha^3 \beta^3$ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο κύβων α^3, β^3 καὶ αὐτὸ ἐσι κύβος ἐντελής ἔχων ἐντελῇ κυβικὴν ῥίζαν τὴν $\alpha^{\frac{3}{3}} \beta^{\frac{3}{3}} = \alpha\beta$ · ἐν γένει δὲ, ἐὰν α^m καὶ β^n ὑποτεθῶσι δύο βαθμοὶ ὁμοταγεῖς π, ὥσπερ ἡ αὐτῶν ὁμοβάθμιος ἐντελής ῥίζα λαμβάνεται διὰ τῶν $\frac{m}{\alpha^p}$, καὶ

$\beta^{\frac{n}{p}}$ (124) ὡσαύτως τῆ ὑπ' αὐτῶν γινόμενα $\alpha^{\frac{m}{p}} \beta^{\frac{n}{p}}$ ἔσαι ἐντελής ὁμοβάθμιος ῥίζα ἢ $\frac{m}{\alpha^p} \beta^{\frac{n}{p}}$ Ο. Ε. Δ.

368. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν βαθμὸς ἐντελής ἐπὶ βαθμὸν ὁμοταγῇ ἀτελῇ πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον ἔ δύναται εἶναι βαθμὸς τέλειος ὁμοταγῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐ'σω α^m βαθμὸς ὅστις ἐν τέλειος καὶ ὁ βαθμὸς αὐτῷ ὁμοταγῆς ἀτελῶς ἔχων, καὶ π δείκτης τῆ βαθμῆ· φημί δὴ, ὡς ἐνταῦθα τὸ γινόμενον $\alpha^m \beta^n$ ἐν ἂν

32 ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ

εἴη βαθμὸς π ἐντελής· ἔσω γὰρ· ἔκῃν ἔσαι ῥίζα τε-
 λεία ἢ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$ $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ · τετὶ δὲ τῷ γινομένῳ διὰ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$ διαιρεθέν-
 τος, προκύψει $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ ῥίζα ἐντελής τῷ $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ βαθμῷ· ὑψω-
 θείσα ἔν αὐτῇ ἐπὶ τὸν π βαθμὸν ἔσαι $\beta^{\frac{\nu\pi}{\pi}} = \beta^{\nu}$, βαθμὸς
 ἐντελής (82) κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ο. Ε. Δ.

369. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τετράγωνος ἀριθμὸς ἢκ ἂν εἴη
 διπλῆς, τριπλῆς, πενταπλῆς κτ. ἑτέρῃ τετραγώνῳ· ἢ
 πολλαπλασιασθέντος τῷ ἐλάσσονος τετραγώνῳ ἐπὶ 2, 3,
 5 κτ, ἀτελεῖς τετραγώνους, προκύψει ὁ μείζων τετρά-
 γωνος, ὡς ἐντελής, ὅπερ ἄτοπον (368)· κύβος δὲ ἀρι-
 θμὸς ἢ δύναται εἶναι διπλῆς, τριπλῆς, τετραπλῆς ἑτέ-
 ρῃ κύβῳ· ἄλλως γὰρ πολλαπλασιασθέντος τῷ ἐλάσσονος
 ἐπὶ τὰς ἀτελεῖς κύβους 2, 3, 4 κτ, ποριζήσεται γινό-
 μενον κύβος τέλειος, ὅπερ ἄρτι ἀδυνάτως ἔχον ἐξήλεγ-
 κται· ἐν γένει δὲ ἡ ἀπας βαθμὸς τέλειος ἢκ ἂν εἴη πολ-
 ῶς ἀπλῆς ἑτέρῃ ἀριθμῷ, ὅτι μὴ βαθμῷ τελείῳ ἑαυτῷ ὁ-
 ῶς ποταγῆς.

370. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἀπας βαθμὸς ἀφ' ἑτινοσῶν
 ἀριθμῶν ἢ διαιρεῖται δι' ἀριθμῶν πρώτων ἄλλων, εἰμὴ διὰ
 τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ, ἀφ' ἃ ὡς ῥίζης παρῆκται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστω πᾶς ἀριθμὸς ἐκτεθειμένος διὰ αβ,
 ὡς ὑποτεθείτω μὴ ἔχειν ἄλλας ἀριθμὸς διαιρέτας, εἰμὴ
 τὰς δύο παράγοντας α, β (ἐξαιρεμένης μέντοι αἱ τῆς
 μονάδος)· φημὶ δὴ ὡς ὁ τῷ αβ κύβος αααβββ, φέρ' εἰ-
 πεῖν, ἔκ ἔχει ἄλλας διαιρέτας, εἰμὴ τὰς αὐτὰς α, β·
 ἐξηρήσω δὲ, ὅτι διὰ αα, ἢ ββ διαιρεῖται· ἔτοι γὰρ
 προδήλως, πολλαπλοῖ ὄντες, τοῦ πρώτου εἶναι ἐξίσαν-
 ται. Ο. Ε. Δ.

371. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύω μεγέθη α & β κοινῶ ἀμει-
 ρήντα διαιρέτε (πλὴν τῆς μονάδος), εἰς ὃν ἂν ὑψωθῶσι
 βαθμὸν, κοινὸν διαιρέτην ἔχ' ἔξουσιν· ἅπας γὰρ δὴ πε διαι-
 ρέτης ἐστὶν ἀριθμὸς πρῶτος, ἢ πρῶτε πολλαπλῆς· ἀλλ'
 εἰς ὃν ἂν ἕκασον τῶν ὑψωθῆ βαθμὸν, ἔχ' ἔξουσι διαιρέ-
 την ἀριθμὸν πρῶτον, ἕτε μὴν πρῶτε πολλαπλῆν (370).
 ἄρα οἱ δύο ἔτοι ἀριθμοὶ κοινὸν διαιρέτην ἔχ' ἔξουσι.

372. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἀ' παν κλάσμα τῆς μονάδος·
 ἑλάττων, ἢ μείζον μὲν, μὴ δυναμένον δὲ ἐπ' ἀκριβὲς εἰς
 ὀλοχερῇ ἀναχθῆναι, ἐφ' ὃν ἂν ὑψωθῇ βαθμὸν, ὀλοχερεῖ
 ἢ μὴ ἐξισωθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον τὸ θεώρημα ἐπὶ
 κλασμάτων τῆς μονάδος ἐλασσόνων (87). ἀλλ' ὑπὲρ
 τῶν μονάδος μὲν μειζόνων, ἀναχθῆναι μέντοι λειψάνου
 δίχα μὴ δυναμένων ἐφ' ὀλοχερῇ· ἀ. ἐξέσαι τὸ κλάσμα
 εἰς ἀπλεσέρους ὅρες ἀγαγεῖν, καίτοι μὴ παρεχομένους δι-

χα τε λειψάνου ὀλοχερῇ ποσότητα· ὡς $\frac{\alpha}{\beta}$ · β'. ὀλό.

γος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐξ ὑποθέσεως δι' ὀλοχερῆς ποσῆ ἐκδηλωθῆναι ἢ
 δύναται, ἐπεὶ β τὸ α ἄνευ λειψάνου διελεῖν ἢ δύναται,
 ὡς μὴ ὃν κοινὸς διαιρέτης ἑαυτῷ τε & τῷ α · ἀλλὰ & ἐφ'
 ὄντινα ἂν ὑψωθέντα βαθμὸν α & β , κοινὸν διαιρέτην ἔχ' ἔ-
 ξουσιν (371). ἄρα ἢ δέποτε τὸ β, ἐφ' ὃν ἂν ὑψωθῇ βαθ-
 μὸν, διαιρεῖν δυνήσεται ἄνευ λειψάνου τὸ α ἐπὶ τὸν αὐτὸν
 ὑψωθέν· ἄρα. Ο. Ε. Δ.

373. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δι' ἑδενὸς ἄρα ἀριθμοῦ ἔκτε-
 θῆναι δύναται ἢ ρίζα παντὸς ὀλοχερῆς ποσῆ, ὃ μὴ εἴη
 βαθμὸς ἐντελής ποσότητος ὀλοχερῆς· αὕτη γὰρ ἢ ρίζα
 ἐκ ἂν εἴη ἕτε ὀλοχερῆς (εἰ γὰρ ἦν, πολλαπλασιασθεῖσα

Τὸμ. Β'.

С

34 ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΟΥ ΔΙΑΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ

ἐφ' ἐαυτὴν παρείχεν ἂν ἐντελῇ βαθμὸν, κατὰ τῆς ὑποθέσεως), ἔτε κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον, οὔτε μείζον μὲν τῆς μονάδος, ὁλοχρεῖ δὲ ἐπ' ἀκριβὲς μὴ ἐξισόμενον (327).

374. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ ῥίζα παντὸς κλάσματος ἀναχθέντος ἐφ' ἀπλυσέραν ἔκθεσιν, εἴαν ὁ, τε ἀριθμὸς τῆς αὐτῆς καὶ ὁ παρονομασῆς μὴ ᾗσι βαθμοὶ ἐντελεῖς ποσῶς ὁλοχρεῖς, ἔσαι καὶ αὐτὴ ἄλογος.

ΚΕΦΑΛ. ΔΕΚΑΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ διαφορῆς διαθέσεως καὶ συντάξεως.

375. Εἴαν ζητηθῇ ποσαχῶς ἂν διατεθεῖεν ποσάτινα δεδομένα συνάματε λαμβανόμενα, καὶ ἅπαξ ἕκαστον ἐν ἐκάσῃ διαθέσει, τὸτι καλείωμεν μεταλλαγὴν διαθέσεως· εἴαν δὲ ζητηθῇ ποσαχῶς ἂν συζευχθεῖεν ποσάτινα, ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία κτ., λαμβανόμενα, τὸτι ὀνομαζέωμεν τάξεις.

376. Διὰ μὲν τῆς πρώτης μεθόδου, δύο μεγέθη α, β διχῶς ἂν διατεθῆναι ἔχοιεν, αβ, βα· τρία δὲ α, β, γ, ἐξαχῶς· εἴγε τιθεμένους ἐκ διαδοχῆς ἐν ἀρχῇ ἐκάστου τῶν τριῶν μεγεθῶν, τὰ λοιπὰ δύο ἐν ἐκάσῃ περιπτώσει δύο ἀμείψουσι διαθέσεις· οἷον· αβγ, αγκβ, βαγκ, βγκ, γαβ, γβα· τέσσαρα δὲ, α, β, γ, δ, ἀμείψουσιν 24 διαθέσεις· ἐκάστου γὰρ ἐν ἀρχῇ τῆς διαθέσεως κειμένων κατὰ διαδοχὴν, ἄλλα τρία ἐν ἐκάσῃ περιπτώσει ἀμείψουσι διαθέσεις 6. ἔστι δὲ $6 \times 4 = 24$. ὡσαύτως πέντε μεγέθη τὰ α, β, γ, δ, ε, ἀμείψουσι διαθέσεις $24 \times 5 = 120$, καὶ ἔτιως ἐφεξῆς· ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει.

377. Α'. „Μεγέθη ἀριθμῶν ὑπερτέρου ἀμείβουσι το-
 „σάςδε διαθέσεις, ὅσας δηλοῖ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δια-
 „θέσεων, ὧν ἐπιδέχονται μεγέθη ἀριθμῶν, ἀμέσως ἐ-
 „λάσσονος, καὶ αὐτῇ τῇ ὑπερτέρῃ ἀριθμῶν“. οὕτως ὁ ἀ-
 ριθμὸς τῶν δυνατῶν διαθέσεων τριῶν μεγεθῶν ἔστι τὸ γινό-
 μενον ὑπὸ τῶν δυνατῶν διαθέσεων δύο μεγεθῶν, καὶ τῇ ἀ-
 ριθμῶν 3, = 6, καὶ ἔτιωσ ἐφεξῆς.

378. Β'. Ἰν' εὐρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαθέσεων, ὡς
 ἀμείβουσιν ὁσαδηποτὲν μεγέθη, εἰλήφθων ἡ ἀριθμητικὴ
 πρόοδος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1 . 2 . 3 . 4 . κτ., καὶ γε-
 γράφθω 1 μὲν ὑπὸ τὴν 1, ἐξῆς δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῇ
 δευτέρῃ μείζονος ὅρου 2, καὶ τῇ πρώτῃ ἐλάττωτος ἀριθμῶν 1,
 εἴτ' ἐν 2, γεγράφθω ὑπὸ τὸν 2· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τῇ
 τρίτῃ ἀριθμῶν 3 καὶ τῇ δευτέρῃ 2, εἴτ' ἐν 6, γεγράφθω
 ὑπὸ τὸν 3· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τῇ ἐφεξῆς ἀνωτέρῃ ἀ-
 ριθμῶν 4, καὶ τῇ κατωτέρῃ 6, εἴτ' ἐν $4 \times 6 = 24$ γε-
 γράφθω ὑπὸ τὸν 4, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως· καὶ δὴ ἕκαστος ὑπο-
 κείμενος ἀριθμὸς δηλώσει τὰς δυνατὰς διαθέσεις τῇ ὑπερ-
 κειμένῃ ἔτιωσ.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

1 . 2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320.

9 . 10 . 11 . 12

362880 . 3628800 . 39916300 . 479001600

379. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ονόματος κυρίῃ θεέντος,
 ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων εὐρεῖν ἅπαντας τὰς δυνατὰς
 ἀναγραμματισμὰς.

ΛΥΣΙΣ. Ζητοῦνται ἐνταῦθα πᾶσαι αἱ λέξεις χρή-
 σιμοί τε καὶ ἄχρηστοι, ὡς ἀποτελοῦν τὰ ὀνόματός τινος
 γράμματα διὰ τῶν ἐν αὐτοῖς διαφόρων διαθέσεων· ἔστω
 ἐν τῷ ὀνομα Δ ἡ μ ο ς, ἔπερ, ἐπεὶ περιέχει γράμματα

5, αἱ διαθέσεις ἔσονται 120· τέτων ἔν διακριτέον τὰς ἐν χρήσει τῶν ἀκρήτων λέξεων· ἢ αἱ ἐν χρήσει δηλώσασιν πάντας τὰς δυνατὰς τῷ ὀνόματος ἀναγραμματισμούς.

380. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὐρεῖν ποσαχῶς ἀντις διαθέτο ἐπὶ τραπέζης δώδεκα ἐξισωμένης.

ΛΤΣΙΣ. Εἰς τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης προόδου, κατίδοιτις ἄν, ὃ ἄν ἀπίθανον δόξειεν, εἰμὴ πρὸς δέδεικτο, ὡς ἔστι κατακλιθεῖναι δυνήσονται κατὰ 479001600 τρόπους.

381. Διὰ δὲ τῆς κληθείσης μεθόδου τῆς συντάξεως (375) 2 μεγέθη τὰ α, β, ἀνὰ δύο λαμβανόμενα, συντάξεις ἀποτελοῦσι τέσσαρας, αα, ββ, αβ, βα· τρία δὲ σὺν δύο λαμβανόμενα, ἐννέα, α, β, γ· αα, ββ, γγ, αβ, αγ, βα, βγ, γα, γβ· ἐν γένει δὲ „τῶν μεγεθῶν, ἀνὰ δύο μὲν λαμβανομένων, οἱ συνδυασμοὶ ἔσονται ἰσάριθμοι τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν.“ τὰ δὲ τρία α, β, γ, σύντριά λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι συντάξεις 27 τὰς δε ααα, ααβ, ααγ, αββ, αβγ, αγγ, βαα, βαβ, βαγ, βββ, ββγ, βγγ· γαα, γαβ, γαγ· γββ, γβγ, γγγ· αβα, αγα, αγβ· ββα, βγα, βγβ· γγα, γβα, γγβ.

382. Εἰν γένει ἄρα „ποσῶν τινων μεγεθῶν δεδομένων ἢ τῷ ἀριθμῷ τῷ ἐμφαίνοντος, καθ' ὅσα συνταχθήσεται, αἱ δυνατὰι συντάξεις ἰσάριθμοι ἔσονται τῷ τῶν μεγεθῶν ἀριθμῷ, ὑψωθέντι εἰς βαθμὸν, ὃ δείκτης ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὃ ἐμφαίνει, καθ' ὅσα συνταχθήσεται τὰ μεγέθη.“ ὅτως ἔν 10 μεγέθη, φέρε, ἀνὰ 5 λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι συντάξεις τοσαύτας, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ 10 εἰς πέμπτον ὑψωθείς βαθμὸν, εἴτ' ἔν 100000· 15 δὲ μεγέθη, ἀνὰ 4 λαμβανόμενα, συντάξεις ἀποτελοῦσι $15^4 = 50625$.

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ Ἐξισώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τῶν γενικῶς ἐπὶ τῶν Ἐξισώσεων θεωρημένων.

383. **Ἐξισώσεις** εἰν ὁ λόγος τῆς ἰσότητος, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι ποσότητες δύο, ἐκδηλούμενος διὰ τῆ συμβόλου =· ὥτως ἡ ἐκθεσις $3 + 5 = 2 + 6$ εἰν ἔξισωσις, ἐφ' ἣς ἀναγινώσκομεν: 3 σὺν 5 ἴσον τῶν 2 σὺν 6· πάντες μὲν οἱ πρὸς ἀριστερὰν τῆ = συμβόλου κείμενοι ὅροι, συνάμα λαμβανόμενοι, καλεῖνται πρῶτον μέλος τῆς ἔξισώσεως· πάντες δὲ οἱ πρὸς δεξιὰν, μέλος δευτέρον· ἐπὶ ἔν τῆς παρούσης ἔξισώσεως πρῶτον μὲν ὑπάρχει μέλος $3 + 5$, δεύτερον δὲ $2 + 6$.

384. Ἡ τέχνη τῆ διὰ τῶν ἔξισώσεων περικίλα προβλήματα, διὰ ποσῶν προβαλλόμενα, ἐπιλύειν καλεῖται **Ἀνάλυσις**, ἐπεὶ περ, ὡς παντὶ δήλον ἔσται, ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα, ἀναλυομένης, εἴτ' ἔν ἐφ' ἀπλυσέραν ἐκθεσιν ἡκέσης, τῆς ζητουμένης ποσότητος.

385. **Δύσις** προβλήματος εἰν ἡ εὕρεσις τῆς δυνάμεως ἐνὸς ἢ πλείονων ἀγνώστων ποσῶν· ἀλλ' ἡδεμία ποσότητος ἀγνώστου εὐρεθήσεται δύναμις, εἰ μὴ ἡ ἀγνώ-

τος αὕτη ἐπὶ θατέρῃ τῶν τῆς ἐξίσωσεως μελῶν μεταβι-
βαθῇ, ἐπὶ θατέρῃ μόνων τῶν γνωστῶν ποσοτήτων κει-
μένων· τῶντι γὰρ αὕτη τὸ πρὶν ἀγνοούμενη, εἰς ἴση
εὐρεθῇ ἐγνωσμέναις ποσότησι, γνώριμος ἀποκατασταθήσε-
ται· εἰς, φέρε, ἀγάγωμεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὸτο $\chi = 3$
 $+ 2$, ἡ δύναμις τῆς χ ἀπολύτως γνωστὴ κατασταθήσεται.

386. Δῆλον δὲ, ὡς γινῶναι τὸ ἀγνοῶν ἄλλως ἢ
δυνησόμεθα, εἰμὴ διὰ τινων σχέσεων, ὥς ὑποτίθεται ἔ-
χειν πρὸς τὰ ἐγνωσμένα· αὗται δὲ αἱ ὑποτιθέμεναι σχέ-
σεις ὀνομάζονται $\theta \epsilon \sigma \epsilon \iota \varsigma$, ἡ διδόμενα τοῦ προ-
βλήματος.

387. Εἰς παντὸς προβλήματος διὰ τῶν ἐξισώσεων
ἐπιλύσιν, τριῶν τετῶν ἀναγκαίως δεήσει.

388. Α'. Ἐξετασέν λίαν ἐπιμελῶς τὸ ζήτημα, ἵν'
ἐντεῦθεν ἐκδηλώσῃ ἔχωμεν τὰς $\theta \epsilon \sigma \epsilon \iota \varsigma$ τοῦ προβλήματος,
εἴτ' ἔν τας τῶν ἀγνώστων πρὸς τὰ ἐγνωσμένα σχέσεις·
ἀλλ' ἐπὶ τῷτο ἀμήχανον ἀποδῆναι γενικόν τινα κανόνα·
ἐνθεν μέντοι τὸ εὐφρές, ἢ ἀγχίνον, ἐνθεν δὲ τὸ ἐρμελές
τῆς ἐγγυμνάσεως τοῦ ἐπιλύοντος, ταυτὶ ἐκτελέσαι δυ-
νῆσονται.

389. Β'. Μετὰ τῷτο δὲ, τὰς σχέσεις ταύτας ἐκ-
θετέον δι' ἐξισώσεως, ὅ εἰσιν, ἐκφραστέον ταύτας διὰ συμ-
βολικῆς, ὅπως εἰπεῖν, ἐρμηνείας, παριστῶντας διὰ τῶν δε-
όντων στοιχείων τὰς τε ἀγνώστας, ἢ ἐγνωσμένας ποσότη-
τας· διὰ δὲ πλεῖω σαφένειαν τῆς ἐκθέσεως τὰς αὐτὰς ποσό-
τητας, ἢ τὰ ὅμοια μέρη τῆς αὐτῆς ποσότητος τῷ αὐτῷ ἐκ-
δηλωτέον γράμματι, προτιθέντας αὐτῷ, εἰ δύοι, συνερ-
γούν τινα, ἢ παρονομασίην κληθείσης, φέρε, ποσότητός
τινος χ , τὸ μὲν διπλὸν αὐτῆς ἐκθετέον διὰ 2χ , τὸ δὲ

τοῦ τρίτον διὰ $\frac{\chi}{3}$ κτ.

390. Τῷ προβλήματι ὅπως ἐξισώσει ἐμπεριληφθέντος, λείπεται ἐξῆς παντοίως ἀποπειραῖν αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως, ὃ ἐστὶ διαφόρος ἐπ' αὐτῆς ποιεῖν μεταλλάξας, ἀφορώσας εἰς τὸ τῶν ἄλλων ἀπαλλαγῆναι τὴν ἀγνοῶσαν, ὃ ἐστὶν, εἰς τὸ ποιῆσαι, τὴν μὲν ἀγνοῶσαν εἶναι ἐπὶ θατέρῳ τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, ἐπὶ θατέρῳ δὲ τὰς ἐγνωσμένας· τὲς δ' ἐπὶ τῆς τρίτης αὐτῆς πράξεως κανόνας καὶ δὴ ἀποδώσομεν.

391. Τὸ πρόβλημα πρωτοβάθμιον ὀνομάζεται, ὅταν ἡ ἀγνοῶσα καὶ ἐπὶ πρῶτον βαθμὸν ὑφωμένη ἦ· δευτεροβάθμιον δὲ, ὅταν ὁ μείζων βαθμὸς τῶν τῆς ἀγνώσεως ἢ τετράγωνος, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως· ὅπως $\alpha + \chi = \alpha\beta$ ἐστὶ πρόβλημα, ἡ ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος, ἀλλὰ $\alpha + \chi^2 - \beta\chi = \gamma$ ἐστὶν ἐξίσωσις τριτοβάθμιος.

392. Τὸ πρόβλημα δύναται, ἢ μίαν ἐξίσωσιν εἶχειν, εἴαν ἡ μία ἢ θέσις, ἢ πλείους, εἴαν ὥσι πλείους· ἐφ' ὅτε μέντοι δι' ἐμμελῶν ἐπιστάσεων ἐν τοῖς ἀγνώστοις τε καὶ γνωστοῖς γινομένων, ἐπιλυθῆναι δύναται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως, ὃ ἄλλως ἐπιλύεται διὰ πλειόνων.

Πρόβλημα λύειν εὐρίσκειν ἐστὶν, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων συνιδεῖν παντὶ ἔξεστιν, ἐν γνωστοῖς τὴν ἀγνοῶσαν ποσὴ δύναμιν ἢ πασῶν τῶν ἐμπεριεχομένων ἀγνώσεων· ἐξίσωσιν δ' ἐπιλύειν, τὸ ἀγνοῶσαν ἐστὶ γινῶναι, ποιεῖντας αὐτὸ μὲν μονάζειν ἐπὶ θατέρῳ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ὡς ἰσόμενον ταῖς ἐπὶ θατέρῳ ἐγνωσμέναις· λαβεῖν μέντοι τὴν ἀγνοῶσαν τινὸς δύναμιν ποιεῖν ἐστὶν αὐτὸ μονάζειν ἐπὶ θατέρῳ τῶν μελῶν, καὶ ἐγνωσμέναι ὥσιν αἱ ἐν θατέρῳ, καὶ ἀγνώστοι.

393. Ἀναμνησέον μέντοι ἐνταῦθα τῷ (Α' ριβ. 13, 14) ἐκτεθέντος ἀξιώματος, εἴτ' ἔν ὃ λόγος ὁ τῆς ἰσότητος ὕδαμιαν ὑπομενεὶ τροπήν, καὶ ἑκατέρῳ μέλει προσεβῆ,

κἂν ἀφ' ἑκατέρου τὸ αὐτὸ πρὸν ἀφαιρεθῇ· εἴτε ἑκάτερον ἐπὶ τὸ αὐτὸ πρὸν πολλαπλασιασθῇ, εἴτε διὰ τῷ αὐτῷ διαιρεθῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Εἵκθεσις τῶν ἀρχοειδῶν μεταχρηματισμῶν, τῶν γενέσθαι δυναμένων ἔντε ταῖς ἐξισώσεσι καὶ ταῖς ἀναλογίαις.

394. Ἡ τῷ εὐκαίρως χρῆσθαι ποικίλοις μεταχρηματισμοῖς κατὰ τὴν χρείαν τῷ προκειμένῳ ἔντε ἐξισώσεσι, καὶ ἐν ἀναλογίαις, καὶ μὴν καὶ τῷ ἀνάγειν, ἐξισώσεις μὲν εἰς ἀναλογίας, ταύτας δ' ἀνάπαλιν εἰς ἐκείνας, τέχνη, ἅπαντα, ὡς εἶπεν, ῥαδιουργεῖ, καὶ ὅπως τὰ εἰς ἐπίλυσιν τῶν δυσχερεστάτων προβλημάτων, ἀλλὰ καὶ εἰς ἀπάσας μικρὰς τὰς δείξεις τῆς τε συνήθους καὶ δὴ καὶ τῆς ὑψηλοτέρας Γεωμετρίας.

Εἴδει ἄρα ὑποβαλεῖν ταῖς τῶν πρωτοπείρων ὀψεσιν ἰδέαν τινὰ τῶν δε τῶν μεταχρηματισμῶν τῶν εἰς πλείω χρήσιν τοῖς Μαθηματικαῖς ἡκόντων, ἵν', ὥσπερ εἰς τέτοις οἰκειωθέντες, ἡδύναντο εὐκαίρως χρῆσθαι αὐτοῖς ἐν ἅπαντι τῷ τῶν μαθηματικῶν σαθίῳ, τῆς αὐτῶν ἀπονάμενοι χρήσεως· παραπέμψομεν δὲ τὸν μετιόντα εἰς τὰς χώρας, ἐνθα προδεδεικται ἑκάστη μέθοδος· ἀλλ' ἀντὶ γὰρ γραμμάτων ἀντεισακτέον τῷ βελομένῳ ἀριθμῷ, ἵν' ἐναργέως περὶ παριζῶται ἀπάσης συμβολικῆς ἐκθέσεως ὁ νῦν.

395. α'. Ἐς $\alpha = \beta$ · ἐκὼν α'. $\alpha - \beta = 0$ (Α'. ριβ. 15)· β'. $\beta - \alpha = 0$ · γ'. $\alpha + \beta = 2\beta$, ἢ $\beta + \alpha$

$= 2\alpha \cdot \delta$. $\alpha + \nu = \beta + \nu$, ἢ $\alpha - \nu = \beta - \nu$ (393).
ἢ $\nu - \alpha = \nu - \beta$. ϵ . $\alpha + \nu - \nu - \beta = 0$ (Α'ριθ. 15).

396. β'. Ε'ξω $\alpha = \beta$. ἐκέν α . $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : 1$

(240), ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{1} = \frac{\beta}{1}$, ἢ $\sqrt{\beta} =$

$\frac{\alpha \times 1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ ἢ $1 = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ (252, 253).

397. γ'. Ε'ξω $\alpha^2 = \beta$. ἐκέν $\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha}$ (118)

ἢ ἐν γένει $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$. ἄρα $\alpha : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\beta} : 1$ (240).

ἢ $\sqrt{\alpha} : 1 :: \alpha : \sqrt{\beta}$.

398. δ'. Ε'ξω $\alpha = \beta$. ἄρα $\alpha^2 = \beta^2$ (78) ἢ
ἐν γένει $\alpha^2 = \beta^2$. ἄρα $\alpha : \beta :: \beta : \alpha$ (240). ἄρα $\alpha =$

$\frac{\beta^2}{\alpha}$ ἢ $\beta = \frac{\alpha^2}{\beta}$ (253). ἐν γένει δὲ ἔσαι $\alpha^2 : \beta^2 :: \beta^2$
: α^2 . ὅθεν $\alpha^2 : \beta^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2 - \beta^2$ κτ.

399. ϵ . Ε'ξω $\alpha = \sqrt{\beta}$. ἄρα $\alpha^2 = \beta$ (78, 118).

ἄρα $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \alpha$ (240) ἄρα $\alpha = \frac{\beta}{\alpha}$, ἢ $\sqrt{\beta} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta}}$

(250) ἢ ἐν γένει ἔαν $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$, ἔσαι $\alpha^2 = \beta$.

400. ς'. Ε'ξω $\sqrt{\alpha} = \beta$. ἄρα $\alpha : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\beta} : 1$

(240). ὅθεν $\sqrt{\alpha} = \frac{\beta}{1}$ ἢ $1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$. β'. $\sqrt{\alpha} = \beta$, ὅθεν α

$= \beta^2$. ἐκέν $\alpha : \beta :: \beta : 1$. ὅθεν $\alpha = \frac{\beta^2}{1}$, ἢ $\beta = \frac{\alpha}{\beta}$, ἐκ τού-

των δὲ ἢ $\alpha + \beta : \beta :: \beta + 1 : 1$ κτ. (244).

401. ζ'. Ε'ξω $\alpha = \beta$. ἄρα $2\alpha = 2\beta$. ἢ ἐν γέ-

νει $\nu\alpha = \nu\beta$ (301). ἄρα $\alpha : \beta :: \nu : \alpha \cdot \beta' \cdot \nu = \frac{\beta\nu}{\alpha}$, ἔ $\alpha = \frac{\beta\nu}{\nu}$ (250) γ' $\nu : \beta + \nu :: \nu : \alpha + \nu$, ἢ $\nu - \beta : \beta :: \nu - \alpha : \alpha$ κτ. (344).

402. ἢ. Ἐ'σω $\alpha = \beta \cdot \epsilon\kappa\epsilon\nu \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ ἔ $\epsilon\nu \gamma\acute{\epsilon}\nu\epsilon\iota \frac{\alpha}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$ (Πόρισμ.

τῷ 258), ἄρα $\alpha : \frac{\alpha}{\nu} :: \beta : \frac{\beta}{\nu}$ (258). ἄρα $\beta' \cdot \tau\epsilon\theta\acute{\epsilon}\nu\tau\omicron\varsigma \frac{\alpha}{\nu}$,

$= p$, ἔ $\frac{\beta}{\nu} = p$, ἔσαι $\beta = \frac{\alpha p}{p}$, ἔ $\alpha = \frac{\beta p}{p}$ (250).

403. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐ'πὶ τῷ ἐσχάτῳ τῷδε ὑποδείγματος παρατηρητέον, ὡς ὅταν σημειῶν δέη κλάσματος διὰ κλάσματος διαίρεσιν, ἢ ἔ $\delta\iota \acute{o}\lambda\omicron\chi\epsilon\rho\epsilon\varsigma$, ἐκθετῶν ἑκάστων κλάσμα δι' ἐνὸς μόνου γραμματος· τυτὶ δὲ ἐχ' ὅπως τὴν τῷ νέῃ πηλίκῃ ἐκθεσιν, ἀλλὰ ἔ $\tau\eta\nu \lambda\acute{\upsilon}\sigma\iota\nu \tau\omicron\upsilon \pi\rho\alpha\beta\lambda\acute{\eta}\mu\alpha\tau\omicron\varsigma \epsilon\kappa \acute{\alpha}\nu\tau\iota\varsigma \epsilon\dot{\iota}\pi\omicron\iota \acute{o}\sigma\omicron\nu \epsilon\acute{\xi}\epsilon\upsilon\mu\alpha\rho\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota.$

404. Σ'. Ἐ'σω $\nu\alpha = \beta \cdot \epsilon\kappa\epsilon\nu \alpha = \frac{\beta}{\nu}$ (100), ἢ $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$ ἄρα ἔ $\alpha : \beta :: 1 : \nu$ (240) $\epsilon\kappa\epsilon\nu \frac{\alpha\nu}{\beta} = 1$ (250).

ἐκ τῷ $\nu\alpha = \beta$ ἀποφέρεται ἔ $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \nu$ (240). ἄρα $\alpha = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{\nu}$, ἔ $\frac{\alpha\nu}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\beta}$

405. Γ. Ἐ'σω $\alpha = \nu\beta \cdot \acute{\alpha}\rho\alpha \nu = \frac{\alpha}{\beta}$, καὶ $\beta = \frac{\alpha}{\nu}$

(Α'ριθ. 108) ἄρα ἔ $\nu : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\alpha} : \beta$ ὅθεν $\sqrt{\alpha} = \frac{\beta\nu}{\sqrt{\alpha}}$ (250).

$$406. \text{ ια'. Ε'ςω } \alpha = \frac{\beta}{\gamma}, \text{ ἄρα } \alpha\gamma = \beta \text{ (107). } \alpha.$$

$$\text{ρα εἰς } \gamma = \frac{\beta}{\alpha} \text{ (Α'ριθ. 108). ἄρα τελευταῖον } \alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \gamma.$$

$$407. \text{ ιβ'. Ε'ςω } \frac{\alpha}{\gamma} = \beta. \text{ ἄρα } \alpha. \alpha = \beta\gamma \text{ (Α'ριθ.}$$

$$107). \beta'. \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \gamma'. \beta : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\alpha} : \gamma.$$

$$408. \text{ ιγ'. Ε'ςω } \alpha\gamma = \beta\gamma. \text{ ἄρα } \alpha. \alpha = \frac{\beta\gamma}{\gamma} \cdot \beta'.$$

$$\gamma = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot \gamma'. \beta = \frac{\alpha\gamma}{\gamma} \cdot \delta'. \gamma = \frac{\alpha\gamma}{\beta} \text{ (250).}$$

$$409. \text{ ιδ'. Ε'ςω } \alpha\gamma = \beta\gamma. \text{ ἄρα } \alpha. \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\gamma}$$

$$(291) \beta'. \alpha : \beta :: \gamma : \gamma'. \gamma' : \gamma :: \beta : \alpha$$

$$\text{ιε'. Ε'ςω } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}. \text{ ἄρα } \alpha. \alpha : \gamma :: \beta : \gamma \text{ (185).}$$

$$\beta'. \alpha = \frac{\beta\gamma}{\gamma}, \gamma = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \gamma = \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \text{ εἰς } \beta = \frac{\alpha\gamma}{\gamma} \text{ (250).}$$

$$\gamma'. \frac{\alpha \times \gamma\gamma}{\gamma} = \frac{\beta \times \gamma\gamma}{\gamma} \text{ (393). ἄρα } \alpha\gamma = \beta\gamma \text{ (58).}$$

410. ις'. Ἀναλόγως δὲ τέτοις εἰς ἄπειρα ἄλλα ἀπενέγκασθαι δυνήσόμεθα· κείθω γὰρ παραδείγματος χάριν ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \gamma$ (P), ὅθεν ἀρνούμεθα τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\gamma = \beta\gamma$ (409), ἥτις ἀκριβῶς παρίσχησιν ἢ ἄντις βύληται ἀναλογίαν· ἐπιτρέπεται γὰρ πάντα μὲν πρῶτον ἀναλογίας ὅρον ἐμφαίνειν διὰ α, πάντα δὲ δευ-

τερον διὰ β· ἐκὲν ἐκ τῆς Ρ ἀναλογίας ἀριθμῶ μονογέκ ἐπέκεινα ἄλλας ἐξαγαγεῖν δυνησόμεθα· καὶ γὰρ, ἵνα παρῶ τὰς ὀκτὼ διαφορὰς ἐκείνας διαθέσεις (242), ἃς ὑπελθεῖν ἐξέσαι τοῖς ὅροις τοῖς δε, ναὶ μὴν καὶ τὰς προθέσεις, ἢ ἀφαιρέσεις, ἀνακυπτέσας (242), διτιρεῦντες, ἢ πολλαπλασιάζοντες αὐτὰς δι' ἀριθμῶν διαφορῶν εἰς ἀπειρον (246, 247), ἀπειραριθμὸς ἀναλογίας ἀποτελέσμεν ἐν ὅροις πράγματι ἀλλήλων διεννηνοχόσι· ἢ μὴν ἀλλὰ τῷδε τῶν βαθμῶν σχηματισμῷ, καὶ τῇ ἀπ' αὐτῶν ἐξαγωγῇ τῶν ῥιζῶν, ἄλλας ἀπειραριθμὸς ἀναλογίας ἀποισόμεθα ἐν ὅροις δυνάμει διαφοροῖς ἀλλήλων· οἷαίπερ εἰσὶν αἶδε· $\alpha^1 : \beta^1 :: \gamma^1 : \nu^1$, $\alpha^1 : \beta^3 :: \gamma^3 : \nu^3$, κτ., ἢ $\sqrt{\alpha} :$

$\sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\nu}$, $\sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta} :: \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\nu}$ κτ. (263).

411. ιζ'. Οὐκ ἔστιν οὕτως ἀπλὴ ἐξίσωσις, οἷα ἢ $\alpha = \beta$, ἀφ' ἧς ἐκ ἔστιν ἀπολαβεῖν ἀναλογίαν τινὰ, καὶ ἐκ ταύτης ἀπειραριθμὸς ἐτέρας· ἐκάστη ἄρα τῶν δε τῶν ἀναλογιῶν ἀπο' ὧσει καινὴν ἐξίσωσιν, εἴτ' ἐν τὴν ἐκθεσιν τῆς τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἰσότητος (238)· ἐκ ἔστιν ἄρα ἀπλὴ ἐς τοσούτων ἐξίσωσις, ὥσε ἀπ' αὐτῆς ἀπειραριθμὸς ἄλλας μὴ ἀπαρύνεσθαι.

412. ιη'. Τὴναντίον δὲ, ὅσαιδηποτὲν ἀναλογίαι, εἰς μίαν μόνην ἀναλογίαν, ναὶ μὴν καὶ ἐξίσωσιν ἀναχθῆναι δυνησονται· πολλαπλασιασμῷ γὰρ, ἢ διαιρέσει, ὅρου δι' ὅρου, ἐπάσει διὰ τῷ ἑαυτῷ ὁμοταγῆς, τὰ τέσσαρα γινόμενα, ἢ πηλίκα, ἀποδώσουσιν ἀναλογίαν καὶ δὴ καὶ ἐξίσωσιν (262)· ἔσωσαν γὰρ αἱ τρεῖς ἀναλο. $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ γίται πολλαπλασιάσαντες ἐν πάντας μὲν $\epsilon : \zeta :: \theta : \eta$ τὴν πρώτην ὅρου ἐπ' ἀλλήλους, πάντας $\iota : \kappa :: \mu : \nu$ δὲ τὴν δευτέραν, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως ἔξο. $\alpha\epsilon\iota\beta\zeta\kappa::\gamma\theta\mu\delta\eta\nu$

μεν μίαν μόνην ἀναλογίαν αει: βζκ:: γθμ: δην (262)
ἣτις προβάλλει τὴν ἐξίσωσιν αειδην = βζκγθμ (238).

413. Ὡσαύτωςδε ὅσας δηποτὺν ἐξισώσεις συνάψαι
τῶν πρώτων ἢ δευτέρων μελῶν ἐπὶ μίαν ἀναγαγεῖν δυ-
νησόμεθα (393). ὥτως αἱ πέντε ἐξισώσεις αἱ ἐνταῦθα ἐκ
κεῖμεναι μίαν τὴν P ἀπαρτίσεις.

$$\alpha = \beta$$

$$\gamma = \delta$$

$$\varepsilon = \zeta$$

$$\vartheta = \eta$$

$$\iota = \kappa$$

$$\alpha + \gamma + \varepsilon + \vartheta + \iota = \beta + \delta + \zeta + \eta + \kappa \text{ (P)}.$$

414. Οἱ πηνίκα ἄρα τὸ πρόβλημα πλείους περιέχει
ἐξισώσεις, ἐξέσαι συνάψαι τὴν τῷ πρώτῳ μέλῳ ὅρες
μεθ' ὃ τὴν τῷ δευτέρῳ, μίαν μόνην ἐξ αὐτῶν συστήσασθαι
ἐξίσωσιν· ὃ δὲ ἐν ἐκ εὐαρίθμους περιπτώσεων ἐξευμα-
ρίζει τὴν τῷ προβλήματος λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ πρωτοβαθμίων προβλημάτων, μιᾷ
μόνῃ συνεσηκώτων ἐξισώσει.

415. Μέθοδος γενικὴ· Τὴν τῆς ἀγνώστου ποσότητος,
εἴτ' ἐν ζητημένης, χ πρὸς τὰς ἐγνωσμένας σχέσιν ἢ χέ-
σεις, συμβολικῶς, ταύτῃν εἰπεῖν δι' ἐξισώσεως ἐκλεμέ-
νοι, μνηρὴ γενέσθαι ποιῶμεν τὴν ἀγνώστην χ, ἐπὶ θατέρῳ
μόνων κειμένων τῶν γνωρίμων· ὅτινος δὲ ἐν ἐπιτεύξει ἐσά-
μεθα μιᾷ ἢ ἢ πλείοσι τῶν ἐξῆς πράξεων.

416. Α. Ἐὰν ἡ ἄγνωστος μετὰ μιᾶς, ἢ πλείονων γνωρίμων, ἄθροισμάτι ἐμφαίῃ, προθέσῃ, ἢ ἀφαιρέσῃ μονήρη αὐτὴν ἐργαζόμεθα, μετατιθέντες ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως πάσας τὰς γνωρίμους ποσότητας τὰς σὺν αὐτῇ μετ' ἐναντίων σημείων· ὃ καλεῖσθαι Μεταθέσεις.

Οὕτως ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $x+4=10$, μετατιθῆμι τὸν $+4$ ἐπὶ τὰ δεξιὰ $τῶ=$ σημείῳ, μεταλλάττων τὸ $+$ σύμβολον εἰς $-$ · ἔσαι ἔν $x=10-4$.

Ἰδὲ δὴ ὁ τῆς μεταθέσεως λόγος· ἐὰν γὰρ ἐκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως $x+4=10$ ἀφαιρέθῃ ἡ ποσότης $+4$, ἡ μὲν ἐξίσωσις ἔσαι $x+4-4=10-4$, ὁ δὲ τῆς ἰσότητος λόγος ἡκιστα λυμανθήσεται (392)· ἐκὲν γράφοντες $x=10-4$ εὐδὲν ἦτον ἀφαιρῶμεν ἐκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως τὴν $+4$ ποσότητα· εἴγε ἡ ἐξίσωσις $x+4-4=10-4$ ἀναγωγῇ ἀποτελεῖται $x=10-4$, ὥς ἡδὴ γέγραπται· ἐὰν δὲ ἡ ἐξίσωσις $x-4=10$, μετατιθῆμι ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως τὴν 4 ποσότητα, μεταβάλλων τὸ $-$ ἐπὶ $+$, ὅπερ τὴν μὲν ἐξίσωσιν ἀποτελεῖ $x=10+4$, τὸν δὲ λόγον τῆς ἰσότητος κατέχει ἀπῆμάν· ἐ γὰρ εὐδὲν ἄλλο ὅτι μὴ τὴν $+4$ ποσότητα ἐκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως συνήψαμεν (393)· ἐὰν δὲ πραγματικῶς $+4$ προσεθῇ ἐκατέρω τῶν ἐξισώσεως $x-4=10$ μελῶν, γενήσεται $x-4+4=10+4$, ἥτις δι' ἀναγωγῆς ἀποκαθίσταται $x=10+4$, ὥπερ αὐτὴν ἐγράψαμεν διὰ μεταθέσεως.

Ἐὰν ἄρα ἡ $x+a-b=y$ μεταθέσῃ δυνάμεθα μονήρη ποιῆσαι τὴν x , γράφοντες $x=y-a+b$ · ἔτω γὰρ τὴν μὲν ποσότητα b ἐκατέρωσε συνήψαμεν, τὴν δὲ a ἐκατέρωθεν ἀφείλομεν τῆς ἐξισώσεως.

417. Καὶ τοίνυν ἐὰν ἡ ἄγνωστος x εὐρεθῇ ἐφ' ἐκῇ.

τερα τὰ τῆς ἐξίσωσως μέλη, ἐπεὶ χρὴ ἐπὶ πατέρῳ μό-
νην γενέσθαι, δυνησόμεθα, μηδεμίαν τῆς ἰσότητος ὑπο-
στάσεως τροπὴν, μεταβιβάζειν τὴν ἄγνωστον, ἐνθα κέοιτ'
ἂν αὕτη μετὰ συνεργῶ μείζονος· εἰ γὰρ ἢ $2x + a = b$
 $+ x$, μετατίθεμεν πρῶτον τὸ a · ὅθεν ἔσται $2x = b - a$
 $+ x$, μετατίθεμεν εἴτα δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ τὸ
 $+ x$ · ὅθεν ἔσται $2x - x = b - a$, καὶ ἀναγωγῇ, x
 $= b - a$.

418. Ἐὰν δ' ἐφ' ἑκατέρῳ τῶν μελῶν τὸν αὐτὸν ἔ-
χη συνεργὸν ἢ ἄγνωστο μετὰ συμβόλων ἀντιθέτων, με-
τατίθεμεν τὴν λειπτικὴν ἐπὶ τὴν ὑπάρχουσαν, ἵν' ἢ ἄ-
γνωστος μονάσασα μείνῃ ὑπάρχουσα· ὅπως ἐπὶ τῆς ἐξίσω-
σεως $2x = a - 2x$, μετατίθεμεν τὴν $- 2x$ ἐπὶ πα-
τέρα, πορίζομενοι τὴν ἐξίσωσιν $2x + 2x = a$, εἴτ' ἔν
 $4x = a$.

419. Ἐν γένει δὲ, ὅταν λειπτικὴ ὑπάρχη ἢ ἄγνω-
στος, ἀποτελέμεν αὐτὴν ὑπαρκτικὴν διὰ μεταθέσεως· εἰ γὰρ
ἔν ἢ $a + b = \gamma - x$, ποιῶμεν $x + a + b = \gamma$ · ὅθεν x
 $= \gamma - a - b$.

420. Β'. Ἐὰν ἢ ἄγνωστος μετ' ἀγνώστου γινόμενόν τι
παρέχη, διαιρετέον ἑκάτερον τῶν τῆς ἐξίσωσως με-
λῶν διὰ τῆς τὴν ἄγνωστον πολλαπλασιαζέσης ποσότητος·
ἐπὶ $4x = a$, ἵνα μόνην ποιήσωμεν τὴν x διαιρούμεν διὰ
4 τὴν τε $4x$ καὶ τὴν a , γράφοντες $\frac{4x}{4} = \frac{a}{4}$ · ἀλλὰ $\frac{4x}{4}$

$= x$ · ἢ ἄρα ἐξίσωσις φανήσεται $x = \frac{a}{4}$ (393).

421. Ἐκ δὲ δὴ τέτε τε κανόνος ἀπογεννᾶται ἐν τῇ
πράξει βραχύτερος ἄλλος ὁδε. „Ὅταν ἢ ἄγνωστος παρι-
στῇ τι γινόμενον, γραπτέον μὲν τὴν ἄγνωστον μόνην, δι.

„αιρετέον δὲ τὸς ἄλλης ὅρας τῆς ἐξισώσεως διὰ τῆς πο.
 „σότητος τῆς τὴν ἄγνωστον πολλαπλασιαζέσης“· ἔτως
 ἐπὶ τῷ ἀνωτέρῳ ὑποδείγματος $4x = a$, ἐπεὶ περ ἔγνω.
 σαι ὡς 4 x διαιρεθὲν διὰ 4 παρέξεται x , γράφομεν

$$x = \frac{a}{4}.$$

422. Ταῦτόν δὲ ἔσαι, καὶ αὐτὸ ἀριθμὸν γράμμα
 πολλαπλασιάξῃ τὴν ἄγνωστον· ἔσῃς γὰρ $ax = b + \gamma$,
 γράφομεν $x = \frac{b + \gamma}{a}$. εἰ δ' ἢ $ax + bx + \gamma x = d - \zeta$,

παρατηρῶντες ὅτι οἱ τρεῖς τῷ πρώτῳ μέλῳ ὅροι ὑδὲν εἰσιν
 ἀλλ' ἢ τὸ γινόμενον ὑπὸ x ἢ $a + b + \gamma$ (68. ἀ.) ἀ-
 παλλάττομεν τῷ πολλαπλασιασῷ τὴν x διὰ διαιρέσεως

γράφοντες $x = \frac{d - \zeta}{a + b + \gamma}$. τῆς δ' ἄγνωστο x ἴσης εἶρε-

θεύσης γνωσταῖς ποσότησι ταῖς ἐπὶ δεύτερα, τὸ πρόβλη-
 μα ἐπιλέλυνται (5). εἰ δ' ἢ ἐξίσωσις ἢ $ax - bx + \gamma = d - \zeta x$, τὴν x μονάζουσιν καταστήσομεν ἔτω·
 ἀ. μετατίθεμεν $-\zeta x$ ἐπ' ἀριστερά, ἢ $+ \alpha \gamma$ ἐπὶ τὰ δε-
 ξιά γράφοντες $ax - bx + \zeta x = d - \alpha \gamma$. β'. γράφομεν
 τὴν x μόνην ἐπὶ τῷ πρώτῳ μέλῳ, διαιρῶντες τὸ δεύτε-
 ρον διὰ $a - b + \zeta$ πολλαπλασιασῷ τῆς ἄγνωστο· ἢ δὴ

$$\text{ἔχομεν } x = \frac{d - \alpha \gamma}{a - b + \zeta}.$$

423. Γ. „Εἰ δ' ἢ ἄγνωστο κλάσματι ἐφαίνῃ μεθ'
 „ἑτέρας ποσότητος, ἀπαλλάξομεν αὐτήν, πολλαπλασιά-
 „ζοντες πάντας τὸς ὅρας τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὴν τὸ ἄγ-
 „γνωστον διαιρῶσαν ποσότητα“.

Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{5} = \alpha$, ἑκάτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν τὸ ἄγνωστον διαιρῶσαν ποσότητα 5· ἔσται ἔν $\frac{5\chi}{5} = 5\alpha$ · ἀλλὰ $\frac{5\chi}{5} = \chi$ · ἀποτελεσθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\chi = 5\alpha$.

424. Διὰ πολλαπλασιασμῷ τοίνυν ἀπλῆς τῆς χ γινομένης ἐπὶ θατέρω τῶν μελῶν, συνάγομεν ἐξῆς ἐν τῇ πράξει κανόνα, ἡὗταν ἡ ἄγνωστος διὰ ποσότητος ἄλλης διαιρῆται, γραπτέον αὐτὴν ἀπλῶς ὡς ὀλοχερῇ, πολλαπλασιαστέον δὲ πάντας τὰς λοιπὰς τῆς ἐξισώσεως ὅρους διὰ τῆς τὴν ἄγνωστον διαιρέσεως ποσότητος· ἐπὶ ἔν τῷ ἀνωτέρω ὑποδείγματος $\frac{\chi}{5} = \alpha$, γράφομεν ἔτω $\chi = 5\alpha$ · ταῦτόν δὲ γενήσεται, καὶ ἡ διαιρῶσα τὴν ἄγνωστον ἔντι τῶν γραμμάτων ὑπάρχη· ἐπὶ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{\alpha} = \beta$, γράφομεν $\chi = \alpha\beta$.

425. Συμβάν δὲ τὴν ἄγνωστον τὸν τῷ παρονομαστῷ χώρον ἐπέχειν ἐπὶ τῷ κλάσματος, ὡς ἐν $\frac{\alpha}{\chi} = \beta$, κατὰ τὸν δὲ τὸν κανόνα τὸ α μονάσει ἐπὶ τῷ πρώτῳ τῆς ἐξισώσεως μέλῳ, τὸ δὲ δεύτερον μέλος β πολλαπλασιασθήσεται ἐπὶ χ · ὅθεν ἔσται $\alpha = \beta\chi$, ἐνθα διαιρέσει διὰ β προκύψει $\frac{\alpha}{\beta} = \chi$ (420).

426. Ἐν γένει δὲ χρώμεθα τῷ πολλαπλασιασμῷ, ἡνίκα ἄρά τι κλάσμα ἐκ τῆς ἐξισώσεως βυλόμεθα· ἔχοντες γὰρ $\chi + \frac{1}{4} = \alpha$, ἐὰν ἄραι ἐντεῦθεν τὸ $\frac{1}{4}$ κλάσμα

βελώμεθα, πολλαπλασιάζομεν πᾶσαν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ 4 γράφοντες $4x + 3 = 4a$ · ἵνα δ' ἐκπερανθῇ ἡ ἐπίλυσις ταύτης τῆς ἐξισώσεως, γράφομεν τὸ πρῶτον $4x = 4a - 3$ (416), εἴτα $x = \frac{4a - 3}{4}$ (420).

427. Ἀλλὰ πλείοσι γὰρ ἐντυχόντες κλάσμασιν, ἅπαντα ἀφανίζομεν, πολλαπλασιάζαντες ἑκάτερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑφ' ἀπάντων τῶν παρονομασῶν· ἔτις ἐὰν ᾖ $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = a$, πολλαπλασιασθεῖσα πᾶσα ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ 40, γενήσεται $40x + \frac{40x}{2} + \frac{40x}{4} + \frac{40x}{5} = 40a$ (ἀρ. 191)· ἐπεὶ δὲ $\frac{40x}{2} = 20x$, $\frac{40x}{4} = 10x$, $\frac{40x}{5} = 8x$ · ἔστι ἄρα $40x + 20x + 10x + 8x = 40a$, καὶ ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὄρων (30) $78x = 40a$ · ἄρα $x = \frac{40a}{78}$ (420).

Ἐχθεις δὲ ἐ τὸν λόγον ταύτης τῆς πράξεως· πολλαπλασιασθέντος μὲν γὰρ ἑκατέρου τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν ἐπὶ 40, γινόμενον ὑφ' ἀπάντων τῶν παρονομασῶν, ὁ τῆς ἰσότητος λόγος ἀμετακίνητος μεμένηκε (393)· παρὰ ταῦτα δὲ, ἐπεὶ περὶ ὁ ἑκάστου κλάσματος παρονομασῆς ἦν εἰς τῶν ποιητῶν τῷ 40 ἀριθμῷ, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιασθήσαν ἅπαντες οἱ τῶν κλασμάτων ἀριθμηταί· ἅπας ἄρα ἀριθμητῆς πολλαπλασθεὶς ἐπὶ 40, διαιρέσιμος εἶναι ὀφείλει λειψάκις ἄτερ διὰ τῷ κατ' αὐτὸν παρονομα-

58. γινομένης δὲ τῆς διαιρέσεως ταύτης, ἅπαντα τὰ κλάσματα ἀφανισθῆναι ἐπ' ἀνάγκης (Α'ριθ. 108).

428. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπεὶ περὶ πολλαπλασιάζοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν ὅρον $\frac{\chi}{2}$ ἐπὶ $2 \times 4 \times 5$, ὅθεν γίνεται

$\frac{40\chi}{2}$, διαιρεῖν ὀφειλομένον τὸν ἀριθμητὴν 40χ διὰ 2, ὅ,

τε ἐπὶ 2 πολλαπλασιασμός, ἀλλὰ ἐξ ἣ δια 2 διαιρέσεις, ἄχρηστα δὴ περὶ τυγχάνουσιν· ἀποχρήσειεν ἄρα, εἰ πολλαπλασιάσαιμεν τὸν ἀριθμητὴν χ ἐπὶ 4×5 , γινόμενον ὑπὸ δύο παρονομασῶν ἄλλων κλασμάτων, ἀποβαλλομένου ἄρδην τῷ 2 παρονομαστῷ· ὅθεν αὐτίκα προκύψει 20χ , ὅπερ μετὰ πράξεις τινὰς ἄλλως εὐρίσκεται· ταῦτὸν δὲ νοητέον ἐξ περὶ τῶν λοιπῶν κλασμάτων, τῶν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει ἐμπεριεχομένων· ὅθεν ἀναφίει ἐπὶ τῆς πράξεως κανὼν ἐπιτομώτερος.

429. „Ὅταν ἐξισώσῃς τις πλείω περιέχῃ κλάσματα, δίχα τινὸς μετακινήσεως τῆς ἰσότητος, πολλαπλασιάσας πάντας τὰς τῶν κλασμάτων ἀριθμητάς, ἕκαστον ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομασῶν τῶν ἄλλων, ἀποτιθεμένους πᾶμπαν τὸν ἐκάστου παρονομαστὴν“· ἐπὶ τῆς προ-

τεθείσης ἔν ἐξισώσεως $\chi + \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} = \alpha$, πολ-

λαπλασιασθέντων τότε ὁλοχερὲς χ ἐξ ὁλοχερὲς α ἐπὶ 40, γινόμενον ὑπὸ πάντων τῶν παρονομασῶν· ἀλλὰ

ἀ. $\frac{\chi}{2}$ πολλαπλασιασθέντω ἐπὶ 4×5 , ἀπορρίπτομένου τῷ

κατ' αὐτὸ παρονομαστῷ· ὅθεν ἔσαι 20χ · β. $\frac{\chi}{4}$ πολ-

λαπλασιασθήτω ἐπὶ 2×5 · ὅθεν 10χ · γ'· $\frac{\chi}{5}$ ἐπὶ 2×4 · ὅθεν 8χ · ἢ δ' ἐξίσωσις ἀμέσως διὰ τὴν τοῦ πολλαπλασιασμῆ γίνεται $40\chi + 20\chi + 10\chi + 8\chi = 40\alpha$, ἐνθ' ἄλλως προσέδει καὶ διαιρέσεως.

Εἴαν δὲ ὁ ἀριθμητὴς τῆ ἐξαλειφθησόμενα κλάσμα-
τος ἄλλη ποσότης ἢ παρὰ τὴν ἀγνώστον χ , μετιτέον αὐ-
τὴν καθάπερ εἴρηται περὶ τῆς ἀγνώστου χ , μηδόλως πο-
λλαπλασιάζοντας ἐπὶ τὸν οἰκεῖον αὐτῆς παρονομασὴν (424).

430. Εἴντεῦθεν ἄρα ἡνίκ' ἂν δύο μόνα κλάσματα
ἐξισώσῃ τινὶ παρῶσιν, εἰς ἀπάλειψιν αὐτῶν πολλαπλα-
σιαστέον τὸν ἑκατέρω ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν θατέρω παρονομα-
σὴν, τὰ δ' ἐνυπάρχοντα ὀλοχερῇ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν
δύο παρονομασῶν.

Προκειμένης φέρε ἐξισώσεως τῆς $\chi + \frac{\chi}{3} = \alpha + \frac{\chi}{4}$,
πολλαπλασιασθήτω πρῶτον τὰ ὀλοχερῇ χ καὶ α ἐπὶ
 3×4 , γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο παρονομασῶν, εἴτα ὁ μὲν
ἀριθμητὴς $\frac{\chi}{3}$ (παρονομασμένε δὴπε τῆ παρονομαστὴ 3) ἐπὶ

τὸν 4 παρονομασὴν· ὅθεν ἔσται 4χ · ὁ δὲ $\frac{\chi}{4}$ ἐπὶ τὸν 3
παρονομασὴν· ὅθεν 3χ · ἢ ἔν προτεθεῖσα ἐξίσωσις γίνε-
ται $12\chi + 4\chi = 12\alpha + 3\chi$ · μεταθέσει δὲ τῆ 3χ , καὶ
ἀναγωγῇ, $13\chi = 12\alpha$ (416)· ὅθεν $\chi = \frac{12\alpha}{13}$ (420).

Συμβαὴν δὲ ἐντυχεῖν οὐσί κλάσμασι, τὸν αὐτὸν ἔ-
χουσι παρονομασὴν, ἀποχρήσει μόνον τὰ ὀλοχερῇ πολλα-
πλασιάσαι ἐπὶ τὸν παρονομασὴν· εἴαν ἔν ἡ $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 6$,

πολλὰ πλῆθη ἀσπίτων μόνος ὁ θεὸς ἐπὶ 5· ἢ δὲ ἐξίσωσις ἔσσεται $20 + 10 = 30$.

431. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐστὶ μὲν ὅτι τὸ πᾶν των τῶν τῆς Μαθηματικῆς μερῶν χρησιμώτατόν τε καὶ τεκτονότατον ἀνελμφολέκτως ἢ ἀνάλυσις, ἥς τὴς καλόνους καὶ μεθοδὸς ἐκτελέσειον ἀποδύναται ἐξοχῶς· δεῖ δὲ ταῦτα ἐκαιωλὴ τὸ τελευτάς καὶ ἐκκρινέσειν ἀπεργάζεσθαι, προοιμείνους ἔργων ἄριστων προδλημάτων, ὡς ἢ λύσις τῆς τῶν προεκτεθειμένων ἡδὴ θεωρίας ἐξέρχεται.

432. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ὀνύσαστό τις ἀγρὸς τρεῖς, ὧν ὁ μὲν διευτέρος τετιμῆται τῷ διπλασῷ τῆς τῷ πρώτου τιμῆς, ὁ δὲ τρίτος τῷ τριπλασῷ τῆς τῷ διευτέρου· ἢ δὲ ὁ λητὴ τῶν τριῶν τιμῇ ἔσιν 6300 ἀργύριον· πόσιν ἀρεὰ τετιμῆται ἕκαστος;

ΑΤΤΙΣ καὶ ΣΧΟΛΙΟΝ. Τριτὸ πρόβλημα καὶ τὰς τῶν ὁμοφυῶν ἐκπλαθῆναι δύνανται καὶ διὰ τῆς μεθοδὸς τῆς ψευδῆς ὑποθέσεως (Α' ἰθ. 264). ὡς ὅτι ἐκείνη 1 κέκληται ἢ πασῶν ἐλπίτων ποσότης, ὥτως ἐνταῦθα κληθῆσεται καὶ ἢ ἐλπίτων τῶν τριῶν τιμῇ, εἴτ' ὅτι ἢ τῷ πρώτῳ ἀγρῷ· ἢ δὲ διευτέρῳ, τὸ διπλασὸν ὅσα τῆς πρώτης, ἔσσεται 2 καὶ ἢ δὲ τρίτῳ, τριπλασὸν ὅσα τῆς διευτέρας, διηλωθῇσεται διὰ 6 καὶ ἀλλ' αἱ τρεῖς ἀμὰ τιμαὶ συμπληρῶσιν ἀργύριον 63000· κληθείσης ἀρεὰ τῆς γνωστῆς ποσότητος 63000 = α, τὸ ζητούμεν ἐξισταδὲν κατὰ τὸν πρώτον κανόνα (388) ἐκτελέσεται συμβολικῶς· κατὰ δὲ τὸν διευτέρον κανόνα (389), εἰπειδὴ ἢ διέσις τῷ προδλημάτος ἐθέλει τὴν ἐλάττω ποσότητα καὶ τὸν πρῶτον διπλασῶ 2 καὶ τὸν τριπλασῶ τῆς διευτέρας 6 καὶ, ἐξισώσθαι τῷ α, συσπῶσεται ἀρεὰ ἢ ἐξίσωσις $κα + 2κα + 6κα = α$.

Τῷ τῶν τριῶν προδλημάτων ἐξισώσεται ὥτω περιγγραφεῖν.

τος λείπεται τὴν ἄγνωστον χ , εἴτ' ἐν τὴν ἐλάττω τιμῇ, μόνην ποιῆσαι γενέσθαι ἐπὶ πατέρου τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ἐν δὲ πατέρῳ μόνας ὑπάρχειν τὰς ἐγνωσμένας (390). τὴν δὲ ἐν μετελευσόμεθα τὸν δὲ τὸν τρόπον.

Α'. Ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὄρων (30) ποιῶμεν $9\chi = \alpha$. Β'. διαιρέσει δὲ ἀπάσης τῆς ἐξισώσεως διὰ 9, $\chi = \frac{\alpha}{9}$ (421). καὶ δὴ τὸ πρόβλημα λέλυται· ἐπεὶ γὰρ

$\alpha = 63000$, καὶ $\chi = \frac{\alpha}{9}$, διαιρετέον ἀριθμητικῶς 63000 διὰ 9· εὐρεθήσεται τοίνυν ὁ πρῶτος ἀγρὸς τετιμημένος ἀργυρίων 7000· ὁ δὲ δεύτερος $2 \times 7000 = 14000$, ὁ δὲ τρίτος $3 \times 14000 = 42000$.

433. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ δὲ βάσανος τῆς τῷ προβλήματος λύσεως γίνεται, εἰδὲν δειχθῇ τὸ ἀποτέλεσμα συμφωνῶν τῇ θέσει, ἢ ταῖς θέσεσι, τῷ προβλήματος.

Ἐπὶ γὰρ τῷ προτεθέντος ὑποδείγματος, εἰδὲν ὑποθεθῇ $\chi = 7000$, εἴτ' ἐν ἡ ἐλάττων τιμῇ, συναφθῇ δὲ αὐτῇ τὸ διπλὸν, ἢ ἡ τῷ δευτέρῳ τιμῇ, εἴτ' ἐν 14000, ἐπιπροσθεθῇ δὲ καὶ τὸ τῆς δευτέρας τιμῆς τριπλάσιον, εἴτ' ἐν 42000, τὸ ὅλικόν ἄθροισμα ἐξισωθήσεται τῷ προτεθέντι ἀριθμῷ 63000, ὥσπερ βέλεται ἡ τῷ προβλήματος θέσις· ἀσφαλῶς ἄρα τὸ πρόβλημα λέλυται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Λιγάνιος διενθυμηθεὶς ἀριθμόν τινα, εἰδὲν, ἔφη, τῷδε συναφθῇ τὸ τριπλὸν αὐτοῦ, καὶ δὴ καὶ τὸ τετραπλὸν, ἔσαι τὸ ὅλικόν ἄθροισμα 80. Τίς ἂν ἔσιν ὁ αὐτός;

ΛΥΣΙΣ. Εὐδὴλον ὡς τοδὶ τῷ προλαβόντι ἔσιν ὁμοφυές· συζαθήσεται ἔν ἐπὶ τὰτα ἡ ἐξίσωσις $\chi + 3\chi + 4\chi = 80$ · ἀναγωγῇ δὲ, $8\chi = 80$ · ἄρα $\chi = \frac{80}{8} = 10$ · διεν-

τενύμηται ἄρα ὁ Λιβάνιος 10· ἡ δὲ βάσανος δείκνυσιν ἀσφαλῆ τὴν τῷ προβλήματος λύσιν, ὅτι $10 + 30 + 40 = 80$,

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Πέτρος, Ἰακώβος καὶ Ἰωάννης καὶ Ἀνδρέας, ἅμα ἀγασιν ἔτη 105· καὶ ἡ μὲν τῷ Πέτρῳ ἡλικία τὸ ἡμισὺ ἐστὶ τῆς τῷ Ἰακώβῳ, τῷ δὲ, τὸ τρίτον τῆς τῷ Ἰωάννῃ· αὐτῷ δὲ, τὸ ἡμιοῦ τῆς τῷ Ἀνδρέᾳ· πόση ἔσιν ἡ ἑκάστη τούτων ἡλικία;

ΛΥΣΙΣ. Τὸ ζήτημα, καλῶς ἐξεταθὲν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα (388), φαίνεται ἐπιλυόμενον, ἥτοι δι' ὀλοχερῶν, ἢ διὰ κλασμάτων.

ἀ. Κληθείσης μὲν γὰρ τῆς τῷ Πέτρῳ ἡλικίας x , ἥτις ἔσται πασῶν ἐλάττων ἐστὶ τὸ ἡμιοῦ τῆς τῷ Ἰακώβῳ, ἡ τῷ Ἰακώβῳ ἔσται $2x$, ἥς τὸ τρίτον ἔσται τῆς τῷ Ἰωάννῃ, ἔσται ἡ τῷ Ἰωάννῃ $6x$ · τέλος δὲ ταύτης τὸ ἡμιοῦ ἔσται τῆς τῷ Ἀνδρέᾳ, ἔσται ἡ τῷ Ἀνδρέᾳ αὐτῷ $12x$ · καὶ ἐπεὶ συλλήθεον πᾶσαι αἱ ἡλικίαι συμπληρῶσι 105 ἔτη, ἅπερ κληθήτωσαν α , ἐκ τῆς τῷ προβλήματος θέσεως προκύψει ἡ ἐξίσωσις $x + 2x + 6x + 12x = \alpha$ · ἀναγωγῇ δὲ, $21x = \alpha$ · ἄρα $(421) x = \frac{\alpha}{21}$

Διαιρεθέντος ἄρα α , εἴτ' ἔν 105, διὰ 21 εὐρεθήσεται $x = 5$, ἡλικία τῷ νεωτέρῳ· ἔκων τῷ μὲν δευτέρῳ ἔσται 10, τῷ δὲ τρίτῳ, 30· τῷ δὲ τετάρτῳ 60, ὧν τὸ ἄθροισμα ἐπ' ἀκριβὲς ἐστὶν 105.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' λογισμὸς τῶν κλασμάτων ἀεὶ ἐπιμηκέσερός ἐστι τῷ τῶν ὀλοχερῶν· ἀποπειρασόμεθα μέντοι αὐτίκα καὶ ταῦδε, ἀ. ἴν' ἀείποι' ἐπὶ τῆς πράξεως ὁ τῷ διὰ κλασμάτων ὀπιθεν τιθῆται τῷ δὲ ὀλοχερῶν· β'. ὅταν ἡ ἐξίσωσις κλάσματα περιέχῃ, κατὰ πρῶτον αὐτῶν αὐτὴν ἀπαλλάττωμεν.

β'. Είληφθω ὡς ἐγνωσμένη μονάς, ἡ ὡς ὅρος πα-
ραθέσεως, ἡ μεγίστη ηλικία, εἴτ' ὣν ἡ τοῦ Ἀνδρέου, ἥς αἱ
τρεῖς ἄλλαι εἰσὶ κλάσματα, καὶ κληθήτω χ · οὐκὲν ἡ τοῦ
Ἰωάννου ηλικία, τὸ ἡμῖσι οὖσα τῆς τοῦ Ἀνδρέου ἔσαι
 $\frac{\chi}{2}$ · ἡ δὲ τοῦ Ἰακώβου, τὸ τρίτον οὖσα τῆς τοῦ Ἰωάννου,

ἔσεται $\frac{\chi}{2 \times 3} = \frac{\chi}{6}$ (Ἀριθ. 203)· τέλος δὲ ἡ τοῦ Πέτρου,

τὸ ἡμῖσι οὖσα τῆς τοῦ Ἰακώβου, ἔσεται $\frac{\chi}{6 \times 2} = \frac{\chi}{12}$ · ἡ δὲ

τοῦ προελήματος θέσις, πάσας τὰς ηλικίας τὰς δεῖσαι
βυλομένη τῷ $105 = \alpha$, ἐκτεθήσεται διὰ τῆς δε τῆς ἐξί-

σώσεως. $\frac{\chi}{12} + \frac{\chi}{6} + \frac{\chi}{2} + \chi = \alpha$

Πρῶτον οὖν ἀπηλλάχθω τῶν κλασμάτων ἡ ἐξίσωσις,
πολλαπλασιασθέντων τῶν μὲν ὁλοχερῶν α καὶ χ ἐπὶ 12×6
 $\times 2$ (420), ἡ ἐπὶ 144. τῶν δὲ κλασμάτων α'. τοῦ ἀ-
ριθμητοῦ χ τοῦ πρώτου ἐν ἀριστεροῖς κλάσματος ἐπὶ 6×2 ,
ἀποδαλομένη τοῦ παρονομαστοῦ 12· ὅθεν 12χ · β'. τοῦ
κατὰ τὸ δεύτερον κλάσμα χ ἐπὶ 12×2 · ὅθεν 24χ · γ'.
τοῦ κατὰ τὸ τρίτον, ἐπὶ 12×6 · ὅθεν 72χ · γενήσεται
οὖν ἡ ἐξίσωσις $12\chi + 24\chi + 72\chi + 144\chi = 144\alpha$ · ἀ-
ναγωγῇ δὲ, $252\chi = 144\alpha$ · ἄρα $\chi = \frac{144\alpha}{252}$ (420)· ἀλ-

λά $\alpha = 105$ · ἄρα $\chi = \frac{144 \times 105}{252} = \frac{15120}{252} = 60$,

ὅς δηλοῖ τὴν τῷ Ἀνδρέῳ ηλικίαν, ἡ δὲ τῷ Ἰωάννῃ ἔσαι
 $\frac{60}{2} = 30$, ἡ δὲ τῷ Ἰακώβῳ, $\frac{30}{3} = 10$, ἡ δὲ τῷ Πέ-

τρε $\frac{10}{2} = 5$ · αἱ δὲ τέσσαρες αὐταὶ ἡλικίαι ἀποπληρῶσιν

ἀκριβῶς τὴν τῷ πρόβληματος θέσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Στρατηγὸς, ἐρωτῆσις πόσους ἄγοι
στρατιώτας, εἶπερ ἔφη, εἶχον τὸ διπλῶν ἐτι ὧν ἔχω, καὶ τὸ δέ-
κατον, καὶ πρὸς ταῖσι 7000, εἶχον ἂν οὐμπαντας 100000·
πόσους ἄρ' ἦγε μεθ' ἐαυτῷ στρατιώτας;

ΛΥΣΙΣ. α'. Τὸ πρόβλημα ἐκφραδῆσεται, ὁ ἀριθμὸς
τῶν στρατιωτῶν σὺν τῷ διπλῷ τῷδε τῷ ἀριθμῷ, σὺν τῷ
δεκατημορίῳ αὐτῷ σὺν 7000 ἰσῆται τῷ 100000^{α'}. ἔστω
ὁ τῶν στρατιωτῶν ἀριθμὸς x , ὃ τὸ μὲν διπλῶν $= 2x$, τὸ
δὲ δεκατημόριον $= \frac{x}{10}$ · κληθήτω δὲ ὁ μὲν 7000 $= \alpha$,

ὁ δὲ 100000 $= \beta$ · ἡ ὅν θέσις τῷ πρόβληματος συνίστησι
τὴν ἐξίσωσιν· $x + 2x + \frac{x}{10} + \alpha = \beta$, ἢ $3x + \frac{x}{10} + \alpha$

$= \beta$ · ἀπαλλαγῇ τῶν κλάσμάτων (424), $30x + x + 10\alpha$
 $= 10\beta$ · ἀναγωγῇ δὲ καὶ μεταθέσει, $31x = 10\beta - 10\alpha$ ·

ἄρα $x = \frac{10\beta - 10\alpha}{31}$ · ἀλλὰ $\beta = 100000$, καὶ $\alpha = 7000$,

ἄρα $x = \frac{10 \times 100000 - 10 \times 7000}{31} = 30000$, ὁ ἀριθ-

μὸς τῶν τῷ στρατῷ ἐμπεριλαμβανομένων· ἔκῃ συναφθέντων
τῷ 30000 τῷτε διπλῷ 60000, καὶ τῷ δεκατημορίῳ 3000,
καὶ 7000, τὸ ἄθροισμα ἅπαν ἔσται τῶνόντι 100000.

434. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀνευ δὲ τῶν κλασμάτων, τῷ
δεκατημορίῳ μὲν τῷ ὅλῳ στρατῷ κληθέντος x , αὐτῷ δὲ τῷ
στρατῷ $10x$, τῷ δὲ διπλῷ $20x$, ἐκ τῆς θέσεως τῷ πρόβλη-
ματος ἔσται $10x + 20x + x + \alpha = \beta$ · ἀναγωγῇ δὲ καὶ με-

τάξσει, $31x = \beta - \alpha$, ἄρα τὸ δέκατον τῷ ὅλῳ στρατῷ

$$x = \frac{\beta - \alpha}{31}, \text{ ἢ } \frac{100000 - 7000}{31} = 3000 \cdot \text{ὁ δὲ ὅλος στρα-}$$

τὸς $3000 \times 10 = 30000$, ὡς καὶ πρὶν εὕρηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἀντήνωρ εἰς Ἀθήνας παραγενόμενος τῇ μὲν πρώτῃ ἡμέρᾳ ἐδαπάνησε τὸ ἡμίου ὧν ἔφερε χρημάτων, τῇ δὲ δευτέρᾳ, τὸ τέταρτον, τῇ δὲ τρίτῃ τὸ δέκατον, τῇ δὲ τετάρτῃ τὸ εἰκοσόν· κατελείφθησαν ὅν αὐτῷ μυαὶ 10. πόσας ἄρ' ἔφερε μεθ' ἑαυτοῦ;

Ἐκφραδείη ὅν ἡ θέσις τῷ προβλήματος ἔτως (388)
 „ὁ ἀριθμὸς πασῶν, ὧν εἶχεν ὁ Ἀντήνωρ, μυῶν πρὶν ἀφί-
 „κεῖσθαι εἰς Ἀθήνας, πλην τῷ ἡμίσεως αὐτῶν καὶ τῷ τε-
 „τάρτῳ καὶ τῷ δεκάτῳ καὶ τῷ εἰκοσῷ, ἐξισθῆται μυαὶς 10.

Ἐῴω ἢν ἀπασμὲν ὁ ἀριθμὸς $= x$, τὸ δ' ἡμίου
 $\frac{x}{2}$, τὸ δὲ τέταρτον $\frac{x}{4}$, τὸ δὲ δέκατον $\frac{x}{10}$, τὸ δ' εἰκοσόν
 $\frac{x}{20}$, τὸ δὲ γινωσκὸν κατάλοιπον $10 = \alpha$ · ἐκ τούτων τοίνυν

$$\text{ἔσαι ἡ ἐξίσωσις } x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{10} - \frac{x}{20} = \alpha.$$

Ἀπαλλαγὴ τοίνυν τῶν κλασμάτων κατὰ τὰ προοραζέτη-
 θέντα, ἔσαι $1600x - 800x - 400x - 160x - 80x =$
 1600α · ἀναγωγῇ δὲ, $160x = 1600 \alpha$ · ἄρα $x = \frac{1600 \alpha}{160}$ ·

$$\text{ἐλὰ } \alpha = 10, \text{ ἄρα } x = \frac{16000}{160} = 100 \cdot \text{ἐὰν δ' ἀφαιρε-}$$

θῶσιν ἀπὸ 100 τὰ προδηλωθέντα μέρη ἐν τῷ προβλήματι,
 καταλείφθησονται 10.

Ἰνα δὲ κλασμάτων χωρὶς τὸ πρόβλημα ἐπιλυσώμεθα

ἔσω $x = \frac{1}{20}$ τῆ ἀθροίσματος· ἔκῃν $2x = \frac{1}{10}$ τῆ αὐτῆ δ-
 λα, καὶ $5x = \frac{1}{4}$, καὶ $10x = \frac{1}{2}$, καὶ $20x =$ τῷ ὅλῳ τῶν
 χρημάτων τῷ Πέτρῳ ἀθροίσματι· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $20x -$
 $10x - 5x - 2x - x = \alpha$ · ἀναγωγῇ δὲ, $2x = \alpha$ · ἄρα
 $x = \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{2} = 5$ · δηλοῖ δὲ τὸ x τὸ εἰκοσὸν μέρος τῶν
 χρημάτων, ἄρα $5 \times 20 = 100$ ἔστι τὸ ὅλον τῶν χρημά-
 των τῷ Ἀντήνωρος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'. Ἐργάτης τις εὕρηται ἔχων τὸ
 πέμπτον τῶν 9 ἀργυρίων συνάμα τῷ πέμπτῳ τῆ μιθῆ, ὃν
 ἀπηνέγκατο ἐν ἐβδομάσι τριοῖ· τῷ δὲ συνάψας τὸν πέν-
 τε ἐβδομάδων μιθὸν, εὕρηται ἔχων ἀργύρια 41· ἐπὶ πόσῳ
 ἦν ἑκάστης ἐβδομάδος μεμίδωται;

ΛΤΣΙΣ. Ἡ θέσις τῆ προσλήματος ἔστιν αὕτη „τὸ
 „πέμπτον τῶν 9 ἀργυρίων, καὶ τῆ τριπλῆ ἐβδομιαίῳ μιθῇ,
 „σὺν τῷ πενταπλῷ ἐβδομιαίῳ μιθῷ, ἰσθῆται 41 ἀργυρίοις“.
 ἔσω ὅν x μὲν ὁ ἐβδομιαίος μιθός, α δὲ $= 9$, καὶ $\epsilon = 41$,
 ἐξ ὧν κατὰ τὴν θέσιν ἔσαι $\frac{\alpha + 3x}{5} + 5x = \beta$ · ἀπαλλαγῇ
 τῶν κλασμάτων (424), $\alpha + 3x + 25x = 5\beta$ · με-
 ταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ, $28x = 5\beta - \alpha$ · ἄρα $x = \frac{5\beta - \alpha}{28}$,

$$\text{ἢ } x = \frac{5 \times 41 - 9}{28} = 7.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2'. Ποιμὴν τις, ἐρωτηθεὶς πόσα βόσκει
 πρόβατα, ἡδιαφορὰ, ἔφη, τῆ τετάρτη καὶ δεκάτῃ μέρει τῶν
 προβάτων με, ἔστι 15· πόσα τοίνυν ποιμαίνει;

ΛΤΣΙΣ. Ἐσω x ὁ ἀριθμὸς τῶν προβάτων, καὶ $\alpha =$
 15· ἡ δὲ θέσις συνίστησι προδήλως τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x}{4} - \frac{x}{10}$

= α· ἀπαλλαγῇ δὲ τῶν κλασμάτων, $10x - 4x = 40\alpha$ ·
 ἄρα $6x = 40\alpha$, καὶ $x = \frac{40\alpha}{6} = \frac{20\alpha}{3} = 100$ · τόσα ἄ-
 ρα ποιμάνει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'. Ο' Ἰωάννης τῇ μὲν πρώτῃ ἡμέ-
 ρᾳ ἐδαπάνησε 5 ἀργύρια ἑλαττον, ἢ τῇ δευτέρᾳ· τῇ δὲ
 πρώτῃ καὶ τῇ δευτέρᾳ ὁμοῦ, τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης· συλήσθην
 δὲ, 75 ἀργύρια· πόσα ἐν ἐκάστῃ ἐδαπάνησεν ἡμέρας;

ΛΥΣΙΣ. Η' τῆς πρώτης ἡμέρας δαπάνη κληθήτω x ,
 καὶ ἔστω $5 = \alpha$ · ἕκῃς ἡ τῆς δευτέρας ἔσαι $x + \alpha$, ἢ δὲ τῆς
 δευτέρας καὶ τῆς πρώτης ἅμα, $2x + \alpha$ · ἢ δὲ τῆς τρίτης,
 διπλῇ ἕσται τῶν δύο προτέρων ἡμερῶν, ἔσαι $4x + 2\alpha$ · ὑ-
 ποθέσεις δὲ $\beta = 75$, ἔσαι $2x + \alpha + 4x + 2\alpha = \beta$ · ἄ-
 ρα $6x + 3\alpha = \beta$, καὶ $6x = \beta - 3\alpha$, καὶ $x = \frac{\beta - 3\alpha}{6} =$
 $\frac{75 - 15}{6} = 10$, καὶ $x + \alpha = 15$, καὶ $4x + 2\alpha = 50$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'. Πατήρ τις ἐν τῇ ἐαυτοῦ διαθήκῃ
 ὅπως ἀποφάινεται κληρονόμος τῆς ἐαυτοῦ ὑἱος, ὥστε τὸν μὲν
 πρεσβύτατον κομίσασθαι ἀργύρια 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει
 τῆς παρὰ ταῦτα λοιπῆς περιουσίας, τὸν δὲ δεύτερον 2000
 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς περιλοιπῆς περιουσίας, μετὰ τὴν ἀ-
 φαίρεσιν τῆς τε πρώτης μερίδος καὶ τῶν 2000, καὶ ἐξῆς ὡς-
 αὐτως ἕκαστον τῶν λοιπῶν υἱέων· ἀλλὰ τέλος ἴσον ἕκα-
 στος κομισαμενος εὐρέθησαν· πυνθάνομαι ἔν, πόση μὲν ἦν
 ἡ περιουσία, πόσοι δ' ἦσαν οἱ υἱεῖς;

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω ὅλη μὲν ἡ περιουσία x , 1000 δὲ
 = α· ἐπεὶ ἔν ὁ πρωτότοκος λήφεται 1000 σὺν τῷ ἐννά-
 τῳ μέρει τῆς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν 1000 περιλειπομένης
 περιουσίας, ἡ αὐτοῦ μερίς ἔσαι $\alpha + \frac{x - \alpha}{9}$, ἣτις ἀναγω-

$$\gamma\eta \text{ εἰς πλείω εὐμάρειαν ἔσαι } \left(\frac{9\alpha}{9} \text{ ὅντος} = \alpha\right) \frac{9\alpha + \chi - \alpha}{9} \\ = \frac{8\alpha + \chi}{9} \cdot \text{κείθω δὲ } \frac{8\alpha + \chi}{9} = \rho \text{ (403).}$$

Τὸ ἔν κατάλοιπον τῷ χ , ἢ ἀφῆρηται ἡ μερίς ρ , ἔσαι $\chi - \rho$ · ἡ δὲ τῷ δευτέρῳ, ἔσα 2000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει $\tau\bar{\omega} \chi - \rho - 2000$, ἔσαι $2\alpha + \frac{\chi - \rho - 2\alpha}{9} = \frac{18\alpha + \chi - \rho - 2\alpha}{9}$

$$= \frac{16\alpha + \chi - \rho}{9}.$$

Ἐπεὶ δὲ πάντες ἴσον ἐκομίσαντο, ἔσαι ἄρα ἡ τῷ πρώτῳ μερίς $\frac{8\alpha + \chi}{9} = \frac{16\alpha + \chi - \rho}{9}$ μερίδι τῷ δευτέρῳ·

ἐπεὶ δὲ ταῦτα τὰ δύο κλάσματα, ἰσάληλα ὄντα, ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομασὴν 9, ἀνάγκη πᾶσα καὶ τῆς ἀριθμητῆος αὐτῶν ἰσῆθαι ἀλλήλοις· ἔσαι ἄρα $8\alpha + \chi = 16\alpha + \chi - \rho$ · μετασέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ· $\rho = 8\alpha$.

Ἀντικαταστάσης δὲ ἀντὶ ρ τῆς προτέρας δυνάμεως $\frac{8\alpha + \chi}{9}$, γενήσεται $\frac{8\alpha + \chi}{9} = 8\alpha$ · ἄρα $8\alpha + \chi = 72\alpha$, καὶ (416) $\chi = 72\alpha - 8\alpha = 64\alpha = 64000$ ἀργυρίοις, ἃ ἦν ἡ σύμπασα πατρῷα τῶν υἱέων κληρονομία.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τῷ πρωτοτόκῳ μερίς ἰσῆται ταῖς ἐκάστῃ τῶν λοιπῶν, τίθεται δὲ ἐν τῷ προβλήματι ἴση 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῷ 64000 — 1000, εἴτ' ἔν τῷ 63000, ἔσαι ἄρα ἐκάστῃ μερὶς 8000· διαιρεθέντος τοίνυν τῷ 64000 διὰ 8000, ποριθήσεται ὁ τῶν υἱέων ἀριθμός· εἰσὶν ἄρα υἱεὶς ὀκτώ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Αἰτενῶς ἐπισήσαντες τῷδε τῷ προβλή-

ματι, γνωσόμεθα κ μυρίων ἄλλων ὁμοίων τὴν γένεσιν· ἐὰν γὰρ τεῖν ὁ μὲν τὰς ἑκατοντάδας, ἢ χιλιάδας, τῶν ἀργυρίων ἐμφαίνων ἀριθμὸς ὁ τετράγωνος εἶναι ἀπὸ τῆ τῶν τέκνων ἀριθμῆ, τὸ δὲ πηλίκον μέρος τῆ καταλοίπου, ὃ ἐστὶν ἐπιπροσεβειμένον ἐκάσῳ, ἔχῃ παρονομασὴν τὸν ἀριθμὸν τῶν τέκνων σὺν μονάδι, ζηματιθίσεται ἅπαν πρόκλημα. Πατήρ τις, Φέρ' εἰπεῖν, ἔχει τέκνα ἑξ· ἕκῃν τεσθῆτω ἀργύρια 36000· τεσθῆτω δὲ τὸ δοθέν τῷ πρώτῳ μέρος 1000 σὺν τῷ ἐπιτημορίῳ τῆς παρὰ ταῦτα περισσίας, κ ἑξῆς, ὡς κ ἀνωτέρω· κ δὴ τὰ ἑξ τέκνα κομιῶνται μερίδας ἰσας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'. Δυοῖν σωμάτων τὴν αὐτὴν τρεχόντων ὁδὸν, τῇ δευτέρῃ ταχυτέρῃ ὄντος· τῇ ἀπόσχητος, ὧ ἀλλήλων ἀπέχουσι, γνωδέντος, κ τῇ λόγῳ τῆς αὐτῶν ταχυτήτος, ὀρίσαι τὸν τόπον, ὃ τὸ δεύτερον ἀπαιτῆσαι τῷ πρώτῳ.

ΛΤΣΙΣ. Κληθήτω α τὸ ἐγνωσμένον ἀπόστημα, ὃ ἀπέχουσι τὰ σώματα· χ δὲ τὸ διάστημα, ὃ διέδραμε τὸ πρῶτον σῶμα πρὶν ἀπαντηθῆναι, κ ν ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, εἰτ' ἔν ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων ποσαπλή τῆς τῆ πρώτης ταχυτήτι τρέχει τὸ δεύτερον.

Σαφές ἔν ὅτι τὸ δεύτερον σῶμα, ἐν ἀπαντήσῃ τῷ πρώτῳ, ὁφείλει διελθεῖν τὸ ἀπόστημα α , ὧ ἀλλήλων ἀφίσανται σὺν τῷ διαστήματι χ , ὃ ὠδευσε τὸ πρῶτον πρὶν ἀπαντηθῆναι· τὸ ἄρα διάστημα, ὃ ὠδεύσει τὸ δεύτερον σῶμα ἔς τ' ἂν ἀπαντήσῃ τῷ πρώτῳ, ἔσαι $\alpha + \chi$.

Α' λ ἔτι τὸ διάστημα $\alpha + \chi$, ὃ διώδευσε τὸ δεύτερον σῶμα, ἔσιν ἴσον τῷ χ διαστήματι τῷ διωδευθέντι ὑπὸ τῇ πρώτῃ τοσάκις, ὅσάκις πλείονι τῆς τῆ πρώτης διαδραμεῖται ταχυτήτι τὸ δεύτερον· ἔσιν ἄρα ἴσον τῷ χ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ ν , εἰτ' ἔν $\chi \times \nu = \chi \nu$ · ἐκ τούτων ἔν ἡ ἐξίσωσις $\alpha +$

$\chi = \nu\chi$, ἑκάσῃς τῆς γενικῆς τῆ ἀνὰ χεῖρας προβλήματος θέσεως ὑπὲρ παντὸς τέτῳ ἑμοφυῶς προβλήματος.

Μεταθέσει, $\alpha = \nu\chi - \chi$ ἵνα δὲ μόνη γένηται ἡ χ ἐπὶ θατέρῃ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ζητητέον, δι' ἧς ἀν ποσότητος πολλαπλασιασθεῖσα ἡ χ ἀποδοίῃ $\nu\chi - \chi$. εὐρίσκειται δὲ (51 πτ.) $\nu - 1$. ἐπ' αὐτὴν γὰρ πολλαπλασιασθεῖσα ἡ χ ἀποτελεῖ $\nu\chi - \chi$ διαιρέσεισα ὅν ἡ ἐν χερσὶν ἐξισωσις διὰ $\nu - 1$, ἀποδώσει $\chi = \frac{\alpha}{\nu - 1}$. λέλυται ἄρα ἐν γένει τὸ πρόβλημα.

Ἐκ δὲ δὴ τέτῃ τῇ γενικῇ τύπῃ $\chi = \frac{\alpha}{\nu - 1}$, πάντα τὰ μερικὰ προβλήματα, τὰ τῆς αὐτῆς τῷ προλαβόντι γενικῷ φύσεως, ἐπιλυθήσονται· ἐφαρμοσόμεθα τοίνυν ταῖς τρισὶ ταύταις, ἐπομένοις προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'. Βασιλέως τινὸς πορευομένου εἰς τινὰ πόλιν, γραμματοφόρος, ἀφισάμενος τῇ χώρῃ, ἔνθα ὑπῆρχεν ὁ βασιλεὺς, τρισὶ λεύγαις, βαδίζων μέντοι ταχυτῆτι τριπλῇ τῆς τῇ βασιλείῳ, φθάσας ἐνεχείρισεν αὐτῷ ἐπιστολὴν· ὀρίσαι τὸν τόπον, ὃ συνήντησε τῷ βασιλεῖ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τῇ γενικῇ τύπῃ, τὸ μὲν ἀπόσημα $\alpha = 3$, ὁ δὲ λόγος $\nu = 3$, ἡ δ' ἐξισωσις ἔσται $\chi = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. τὸ ἄρα διάσημα, ὃ βαδιεῖται ὁ βασιλεὺς πρὶν συναντηθῆναι, ἔσται λεύγη μία μὲν ἡμισείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'. Τίθεμένῃ τῇ μὲν ὠροδείκτῃ ἐπὶ τινος δεδομένου λεπτοῦ, τῇ δὲ λεπτοδείκτῃ ἐφ' ἑτέρα ἢ ταύτῃ δεδομένῃ, ὀρίσαι τὸν χώρον, εἴνα συναντήσῃ ἡ λεπτοδείκτης τῇ ὠροδείκτῃ.

ΛΤΣΙΣ. Τῷ λεπτοδείκτῃ ταχυτῇτι δωδεκαπλῇ τῆς τῷ ὠροδείκτῃ βαδίζοντος, ἔσαι ἐπὶ τῷ γενικῷ τύπῳ $v = 12$.

$$\text{ἄρα } \chi = \frac{\alpha}{11}$$

Οὐκὲν τιθεμένῃ, φέρε, τῷ μὲν ὠροδείκτῃ ἐπὶ τῶν 11 ὥρων, τῷ δὲ λεπτοδείκτῃ ἐπὶ τῶν 12, τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστημα ἔσαι $\alpha = 11$, εἴτ' ἔνδεκα κατατομαί, ἃς ὁ λεπτοδείκτης ὀφείλει βαδίσαι ἔς τ' ἂν γένηται ἐνθα

$$\text{νυνὶ κεῖται ὁ ὠροδείκτης. ἔκῃν ἔσαι } \chi = \frac{\alpha}{11} = \frac{11}{11} =$$

1, ὃ ἔστιν, ὁ ὠροδείκτης πρὶν συναντηθῆναι τῷ λεπτοδείκτῃ διανύσει ὥραν μίαν· συναντήσασιν ἄρα ἀλλήλοις κατὰ τὴν μεσημερίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'. Σωμάτων δύο, τὴν ἐναντίαν ἀλλήλοις πορευομένων, γινωσκόμενῃ τῷ ἀπ' ἀλλήλων ἀποσήματος α , καὶ τῷ τῶν ταχυτήτων λόγῳ v , ὀρίσαι τὸν τόπον, ἐνθ' ἂν ἀλλήλοις συναντήσων.

ΛΤΣΙΣ. Κληθέντος χ τοῦ δρόμου, ὃν διήνυσε τὸ ἡττοταχὲς σῶμα, ὃ, ὃν ἐβάδισε τὸ μείζονταχὲς, ἔσαι χ εἰλημμένον τοσαύκας, ὅσα πλὴ ἐστὶν αὐτῷ ἡταχύτης τῆς θατέρου, εἴτ' ἔν χv · ἀλλὰ ταῦτα τὰ δύο σώματα βαδιῶνται ἅμα τὸ διάστημα α , ὧ ἀπέχουσιν ἀλλήλων, ἔς τ' ἂν συναντη-

$$\thetaῶσιν· ἔκῃν ἔσαι $\chi + v\chi = \alpha$ · ἔκῃν $\chi = \frac{\alpha}{v+1} = P$$$

(51), ἐξίσωσις γενικὴ ζυντελῆσα μερικωτέροις προσλήμασιν αὐτῷ ὁμοφυέσιν, οἷον τὸ ἐφεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'. Εὐθύφρων καὶ Φίλιππος κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον πορεύονται, ὁ μὲν ἐκ Λαρίσσης εἰς Θεσσαλονίκην, ὁ δὲ Φίλιππος Θεσσαλονίκηθεν εἰς Λαρίσσαν· καὶ ὁ μὲν

Εὐθύφρων ταχυτῇτι διπλῇ περιπατεῖ ἢ ὁ Φίλιππος· ἀπέ-
χουσι δ' αἱ πόλεις ἀλλήλων ὥρας 60· ὁρίσαι τὸν τόπον,
ἐνθα συναντηθήσονται.

ΛΤΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς P ἐξισώσεως ἔσιν $\alpha = 60$, καὶ
 $\nu = 2$, ἢ δ' ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $x = \frac{60}{2+1} = \frac{60}{3} =$
20· ἄρα μετὰ παρέλευσιν 20 ὥρῶν συναντήσονται ἀλλήλοις
οἱ ὁδοιπόροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Προβλήματα τῷ πρώτῳ βαθμῷ, ἐκ πλειό-
νων ἐξισώσεων συγκροτούμενα.

435. Α'. Μία παρέσχη ἀγνώστη ποσότητος, εἰς ἑκ-
θεσιν τῶν θέσεων, καὶ μὴν καὶ λύσιν τῷ προβλήματος, μιᾶς
μόνης ἐξισώσεως χρεία.

Β'. Συχνάκις συμβαίνει, ὥς παρατηρεῖν ἔξεσιν ἐν
τοῖς κλειόσι τῶν προεκτεθέντων προβλημάτων, τὴν τοῦ
προβλήματος ἑκφρασίῃ πλειόνων δοκεῖν ἀγνώστων περιεκ-
τικὴν, καίτοι πράγματι μιᾶς καὶ μόνης περιεχομένης·
γνωθεύσης γὰρ ἅπαξ τῆς κατὰ μίαν ποσότητα δυνάμεως
αἱ τῶν λοιπῶν αὐτίκῃ κατάδηλοι γίνονται.

Ἐπὶ τῷ πρώτῳ, φέρε, προβλήματος (412) ἔχ'
ὅπως ἢ τῷ πρώτῳ ἀγρῷ ἠγνωεῖτο τιμὴ, ἀλλὰ δὴ καὶ αἱ
τῶν ἄλλων· ἐκείνης μέντοι γνωθεύσης, αἱ ἄλλαι αὐτό-
ματοι ἠκολούθησαν. ἔσι μέντοι ἐν τέτοις καὶ δυσὶ χρήσα-
σθαι ἀγνώστοις.

436. Ο' δὲ ὑπὲρ πάντας ἀπαραίτητος κανὼν ἔστιν,
ἵν' εὐ ἐκτεθῇ ἡ θέσις, ἢ αἱ θέσεις τῷ προβλήματος, ἢ-

τοι διὰ μιᾶς, ἢ ἐξ διὰ πλείονων συνεσώτως ἐξισώσεων. διάφοροι δὲ οἱ δόξαι, καίτοι ἐπιτομώτεροι, ἢ ἐπιμηκέστεροι, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀγαγεῖν τέλος δύνανται· ἐκὼν οἱ Μαθηματικοὶ ἢ ἀεὶ μιᾶ, ἀλλὰ ἐξ πλείοσιν ἐξισώσεσιν, ἐπιλύουσι τὰ προβλήματα.

437. Ὅταν μὲν αἱ προβληματικαὶ θέσεις ἰσάριθμοι ᾖσι τοῖς ἀγνώστοις ποσοῖς, τὸ πρόβλημα καλεῖται ὠρισμένον, ὡς ἐκείνης ἀγνώστου μίαν μνημονι τε ἐξ ὠρισμένην ἐπιδεχομένης δύναμιν· τὸ δὲ ταῦτο πρόβλημα καθ' ἑνα μόνον τρόπον ἐπιλύεται.

438. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων ὑπέρχεται τῷ τῶν θέσεων, ὡς ἐκείνης ἀγνώστου πολλὰς ὑπερχομένης δυνάμεις, τὸ πρόβλημα ἔστι ἀόριστον, ἐξ πλείονων ἐπιλύσεων ἐπιδεκτικόν. Ἐάν, φέρε, προτεθῇ, τίς ἂν εἴη ὁ ἀριθμὸς, ὅς ἐπὶ τρία πολλαπλασιασθεὶς ἀποτελεῖ 15; τὸ πρόβλημα ἔστι ὠρισμένον· εἴγε $3x = 15$, ἐξ $x = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$, ἢ μόνῃ τῇ x δυνάμει, ὁ μόνος δυνάμειος ἀριθμὸς ἐπιλύσασθαι τὸ πρόβλημα· εἰ δὲ προβληθεῖεν ἀριθμοὶ δύο x , y , ὧν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ 15, ἢ ἐξισώσις $x + y = 15$ μυριαχῶς ἂν ἐπιλυθείη· γινομένης γὰρ $x = 15 - y$, παντοίας ἂν ἐπ' ἀπειρὸν ὑπέλθῃ δυνάμεις ὁλοχρεῖς τε ἐξ κλασματώδεις, καὶ μὴν ἐξ ὑπαρκτικῆς ἐξ λειπτικῆς ἢ y . ἔάν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ $y = 14\frac{1}{2}$, ἔστι $x = \frac{1}{2}$, ἔάν δ' $y = 13$, $x = 2$ κτ. ἀλλὰ δὴ ἐκ' ἥττον ἐπιλυθήσεται τὸ πρόβλημα, ἔάν ὑποτεθῇ $y = 15$, ἐξ $x = 0$, $y = 15$, ἐξ $x = -1$, ἐξ ὡσαύτως ἐπ' ἀπειρὸν· αἰεὶ γὰρ ἐξέσαι εἴπειν, ὅτι $x + y = 15$. ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν ἀορίστων προβλημάτων ὕπερον, περὶ δὲ τῶν ὠρισμένων ἐξ δὴ ῥητέον.

439. Οἱ ἐπὶ τῶν ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως συνεσώτων

προβλημάτων κανόνες τηρητέοι οἱ αὐτοὶ καὶ τῶν ἐκ πλείονων· τοῖσι μὲντοι προσδεῖ καὶ εἰδικωτέρου τινὸς κανόνος.

440. Λαβὼν ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ἐτέρας τῶν ἀγνώστων, ὡς εἰ ἢ ἐλέλυτο τὸ πρόβλημα τῇ ἐπὶ δεύτερᾳ τῆς ἐξισώσεως μονώσει τῆς ἀγνώστου (416 κτ.), ἀντικαθίστασι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀντ' αὐτῆς ταύτης τῆς ἀγνώστου· τῆς δευτέρας ἐξισώσεως μίαν ἤδη ἀγνώστον περιεχούσης, ἐπίλυσον ταύτην κατὰ τὰς ἄρτι ἀποδοδομένους κανόνας· μετὰ τῆτο δὲ, ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ἐν αὐτῇ ἀγνώστου ἐν ἐγνωσμένοις ποσοῖς διηρασάμενος, ἀντικαθίστασι ἐν τῇ πρώτῃ, ἣν ἐπίλυσας ἔξεις ἐν ἐγνωσμέναις ποσοῖς τὴν δύναμιν τῆς πρώτης ἀγνώστου· ἡ δὲ πράξις καλεῖσθω Ἀντικατάστασις.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείνων ἐξί
 σώσεις δύο· ποιήσον ἐν μόνῃ τὴν x $x + u + a = \beta$ (A)
 ἐπὶ τῆς A ἐξισώσεως $x = \beta - u$
 $- a$ · ἀντὶ ἐν x ἀντικατάστησον ἐν τῇ B τὴν δύναμιν β
 $- u - a$, ἢ δὴ ἔσαι $\beta - u - a - 2u = \gamma$, ἢ ἀναγω-
 γῇ $\beta - 3u - a = \gamma$ · ἐν ταύτῃ τοίνυν τῇ ἐξισώσει
 μιᾶς παρέσης ἀγνώστου πῆς u , ἡ κατ' αὐτὴν δύναμις
 εὐχερῶς διυρευθήσεται· μεταθέσει γὰρ ἔσαι $\beta - a - \gamma$
 $= 3u$, ἢ $u = \frac{\beta - a - \gamma}{3}$.

Ἐξῆς δὲ ἀντικατάστησον ἐν τῇ A τὴν ἤδη εὐρημέ-
 νην τῆς u δύναμιν $\frac{\beta - a - \gamma}{3}$ ἀντὶ τῆς u · ἢ δὴ ἔσαι

ἡ A ἐξίσωσις $x + \frac{\beta - a - \gamma}{3} + a = \beta$.

Ἐπεὶ δ' ἐν ταύτῃ μόνῃ ἔνεστιν ἄγνωστος ἡ χ , ῥᾶτα ἐπιλυθήσεται ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τὸ ἐν γνωστοῖς εὐρεθῆναι τὴν τῆς χ δύναμιν· ἡ γὰρ ἀπαλλαγὴ μὲν τῆ κλάσμα-
τος ἔσται $3\chi + \beta - \alpha - \gamma + 3\alpha = 3\beta$, μεταθέσει δὲ,
 $3\chi = 3\beta - \beta + \alpha + \gamma - 3\alpha$, ἀναγωγῇ δὲ, $3\chi = 2\beta$
 $- 2\alpha + \gamma$ · διαιρέσει δὲ τέως, $\chi = \frac{2\beta - 2\alpha + \gamma}{3}$.

ἐπεὶ δ' ἐκ ταύτης καὶ τῆς ν ἡ δύναμις ῥᾶτα εὐρίσκεται,
τὸ πρόβλημα ἄρα ὁλοκληρῶς λέλυται.

441. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντος τῷ ἀθροίσματις
δύο ποσῶν, ἡ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, εὐρεῖν ἐκάστην.

ΛΤΣΙΣ. Κληθήτω πρὸς τὸ δοκῆν τὸ μὲν ἑλάττω
 χ , τὸ δὲ μείζον τῶν ποσῶν ν , ἡ τὸ μὲν ἄθροσμα α , ἡ
δὲ διαφορὰ β .

Ὡς περ ἔν δὲ δύο ἄγνωστοι ποσότητες πάρεσι τῷ προ-
βλήματι τῷδε, ἦτε χ ἢ ν · ἔτω δὴ ἡ θέσεις δύο· ἡ
ἢ μὲν πρώτη τίθησιν, ὅτι αἱ δύο ν ἢ χ ἅμα ληφθεῖσαι
ἀποτελεῦσιν ἐγνωσμένον ἄθροσμα τὸ α , ἐξ ἧς ἀναφύει ἡ
ἐξίσωσις $\chi + \nu = \alpha$ · ἡ δ' ὡς ἡ ὑπεροχή, ἡ ἢ μείζων ν ὑ-
περέχει τῆς ἐλάττωτος χ , ἔστιν ἐγνωσμένη, ἡ ἴση τῇ
 β . ὅθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\nu - \chi = \beta$.

Συσαθεισῶν ἔν τῶν ἐξισώσεων ἔτω, παρὰ τὴν γενι-
κὴν κανόνας (388, 389) χρησέον ἐνταῦθα ἰδίως ἡ τῇ ἀντι-
καταστάσει, ἣτις ξυντελεῖ τῇ ἐπιλίσει τῶν ἐκ δύο ἐξι-
σώσεων συνεξηκότων προβλημάτων (441).

Α΄. Ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως θηρευτέον τὴν τῆς
 χ δύναμιν ἔτω $\chi = \alpha - \nu$.

Β΄. Ἀντὶ χ ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀντικατα-
στάσει τὴν ἤδη εὐρημένην αὐτῆς δύναμιν $\alpha - \nu$ · ἔσται τοί-

νυν $υ - α + υ = β$ · μεταθέσει δὲ εἰς ἀναγωγῇ, $2υ = β + α$ · ἄρα $υ = \frac{β + α}{2}$.

Γ'. Ἀντικαταστήσας ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀντὶ $υ$ τὴν ἐν γνωστοῖς δύναμιν αὐτῆς $\frac{β + α}{2}$ · γενήσεται

τοιγαρὲν $χ + \frac{β + α}{2} = α$ · ἀπαλλαγῇ τῷ κλάσματος $2χ + β + α = 2α$, μεταθέσει δὲ εἰς ἀναγωγῇ, $2χ = α - β$ · ἄρα $χ = \frac{α - β}{2}$.

442. Ἐκ φρασὶς “γνωσκομένον τοῦ ἀθροίσματος, διὼ ποσῶν, εἰ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, ἡ μὲν μείζων δια-
τυπωθήσεται τῷ $\frac{α + β}{2}$, εἴτ' ἐν ἴσῃ ἔσαι τῷ αὐτῶν
ἡμιαθροίσματι σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ, ἡ δ' ἐλάττων τῷ
 $\frac{α - β}{2}$, ὅ εἰσιν, ἴση ἔσαι τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς
ἡμιδιαφορᾶς”.

Ἐκ ταύτης τῆς γενικῆς ἐκφράσεως ἀπαρυόμεθα τὴν τῶν δύο ἐξῆς προβλημάτων, ναὶ μὴν καὶ ἄλλων τέτοις ὁμοφυῶν, ἐπιλυσιν· ἢ μὴν ἀλλὰ τὰ μέγιστα ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῇ ξυντελέσει, θεμέθλου δίκην καὶ βάσεως ὑποτιθεμένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Πέτρος καὶ Ἰωάννης συνάμα ἐκέρδησαν ἀργύρια 66000· ἀλλ' ὁ Πέτρος πλεῖον τῷ Ἰωάννῃ ἀργυρίοις 400· πόσον ἄρ' ἔσι τὸ ἐκάστου κέρδος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς γενικῆς ἐκφράσεως ὁ μὲν Πέτρος ἐκέρδησε τὸ ἡμισυ τῶν 66000 σὺν τῷ ἡμίσει τῶν 400, εἴτ' ἐν 33200, ὁ δὲ Ἰωάννης τὸ ἡμισυ τῶν 66000 πλὴν

τῆ ἡμίσεως τῶν 400, εἴτ' ἔν 32800 · τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀκριβοῶς ἐστὶ 66000.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Στρατηγοὶ δύο συνάμα ἄγουσι στρατιώτας 120000 · ἀλλὰ τῆ μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν ὑπερέχει τῆ θατέρου τῷ 10000 · πόσους ἄρ' ἄγει ἑκάτερος;

ΛΥΣΙΣ. Ο' μὲν τὸ ἡμισυ τῶν 120000 σὺν τῷ ἡμίσει τῶν 10000, εἴτ' ἔν 65000, ὁ δὲ τὸ ἡμισυ τῶν 120000 πλην τῆ ἡμίσεως τῶν 10000, εἴτ' ἔν 55000.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ προεκτεθέν γενικὸν πρόβλημα, ταυτὸν δὲ ρητέον καὶ περὶ τῶν εἰδικωτέρων αὐτῷ ὁμοφυῶν, δύναται ἐπιλυθῆναι καὶ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ὅτω (436).

Τῆς ἐλάττονος τῶν δύο ποσοτήτων x ἰσοδυναμῆσης τῇ μείζονι πλην τῆς διαφορᾶς β , δυνατόν ἐν τῇ ἐξίσωσει $x + y = a$ ἀντικαταστήσαι $y - \beta$ ἀντὶ x καὶ τὴν ἐξίσωσιν τρέψαι ἐπὶ $y - \beta + y = a$, ἀναγωγῇ δὲ καὶ μεταθέσει $2y = a + \beta$. ἄρα $y = \frac{a + \beta}{2}$.

443 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Πατήρ τις πενταπλασίως ἡγεν ἑναιαυτὸς τῷ ἡμῖν αὐτῷ, ὃς οἱ παραμυθόμενος ἔλεγε· μετὰ δεκαετίαν, φίλε πατέρ, οἱ σοὶ ἔσονται τῶν ἐμῶν τριπλασίοι· πόσους οὖν ἦγεν ὁ Πατήρ, πόσους δὲ ὁ υἱός;

ΛΥΣΙΣ. Ἐ'σω x ἡ τῷ πατρὶ ἡλικία, y δὲ ἡ τῷ υἱῷ, καὶ $10 = a$ · εἰσὶ δὲ τῷ προβλήματι θέσεις δύο (488), ὧν ἡ μὲν τίθησιν ὡς ἡ τῷ πατρὶ ἡλικία x ἰσῶται τῇ πενταπλῇ τῷ υἱῷ ἡλικίᾳ y · ἡ δὲ δευτέρα, ὅτι ὅταν ἡ τῷ πατρὶ ἡλικία x αὐξηθῇ 10 ἔτεσιν, ἦτοι τῷ a , ἔσται τριπλῇ τῆς τῷ υἱῷ ἡλικίας y αὐξηθείσης καὶ αὐτῆς τῷ a · ἐντεῦθεν ἄρα $x + a = 3y + 3a$.

444, ΣΧΟΛΙΟΝ. Φαίνεται μὲν ὡς ἄρα ἐν τῷ δευ-

τέρω μέλει ἔδει γραφῆναι $3\gamma + \alpha$, ἀλλ' ὃ $3\gamma + 3\alpha$ ἐπεὶ δὲ ἡ τῷ πατρὸς ἡλικία ἐν δέκα ἔτεσι τριπλασιασθήσεται τῆς τῷ $\iota\beta$ ἡλικίας, προσλαβέσθης κ' τὸ δέκατον ἔτος, εἴτ' οὖν γενομένης $\iota + \alpha$ ἄρα τρίς $\iota + \alpha$ ἀποτελεῖ $3\iota + 3\alpha$.

Ἀντικαταστήσει ὅν ἐν τῇ δευτέρῃ ἐξισώσει ἀντὶ χ τῷ 5ι , ἔσαι $5\iota + \alpha = 3\iota + 3\alpha$ · μεταθέσει δὲ, $5\iota - 3\iota = 3\alpha - \alpha$, ἀναγωγῇ δὲ, $2\iota = 2\alpha$, διαιρέσει δὲ διὰ 2, $\iota = \alpha$ · ἄρα ἡ ἡλικία τῷ $\iota\beta$, ἣν ἄγει νυνὶ, εἰν ἐνιαυτῶν δέκα.

Ἀντικαταστήτω δὲ ἀντὶ ι ὁ 10 ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει· κ' δὴ ἔσαι $5 \times 10 = \chi = 50$ · ἄρα ὁ πατήρ νυνὶ σαδιδεύει τὸ πεντηκოსὸν ἔτος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἐὰν μοι δῶς, ποιμήν τις πρὸς ἔτερον ἔφη ποιμένα, τὰ πεντήκοντα τῶν σῶν προβάτων, ἴσα ἐκότεροι ποιμανᾶμεν· ἐὰν δέ σοι παύσῃ τοσαῦτα τῶν ἐμαυτοῦ, τριπλάσια σὺ τῶν ἐμῶν ἔξεις ὄϊων· πόσ' ἂρ ἐκότερος ἐποίμαινε;

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν τῷ πρώτῃ προβάτων· ι δὲ ὁ τῶν τῷ δευτέρῃ κ' $50 = \alpha$.

Ἦ μὲν πρώτη θείσις βύλεται, ὡς ὁ ἀριθμὸς χ τῶν τῷ πρώτῃ ποιμένος προβάτων ἀυξηθεὶς 50, ἦτοι τῷ α , ἰσθται τῷ ἀριθμῷ τῶν τῷ δευτέρῃ ι μειωθέντι τῇ αὐτῇ ποσότητι· α' ἔκον ἔσαι $\chi + \alpha = \iota - \alpha$.

Ἦ δὲ δευτέρα, ὅτι ὁ ι ἀριθμὸς τῶν τῷ δευτέρῃ προβάτων, ἀυξηθεὶς τῷ α , τριπλάσιος ἔσαι τῷ ἀριθμῷ χ τῶν τῷ πρώτῃ, μειωθέντος τῷ αὐτῷ α · ἔκον $\iota + \alpha = 3\chi - 3\alpha$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔσι $\chi = \iota - 2\alpha$ (440) ἀντὶ ὅν χ ἀντικαταστάτος ἐν τῇ δευτέρᾳ τῷ $\iota - 2\alpha$, ἔσαι $\iota + \alpha = 3\iota - 6\alpha - 3\alpha$ · μεταθέσει δὲ κ' ἀναγωγῇ,

$$21 = 10\alpha \cdot \text{ἄρα } 1 = \frac{10\alpha}{2} = 5\alpha = 5 \times 50 = 250 \cdot$$

ἄρα ὁ ἀριθμὸς 1 τῶν τῶ δευτέρῃ ποιμένος προβάτων ἦν 250· ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντικαταστάτος τῷ 250 ἀντὶ 1, γενήσεται $x + \alpha = 250 - \alpha$ · ἄρα $x = 250 - 2\alpha = 250 - 100 = 150$ · ταῦτα εἶχεν ἄρα ὁ πρῶτος,

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'. Στρατηγὸς, ὠρισμένον τινὰ ἀριθμὸν στρατιωτῶν συναγαγεῖν βεβλόμενος, ὑπέχετο τελέσειν ἑκάστῳ ὀβολοῦς 4· ἀλλ' ἐνδέον αὐτῷ ὀβολῶν πρὸς τῷτο 8, ὑπέχετο 3· καὶ δὴ ἐκ ταύτης τῆς συνθήκης ἐπλεόνασαν αὐτῷ ὀβολοὶ 4· πόσους ἔν εἶχεν ὁ στρατηγὸς ὀβολοῦς, καὶ πόσας συνεγάγετο στρατιώτας;

ΛΤΣΙΣ. Εἴσω x ὁ τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς, καὶ 1 ὁ τῶν στρατιωτῶν, καὶ $8 = \alpha$, καὶ $4 = \beta$.

Τίθεται ἔν α . ὡς ὁ x τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς αὐξηθεὶς τῷ 8, εἴτ' ἔν τῷ α , ἰσᾶται τῷ τετραπλῷ ἀριθμῷ στρατιωτῶν· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $x + \alpha = 4x$.

Δεύτερον ὅτι ὁ x μειωθείς τῷ $4 = \beta$ ἰσᾶται τῷ τριπλῷ καὶ ἀριθμῷ τῶν στρατιωτῶν· ἔκῃν $x - \beta = 3x$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔσι $x = 4x - \alpha$ · ἀντικαταστάσει τοίνυν γενήσεται ἡ δευτέρα $4x - \alpha - \beta = 3x$ · μεταθέσει, $4x - 3x = \alpha + \beta = 12$ · ἐντεῦθεν ἀντικατάσει ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρεθήσεται $x = 40$.

445. ΣΧΟΛΙΟΝ. Διὰ δυεῖν ἐξισώσεων τὰ προβλήματα ἐπιλύεται καὶ ὕτως.

Λάμβανε τὴν δύναμιν τῆς αὐτῆς ἀγνώστου ποσότητος, φέρ' εἰπεῖν, τῆς x , ἐν ἑκατέρῃ τῶν δύο ἐξισώσεων, ποῶν αὐτὴν μόνην· διὰ δὲ τῶν δύο τῆς x δυνάμεων ποίει ἐξίσωσιν μόνης τῆς y περιεκτικῆς, ἣν ἐπιλίσας γνώσῃ

τὴν τῆς ψ δύναμιν. ἀντὶ δὲ ψ τιθεὶς ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τὴν ἐγνωσμένην αὐτῆς δύναμιν, καὶ ἐπιλύσας αὐτὴν, Σηρεύσῃ ἤδη καὶ τὴν τῆς χ πραγματικὴν δύναμιν.

Ἐπὶ τῇ τετάρτῃ φέρ' εἰπεῖν προβλήματος (443) ἔνθα εἰσὶν ἐξισώσεις δύο $\chi = 5\psi$, καὶ $\chi + \alpha = 3\psi + 3\alpha$, ἐν τῇ πρώτῃ μὲν ἡ δύναμις τῆς χ εἰς 5ψ , ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, $\chi = 3\psi + 3\alpha - \alpha = 3\psi + 2\alpha$. ἐκ τούτων ἔν τῶν δύο τῆς χ δυνάμεων προκύπτει ἐξίσωσις $5\psi = 3\psi + 2\alpha$, ἔνθα μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ καὶ διαιρέσει $\psi = 10$. ἥς ἀντικατασταθεὶς ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει εὐρίσκεται $\chi = 50$

446. Καὶ ἄλλως δὲ τὰ τοιαῦτα ἐπιλυθήσεται προβλήματα, ἀφαιρέσει ἀμέλει μιᾶς ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς ἐτέρας· τὸ γὰρ κατάλοιπον εἶναι ἐξίσωσις μιᾶς μόνης ἀγνώστου περιεκτικῆς.

Κεῖθων γὰρ αἱ δύο προεκτεθεῖσαι ἐξισώσεις $\chi = 5\psi$, καὶ $\chi + \alpha = 3\psi + 3\alpha$, ἀφαιρῶ τοίνυν πρὸς τὸ δοκῦν τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, καὶ δὴ λειφθήσεται — $\alpha = 2\psi - 3\alpha$ · μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ, $2\alpha = 2\psi$, ὅθεν $\alpha = \psi$, ὡς καὶ διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων εὐρήται.

Κανὼν προβλημάτων ἐχόντων πλείους
ἢ δύο ἐξισώσεις·

440. Θῶμεν ἔν πρώτῳ πρόβλημά τι τριῶν ἐξισώσεων περιεκτικόν, καὶ δὴ καὶ τριῶν ἀγνώστων ποσοτήτων τῶν χ , ψ , ω . Σηρῶμαι τοιγαρὲν τὴν δύναμιν τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει μόνην αὐτὴν ἀποφαίνων, καὶ ἀντικαθίστημι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας· εἰσὶν ἄρα ἐν αὐτῇ μόναι ἀγνώστοι αἱ ψ , ω . λαμβάνω δὲ καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς καινῆς ἐξισώσεως τὴν τῆς ψ δύναμιν, περιέχουσαν ἀγνώστον πρὸς μόνον τὸ ω , καὶ ἀντικαθίστημι ταύτην ἐν τῇ τρί-

τη εξισώσει, ἢ ἀντὶ χ τὴν ἐν τῇ πρώτῃ εξισώσει θεωρουμένην δύναμιν, ἢ ἐπεὶ ἐν ταύτῃ τῇ δυνάμει εὐρίσκεται ι , ἀντικαθίστημι ἀντὶ τούτου τὴν προειρημένην· ὥτως ἄρα ἐπὶ τῆς τρίτης ταύτης εξισώσεως ὑδεμιᾶ ἐντυγχάνω ἀγνώστῳ, ὅτι μὴ τῇ ω · λυθείσης τοίνυν ταύτης, εὐρεθήσεται ἡ τῆς ω δύναμις ἐν ποσότητι ἐγνωσμένοις.

Ἀντικαθίστημι ἔν ταύτῃ ἐπὶ τῆς πρὸ αὐτῆς εξισώσεως, περιχέσης ἐν τῇ δυνάμει τῆς ι μόνον ἀγνώστην τὴν ω · ἢ τῇ ἐπιλύσει ταύτης εὐρήσω ἐν γνωστοῖς τὴν τῆς ι · ἀμφοτέρων δὲ τούτων ἀντικαταστάσεις ἀντὶ ω , ι ἐν τῇ πρώτῃ εξισώσει, γινώσκωμαι τελευταῖον ἐκ ταύτης ἢ τὴν χ · ὁμολογῶ δὲ τὰ εἰρημένα γενήσεται ὑποδείγμασι τισὶν ἐφαρμολόγηται.

448. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Τρεῖς ἐντεθίμηναι ἀριθμοὶ, πατήρτις ἔφη πρὸς τοὺς ἑαυτοῦ υἱοὺς, ἀποπειρώμενος τῆς ἐπὶ τὰ μαθήματα αὐτῶν ἐπιδόσεως· ὧν ὁ μὲν πρῶτος σὺν τῷ διπλῷ τῷ δευτέρῳ, ἢ τῷ διπλῷ τῷ τρίτῳ, ἀποτελεῖ 90° · ὁ δὲ δευτερός σὺν τῷ διπλῷ τῷ πρώτῳ ἢ τῷ τρίτῳ, 85° · ὁ δὲ τρίτος σὺν διπλοῖς τοῖς ἄλλοις, ποιεῖ 75° · τίνας ἄρα, παῖδες ἐμοί, εἰσὶν οἱ τρεῖς ἀριθμοί;

Κληθήτω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς χ , ὁ δευτερός ι , ὁ δὲ τρίτος ω , ἢ ἔσω $90 = \alpha$, ἢ $85 =$, ἢ $75 = \gamma$ · εὐδελον ἄρα, ὅτι ἡ μὲν πρώτη θέσις ἐστὶ $\chi + 2\iota + 2\omega = \alpha$ ἢ δὲ δευτέρῃ, $\iota + 2\chi + 2\omega = \beta$, ἢ δὲ γ', $\omega + 2\chi + 2\iota = \gamma$.

Α'. Εἰλήφθω ἡ δύναμις τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ εξισώσει· $\chi = \alpha - 2\iota - 2\omega$ (Α), ἢ ἀντικαταστήτω αὐτὴ χ ἐν τῇ δευτέρῃ, ἢ ὅτω γενήσεται $\iota + 2\alpha - 4\iota - 4\omega + 2\omega = \beta$.

ἀναγωγῇ $2\alpha - 3\gamma - 2\omega\beta$ μεταθέσει, $2\alpha - \beta - 2\omega$
 $= 3\gamma$. ἄρα $\gamma = \frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3}$ (B).

Β'. Αὕτη ἡ δύναμις ἀντικαταστήτω ἀντὶ γ ἐν τῇ τρί-
 τη ἐξίσωσει, ὡσαύτως καὶ ἡ τῆς χ δύναμις (A). καὶ δὴ
 $\epsilon\sigma\alpha\iota \omega + 2\alpha + \frac{-8\alpha + 4\beta + 8\omega}{3} - 4\omega +$
 $\frac{4\alpha - 2\beta - 4\omega}{3} = \gamma$. ἐν ἣ τῶν δύο κλασμάτων κοι-

νὸν ἐχόντων παρονομασίην τὸν 3, ἀφαιρετέον τῇ πρώτῃ
 τὸ δεύτερον· κατάλοιπον ἔν $\epsilon\sigma\alpha\iota - \frac{4\alpha + 2\beta + 4\omega}{3}$.

γενήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\omega + 2\alpha - \frac{4\alpha + 2\beta + 4\omega}{3}$
 $- 4\omega = \gamma$. ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, ἀναγωγῇ τε
 καὶ μεταθέσει, $\epsilon\sigma\alpha\iota 5\omega = 2\alpha + 2\beta - 3\gamma$. ἄρα $\omega =$
 $\frac{2\alpha + 2\beta - 3\gamma}{5} = 25$.

Εἰσῆχθω δὲ αὕτη ἡ δύναμις ἀντὶ ω ἐπὶ τῆς B ἐξι-
 σώσεως, ἣτις ἐμφαίνει τὴν δύναμιν τῆς γ . ἔκυν $\epsilon\sigma\alpha\iota \gamma$
 $= \frac{2\alpha - \beta - 50}{3} = 15$.

Τέλος δὲ ἀντὶ ω καὶ γ εἰσαχθεῖσιν τῶν κατ' αὐτὰς
 ἀριθμητικῶν δυνάμεων ἐπὶ τῆς Α' ἐξίσωσεως, $\epsilon\sigma\alpha\iota \chi =$
 $\alpha - 30 - 50 = 10$. ἐνεθυμήθη ἄρα ὁ πατὴρ τρεῖς ἀ-
 ριθμοὺς 10, 15, 25.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Τριῶν ἀγρῶν πωληθέντων συλῆ-
 βδην δι' ἀργυρίων 120000, ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος

τετίμηνται, ὅσα ὁ τρίτος· ὁ δὲ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος δις το-
σάτα, ὅσα ὁ δεύτερος· πόσα τετίμηνται ἄρα ἕκαστος;

ΛΤΣΙΣ. Κληθείσης τῆς τῷ πρώτῃ τιμῆς χ , τῆς τῇ
δευτέρῃ ψ , τῆς τῇ τρίτῃ ω , καὶ $\alpha = 120000$, ἡ μὲν πρῶ-
τη θέσις συνίστησι τὴν ἐξίσωσιν $\chi + \psi + \omega = \alpha$, ἡ δὲ δευ-
τέρῃ, $\chi + \psi = \omega$, ἡ δὲ τρίτη $\chi + \omega = 2\psi$.

Ληφθείσης δὲ ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τῆς κατὰ
τὴν χ δυνάμεως $\chi = \alpha - \psi - \omega$ (P), καὶ ἀντὶ χ ἀντικα-
ταστάσης ἐν τῇ δευτέρῃ, ἔσσι $\alpha - \psi - \omega + \psi = \omega$ ἀνα-
γωγῇ, καὶ μεταθέσει, $\alpha = 2\omega$, καὶ $\omega = \frac{\alpha}{2} = 60000$ ἀρ-
γυρίοις.

Ἀντικαταστάσης δὲ ἐπὶ τῆς τρίτης ἐξισώσεως τῆς δυ-
νάμεως τῆς χ , καὶ τῆς ω , οἷαι ἐνταῦθα ἐπορίσθησαν, ἔσσι
 $\alpha - \psi - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 2\psi$ ἄρα $3\psi = \alpha$ ἄρα $\psi = \frac{\alpha}{3} = 40000$
ἀργυρίοις.

Τέλος δὲ εὐρέσεως καὶ τῆς κατὰ τὴν δευτέραν ἀγνω-
στον ψ δυνάμεως, διὰ τὴν ἰδιαιτέραν φύσιν τὰδε τῷ προβλή-
ματος, ἀντικατάσει ταύτης τε καὶ τῆς κατὰ τὴν ω , γενήσε-
ται ἡ πρώτη ἐξίσωσις $\chi = 120000 - 40000 - 60000$
 $= 20000$ · εἰσὶν ὅν ἡ μὲν πρώτη τιμὴ 20000, ἡ δὲ δευ-
τέρῃ 40000, ἡ δὲ τρίτη 60000.

449. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ τὰ ἐκ τριῶν ἐξισώ-
σεων συνεσῶτα προβλήματα ἐπιλύσαι καὶ διὰ τῆς δευτέρας
τῶν ἀποδοδεῖσιν μεθόδων εἰς λύσιν τῶν ἐκ δυοῖν (445)
κατὰ τὰδε· α'. εἰλήφθω ἐν ἑκάσῃ τῶν τριῶν ἐξισώσεων
ἡ δύναμις τῆς αὐτῆς ἀγνώστη ποσότητος τῆς χ , φέρε εἰπεῖν·
β'. γενέσθω μία μὲν ἐξίσωσις ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας
δυνάμεως· ἄλλῃ δὲ ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης, αἵτινες
περιέχουσιν ἑκάσῃ δύο μόνον ἀγνώστους· τὸ δὲ πρόβλημα ἐ-

πιλυθήσεται καθ' ἑνα τινὰ τῶν εἰς ἐπίλυσιν τῶν ἐκ δύο ἐξισώσεων κανόνων.

Ἐπὶ τῶν τριῶν τῷ πρώτῳ προβλήματος ἐξισώσεων (448) εἰλήφθωσαν αἱ τρεῖς δυνάμεις τῆς χ · καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης ἔσαι $\chi = \alpha - 2\iota - 2\omega$, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, $\chi = \frac{\beta - \iota - 2\omega}{2}$, ἐπὶ δὲ τῆς τρίτης, $\chi = \frac{\gamma - \omega - 2\iota}{2}$ καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης καὶ δευτέρας δυνάμεως γενέσθω $\alpha - 2\iota - 2\omega = \frac{\beta - \iota - 2\omega}{2}$ (M) ἐκ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης, $\frac{\beta - \iota - 2\omega}{2} = \frac{\gamma - \omega - 2\iota}{2}$ (N) ἢ $\beta - \iota - 2\omega = \gamma - \omega - 2\iota$.

Ἐν ταύταις ἔν ταῖς δυοῖν ἐξισώσεσι ζητηθήτωσαν αἱ δυνάμεις τῆς ψ , καὶ ω ἐν ἐγνωσμέναις ποσότησι· εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς M ἐξισώσεως ἡ τῆς ψ δύναμις, ἥτις εὑρεθήσεται $\psi = \frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3}$ · ὡσαύτως εἰλήφθω τῆς αὐτῆς ψ ἡ δύναμις καπὶ τῆς ἐξισώσεως (N) ἥτις εὑρεθήσεται $\psi = \gamma - \beta + \omega$ (Π).

Ἐκ δὲ τῶνδε τῶν δυεῖν τῆς ψ δυνάμεων συνεσάθω ἡ ἐξίσωσις $\frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3} = \gamma - \beta + \omega$, ἢ $2\alpha - \beta - 2\omega = 3\gamma - 3\beta + 3\omega$, μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ, $5\omega = 2\alpha + 2\beta - 3\gamma$ · ἄρα $\omega = \frac{2\alpha + 2\beta - 3\gamma}{5} = 25$ · αὕτη δὲ ἡ τῷ ω δύναμις ἀντικαταστήτω ἐν τῇ ἐξισώσει Π, ἥτις ἔσαι $\psi = \gamma - \beta + 25 = 15$ · ἐκ τῶν δύο ἔν δυνάμεων 25, καὶ 15 διὰ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρεθήσεται $\chi = 10$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τρεῖς ἔμποροι ἔχουσι συλλήθεον μνᾶς 30000· ἀλλὰ τὸ τρίτον τῆς μερίδος τῆ πρώτου, ἢ τὸ ἕννατον τῆς τῆ δευτέρας, ἰσῆται τῷ πέμπτῳ μέρει τῆς τῆ τρίτης· τὸ δὲ τρίτον τῆς τῆ δευτέρας σὺν τῷ πέμπτῳ μέρει τῆς τῆ τρίτης ἰσῆται τῇ μερίδι τῆ πρώτου· Πόση ἂρ' ἐστὶν ἡ ἐκάστη μερίς;

ΛΥΣΙΣ Α'. Ἐςω $\alpha = 30000$ · ἐκ τοίνυν τῆς πρώτης ἡξίσεως συσταθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\chi + \psi + \omega = \alpha$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{9} + \frac{\omega}{5}$

ἐκ δὲ δὴ τῆς τρίτης $\frac{\psi}{3} + \frac{\omega}{5} = \chi$

Β. Ἐκ τῆς πρώτης ἐν ἐξίσωσιν ἡ δύναμις τῆς $\chi = \alpha - \psi - \omega$ (Α) ἣτις ἀντὶ χ ἀντικαταστάσῃ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀπο-

τελεῖ $\frac{\alpha - \psi - \omega}{3} + \frac{\psi}{9} = \frac{\omega}{5}$ · ἀπαλλαγῇ τῶν πλάσμάτων

$45\alpha - 45\psi - 45\omega + 15\psi = 27\omega$ · μεταθέσει, $45\alpha = 72\omega + 30\psi$, καὶ $30\psi = 45\alpha - 72\omega$ · ἄρα $\psi = \frac{45\alpha - 72\omega}{30}$ (Β.)

Γ. Ἡ δὲ τρίτη ἐξίσωσις δι' ἀντικαταστάσεων τῶν κατὰ τὴν ψ ἢ τὴν χ δυνάμεων ἔσται $\frac{45\alpha - 72\omega}{90} +$

$\frac{\omega}{5} = \alpha - \frac{45\alpha + 72\omega}{30} - \omega$ · πολλαπλασιασμῶ, ἢ

ἀναγωγῇ, καὶ μεταθέσει ἔσται $135\alpha = 270\omega$ · ἄρα $\omega = 15000$.

Δ'. Η' Β εξίσωσις αντικαταστάσει τῆς κατὰ τὴν ω
 δυνάμεως γενήσεται $\eta = \frac{45\alpha - 72 \times 15000}{30} = 9000$.

Τέλος δὲ αντικαταστάσει τῶν δυνάμεων τῆς η ἐκ τῆς
 ω ἐπὶ τῆς 4 εξίσωσεως προκύψει $\chi = \alpha - 9000 - 15000 = 6000$.

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν ὑποθεβῶσιν ὁσαυδηποτὲν ἄ-
 γνωστοί, ϕ , χ , η , ω κτ., τὴν ἤδη δεδειγμένην ἐξ ἑξῆς
 βαδιῶμεν ὁδὸν, ἀντικαθιστώντες ἐκ διαδοχῆς, ὡς εἴρηται,
 ἐν ταῖς ἐπομέναις εξισώσεσι τὰς δυνάμεις χ , η κτ.
 τὰς ἐν ταῖς προτέραις εξισώσεσιν εὐρημένας· αἶτι γὰρ ἐ-
 φηζόμεθα εἰς εξίσωσιν μιᾶς μόνης ἀγνώστου περιεκτικὴν, ἥς
 ἐπιλυθείσης, ἐκ τῆς ἐν ταύτῃ τῇ ἐσχάτῃ ἀγνώστῃ γνω-
 σθείσης, εὐχερῶς τὸ λοιπὸν ἀναποδ.ζήντες ἐπὶ τὰς ἄλλας
 εξισώσεις, ὡς ἤδη δέδεικται, γνωσόμεθα ἐκ τὰς ἄλλας
 ἀγνώστων πωρότητας· Προβαλόμεν ἔν εἰς ἐπιλυσιν ἔν
 ἔτι πρόβλημα ἐκ τεσσάρων συγκροτούμενον εξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τέσσαρες τινες ἄγεσιν ὁμῶς ἔ-
 τι 160· ἀλλ' ἡ μὲν ἡλικία τῆ πρώτῃ, συνάμα τῇ τῆ
 δευτέρῃ ἐκ τῇ τῆ τρίτῃ, ἰσῆται τῇ τῆ τετάρτῃ· ἡ δὲ
 τῆ δευτέρῃ, μετὰ τῆς τῆ τρίτῃ ἐκ τῆ τετάρτῃ, ἰσῆται
 τῷ δεκαπενταπλῶ τῆς τῆ πρώτῃ· τέλος δὲ τὸ τριπλὺν
 τῆς τῆ πρώτῃ σὺν τῇ τῆ τρίτῃ ἐκ τῆ τετάρτῃ ἰσῆται τῷ
 πενταπλῶ τῆς τῆ δευτέρῃ· πόσα εἰσιν ἄρα τὰ ἐκάστῃ ἔτι;

ΛΥΣΙΣ. Ἐστω $\alpha = 160$ ἐκ η , ϕ , χ , ψ αἱ τέσ-
 σαρς ζητούμεναι ἡλικίαι· ἐκ τούτων ἔν συνίστανται τέσσα-
 ρες εξισώσεις αἱ ἐφεξῆς . . . $\eta + \phi + \chi + \psi = \alpha$
 χρῶμαι τοιγαρὲν τῇ (440) . . . $\eta + \phi + \chi = \psi$
 δεδειγμένη μεθόδῳ . . . $\phi + \chi + \psi = 15\eta$
 $3\eta + \chi + \psi = 5\phi$

Α΄. Λαμβάνω ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ψ , ἥτις ἐστὶν $\psi = \alpha - \phi - \chi - \psi$, καὶ ἀντικαθίστημι ταύτην ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἥτις γίνεται $\alpha - \phi - \chi - \psi + \phi + \chi = \psi$. μεταθέσει ψ ἀναγωγῇ, $2\psi = \alpha$. ἄρα $\psi = \frac{\alpha}{2}$.

Β΄. Ἀντικαθίστημι ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει τὰς δυνάμεις τῆς ψ καὶ χ . καὶ δὴ ἔχω $\phi + \chi + \frac{\alpha}{2} = 15\alpha - 15\phi - 15\chi - 15\frac{\alpha}{2}$, μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ $16\phi + 16\chi = 15\alpha - \frac{15\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 7\alpha$. ἄρα $\phi = \frac{7\alpha - 16\chi}{16}$.

Γ΄. Ἀντικαθίστημι εἴτα ἐν τῇ ἐσχάτῃ ἐξισώσει τὰς εὐρημένους δυνάμεις τῆς ψ καὶ χ καὶ ϕ , καὶ δὴ ἔχω $3\alpha - \frac{21\alpha + 48\chi}{16} - 3\chi - \frac{3\alpha}{2} + \chi + \frac{\alpha}{2} = \frac{35\alpha - 80\chi}{16}$, ἀναγωγῇ δὲ, $2\alpha - \frac{21\alpha + 48\chi}{16} - 2\chi = \frac{35\alpha - 80\chi}{16}$.

Πολλαπλασιασμοῦ διὰ 16 (430), $32\alpha - 21\alpha + 48\chi - 32\chi = 35\alpha - 80\chi$. μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ $96\chi = 24\alpha$. ἄρα $\chi = \frac{24\alpha}{96} = 40$.

Δ΄. Ἀντικαταστάσει ἀντὶ χ τὸ 40 ἐν $\psi = \frac{7\alpha - 16\chi}{16}$ γενήσεται $\psi = 30$.

Ε'. Η ἰδία φύσις τῷ δε τῷ προβλήματος προαγα-
γῆσα ἐν ἀρχῇ διὰ γνωστῆς ποσότητος τὴν δύναμιν τῆς ψ ,
ἥτις ἐστὶν $\frac{\alpha}{2} = 80$, ἀντικαταστήσαι παρακελεύεται τὰς
τρεις δυνάμεις τῶν ϕ , χ καὶ ψ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\eta =$
 $\alpha - \phi - \chi - \psi$. καὶ δὴ εὐρεθήσεται $\chi = 10$.

Οὐκὲν τῷ μὲν πρώτῳ ἡ ἡλικία ἐστὶν ἔτη 10, τῷ δε
δευτέρῳ 30, τῷ δὲ τρίτῳ 40, τῷ δὲ τετάρτῳ 80.

451. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἰν' ἀριθμὸς δοθεὶς ἀριθμῷ
δοθέντι ἰσῶθῃ, εἰς πόσον βαθμὸν ὑψωθῆναι ὀφείλει;

Ἐστω ὁ πρώτος $10 = \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$. ὁ δὲ
ζητούμενος δείκτης $= \nu$. ἔκῃν ἡ θέσις φησὶν $\alpha^\nu = \beta$. ἔ-
πει δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἴσοι, ἄρα καὶ οἱ αὐτῶν λογάριθμοι ἴσοι
ἔσονται. ἔκῃν $\lambda\alpha = \lambda\beta$ καὶ δὴ $\nu \cdot \lambda\alpha = \lambda\beta$. ἄρα $\nu =$
 $\frac{\lambda\beta}{\lambda\alpha}$. εἰάν τινι ζητῆται πόσος ἐστὶν ὁ βαθμὸς εἰς ὃν ὑψωθείς

ὁ 10 γένοιτ' ἂν $= 10000$, ἔσται $\nu = \frac{\lambda 10000}{\lambda 10} = \frac{1}{4} = 4$.

ἔκῃν $10^4 = 10000$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ἐξισώσεων τῷ δευτέρῳ βαθμῷ.

452. Ἀξίωμα. „Ἡ ἐξίσωσις, ἢ ὁ λόγος τῆς ἰσό-
τητος μενεῖ, καὶ ἐκατέρωθεν ἡ αὐτὴ ἐξαχθῇ ῥίζα“ καὶ
γὰρ ἰσαλλήλων ὄντων ἐκατέρωθεν τῶν τῆς ἐξισώσεως με-
λῶν (383) καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν ἰσαλλήλοισι ἔσονται. ἐπεὶ
περ ἐξαγαγεῖν ῥίζαν ἀπὸ ποσῆτινος κυρίως ἐστὶ διελεῖν
Τὸμ. Β'.

τόδε τὸ ποσὸν διὰ τῆς ρίζης, ἵν' εὐρεθῇ πηλίκον ἢ αὐτοῖς
 ρίζα (94)· εἰάν ἄρα ἐκ δυοῖν μελῶν ἐξισώσεως ὁ-
 μώνυμος ἐξαχθῇ ρίζα, ἢ τετραγωνικὴ φέρε, ταῦτόν
 ἔσται, ὡς εἰ καὶ διηρῶντο ἐκάτερα τὰ μέλη διὰ τῆς
 αὐτῆς ποσότητος, ὅπερ ἐπεικῶς ἤκιστα διαλυμαίνεται
 τὴν ἐξίσωσιν (393)· ὅκυν εἰάν ἢ $\chi^2 = 25$, ἔσται ἄρα χ
 $\sqrt{\chi^2} = \sqrt{25}$, ἢ $\chi = 5$, χ εἰάν ἢ $\chi^2 = 64$, ἐντεῦθεν
 ἔσται $\chi = \sqrt[3]{64} = 4$ · ἐρῶμεν ὅν πρῶτον περὶ τῶν ἐξι-
 σώσεων τῶν μηδένα τῆς ἀγνώστου περιεχουσῶν βαθμὸν ἄλ-
 λον, ἢ τὸν τετράγωνον.

453. ΚΑΝΩΝ Α'. Πόσει μόνην τὴν ἀγνώστην ἐπὶ δα-
 τέρε τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, μετατιθεῖς ἐπὶ δάτα-
 ρον πάσας τὰς γνωσάς, χ ἀπαλλάττων αὐτὴν παντὸς
 συνεργῆ, ἢ παρονομασῆ, εἰ παρόντες τίχοιεν· ὅσης φέρῃ
 εἰπεῖν $\frac{5\chi^2}{3} + \alpha = \beta (A)$ ἀ. μεταθέσει πόσει $\frac{5\chi^2}{3} = \beta - \alpha$
 β'. ἀπαλλαγῇ τῷ κλάσματος, $5\chi^2 = 3\beta - 3\alpha$ · γ'.
 $\chi^2 = \frac{3\beta - 3\alpha}{5}$.

454. ΚΑΝΩΝ Β'. Εἰάν τὸ ἀπὸ τῆς ἀγνώστου τε-
 τράγωνον λειπτικὸν ἢ μεταθέσει ἀναδεικτέον αὐτὸ ὑπαρ-
 κτικόν· ἐκ γὰρ λειψέσης ποσότητος ρίζαν τετραγωνικὴν
 ἐξαχθαιεῖν ὅκ' ἐνὶ (175). εἰάν ὅν ἢ $\alpha - \chi^2 = \beta$, με-
 ταθέσει πρακτέον $\chi^2 = \alpha - \beta$.

455. ΚΑΝΩΝ Γ'. Μνωθέντος ὅν ὕτω τῷ τετρα-
 γώνῳ, ἐξακτέον ἐκατέρωθεν τὴν τετράγωνον ρίζαν (452).
 ὕτως ἐπὶ μὲν τῷ πρώτῳ ὑποδείγματος τῆς Α ἐξισώσεως
 ἡκέσης εἰς τὴν $\chi^2 = \frac{3\beta - 3\alpha}{5}$ γραπτέον $\chi =$

$\sqrt{\frac{3\beta-3\alpha}{5}}$, ἐπὶ δὲ τῆς διευτέρου ἐκ τῆς $\chi^2 = \alpha - \beta$ ἐξ-

ακτέων τὴν ρίζαν, γράφονται $\chi = \sqrt{\alpha - \beta}$.

456. KANON Δ'. Σύμβολα δὲ προτακτέων τῆς ρίζης ἀδιαφόρως εἶτε +, εἶτε —· ἐν γὰρ τῆς $\chi^2 = 16$ ἐκ ἥτων ἔσται ρίζα $\chi = 4$, ἢ $\chi = -4$ (127).

457. Ἐντεῦθεν ἄρα πρόδηλον ὅτι τὰ διευτεροβάθμια προδημάτα διιτην ὑφίστανται λύσιν, τὴν μὲν ἐν ὑπαρκτοις, διὰ λειπτικῶν δὲ ποσῶν τὴν ἐτρίδα.

458. KANON Ε'. Ἀπαν διευτεροβάθμιοι πρόδῳμα εἰς ἀτοκίαν ἄγον, ἔσται ἀδύνατον εἰς ἐκλυσιν· ἐν γὰρ ἐκλυσέως τῆς ἐξισώσεως πατὰ πὺς τελέεντας κινώνας ἄγῃ τὸ πρόδῳμα εἰς τὸ ἐξάγαγα ἐν τετραγώνω ρίζαν ἀπὸ ποσῆς λείποντος τυχὴ ἀδυνάτως ἔχοντος (175) τὸ πρόδῳμα ἔσται ἀδύνατον.

459. KANON ς'. Ὅταν πάτερ δι' ἑοῦ τῆς ἐξισώσεως περιέχωσι τὴν ἀγνώστον, διαγυγνέτω πάτερ διὰ τῆς ἀγνώστης ἀντῆς· ἐν δὲ κἀκείνῃ ἡ ἐξίσωσις βεβήκον ἔσται· ὅταν γὰρ $\chi^2 = 25\chi$, ἔκαστος μέλεις διὰ χ διαγυγνέτω, ἐκ τριτοβάθμιας ἔξομεν τὴν διευτεροβάθμιο ἐξίσωσιν $\chi^2 = 25$.

460. KANON ζ'. Ὅταν ἡ διευτεροβάθμιας ἐξίσωσις παρὰ τὸ τῆς ἀγνώστης τετραγώνου περιέχῃ ἐν τῶν πρώτων βεβήκον τῆς ἀντῆς ἀγνώστης συγκείμενον συνεγὰ ἢ παρὰ γινώσκῃται, ἢ ἐν ἀφῶν ἀμειν, ὡς ἐν $\frac{5\chi^2}{4} - \frac{3\chi}{4} = \alpha$,

τηρητέων κινώνας πὺς ἐφῆξῃς.

461. Α'. Ἀπαλάκτεον τὸ ἀπὸ τῆς χ τετραγώνου παρὰ συνεγὰ τε ἐν παρὰ γινώσκῃ, ὡς ἡδὴ διείρηται· ὡς

τως ἐν $\frac{5\chi^2}{3} - \frac{3\chi}{4} = \alpha$ παλλακτέον τὸ χ^2 τῷ παρονομα-
 σῶ 3, ἐξ ὧς εἶαι $20\chi^2 - 9\chi = 12\alpha$ (430). β'. καὶ τῷ
 συνεργῶ 20, ὅθεν εἶαι $\chi^2 - \frac{9\chi}{20} = \frac{12\alpha}{20}$.

462. Β'. Εἵπει παρὰ τὸ τετράγωνον ἔνεσι τὴ ἐξι-
 σώσει καὶ ὁ πρῶτος τῆς ἀγνώστου βαθμὸς, εἰδηλὸν ὡς ἐκ
 αὐτοῦ ἄλλως τὸ πρόβλημα λυθεῖν, ὅτι μὴ ἐξαχθείσης τῆς
 τετραγώνου ῥίζης ἀπὸ χ^3 συνάμα τῇ χ , εἴτ' ἐν, ὡς φη-
 νερὸν παντὶ τῷ καὶ μικρὸν ἐπισήσαντι, ἀπὸ τετραγώνου ἀ-
 τελὲς, ὅθεν ἡ ἐξαγωγή ἀμήχανος προαποδεδεικται.

463. Γ'. Ἐξετασέον ἄρα ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, εἰ
 παρὰ τὸ ἀπὸ χ τετράγωνον, καὶ τὸν, ᾧ ἐνεσιν ὁ πρῶτος
 τῷ χ βαθμὸς, ὅρον, ὑπάρχει καὶ ἄλλος ὅρος, ὅς αὖν εἴη
 τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισυνεργοῦ τῆς χ τετράγωνον· εἰ γὰρ
 τέτο ὑπάρχη, ἐκ τέτο τῷ ὅρῳ καὶ τῶν δυοῖν ἄλλων, οἱ
 περιέχεσιν ὁ μὲν χ^2 , ὁ δὲ χ , συγκροτητέον τρίτον
 τῶν μελῶν, μετατιθεμένους ἐπὶ τρίτον πᾶσαν ἄλλην
 ποσότητα.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οὕσης γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 +$
 $\alpha + 6\chi = \beta - 9$, παρατηρῶ, ὡς τὸ -9 μεταθέσει εἶ-
 ναι $+9$, εἴτ' ἐν τετράγωνον ἀπὸ τῷ 3, ἡμίσεως τῷ 6
 συνεργῶ τῆς ἀγνώστου χ , ὃ δὴ καταγγέλει, ὡς ὁ 9 συν-
 τῷ χ^2 καὶ 6 χ συνισῶσι τετράγωνον ἐντελές· μεταθετέον
 ἄρα τὸν -9 ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τὸ δ' α ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ· ὅ-
 θεν εἶαι $\chi^2 + 6\chi + 9 = \beta - \alpha$, ἥς τοῦ πρώτου μέ-
 λους ῥίζα τετράγωνος εἶσι $\chi + 3$ · εἰ γὰρ ἐν αὐτῷ τὸ ἀ-
 πὸ τῷ πρώτῳ ῥιζικῷ ὅρῳ χ τετράγωνον χ^2 , συν τῷ δις
 γινομένῳ ὑπὸ τῷ πρώτῳ χ , καὶ τῷ δευτέρῳ 3, εἴτ' ἐν τῷ
 6 χ , συν τῷ ἀπὸ τῷ δευτέρῳ 3 τετραγώνῳ 9 (89).

464. Δ'. Εἶδε τοῦτο μὴδὲν παρείη. α'. τὸ χ^2 , καὶ τὸν ὅρον, ὃ ἔνεσι τὸ χ θετέον μόνον ἐπὶ τρίτερῳ, μεταβιβάζοντας πᾶν ἄλλο ποσὸν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως τὰ ἕτερα. β'. ληπτέον τὸν τῷ χ ἡμισυνεργόν, καὶ τῷ τούτῳ τετραγωνίσαντας θετέον ἐν ἑκατέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οὕσης ἐξισώσεως τῆς $\chi^2 + 3\chi = \beta$, ὁρῶμεν, ὡς ἔκ ἐστι τὸ πρῶτον μέλος τετραγώνων τελειον· ἐστὶ μὲν γὰρ ῥίζα τῷ πρώτῳ ὅρῳ χ , τῷ δὲ δευτέρῳ μὴ παρόντος καὶ τρίτῳ, εὐρεθήσεται ὑδεμία (89). τί ἔν ποιητέον; ἢ τὸν ἡμισυνεργὸν τῆς χ θεωρήτεον αἰεὶ ὡς ὅρον ῥιζικὸν δευτέρον· αἰεὶ γὰρ ἐξέσαι ἐκλαμβάνειν τὸν, ὡς ἔνεσι τὸ χ ὅρον ὡς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῷ διπλῷ τῷ πρώτῳ 2χ , καὶ τῷ δευτέρῳ ῥιζικῷ ὅρῳ, ταυτὸν εἰπεῖν ὑπὸ τῷ χ , καὶ τῷ διπλῷ τῷ δευτέρῳ· ἀναγκαίως ἄρα ἔχομεν τὸν δευτέρον ῥιζικὸν ὅρον λαβόντες τὸν ἡμισυνεργὸν τῆς χ · ἐπὶ ἔν τῷ προτεθέντος ὑποδείγματος, λαμβάνομεν τὸ ἡμισυ τῷ 3, εἰτ' ἔν $\frac{1}{2}$, καὶ τὸ ἀπὸ τῷ δευτέρῳ τετραγώνων $\frac{1}{4}$ συνάπτομεν ἑκατέρῳ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν· ὅθεν ὑδὲν ὅλως πείσεται ἡ ἐξίσωσις (393)· καὶ δὴ ἔσαι $\chi^2 + 3\chi + \frac{1}{4} = \beta + \frac{1}{4}$ · καλεῖσθαι δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη τῷ ἐλλείπεις τετραγώνῳ συμπληρώσις.

465. Ε'. Συμπληρωθέντος ἔν ἔτω τῷ τετραγώνῳ, ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως ἐξακτέον τὴν τετραγώνειον ῥίζαν· ἀλλὰ τῷ μὲν πρώτῳ ἤδη ἔγνωσαι· ἐστὶ γὰρ χ σὺν τῷ ἡμισυνεργῷ τῆς χ · τῷ δὲ δευτέρῳ σημειωθήσεται· ἔτω τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ῥίζα τετραγώνος ἔσεται $\chi + \frac{1}{2} = \sqrt{\beta + \frac{1}{4}}$.

466. ς'. ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης ἀπὸ τῷ ἀριθμῷ τῷ συνιστῶντος τὸ δευτέρον μέλος, ἀναδεικτέον μόνην τὴν χ ,

μετατιθέντας ἐπὶ τρίτερα τὸν δεύτερον ῥιζικὸν ὄρον· ὣτως ἐπὶ τῆς ἐν χερσὶν ἐξίσωσεως $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\beta + \frac{1}{4}}$, εἰν ὑποθεθῇ ῥίζα τῷ $\beta + \frac{1}{4}$ ὁ ἀριθμὸς 10, ποιητέον $x = 10 - \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$.

467. Ζ'. Ὅσον δὲ περὶ τῶν συμβόλων τῆς ῥίζης, εἰν πάντες οἱ ὅροι τῷ συμπληρωθέντος τετραγώνου ὡσιν ὑπαρκτικοί, οἷος ὁ τῷ προτεθέντος τετραγώνου, ἐξέσαι ἐπίσης ὑποθεῖναι τὴν ῥίζαν, ἥτοι ὑπαρκτικὴν, ἢ λειπτί. κὴν ἔτω $\sqrt{x^2 + 3x + \frac{1}{4}} = \pm \sqrt{\beta + \frac{1}{4}}$. ἀποτελεῖται γὰρ ἐπίσης τὸ τετράγωνον $x^2 + 3x + \frac{1}{4}$ ἀπὸτε $x + \frac{1}{2}$, ἢ ἀπὸ $-x - \frac{1}{2}$ (128).

468. Εἰν μέντοι ὁ τῆς x συνεργὸς λειπτικὸς ἢ, ἐξέσαι ἀδιαφόρως ἢ τῷ, τὸν μὲν τῶν ὄρων λέγοντα, τὸν δ' ὑπάρχοντα ἐκδέξασθαι, δεῖ μέντοι τῇ τῷ δευτέρῳ μέλῳ ῥίζῃ προτάξασθαι τὸ πρὸ τῷ ῥιζικῷ ὄρῳ x ὑποτεθέν σύμβολον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κεῖθω γὰρ ἐξίσωσις ἢ $x^2 - 4x + 4 = a$. ἐνταῦθα τοίνυν τὴν ἑκατέρω μέλῳ ῥίζαν θηρωμένοις ἐξέσαι δεῖναι εἴτε $x - 2 = \sqrt{a}$, ἢ $-x + 2 = \sqrt{a}$. φημὶ δὴ προτακτέον εἶναι τῷ δευτέρῳ μέλῳ τὸ πρὸ τῷ x ὄρῳ ὑποτεθέν σύμβολον· ἵνα δὲ τῷ τοπισωθῶμεν, τῷ δευτέρῳ ῥιζικῷ ὄρῳ ὄντος 2 ἐπὶ τῷ προτεθέντος ὑποδείγματος, θῶμεν τὸν πρῶτον ὄρον $x = 5$. τὸ ἄρα ἀπὸ $5 - 2$ τετράγωνον παρέξει τὴν ἐξίσωσιν $+25 - 20 + 4 = 9$. ἐξαγωγῇ ῥίζης, $5 - 2 = \sqrt{9} = 3$, μεταθέσει τῷ -2 , $5 = 3 + 2$. εὐδηλον ἄρα ὅτι τῷ $x = 5$ ὑπαρκτικῷ ὑποτεθέντος, ἀπονείμει δεῖ τῇ τῷ δευτέρῳ μέλῳ ῥίζῃ τὸ $+$.

Θῶμεν νῦν τεναντίον τὸν μὲν $x = 5$ λειπτικόν, ὑπαρκτικὸν δὲ τὸν 2. τὸ ἔν ἀπὸ $-5 + 2$ τετράγωνον, ὡς ἢ πρὸ τῷ, ἀποδώσει τὴν ἐξίσωσιν $+25 - 20 + 4 = 9$

ὅθεν $-5+2=-\sqrt{9}=-3$ · μεταθέσειτε $+2$, $-5=-3-2=-5$ · σαφές ἄρα, ὡς εἰν ὑποθεθῇ ὁ χ ὅρος λειπτικός, προτάξωθαι δεῖ τῆς δευτέρου μέλους ῥίζης τὸ —

469. Ἀῖρα ἐν γένει, τῷ ὅρῳ, ὃ ἐνυπάρχει ὁ πρῶτος τῆς χ βαθμὸς, λείποντος, προτακτέον τῆς ῥίζης τῆς δευτέρου μέλους τὸ πρὸ τῆς χ ὑποθεθὲν σύμβολον. ⁴⁶

470. ΣΧΟΛΙΟΝ. Κάντεῦθεν φανερόν, ὡς πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δυοῖν ἐσιν ἐπιλύσεων ἐπιδεκτική, ἢντε ἡ ἀγνώστος μονάξῃ, ἢντε πρὸς ἑαυτῇ καὶ τὴν πρώτην βαθμὴ ἀγνώστον προσκειμένην ἔχῃ, καὶ ταύτην εἴτε λείπυσαν, εἴτε ὑπάρχυσαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃ τὰ τέσσαρα πεμπτημόρια τῷ κύβῳ ἴσα εἶεν τῷ ἀπ' αὐτοῦ ὀκταπλῶ τετραγώνῳ.

ΛΤΣΙΣ. Κληθέντος χ τῷ ζητούμενῳ ἀριθμῷ, ἔσαι $\frac{1}{2}\chi^1 = 8\chi^1$ · διαιρέσει τῆς ἐξισώσεως διὰ χ , ἔσαι $\frac{4\chi^2}{5} = 8\chi$ (134)· ἐπεὶ δὲ χ ἑκατέρωθι παρῇ, διαιρετέον καὶ ταύτην διὰ χ · ἔκων $\frac{4}{5}\chi = 8$ · ὅθεν $4\chi = 40$ · ἄρα $\chi = 10$, ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν ἀριθμὸν, ὃ ὁ τέταρτος βαθμὸς συναφθεὶς τετράκις τῷ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνῳ ἀποτελοῖ αἵροισμα, ἰσόμενον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ, δεκατρίκις εἰλημμένῳ.

ΛΤΣΙΣ. $\chi^4 + 4\chi^2 = 13\chi^2$ · διαιρέσει διὰ χ^2 , $\chi^2 + 4 = 13$ · ἄρα $\chi^2 = 13 - 4 = 9$ · ἄρα $\chi = 3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃ τετραγωνισθέντος, εἰν ἀπὸ τῶν δύο τριτημορίων τῷ τετραγώνῳ ἀφαιρεθῶσι 12, καταλείπονται 12.

ΛΤΣΙΣ. $\frac{2\chi^2}{3} - \alpha = \alpha$ μεταθέσει (453) τῷ

$-\alpha$, $\frac{2\chi^2}{3} = 2\alpha$ πολλαπλασιασµῶ, $2\chi^2 = 6\alpha$, διαι-

ρέσει, $\chi^2 = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha = 36$ ἄρα $\chi = \sqrt{36} = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ἀφ' ᾧ τῷ τετραγώνῳ ὀκτάκις τῷ αὐτῷ συναφθέντος ἀριθµῷ, ἃ ἔτι 16, ἀποτελεῖται ὁ 121.

ΛΤΣΙΣ. $\chi^2 + 8\chi + 16 = \alpha$, ἥς τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον περιέχει τέλειον, ἔστι γὰρ 16 τετράγωνος ἀπὸ 4 ἡμισυνεργῶ τῆς χ . ἔστιν ἔν ἡ τετράγωνος τῷ πρώτῳ μέλῳ ῥίζα $\chi + 4$ (465) ἄρα $\chi + 4 = \sqrt{121} = 11$ ἔκέν $\chi = 11 - 4 = 7$, ἀριθµὸς ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ᾧ τινι δεκαεξάκις εἰληµμένῳ συναφθέντος δις τῷ ἀπ' αὐτῷ τετραγώνῳ ἃ ἔτι 20, ἀποτελεῖται ὁ 150.

ΛΤΣΙΣ. Κληθεῖτω ὁ ζητούμενος ἀριθµὸς χ , ἃ 20 $= \alpha$, ἃ 150 $= \beta$. ἃ δὴ ἔσαι ἐξίσωσις $2\chi^2 + 16\chi + \alpha = \beta$.

$$\text{Διαιρέσει δὲ διὰ 2, } \chi^2 + 8\chi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις ὑδὲνα περιέχει ὄρον δυνάμενον 16, ὅς ἐστι τετράγωνος ἀπὸ 4 ἡμισυνεργῶ τῆς χ .

ἂ. μεταθετέον τὸν $\frac{\alpha}{2}$. ὅθεν $\chi^2 + 8\chi = \frac{\beta - \alpha}{2}$. β'. τὸ

$\chi^2 + 8\chi$ ἔστι προφανῶς τετράγωνον ἀτελές, ᾧ περ ἐνδεί τῷ ἀπὸ 4 ἡμισυνεργῶ τῆς χ τετραγώνῳ 16· συναπτεύον ἄρα τὸν 16 ἐκατέρῳ τῶν τῆς ἐξίσωσεως μελῶν, ἃ δὴ

ἔσται $x^2 + 8x + 16 = \frac{\beta - \alpha}{2} + 16$. ἔξακτέον δὲ ἀπὸ τῆς πρώτης μέλους τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἣν ἴσμεν ἔσσαν $x + 4$. ἔξακτέον δὲ καὶ ἀπὸ τῆς δευτέρας $\frac{\beta - \alpha}{2} + 16 = 81$. ἔκων $x + 4 + \sqrt{81} = 9$. ἄρα $x = 9 - 4 = 5$, ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Εὕρετεν Ἀριθμὸν, ἀφ' οὗ ὁ τετράγωνος ἀφαιρεθεὶς τῷ ἀπ' αὐτοῦ κύβῳ καταλείπει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑξαπλάσιον.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς θέσεως πρόεισιν ἡδε ἡ ἐξίσωσις $x^3 - x^2 = 6x$. διαιρέσει διὰ x , $x^2 - x = 6$, ἐν ἣ ὑπάρχει τετράγωνον ἀτελὲς τὸ $x^2 - x$, ὅπερ ἵνα συμπληρωθῇ, ληπτέον τὸ ἡμισυ τῆς 1 συνεργῶς τῆς x , εἴτ' ἔν $\frac{1}{2}$, ὃ τὸ τετράγωνον $\frac{1}{4}$ συναπτέον ἐκατέρωσε τῆς ἐξίσωσεως. ἔκων ἔσαι $x^2 - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$. ἡ μὲν τῆς πρώτης μέλους ῥίζα ἔστι $x - \frac{1}{2}$. ἐπ' ἐξαγωγῇ δὲ τῆς τῆς δευτέρας, ἀνακτέον τὸν ὀλοοχερῇ 6 εἰς τέταρτα, καὶ τρεπτέον τὸ δευτέρου μέλος εἰς $\frac{25}{4}$, ὃ ῥίζα τετραγώνου $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$. ἄρα $x - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$. ἄρα (466) $x = 3$.

471. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Εἶδομεν ἡδη ὡς ὑποτιθεμένης τῇ ποσότητι $x^2 - x + \frac{1}{4}$ ῥίζης τῆς $x - \frac{1}{2}$, ἐχρῆν τάξαι τῇ τῆς δευτέρας μέλους ῥίζῃ τῇ $\frac{1}{2}$ τὸ $+$ σύμβολον, ὃ προστέτακτο τῷ ὄρῳ x , ἀλλ' ἔχ' ὃ προστάγη τῷ $\frac{1}{2}$. εἴχε μέντοι ληφθῆναι τῷ αὐτῷ μέλῳ ἡ δύναμις $-x + \frac{1}{2}$ ὡς ῥίζα, ὅτε δὴ, ἵν' ἐπαληθεύσῃ τὸ πρόβλημα, ἐχρῆν προταχθῆναι τῆς ῥίζης τῆς δευτέρας μέλους τὸ $-$, ὅπερ προὔποτεθείη τῆς x . ἔκων ἔσαι ἔτι $-x + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, καὶ μεταθέσει τῷ $+$ $\frac{1}{2}$, ἔσαι $-x = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅπως ἀφαιρῶ-
μένῃ τῇ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνῳ, καταλειφθῇ $\frac{1}{27}$.

ΛΤΞΙΣ. Κληθέντος $\frac{1}{27} = \alpha$, ἔσται $x - x^2 = \alpha$
μεταθέσει (454), $x = \alpha + x^2$. ὅθεν $x^2 - x = -\alpha$.
συμπληρώσει τῇ ἐλλειπῶς τετραγώνῳ, ὡς ἐν τῷ ὀνωτέ-
ρῳ ὑποδείγματι, $x^2 - x + \frac{1}{4} = -\alpha + \frac{1}{4}$. ἐξαγω-
γῇ ῥίζης ἐκατέρωθεν $x - \frac{1}{2} = \sqrt{-\alpha + \frac{1}{4}} = \sqrt{-\frac{1}{27} + \frac{1}{4}}$
 $= \sqrt{-\frac{1}{54} + \frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{1}{54}} = \sqrt{\frac{1}{3^3 \cdot 2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6}$. ἄρα $x - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{6}$. ἄρα $x = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, ὅς ἐστιν ἀριθμὸς ὁ ζητε-
μενος· τῷ ὄντι γὰρ εἰν ἀπὸ τῆς $\frac{1}{3}$ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ τῆς
αὐτῆς τετραγώνων $\frac{1}{9}$ εὑρεθήσεται κατάλοιπον $\frac{1}{27}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅπως προωθέν-
τες αὐτῷ τὸ τριπλὺν αὐτῷ, καὶ ἔτι τὸ ἥμισυ λάβωμεν ἄ-
θροισμα $\frac{1}{2}$ τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἀριθμῷ τετραγώνῳ.

ΛΤΞΙΣ. Κληθῆτω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἡ δ'
ἐξίσωσις ἔσται $x + 3x + \frac{x}{2} = \frac{3x^2}{4}$. ἀπαλλαγῇ τῶν
κλασμάτων, $8x + 24x + 4x = 6x^2$, ἀναγωγῇ, $36x$
 $= 6x^2$. ἄρα $x = \frac{36}{6} = 6$.

472. Εἰν ἐν τοῖς δευτέρῳ βαθμῷ προβλήμασιν ὥσι
πλείους ἢ μία ἀγνώστος, καὶ δὴ καὶ ἐξισώσεις μιᾶς πλείους,
βαδίζεον ἤδη τὴν αὐτὴν, ἣν καὶ τοῖς πρωτοβαθμίοις προ-
βλήμασιν, ὅ ἐστι διηγεύεον τὴν μιᾶς τινος ἀγνώστης δύνα-
μιν ἐν δευτέρῳ τῶν ἐξισώσεων, καὶ ἀντιστακτέον αὐτὴν ἐ-
πὶ τῆς ἐτέρας· ἔωσαν γὰρ ἐξισώσεις δύο $2x + 3y = \alpha$
καὶ $x^2 + y^2 = \beta$. ἐκέν εἰλήφθω ἐν τῇ πρώτῃ ἡ τῆς x δύ-
ναμις, ἥτις ἐστὶν $\frac{\alpha - 3y}{2}$, καὶ ἀντικαταστήτω ἀντὶ x^2 ἐν

τῇ δευτέρῃ, ἥτις γενήσεται $\frac{\alpha^2 - 6\alpha y + 9y^2}{4} + y^2 = \beta$.

ἀπαλλαγῇ τῷ κλάσματος, $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4y^2 + 4y^2 = 4\beta$, ἢ $x^2 - 6xy + 13y^2 = 4\beta$ · ὅθεν $13y^2 - 6xy = 4\beta - x^2$, ἢ διαιρέσει διὰ 13, $y^2 - \frac{6xy}{13} = \frac{4\beta - x^2}{13}$ (461) · τέλος δὲ συμπληρώσει τῷ ἐλλείποντος

τετραγώνου διὰ τῷ τετραγώνου τῷ ἀπὸ τῷ ἡμισυνεργῷ $\frac{6x}{13}$

τῆς y , εἴτ' ἐν ἀπὸ τῷ $\frac{3x}{13}$, ἐκπεραίνεται, ὡς ἔθος, τὰ τῆς πράξεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων.

473. Ἐῶς $x=2$ · ἕτος ἐν ὃ τύπος καλεῖται ἐξίσωσις ἀπλῇ, ἢ πρωτοβάθμιος ἐπεὶ x ἐπὶ μηδὲν πεπολλαπλασιάσαι δείκτην ἔχουσα 1, ὅῃσιν, ἕσα πρώτοβάθμιος.

474. Ἐὰν μέντοι λάβωμεν δύο ἐξισώσεις $x=2$, ἢ $x=2$, ἢ ταύτας ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιάσωμεν, προκύψει καινὴ ἐξίσωσις ἢ $x^2=4$, ἢ καλεῖται ἐξίσωσις σύνθετος, βαθμῷ δευτέρῳ· παράγεται γὰρ ὑπὸ δυεῖν ἀπλῶν ἐξισώσεων (287).

475. Ἐὰν δ' ἐπιπολλαπλασιασῇ ἢ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $x^2=4$ ἐπὶ τὴν ἀπλὴν ἐξίσωσιν $x=2$, ἢ προκύψουσα ἐξίσωσις $x^3=6$ ἔσαι σύνθετος βαθμῷ τρίτῳ ὡς γινομένη ὑπὸ τριῶν ἀπλῶν ἐξισώσεων, ἢ ἕτως ἐφεξῆς· ἐπὶ τέτοις ἂν δυνάμεθα ἀποδεῦναι τῇ ἀπλῇ ποσό-

τητι χ τῇ ἐν συνθέτῳ τινὶ ἐγκειμένη, ποικίλας δυνάμεις ὑπαρκτικὰς, ἢ λειπτικὰς, ἢ ἐξ ἀναμίξε· β'. δυνάμεις κατ' ἐπίνοιαν, ἢ ἀνυπάρκτους, οἷαι αἱ $\sqrt[4]{-x}$ (175) ἢ $\sqrt[4]{-\beta}$ κτλ.

Δῶμεν ἔν τῇ χ τὰς ἐξῆς δυνάμεις· $\chi=2$, $\chi=3$, $\chi=4$, ἐξ διὰ τὸν αὐτίκα γνωσθόμενον λόγον μεταθέσει τρέψωμεν αὐτὰς εἰς τὰς δὲ $\chi-2=0$, $\chi-3=0$, $\chi-4=0$. εἰάν ἔν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ' ἀλλήλας αἱ δύο πρότεραι ἐξισώσεις $\chi-2=0$, $\chi-3=0$, προκύψει ἐξίσωσις σύνθετος δευτεροβάθμιος ἢ $\chi^2-2\chi-3\chi+2 \times 3=0$.

476. Ἰ"να δὲ γενικώτερον προβαίνοι ἡ Μέθοδος, ἔσω $\pi=2$, $\kappa=3$, $\rho=4$, ἐξ ἐξῆς ὡσαύτως· ἔσονται ἔν αἱ ἐξισώσεις $\chi-\pi=0$, $\chi-\kappa=0$, $\chi-\rho=0$, $\chi-\sigma=0$ κτλ. πολλαπλασιασθήτωσαν δὲ ἐπ' ἀλλήλας πρῶτον αἱ δύο πρότεραι ἐξισώσεις, ὅθεν προκύψει $\chi^2-\pi\chi-\kappa\chi+\pi\kappa=0$ (B) ἐξίσωσις σύνθετος δευτεροβάθμιος, εἴγε ὁ μείζων τῶν ἐν αὐτῇ τῆς χ βαθμῶν ἐστὶ τετράγωνος (391). εἴτα πολλαπλασιασθήτω αὕτη ἐπὶ τὴν τρίτην ἀπλὴν ἐξίσωσιν $\chi-\rho=0$. ἐξ δὴ προκύψει $\chi^3-\pi\chi^2-\kappa\chi^2-\rho\chi^2+\pi\kappa\chi+\pi\rho\chi+\kappa\rho\chi-\pi\kappa\rho=0$ (Δ) ἐξίσωσις σύνθετος βαθμὺ τρίτη· γίνεται γὰρ ὑπὸ τριῶν ἀπλῶν, ὅτε μείζων τῶν ἐν αὐτῇ τῆς χ βαθμῶν ἐστὶ κύβος.

477. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει πᾶσα σύνθετος ἐξίσωσις ἔσαι βαθμὺ ἐκδηλημένη ὑπὸ τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀπλῶν ἐξισώσεων, ὑφ' ὧν παράγεται, ἐξ δὴ ἐπομένως ὑπὸ τῶν διαφόρων δυνάμεων τῆς ἀγνώστου χ , αἵτινες εἰσὶν αἱ διαφοροὶ ῥίζαι τῆς συνθέτου ἐξισώσεως.

478. Ἐξισώσεως συνθέτε ὁ ρος καλεῖται, τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν ὄρων, ἐν οἷς ἡ ἀγνώστος τὸν αὐτὸν ἔχει δείκτην· ὕτω τῆς προλαβύσης συνθέτε ἐξισώσεως Δ, εἰς μὲν ὄρος ἐστὶν ὁ — $\pi\chi^{\circ}$ — $\kappa\chi^{\circ}$ — $\rho\chi^{\circ}$ ἑτερος δὲ ὁ + $\pi\kappa\chi$ + $\pi\rho\chi$ + $\kappa\rho\chi$.

479. Εὐδιαθετεῖν ἐξίσωσιν ἐστὶ διατάττειν τὰς κατ' αὐτὴν ὄρους ὕτως, ὥς τὰς δείκτας αὐτῶν ἀλληλοδιαδόχως προΐεναι κατὰ τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς ἐπὶ τῆς Δ ἐξισώσεως (476) ὁ μὲν τῷ πρώτῳ ὄρῳ δείκτης ἐστὶ 3, ὁ δὲ τῷ δευτέρῳ 2, ὁ δὲ τῷ τρίτῳ 1.

Πᾶσα εὐτακτος ἐξίσωσις ἐστίν, ἥτοι πλήρης, εἴπερ μὴ διακόπτεται ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐν τοῖς δείκταις, ὡς ἐστὶν ἡ Δ ἐξίσωσις, ἡ μὴ πλήρης, εἴπερ διακόπτοιο, οἷα ἐστὶν ἡ ἐξίσωσις χ° — $\pi\kappa\rho = 0$, ἥς ἀπεισὶν ὁ, τε δευτέρος, καὶ τρίτος ὄρος, εἴτ' οὖν χ° , καὶ χ .

480. Ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσα πλήρης ἐξίσωσις τοσούτων εὐμοιρεῖ ὄρων, ὅσων ἐς ῥιζῶν σὺν ἐνί· ἡ γὰρ προλαβύσα ἐξίσωσις Β (476) δευτέρῳ ἔσα βαθμῇ, ὅ ἐστι δύο περιέχουσα ῥίζας, ὄρων τριῶν ἐστὶ περιεκτική· ἡ δὲ Δ τριτόρριζος ἔσα, τέσσαρας περιέχει ὄρους, εἴγε — $\pi\kappa\rho = -\pi\kappa\rho\chi^{\circ}$ (59).

481. Ἀπάσης ἀπλῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἥς τὸ δευτέρου μέλος ἐγενέτο = 0 διὰ μεταθέσεως, αἱ ῥίζαι, εἴτ' ἐν δυνάμει τῆς ἀγνώστης, ὑπάρχουσαι μὲν, τὸ —, λείπασαι δὲ τὸ + προτεταγμένον ἑαυτῶν ἔχουσιν· ἐντεῦθεν ἄρα.

482. Ἦτοι πᾶσαι αἱ ῥίζαι εἰσὶ λειπτικαὶ, ἐπὶ δὲ οἱ ὄροι πάντες ἔξωσι τὸ +, ἡ πᾶσαι ὑπαρκτικαὶ, ἐπὶ τοῖς ὄροις προσκείσεται ἀμοιβαδὸν +, —

483. Ἐν γένει δὲ τοσάκις ἀφ' ἐκάστου ἐπὶ ἑκάστον ὅρον ἀμειψθήσεται τὸ σύμβολον, ὅσαι εἰσὶν αἱ ὑπερκτικαὶ ρίζαι· τοσάκις δὲ ἀφ' ἐκάστου ἐφ' ἑκάστον τὸ αὐτὸ παρακολυθήσεται, ὅσαι αἱ λειπτικάι· ἐπὶ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ (Z), ἥς δύο μὲν εἰσὶ ρίζαι ὑπερκτικαὶ αἱ + 2, + 4, μία δὲ λειπτική ἡ - 3, δύο μὲν εἰσιν ἀμοιβαί τῷ συμβόλῳ + —, — +, μία δὲ τῷ αὐτῷ παρακολυθήσεται, —, —

484. Ἡ'τοι τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν, εἴτ' ἔν αἱ ὑπερκτικαὶ δυνάμεις ἐξισῶνται τῷ ἄθροισματι τῶν λειπτικῶν, ἢ δὴ τότε ἡ ἐξίσωσις τῷ δευτέρῳ ὅρῳ ἐλλείπεται· ὡς δὴλον ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $x^3 - 28x - 48 = 0$ ἥτις γίνεται ὑπὸ τῶν $x - 6 = 0$, ἢ $x + 2 = 0$, ἢ $x + 4 = 0$ · ἢ τὸ τῶν ὑπερκτικῶν τῷ τῶν λειπτικῶν ὑπερέχει, ὅτε ἢ ὁ δεύτερος ὅρος λειπτικὸς γίνεται, ὡς πρόδηλον ἐκ τῆς Z ἐξισώσεως· ἢ ἔλαττον, ὅτε δὴ ἢ ὑπερκτικὸς γίνεται ὁ δεύτερος ὅρος, ὡς ἰδεῖν ἔνεστιν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $x^3 + 2x - 24 = 0$ γινομένης ὑπὸ $x - 4 = 0$, $x + 6 = 0$.

Ἐκ δὴ τούτων τῶν παρατηρήσεων ὁδηγηθῆναι δυνασόμεθα εἰς τὴν τῶν ριζῶν, εἴτ' ἔν τῶν ὑπερκτικῶν, ἢ λειπτικῶν δυνάμεων τῆς ἀγνώστου εὑρεσιν.

485. Πᾶσα ἐξίσωσις τῷ ἑκάστῳ ἀμοιρῶσα ὅρου, εἴτ' ἔν τῷ γνωστῶν μόνων ποσῶν περιεκτικῇ, ἐκληπτέα ἐστὶν ὡς βαθμῇ ὑποδεεζέρε, ἢ τῷ ὠρισμένῳ τῷ μεγίστῳ τῆς ἀγνώστου δείκτη· ἢ γὰρ τῆς ἀγνώστου x τὸ τμητικαῦτα πᾶσι τοῖς ὅροις ἀνυπερκτέσης, εἰάν πάντες οἱ ὅροι διὰ x διαιρεθῶσιν, ἢ ἐξίσωσις κάττεισι βαθμὸν ἕνα (459)· ἔτις ἢ $x^4 - 28x^2 - 48x = 0$ ἐκ ἑσὶ τεταρτοβάθμιας ἐξίσω-

σις, εἶγε πέντας τὸς ὅρους διαιρεθῆσα διὰ χ, γενήσεται
 $\chi^5 - 28\chi - 48 = 0$.

486. Συνεργὸς ὅρε καλεῖται τὸ ἄθροισμα πα-
 σῶν τῶν γνωστῶν ποσοτήτων, ὑφ' ὧν ἡ τῆς ἀγνώστη πα-
 ρίγεται ὁ καλούμενος ὅρος τῆς συνθέτου ἐξισώσεως (478).
 ἔτω τῆς ἐξισώσεως Δ (476), — π — κ — ρ ἔσιν ὁ συ-
 νεργὸς τῆ δευτέρου ὅρε τῆς ἐξισώσεως, ἡ πκ + πρ + κρ
 ὁ συνεργὸς τῆ τρίτου.

487. Πᾶσα ἄρα εὐτακτος ἡ πλήρης ἐξίσωσις συ-
 νεργὸν τῆ μὲν δευτέρου αὐτῆς ὅρε ἔχει τὸ ἄθροισμα πα-
 σῶν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως, ἢ τῶν τῆς χ δυνάμεων·
 τῆ δὲ τρίτου, τὸ ἄθροισμα τῶν γινόμενων ὑπὸ τῶν αὐτῶν
 ῥιζῶν, ἀνὰ δύο λαμβανομένων· τῆ δὲ τετάρτου, τὸ γι-
 νόμενον ὑφ' ἀπασῶν ὁμῶς τῶν ῥιζῶν, εἴπερ ἡ ἐξίσωσις
 τρίτου εἴη βαθμῆ· ἔτω τῆς Δ ἐξισώσεως, ἥς ῥίζαι αἱ
 π, κ, ρ, συνεργὸς μὲν τῆ δευτέρου ὅρε ἔστι — π — κ
 — ρ, συνεργὸς δὲ τῆ τρίτου ἔστι πκ + πρ + κρ· τῆ δ' ἐ-
 χάτου, — πκρ.

Ταῦτά δὲ κρατεῖ κατὰ τριτοβαθμῆς ἡ εὐτάκτη ἐξι-
 σῶσις· ἐν αὐτῇ γὰρ τῆ τετάρτου ὅρε συνεργὸς ἂν εἴη
 τὸ ἄθροισμα τῶν γινόμενων ὑπὸ πασῶν τῶν ῥιζῶν σὺν δύο
 λαμβανομένων, ἡ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν συνθέτων ἐξισώσεων.

488. Ἐπιλύειν ἐξίσωσιν σύνθετον εὐρίσκειν ἐστὶ τὰς
 διαφορὰς δυνάμεις τῆς ἀγνώστη αἵτινες εἰσὶ ῥίζαι τῆς ἐξι-
 σῶσεως· ἐπεὶ δὲ ὁ ἐλάχιστος ὅρος τὸ ὑφ' ἀπασῶν τῶν ῥι-
 ζῶν συνίστησι γινόμενον, εὐρετέον ἀμέσως ἅπαντας τέττα-
 ρες διαιρέτας κατὰ τοῦδε τὸν τρόπον.

489. Ἰν' εὐρεθῇεν ἅπαντες φερόειπεν οἱ διαιρέται

τῷ 660 διηρήσθω πρῶτον διὰ τῷ πρώτῳ ἀριθμῷ 2 (Α'ριθ. 80)· καὶ δὴ ἔσαι δίχα λειψάνῃ πηλίκον 330, ὅς πάλιν διηρήσθω διὰ 2· τὸ δ' ἐντεῦθεν πηλίκον 165, μὴ δυνάμενον ἔτι διὰ 2 διαιρεθῆναι, διηρήσθω διὰ 3· τὸ δ' ἐκ τῶν πηλίκον 55, διὰ 3 ἀδιαίρετον ὄν, διηρήσθω διὰ τῷ πρώτῳ ἀριθμῷ 5· ὅθεν πρόεισι πηλίκον 11, ὅς μὴ διαιρέμενος δι' ἄλλῃ παρὰ τὴν 1 καὶ αὐτὸν τῦτον τὸν 11, διηρήσθω διὰ 11· πηλίκον δὲ ἔσεται 1.

Πρῶτοι ἐν ἀριθμοὶ διαιρέται τῷ 660 παρὰ τὴν πάντας τὰς ἀριθμοὺς διαιρέσαν 1 (Α'ριθ. 78) εἰσὶν οἷδε 2, 2, 3, 5, 11.

Εἰς δὲ εὗρεσιν τῶν πολλαπλῶν ἀριθμῶν τῶν διαιρύντων καὶ αὐτῶν τὸν 660, πεπολλαπλασιάσων οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ διαιρέται εὐρεθέντες ὕτως.

α'. Ἀνὰ δύο· $2 \times 2 = 4$ · $2 \times 3 = 6$ · $2 \times 5 = 10$ · $2 \times 11 = 22$ · β'. Ἀνὰ τρεῖς· $2 \times 2 \times 3 = 12$, $2 \times 2 \times 5 = 20$ · $2 \times 2 \times 11 = 44$ · $2 \times 3 \times 5 = 30$ · $2 \times 3 \times 11 = 66$ · $2 \times 5 \times 11 = 110$ · $3 \times 5 \times 11 = 165$ · γ'. δὲ ἀνὰ τέσσαρας· $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ · $2 \times 2 \times 3 \times 11 = 132$ · $2 \times 2 \times 5 \times 11 = 220$ · $2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$ · τελευτατον δὲ ἀνὰ πέντε· $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 660$ · πάντες ἄρα οἱ διαιρέται τῷ 660 ἔσονται 1, 2, 3, 5, 11, 4, 6, 10, 22, 15, 33, 55, 12, 20, 44, 30, 66, 110, 165, 60, 132, 220, 330, 660.

Οἱ δὲ λόγος ταύτης τῆς πράξεως ἐστίν, ὅτι ὁ 660 γινόμενος ὑπὸ $1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$, εἴαν ἐκ διαδοχῆς διαιρεθῇ διὰ 1, 2, 2, 3, 5, 11, ἀποβήσεται τελευτῶν 1· ὁ αὐτὸς δὲ ἀριθμὸς, πολλαπλῆς ὢν καὶ τῷ 2×2 , καὶ $2 \times 2 \times 3$ κτλ. λειψάνῃ ἄτερ διαιρεθῆσεται δι' ἑκάστου τῶνδε τῶν γινομένων.

490. α. Εὐρεθέντων ἐν ἑτῷ πάντων τῶν διαιρετῶν τῷ ἑκάτῃ ὄρῳ τῆς ἐξίσωσως, ἀντικαταστήτωσαν, ἀρχαμένοις ἐκ τῶν ἐλαττόνων, ἕκαστος ἀντὶ χ ἐπὶ τῆς ἐξίσωσως, νῦν μὲν ὡς ὑπαρκτικοί, νῦν δὲ ὡς λειπτικοί (475) ὅς δ' ἂν ἀντικατασταθεὶς ἀντὶ χ ποιῇ τὴν ἐξίσωσιν ἴσην ο, ἔσαι ἕτος μία τις τῶν ἀληθῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσως· ὡς ἐπιλύειν οἶατε ἔσα τὸ πρόβλημα.

β. Ἐκ τῆς εὐρεθείσης δὲ ρίζης συνετάωω ἐξίσωσις μετὰ τῷ συμβόλῳ $+$, ἢ $-$, ὅπως ἔχει δηλονότι λειψως, ἢ ὑπάρξεως, ἢ εὐρεθείσα ρίζα· εἰάν γὰρ φέρε εὐρεθῇ ρίζα $+ 3$, γενέωω ἐξίσωσις $\chi - 3 = 0$ · ἐπεὶ δὲ ἡ σύνθετος ἐξίσωσις, πολλαπλῇ ἔσα ἐς ταύτης τῆς ἀπλῆς ἐξίσωσως, διαιρέσιμος ἂν εἴη δι' αὐτῆς ταύτης· διηρήθω δι' αὐτῆς· ἐς δὲ ἔτως ἡ σύνθετος ἐξίσωσις καταλύσεται βαθμὸν ἓνα.

491. γ'. Ἐπὶ τῆς συνθέτου ἐξίσωσως, τῆς ἑτῷ βαθμὸν ἓνα κατελθέσης, ἀντικατασταθήτωσαν αἰθίς ἀντὶ χ πάντες οἱ εὐρεθέντες τῷ ἑκάτῃ ὄρῳ διαίρεται, πλὴν τῶν ἀνοικείων φανέντων ἐπὶ τῆς πρώτης πράξεως, ὁ δ' ἀποτελῶν τὴν ἐξίσωσιν $= 0$, νέαν ἐς αὐτὸς συστήσας ἐξίσωσιν, διαιρείτω τὴν σύνθετον ἐξίσωσιν, ἣδη καταχθεῖσαν· ἐς δὲ ἑτῷ ἐς αὐτὴν κάτεισι βαθμὸν ἓνα.

δ'. Ἐπανειλήφθω ὡσαύτως τὰ τῆς πράξεως, εἰάν ἡ ἐξίσωσις βαθμῷ τρίτῳ ὑπερτέρα ᾖ, ἐς ὃ τὸ πηλίκον ἐξίσωσις ὑπάρχοι δευτεροβάθμιος, ἥτις ἐπιλυθήτω κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (452 κτ).

ε. Διὰ τῷ γινομένου ὑπὸ τῶν εὐρεθεισῶν ριζῶν διηρήθω ὁ ἑκάτος τῆς συνθέτου ἐξίσωσως ὅρος· τὸ δὲ πηλίκον ἔσαι ἡ ἑκάτη ζητεμένη ρίζα· ἐπαυθητότερον δὲ ταῦτα πάντα φανήσεται δι' ὑποδειγμάτων.

ς'. Εὐ γένει μέντοι, εἴαν ὁ μέγιστος βαθμὸς τῆς ἀ. γνώσε συνεργόντινα ἔχη, ἀπηλλάχθω τέτε πρὶν τῶν διαιρέτων λαβεῖν ἀπόπειραν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Εὐρεῖν Α' ριζὴν, ἀφ' ἧς ὁ τετράγωνος ἑνδεκάκις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τῆ κατ' αὐτὸν κύβου, προσθεύτος τριακονταοκτάκις τῆ αὐτῆ, καταλείπει 40.

ΛΤΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις ἐστὶ $x^3 - 11x^2 + 38x = 40$ μεταθέσει· $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$ (Α). ἀ. εὐρεθήτωσαν οἱ τῆ 40 διαιρέται (489) οἵτινές εἰσιν 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. β'. $+1, -1$ ἀντὶ x εἰσαχθέντες ἤκιστα ἄγυσιν ἐπὶ οὐ τὴν ἐξίσωσιν· ἔκβιν ἀντικαταστήτω ἀντὶ x , $+2$ · τοιγαρὲν $x^3 = +8$, καὶ $-11x^2 = -44$, καὶ $+38x = 76$ · ἀντὶ ἐν τῆς Α ἐξισώσεως προκύπτει ἔτι $8 - 44 + 76 - 40 = 0$ · ἔκβιν $+2$ ἐστὶ μίατις τῶν ἀληθῶν ριζῶν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως.

Παρατηρῶν δὲ, ὡς ἀντὶ x ἀντικαταστήσαντος τῆ -2 , γίνεται ἡ ἐξίσωσις $-8 - 44 - 76 - 40 = -168$ ἀντὶ $= 0$, συνάγω ὅτι -2 ἔκβιν ἐστὶ μία τῶν ριζῶν· β'. γενέσθω ἐκ τῆς εὐρεθείσης ρίζης $+2$ ἡ ἐξίσωσις $x - 2 = 0$, καὶ δι' αὐτῆς διηρήσθω ἡ Α ἐξίσωσις κατὰ τῆς ἐκτεθέντας τῆς συμβολικῆς διαιρέσεως κανόνας (63. ὑποδ. Β'). καὶ δὴ ἔσαι πηλίκον $x^2 - 9x + 20 = 0$, ὃ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ὄν, ἐπιλελύσθω κατὰ τῆς περὶ τῶν τοιούτων προαποδοδομένου κανόνας· ἵνα δὲ τέτο γένηται, μετατεθείσθω ὁ 20 καὶ μείνῃτω ἡ ἐξίσωσις μόνῃ ἔτι $x^2 - 9x = -20$, ἐφ' ἧς συμπληρώσει τῆ ἐλλειπῆς τετραγώνου, καὶ ρίζης ἐξαγωγῇ, εὐρεθήσεται $x = 5$, ἡ δευτέρα ζητεμένη ρίζα.

Ἀλλὰ γὰρ ἡ Α ἐξίσωσις τριτοβάθμιος ἔσα τρεῖς περιέχειν ὀφείλει ρίζας (477)· ὁ δὲ τρίτος ὅρος 40 ἔτι

τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐρεθείσων ῥιζῶν 2×5 ἢ τῆς ζητυμένης τρίτης (487)· ἐκὼν διηρήσθω ὁ 40 διὰ 10, τὸ δὲ πηλίκον 4 ἔσται ἡ ζητυμένη τρίτη ῥίζα.

Εὐρηνται ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ 2, 4, ἢ 5, ὧν ἕκαστος ἀποπληροῖ τὴν τῷ προβλήματος θέσιν, ὡς ἐκάστω ἀποπειραθέντι τέτων συνιδεῖν ἔξει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ἐπιλύσαι τὴν ἐξίσωσιν $x^4 + 15x^3 + 71x^2 = -105x$, ταυτὸν εἶπαι τὴν $x^4 + 15x^3 + 71x^2 + 105x = 0$ (P)

ΛΤΣΙΣ. α'. διαιρέσει διὰ x κατήχθω ἡ P ἐξίσωσις ἐπὶ βαθμὸν τρίτον· $x^3 + 15x^2 + 71x + 105 = 0$. β'. πάντων τῶν κατ' αὐτὴν ὄρων ὑπαρκτικῶν ὄντων, πάσας τὰς ῥίζας αὐτῆς λειπτικὰς χρεῶν εἶναι (482)· εὐρεθέντων ἔν τῶν διαιρετῶν ἀπάντων τῷ 105, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ὡς ἀνωτέρω, χρησάμενοι, εὐρήσομεν τρεῖς ῥίζας — 3, — 5, — 7, ὧν ἐκάστη ἀποπληροῖ τὴν θέσιν τῷ προβλήματος· ἢ γὰρ — 3 φέρ' εἶπαι ἀντὶ x εἰσαχθεὶς ποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν $+81 - 405 + 639 - 315 = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Α'ριθμὸν εὐρεῖν ὅπως ὁ διπλῆς αὐτῷ κύβος σὺν τῷ γινόμενῳ ὑπ' αὐτοῦ τῷ ἀριθμῷ καὶ τῷ 234 ἀποτελῇ 648.

ΛΤΣΙΣ. Η' ἐξίσωσις ἔστι $2x^3 + 234x = 648$, ἢ $2x^3 - 234x - 648 = 0$. α'. ἀπαλλακτέον τῷ 2 συναργῶ τὸν $2x^3$ διαιρέσει ἀπάσης τῆς ἐξισώσεως διὰ 2· ἔστιν ἔν $x^3 - 117x - 324 = 0$ (Z). β'. ἐξ ἀπάντων τῶν τῷ 324 διαιρετῶν ὁ — 3 ἀποτελεῖ τὴν ἐξίσωσιν $= 0$, ἄρα $x + 3 = 0$ διαιρείτω τὴν Z ἐξίσωσιν· ὅθεν ἔσται πηλίκον $x^2 - 3x - 108 = 0$ (63, ὑπόδειγ. Γ').

Αὕτη δὲ ἐπιλελύσθω κατὰ τὰ δευτοβάθμια τῶν προ.

ελημέτων

$$x^2 - 3x = 108$$

σημπληρώσει· $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 108 + \frac{9}{4}$ εξαγωγή ῥίζης $x - \frac{3}{2} = \sqrt{108 + \frac{9}{4}}$

$$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{432}{4} + \frac{9}{4}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

ἔκυν $x - \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$ · ἄρα $x = 10\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 12$.

Ἐπεὶ δὲ ἐλλείπει ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐξισώσεως Z (479) ἡ ζητούμενη τρίτη ῥίζα ὀφείλει εἶναι λειπτική (484) καὶ συναπτομένη τῇ πρώτῃ ῥίζῃ -3 ἐξισῶσαι τῷ ἀθροίσματι τῶν ὑπαρκτικῶν ῥιζῶν, ἡ τῇ δευτέρᾳ ὑπαρκτικῇ ῥίζῃ 12· ἔσαι ἄρα αὕτη ὁ -9 .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως εἰ ἀπὸ τῆς τρις εἰλημμένου αὐτῆ πέμπτου βαθμῆ σὺν τῷ ἑξαπλῷ αὐτῆ κύβῳ ἀφαιρεθεῖ δωδεκάκις ὁ τέταρτος αὐτῆς βαθμὸς, τὸ κατάλοιπὸν ἐξισῶται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς αὐτῆς τετραγώνῳ, καὶ τῷ 24.

ΛΤΣΙΣ. Ἐσιν ἐκ τέτων ἡ ἐξίσωσις $3x^5 - 12x^4 + 6x^3 = 24x^2$ · διαιρέσει πάντων τῶν ὅρων διὰ x^2 , $3x^3 - 12x^2 + 6x = 24$, ἐξίσωσις τριτοβάθμιας, ἥτις μεταθέσει γίνεται $3x^3 - 12x^2 + 6x - 24 = 0$ (M). ἀπαλλαγῇ τῆς συνεργῆς 3, $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = 0$ (A) ἀντικαταστήσει ἔν τῷ $+4$ ἐνὸς τῶν τῶν 8 διαιρετῶν, ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τὸ μηδὲν οἰχομένη ἀποδέχεται ὡς ἐαυτῆς ῥίζαν τὸν $+4$.

Διαιρεθείσης ἔν τῆς A ἐξισώσεως διὰ $x - 4 = 0$, πηλίκον προκύψει ἐξίσωσις δευτεροβάθμιας ἡ $x^2 + 2 = 0$ · ἄρα $x^2 = -2$ · ἄρα $x = +\sqrt{-2}$, καὶ $-\sqrt{-2}$, πρόσ-
τητες ἀνύπαρκτοι, αἵτινες εἰσὶν αἱ δύο λοιπαὶ ζητούμε-
ναι ῥίζαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ Μεταχηματισμῶ τῶν ἐξισώσεων,
καὶ τῆς διὰ γενικῶν τύπων αὐτῶν
ἐπιλύσεως.

492. Ἰ'να δὲ στοιχειώδεις ἢ γενικὸς τύπος τῆ παρ.
σαν ἐξίσωσιν ἐπιλύειν ἐξενέγκωμεν, ἀνάγκη διὰ βρα-
χέων ἀποδῆναι τὰ περὶ τῶν καλεσμένων μεταχηματισμῶν
τῶν ἐξισώσεων.

493. Α'. οὐν εἰς πλείω εὐμάρσιαν οἱ πολυώνυμοι
ἢ πολυγράμματοι συνεργοὶ τῶν ἐξισώσεων λαμβάνονται
μονώνυμοι τε ἢ μονογράμματοι· κεισθὼ γὰρ ἐξίσωσις τρι-
τοβάθμιος ἢ $υ^3 + αυ + αβυ + αβγ = 0,$

$$+β + α γ$$

$$γ + β γ$$

εἰάν ᾗ ὑποτεθῇ $α + β + γ = κ,$ ἢ $αβ + αγ + βγ = π,$
ἢ $αβγ = ρ,$ ὁ γενικὸς τύπος τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως
ἔσται $υ^3 + κυ^2 + πυ + ρ = 0.$

494. Β'. Ἰ'να ἐξίσωσιν, ἥς πάντες οἱ ὅροι πλὴν τῆ
πρώτης κλασματικοὶ εἶεν, τῶν κατὰ τὰ κλάσματα παρο-
νομασῶν ἀπαλλάξωμεν, μηδὲνα προθέμενοι συνεργὸν τῷ
πρώτῳ αὐτῆς ὅρῳ, εἰλήθῃω ἀντὶ τῆς ἀγνώστης ἑτέρας ἁ-
γνώστου διηρημένη τῷ γινομένῳ ὑπὸ πάντων τῶν παρονο-
μασῶν ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασθέντων, ἢ πᾶσα ἢ
ἐξίσωσις πολλαπλασιασθῇτω ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ
πρώτου ὅρου.

$$\text{Ἐς ὡς ἐξίσωσις ἢ } u^3 - \frac{au^2}{\beta} + \frac{au}{\gamma} + \frac{a^3}{\delta} = 0 \text{ ὑποτε.}$$

θερίθω τοίνυν $u = \frac{\chi}{\beta\gamma\delta}$, καὶ ἀντὶ u ἀντικαταστάσης ἐν τῇ

$$\text{ἐξίσώσει τῆς ποσότητος } \frac{\chi}{\beta\gamma\delta}, \text{ ἔσται } \frac{\chi^3}{\beta^3\gamma^3\delta^3} -$$

$$\frac{a\chi^2}{\beta^3\gamma^2\delta^2} + \frac{a\chi}{\beta\gamma\gamma\delta} + \frac{a^3}{\delta} = 0. \text{ ἕκαστος δὲ τῶν ὅρων}$$

ταύτης τῆς ἐξίσωσεως πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ $\beta^3\gamma^3\delta^3$ παρονομασὴν τῇ πρώτῃ ὄρου, καὶ δὴ γενήσεται $\chi^3 - a\gamma\delta\chi^2 + a^2\beta^2\gamma\delta^2\chi + a^3\beta^3\gamma^3\delta^2 = 0$.

Ἐὰν δὲ ἢ $\beta = \gamma = \delta$, ἀπόχρη μόνον λαβεῖν $u = \frac{\chi}{\beta}$.

$$\text{Ἐς ὡς γὰρ ἐξίσωσις ἢ } u^3 - \frac{3u^2}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

καὶ εἰλήφθω $u = \frac{\chi}{2}$ τοιγαρὺν ἀντικαταστάσει τῆς $\frac{\chi}{2}$ ἀντὶ

$$u, \text{ γενήσεται ἐξίσωσις } \frac{\chi^3}{8} - \frac{3\chi^2}{2 \cdot 2} + \frac{6\chi}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2} = 0.$$

ἣτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 8 γενήσεται $\frac{8\chi^3}{8} +$

$$\frac{24\chi^2}{4} + \frac{48\chi}{4} + \frac{88}{2} = 0. \text{ ἀναγωγῇ τῶν κλασμάτων}$$

ἐφ' ἀπλυσέραν ἔκθεσιν, $\chi^3 - 6\chi^2 + 12\chi + 44 = 0$.

463. Γ'. Ἰνα ἐξίσωσεως ὁ δεύτερος ὅρος ἐξαφανισθῇ, εἰλήφθω ἄγνωστος καινὴ τῇ ἐπὶ τῆς ἐξίσωσεως ἴσχυμένη, εἰς προσλάβη μετ' ἐναντίας συμβόλου τὸν συνεργὸν τῷ δευτέρῳ ὄρου διακρινθέντα διὰ τῷ δείκτε τῷ πρώτῳ

ὅρου· ἔσω ἐξίσωσις $u^2 + 6u - 16 = 0$ · εἰλήφθω ἔν $u =$
 $x - \frac{3}{2} = x - 3$, καὶ ἀντὶ u ἀντικαταστήτω ἐν τῇ προτεθεί-
 σῃ ἐξίσωσει· ἔκθ' ἔσαι

$$\begin{array}{r} u^2 = x^2 - 6x + 9 \\ + 6u = \quad + 6x - 18 \\ \hline - 16 = \quad \quad - 16 \end{array}$$

$x^2 - 25 = 0$ ἐξίσωσις τῆ δευ-
 τέρου ὅρου ἐλλείψουσα, εἶδ' ὁ δεύτερος ὅρος ἐκάτερον ἔχει
 τὸ σύμβολον $+$ καὶ $-$, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $u^2 - au$
 $+ \beta u - \alpha\beta = 0$ · εἰλήφθω ὡσαύτως ὁ συντελεστὴς $- \alpha \times \beta$,
 καὶ διηρήθω διὰ 2, $-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, καὶ ἀγνώστου ποσότης
 τὸ πηλίκον τυτὶ μετ' ἐναντίων συμβόλων προσλαβῶσα ἰ-
 σῶθω τῇ ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀγνώστῳ· εἴτ'
 ἔν γενέσθω $u \times x + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως
 γενομένης προκύψει ἐξίσωσις ἡ ἐφεξῆς

$$\begin{array}{l|l} u^2 & = x^2 + \alpha x - \beta x + \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}\alpha\beta + \frac{1}{4}\beta^2 \\ - \alpha \} \cdot u & = - \alpha x + \beta x - \frac{1}{4}\alpha^2 - \alpha\beta - \frac{1}{4}\beta^2 \\ + \beta & \\ - \alpha\beta & = \quad \quad \quad - \alpha\beta \end{array}$$

$$x^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{4}\alpha\beta - \frac{1}{4}\beta^2 = 0$$

496. Δ'. Ἰ'να δὲ ἐξίσωσιν ριζικῶν ἀπαλλάξωμεν
 ποσοτήτων, καὶ καθ' ἓνα τρόπον αἶτι τῆς ἐν ἐπιτεύξει
 γινόμεθα· δι' ὃ πλείω παραληφθήσεται ὑποδείγματα
 πρὸς διασάφησιν τῶν διαφορῶν τρόπων.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκειμένης ἔν ἐξισώσεως τῆς
 $u^2 - 5u + \sqrt{2} = 0$ ἢ αὐτὴν τῇ $\sqrt{2}$ ἀπαλλάξωμεν εἰ-

λήθω $\chi \sqrt{2} = u$, ἡ τῆς δυνάμεως ταύτης ἀντὶ u ἀν-
τικατασθεῖσης ἔσται $u^3 = 2\chi^3 \sqrt{2}$

$$-5u = -5\chi \sqrt{2}$$

$$+\sqrt{2} = + \sqrt{2}$$

$$2\chi^3 \sqrt{2} - 5\chi \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

διαιρεθέντων δὲ ἀπάντων τῶν ὅρων διὰ $\sqrt{2}$ προκύψει ἡ
ἐξίσωσις ῥιζικῶν ἀπηλλαγμένη ἢ $2\chi^3 - 5\chi \times 1 = 0$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐσιν ὅτε πρόδος γεωμετρικῇ
συνίσταται ἐκ τῶν ῥιζικῶν, ἐφ' ἣ παλλαπλασιασθεῖσα ἡ
ἐξίσωσις τῶν ἀλόγων ποσῶν ἀπαλλάττεται· ἔτως

$$u^4 + 2au^3 \sqrt{2} + 5a^2u^2 - a^3u\sqrt{8} - 2a^2\beta^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & \sqrt{2} & & 2 & & \sqrt{8} & & 4 \end{array}$$

$$\chi^4 + 4a\chi^3 + 10a^2\chi^2 - 8a^3\chi - 8a^2\beta^2 = 0$$

ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως τὰς ῥίζας διελεῖν ἀνάγκη διὰ
τῆ $\sqrt{2}$, ἢ ἀπολάβωμεν τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως,
εἴγε $\chi = u\sqrt{2}$ (ἐξ ὑποθέσεως).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Παλλάκις δὲ ὅλη ἡ ἐξίσωσις
τῆ τῶν ῥιζικῶν ποσῶν γεωμετρικῇ προόδῳ διαιρέσιμος
ὑπάρχει· οἷον

$$u^3 - au^2 \sqrt{2} + a^2u \sqrt{32} - a^2\beta = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & \sqrt{2} & & \sqrt{32} & & 2 \end{array}$$

$$\chi^3 - a\chi^2 + 2a^2\chi - \frac{1}{2}a^2\beta = 0$$

ἔστι δὲ ἐπὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως $\chi = \frac{3}{\sqrt{2}}$

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἐξῆς δ' ἀπαλλάξαι ἐξίσωσιν
τῶν ῥιζικῶν ὑποτιθέντας τὰς ῥιζικὰς ὅρας ἴσους γράμμασι·

ກ່າວໄປ ວິໄສ ຄຳສອນ ລາຍລະອຽດ ທັງໝົດ ຂຶ້ນໄປຕາມ ມຸນໃຈ ທີ່ເຮົາຕ້ອງ
 ສູ່ ກັບ ສະພາບ ທັງໝົດ ທີ່ເຮົາ ບໍ່ມີ ຄວາມ ຂຶ້ນໄປຕາມ ຕາມ ຄຳສອນ
 ທັງໝົດ ທີ່ເຮົາ ບໍ່ມີ ຄວາມ ຂຶ້ນໄປຕາມ ຕາມ ຄຳສອນ ທັງໝົດ ທີ່ເຮົາ

$$v^3 - v/a + 1/\delta = 0$$

[illegible]

$$4\pi^2 v^6 \equiv x^4 v^4 \equiv 2x^2 v^2 + v^1 z \equiv 2x^2 \pi^2 v^2 + 2\pi^6 v^6 + \pi^4,$$

$$v^{12} - 2\kappa^8 v^8 - 2\pi^2 v^6 + \kappa^4 v^4 - 2\kappa^2 \pi^2 v^2 + \pi^4 = 0$$

[illegible]

$$\chi^6 - 2\kappa^2\chi^4 + 2\pi^2\chi^3 + \kappa^4\chi^2 - 2\kappa^2\pi^2\chi + \pi^4 = 0$$

[illegible]

$$x^6 - 2\alpha x^4 + 2\beta x^3 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0$$

[illegible]

497. E'. I'ua dē tās tēs dōdektas ēkētōwstas pōzdas ē-
πī ποσὸν δὲδόν πολυαταστάμεν, εἴτ' ὕ τās tēs υ3 —
 $\alpha\upsilon^2 - \beta^2 v + \alpha\beta = 0$ ἐπὶ τοῦ γ, εἰλήθως γυv=χ,

$$\epsilon_{\Gamma}^{\Gamma} \mathbf{y} \vee = \frac{\chi}{\gamma}, \text{ သံတံ } \mathbf{y} \vee \text{ သံတံအတူအတူအတူ } \gamma \mathbf{y} = \frac{\chi}{\gamma}, \pi_{\Gamma} \mathbf{y} \vee$$

κίψει καινή εξίσωσις ἢ $\frac{\chi^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\chi^2}{\gamma^2} - \frac{\beta^2\chi}{\gamma} + \alpha\beta\beta = 0$,

ἢ τις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ γ^3 , ἀναγωγῇ γενήσεται $\chi^3 - \alpha\gamma\chi^2 - \beta\gamma^2\chi + \alpha\beta\beta\gamma^3 = 0$, ἣς περ ρίζαι αἱ $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, — $\beta\gamma$. Ἐς αὐτὴς εξίσωσις ἢ $u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0$, ἣς τὰς ρίζας $+1$, $+2$, $+3$ πολλα-

πλασιάσαι πρόκειται ἐπὶ 2· γενέωθω τοίνυν $u = \frac{\chi}{2}$,

ἢ ἀντὶ u ἀντικατασταθέντος τῷ $\frac{\chi}{2}$ προκύψει εξίσωσις ἢ

$$\frac{\chi^3}{8} - \frac{6\chi^2}{4} + \frac{11\chi}{2} - 6 = 0, \text{ ἢ πολλαπλασιασθεῖ-}$$

σα ἐπὶ 8, ἀναγωγῇ γενήσεται $\chi^3 - 12\chi^2 + 44\chi - 48 = 0$, ἣς ρίζαι $+2$, $+4$, $+6$.

Δῆλον ἔν ἐκ τούτων, ὡς ἴν' εξίσωσις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα τὴν δοθεῖσαν, ἀποχρήσει ταύτην πολλαπλασιάσαι ἐπὶ γεωμετρικὴν πρόοδον, ἣς πρῶτος μὲν ὅρος 1· πηλίκον δὲ τῷ λόγῳ ἢ δεδομένη ποσότης· ἔτω τῶν ἐκτεθέντων ἡδὴ ὑποδειγμάτων ληφθείσης ἀγνώ-
στῃς χ , τὸ μὲν πρῶτον ἔσαι

$$\chi^3 - \alpha\chi^2 - \beta^2\chi + \alpha\beta\beta = 0$$

$$\div 1 : \gamma : \gamma^2 : \gamma^3$$

$\chi^3 - \alpha\gamma\chi^2 - \beta^2\gamma^2\chi + \alpha\beta\beta\gamma\gamma = 0$, τὸ δὲ
δεύτερον, $\chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0$

$$\div 1 : 2 : 4 : 8$$

$$\chi^3 - 12\chi^2 + 44\chi - 48 = 0$$

498. ε'. Ἰνὰ δὲ τὰς τῆς δοθείσης εξισώσεως $u^3 - \alpha u^2 - \beta^2 u + \alpha\beta\beta = 0$ ρίζας $+a$, $+b$, — β ποσό-

τητι δοθείση $τη + γ$ διέλωμεν, γεγονέτω $\frac{υ}{γ} = χ$,

εἴτ' ἔν $υ = γχ$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως ἔσαι $γ^3 χ^3 - α γ^2 χ^2 - β^2 γ χ + α β β = 0$. ἑκάςδε δὲ τῶν ταύτης ὡ-
ρων διαιρεθέντος διὰ $γ^3$ γροκύφει ἐξίσωσις ἢ $χ^3 - \frac{α χ^2}{γ}$

$$- \frac{β^2 χ}{γ^2} + \frac{α β β}{γ^3} = 0, \text{ ἣς ρίζαι αὐτὴν αὖ + } \frac{α}{γ}, + \frac{β}{γ} - \frac{β}{γ}.$$

κατάδηλον τοίνυν, ὡς ἔν' ἐξισώσεως αὐτὴ ρίζαι
διὰ ποσότητος δεδομένης διαιρεθῶσιν, ἀπόχρημόνον εἰ πᾶσα
διαιρεθεῖ διὰ προόδου γεωμετρικῆς, ἣς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος
εἴη μονάς, πηλίκον δὲ ἢ δοθεῖσα ποσότης· εἰ γὰρ ἐτέ-
ρα ἄγνωστος ἢ $χ$ ληφθῇ, ἢ πρόοδος γεωμετρικὴ $\ddot{::} 1 :$
 $γ : γ^2 : γ^3$ κτλ, ἢ προτεθεῖσα ἐξίσωσις προκύφει διὰ δι-
αιρέσεως

$$\begin{array}{r} χ^3 - α χ^2 - β^2 χ + α β β = 0 \\ \ddot{::} 1 : γ : γ^2 : γ^3 \\ \hline χ^3 - \frac{α γ χ^2}{γ} - \frac{β^2 γ^2}{γ^2} + \frac{α β β}{γ^3} = 0 \end{array}$$

Τούτων οὕτω προδιατεθέντων, φέρε πρῶτον τὸν γενικὸν
τύπον τῆς τῶν τριτοβάθμιων (ἐφ' ὧν ἢ μόνων ἐντελῶς ἐ-
φαρμόζεται) προβλημάτων ἐπιλύσεως ἐξενέγκωμεν.

499. Εἴσω ἔν' ἐξίσωσις τριτοβάθμιος κλασμάτων,
ἢ ποσῶν ριζικῶν, ἢ δὴ ἢ τῆς δευτέρου ὅρου, ἀπηλλαγμένη
(494, 495, 496) ἢ $χ^3 - 3 α χ - β = 0$. ἢ ὑποτε-
θείω $χ = μ + ν$. ἄρα $χ^3 = μ^3 + 3 μ^2 (μ + ν) + ν^3$.
ἀντὶ δὲ $μ + ν$ τεθέντος $χ$, ἔσαι $χ^3 = μ^3 + 3 μ ν χ + ν^3$,
ἢ μεταθέσει, $χ^3 - 3 μ ν χ - μ^3 - ν^3 = 0$. ταύτης δὲ

τῆς ἐξισώσεως τῇ προτεθείσῃ παραβαλλομένης ὅρον πρὸς ὅρον εὐρίσκεται $\mu\nu = \alpha$, καὶ $\mu^3 + \nu^3 = \beta$. ἀλλ' ἐκ $\mu\nu = \alpha$,

πρόεισι $\nu^3 = \frac{\alpha^3}{\mu^3}$. ἄρα $\mu^3 + \frac{\alpha^3}{\mu^3} = \beta$, ἢ πολλαπλασια.

ὧστεα ἐπὶ μ^3 γίνεται $\mu^6 + \alpha^3 = \mu^3 \beta$, ἢ μεταθέσει,
 $\mu^6 - \beta \mu^3 = -\alpha^3$, ἣτις ἐπιλυθῆναι δύναται κατὰ τὰς
 δευτεροβαθμίας τῶν ἐξισώσεων ὕτω.

$$\mu^6 - \beta \mu^3 = -\alpha^3$$

$$\text{συμπληρ.} \quad \frac{1}{4} \beta \beta = \frac{1}{4} \beta \beta$$

$$\mu^6 - \beta \mu^3 + \frac{1}{4} \beta \beta = \frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3$$

$$\mu^3 - \frac{1}{2} \beta = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3}$$

$$\mu^3 = \frac{1}{2} \beta \pm \sqrt{\frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3}$$

$$\mu = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} \beta \pm \sqrt{\frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3}\right)}$$

εἰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\mu^3 + \nu^3 = \beta$ ἀντὶ τῆς δυνάμεως τῆς
 ν ἀντικατασταθῇ ἢ τῷ μ , λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως
 $\mu\nu = \alpha$, εὐρίσκεται $\nu = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} \beta \mp \sqrt{\frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3}\right)}$. ἄ.

$$\text{ρα } \chi = \mu + \nu = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} \beta + \sqrt{\frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3}\right)} +$$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} \beta - \sqrt{\frac{1}{4} \beta \beta - \alpha^3}\right)}$. ἀπονέμεται δὲ τῇ μὲν τῶν
 τετραγωνικῶν ποσοτήτων τὸ +, ἑατέρῃ δὲ τὸ —, διὰ
 τῆτο· ἐπεὶ γὰρ $\mu^3 \times \nu^3 = \alpha^3$, ὡς ἀνωτέρω καταφαίνεται,

$$\text{εἰκὸς εἶναι ἢ } \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3} \times \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3}$$

$= \alpha^3$. τῆτι ἔν ἀληθεύει μὲν ἐναντίως ἐχόντων τῶν πρὸ
 τῆ ρίζικῆς συμβόλου συμβόλων· ψευδὲς δ' ἐξελέγχεται ὁ-
 μοίων ὄντων· ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἐκ τῆς πράξεως αὐτίκα
 δῆλον καθίσταται.

$$\frac{\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}}{\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}}$$

$$\frac{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\beta}{4} - a^3}}{-\frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\beta}{4} - a^3} - \frac{\beta^2}{4} + a^3}$$

$$\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + a^3 = a^3.$$

εάν δ' ὁμοίως ἐχόντων τῶν συμβόλων τὰ τῆς πράξεως διαπερανθῇ, εἰδέποτε τὸ γινόμενον ἰσοδυναμήσει τῷ a^3 · κατὰ τῆτον τοίνυν τὸν τύπον κείῳ ἐπιλύσαι τὰ ἐφεξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Εὕρεῖν ἀριθμὸν, ὅπως ἐξάκις λαμβανόμενος σὺν ἐννέα ἰσῶται τῷ ἀφ' αὐτοῦ κύβῳ.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ φύσις τοῦ προβλήματος δίδωσι $x^3 = 6x + 9$, εἴτ' ἢν $x^3 - 6x - 9 = 0$ · παρατιθεμένης ἐν ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν $x^3 - 3ax - \beta = 0$, ἔστι $3a = 6$, ἢ $a = 2$, ἢ $\beta = 9$ · ἀντικατασταθεῖσιν

$$\begin{aligned} \text{ἐν τέτων τῶν δυνάμεων ἐν τῷ τύπῳ } x &= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}6 + \sqrt{\frac{1}{4}6^2 - a^3}\right)} \\ &+ \sqrt[3]{\left(-\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - a^3}\right)}, \text{ προκύψει } x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \\ &\sqrt[3]{\frac{3}{2} - 8} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 8}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 8}\right)} \\ &+ \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 8}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}\right)} \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{0} = 1 + 0 = 1, \text{ ὅς ἐστιν ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος.}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Αριθμὸν εὑρεῖν ὅπως ἡ τε ἀπ' αὐτῆς κύβου πρὸς τὸ αὐτῆς τριπλῆν διαφορὰ ἡ = 2.

ΛΤΣΙΣ. Η' θέσις τῆ προβλήματος δίδωσι $x^3 - 3x = 2$, εἴτ' ἐν $x^3 - 3x - 2 = 0$. παραβαλλομένης δὲ ταύτης τῆς ἐξίσωσως πρὸς τὴν γενικὴν $x^3 - 3ax - \beta = 0$, εὑρίσκεται $3a = 3$, εἴτ' ἐν $a = 1$, καὶ $\beta = 2$. ἔκκ' ὁ γενικὸς τύπος $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - a^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\beta - \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - a^3}\right)}$ γενήσεται $x = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1}\right)} = \sqrt[3]{\frac{1+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-0}{2}} = 1 + 1 = 2$ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς.

Οὐκ ἔν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τῇ εὑρεθησένη ρίζῃ διαιρεθείσα κάτεισι βαθμὸν ἕνα γινομένη δευτεροβάθμιας, ἥς τὰς ρίζας ἐξέσαι μὲν λαβεῖν καὶ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ). ἐξέσαι δὲ καὶ ἄλλως ταύτας εὑρεῖν ἐφαρμόζοντας τὰ γνωστὰ γράμματα τῆς τριτοβάθμιας τῷ γενικῷ τύπῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὰς κυβικὰς ρίζας τῆς μονάδος· ταῦτ' δὲ ἵνα γένηται, εὐρητέον πρῶτον τὰς τῆς μονάδος κυβικὰς ρίζας κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

Ἐς $x^3 - 1 = 0$, ἥς διαιρεμένης ἀκριβῶς διὰ $x - 1 = 0$, καὶ πηλίκου προϊόντος $x^2 + x + 1 = 0$, ἐκ ταύτης λαβεῖν δυνάμεθα τὰς δύο τετραγωνίας ρίζας κατὰ τὰ εἰρημένα (452, κτ.). ἐπεὶ γὰρ $x^2 + x + 1 = 0$. ἔκκ' $x^2 + x = -1$. καὶ συμπληρώσει τῆ ἐλλειπῆς τετραγώνου, $x^2 + x + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Εξάγωγῃ ρίζης } \chi + \frac{1}{2} &= \sqrt{-\frac{3}{4}} \cdot \text{ἔστι δὲ } \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-3} \quad (167) \text{ ἔκυν } \chi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{-3}, \text{ ἢ } \chi = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}. \text{ ἐπεὶ δὲ ἡ ἑτέρα} \end{aligned}$$

$$\text{τετραγωνικὴ ρίζα ἔστι λειπτική, ἔσαι } \chi = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ὥςτε αἱ τρεῖς κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος εἰσὶν αἷδε, } 1, \\ \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}. \text{ εἰς ἃν ἐπὶ ταύτας τὰς} \end{aligned}$$

ρίζας πολλαπλασιασθῇ ἡ ἐξισώσεως τριτοβαθμίου μία ρίζα, προκύψουσιν αἱ τρεῖς αὐτῆς ρίζαι, ὥσπερ ἀμέλει τῷ a^3 ἡ ρίζα a εἰς πολλαπλασιασθῇ ἐξῆς ἐπὶ $+1, -1$ ρίζας τετραγωνικὰς τῆς μονάδος, προκύψουσιν $+a, -a$ ρίζαι τετραγωνικαὶ τῷ a^2 . ταῦτ' ἄρα εἰς ὁ γενικὸς τύπος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὰς τρεῖς κυβικὰς τῆς μονάδος ρίζας, ποιήσεται τρεῖς καθολικὸς τύπος, ἀποχρῶντας πρὸς ἐπίλυσιν παντὸς τριτοβαθμίου προβλήματος· ἢ ἔν εἰσονται

$$\begin{aligned} \chi &= 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}\right)} + 1 \times \\ &\sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}\right)} \cdot \chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}\right)} \\ &\times \frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}\right)} \times \\ &\frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2} \cdot \chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}\right)} \times \\ &\frac{(-1 - \sqrt{-3})}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^3}\right)} \times \\ &\frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2}. \text{ τῷ ἔν δευτέρῳ, φέρε, προβλήματος} \end{aligned}$$

ἐπιλυμένον διὰ μὲν τῷ πρώτῳ τύπῳ ἔξεισι ρίζα $x=2$, διὰ δὲ τῷ δευτέρῳ, $x=-1$, διὰ δὲ τῷ τρίτῳ αὐθις $x=-1$. εἰς ἂν γένηται $x-2=0$, ἢ $x+1=0$, ἢ $x+1=0$. τὸ ἐκ τούτων γινόμενον ἀποδώσει τὴν προτεθείσαν ἐξίσωσιν $x^3 - 3x - 2 = 0$. εὐρεθήσονται δὲ αἱ αὐταὶ ρίζαι, ἢ εἰ, εὐρεθείσης ἅπαξ μιᾶς τῶν ριζῶν διὰ τῷ τύπῳ, τῆς $x=2$, διαιρεθῇ διὰ τῆς εὐρημένης ρίζης $x-2=0$ ἢ προτεθείσα ἐξίσωσις. ἔτω γὰρ γενήσεται $x^2 + 2x + 1$, ἥς εὐρεθήσεται ρίζα $x=-1$ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ.) διὰ δὲ $x+1=0$ διαιρεθείσης τῆς $x^2 + 2x + 1 = 0$, προκύψει πηλίκον $x+1=0$. εὐρίσκονται ἄρα αἱ αὐταὶ ρίζαι διὰ τε τῶν γενικῶν τύπων, ἢ διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῆς δευτεροβαθμίας ἐξισώσεως.

500. Ἐπεὶ δὲ πολλάκις ἐξισώσεως τριτοβαθμίας λυομένης διὰ τῷ γενικῷ τύπῳ ἐν ἀριθμοῖς πρόεισι ρίζα ἀπαιτεῖται τὴν ἐξωγὴν ρίζης κυβικῆς, ὥσπερ τῆς $x^3 - 15x - 4 = 0$, ρίζα εὐρίσκεται ἐκ τῷ γενικῷ τύπου ἢ $x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$, φέρε εἰπώμεν ἢ ὅπως ἂν τύχωμεν ταύτης τῆς ρίζης.

501. Κεῖθω ἐν γένει εὑρεῖν τὴν ρίζαν τῷ κυβικῷ θυονύμῳ $x + \sqrt[3]{a}$. κεῖθω ἂν τῆς ζητουμένης ρίζης τὸ μὲν λογικὸν μέρος εἶναι $= x$, τὸ δ' ἄλογον $= \sqrt[3]{a}$, ὅλη ἂν ἡ ζητουμένη ρίζα εἶναι $x + \sqrt[3]{a}$. τοιγαρὲν

$$x + \sqrt[3]{a}^3 = x^3 + 3x^2\sqrt[3]{a} + 3ax + a\sqrt[3]{a}$$

$$\text{ὥστε } x^3 + 3ax = x$$

$$\text{ἢ } 3x^2\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}, \text{ διαιρέσει δὲ διὰ } \sqrt[3]{a}$$

$$3x^2 + a = 1 \quad \text{μεταθέσει τῷ } a$$

$$3x^2 = 9 - a$$

διαιρέσει δια 3

$$x^2 = 3 - \frac{a}{3}$$

εξαγωγή ρίζης τετραγωνείν

$$x = \sqrt{\frac{9-a}{3}} \text{ ἔνθεντοι.}$$

α. „Παντός δυωνύμου κύβου τὸ λογικὸν μέρος τῆς ῥίζης ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τῆ συνεργῆ τῆς ἀλόγου πλὴν τῆς ὑπορρίζου, διαιρεθείσης διὰ 3, οἷον $x = \sqrt{\frac{9-a}{3}}$.”

β. „Ἀπάσης δυωνύμου ρίζης τὸν μὲν τῶν ὄρων ἐκχύσης λογικόν, τὸν δ' ἕτερον ἀλογον, εἰς κύβον ἀρθεῖσης, τὸ μὲν λογικὸν αὐτῷ μέρος ἴσον ἐστὶ τῷ κύβῳ τῷ ἐκ τῆ λογικῆ τῆς ρίζης μέρος προσηλαμβάνοντι τὸ γινόμεον ὑπὸ τῆ τριπλῆ τετραγώνου τῆς ἀλόγου ποσότητος, ἢ αὐτῆς τῆ λογικῆ αὐτῆς μέρος· ὁ δὲ συνεργὸς τῆς ἀλόγου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆ λογικῆ τῆς ρίζης μέρος τριπλῶ τετραγώνῳ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἀλόγου ποσότητος τετραγώνῳ, οἷον $x = x^3 + 3ax$, ἢ $9 = 3x^2 + a$.”

302. Κεῖνω εξαγαγεῖν τὴν κυβικὴν ρίζαν τῆ δυωνύμου — $135 + \sqrt{18252}$, εἴτ' ἔν (ἀναγωγῇ ἐφ' ἀπλευράν ἐκθεσιν) τῆ — $135 + 78\sqrt{3}$ · δεδοῶν ἔν εἶναι τὴν ζητημένην ρίζαν — $a + \mu\sqrt{\gamma}$ (εἴτ' ἔν — $135 = -a$ ἢ $78\sqrt{3} = \mu\sqrt{\gamma}$), ἥτις κινωθεῖσα γενήσεται $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} - 3\mu^2a\gamma + 3a^2\mu\sqrt{\gamma} - a^3$ · ἐπεὶ ἔν ἐστὶ $\sqrt{3} = \sqrt{\gamma}$, ἔσται τὸ ἀλογον τέτε.τῆ κύβου μέρος $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3a^2\mu\sqrt{3} = 3\mu^3\sqrt{3} + 3a^2\mu\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$ · εἰν ἔν τεθῇ $\mu = 1$, διαιρεθὲν διὰ $\sqrt{3}$, ἔσται $3 + 3a^2 = 78$, ἢ $3a^2 = 75$, ἢ $a^2 = 25$, ἢ $a = 5$ · τεθέντος δὲ ἀντὶ a τῆ 5 ἐν τῷ λογικῷ μέρει τῆ κύβου ἔσται.

Τόμ. Β'.

Η

— $a^3 - 3\mu^2 a\gamma = -125 - 45 = -170$,
 ἔτινος ἀπ' αὐτοῦ τῇ περιπτώσει (προσῆκε γὰρ εἶναι —
 135) δὴλον τὸ μ εἰλασσοῦν εἰληφθῆαι ἢ ὅσον εἶδει· ἐκὼ,
 τεθήτω $\mu = 2$. ἄρα $\mu\sqrt{\gamma} = 2\sqrt{3}$, καὶ $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} +$
 $3a^2\mu\sqrt{\gamma} = 24\sqrt{3} + 6a^2\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$. διαιρέ-
 σει διὰ $\sqrt{3}$ γίνεται $24 + 6a^2 = 78$, καὶ $6a^2 = 54$, κα.
 $a^2 = 9$, καὶ $a = 3$, ἔτινος ἐν τῷ λογικῷ μέρει τῷ κύβῳ
 ἀντικατασταθέντος, γίνεται — $a^3 - 3\mu^2 a\gamma = -27 -$
 $108 = -135$, ἔτινος τῇ περιπτώσει συναδόντος συμ-
 περαίνεται τὴν κυβικὴν ῥίζαν εἶναι $\mu\sqrt{\gamma} - a = 2\sqrt{3} - 3$

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐςω εὕρετω τὴν κυβικὴν ῥίζαν
 τοῦ συνώνυμου $3 + \sqrt{-\frac{1}{27}}$, εἴτ' ὅν (ἀναγωγῇ ἐφ' α.
 πλεσέραν ἐκθεσιν) τῷ $3 + \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}$. ἔσω ὅν $a + \mu\sqrt{\gamma}$
 $= 3 + \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}$. καὶ εἰληφθῶ ὁ ἀπὸ $a + \mu\sqrt{\gamma}$ κύβος
 $a^3 + 3a^2\mu\sqrt{\gamma} + 3a\mu^2\gamma + \mu^3\gamma\sqrt{\gamma}$. ἐπειδὴ $\sqrt{\gamma} =$
 $\sqrt{-\frac{1}{3}}$, τὸ ἄλογον μέρος ἔσται $3a^2\mu\sqrt{\gamma} + \mu^3\gamma\sqrt{\gamma} =$
 $3a^2\mu\sqrt{-\frac{1}{3}} + \mu^3\sqrt{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}}$. ἔάν ὅν λη-
 φθῇ $\mu = 1$, καὶ γένηται διαιρέσεις διὰ $\sqrt{-\frac{1}{3}}$, ἔσται $3a^2 -$
 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, καὶ $3a^2 = \frac{2}{3}$, καὶ $a^2 = \frac{2}{9}$, καὶ $a = \pm 1$, ὑπερ ἀντι-
 κατασταθέντος ἐν τῷ λογικῷ τῷ κύβῳ μέρει, ἔσται $a^3 +$
 $3\mu^2 a\gamma = -1 + 4 = 3$, ἔτινος τῇ περιπτώσει συνα-
 δόντος, ἔσται ἡ ζητούμενη ῥίζα $a + \mu\sqrt{\gamma} = -1 +$
 $\sqrt{-\frac{1}{3}}$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐςω ἐξήγαγετω ῥίζαν κυβι-
 κὴν ἀπὸ συνώνυμου ποσότητος, ἐκάτερον μέρος ἄλογον ἐ-
 χέσης τῆς $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, εἴτ' ὅν (ἀναγωγῇ ἐφ' α.
 πλεσέραν ἐκθεσιν) τῆς $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$. τεθήτω δὴ τὸ
 μὲν πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης $\sqrt[3]{9\sqrt{3}} = \mu\sqrt{\gamma}$, τὸ δὲ

δεύτερον $\sqrt[3]{11\sqrt{2}} = \nu\sqrt{\epsilon}$. ὅλη δὲ ἡ ῥίζα $\mu\sqrt{\gamma} + \nu\sqrt{\epsilon}$. ὁ δ' ἀπ' αὐτῆς κύβος $\mu^3\nu\sqrt{\gamma} + 3\mu^2\nu\gamma\sqrt{\epsilon} + \mu\nu^2\epsilon\sqrt{\gamma} + \nu^3\epsilon\sqrt{\epsilon}$, καὶ ἐπεὶ $\mu\sqrt{\gamma} = 9\sqrt{3}$, ἔσκι δατέρων μέρος τῆς ῥίζης, $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\mu\nu^2\epsilon\sqrt{\gamma} = 3\mu^3\sqrt{3} + 6\mu\nu^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. τεθέντος δὲ $\mu = 1$, καὶ γενομένης διαιρέσεως διὰ $\sqrt{3}$, γίνεται $3 + 6\nu^2 = 9$, καὶ $6\nu^2 = 6$, καὶ $\nu = 1$, ἥς ἀντὶ ν ἀντικατασταθεῖσι, ἐν δατέρῳ μέρει τῷ κύβῳ, ἔσαι $3\mu^3\nu\gamma\sqrt{\epsilon} + \nu^3\epsilon\sqrt{\epsilon}9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$, ὅτινός τῇ περιπτώσει ὁμολογῶντος, ἔσαι ἡ ζητούμενη κυβικὴ ῥίζα $\mu\sqrt{\gamma} + \nu\sqrt{\epsilon} + \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

503. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἐὰν μὲν ἀντικαταστήσῃ τῆς εὐρισκομένης δυνάμεως, προκύπτῃ ἀριθμὸς μείζων τῷ λογικῷ ἀριθμῷ, σαφές τὴν δύναμιν τῷ μ ἐλάσσῃ εἰληφθαι, ἢ ὅσην εἶδει, εἰ δὲ ἐλάσσων, μείζω· διὸ εἰ ἐν μὲν τῇ α'. περιπτώσει εἰληπται $\mu = 1$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ $\mu = 2$, τιθέναι προσήκει $\mu = 1\frac{1}{2}$. τῷτῃ δὲ γενομένῃ, εἰν ἀκριβῶς ἐκ ἐξέρχεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, δῆλον ὡς τῷ προκειμένῃ δυνάμει ῥίζαν κυβικὴν ἐξενεχθῆναι ἀμήχανον.

504. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Εἰς δὲ βάσανον τῆς εὐρημένης ῥίζης, εἰ ἄρα ἀσφαλῶς εὕρηται, ἐξετασέον μόνον τὸ λογικὸν αὐτῆς μέρος· ἔτω τῆς δυνάμει ποσότητος $78\sqrt{3} - 135$ ῥίζα εὕρηται ἢ $2\sqrt{3} - 3$. εἰν ἔν συναφθῇ ὁ ἀπὸ τῷ λογικῷ αὐτῆς μέρος — 3 κύβος — 27 τῇ αὐτῇ ῥίζῃ τρις ληφθείσῃ — 9, πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἀπὸ δατέρου μέρος τετράγωνον 12, εἴτ' ἔν εἰν συναφθῇ τῷ — 108, ἐπεὶ τὸ ἄθροισμα — 135 σύμφωνόν ἐστι τῷ λογικῷ μέρει τῆς δοθείσης δυνάμει ποσότητος, δῆλον ὅτι εἰληπται ἀσφαλῶς ῥίζα αὐτῆς ἢ $2\sqrt{3} - 3$ (101).

505. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Ἀλλ' ἔχει τάτε περὶ τῆς γενικῆς κανόνος τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριτοβαθμίων προβλημάτων, ἢ δὴ ἢ τὰ περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀπὸ ποσῦ δυνάμει· τοῖς δὲ γε θαυσιλέτερον τέτων ἀπολαῦσαι ἐπιθυμῶσιν ἐξέειν ἀναγνῶναι τὴν τάτε περὶ τῆς τῶν τριτοβαθμίων προβλημάτων ἐπιλύσεως πλατύτερον πραγματευσαμένους, ἢ τύπος ἐκδοδωκώτας παντοίους, ἢ τὰ περὶ τῆς ἀπὸ δυνάμει ποσῦ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν καθολικώτερον ἐρμηνεύσαντας, οἷς ἀμέλει πρόθεσις αὕτη ὑπῆρξε τὰ τῆς ἀναλύσεως μόνα ἐκθέσθαι, βίβλος πολυτόμους εἰς τὸτο συγγραψαμένους· ἡμῖν δὲ ἀποσchrήσει τὰ πραγματίαιτα ὑποσρωνῶσι, ἢ ὧν ἡ γνῶσις πρὸς πᾶν τοιῦτωδες σύγγραμμα εὐχερῶς τὴν μετιόντας ποδηγετήσῃ, εἰπεῖν ἐν βραχεσί ἢ περὶ τῆς γενικῆς ἐπιλύσεως τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν, ἢ τέλος ἐπιθεῖναι τῷ περὶ τῶν ἐξισώσεων λόγῳ.

506. Ἐῶ ἤδη ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἀπηλλαγμένη τῷ δευτέρῳ αὐτῆς ὄρου κατὰ τὰ εἰρημένα (495), ἐν γένει πᾶσαν ἐμφαίνουσα τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν, ἢ $u^4 + au^3 + bu^2 + \gamma u = 0$, ἢ ὑποθεσείτω γινομένη ἐκ δυνάξεω δειτεροβαθμίων τῶν $u^2 + \chi u + \pi$, $u^2 - \chi u + \kappa = 0$ · ἢ ἐξ αὐτῶν ἴση τῇ δοθείσῃ γενέσθω ἐξίσωσις ἢ $u^4 + ku^2 + \kappa \chi u + \pi \kappa = 0$, ἢ παραβαλλομένης

$$- \chi^2 - \pi \chi$$

$$+ \pi$$

τῇ δοθείσῃ, ἔσσονται ἐξισώσεις $\kappa + \pi - \chi^2 = \alpha$, ἢ $\pi \chi - \pi \chi = \beta$, ἢ $\pi \kappa = \gamma$ · πολλαπλασιασθείσης δὲ τῆς πρώτης ἐπὶ χ , ἢ συναφθείσης τῇ δευτέρᾳ, γενήσεται $2\pi \chi - \chi^3 = \alpha \chi + \beta$, ἢ $2\pi \chi = \alpha \chi + \chi^3 + \beta$, ἢ

$$z = \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2\chi} \cdot \text{ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως τῆ κ ἀν.}$$

$$\text{τικατασθείσης ἐν τῇ ἐξισώσει } \pi\kappa = \gamma, \text{ ἔσαι } \pi \times \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2\chi} = \gamma, \text{ ἢ } \pi = \frac{2\gamma\chi}{\alpha\chi + \chi^3 + \beta} \cdot \text{ἐν ἑν}$$

$$\text{τῇ ἐξισώσει } \pi\chi - \pi\chi = \beta \text{ ἀντικατασθείσων ἀντὶ κ ἢ π} \\ \text{τῶν ἤδη εὐρημένων δυνάμεων, προκύπτει ἐξίσωσις ἡ} \\ \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2} - \frac{2\gamma\chi^2}{\alpha\chi + \chi^3 + \beta} = \beta, \text{ ἥτις, ἄρ-}$$

$$\text{σει τῶν κλασμάτων, μεταθέσειτε ἢ ἀναγωγῇ, γίνε-} \\ \text{ται } \chi^6 + 2\alpha\chi^4 + \alpha^2\chi^2 - \beta^2 = 0, \text{ ἥτις, ἐπεὶ πάν-}$$

$$\text{τες, οἱ δείκται διαιρέσιμοι ὑπάρχουσιν διὰ 2, ἐπιλυθῆναι} \\ \text{δύναται κατὰ τὰς τριτοβάθμους· εἰν γὰρ τεθῇ } \varphi = \chi^2, \\ \text{ἔσαι } \varphi^3 + 2\alpha\varphi^2 + \alpha^2\varphi - \beta^2 = 0 \cdot \text{καλεῖται δὲ αὖ-}$$

$$\text{τῇ ἐξίσωσις κυβικὴ ἐξ η μ μ ἐ ν η τῆς τεταρτοβα-} \\ \text{θμίου· ἀπάσης τε εἰδικωτέρας τεταρτοβαθμίου εὐρεῖν ду-} \\ \text{νάμεθα τὴν αὐτῆς ἐξημμένην κυβικὴν· ἔσω γὰρ ἐξίσω-} \\ \text{σις ἡ } \nu^4 - 4\nu^2 - 8\nu + 35 = 0 \cdot \text{ἔσαι τοίνυν } \alpha = \\ -4, \text{ ἢ } \beta = -3, \text{ ἢ } \gamma = 35 \cdot \text{τέτων δὲ τῶν δυνά-} \\ \text{μεων ἀντικατασθείσων ἐν τῇ γενικῇ ἐξημμένῃ πρόεισι} \\ \text{μερικὴ ἡ } \chi^6 - 8\chi^4 - 124\chi^2 - 64 = 0.$$

507. Ἐὰν ἐν ταῖς δυσὶ παρακτικαῖς ἐξισώσεσιν $\nu^2 + \chi\nu + \pi = 0$, $\nu^2 - \chi\nu + \kappa = 0$, ἀντὶ π ἢ κ τε-
θῶσιν αἱ ἄρτι εὐρημέναι αὐτῶν δυνάμεις, προκύψουσιν αἱ
ἐξῆς ἐξισώσεις $\nu^2 + \chi\nu + \frac{2\gamma}{\chi^2 + \alpha + \frac{\beta}{\chi}} = 0$, ν^2

$$- \chi\nu + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta}{2\chi} = 0, \text{ αἵτινες, τῆ } \chi \text{ ἐν ᾧ}$$

ριθμοῖς γνωθέντος, καὶ αὐταὶ γνωσταίτε καὶ ὠρισμένοι καθίστανται.

308. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξίσωσι ὑπάρχη + α, ἑκατέρα τῶν δυεῖν παρακτικῶν πρὸ τῆ α ἔχει τὸ +· εἰ δ' ἐκείνη ἔχη — α, καὶ τούτων ἑκατέρα τὸ α ἔσαι μετὰ τῇ —

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν τεταρτοβάθμιον ἐπιλύειν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὼς ἐξίσωσις ἡ $v^4 - 17v^2 - 20v - 6 = 0$, ἥς παραβαλλομένης πρὸς τὴν γενικὴν $v^4 + 2v^2 + 3v + \gamma = 0$, ἔσιν $\alpha = -17$, καὶ $\beta = -20$, καὶ $\gamma = -6$. δι' οὗ δὴ ἡ αὐτῆς ἐξημμένη κυβικὴ ἔσαι $x^3 - 34x^2 + 313x - 400 = 0$, ἥς ἐπιλυομένης κατὰ τὰ εἰρημένα εὐρίσκεται $x = 4$ · ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως συνταῖς τῶν α καὶ β ἀντικατασταθῶν ἐν ταῖς $v^2 + \chi v + \frac{2\gamma}{\chi^2 + \alpha + \frac{\beta}{\chi}} = 0$, $v^2 - \chi v + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta}{2\chi} =$

$$0, \text{ ἔσονται ἡ μὲν } v^2 + 4v + \frac{-12}{16 - 17 + \frac{-20}{+4}} = v^2$$

$$+ 4v + \frac{-12}{16 - 17 - 5} = v^2 + 4v + \frac{-12}{-6} =$$

$$v^2 + 4v + 2 = 0, \text{ καὶ δ' ἑτέρα } v^2 - 4v + 3 - 8\frac{1}{2}$$

$$+ \frac{-20}{8} = 0, \text{ εἴτ' ἐν } v^2 - 4v - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{4} =$$

$$0, \text{ τετέστιν } v^2 - 4v - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0, \text{ ὅ ἔσιν } v^2 -$$

$$4v - 3 = 0 \cdot \text{ τούτων τοίνυν τῶν ἐξισώσεων, ἀμέλει } v^2$$

$$+ 4v + 2 = 0, \text{ καὶ } v^2 - 4v - 3 = 0, \text{ κατὰ τὰ δευ-}$$

τεροβάθμια τῶν προβλημάτων ἐπιλυθῶν (452, κτ.)

ἀποφέρονται ἐκ μὲν τῆς πρώτης ῥίζαι — $2 + \sqrt{2}$, καὶ — $2 - \sqrt{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $2 + \sqrt{7}$, καὶ $2 - \sqrt{7}$, αἱτινές εἰσιν αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προτεθείσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως· ἀλλὰ καὶ μεθόδῳ ἄλλῃ αἱ τεταρτοβάθμιοι τῶν ἐξισώσεων ἐπιλύονται, ἣν τοῖς πρωτοπείροις χαριζόμενοι παραθήσομεν ἐνταῦθα, ἵνα καὶ ταύτην μὴ ἀγνοῶσι.

Ἐποτεθείτω ἡ τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως ῥίζα $x = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$. π δὲ καὶ κ καὶ ρ ἔξωσαν ποσότητες εἰσφέρειν τὰς ῥίζας τῆς τρίτοβαθμίου ἐξισώσεως $\tau^3 - \phi\tau^2 + \vartheta\tau - \eta = 0$, ὥστε εἶναι $\pi + \kappa + \rho = \phi$, καὶ $\pi\kappa + \pi\rho + \kappa\rho = \vartheta$, καὶ $\pi\kappa\rho = \eta$. τῦτε δὲ τεθέντος τετραγωνισθῆτω ὁ τύπος $x = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$, ἵνα γένηται $x^2 = \pi + \kappa + \rho + 2\sqrt{\pi\kappa} + 2\sqrt{\pi\rho} + 2\sqrt{\kappa\rho}$ · ἀλλὰ $\pi + \kappa + \rho = \phi$ ἀντικαταστάσει ἄρα καὶ μεταθέσει, εὐρεθήσεται $x^2 - \phi = 2\sqrt{\pi\kappa} + 2\sqrt{\pi\rho} + 2\sqrt{\kappa\rho}$, ἥτις τετραγωνισθεῖσα πάλιν γενήσεται $x^4 - 2x^2\phi + \phi^2 = 4\pi\kappa + 4\pi\rho + 4\kappa\rho + 8\sqrt{\pi\kappa\rho} + 8\sqrt{\pi\kappa\rho}$ · ἀλλὰ $\vartheta = \pi\kappa + \pi\rho + \kappa\rho$, ἄρα (ἀντικαταστάσει καὶ μεταθέσει) $x^4 - 2\phi x^2 + \phi^2 - 4\vartheta = 8\sqrt{\pi\kappa\rho}$. ($\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$) (Α). ἀλλὰ $\pi\kappa\rho = \eta$, καὶ $\sqrt{\pi\kappa\rho} = \sqrt{\eta}$ ἐκ τῆς ἀκολούθου, καὶ $\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho} = x$ · ἄρα $x^4 - 2\phi x^2 - 8x\sqrt{\eta} + \phi^2 - 4\vartheta = 0$, ἥς μία τῶν ῥιζῶν εἰς $x = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$, τῶν π, κ, ρ, ῥιζῶν ἐσὼν τῆς τρίτοβαθμίου ἐξισώσεως $\tau^3 - \phi\tau^2 + \vartheta\tau - \eta = 0$. ἡ τοίνυν τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἀφικόμεθα, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς καθολικὴ, ἐξὸν ἀπάσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως τὸν δεύτερον ὅρον ἐξελεῖν (495)· φερόμενον οὖν ὅπως ἂν ἐξαχθείησαν αἱ ῥίζαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως.

Ἐς τὴν ἐξίσωσιν ἢ $x^3 - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$ (B)
 ἢς ζητῶνται αἱ ρίζαι· παραβαλλομένης ὅν ταύτης πρὸς
 τὴν A, εὐρίσκεται ἄ. $2\varphi = \alpha$, ἢ $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. β'. $8\sqrt{\eta} = \beta$.

Ἄρα $64\eta = \beta\beta$, ἢ $\eta = \frac{\beta\beta}{64}$. γ'. $\varphi\varphi - 4\vartheta = -\gamma$,

ἢ $\frac{\alpha\alpha}{4} - 4\vartheta + \gamma = 0$, ἢ $\gamma + \frac{\alpha\alpha}{4} = 4\vartheta$, καὶ $\vartheta =$

$\frac{\gamma}{4} + \frac{\alpha\alpha}{16}$. τῶν δὲ δυνάμεων τῶν φ , η , ϑ τῶν ἤδη

εὐρημένων, ἀντικατασταθεῖσιν ἐν τῇ τριτοβαθμίῳ ἐξισώ-
 σει $\tau^3 - \varphi\tau\tau + \vartheta\tau - \eta = 0$, ἢ ταύτης ἐπιλυθείσης
 κατὰ τὰ τεταρτοβάθμια τῶν προβλημάτων, ἢ ρίζας ἔχειν
 εὐρεθείσης ἐξ ὑποθέσεως τὰς π , κ , ρ , μάλιστα τῶν ρι-
 ζῶν τῆς ἡμετέρας τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως ἔσσι $x =$
 $\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$.

Οὗτος δὲ ὁ τύπος περιέχει τὰς τέσσαρας ρίζας τῆς
 προτεθείσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως διὰ τὰ παντοῖα
 σύμβολα, ἃ ἂν προταχθεῖν τῶν ριζικῶν, ἢ ταῦτα δοκῶν
 ὁκτὼ δυνάμεις περιέχειν τῆς x . Ἰσέον μέντοι ὅτι $\sqrt{\pi\kappa\rho}$

ὀφείλει εἶναι $= \sqrt{\eta} = \frac{\beta}{8}$. εἰ μὲν ἄρα $\frac{\beta}{8}$ πρῶτης ἢ

ὑπαρκτικῆ, ἢ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ποσοτήτων $\sqrt{\pi}$,
 $\sqrt{\kappa}$, $\sqrt{\rho}$, ἐπ' ἀνάγκης εἶναι ὑπαρκτικόν· ἵνα δὲ τῷ
 το γένηται, ἐξ ἀνάγκης ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει αἱ δυνά-
 μεις τῆς x ἔξωσι τὰ σύμβολα ἕτω

$$x = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$

$$x = \sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

$$x = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

$$\chi = -\sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$

εάν δὲ $\frac{\beta}{8}$ ποσότης ἢ ὑπαρκτική, δυνάμεις τῆς χ ἔσονται αἱ

ἐφεξῆς

$$\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

$$\chi = \sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$

$$\chi = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$

$$\chi = -\sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

309. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Κατὰ τὸν ἤδη ἐκτεθέντα κανόνα τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν τῷ δευτέρῳ ὄρι ἁμοιρον ἐπιλύσαι.

ΛΤΣΙΣ. Ἐςω ἐξίσωσις ἢ $\chi^4 - 25\chi\chi + 60\chi - 36 = 0$. ταύτης ἔν παραβαλλομένης πρὸς τὴν Β εἰρίσκεται $\alpha = 25$, ἢ $\beta = -60$, ἢ $\gamma = 36$. ἀντικατασταθῆτωσαν δὲ αὗται αἱ δυνάμεις ἀντὶ α ἢ β ἢ γ ἐν ταῖς τῶν ϕ , ϑ , η , ἢ δὴ ἔσαι $\phi = 25$, ἢ $\vartheta = 4^25 + 9 = 1^25$, ἢ $\eta = 2^25$. ἢ δὴ ἢ τριτοβάθμιος ἐξίσωσις γενήσεται ἔτω $\tau^3 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{4}\tau - \frac{1}{4} = 0$. ἵνα δὲ αὐτὴ ἢ ἐξίσωσις τῶν κλασμάτων ἀπαλλαγῇ, γενέω $\tau = \frac{\psi}{4}$, ἢ κατὰ τὰ εἰρημένα (494) ἔσαι $\psi^3 - 50\psi^2 + 769\psi - 3600 = 0$, ταύτης ἔν ἐπιλυθείσης (483, 499) εὑρίσκεται πρῶτον $\psi = 9$. τῆς δ' ἐξισώσεως διαιρεθείσης διὰ $\psi - 9 = 0$, ἢ πηλίκου προκίπτοντος $\psi\psi - 41\psi + 400 = 0$, ἢ $\psi\psi - 41\psi = -400$, ἢ ταύτης ἐπιλυθείσης κατὰ τῶν προσλημάτων τὰ δευτεροβάθμια προῖασι $\psi = 16$, ἢ $\psi = 25$. τοιγαρὺν αἱ τρεῖς ρίζαι τῆς τριτοβάθμιας ἐξισώσεως εἰσι $\psi = 9$, ἢ $\psi = 16$, ἢ $\psi = 25$. ἄρα $\tau = \frac{9}{4}$, ἢ $\tau = 4$, ἢ $\tau = \frac{25}{4}$. ἔτως ἄρα ἔχομεν $\pi = \frac{25}{4}$, ἢ $\kappa = 4$, ἢ $\rho = \frac{25}{4}$. ἀλλὰ $\sqrt{\pi\rho} = \sqrt{\eta}$

$= -\frac{1}{2} = \frac{\beta}{8}$, τηρητέον ἄρα ἐν τοῖς ρίζικοις $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\kappa}$,

$\sqrt{\rho}$ τὰ περὶ τῶν συμβόλων ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει εἰρημένα· ἢ ἐπεὶ $\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}$, ἢ $\sqrt{\kappa} = 2$, ἢ $\sqrt{\rho} = \frac{1}{2}$, αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως εἰσονται

$$\chi = \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 2$$

$$\chi = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -1$$

$$\chi = -\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$\chi = -\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} = -3$$

Περὶ ἐξισώσεων τῶν καθυπερτέρων
βαθμῶν.

510. Ἐνταῦθα ἀποχρήσει ἡμῖν ἐκθεῖσθαι τὴν μέθοδον, δι' ἧς μία γὰρ τῶν ριζῶν τῶν ἐν τοῖς καθυπερτέροις βαθμοῖς δύναται παρίσταναι διὰ τύπῃ παρεμφερεῖς τῷ ἀποδοθέντι περὶ τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων (499)· ἢ γὰρ ἡδεμία ἐστὶν ἢ νῦν ἐγνωσται μέθοδος, οἷα ἐπιλύειν ἐν ἀπάσῃ περιπτώσει τὰς καθυπερτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις. σκεψώμεθα ὅν πρῶτον τίνες ἂν εἴεν τεταρτοβάθμιοι ἐξισώσεις αἱ ταύτῃ τῇ περιπτώσει καθυπαγόμεναι.

Ἐστω $\chi = \mu + \nu$. ἄρα $\chi^4 = \mu^4 + 4\mu^3\nu + 6\mu^2\nu^2 + 4\mu\nu^3 + \nu^4$, εἴτ' ἔν $\chi^4 = \mu^4 = 4\mu\nu \times (\mu + \nu)^2 + \nu^4$
 $- 2\mu^2\nu^2$

ἀντὶ δὲ $(\mu + \nu)^2$ ἀντικατασταθῇτω χ^2 ἢ μετατεθῇτωσαν πάντες οἱ ὅροι ἐπὶ δεξιότατον· ἢ δὴ εἶναι $\chi^4 - 4\mu\nu\chi^2 + 2\mu^2\nu^2 - \mu^4 - \nu^4 = 0$ ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ριζῶν ἐστὶ $\chi = \mu + \nu$. ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξισώσει ἐν ἀναγκαίως ἀπαιτεῖται, ἵνα μηδεὶς τῆς χ δείκτης ἢ περιττός.

Ἐποτεθείτω αὖτις $\chi = \mu + \nu$. ἢ δὴ ἔχομεν $\chi^5 =$

$\mu^5 + 5\mu^4\nu + 10\mu^3\nu^2 + 10\mu^2\nu^3 + 5\mu\nu^4 + \nu^5$, εἴτ' ἐν $\chi^5 + \mu^5 + 5\mu\nu(\mu + \nu)^3 + \nu^5$. ἀντὶ δὲ $\mu + \nu$ ἀντικαταστάσεως τῆς χ , ἡ γενομένης μεταθέσεως προκύψει ἐξίσωσις $\chi^5 - 5\mu\nu\chi^3 + 5\mu^2\nu^2\chi - \mu^5 - \nu^5 = 0$, ἐξίσωσις, ἥς μία τῶν ριζῶν ἐστὶ $\chi = \mu + \nu$. δύω δὲ ταῦτα ἐνέεισι ταύτῃ τῇ ἐξίσώσει· ὅδεῖς γὰρ δείκτης τῆς χ ἐστὶν ἄρτιος, ἡ δὲ συνεργὸς τῆς χ πεμπτημόριόν ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς συνεργῆς τῆς χ^3 .

Κεῖθω πάλιν $\chi = \mu = \nu$. οὐκοῦν ἔσαι $\chi^6 = \mu^6 + 6\mu^5\nu + 15\mu^4\nu^2 + 20\mu^3\nu^3 + 15\mu^2\nu^4 + 6\mu\nu^5 + \nu^6$, διατεθείδω δὲ καὶ αὕτη ἡ ἐξίσωσις οὕτω $\chi^6 = \mu^6 + 6\mu\nu(\mu + \nu)^4 + \nu^6$, ἥτις ἀντικαταστάμεντος τοῦ $\chi - 9\mu^2\nu^2(\mu + \nu)^2 + 2\mu^3\nu^2$

ἀντὶ $\mu + \nu$, ἡ μεταθέσεως γενομένης μεταβάλλει εἰς $\chi^6 - 6\mu\nu\chi^4 + 9\mu^2\nu^2\chi^2 - 2\mu^3\nu^3 - \mu^6 = 0$, ἐξί-

σωσις, ἥς μία τῶν ριζῶν ἐστὶ $\chi = \mu + \nu$. ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξίσώσει ὅδεῖς μὲν δείκτης τῆς χ ἐστὶ περιττός, ὁ δὲ συνεργὸς τῷ χ^2 τεταρτημόριόν ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς συνεργῆς τῷ χ^4 .

Ἐὰν δὲ ζητῇται περὶ τῆς ἐκδόμῃ βαθμῇ ἐξίσωσεως, εἰραθήσεται, $\chi^7 = \mu^7 + 7\mu^6\nu + 21\mu^5\nu^2 + 35\mu^4\nu^3 + 35\mu^3\nu^4 + 21\mu^2\nu^5 + 7\mu\nu^6 + \nu^7$, ἥτις,

ἀντικαταστάμεντος τῷ χ ἀντὶ $\mu + \nu$, ἡ μεταθέσεως πραχθείσης γίνεται $\chi^7 - 7\mu\nu\chi^5 + 14\mu^2\nu^2\chi^3 - 7\mu^3\nu^3\chi - \mu^7 = 0$. ἐξίσωσις, ἥς μία τῶν ριζῶν ὑπάρχει $\chi = -\nu^7$

$\mu + \nu$. ἐν ταύτῃ δὲ, ὅδεῖς μὲν τῶν τῆς χ δεικτῶν ὀφείλει εἶναι ἄρτιος, τὸ δὲ ἑκτημόριον τῷ τῆς χ^5 συνεργῇ

τετραγωνιωθέν, ἢ ἐπὶ 14 πολλαπλασιασθέν, δίδωσι τὸν συνεργὸν τῷ χ^3 , αὐτὸ δὲ τὸτο τὸ ἐπτημόριον κυδιωθέν ἢ ἐπὶ 7 πολλαπλασιασθέν δίδωσι τὸν συνεργὸν τῆς χ .

Τ' ψώθω $\mu + \nu$ εἰς ὄγδοον βαθμὸν, ἢ διατεθειθῶ
ὡς ἀνωτέρω ἢ ἐξίσωσις· ἔκῃν ἔσαι $\chi^8 = \mu^8$

+ $8\mu\nu(\mu + \nu)^6 \chi^6$ · ἀντικατασταθέντος δὲ τῷ $\mu + \nu$

— $20\mu^2\nu^2(\mu + \nu)^4$

+ $16\mu^3\nu^3(\mu + \nu)^2$

— $2\mu^4\nu^4$

ἀντὶ χ ἢ πάντων τῶν ὄρων μετατεθέντων ἐν θατέρῳ μέ-

λει τῆς ἐξίσωσεως τῷ πρώτῳ, προελεύσεται ἡ ἐξίσωσις

$\chi^8 - 8\mu\nu\chi^6 + 20\mu^2\nu^2\chi^4 - 16\mu^3\nu^3\chi^2 + 2\mu^4\nu^4 = 0$

— μ^8

— ν^8

ταύτης τῆς ἐξίσωσεως ἀπεῖναι χρεὼν πάντας τὺς περιτταριθμοὺς βαθμοὺς τῆς χ · τὸ δὲ $\frac{1}{8}$ τῷ συνεργῷ τῆς χ^6 τετραγωνιωθέν μὲν ἢ ἐπὶ 20 ἀχθέν ἀποδιδόναι τὸν συνεργὸν τῆς χ^4 , κυδιωθέν δὲ ἢ ἐπὶ 16 πολλαπλασιασθέν, τὸν τῷ χ^2 .

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὐρεθήσεται ἐξίσωσις βαθμῷ ἐννάτῳ, ἥς μία τῶν ριζῶν ἔσαι $\chi = \mu + \nu$ · ἰδὲ δὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη

$\chi^9 - 9\mu\nu\chi^7 + 27\mu^2\nu^2\chi^5 - 30\mu^3\nu^3\chi^3 + 9\mu^4\nu^4\chi - \mu^9 - \nu^9 = 0$

— μ^9 — $\nu^9 = 0$

πᾶσαι δὲ αἱ διαληφθεῖσαι ἐξίσωσεις ἔχουσι μίαν τῶν καθ' ἑαυτὰς ριζῶν $\chi = \mu + \nu$.

Προφανῶς δὲ καθορᾶται ὡς ταῖς περιτταριθμοῖς τῶν ἐξίσωσεων πάντες οἱ τῆς χ ἀρτιάριθμοι βαθμοὶ ἀπεισι· τὲναντίον δὲ, ἐκ τῶν ἀρτιάριθμων εξαφανίζονται πάντες οἱ περιττάριθμοι· ἐὰν δὲ π ἐμφαίνῃ τὸν τῆς ἐξίσωσεως

βαθμὸν, — μ^π — γ^π, ἔσαι ἑχάτος ὅρος κοινὸς ἀπ᾽ αἰς
ταῖς ἐξισώσεσιν· ἐν δὲ ταῖς ἀρτιαριθμοῖς τῶν ἐξισώσεων

ὁ ἔσχατος ὅρος περιέχει ἐτι καὶ τὴν ποσότητα $x \mu^{\frac{\pi}{2}} \nu^{\frac{\pi}{2}}$. οἱ δὲ ὅροι παρὰ τὸς μ^{π} , ν^{π} , οἷς αἰεὶ πρόσθεσι τὸ — σύμβολον, ἔχουσιν ἀμοιβαδὸν τὰ σύμβολα +, —· διὰ ταῦτα

δὴ ἐν ταῖς ἀρτιάριθμοις ἐξισώσεσιν ὁ ὅρος $2\mu^{\frac{\pi}{2}}\nu^{\frac{\pi}{2}}$ ὀφεί-
 λει ἔχειν τὸ μὲν + (ἐκληπτέον δὲ ταύτην τὴν ποσότη-
 τα ὡς συνεργὸν τῆς χ^0), εἰ π ἀριθμὸς εἴη ἀρτιάκῃς ἀρ-
 τιος, εἴτ' ἔν φύσεως τοιαύτης δὲ 4, 8, 12, 16 κτ'· τὸ
 δὲ —, εἰ π εἴη περισσάκῃς ἀρτῖος, ταυτὸν εἰπεῖν ἕτως ἔχων
 φύσεως 2, 6, 10, 14, 18 κτ'· ἐν δὲ τοῖς συνεργόσις
 αἰεὶ εὐρίσκονται κατὰ τὸ ἐφεξῆς $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ'· $\mu\nu$
 πολλαπλασιάζεται αἰεὶ ἐπὶ τὸν δείκτην π · ἵνα δὲ εὐρε-
 θῶσιν οἱ ἀριθμοὶ, ἐφ' ὧς πολλαπλασιάζονται $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ.,
 ὁ ποτεθεῖσθαι $\chi = \mu + \nu$ · ἔκῃν $\chi^2 - 2\mu\nu - \mu^2 = 0$,
 $-\nu^2$

I 10	35	50	25	2		
IA 11	44	77	55	11		
IB 12	54	112	105	36	2	
IG 13	65	156	182	91	13	
ID 14	77	210	294	196	49	2

ἐν μὲν ἔν τῷ πρώτῳ ὀριζοντίῳ χώρῳ ἐτέθησαν $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ. ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ὀριζοντίῳ σήλῃ ἑλληνικὰ γράμματα, ἐκδηλῶντα τὸν βαθμὸν τῆς ἐξίσωσεως· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ ὑποκείμενοι τοῖς $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ. εἰσὶν οἱ ζητούμενοι πολλαπλασιασαί· σαφὲς ἔν ὧς ἡ σήλη ἢ ἂν. τίσιχος τοῖς $\mu\nu$ πρόδος εἰσιν ἀριθμητικὴ ἢς διαφορὰ ἡ 1, ἣν προάγειν δυνάμεθα εἰς ὃ βυλόμεθα· ἕκαστος δὲ ἀριθμὸς τῆς σήλης $\mu^2\nu^2$ τὸ ἀθροισμὰ εἰς τῶν ὄρων τῆς πρὸς δεξιὰν αὐτῆς σήλης τῶν ἐνὶ χώρῳ αὐτῷ καθιπερτέρων· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων σήλων· διὰ δὲ ταῦτ' ἡ τῷ πίνακος τῷ ὅσῳ ἂν τις βέλγοιτο προαχθέντος ἂν, εὐρεθήσεται ἐξίσωσις παντὸς βαθμοῦ περιέχουσαν μίαν ῥίζαν $\chi = \mu + \nu$ · καλῶ δὲ ταύτην ἐπιλύσιμον.

§ 11. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα ἐξίσωσις, ἣ ἐνδεὶ τῶν ὄρων τῶν ἀρτίῳ χώρῳ, καὶ ἢς τῶν ὄρων οἱ συνεργοὶ ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ποσότησι $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$ κτ. πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τὸς τῷ ἤδη ἐκτεθέντος πίνακος ἀριθμοὺς, ἔξει μίαν ῥίζαν ὁμοίαν τῷ τύπῳ. (499).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστω γὰρ τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 \pm 4\alpha\chi^2 + 2\alpha^2 - \beta = 0$, καὶ παραβεβλήωμεν πρὸς τὴν ἐπιλύσιμον· καὶ δὴ εἶναι $\mu\nu = \mp \alpha$, καὶ $\mu^4 + \nu^4 = \beta$, ἐν ἣ ἀντικατασταθείσης τῆς τῷ ν δυνάμεως λαμβανομένης ἐκ τῆς προτέρας ἐξίσωσεως (ἐπεὶ γὰρ $\mu\nu = \mp \alpha$ · ἄρα $\nu = \frac{\mp \alpha}{\mu}$, καὶ $\nu^4 = \frac{\alpha^4}{\mu^4}$) περικύψει $\mu^4 + \frac{\alpha^4}{\mu^4}$

$= \beta$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μ^4 γίνεται $\mu^8 + \alpha^4$
 $= \mu^4 \beta$, ἃ μεταθέσει $\mu^8 - \mu^4 \beta = -\alpha^4$, ἐξίσωσις ἥ-
 τις ἐπιλυθεῖσα κατὰ τὴν μέθοδον τῶν δευτεροβαθμίων προ-
 βλημάτων δίδωσι $\mu^4 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}$, καὶ $\mu =$
 $\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. ἐν δὲ ταῖς ἀνωτέραις δυσὶν ἐξι-
 σώσειςιν, εἰς ἀντὶ τῆς δυνάμεως $\tau\epsilon$ ν ληφθῇ ἡ δύναμις
 $\tau\epsilon$ μ εὐρεθήσεται $\nu = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. ἄρα $\mu +$
 $\nu = \chi = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$.
 τὰ δὲ περὶ $\tau\epsilon$ ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει συμβόλῃ — κρατεῖ
 τὰ αὐτὰ, ἃ εἶρηται κατὰ τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἐὰν δὲ αἱ δυνάμεις $\tau\epsilon$ μ καὶ ν πολλαπλασιασθῶσιν
 ἐπὶ τὰς μοναδικὰς ρίζας $\tau\epsilon$ τετάρ-ου βαθμῆ, ληφθήσονται
 αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· αἱ δὲ
 μοναδικαὶ ρίζαι τῆς τετάρτης δυνάμεως εὐρίσκονται ἔτω·
 κείῳ $\chi^4 - 1 = 0$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ $\chi^2 - 1 = 0$
 δίδωσι πηλίκον $\chi^2 + 1 = 0$ · ἢ ἄρα $\chi^4 - 1 = 0$ γινόμε-
 νόν ἐστιν ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων $\chi^2 - 1 = 0$, ἢ $\chi^2 +$
 $1 = 0$, ἐπεὶ δὲ τῆς μὲν ρίζαι εἰσὶ 1, -1 τῆς δὲ $\pm \sqrt{-1}$,
 $-\sqrt{-1}$ · ἄρα αἱ 1, -1, $\pm \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ εἰ-
 σὶν αἱ μοναδικαὶ ρίζαι τῆς τετάρτης δυνάμεως.

Ἐπὶ ταύτας πολλαπλασιασέον τὰς εὐρεθείσας δυνά-
 μεις $\tau\epsilon$ μ καὶ ν· τοιγαρὲν τῆς μὲν ἐξισώσεως $\chi^4 -$
 $4\alpha\chi^2 + 2\alpha^2 - \beta = 0$ ρίζαι εἰσὶ

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

$$\chi = - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

Τῆς δὲ ἐξίσωσης $\chi^4 + 4a\chi^2 + 2a\alpha - \beta = 0$ ῥίζαι αἰ δε.

$$\chi = + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$\chi = - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$\chi = + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) +$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

$$\chi = - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1})$$

512. Ἐςω ἤδη ἐξίσωσις πεμτοβάθμιος ἢ $\chi^5 - 5a\chi^3 + 5a^2\chi - \beta = 0$, ἥτις τῇ ἐπιλυσίμῳ παραβαλλομένη δίδωσι $\mu\nu = a$, ἢ $\mu^5 + \nu^5 = \beta$, ἢ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξίσώσῃ ἐκ διαδοχῆς ἀντικαθισταμένων τῶν δυνάμεων τῆς μ ἢ ν , αἱ εὐρίσκονται ἐν τῇ προτέρᾳ, ποριθῆσεται

$$\mu = \sqrt[5]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)} \text{ ἢ } \nu = \sqrt[5]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - a^4}\right)}.$$

εἰσὶ δὲ ῥίζαι μοναδικαὶ τῆς πέμπτης δυνάμεως αἱ 1,

$$- \sqrt[5]{5 - 1} \pm \sqrt[5]{-10 + \sqrt{5}},$$

4

$$+ \sqrt[5]{5 - 1} \pm \sqrt[5]{-10 - \sqrt{5}}, \text{ αἱ εὐρίσκονται}$$

4

λυομένης τῆς ἐξίσωσως $\chi^5 - 0 = 0$ (*). ἄρα πολλαπλασιαζομένων τῶν εὐρεθεῖσων δυνάμεων τῆς μ ἢ ν ἐπὶ ταύτας τὰς ῥίζας, ἢ τιθεμένων τῆς μὲν τῆ μ δυνάμεως $= A$, τῆς δὲ τῆ $\nu = B$ περιωρῶνται αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις· $\chi = A + B$

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{A(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4} \\ &+ \frac{B(-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4} \\ \chi &= \frac{A(-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4} \\ &+ \frac{B(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}})}{4}\end{aligned}$$

(*) Ἐξω ἐξίσωσις ἡ $\chi^5 - 1 = 0$. αὕτη ἔν διαίρει διῆσα διὰ $\chi - 1 = 0$, τηλίκον δίδωσι $\chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1 = 0$, ἣτις ἐπιλυομένη κατὰ τὰς ἐλθεδομένης καύουας (506) προβαλεῖ ῥίζας τὰς ἤδη ἐκτεθειμένης. ἀλλὰ περὶ εὐρεσεως τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν ἐκάστου τοῦ ἰδίου, καὶ καθολικώτερον παντὸς βαθμῆ, ἢ ἄλλοις διεύληπται, ἢ δὴ ἢ τῷ ἀεικνήτῳ Νικηφόρῳ τῷ Θεοτόκῃ, τόμῳ Γ' τῆ ἀρίτως ἐκδοθέντος, αὐτῇ Μαθηματικῇ συντάγματος §. 136 μέχρι §. 142, ὃν μετῴτα ὁ τῆς τέτων εὐρέσεως ἐφύμνος· ἡμῖν δὲ χευντελή ταῦτα ἐν τῇ ἀνα χεῖρας πραγματείᾳ, ἢ ἂν περὶ τέτων εἴπομεν ἔδιν, εἰ μὴ τῶν περὶ ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων καθολικωτέρας ἀκροθιγῶς καταπρόμοιοι ἐκ τῶν τῶ Ἀββᾶ Σαυρίῃ (Sauri) παριστιθέμεθα ἐνταῦθα, ἃ δὴ ἢ παρεδίμεθα.

$$\chi = \frac{A(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4} + \frac{B(\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4}$$

$$\chi = \frac{A(\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4} + \frac{B(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})}{4}$$

ἐν γένει δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν περισσοβάθμιος ἢ $\chi^{\pi} - \pi\alpha\chi^{\pi-2}$ κτλ. — $\beta = 0$, εὐρεθήσεται αἰ μίᾳ ῥίζᾳ $\chi = \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)} + \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)}$, ἥτις τὰ ῥιζικὰ σύμβολα ἐμφαίνουσιν αἱ σύσειχοι μοναδικαὶ ῥίζαι. τῶν δὲ ἀρτισοβαθμίων ἐξισώσεων, ὧν λειπτικὸς ὁ δευτερος ὅρος, ὡς $\chi^{\pi} - \pi\alpha\chi^{\pi-2}$ κτλ. — $\beta = 0$, εἰσονται δύο

ῥίζαι αἱ $\chi = \pm \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)} \pm \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)}$. εἰς τὴν δὲ ὁ δευτερος ὅρος ἔχη τὸ σύμβολον $+$, εἰσονται ῥίζαι δύο αὗται $\chi = \pm$

$\sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)} \mp \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)}$.

Σημειωτέον δὲ, ὅτι π ἀρτίος ὄντος, — $\alpha\pi$ αἰ ἐστὶ ποσὴν λειπτικόν· περισσὴ δὲ ὄντος τῆς π, λειπτικὸν μὲν ἔσται, εἰ α εἴη ὑπαρκτικόν, ὑπαρκτικὸν δὲ, εἴπερ α εἴη λειπτικόν· ἵνα δὲ γνωσθῶσιν αἱ ἄλλαι ῥίζαι, εὐρετέον τὰς μοναδικὰς ῥίζας τῆς βαθμῆς π, εἴτ' ἂν ἐπιλυτέον τὴν ἐξίσωσιν $\chi^{\pi} - 1 = 0$, ἣ ἐφ' ἐκάστην αὐτῶν πολλαπλασιασέν

τὰ ποσὰ $\sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}\right)}$, $\sqrt[\pi]{\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^{\pi}}}$.

Μέθοδος, καθ' ἣν ἐν ἀριθμοῖς ἐπὶ τῶν ἀλό-
γης ῥίζας περιεχουσῶν ἐξισώσεων, ὅτι
ἐγγίσα τῶν ἀληθῶν γινόμεθα.

513. α'. Εὐρεθήτωσαν πάντες οἱ διαιρεταὶ τῷ ἐχά-
τε ὄρε (489) τῆς δεδομένης φέρ' εἰπεῖν ἐξισώσεως $x^3 -$
 $5x + 6 = 0$ ὑπαρκτικοί τε καὶ λειπτικοί, εἴτ' ὅν 1, 2,
3, 6, — 1, — 2, — 3, — 6. β'. ἀντικατασταθή-
τωσαν κατὰ τὸ ἐφεξῆς ἕκαστος τύπων ἀντὶ x , ἔστ' ἂν με-
ταλλαγῇ τὸ σύμβολον τῷ συμπόσῳ τῆς ἐξισώσεως.
ἡ δὲ ῥίζα εἶσαι ποσότης μεταξὺ κειμένη τῆς τε, καθ' ἣν
τὸ σύμβολον μετήλλαχται, καὶ τῆς προτέρας· ἡκὺν ἐν
τῷ προκειμένῳ ἰποδείγματι εἶσαι

$$+ 1 \dots 1 - 5 + 6 = + 3$$

$$+ 2 \dots 8 - 10 + 6 = + 4$$

$$+ 3 \dots 27 - 15 + 6 = + 18$$

$$+ 6 \dots 216 - 30 + 6 = + 192$$

$$- 1 \dots -1 + 5 + 6 = + 10$$

$$- 2 \dots -8 + 10 + 6 = + 8$$

$$- 3 \dots -27 + 15 + 6 = - 6$$

ἐπεὶ τοίνυν ἀντικαταστήσει τῷ — 3 ἡ ἐξίσωσις ἐξ ὑπαρ-
χέσης ἀπέλιπε, δῆλον ὅτι ἡ ἀληθὴς ῥίζα μεταξὺ κείται
— 2 καὶ — 3· εἰλήφθω ὅν ῥίζα τῆς ἐξισώσεως ἡ — 2,
5, ἥς ἀντικατασταθείσης ἀντὶ x εὐρίσκεται συμπόσωμα
 $+ 2$, 875, ποσότης ἀμέλει ὑπαρκτική· ἡκὺν ἡ ἀλη-
θὴς ῥίζα κείσεται μεταξὺ — 2, 5 καὶ — 3· εἰλήφθω
ὅν ἡ — 2, 7, ἥς τῇ ἀντικαταστάσει ἡ ἐξίσωσις γίνεται
— 0, 183, τυτέσι ποσότης λειπτική· ἐπεὶ τοίνυν ἡ μὲν
— 2, 5 δίδωσι ποσὸν ὑπαρκτικόν, ἡ δὲ — 2, 7 πο-
σὸν λειπτικόν, ἡ δύναμις τῆς x κείσεται πάντως μετα-

$\xi \cup - 2, 5 \xi - 2, 7 \cdot \xi \cup \text{εν } \eta - 2, 6, \text{ης αντι-}$
 $\kappa \alpha \tau \alpha \sigma \alpha \theta \epsilon \iota \sigma \eta \varsigma \gamma \iota \nu \epsilon \tau \alpha \iota \eta \xi \iota \sigma \omega \sigma \iota \varsigma + 0, 424 \cdot \epsilon \pi \epsilon \iota \delta \epsilon \tau \acute{\upsilon} \tau \omicron$
 $\upsilon \pi \alpha \rho \chi \epsilon \iota \delta \eta \lambda \omicron \nu, \omicron \tau \iota \eta \alpha \lambda \eta \theta \acute{\eta} \varsigma \rho \acute{\iota} \zeta \alpha \epsilon \nu \upsilon \kappa \omicron \kappa \rho \acute{\upsilon} \pi \tau \epsilon \tau \alpha \iota \mu \epsilon \tau \alpha \xi \cup$
 $- 2, 6 \xi - 2, 7, \epsilon \iota \tau' \text{εν } \xi \cup - 2, 6 \mu \epsilon \tau \acute{\alpha} \tau \iota \nu \omicron \varsigma$
 $\kappa \lambda \acute{\alpha} \sigma \mu \alpha \tau \omicron \varsigma, \eta \tau \tau \omicron \nu \omicron \varsigma \eta \delta \epsilon \kappa \alpha \tau \eta \mu \acute{\omicron} \rho \iota \omicron \nu \tau \acute{\alpha} \upsilon \tau \eta \varsigma \tau \eta \varsigma \kappa \omicron \sigma \acute{\omicron} \tau \eta$
 $\tau \omicron \varsigma, \eta \delta \eta \lambda \omicron \nu \cdot \kappa \lambda \eta \theta \acute{\eta} \tau \omega \delta \epsilon \tau \acute{\upsilon} \tau \omicron \tau \omicron \kappa \lambda \acute{\alpha} \sigma \mu \alpha \xi \cdot \xi \delta \eta$
 $\xi \cup \chi = - 2, 6 - \xi \cdot \epsilon \pi \epsilon \iota \delta \epsilon \xi < \tau \acute{\omicron} \cdot \alpha \rho \alpha \xi^3 \pi \iota$
 $\lambda \cup < \tau \acute{\omicron} \tau, \xi \xi^3 \kappa \omicron \lambda \cup \epsilon \tau \iota < \tau \acute{\omicron} \sigma \tau \cdot \delta \iota \omicron \alpha \iota \delta \upsilon \nu \acute{\alpha} \mu \epsilon \iota$
 $\tau \acute{\omicron} \xi^2 \xi \xi^3 \pi \alpha \rho \omicron \phi \theta \acute{\eta} \nu \alpha \iota \epsilon \chi \upsilon \sigma \iota \pi \rho \acute{\omicron} \varsigma \gamma \epsilon \tau \omicron \omicron \lambda \omicron \nu \kappa \omicron \sigma \acute{\omicron} \nu \cdot \alpha \nu$
 $\tau \iota \kappa \alpha \tau \alpha \sigma \alpha \theta \epsilon \iota \sigma \omega \nu \tau \omicron \iota \gamma \alpha \rho \eta \nu \alpha \nu \tau \iota \chi^3 \tau \omega \nu \delta \upsilon \nu \acute{\alpha} \mu \epsilon \omega \nu \tau \omega \nu \alpha \nu$
 $- 2, 6 - \xi \text{ εν } \tau \eta \xi \iota \sigma \omega \sigma \epsilon \iota, \pi \rho \omicron \kappa \acute{\upsilon} \phi \epsilon \iota \eta \delta \epsilon \eta \xi \iota \sigma \omega \sigma \iota \varsigma$
 $\chi^3 = (- 2, 6 + \xi)^3 = (- 2, 6)^3 + 3(- 2, 6)^2 \xi$
 $- 5\chi = - 5(- 2, 6 + \xi) = - 5(- 2, 6)$
 $- 5\xi + 6 = 0 \cdot \tau \omicron \delta \epsilon \epsilon \kappa \mu \acute{\omicron} \nu \eta \varsigma \tau \eta \varsigma \alpha \nu \tau \iota \kappa \alpha \tau \alpha \sigma \alpha \theta \epsilon \iota \sigma \epsilon \omega \varsigma$
 $\sigma \upsilon \mu \pi \acute{\omicron} \sigma \omega \mu \alpha \xi \cup \cdot (- 2, 6)^3 + 3(- 2, 6)^2 \xi -$
 $5(- 2, 6) - 5\xi + 6 = 0$

$\epsilon \iota \tau' \text{εν } (- 2, 6)^3 = - 17, 566$

$+ 3(- 2, 6)^2 \xi = \quad \quad \quad + 20, 28\xi$

$- 5(- 2, 6) = + 13, 000$

$- 5\xi \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = \quad \quad \quad - 5\xi$

$+ 6 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + 6 = 0$

$\tau \omicron \delta' \omicron \lambda \omicron \nu \sigma \upsilon \mu \pi \acute{\omicron} \sigma \omega \mu \alpha = - 4, 566 + 15, 28\xi + 6 = 0,$

$\omicron \pi \epsilon \rho \alpha \nu \alpha \gamma \omega \gamma \acute{\eta} \gamma \iota \nu \epsilon \tau \alpha \iota = + 15, 28\xi + 1, 424 = 0,$

$\epsilon \iota \tau' \text{εν } 15, 28\xi = - 1, 424, \xi \xi = - \frac{1, 424}{15, 28},$

$\omicron \xi \cup \text{εν } \delta \epsilon \kappa \alpha \delta \iota \kappa \omicron \tau \iota \varsigma \xi = - 0, 09 \cdot \epsilon \kappa \eta \nu \eta \delta \upsilon \nu \acute{\alpha} \mu \iota \varsigma \tau \eta \varsigma$

$\chi, \epsilon \iota \tau' \text{εν } \chi = - 2, 6 + \xi \gamma \iota \nu \epsilon \tau \alpha \iota \chi = - 2, 6$

$- 0, 09, \omicron \xi \cup \chi = - 2, 69.$

$\text{Βυλομένοις δὲ ἐντελετέραν εὔρειν τὴν τῆς } \chi \text{ δύναμιν, θετέον } \chi = - 2, 69 + \tau \cdot \tau \omicron \iota \gamma \alpha \rho \eta \nu \xi \cup \alpha \iota$

$$\begin{aligned} \chi' &= (-2,69)^1 + 3(-2,69)^2 \cdot \tau \\ -5\chi &= -5(-2,69) - 5\tau \\ +6 &= +6 \end{aligned}$$

τῶν δὲ πράξεων, ὡς ἀνωτέρω ἐκπερανθεισῶν, — 0, 015109 + 16, 7083τ = 0· ὅθεν ἀποισόμεθα τ = $\frac{0,015109}{16,7083}$, τῷτῃ τ = 0,000904· ἡ τοίνυν δύναμις

τῆς χ, εἴτ' ἂν χ = — 2, 69 + τ γίνεται χ = — 2, 69 + 0,000904 = — 2, 689096.

Εἰ δέ τις βέλτοις ἐτι ἐγγυτέρω τῆς ἀληθείας πελάσαι, λαβέτω χ = — 2, 689096 + υ, καὶ ἐπαναλαβέτω τὰς πράξεις ὡς ἀνωτέρω. Τὰ αὐτὰ δὲ πραχθήσεται ἐπὶ ἐξισώσεων καθυπερτέρων, εἰς βυλομένοις ἡμῖν ἢ διὰ ταύτης τῆς Μεθόδου τὴν ὡς ἐγγιστα τῆς ἀληθὲς ἀριθμητικὴν ρίζαν εὐρίσκειν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ Ἀόριστων Προβλημάτων.

514. Προβλήματα ἀόριστα καλεῖται, ὧν πλείους αἱ ἀγνώστοι ποσότητες, ἢ περ αἱ θέσεις (438), ἐπὶ ἅπερ αἰ μὲν πολλὰς, τὰ πολλὰ δ' ἀπείρους ἐπιλύσεις ὑφίσταται· ἐκ ἂν ἓν λογιζόμενοι τῷ τὴν ἐξίσωσιν ἐπιλίσσαι τὴν ἰδίαν τῆς ἀγνώστου προσδιορίσαιμεν δύναμιν.

515. Ταύτη ἄρα φύσεως ἔχουσι πάντα τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα· καὶ γὰρ μία μὲν αὐτῶν ἡ ἐξίσωσις, μία δὲ ἐπὶ τῇ θέσει, αἰ μὲντοι δύο αὐτῶν αἱ ἀγνώστοι ἢ μὲν ὑπαρκτικὴ, λειπτικὴ δὲ ἡ ἑτέρα (457)· ἐπὶ

δὴ ὁ τὸ πρόβλημα ἐπιλύσας ἐκ αὐτῶν ὀρίσειεν ὁποτέρων τῶν δύο ὁ προτείνας ὑπέθετο· ταυτὸν δὲ γενικῶς ρητέον καὶ περὶ τῶν ὑπερτέρων μὲν, ἀρτιἀριθμῶν δὲ δείκτην ἔχουσῶν, ἐξισώσεων (127).

516. Ἀλλὰ καὶ πᾶσα ἐν γένει ἐξίσωσις σύνθετος θεωρηθεῖν αὐτὴν ὡς Ἀόριστον πρόβλημα· τῶσαχῶς γὰρ αὐτῶν ἐκάστη ἐπιλυθήσεται διαφόρως, ὅσων μονάδων ἐστὶ περιεκτικὸς ὁ τὸν βαθμὸν αὐτῶν παριστὰς ἀριθμὸς.

517. Οὐ μὲν ἄλλα καὶ τὰ τῇ καλυμένη τῆς συγγραφῆς μεθόδῳ ἐμπεριεχόμενα προβλήματα ὁμοφυῆ τέτοις ὄντα κατείδομεν (Ἀριθ. 283)· καὶ τῆς κράσεως γὰρ γινόμενης, καὶ δυνατὸν ὃν τὰς διαφορὰς ἐξ ὧν αὕτη ὕλης ὀρίσασθαι, ἀδύνατον μὲντοι ὀρίσασθαι ἥτις πραγματικῶς ἔχει χώραν· καὶ ταῦτα τοίνυν ἔσεται Ἀόριστα προβλήματα.

518. Τελευταῖον δὲ, τῶν ἀπλῶν, ἢ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀόριστα ὑπάρχει, ὧν αἱ ἀγνοῶσι πλείους τῶν θέσεων, καὶ δὴ καὶ τῶν ἐξισώσεων, καὶ ἀπείρους ἐπιλύσεις ὑφίσταται.

Εἴρηται ἤδη (438) ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x + y = 15$ ἀπειράχως αὐτὴ ἐπιλυθεῖν, ἐν γένει ἀλλ' ἐν ἐκληφθεῖσα, καὶ περιορισμῶν ἄτερ· τῷ μὲντοι ζητῶντι μίνας ποσότητος ὑπαρκτικὰς ἀπείροι ἐπιλύσεως ἐξαιρῶνται τρόποι· ἀπείροι δὲ καὶ τῷ θέλοντι μόνον ὀλοχχερεῖς· καὶ ἔτι περὶ περιγραφθήσεται ἡ ἐπίλυσις τρόποις μόνον τέσσαρσι καὶ δέκα, $1 + 14$, $2 + 13$ κτλ· ἐπεικῶς γὰρ εἰ κόμμα τι ἀνθρώπων 15, ἐξ ἀνδρῶν ἅμα καὶ γυναικῶν συμπληρωτὸ ἀορίσως, καὶ τις ὅσοι μὲν ἐκεῖνοι, ὅσαι δ' αὐταὶ εἴησαν πύθοιτο, ἕδενά κλασματώδη ἀριθμὸν τὸ πρόβλημα ὑποθήσεται· καὶ γὰρ ἐξέσαι εἰπεῖν ὡς ἦν ἡμισυς ἀνὴρ, καὶ $14\frac{1}{2}$ γυναῖκες.

519. Παρὰ τοίνυν τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ εἰρημμένα

ἐπὶ τῆς μεθόδου τῆς συγκράσεως, καὶ τὰ ἐνταῦθα ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀορίστων προβλημάτων, ἀποδώσομεν ἔτι περὶ τῶν τὴν ἐφεξῆς γενικὴν Μέθοδον.

520. α'. Μίαν τινὰ τῶν ἀγνώστων ἀναδεικτέον μόνον ἐπὶ θάτερα τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν.

521. β'. Πρὸς τὸ δοκῆν ἀφοσιωτέον τῇ ἐπὶ θάτερα ἀγνώστῳ δυνάμει τινὰ μὴ ἀντιπίπτεισαν τῷ προβλήματι· καὶ ἐκ τούτου ἔψεται ἡ τῆς μόνης ἐπὶ θάτερα ἀγνώστου δύναμις· ἐντεῦθεν δὲ ποριζήσεται καὶ ἡ τῆς τρίτης· ἰδὲ δὴ μία τις λύσις τοῦ προβλήματος.

522. γ'. Ἀποδοτέον ἔτι τῇ μὴ μόνῃ ἀγνώστῳ ποσότητι ἄλλην τινὰ δυνάμιν, οἷαν μὴ ἀντιπίπτειν τῷ προβλήματι· καὶ τότε συναχθήσεται ἄλλη τῆς μόνης ἀγνώστου δύναμις· δευτέρα αὕτη τοῦ προβλήματος λύσις.

523. Καὶ ἐφεξῆς πρακτέον ὡσαύτως, εἰς ὃ ἀφικώμεθα ἐκ ἀριθμὸν μεγίστον, ἢ ἐλάχιστον, ἐνθ' ἂν ἴδοιμεν, ὡς ἅπαντα τοῦ προβλήματος λύσις ἄλλη ὑπάρχει ἀδύνατος.

524. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἀνθρώποι 20 ἐμισθώσαντο ναῦν ἀργυρίων 58· καὶ οἱ μὲν ἄνδρες αὐτῶν ἐτέλεσαν 4 ἑκάστος· ἑκάστη δὲ τῶν γυναικῶν, 3· τῶν δὲ παιδίων, 1· πόσοι ἄρ' ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες, καὶ παῖδιά πόσα;

ΛΥΣΙΣ. Δύω εἰσὶ δὴ πῦν ἐνταῦθα αἱ θέσεις· καὶ ἡ μὲν πρώτη τίθησιν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν χ , καὶ τῶν γυναικῶν ψ , καὶ τῶν παιδίων ω , ἐξισῆσαι τῷ 20, ὃ εἰσιν $\chi + \psi + \omega = 20$ · ἡ δευτέρα, ὅτι ὁ τετρακίς εἰλημένος ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, καὶ ὁ τρίς τῶν γυναικῶν, καὶ ὁ ἅπαξ τῶν παιδίων, συμπληρῆσιν ἀργύρια 58, ὃ εἰσὶ $4\chi + 3\psi + \omega = 58$.

Ταυτάρθεν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς

χ ἔσι $\chi = 20 - \iota - \omega$, ἥτις ἀντὶ χ ἀντικαταστάσα
 ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀποτελεῖ αὐτὴν $80 - 4\iota - 4\omega + 3\iota$
 $+ \omega = 58$, ἀναγωγῇ δὲ $80 - \iota - 3\omega = 58$ · με-
 ταθέσει δὲ ἐξ ἀναγωγῇ $22 - \iota = 3\omega$ · ἄρα $\omega = \frac{22 - \iota}{3}$

Φυλακτέον δὲ μὴ ἀποδῶμεν τῇ ι δυνάμιν τινα, ἥ-
 τις ἀφαιρεθεῖσα ἀπὸ 22 καταλείπει τι, ὃ διαιρεθὲν διὰ 3
 δίδωσι δυνάμιν τῆς ω κλασματικὴν (518)· ὑποθεβέντης
 ἂν $\iota = 1$, τὸ κατάλοιπον $\frac{21}{3} = 7$ ἀναδίδωσι τὴν τῆς ω
 δυνάμιν.

Αὗται δὲ αἱ δυνάμεις τῆς ι καὶ ω εἰσαχθεῖσαι ἐν τῇ
 ἐξισώσει $\chi + \iota + \omega = 20$, ἀναδιδόασι 12 δυνάμιν τῆς
 χ · ἔκων ἦσαν ἐπὶ τῆς νηὸς 12 μὲν ἄνδρες, 1 δὲ γυνή,
 καὶ παῖδιά 7· εἶγε $1 \times 3 + 7 \times 1 + 12 \times 4 = 58$ ·
 πρώτη λύσις τῆ προβλήματος.

Τιθεμένης δὲ $\iota = 2$, ἡ $\omega = 3$, τὸ κατάλοιπον τῇ
 22, διαιρεθὲν διὰ 3, ἀπεργάζεται κλάσμα· τιθεμένης
 μέντοι $\iota = 4$, τὸ κατάλοιπον 18 διαιρούμενον διὰ 3 δί-
 δωσιν $6 = \omega$, καὶ δὴ $\chi = 10$ · ἦσαν ἄρα ὅτως ἄνδρες
 μὲν 10 γυναῖκες δὲ 4, καὶ παῖδιά 6· καὶ ἐξ' αὐτῶν γέ-
 νοιτ' ἂν $4 \times 3 + 6 \times 1 + 10 \times 4 = 58$ · δευτέρα ἐ-
 πίλυσις.

Αἱ δυνάμεις 5 καὶ 6 ἀνοίκειοι εὐρίσκονται τῇ ι · τι-
 θεμένης μέντοι $\iota = 7$, ἡ δυνάμεις τῆς ω ἔσαι $\frac{15}{3} = 5$, ἡ
 δὲ $\chi = 8$ · ἦσαν ἄρα 8 μὲν ἄνδρες, 7 δὲ γυναῖκες,
 παῖδιά δὲ 5· τρίτη ἐπίλυσις.

Αἱ δυνάμεις 8 καὶ 9 ἀποδοκιμασεῖαι ὑπὲρ τῆς ι · ἀλ-
 λά 10 ἐφαρμόττων τῇ ι δίδωσιν $6 = \chi$ καὶ $4 = \omega$ · τε-
 τάρτη δὴ αὕτη λύσις.

Εάν τεθῇ $13 = \iota$, ἔσαι $3 = \omega$, καὶ $4 = \chi$ · πέμ-
πτη ἐπίλυσις.

Εάν τεθῇ $16 = \iota$, ἔσαι $2 = \omega$, καὶ $2 = \chi$ · ἕκτη
καὶ ἐσχάτη ἐπίλυσις· ἐκ γὰρ 17 καὶ 18 κλασματικαὶ πρέρ-
χονται δυνάμεις, ἐκ δὲ 19 , πρόεισιν $1 = \omega$, καὶ $0 = \chi$

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εὐχερῶς κατανοεῖται, ὡς τὸ προτεθέν
πρόβλημα ὁμοφυὲς ὑπάρχει τοῖς τῆς καλυμένης μεθοδῶ
τῆς συγκράσεως (Ἀριθ. 283. καὶ ἐξῆς)· ἡ ἄρα προηγου-
μένη μέθοδος γενικῶς ἐφαρμοσθῆναι δυνήσεται τοῖς τοιοῖς.
δε τῶν φύσιν προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Τρεῖς ἀριθμοὺς εὐρεῖν, ὧν τὸ
μὲν ἄθροισμα εἴη 174 , μεταξὺ δ' ἀλλήλων ἡ αὐτὴ δια-
φορά.

ΛΥΣΙΣ. Ἐώσαν χ, ι, ω οἱ τρεῖς ἄγνωστοι ἀρι-
θμοί, καὶ $174 = \alpha$.

Ἡ μὲν ἔν πρώτη θέσις ἐστὶ $\chi + \iota + \omega = \alpha$, ἡ δὲ
δευτέρα $\chi - \iota = \iota - \omega$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως μεταθέσει γενομένης χ
 $= \alpha - \iota - \omega$, εἰσαχθείσης τῆς κατὰ τὴν χ δυνάμεως
ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἔσαι $\alpha - \iota - \omega - \iota = \iota - \omega$ · ἄρα
 $\alpha = 3\iota$ καὶ $\iota = \frac{\alpha}{3} = 58$.

Ἀντικαταστήτω ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἡ τῆς ι δύ-
ναμις, καὶ δὴ ἔσαι $\chi + \frac{\alpha}{3} + \omega = \alpha$ · ἄρα $\chi = \alpha - \frac{\alpha}{3} -$
 ω , ἢ $\chi = 116 - \omega$.

Ὁκείωσθω πρὸς τὸ δοκὺν δύναμις τῇ ω , ἐλάττων
μέντοι ἢ ἡ 58 δύναμις τῆς ι , ὑποτιθεμένοις μείζω μὲν
τὴν χ , μέσσην δὲ τὴν ι , ἐλάττω δὲ πασῶν τὴν ω ·
ταύτης δὲ ἀπὸ 116 ἀφαιρεθείσης, καταλειφθήσεται ἀεὶ
ἡ τῆς χ δύναμις· εἰ γὰρ ἢ $\omega = 1$ ἔσαι $\chi = 115$ · καὶ

δὴ α'. $115 + 58 + 1 = 174$. β'. $115 - 58 = 57$,
 ἢ $58 - 1 = 57$.

Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιλυθήσεται ἢ ἂν ὑποτεθῇ $\omega = \frac{1}{4}$, ἢ ἡ ἐπομένως $\chi = 115 \frac{1}{4}$. ἢ ὡς γὰρ ἔσται $\div 115 \frac{1}{4} \cdot 58 \cdot \frac{1}{4}$. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ πρόβλημα τόδε τοσαυτῶς λυθήσεται, ὅσοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουσιν μεταξὺ 58 ἢ 0 εἴτε κλασματῖαι, εἴτε τῶν ὁλοκληρῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Αἰριθμὸς εὐρεῖν δύο χ , ψ , ὅφ' ὧν τὸ γινόμενον διαιρεθὲν διὰ τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαφορᾶς ω παρέχοι $13 \frac{1}{3}$.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ Ξέσις ἐστίν, ὅτι $\frac{\chi\psi}{\omega} = 13 \frac{1}{3}$ (Π). ἔ.

πεί δὲ ἡ ἐξίσωσις τρεῖς μὲν περιέχει ἀγνώστους, μίαν δὲ ἐγνωσμένην, ἀποδεδοῖσθαι τὸ κατ' ἀρχὰς μιᾶ τινι τῶνδε τῶν ἀγνώστων τῇ ψ , φέρε, δύνῃς τις πρὸς τὸ δοκεῖν, φέρε ἢ 5. ὑποτιθεμένου δὲ $\chi > \psi$, ἔσται $\chi = 5 - \omega = 4 - \omega$. ἔκων $\chi\psi = 25 + 5\omega$. ἢ δὲ Π ἐξίσωσις ἔσται $\frac{25 + 5\omega}{\omega} = 13 \frac{1}{3}$. ἀφανισμῷ τῆς κλάσματος, $75 + 15\omega = 40\omega$. ἢ $75 = 25\omega$. ἄρα $\omega = \frac{75}{25} = 3$.

Εἰσαχθεῖσιν δὲ ἐπὶ τῆς Π ἐξίσωσεως τῶν δυνάμεων 5 ἢ 3 ἀντὶ ψ ἢ ω , ἔσται $\frac{\chi \times 5}{3} = 13 \frac{1}{3}$. ἄρα $\chi \times 5 = 40$ (125).

ἄρα $\chi = \frac{40}{5} = 8$.

Οἱ ζητούμενοι ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ εἰσὶν 8, 5, 3. ἔσι γὰρ $\frac{8 \times 5}{3} = 13 \frac{1}{3}$.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ 5 τεθῇ ἑτέρα τις δύναμις τῆς 4, φέρε εἰπεῖν, 6, 4, κτ., τῆς πρᾶξεως ὡσαύτως ἐκπερανθείσης

πορισθήσονται ἢ ἄλλοι δῖοι ἀριθμοί, οἱ σὺν τῷ κατὰ τὸ δοκῶν λαφθέντι πληρώσει τὴν τῷ προβλήματος θέσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῆς ὡς ἀπείρου θεωρη- μένης ποσότητος.

525. Ἀπειρον ποσότητα καλῶ, ἥς μείζονα ἐπινοῆσαι ἢ δυνάμεθα· τὴν αὐτὴν δὲ ἀπείρως ἐλάττωσιν, ἢ ἀπειροσύν, τὴν ἀπάσης δεδομένης ἐλάττωσα.

526. α'. Ἀρα τὸ ἀπειρον περιέχει ἅπαν ὠρισμένον ποσὸν ἀπειράκις εἰλημμένον· ἄλλως γὰρ πολλαπλασιαζόμενόν τε δὲ τῷ ποσῷ ἐπὶ τὸν πεπερασμένον ἀριθμὸν τὸν ἐμφαίνοντα, ὅσάκις ταῦτ' ἐμπεριέχεται τῷ ἀπείρῳ, ἀποληφθήσεται (Αριθ. 107.) ἀντὶ τοῦ ἀπείρου πηλόντι πεπερασμένον, ὅπερ ἀντίκειται τῷ τῷ ἀπείρῳ ὀρισμῷ.

527. β'. Εἰξέσαι ἐπινοῆσαι τὰ τε ἀπειρα ἢ τὰ ἀπειροσὰ ἐν ἀπείροις τάξεσιν· εἰ γὰρ διαγνωθῶσιν αἱ τῶν ἀπείρων τάξεις διὰ τῶν παντοίων δεικτῶν, ὧν ἔχειν δύναται τὸ σημεῖον ∞, δυνάμεθα ἐπινοῆσαι ∞ × ∞ = ∞²· καταφανὲς ἔν, ὅτι ∞, = ∞ ἐμφαίνει ἀπειρον πρώτης τάξεως· ∞ δὲ, ἀπειρον δευτέρας τάξεως· ὡσαύτως ∞ × ∞ = ∞³· ∞³ × ∞ = ∞⁴· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφύεται θαυμασίως ἀπείρος πρόοδος παντοίας τάξεως ἀπείρων ∞

$$\infty^1 : \infty^2 : \infty^3 : \infty^4 : \infty^5 \dots \infty^{\infty} \cdot \text{ὡσαύτως } \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} =$$

$$\frac{1}{\infty^2} \cdot \frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty^1} = \frac{1}{\infty^3} \text{ κτλ. ὅθεν ἡ πρόοδος συγκειμένη ἐξ}$$

$$\text{πενήκω} \cdot \text{πενήκω} \cdot \text{τάξιω} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \\ \dots \frac{1}{2} \cdot$$

328. Τὸ πρῶτον τάξις ἀπειρῶν ἀπειρώς ἴσμεν. ρίχεται τῷ δευτέρῳ τάξις· τὸ πρῶτον ἄρα ἐστὶν ἀπειρώς μέρος τῷ δευτέρῳ, εἴτ' ὅν ἀπειρώς μικρὸν πρὸς γὰρ τὸ δευτέρῳ· ταυτὸν δὲ ῥητέον ὅτι περὶ δευτεροῦτα. γὰρ ἀπειρὸν παραβληθέντι πρὸς τρίτου γὰρ· ἐν γὰρ δὲ ἅπῃ ἀπειρῶν ἀπειρώς τυγχάνει μικρὸν ἐναφιστάμενον πρὸς ἄλλῃ κατ' ὑπερτέρας τάξις· τῷ πρῶτῳ δὲ τὸ πρὸς τῆς τάξεως ἀπειρώς ἀπειρώς ἐστὶ περιεκτικὸν ἀπειρώς δευτεροῦτα, ὅτι ὅτως ἐρεξῆς.

329. Ἐὰν πρὸς τῷ ἀπειρῷ, ἢ ἀπ' αὐτοῦ ἀφανῶς, ἀπειρήντι τάξις κατωτέρως, τὸ πρῶτον ἀπειρῶν διαμεσῇ ἀμετάστροφον· ὅτι γὰρ πᾶν κατωτέρως τάξις ἀπειρῶν ὑδὲν ἐστὶν ἀλλ' ἢ ἀπειρώς μέρος τῷ ὑπερτέρας τάξεως ἀπειρῶ (328)· καὶ ἐὰν τῷ δευτέρῳ προσέθῃ, ἢ ἀφανῶς ἀπ' αὐτοῦ, τὸ δευτέρῳ αὐξηθήσεται, ἢ μειωθήσεται, ἀπειρώς μικρῷ ποσῷ· ἐὰν ἄρα τὸ δευτέρῳ ἐκληρωθῇ τὸ αὐτὸ, ὡς ὅτι πρὸς τῷ, ἢ ἀπ' αὐτοῦ ἀπειρώς ὅσα μικρὰ διωθήσεται ὡς μηδὲν ἐκλογισθήσεται.

330. Τῇ αὐτῇ τῷ συλλογισμῷ ἐφ' ᾧ καταφασκεται ἂ. ἅπῃ ἀπειρῶν σὺν ἢ πλὴν ἀριθμητικῶν, ἢ ἐπαισθῶν ἀπειρώς μικρῷ ποσῷ, μείνῃ τὸ αὐτὸ, εἴτ' ὅν ὅτε αὐξηθὲν μεγεθυνθήσεται, ὅτε ἀφανῶς, σμικρυνθήσεται· β'. ἅπας ἀριθμὸς πεπερασμένος σὺν ἢ πλὴν ἀπειρώς ἄτρεπτος ἐστίν.

331. Ἐὰν ἐπ' ἀπειρῶν ποσὸν ἀπειρῶν πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον ἐστὶ ἀπειρῶν τάξις ἰσοσημείτης ὑπὸ

τὸ ἀριθμητικὸν τῷ διωτῶν τῷ τετραπλασιασμένῳ, ἢ τῷ
 τετραπλασιασμένῳ· $a \times a = a^2$ · $a^2 \times a^2 = a^4$ (40).

331. Τὸ ἑνὶ τετραπλασιασμένῳ ἐστὶ ἀριθμὸν τε-
 τερασμῆν, διὸ τούτῳ γινώσκει μᾶλλον ἢ τρίτῳ, ἴ-
 σαι ἵσως μᾶλλον τῷ τετερασμένῳ τετραπλασιασμένῳ,
 (Ἀρ. 78) τὸ δὲ ἐνὶ τῆς αὐτῆς, ἢς ἢ τῷ ἑνὶ, μῖνον
 ταξικῶς· μὲν ἀληθινὸς τῷ τετερασμένῳ ἀριθμῷ, ἴσως
 $a \times \mu = \mu a$ · ἄρα μὲν τῆς αὐτῆς ἐν ταξικῶς, ἢς ἢ
 τὸ a (387).

333. Τὸ ἐν ἀείρει ἢ ἀειρεῖ γινώσκον ἐξισῶ-
 ται 1· ἢ γὰρ $a \times \frac{1}{a} = \frac{a \times 1}{a} = 1$ (37).

334. Τὸ ἐνὶ παντὶ ἀριθμῷ ἢ τῷ 1 γινώσκον ἐξισῶ-
 ται ἀειρεῖ μᾶλλον τῷ ἀριθμῷ· τῷ γὰρ τετερασμέ-
 νῳ τῷ δὲ ἀριθμῷ ἀληθινὸς a , ἴσως $a \times \frac{1}{a} = \frac{a \times 1}{a}$

$$(\text{Ἀρ. 198}) = \frac{a}{a}.$$

335. Ἐὰν ἀειρεῖ διωρεθῇ δι' ἑμπηγῶς ἀειρεῖ,
 μήτε συνελθόν, μήτε περσμενὴν ἔχοντες, τὸ τελευτῶν

ἴσως ἴσως μᾶλλον· εἴγῃ $\frac{a\mu}{a\mu} = 1$ · ἐὰν δὲ ἀειρεῖ δι' ἀ-

ειρεῖ ἑλαττωπηγῶς διωρεθῇ, τὸ τελευτῶν ἴσως ἀειρεῖ
 ἔχον δάκτυλόν τὴν ἑτεροχῆν, ἢ διαφέρει ὁ τῷ διωρεθεί

διδόχῃ τῷ κατὰ τὸν διωρεθῆ· $\frac{a^2}{a^2} = a^2$ · καὶ δὲ καὶ

$$\frac{a^2}{a^2} = a^2.$$

336. Τὸ ἀειρεῖ διωρεθῆν δι' ὑποσῶν τετερασμένῳ

ἀρῶν τῷ π, τὸ πάλιν φερεται $\frac{1}{2}$ μὲν καὶ ἀπειρὼν εἰ.

μπαγεί τῷ ἐν ἀρχῇ λαμβάνεται (387). ἐκὸν δὲ διαιρετὴν δι' ἀπειρῶν, ἀποτελεῖται ἀπειρὼν, ὃ τὴν τάξιν ὁμολογεῖται ὅ τῷ διαιρετῷ ἀπειρῶν διαικτῆς συνδυάσει· ὡς ἐν διαιρε-

θεσίᾳ διὰ $\frac{1}{\infty}$ ἴσως εἰ τῷ $\eta \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$.

337. Ἐάν δὲ εἰ διαιρετὴν διὰ $\frac{1}{\infty}$, πηλίκον ἔσται ∞ , εἰς γὰρ $1 = \frac{1}{1}$ · ἐάν εἰ διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{\infty}$, $= \frac{1}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$.

338. Ἐάν εἰς πεπερασμένον εἰσῶν ἀρχῇ διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{\infty}$, τὸ πηλίκον ἔσται πεπερασμένον ἀπειρὼν, ὥς ὡν μὲν δυν περιεκτικὸς ἐπάρχει ὁ διαιρετὸς· 4 γὰρ διαιρεθείς διὰ $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$.

339. Ἐάν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ποτὶς πεπερασμένον, ἔσται $1 = \infty$, καὶ οἱ $= \frac{1}{\infty}$ · ἀλλὰ γὰρ τὸ οἱ ἐκ ἐκτεκτικῶν ὡς καὶ θέρων μὴδὲν· ἢ ἐκ πν εἰς $\frac{1}{\infty} = \infty$, ὡς ἀρχῇ τὴν συνολογίαν ὁ σφίς ἑξέλεγκ· ἐφ' ἀπείρου γὰρ διαιρέσεως ὅτι πεπερασμένον περιεῖναι πεπότητα, ἢ καλεῖται διαιρετὸς, καὶ ἄλλων, ἢ διαιρετῆς ἡμισυ, ἄμφω δὲ ὁμολογεῖται· εἰ τῶν μὴ εἰς ποσότης τὸ οἱ, καὶ τὸ πηλίκον τὸ διαιρέσει τῶν εἰς διὰ οἱ εἰς πν ποσόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ποσότης εἰς ἢ εὐξυσίως καὶ μειώσεως ἐπιδεικτικῇ (ἀρχὴ. ε.)· ἐκ ἀρχῆς εἰπεῖν πν ὅχον μὲν τὸ ἀπειρὼν ποσότητα εἶναι, ἢ προσέλαβον ἀπείρου τὰς δυνατὰς εἰς· ἔξοδος· ὅτω γὰρ τῷ ποσότητα εἶναι ἐκτεκτικῇ· ἄλλως τε οἶδαμεν ὡς πᾶσα ποσότης μεγαλύνεται προσθεσίμῃ καὶ τῇ εὐξυσίως ποσότητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ Σειρῶν.

540. ΣΤ.Χ.Κ ἴσως ἐξήντη, ἢ μισομένη, πέντε
μίμηται ἴσως, καλεῖται Σειρᾶ· τινεὶ δὲ ἴσως εἴτε Γνω-
μιτρικαὶ πένδε, ἢ αἱ Ἀριθμητικαὶ, ἢ αἱ ἔχον τὴν ἰ-
σχυρισμένην ἀριθμῶν

αριθμῶν Σειρῶν ἰσχυρισμένην	μίμηται, ἢ πενταγώνος	1, 1, 1, 1, 1 κτ.
	φυσικῶν, ἢ δευτέρων.	
	γινε	1, 2, 3, 4, 5 κτ.
	τρίγωνων, ἢ τρίτων.	
	γινε	1, 3, 6, 10, 15 κτ.
ἰσχυρισμένην	τετραγωνικῶν, ἢ τέτταρτων.	
	τεγινε	1, 4, 10, 20, 35 κτ.
	τρίγωνοτετραγωνικῶν, ἢ πενταγώνων	1, 5, 15, 35, 70 κτ.

ἴσως δὲ, καὶ ὅτι ἰσχυρίζονται ὅτι αἱ ἀριθμοὶ, ἔξω, ἵνα
ἴσως ὅρος ἴσως τῷ ἀριθμῷ τῶν ἀριθμῶν ἴσως
τῶν ἰσχυρισμένην σειρῶν· ὅπως ὁ τρίτος ἴσως ὁ τῶν τρίτων
σειρῶν ἴσως ἐστὶ τῷ ἀριθμῷ τῶν τρίτων πρώτων ἴσως
τῶν δευτέρων· ἢ γὰρ $1 + 2 + 3 = 6$ κτ.

Οἱ πολὺ γινε ἀριθμοὶ συνίστανται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν
τῶν ἴσως ἀριθμητικῶν πρώτων ἀπὸ 1 ἀρχισμένη· καλεῖται
δὲ αἱ ἀριθμοὶ ἵνα τρίγωνων, τετραγώνων, πενταγώνων, κτ.
ὡς αἱ τυχὼν εἴσῃ ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμητικῶν πρώτων
1, 2, 3 κτ.

Προδοὶ ἀριθμητικαί.

1, 2, 3, 4, 5 κτ. διαφορὰ 1

1, 3, 5, 7, 9 κτ. διαφορὰ 2

1, 4, 7, 10, 13 κτ. διαφορὰ 3

1, 5, 9, 13, 17 κτ. διαφορὰ 4

Ἀριθμοὶ πολύγωνοι.

1, 3, 6, 10, 15 κτ. τρίγωνοι.

1, 4, 9, 16, 25 κτ. τετράγωνοι.

1, 5, 12, 22, 35 κτ. πεντάγωνοι.

1, 6, 15, 28, 45 κτ. ἑξάγωνοι.

Βραχύτι ἐπισήσασι τοῖς ἑξαματισμένοις τῷ ἀριθμῷ δὲ λαν αὐτίκα, ὡς εἴν ὁ χώρος τῆ πάσης τάξεως ἑξαματισμένου ἀριθμοῦ κληθῇ n , εὐρεθήσεται ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς, ὁ ἐν τῷ χώρῳ n , ἐκ τῆ $\frac{n(n+1)}{2}$ ζητηθήτω γὰρ

ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς τῆ τετάρτου χώρου εἶναι ἔν $n=4$, ὁ δὲ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

$= 10$. ὁ δὲ πυραμικός ἀριθμὸς τοῦ χώρου n εἶναι $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3}$

ὁ δὲ πεμπτοπαγὸς ἀριθμὸς τῆ

χώρου n ὑπάρχει $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

ὁ δὲ ἑκτοπαγὸς $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

ὡς ἔτις ἐφεξῆς.

341. Τῷ δὲ πολυγώνῳ ἀριθμῶν, τῷ ἢ τὴν χῶρον
τῷ ἀριθμῷ ἐμφανήσεται, τύπη

$$\tau\acute{\epsilon} \mu\acute{\iota}\nu \tau\epsilon\tau\gamma\omega\acute{\nu}\nu \frac{1 \cdot 1 + 1}{2} = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$$

$$\tau\acute{\epsilon} \delta\acute{\epsilon} \tau\epsilon\tau\tau\epsilon\gamma\omega\acute{\nu}\nu \frac{1 \cdot 1^2}{2} = 11$$

$$\tau\acute{\epsilon} \delta\acute{\epsilon} \pi\epsilon\pi\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\nu \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2}$$

$$\tau\acute{\epsilon} \delta\acute{\epsilon} \iota\chi\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\nu \frac{1 \cdot (4 \cdot 1 - 2)}{2}$$

$$\tau\acute{\epsilon} \delta\acute{\epsilon} \epsilon\pi\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\nu \frac{1 \cdot (5 \cdot 1 - 3)}{2}$$

$$\tau\acute{\epsilon} \delta\acute{\epsilon} \omicron\pi\tau\alpha\gamma\omega\acute{\nu}\nu \frac{1 \cdot (6 \cdot 1 - 4)}{2}$$

$$\epsilon\acute{\iota}\nu \gamma\acute{\iota}\nu\epsilon\iota \delta\acute{\epsilon} \tau\acute{\epsilon} \pi\omicron\lambda\upsilon\gamma\omega\acute{\nu}\nu = \frac{(\mu - 2) \cdot \nu - (\mu - 4) \cdot \nu}{2}$$

Πλευρὰν μὲν ἔν καλῶμεν τὸν ἀριθμὸν ν , ἢ τὸν
χῶρον τῷ πολυγώνῳ ἀριθμῷ· τὸν δὲ ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα
γωνίας μ , καὶ πλευρὰν ν , ἐμφανήσεται διὰ τοῦ τύπου
$$\frac{(\mu - 2) \cdot \nu - (\mu - 4) \cdot \nu}{2}$$
.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Δακτύλιον ὠήσατό τις βαρύτιμον·
ἐρωτηθεὶς δὲ, πόσαι; ἀριθμοὶς, ἀπεκρίνατο, ὁ γωνίας ἔ-
χων 365 τῷ δωδεκάτῳ χώρῳ ὅσα πατίβαλλον ἐμφανῆσαι
ἀργύριον.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ $\mu = 365$, καὶ $\nu = 12$ · ἄρα
$$\frac{(365 - 2) \cdot 12 - (365 - 4) \cdot 12}{2}$$

2

Τόμ. Β'.

Κ

$$= \frac{(363) \cdot 12 \cdot 12 - (361) \cdot 12}{2} = \frac{52272 - 4332}{2} =$$

$$\frac{47940}{2} = 23970.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ἀριθμὸς δυνάμετος ἐν τῷ ἀριθμῷ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, εἴρῃ διὰ τὸ τύπος τῆς αὐτοῦ πλευρῆς, εἴτ' ἐν τὸν ἐν ᾧ κείναι χωρῶν.

ΛΤΣΙΣ. Ἐςω ἀριθμὸς 91, ἐν ἔσω ὁ αὐτὸς τῶν γωνιῶν· δεῖ δὲ εἴρῃ αὐτὸ τῆς πλευρῆς· εἴτ' δὲ ἐν γί.

101 ἢ πλευρὰ κείνηται ν, ὅρα $\nu = \chi$ · ἐν 91 = $\frac{\chi\chi + \chi}{2}$,

ἐν $\chi\chi + \chi = 182$, ἐν $\chi = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 182} = 13.$

542. Αἱ τῶν βαθμῶν σειραὶ εἰσὶ τὰ τετράγωνα, οἱ κύβου, κτ. τὰ ἀπὸ τῶν φυσικῇ τάξει αὐξάντων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5 κτ. ὅταν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς διὰ τῶν ὁρῶν προὐδου ἀριθμητικῆς διακρίνεται, τὰ συνεχῇ πηλίκας πρόοδον ἀρμονικῇ συγκροτεῖν λέγεται· οἷον $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ κτ.

543. Τέσσαρες ὁροι ἀρμονικῆς ἀναλογίας συνιστῶν λέγονται, ὅταν ἡ ὑπερχὴ, ἡ ὑπερέχει τοῦ πρώτου ὁ δεύτερος, πρὸς τὴν, ἡ ὑπερέχει τῷ τρίτῳ ὁ τέταρτος, λόγῳ ἔχει, ὃν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον· ὅπως 6, 8, 12, 18 ἐν ἀρμονικῇ ἀναλογίᾳ εἶναι λέγονται· ἐν γὰρ 2 (ἢ τῷ 8 ὑπὲρ τὸν 6 ὑπερχὴ) πρὸς 6 (τὴν τῷ 18 ὑπὲρ τὸν 12 ὑπερχὴν) ὡς ὁ 6 (πρῶτος ὁρος) πρὸς τὸν 18 (τέταρτον) εἴτ' ἐν $2:6::6:18$.

544. Ἐὰν δὲ τριῶν ὁρων ὁ μέσος δευτέρου ἐν τρίτῳ χωρῶν ἐπέχειν δύνηται, τὸ τοιοῦτον καλεῖται πρόοδος ἀρμονικῇ· οἷον $\frac{10}{16} : \frac{16}{40}$ · εἴτ' γὰρ $6:24::10:40$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ἁρμονικῶς πρὸς ἀλλήλους λήγεται· ἐπεὶ γὰρ τὸν αὐτὸν ἀναχέοντα περὶ πρῶτον γήσεται $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ · ὃ ἢ μὲν μεταξὺ τῶν δύο πρώτων διαφορῆσιν = $\frac{1}{6}$, ἢ δὲ μεταξὺ τῶν δευτέρων = $\frac{1}{12}$ · εἰ δὲ $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, εἴτ' ἔσσι $3 : 3 :: 20 : 12$ · ὃ γὰρ $3 \times 12 = 3 \times 20$ · ἔστι τὰ κλάσματα ἐν ἁρμονικῇ ὡς ἐν ἀναλογίᾳ.

545. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν τίταρτον ἁρμονικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐῴσωσιν αἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α, β, γ · ἡ δὲ ζητούμενος = ν · ἡμῶν (543) ἔσσι $\beta - \alpha : \nu - \gamma :: \alpha : \nu$ · ἢ ἢν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\nu - \alpha\gamma = \beta\nu - \alpha\nu$, ὃ $\alpha\nu = \beta\nu - \alpha\nu + \alpha\gamma$, ὃ $2\alpha\nu - \beta\nu = \alpha\gamma$, ὃ $\nu = \frac{\alpha\gamma}{2\alpha - \beta}$

τίτιςιν ἡ δὲ τίταρτος ἁρμονικῶς ἀνάλογος ἵσται ἐς τὴν ἡγεμῶνα τῶν πρὸς ἑαυτὴν ἐκ τῆς τῆς ὑπὸ τῷ πρώτῳ ὃ ἡτρίτῳ τῶν ἄρων γινώσκουσιν διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ ἡτῆς πρώτου ὃς λεγόμενος ὃ τῷ δευτέρῳ διαφορᾶς.

Ἐῴσωσιν αἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 10, 15, 40· εἰς ἡμῶν ἔν τῷ τίταρτῳ πολλαπλασιασθήτω ὁ 10 ἐπὶ 40· ὃ δὲ γινώσκουσιν 400 διηγήσθω διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῶν δύο πρώτων, εἴτ' ἔσσι 20, ὃ τῷ δευτέρῳ 15, ταυτὶν ὑπὸ διὰ 3· ἡμῶν $40 \times 20 = 80$.

546. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, τρίτον ἐν ἁρμονικῇ πρὸς ἀλλήλους προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ αὐτὸς τῶν δύο ἐπιλείπει τὸ πρῶτον, αἱ μόνον (ἐπεὶ ὁ αὐτὸς ἐστὶ δεύτερος ὃ τρίτος (544)) ἐν τῷ περὶ πρῶτον τῆς αἰτίας γ' ἀπὸ β'· ἔσσι γὰρ αἱ δύο ἵσταις 10, 15· ἡμῶν ἔσσι ὁ τρίτος $\nu = \frac{\alpha\beta}{2\alpha - \beta} =$

$\frac{150}{20-15} = \frac{150}{5} = 30$ · λέγω δὲ τὰς τρεῖς ἀριθμοὺς
10, 15, 30 εἶναι ἐν ἀρμονικῇ προόδῳ· εἰς ἣ γὰρ 15
— 10 = 5 : 30 — 15 = 15 :: 10 : 30, εἴτ' ἔν 5 :
15 :: 10 : 30 ἄρα :: 10, 15, 30 (543, 544).

547. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δύω ἀριθμοὶ δοθέντων,
μέστω ἀρμονικῶς ἀνάλογον προσευρίθῃ.

ΛΤΣΙΣ. Ἐςωσαν οἱ δοθέντες α, γ· ὁ δὲ ζητούμε-
νος υ· ταγαρεὺν ἔστω (544) υ — α : γ — υ :: α : γ, ἢ
δὲ γυ — αγ = αγ — αυ, ἢ 2αγ = γυ + αυ, ἢ υ =
 $\frac{2αγ}{γ+α}$, τυτίσι ἡμεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν 10,
ἡδὲ 40 μῖστος ἀρμονικῶς ἀνάλογος εὐρίσκεται, εἰν ὁ δι-
ηγινόμενος ὑπὸ τῷ πρώτῳ 10 ἢ τῷ τρίτῳ 40, εἴτ' ἔν :
ἡ800, διαιρεθῇ διὰ τῷ ἀριθμῷ τῶν δοθέντων, εἴ-
·, ἔν διὰ 50· τὸ δὲ πηλίκον 16 δώσει τὸν ζητούμενον·
εἰπεὶ γὰρ 16 — 10 = 6 : 40 — 16 = 24 :: 10 : 40·
ἄρα :: 10, 16, 40 (549, 544).

548. Ποσότητες αἱ ἐφ' ἑτέρας δίχῃ λειψάνῃ μὴ
ἀναγόμεναι μεταβάλλουσιν εἰς σειρὰς ἀπείρους· τοιαύτῃ εἰ-
·πὶ τῶν σεσημειωμένων διαιρέσεων, ὧν ὁ διαιρέτης ἐκ-
·ἔστι πολλαπλῆς τῇ διαιρέτῃ, ἢ αἱ ῥίζαι τῶν ἀτελῶν βε-
·θμῶν· κείδῃ γὰρ εὐρεῖν τὸ πηλίκον τὸ προῖον ἐκ τῆς

σεσημειωμένης διαιρέσεως $\frac{1}{1+υ}$ · εἰν ἔν ἡ διαιρέσις κx-

τὰ τὰς ἐκτείνοντας κλίνας (51, 60) φιλοτεχνήσῃ, εὐρε-
·θήσεται 1 — υ² + υ² — υ² + υ² κτ. εἰν γὰρ διαιρεθῇ 1
·διὰ 1, ἢ τὸ πηλίκον 1 τεθῇ ὡς πρῶτος ὅρος τῷ πηλίκῳ,
·ἢ τὸ γινόμενον 1 x 1 + υ = 1 + υ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ

τῇ διαιρετῇ, ἔστω $1 - 1 - u = -u$. ἐπὶ δὲ αὐτῆς τὴν
κατάλοιπον $-u$ διὰ 1 διαιρετῇ, δεύτερον ἔστω τῇ πη-
λίκῃ πρὸς $-u$, ὅς πολλαπλασιασθῶν ἐπὶ τῇ διαι-
ρετῇ διδῶσι $-u \times 1 + u = -u - u$, ἔστω δὲ
ἐπιμένοντες ἀπὸ τῇ διαιρετῇ, καταλειφθήσεται $-u$
 $+ u + u = u$. ταῦτα δὲ τῇ κατάλοιπῃ διαιρεθέντες αὖ-
τις διὰ 1, πρὸς γίνεται τρίτον ὅς τῇ πηλίκῃ $+ u$, ἢ ἔ-
τις ἐφεξῆς, καὶ δὴ τὸ ἄνωμα τῷ πρόξενῳ καὶ ἐπὶ τῇ
δείκνυσσι.

διαιρετῆς	διαιρετῆς	πηλίκη
$1 + u$	1	$1 - u + u^2 - u^3 = u^3$ πτ.
$- 1 - u$		
	$- u$	
$- u$		
$+ u + u^2$		
	$+ u^2$	
$- u^2 - u^3$		
	$- u^3$	
$+ u^3 + u^4$		
	$+ u^4$	
$- u^4 - u^5$		
	$- u^5$	
		$+ u^5 + u^6$
		$+ u^6$
		$- u^6 - u^7$
		$- u^7$ πτ.

549. Διὰ τῆς αὐτῆς Μεθόδου ἐξεργάζεται $\frac{\alpha}{\beta + u}$

$= \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha u}{\beta^2} + \frac{\alpha u^2}{\beta^3} - \frac{\alpha u^3}{\beta^4} + \frac{\alpha u^4}{\beta^5}$ πτ., ὃ θέλων γί-
νεται ἐπιστήσας τῷ τῷ πρόξενῳ ἀντήματι.

διαρέτης		διαιρετική		τηλίαν	
$\beta + \nu$		α		$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\nu}{\beta^2} + \frac{\alpha\nu^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\nu^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\nu^4}{\beta^5}$	κτ
				$-\alpha - \frac{\alpha\nu}{\beta}$	
				$-\frac{\alpha\nu}{\beta}$	
				$+\frac{\alpha\nu}{\beta} + \frac{\alpha\nu^2}{\beta^2}$	
				$+\frac{\alpha\nu^2}{\beta^2}$	
				$-\frac{\alpha\nu^2}{\beta^2} - \frac{\alpha\nu^3}{\beta^3}$	
				$-\frac{\alpha\nu^3}{\beta^3}$	
				$+\frac{\alpha\nu^3}{\beta^3} + \frac{\alpha\nu^4}{\beta^4}$	
				$+\frac{\alpha\nu^4}{\beta^4}$	
				$-\frac{\alpha\nu^4}{\beta^4} - \frac{\alpha\nu^5}{\beta^5}$	
				$-\frac{\alpha\nu^5}{\beta^5}$	

550. Ὡσαύτως τὸ πλάσμα $\frac{\alpha\alpha}{\nu+\beta}$ εἰς τὴν σειράν
 ἀνάγεται $\frac{\alpha\alpha}{\nu} - \frac{\alpha\alpha\beta}{\nu^2} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\nu^3}$ κτ., ἢ δῆλον ἐκ τῆ
 σχήματος.

$$\begin{array}{c}
 \text{διαμένους} \quad \left| \begin{array}{c} \text{διαμένους} \\ \alpha\alpha \\ -\alpha\alpha - \frac{\alpha\alpha\beta}{\nu} \end{array} \right| \quad \text{αυλίου} \\
 : + \beta \quad \left| \begin{array}{c} \frac{\alpha\alpha}{\nu} - \frac{\alpha\alpha\beta}{\nu^2} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\nu^3} \text{ κτ.} \\ - \frac{\alpha\alpha\beta}{\nu} \\ + \frac{\alpha\alpha\beta}{\nu} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\nu^2} \\ + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\nu^3} \\ - \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\nu^2} + \frac{\alpha\alpha\beta^2}{\nu^3} \\ + \frac{\alpha\alpha\beta^2}{\nu^3} \text{ κτ. ἐκ' α.} \end{array} \right|
 \end{array}$$

πειρῶν.

551. Ἀλλὰ καὶ $\sqrt{\alpha\alpha - \nu\nu}$ ἐκ' ἀπειρων σειρῶν ὡς
 λίσται τὴν $\alpha - \frac{\nu\nu}{2\alpha} - \frac{\nu^2}{8\alpha^3} - \frac{\nu^3}{16\alpha^5} - \frac{5\nu^4}{128\alpha^7} -$
 $\frac{7\nu^5}{256\alpha^9} - \frac{12\nu^6}{1024\alpha^{11}}$ κτ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τετράγωνος ῥίζα
 τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha\alpha$ ἐστὶν α , εἰς ἀφαιρέσειν $\alpha\alpha$ ἀπὸ τῆς πο-
 σότητος $\alpha\alpha - \nu\nu$, καταλείπεται $-\nu\nu$, ἔπειρ διὰ 2α
 διαιρηθέντος προέισι δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης ὁ $-\frac{\nu\nu}{2\alpha}$. ἂν
 εἰς τὴν τετράγωνον $\frac{\nu^4}{4\alpha^2}$ συν-τῶ γνημένῳ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ
 $-\frac{\nu\nu}{2\alpha}$ καὶ 2α , εἴτ' ἔνσιν τῶ $-\nu\nu$, ἀφαιρέσειν ἀπὸ τοῦ πρώ-

τῇ κατελλοίπῃ — υῦ κατελλοίπει $\frac{\nu^6}{4\alpha^3}$, ὅπερ διὰ διπλαζ
 τῆς ἄρτι εὐρημένης ῥίζης διαιρεθὲν, εἴτ' ἔν διὰ 2x —
 $\frac{\nu}{\alpha}$, ἀποδίδωσι τὴν τῆς ῥίζης τρίτον ὅρῳ — $\frac{\nu^4}{8\alpha^2}$, ἢ φ' ἢ ε'
 τῇ 2x — $\frac{\nu}{\alpha}$ τὸ γινόμενον $(-\frac{\nu^4}{4\alpha^2} = -\frac{\nu^4}{8\alpha^2})$ σὺν τῷ τε.
 τραγῶν $\frac{\nu^3}{64\alpha^3}$ εἰς ἀφαιρέσῃ ἀπὸ τῇ δευτέρῃ κατελλοίπῃ
 — $\frac{\nu^4}{4\alpha^2}$, κατελλοίπει — $\frac{\nu^4}{8\alpha^2}$ — $\frac{\nu^3}{64\alpha^3}$ τῆς δὲ πρώ.
 ξειως ὡσαύτως ἐπανειλημμένης, τῶν ἐλτεθέντων κατό.
 νων περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκριβῶς τη.
 ρυμένων (126), πράσι εἰ οἱ λαμβάνονται, ὡς ἰδοὺν ἔξε.
 ἐν ἐν τῷ περὶθεμένῳ σχήματι, ὃ ῥῆσα πᾶς, ὅς ἂν τὴς
 εἰρημένους κατόνας διὰ μνήμης ἔχῃ, συνήσι.

Τετράγωνον αα — υῦ — αα	$ \begin{array}{r} \overset{\text{ῥ ῥ ῥ α}}{\alpha - \frac{\nu}{2x} - \frac{\nu^4}{8\alpha^2} - \frac{\nu^6}{10\alpha^3} - \frac{5\nu^8}{128\alpha^4} -} \\ \frac{7\nu^{10}}{836\alpha^5} - \frac{21\nu^{12}}{1024\alpha^6} \end{array} $
— υῦ + υῦ — $\frac{\nu^4}{4\alpha\alpha}$	
— $\frac{\nu^4}{4\alpha\alpha}$	
+ $\frac{\nu^4}{4\alpha\alpha} - \frac{\nu^6}{8\alpha^3} - \frac{\nu^8}{64\alpha^4}$	

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 \frac{\iota^4}{8x^4} & \frac{\iota^5}{64x^4} \\
 + \frac{\iota^4}{8x^4} & \frac{\iota^5}{16x^4} & \frac{\iota^6}{64x^4} & \frac{\iota^7}{256x^4} \\
 \hline
 & \frac{5\iota^5}{64x^4} & \frac{\iota^6}{64x^4} & \frac{\iota^7}{256x^4} \\
 \hline
 \frac{5\iota^5}{64x^4} & \frac{4\iota^6}{128x^4} & \frac{5\iota^6}{512x^4} & \frac{5\iota^7}{1024x^4} & \frac{85\iota^8}{16384x^4} \\
 \hline
 & \frac{7\iota^6}{128x^4} & \frac{7\iota^7}{512x^4} & \frac{5\iota^8}{1024x^4} & \frac{85\iota^9}{16384x^4} \\
 + \frac{7\iota^6}{128x^4} & \frac{7\iota^7}{512x^4} & \frac{7\iota^8}{1024x^4} & \frac{7\iota^9}{3584x^4} & \frac{49\iota^{10}}{65536x^4} \\
 \hline
 \frac{7\iota^6}{128x^4} & \frac{7\iota^7}{512x^4} & \frac{7\iota^8}{1024x^4} & \frac{7\iota^9}{3584x^4} & \frac{49\iota^{10}}{65536x^4} \\
 \hline
 \frac{512\iota^8}{16384x^4} & \frac{1024\iota^9}{16384x^4} & \frac{16384\iota^{10}}{16384x^4} & \frac{16384\iota^{11}}{16384x^4} & \frac{65536\iota^{12}}{16384x^4}
 \end{array}
 \end{array}$$

552. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ πράξεων, εἰς ὅρας ἡ ἐκτεταμένη ταύτα ἐπιτηδεύει, αἱ ἐν μνήμῃ φέρων τῇ εὐρημένη (128), ἀμέλειται τὸν διπλασιασμὸν τῆς πρὸ μικρῆ εὐρημένης ῥίζης, ἡ τὴν διὰ τῷ πρώτῳ ὄρει αὐτῆς διπλασιασμοῦ διαιρέσει τῷ πρώτῳ ὄρει τῷ καταλειπόμενῳ, ἡ τὸν τῷ τελευτῇ (ὃ δὲ ὅρος ῥιζικὸς τίθεται) ἐπὶ τὸ διπλὸν τῆς προεξημένης ῥίζης πολλαπλασιασμὸν, ἡ τὴν τῷ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ γνημένῳ πρίσσει τῷ ἀπὸ τῆ εὐρημένης ταύτης ῥιζικῷ ὄρει τετραγώνῳ, ἡ τῷ ὅλῳ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῆ καταλειπόμενης ἀφαίρειται· ταῦτα φησὶ εἰς ὅρας μετῶν, εὐρήσει ὡς αὐτὸς ὅτι $\sqrt{ax+uy} = x +$

$$\begin{aligned}
 & \frac{uy}{2x} - \frac{\iota^4}{8x^3} + \frac{\iota^5}{16x^3} - \frac{5\iota^6}{128x^3} \text{ κτ., καὶ μὲν ἡ } \sqrt{ax+uy} = \\
 & = x + \frac{\beta u}{2x} - \frac{\iota u}{2x} + \frac{\beta \beta u}{8x^3} \text{ κτ.}
 \end{aligned}$$

353. Ἡ δὲ δὴ τῶν τῶν ἐπιδηγμάτων δὴλη, εἰς ἑπὶν εἰρησίου ἐν ἀρχῇ ἰσχυατοῖς ὅροι σερῖς ἡ. τισὶν διὰ τῶν ἐπιδοῶν πρῆξιων, τὴ τῆς πρῆδου κπῖ. νος, κπῖ ὅν χωρεῖ ἡ σερῖς, γνωδέντκ, ἀπόως τὴ λη. πῦ τῆν σερῖν συνεχίται δυάμειθ· διὰ μέντοι πρῶτ· εὐρεῖν ἢ δῖω ἢ τρεῖς ὅρους, τέσσαρες δὲ ἢ πάντε, ἰνα δὴλη γίνηται ἡ τῷ κπῖνος μαίμη πρῶτασις· ὅτως ἡ τῆς ποσότητος $\sqrt{aa}$ — συ σερῖς μικρὴ σκεψαμένους ἴση εἰς τῇ ποσότητι α συν πρῆδω Γεωμετρικῇ, πρῶτον μὲν ὅρου $\frac{uv}{a}$, κπῖν δὲ πηλίκην $\frac{uv}{aa}$ ἰχύση, ἡς ἑκαστκ ὅρος πῖ. πολλαπλασιάζει ἐφ' ἑκαστκ ἀντίστροφον ὅρον τῆς σερῖς — $\frac{1}{2}$, — $\frac{1}{4}$, — $\frac{1}{8}$, — $\frac{1}{16}$, — $\frac{1}{32}$ κτ. τῶν δὲ ὅρων πρῶτης τῆς σερῖς κπῖν, κπῖ ὅν πρῶσιον, ὅτκ, — $\frac{1}{2}$, — $\frac{1.1}{2.4}$, — $\frac{1.1.3}{2.4.6}$, — $\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}$, — $\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$ κτ. εἰτ' ὅν οἱ μὲν ἀριθμηταὶ εἰσι σερῖς φυσικὴ πῖξυσα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν· οἱ δὲ παρσημασάις σερῖς φυσικὴ τῶν ἀρτίων αὔξυσα, ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, ὡς ἐν ἑκάσῳ ὁρᾶται κλάσματι, ἡ εἰς ἀπλυσέρην ἑκθε. σιν ἀναγομένη ἑκάστκ κλάσματος.

Περὶ συλψεως σειρῶν.

354. Σερῖαν συνάπτειν, ζητεῖν εἰς τὸ ἀθροισμκ, ἡ τῆν δυάμην, τῷ πάντων τῶν ὅρων συμπληρώματα.

355. Σερῖα μὲν πεπερασμένη καλεῖται, ἡς ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὠρισμένος ὑπάρχει· ἀπειρος δὲ, ἡς τὸς ὅρους προσδιορίσαι ἀμήχανον.

356. Σειρὰ μὲν ἀποκλίνοσα ἴση, ἢ αἰ ὁ-
ρε κατὰ τὸ συνεχὲς αἵξεσθ' ἢς μόνον αἰ μόνονται,
ἰσότη καλεῖται συγκλίνοσα.

357. Δῶλον ὧν, ὡς εἴπερ σειρὰ ἀπειρος ὤνεται
ἀποκλίνῃ, τὸ ταύτης ἀφρασμα ἴσως πεπερασμένως τι-
μιλοφθῆναι μὴ ἴσως, συγκλίσεως δὲ, τὸ ἀφρασμα αἰ-
τῆς πεπερασμένως ἴσως, ὡς εἰ τὰς ἐφεξῆς εἰσόμεθα.

358. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τὴ συνίσταται τὰς σειρὰς μέ-
θοδος πολυχιδής τις ἐστὶ, ἢ μέρη τῆς ἀναλυτικῆς τῆς
κρίσεως ἡμῶν ἀλλ' ὧν ἀρκίσει, εἰ ἀπὸδεῖται τὴν τῶ
τὰς μέλλουσι εἰ χρήσαι σειρὰς συνίσταται μέθωδ' ἢ γὰρ
περὶ τῆς καθαρῆς Μαθηματικῆς μίσης ἡμῶν διαλαβεῖν
πρόκειται.

359. Εὐρεθέντος ἀπαξ τῷ τύτῳ, κατ' ὧν συνίστα-
ται πάντες αἱ ὄροι Γεωμετρικῆς προόδου φθίνουσιν ἐκ' ἀ-
πειρων, συναφθῆσκαται πᾶσαι αἱ σειραὶ, αἱ ἐφ' ἑτέρως,
ὧν ἂν αἱ ὄροι Γεωμετρικὴν σειρὰν φθίνουσιν παρὰ τῶν,
ἀναλίσκονται.

$$\text{Ἐς ὧ γὰρ} \div \frac{\delta}{\beta}, \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \frac{\delta}{\beta\pi^4}, \frac{\delta}{\beta\pi^5}, \dots$$

$\frac{\delta}{\beta\pi^n}$, πρόδος ἐκ' ἀπειρων φθίνουσα, ἰὰν ἢ $\pi > 1$. ἀνα-

εραφίσα δὲ γνησεται αἵξεσθ' $\div \frac{\delta}{\beta\pi^n} \dots \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \frac{\delta}{\beta\pi^2},$

$\frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta}$. ἴσως δὲ τῷ Γεωμετρικῇ προόδῳ

αἵξεσθ' συνίσταται εἰς ὧν τύπος ὁ $\pi = \frac{\omega\pi - \alpha}{\pi - 1}$ (280).

ὧν ἢ ἐφαρμοζομένης τῆς πραγμαμένης σειρᾶς ἴσως $\omega =$

$$\frac{\delta}{\beta}, \text{ ἢ } \alpha = \frac{\delta}{\beta\pi} \cdot \text{ ἄρα } \kappa = \frac{\delta\pi}{\beta - \beta\pi}, \text{ τὸ δὲ ἀπείριστον}$$

ἀλογυμένον, εἴτ' ἐν τῷ $\frac{\delta}{\beta\pi}$, ἢ τῆς ἀναγωγῆς γνησί.

της, εὐρίσκεται $\kappa = \frac{\delta\pi}{\beta\pi - \beta}$, τύπος γενικὸς τοῦ πᾶ.

στην εἰς ἀπειρὸν φθίνουσαν συνίστην σειρὰν κλασμάτων, ὧν ἀριθμητικὴ μὲν τὸ αὐτὸ εἶναι πρῶτον, οἱ δὲ παρνομαστὶ πρόδωτον συνίστην Γεωμετρικὴν, ταύτης ἐπὶ ταύτων ἡδὲν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῷ πρῶτῷ τῷ δίκην ἀριθμητῇ ἡλυσανόμενον, ἢ τῷ πηλίκῳ τῆς τῶν παρνομαστῶν προόδου, διαιρεθῇ διὰ τῷ δευτέρῳ τῆς Γεωμετρικῆς προόδου ἡδὲν ἐλαττωθέντος τῷ πρῶτῳ ὄρῳ, τὸ ἐντεῦθεν προεὖν ἡπηλίκον ἐμφανί τῆς σειρᾶς τὸ κεφάλαιον.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ. Ἰνα δὲ τῷ τύπῳ τὴν ἀλήθειαν μερικώτερον ἰδῶμεν ἔστω εὐρεῖν τὴν δύσιν τῷ $\frac{1}{2}$ κλάσματι· ἔστι ἐν $\frac{1}{2} = 0,3333$ κτ. (Ἀριθ. 237)· ἵνα τὸν μεταχρηματισμὸν τούτου ἀκριβέστερον ποιήσωμεν, ἐκείνης τις προαγαγεῖν τὴν προσέγγισιν εἰς ἀπειρὸν· εἴπερ δὲ $0,3333$ κτ. $= \tau_1^2 + \tau_1^2\epsilon + \tau_1^2\epsilon^2 + \tau_1^2\epsilon^3$ κτ. (Ἀριθ. 224)· ἔστι πάντως $\frac{1}{2} = \tau_1^2 + \tau_1^2\epsilon + \tau_1^2\epsilon^2 + \tau_1^2\epsilon^3 + \dots + \frac{\tau_1^3}{10^m}$ · ἀντιστρέφω γὰρ ἡ σειρὰ ἵνα γένηται

αἰξουσα, ἢ δὴ ἔστι $\frac{3}{10^m} \dots \tau_1^2\epsilon^m, \tau_1^2\epsilon^{m+1}, \tau_1^2\epsilon^{m+2}, \tau_1^2\epsilon^{m+3}$

$$\text{ταύτης δὲ τὸ κεφάλαιον ἔστι } \kappa = \frac{\delta\pi}{\beta\pi - \beta} = \frac{3 \cdot 10}{100 - 10} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

560. Κεῖθω δὴ συνάψαι σειρὰν κλασμάτων, ὧν

α μὲν ἀριθμηταὶ συνεχῶς ἐξίστην Ἀριθμητικὴ, αὐτὴ δὲ
 γεωμετρικὴ Γεωμετρικὴ, τῶν ἴσων $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha+\pi\delta}{\beta\pi^2}$.

$\frac{\alpha+\pi\delta}{\beta\pi^2}$ κτ., ἥτις ἀναλίσκονται εἰς ταύτην $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta\pi} +$

$\frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2} + \frac{\delta}{\beta\pi^2} + \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2} + \frac{\delta}{\beta\pi^2} + \frac{\delta}{\beta\pi^2} +$

$\frac{\delta}{\beta\pi^2}$ κτ., ἀφ' ἧς ἀναγλύονται αἱ ἐφεξῆς σειραὶ, ἐξίστην

αἱ πᾶσαι ἔσται Γεωμετρικαί

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta\pi}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha}{\beta\pi^3} \text{ κτ., ἥς τὸ κεφ.} = \frac{\alpha\pi}{\beta\pi - \beta} \quad (39)$$

$$\therefore \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \text{ κτ., ἥς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi - \beta}$$

$$\therefore \dots \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \text{ κτ., ἥς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi^2 - \beta\pi}$$

$$\therefore \dots \dots \dots \frac{\delta}{\beta\pi^3} \text{ κτ., ἥς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi^3 - \beta\pi^2}$$

ἔπει δὲ τὰ εὐρεθέντα κεφάλαια (πλὴν τῆς πρώτης) συ-
 νησι τὴν Γεωμετρικὴν πρόδω $\therefore \frac{\delta}{\beta\pi - \beta}, \frac{\delta}{\beta\pi^2 - \beta\pi}$

$$\frac{\delta}{\beta\pi^3 - \beta\pi^2} \text{ κτ., ἥς τὸ κεφάλαιον ἴσον} = \frac{\delta\pi}{\beta\pi^2 - \pi\beta\pi + \beta}$$

προσθέντος αὐτῷ τοῦ τῆς πρώτης σειράς κεφαλαιου

$$\frac{\alpha\pi}{\beta\pi - \beta} \text{ ἀπολαμβάνεται} \frac{\delta\pi}{\beta\pi^2 - \pi\beta\pi + \beta} + \frac{\alpha\pi}{\beta\pi - \beta} =$$

$$\frac{\alpha\pi\pi - \alpha\pi + \delta\pi}{\beta\pi\pi - \pi\beta\pi + \beta} \text{ κεφάλαιον ἀκρωτῶν τῆς σειράς, ἢ τὸ}$$

αὐτὸ γινώσκῃ ὅτι τὸ τε τῶν ἀριθμῶν ἑκάστη τὴν σφαιρὰν τῶν κλισμάτων, ὡς αἱ μὲν ἀριθμῶνται ἀριθμητικῶς, αἱ δὲ περιημῶν γινώσκονται, συνίσσιν ἐκείναις.

561. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ ἡ σφαιρὰ σφαιρὰ μὴ ἴσῃ ἀνάγειται ἐπὶ κελύφῃσι περικυκλῶνται, περιεστῇ περὶ τῆς σφαιρᾶς συγκλῖναι αὐτὴν ἀπεργάζεσθαι τῇ κελύφῃ γὰρ αἰεὶ τῶν προτέρων ὅρων συνέκταται τὸς ἄλλας περιημῶν δυνάμεις ἄτερ ἐκείνην διαπτῶματι· ὅτι

$$\gammaὰρ φέρεται \sqrt{ax + u} = a + \frac{u}{2a} - \frac{u^2}{8a^3} + \frac{u^3}{16a^5}$$

κτ. ὥστε ἡ πρώτη ὑ εὐλόγων ἢ τῆς α. τῶν τε ταχύνῃ ἢ σφαιρὰ συγκλίνει· βραχύνεται γὰρ αἱ αἱ ἀριθμῶνται ὡς πρὸς τὸς αὐτῶν περιημῶν.

Τίθειται γὰρ $a = 10$, ἢ $u = 1$ · ὅτι δὲ $\sqrt{ax + u} = \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}$ · σφαιρὰ ἔν τὸν τέταρτον ὅρον ὑπάρχον βραχύνεται· ἐξικνεῖται δὲ τὸς πρώτους τρεῖς ὅρους μόνον πρὸς παράστασιν τῆς τῇ α. λήγει προπεγγιζέσθαι ῥίζης $10 + \frac{1}{1000}$.

562. Ἐὰν ληφθῶσιν αἱ φυσικαὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κτ. αἱ μὲν αὐτῶν τετραγώνων ἴσονται 1, 4, 9, 16, 25 κτ. αἱ δὲ κύβων 1, 8, 27, 64, 125 κτ. αἱ δὲ τέταρτοι βαθμοὶ 1, 16, 81, 256, 625 κτ., ἢ ἕως ὡσαύτως· αὗται ἔν καλῶνται σφαιρὰ ἀπειρῶ τῶν βλημῶν τῶν ἀπὸ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἵνα δὲ τὰς τοιαύτας σφαιρὰς συνάπτειν μᾶλλον, χρῆσόμεθα συλλογισμῷ ἐφ' ὃν τοιαύταις.

Ἐπειπερ αἱ ῥίζαι τούτων τῶν βαθμῶν, φυσικαὶ ἀριθμοὶ ἔσονται, μνησθὲν αἱ εἰς αὐτὰς ἀλλήλων δισηρόχασιν, ἔν ληφθῶσιν ὡσαύτως αὐτῶν, ἢ κληθῶσι λ, μ, ν, ξ,

π, ρ ἴσαι ρ = π + 1, ε π = ξ + 1, ε ξ = ν + 1,
ε μ = λ + 1· εἰς τὸ αὐτὸ αἱ ἐξισώσεις ὑπολόγισι εἰσε-
χῶς ἐπὶ βαθμύς, προκύπτει αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\begin{array}{l|l} \rho^1 = \pi^0 + 2\pi + 1 & \rho^0 = \pi^0 + 3\pi^1 + 3\pi + 1 \\ \pi^1 = \xi^0 + 2\xi + 1 & \pi^0 = \xi^0 + 3\xi^1 + 3\xi + 1 \\ \xi^1 = \nu^0 + 2\nu + 1 & \xi^0 = \nu^0 + 3\nu^1 + 3\nu + 1 \\ \nu^1 = \mu^0 + 2\mu + 1 & \nu^0 = \mu^0 + 3\mu^1 + 3\mu + 1 \\ \mu^1 = \lambda^0 + 2\lambda + 1 & \mu^0 = \lambda^0 + 3\lambda^1 + 3\lambda + 1 \end{array}$$

$$\rho^4 = \pi^4 + 4\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi + 1$$

$$\pi^4 = \xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi + 1$$

$$\xi^4 = \nu^4 + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1$$

$$\nu^4 = \mu^4 + 4\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu + 1$$

$$\mu^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

Εἰς τὰς πρώτας ἐξισώσεις ἐκίεν τῶν πρώτων συ-
μπτῶν ἀντικεινὰς αὐτῶν, ἐντὶ μὲν π⁰ ἡ αὐτὴ δύναμις,
ἐντὶ δὲ ξ⁰ ἡ ἰδίᾳ αὐτῇ δύναμις, εἰ ὅτως ἐξῆς ὥς τῆς
τῷ λ⁰ δυνάμει· ὑπὸν ὅξουν

$$\begin{array}{l|l} \rho^0 = + 2\pi + 1 & \rho^3 = + 3\pi^4 + 3\pi + 1 \\ + 2\xi + 1 & + 3\xi^1 + 3\xi + 1 \\ + 2\nu + 1 & + 3\nu^1 + 3\nu + 1 \\ + 2\mu + 1 & + 3\mu^1 + 3\mu + 1 \\ \lambda^0 + 2\lambda + 1 & \lambda^3 + 3\lambda^1 + 3\lambda + 1 \end{array}$$

$$\rho^4 = + 4\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi + 1$$

$$+ 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi + 1$$

$$+ 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1$$

$$+ 4\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu + 1$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

563. Εἰς δὲ τῶνδε τῶν ἐξισώσεων ἀπαράγεται
τῶνδε τὰ θεωρήματα, εἰς δὲ πολλὰ φασικὰ ἀποδείξει.

α. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἔχοντος τετραγώνου ρ' ἴσος ἐστὶ ἐπὶ τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετραγώνου λ', συνάμα τῷ διπλῷ εἰς ἄθροισματι ἀπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρων, εἴτ' ὦν + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15, καὶ ἐστὶ σὺν τῷ ἀριθμῷ τῶν πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρων, εἴτ' ὦν + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 ἕως τε γὰρ φυσικῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5· ἔστι ὦν ὁ ἀπὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου τετραγώνου $25 = 4 + 4 + 6 + 8 + 1 + 1 + 1 = 25$ · ἕως τε αὖτις φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6· ἔστι ἴσος τὸ ἀπὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου τετραγώνου $36 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36$ κτ.

β. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου κύβου ρ' ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὄρου κύβου λ', συνάμα τῷ τριπλῷ ἄθροισματι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ἀπάντων τῶν ὄρων τῶν πρὸ τοῦ ἔχοντος, καὶ τῷ τριπλῷ ἄθροισματι ἀπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρων, καὶ ἐστὶ σὺν τόσαις μονάσιν, ἔστι εἰσὶν οἱ πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου· ἕως γὰρ φυσικῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6, 7· δὲλην γὰρ ἐστὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου κύβος $7^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 + 1 + 1$, εἴτ' ὦν $343 = 64 + 48 + 75 + 108 + 12 + 15 + 18 + 3$.

γ. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου τέταρτος βαθμὸς ρ' ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὄρου τέταρτῳ βαθμῷ λ' συνάμα τῷ τετραπλῷ κεφαλαιῷ τῶν κύβων τῶν ἀπὸ ἀπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρων, καὶ τῷ ἑξαπλῷ κεφαλαιῷ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὄρων, καὶ τῷ τριπλῷ κεφαλαιῷ τῶν πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρων, καὶ τοσάσις μονάσιν, ἔστι εἰσὶν οἱ πρὸ τοῦ ἔχοντος ὄρου.

Τὰ αὐτὰ δὲ καὶ περὶ τῶν ἄλλων δυάμεων ὡσαύτως εὐρίσκεται, καὶ ἀνάγκητικὸς ποσὸς ἐστὶ ῥᾶτα ἐφαρμύζεται.

564. Ἐὰν ἔσῃ ἡ μὲν πρώτη ὄρεσις ἀληθὴς α, ἡ δὲ ἔχουσα ω, τὸ δὲ ἀπέναντον τῷ ὄρει κεφάλαιον α, ὃ μὲν ἀρῆμὸς τῷ πρὸ τοῦ ἔχουσι ὄρει ἔσται ω — α, τὸ δὲ κεφάλαιον τῷ τετραγώνῳ τῷ ἐφ' ἀπέναντον τῷ ὄρει κ', τὸ δὲ κεφάλαιον τῷ κύβῳ κ'. ἢ τὸ μὲν κεφάλαιον ἀπέναντον τῷ πλὴν τοῦ ἔχουσι ὄρει ἔσται = α — ω, τὸ δὲ κεφάλαιον τῷ τετραγώνῳ τῷ ἐπὶ τῷ αὐτῷ ὄρει = α' — ω'. τὸ δὲ κεφάλαιον τῷ κύβῳ τῷ ἐπὶ τῷ αὐτῷ ὄρει ἔσται = κ' — ω'. καὶ τῷ μὲν πρώτῳ θεωρήματι τὸ συμβολικὸν ᾗμα ἐκτελεῖσται ὅτω · ω' = α' + α — αω + ω — α, εἴτ' ὅν ω' = α' — α + αα — αω' τῷ δὲ δευτέρῳ ὅτω · ω' = α' + αα' — αω' + αα — αω + ω — α, τῷ τρίτῳ, ω' = α' — α + αα' — αω' + αα — αω' τῷ τέλει δὲ τῷ τρίτῳ · ω' = α' + 4α' — 4α' + 6α' + 6α' + 4α — 4ω + ω — α, ὃ ἔστιν, ω' = α' — α + 4α' — 4α' + 6α' — 6α' + 4α — αω πτλ.

Ἐκ μὲν ὅν τῷ πρώτῳ τύπῳ εὐρίσκειται α = $\frac{1}{2}$ ω' + $\frac{1}{2}$ ω — $\frac{1}{2}$ α' + $\frac{1}{2}$ α, ἣς διωρίσκει ἀντιστασεως ἐν τῷ δευτέρῳ τύπῳ, γίνεται ω' = α' + αα' — $\frac{1}{2}$ ω' — $\frac{1}{2}$ ω — $\frac{1}{2}$ α' + $\frac{1}{2}$ α. ὅθεν προέρχεται α' = $\frac{1}{2}$ ω' + $\frac{1}{2}$ ω + $\frac{1}{2}$ α — $\frac{1}{2}$ α' + $\frac{1}{2}$ α' — $\frac{1}{2}$ α. εἰς δὲ αὐτὴν ἡ δύναμις ἀντιστασεως ἐν τῷ τρίτῳ τύπῳ, εὐρίσκειται ἐντεῖθεν α' = $\frac{1}{2}$ ω' + $\frac{1}{2}$ ω + $\frac{1}{2}$ α' — $\frac{1}{2}$ α' + $\frac{1}{2}$ α' — $\frac{1}{2}$ α'. Ταῦτα δὲ τύποι εὐρίσκειται δύνανται ἢ περὶ καθυπερτέρων βαθμῶν ἔστω ὅν α = 4, ἢ ω = 10, ἢ ζητηθῶτω τὸ κεφάλαιον τῷ τετραγώνῳ τῷ ἐπὶ τῆς φυσικῆς σειράς 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. ἐκὼν ἔσται α' = $\frac{1}{2}$ 10' + $\frac{1}{2}$ 10' + $\frac{1}{2}$ 10 — $\frac{1}{2}$ 4' + $\frac{1}{2}$ 4' — $\frac{1}{2}$ 4 = $\frac{1}{2}$ 1000 + $\frac{1}{2}$ 100 + $\frac{1}{2}$ 10 — $\frac{1}{2}$ 64 + $\frac{1}{2}$ 16 — $\frac{1}{2}$ 4 = '9' + '3' + '2' — '8' + '4' — '2' = '3' + '1' + '2' =

Τόμ. Β.

L

$312 + 58 + 1 = 371$, ὃ δὲ εὐρίσκεται ἢ ἐκ τῆς
πάντες αἱ ἀριθμοὶ τετραγωνικοὶ, ἢ ἑλλήλας ἐπισυνα-
φῶσιν αἱ τετραγώνου· τὰ αὐτὰ δὲ φανήσεται καὶ ἄλλῃ
σειρᾷ φυσικῶν ἀριθμῶν λεγόμενῃ, ἢ δὴ ἢ ἐκ τῆς τρίτης περι-
εφευκτοῦ τύπου.

363. Ἐὰν δὲ ὁ πρῶτος τῆς σειρᾶς ὅρος ἦ ο ἢ 1,
γινώσκονται $k = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$ · καὶ $k^2 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 +$
 $\frac{1}{4}\omega^2$, ἢ $k^3 = \frac{1}{8}\omega^6 + \frac{3}{8}\omega^5 + \frac{3}{8}\omega^4$.

366. Ἐὰν δὲ ἀπειρος ἦ ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀρι-
θμῶν, ἴσται δὴ καὶ ὁ ἔχων αὐτῆς ὅρος = ∞, εἴτις ἀ-
πὸ τοῦ ὅτι ἀντικατασταθέντος ἐν τῷ τύπῳ τῷ τῶν τετραγώνων
κεφάλαιον, προκίψει $k^2 = \frac{1}{4}\infty^4 + \frac{1}{2}\infty^3 + \frac{1}{4}\infty^2 = \frac{1}{4}\infty^4$
 $+ \frac{1}{2}\infty^3 - \frac{1}{4}\infty^2$ · τετέσις $k^2 = \frac{1}{4}\infty^4$ διὰ τὸ εἶναι πάντες
τὺς ἄλλους ὅρους ἀπειροῦς τῷ $\frac{1}{4}\infty^4$ · τετέσις $k^2 = \frac{1}{4}\infty^4$
 $\propto \infty^4$ · ὁ ἴσται, ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ'
ἡ ἀπείρων τῶν ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐκ' ἀπειρῶν προϊόντων α.
ἡ αριθμῶν ἴσων ἐστὶ τριτημορίῳ τῷ γινόμενῳ ἐκ τῆς ἀπὸ τοῦ
ἡ ἔχοντος ὅρου τετραγώνου ἢ τῆς τῶν ὅρων ἀριθμῶν.

367. Ὡσαύτως εὐρίσκεται τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων
τῶν ἀφ' ἀριθμῶν, ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐκ' ἀπειρῶν προϊόντων,
τεταρτημορίον ἐν τῷ γινόμενῳ ἐκ τῆς ἀπὸ τῆς ἔχοντος ὅρου
κύβου ἢ τῆς τῶν ὅρων ἀριθμῶν. Ἀντικατασταθέντος γὰρ τὸ
∞ ἀπὸ τοῦ ὅτι τύπος τρέπεται ἐπὶ τόνδε $k^3 = \frac{1}{8}\infty^6$ · καὶ
ἐν γένει ἡ τὸ κεφάλαιον τῶν βῆθμῶν, οἷς δείκτης τίτι.
ἡ ρασιμὸς ὑπάρχει μ, τῶν ἐξ ἀριθμῶν φυσικῇ σειρᾷ ἐκ'
ἡ ἀπειρῶν χωρέντων ἴσων ἐστὶ τῷ $\frac{1}{\mu+1}$ τῷ γινόμενῳ ἐκ τῆς
ἡ βῆθμῆς ∞^μ τῆς ἀπὸ τῆς ἔχοντος ὅρου ἢ τῆς τῶν ὅρων ἀρι-
θμῶν ∞, εἴτ' ἔν $k^\mu = \frac{1}{\mu+1} \infty^{\mu+1} = \frac{\infty^{\mu+1}}{\mu+1}$

368. Τὰτι δὲ ἐ ταῖς ὁμοειδέμεν τῶ ρίζῶ τῶ ἐν φυσικῇ σειρᾷ εἴτ' ἀπειρῶ προήντων ἀριθμῶν ἐφαρμίζεται· ἡ γὰρ ζητοῦται τῶν ρίζῶν αἱ τετραγωνικαί, ἔστω $\mu = \frac{1}{2}$

$$(149) \cdot \epsilon \mu + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \epsilon \frac{1}{\mu + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot$$

ὥστε ἡ τὴν κεφαλῆαν τῶν τετραγωνικῶν ρίζῶν ἀπειρῶν σειρᾶς ὅρων τάξιι φυσικῇ προήντων ἴσῃ εἰς δύοι τρίτηι· ἡμάρσις τῆ γνημείου ἐκ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆ εἰ-

ρηχάτου ὅρου, ἐ τῆ τῶν ὅρων ἀριθμῶν εἴτ' ὡς $\frac{1}{3}$ ὡς $\frac{1}{3}$ · ἐ

$$\gamma \alpha \rho \frac{1}{3} \infty^{\frac{1}{3}} \times \infty = \frac{1}{3} \infty^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \infty^{\frac{1}{3}} \cdot \text{ἔπει δὲ } \frac{1}{3} \infty^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\infty} \quad (148) \cdot \text{ἐκὼν } \frac{1}{3} \infty^{\frac{1}{3}} \times \infty = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\infty} \times \infty$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\infty} \quad (167) \cdot \text{ἀρξὶ οὕτως } \frac{1}{3} \infty^{\frac{1}{3}} \cdot \text{συνδυασμῶ τῶ τῶν τῶν } \frac{1}{3} \sqrt[3]{\infty} \cdot$$

369. Περὶν ἣ δὲ τέλος ἐκείνηται τῶ Συμβολικῇ λογισμῶ δεῖν ὡςδὴν διὰ βραχείων διαλαθεῖν, ὅπως ὁ περὶ ὁμοειδούς Εὐκλείδους κείμενος ταῖς ἀπαιτημέναις σειραῖς εἰς ἑξῆσι τῶν κατὰ τὰς ἐξισώσεως ρίζῶν· Θεμέλιος δὲ ἐτίκειται αὐτῶ τῇ μεθόδῳ τὸ ὑπὲρ ἐκείνης ἐξισώσεως προσδιορισθῆναι σειρὰν ἀριθμῶν α, β, γ κτλ. ὥτως ἔχεται φύσεως, ὡς ἔκαστη ὅρων τῶν τῆς σειρᾶς διὰ τῆ ἡγεμείου διαιρέμενην ἐμποιῶσιν τὴν δύναμιν τῆς ρίζης τῆς αὐτῆς ἀκριβέστερον, ὅσον αὐτῆς μᾶλλον προσγάγῃ τὴν τῶν ἀριθμῶν σειρὰν.

Τῶνταθεύσκειται, φητὶν, ὅρου κατὰ σειρὰν αἱ $\tau, \kappa, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$, κτλ., ὥτως ἔχοντες φύσεως, ὡς τὸ εἰς τοὺς πηλίκων διαιρεθέντος διὰ τῆ ἡγεμείου ἐμφαίνειται ἄλλος ἐγγύς τὴν ρίζαν χ , τοτέστιν ὡς ἐγγύς ἐπαρχῆται

$\frac{n}{\pi} = \chi$, ἢ $\frac{\rho}{n} = \chi$, ἢ $\frac{\sigma}{\rho} = \chi$ κτλ.· τούτων ὑποθέτω.

τῶν εἶναι πάντως $\frac{n}{\pi} \times \frac{\rho}{n} = \chi \cdot \chi$, εἴτ' ἢ $\frac{\rho}{\pi} = \chi^2$, ἢ

$\frac{n}{\pi} \times \frac{\rho}{n} \times \frac{\sigma}{\rho} = \chi \chi \chi$, εἴτ' ἢ $\frac{\sigma}{\pi} = \chi^3$. ὡσαύτως ἢ $\frac{\tau}{\pi} =$

χ^4 , κτλ.

570. Ἐστω νῦν ἐξίσωσις $\chi\chi = \chi + 1$ · εἴπειν ἔν

τῶν ἤδη ὑποθετιμίων $\frac{n}{\pi} = \chi$, ἢ $\frac{\rho}{\pi} = \chi^2$, ἀντικε-

ταστήσει τούτων τῶν δυνάμεων πορισθήσεται ἡ ἐξίσωσις

$\frac{\rho}{\pi} = \frac{n}{\pi} + 1$, ἢ ἀφανισμῶ τῶν κλασμάτων $\rho = n + \pi$ ·

εἴπει δὲ, ἐξ ὑποθέσεως, ἢ $\frac{\rho}{n} = \chi$, ἢ $\frac{\sigma}{\rho} = \chi$ · ἀρα ἢ

$\frac{\rho}{n} \times \frac{\sigma}{\rho} = \chi\chi$, εἴτ' ἢ $\frac{\sigma}{n} = \chi^2$ · ὥστε ἐν τῇ ἐξισώσει αὐ-

τικαταστάσωμεν ἀντὶ μὲν χ^2 τῆς $\frac{\sigma}{n}$ ποσότητος, ἀντὶ δὲ

χ τῆς $\frac{\rho}{n}$, ἔσται $\frac{\sigma}{n} = \frac{\rho}{n} + 1$, ἢ $\sigma = \rho + n$ · εἴπει

δὲ τέλος περὶ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\tau}{\sigma} = \chi$, ἢ $\frac{\sigma}{\rho} = \chi$ · ἀρα

$\frac{\tau}{\sigma} \times \frac{\sigma}{\rho} = \chi\chi$, εἴτ' ἢ $\frac{\tau}{\rho} = \chi^2$ · ἀντικαταστήσει ἀρα

γενήσεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\tau}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} + 1$, καὶ $\tau = \sigma + \rho$ ·

ἤλ.σ. ἀρα ἕκαστον ὅρων ταύτης τῆς σειρᾶς δεῖν εἶναι ἴσων

τῷ ἀφαισμάτι τῶν διῶ ἡγεμίων ἐντὺ ὄρων. Τωγαρὶν
 ἐστὶ αἱ διῶ πρώτῃ ὄρει δαδῶσιν, ἐφ' ὧσιν ὅστις εἰ βάλῃ.
 το προαχθεῖν τὰ τῆς σειράς· λαμβάνει δὲ δύνανται (φασὶν
 ἰ ρήσις σειράς) οἱ διῶ πρώτῃ ὄρει κατὰ τὸ δαδῶν· ἐκ
 τῶν ἰσοπεδῶσι πρώτῃ αἱ 0, 1, χωρῆσαι ἡμῶν ἡ σειρά εἰ-
 τω· 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,
 144 κτλ· ἐν ἡ κατὰς ὄρει διαιρημένοι διὰ τῷ ἡγεμίων,
 ἐκφέρειται ἡ δύναμις τῆς χ, εἰ τις αὐτῇ τῆς ἀλφῆς ἐγ-
 γισ, ὅσων ὡν ἀπώτερος τῷ πρώτῃ λαμβῇ ὄρος ὁ διαιρε-
 τήσιμος· ἀρχαίως μὲν γὰρ εἰς μέγα τὸ διάστημα,
 τραυεῖσι δὲ ἐλαττωταί· ἐκ τῶν λαμβῇ $\chi = \frac{1}{2}$, εἰς αἱ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{1} + 1 = \frac{3}{2}$, εἰς αἱ τὸ διάστημα $= \frac{5}{2}$, τὰ δ'
 ἐφεξῆς πάλιν ἐστὶ ἐλαττω ἐντὸ ἐπεργάζονται.

571. Ἐστω αὖ ἐξίσωσις $\chi\chi = 2\chi + 1$ · εἰ ταυδὴ
 $\chi = \frac{x}{2}$, εἰ $\chi\chi = \frac{\rho}{2}$, εἰ ξημεν $\frac{\rho}{2} = \frac{2x}{2} + 1$, εἰ, ἰ.

παλλαγῇ τῶν κλασμάτων, $\rho = 2x + 2$ · εὐρίσκειται δὲ, ὡς
 ἀνωτέρω, εἰ $\sigma = 2\rho + 2$, εἰ $\tau = 2\sigma + \rho$ · ἐκ τούτων συλλογόμεν,
 ὡς ἐν τῇ ἐπὶ τῆς προπαιδείας ἐξισώσεως σειράς, τὸ διπλῶν
 ἰκάσιν ὄρει συναφθεῖν τῇ πρὸς ἐντὺ ἐπεδιδωσι τὸν ἐφετέ-
 μων ὄρον· ἐκ τῶν αὐτῶν ἀρχῇ γίνηται ἀπὸ τῶν 0, 1,
 ἔξηνων τὴν σειράν· 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169,
 408 κτ. ἐνταῦθα ὄρα ἡ ζητούμενη δύναμις τῆς χ δηλω-
 θήσεται εἰς μάλλον ἀκριβέστερον διὰ τῶν κλασμάτων· $\frac{1}{2}$,
 $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{55}{2}$ κτ., ὡς ἐκείνη ὡς τῆς
 μέτῃ εἰς ἑγγίαν γίνηται τῇ ἀλφῇ δυνάμει $\chi = 1 + \frac{1}{2}$.

572. Ἐστω πάλιν ἐξίσωσις $\chi^3 = \chi^2 + 2\chi + 1$ ·
 εἰπεῖ ὡς $\chi = \frac{x}{2}$, εἰ $\chi^2 = \frac{\rho}{2}$, εἰ $\chi^3 = \frac{\sigma}{2}$, εἰ αἱ $\frac{\sigma}{2} =$

$\frac{\rho}{\pi} + \frac{2\pi}{\pi} + 1$, ἢ $\sigma = \rho + 2\pi + \pi$. ὅθεν δὴλόν, ὅτι καὶ διὰ τῶν ὅρων τῶν π , 2π , ρ προσδιορίζεται εἰς τὸν τίτλον τῶν σ · ἢ εἰπεὶ ἡ ἀναρξὶς τῆς σειράς ἐστὶν ἐλευθέρα, ἐξίσωσι συγκροτῆσαι τὴν σειρὰν $0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129$ κτ.· τινγαρὺν αἱ τῆς χθονάμικς ἐκ διαδοχῆς ἰσῶνται $1, 1, 4, 1^2, 1^2, 1^2, 1^2$ κτ.· ἐὰν ὅν ὑποτεθῇ $\chi = \frac{1}{2} = 1^2$, τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς προτιθείσης ἐξισώσεως ἰσφάνει ἡ ποσότης 1^2 , δευτέρου δὲ μέλος εἶναι $1^2 + 1^2 + 1 = 1^2$, ἵνα τὸ διάπτωμα εἶναι $= 1^2$.

573. Σημειωτέον μέντοι (φησὶν Εὐκλεὺς) ὡς ἂν εἴσιν ἅπασαι αἱ ἐξισώσεις οἷαι ἐπιλύεσθαι διὰ ταύτης τῆς μεθόδου· ἄλλως τε, ἢν τύχῃσι ἐλλείψουσαι τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ταύτη χρῆσασθαι τῇ μεθόδῳ ἑδεμιά μηχανῇ ἀνυ-

εῖν· ἔστω γὰρ, φέρεται, $\chi\chi = 2$ · εἰπεὶ δὲ $\chi\chi = \frac{\rho}{\pi}$ · ἄρα $\frac{\rho}{\pi} = 2$, ἢ $\rho = 2\pi$, εἴτ' ὅν $\rho = 0 \times \pi + 2\pi$ · ὅθεν ἀποφύρεται ἡ σειρὰ $1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16$ κτλ. ἐξ ἧς ἂν ὅλως συνάγεται· ἕκαστος γὰρ ὅρος διαιρέμενος διὰ τῷ ἡγούμενῳ αἰεὶ διδωσθῆναι $\chi = 1$, ἢ $\chi = 2$ · εἰ δὲ προτεθῇ ἡ $1^2 = 2\pi + 1$, εὐριθέσονται διὰ προσεγγίσεως αἱ ἡμῖν ἤδη προεκτεθείσαι ῥίζαι (570).

574. Σημειωτέον δὲ ἢ τῷτο (προσθήσιν ὅτις ὁ σοφὸς περὶ ταύτης τῆς μεθόδου)· ἡνίκα γὰρ ἡ ἐξίσωσις περιέχει μίαν τινὰ λογιανὴν ῥίζαν, εἰληφθῇ ἀρχὴ τῆς σειράς τοιαύτη, οἷα ἀποτελεῖν ταύτην τὴν ῥίζαν, ἕκαστος ὅρος ταύτης τῆς σειράς διαιρεθεὶς διὰ τῷ ἡγούμενῳ ἔστω ἀποδώσει ἢχ ἢττον τὴν ῥίζαν ταύτην ἀκριβῶς· ἔστω ἐξί-

ὥστε $xx = x + 2$, ἥς μία τῶν ῥιζῶν ὑπάρχει $x = 2$.
 ἴσῃ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προέσθι τύπος τῆς σει-
 ρᾶς ὅτι $\rho = x + 2x$, ἐὰν ληφῶσιν ὡς πρῶτον ῥιζὴν αἱ 1,
 2, προκύψει σειρά, 1, 2, 4, 8, 16, 32 κτλ., ἥτις
 εἰς γεωμετρικὴν πρόδοσιν αἵξεσθαι κατὰ πληκτικότητα 2.

575. Ἡ δὲ μὲντοι ἡ τῆς σειράς ἀναρχὴς ἐκ ἀπλῆ
 διδωσι τὴν ῥίζαν, ἡ σειρά τὴν μὲν τῇ ἐλάττωσι τῶν ῥι-
 ζῶν προσσχῇ ἕκαστα παράξει, τὴν δὲ τῇ μείζονι ὀγγύς
 ἔσθαι· βεβαιώσας δὲ ἐκ τῆς σειράς εὑρεῖν τῶν ῥιζῶν τὴν
 ἐλάττωσιν, ἀνάγκη πάσα πρὸς ταῦτα προδιαβῆναι τῆς
 σειράς τῶν ὄρων τὰς προτέρους· ἔσθι γὰρ ἐξισωτικὸς $xx =$
 $4x - 3$, ἥς ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν εἰς $x = 1$, ἀτίετα δὲ x
 $= 2$, ὅ δὲ πρὸς ἐκπλοήν τῆς σειράς τύπος $\rho = 4x - 3x$
 ἀμφαίνει, δυοὶν ὄρων δαδόντων, τὸν τρίτον ἰσῶσθαι τῷ τε-
 τραπλῷ δευτέρῳ πλὴν τῷ τριπλῷ πρώτῳ, ὥσπερ οὖν δὲ
 ἔχουσιν ἡ ἕκαστος ὄρων τῆς σειράς πρὸς τὰς πρὶ αὐτῇ δυνά-
 μεις εἶναι εἰς εὐρεσιν τῆς ἐλάττωσιν ῥιζῆς ἐκλήσθαι πρῶτον
 ὄρον 1, 1, προκύψει σειρά 1, 1, 1, 1, 1, 1, κτλ.
 δεξιῶς ἔχουσα προδιδόναι αἰ τὴν ἐλάττωσιν ῥίζαν· ὡς, εἴπερ
 ὑποθέσιν πρῶτοι ὄροι αἱ ἀριθμοὶ 1, 3 αἱ ἀποδιδόντες τῶν
 ῥιζῶν τὴν μείζονα, ἐκ τῆς τῷ τύπου ἐκφράσεως προκύψει
 ἡ σειρά 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 κτλ., ἀφ' ἧς
 ἀκριβέστερα προέρχεται ἡ ῥίζα 3· ἐὰν δὲ τῆς σειράς ἀρ-
 χὴ ἄλλη γένηται, οἷα μὴ ἀποδιδόναι τὴν ἐλάττωσιν ῥι-
 ζαν, ταυτὶς ἀναφύσεται σειρά, ἥς τῶν ὄρων ἕκαστος διπλα-
 ρύμετος διὰ τῷ ἡγεμένῳ ἀποδιδῶσιν αἰ ἐπὶ μᾶλλον καὶ
 μᾶλλον ῥίζαν προσσχῇ τῇ 3· τοσούτῳ δὲ μᾶλλον, ἔσθι
 ὁ διακρίμενος ἀπέχει τῷ πρώτῳ ὄρῳ τῆς σειράς· ἐδῆ ποτε
 μέντοι τὰ πηλίκια προστελέσθαι τῇ ἐλάττωσιν τῶν ῥιζῶν.

576. Τελυνταίω ἰσω ἐξίσκκη $\bar{x} = x^{-1} + x^{-2}$

$x^{-3} + \kappa\tau\lambda.$ ἐπὶ ταύτης ἔν τῆς ἐξισώσεως ταῦτιδε χρὴ εἶναι τὴν σειρὰν, ἥς ἰσῦται ὅρη ἑκάστη τῶ ἀθροισματι πάντων τῶν ἡγεμένων ὄρων, εἴτ' ἔν 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 κτλ., ὃ δείκνυσι μίαντινὰ τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ὕσαν ἀκριβῶς 2· ἐὼν ἔν ἡ πρωταίσις ἐξισώσεις διαιρεθῇ διὰ x^m , προκύψει $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \kappa\tau. = (559) \frac{x}{x^2 - x} = \frac{1}{x-1}$. ἄρα $1 = \frac{1}{x-1}$, ἢ $x-1 = 1$, ἢ $x = 2$.

577. ΣΧΟΛΙΟΝ. Μετ' ὀπισθεσίας ἀνερευνησάτι τὴν μέθοδον ταύτην, δῆλον εὖδὲς, ὡς ἤκιστα δεῖ τὸς πρώτους ὅρους τῆς σειρᾶς ὑπάρχειν = 0, μὴδ' εἶναι ἀεὶ λύτως αὐτοὺς τίθεσθαι πρὸς τὸ δευτὸν, ὥσπερ εἶπε βύλει. σθεῖ οὐ περιπλοῆς Εὐκλεῖς ὁ τῆς μεθόδου εὐρετής· τῷ δ' ὅπερ ἤκιστα ὅλως ἀπεύργει μὴ ἔχῃ ὑπάρχειν καμψοτάτην ἢ χαμιστατήν τὴν 'μέθοδον' ἣν ἐνταυθὶ παρεθέμεθα τοῖς πρωταγωνισαῖς τῶν Μαθηματικῶν χαριζόμεθα, ἵν' ὅχουσι εἰδέναι, ὅπως καὶ διὰ τῶν σειρῶν αἱ ἐξισώσεις ἐπιλύεσθαι δύνανται· παρὰ γὰρ ταύτην τὴν κανοφανῆ τῷ Εὐκλέει εἰσι ἔτι ἄλλαι μέθοδοι ταυτοῖαι, αἷ εἰρήσει ὁ βολόμενος μετιῶν τὸς κατὰ πλάτος περὶ τούτου εἰπόντας.



ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Π ε ρ ι Μ η κ ο μ ε τ ρ ί α ς .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας, ἢ περὶ
γραμμῶν.

1. Γεωμετρία ἐστὶν ἐπιστήμη τῶν τῆς ἐκτά-
σεως ιδιοτήτων ἐξετασθή.

Ἡ μὲν κατὰ μήκος ἐκτασις καλεῖται Γραμμὴ·
ἡ δὲ κατὰ τε μήκος ἔ τλάτος, Εὔφαισις· ἡ δὲ
κατὰ τε μήκος ἔ τλάτος ἔ βάθος, Στερεόν.

2. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ γραμμὴ ἀρχ, ἔ ἡ ἐπιφάνεια,
ἔ τὸ στερεόν, τὰ τῆς Γεωμετρίας εἰσὶν ὑποκείμενα· ἔ ὅ-
σα μὲν αὐτῆς περὶ τὰς γραμμὰς ἀρχοῦνται, Μηκο-
μετρία ὀνομάζεται· τὸ δὲ περὶ τὴν ἐπιφάνειαν, Εὔπι-
πεδομετρία· Στερεωμετρία δὲ τέλος, ὅσα
αὐτῆς περὶ τὴν τῶν στερεῶν εἴφεται καταμέτρηση.

3. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ στερεόν, εἰπεὶ ἀπειρον εἶναι ὑ-
πάρχει, περιέχεται ἐξ ἀνάγκης ὑπὸ ἐπιφανείας, ἢ χη-
ματικῆς, παταχούθι αὐτὸ περιορίζεται· ἢ δ' ἐπιφάνεια,
ὑπὸ γραμμῶν· καὶ πράγματι μὲν ἔκ αὐτῆς εἶναι γραμμὴ

της ἢ ἀντιστάσεως, ἐκληφέντων αἱ δύνανται διὰ τὴν συνθήκην
ταύτην.

8. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Οὗ δὲν ἡγενησάμεθα μετὰ τῶν
πλείονων Γεωμετρῶν ἐκτάσεως ἀπασθῆναι ἵκανόν τὸ
σημεῖον· ὑπάρχει γὰρ ἄρα μέρος ἄτομον, ἀδιαίρετον καὶ
ἴσῳ καλυμμένον, μέρος μὲν οὐκ τῆς ἐκτάσεως. αὐτὸ ἰ-
σχυρισμὸς πᾶσης ἀπὸ ἀλλοτρίου; ἀλλὰ τὸν ἴσον ὁ πολλὸν
ἰμῶν καὶ λογομαχίῳ τὰ Γεωμετρῶν ἐνέπλησεν· πολλοὶ
μὲν γὰρ αὐτῶν μὴδ' ὑπάρχειν μὴδὲ δύνασθαι ὅλως ἐποτιθε-
ναι τοιαύτῃ σημεῖον ἐκτάσεως οἰκιστὴν ἄρῃ διατίθενται·
ἀλλ' ὡς ὁφείδεα, τὸ μὲν τερμὸν ἐξ ἐπιφανείων, ἡ δ' ἐπι-
φανεία ἐκ γραμμῶν, γραμμὴ δὲ πᾶσα ἐκ σημείων ἵκται
τὴν οὐσίαν· τὰ τοίνυν σημεῖα τοιχολογία εἰσι πρῶτον τῶν
περὶ τὴν Γεωμετρίαν· ἔπειτα ἄρα ὁριθῆναι ὅπως, ὡς εἶναι τὴν
ὑπερβίον αὐτῶν ἀμφίβολον, δηλονότι, ὡς ἐκ σημείων ἄπαν
μέρος ἀνέπτατον τῆς γραμμῆς, μὴ περιεῖναι ἄπαν τὸ τῆς
Γεωμετρίας οἰκοδόμημα, ἐπεξηρασμένον ἐφ' ὅτῳ ροιζήσας
καὶ, ὡς εἰπεῖν, ἀναπλάσσειν τὴν θεμελίον; ἀλλὰ δὲ, ἐκ ὀλίγων
καὶ ὅτων, ἀπρὸς τὸν ὁρίζεται τὸ σημεῖον μέρος ὑπάρχειν
τῆς γραμμῆς ὡς ἀνέπτατον θεωρεῖσθαι δυνατόν· ἐκτετατὸς
γὰρ ὁ ζυγοῦ τὴν ἀνάγκην, δι' ἣν πᾶσαν ἄρα καὶ ἀπὸ
τῶν σημείων τὴν ἰδίαν τῆς ἐκτάσεως· τῶν αὐτῶν δὲ, ἐπεὶ ὁ-
κελευσθέντες ἂν σημεῖα συνεισφέρωμεν, ὡς ἄρα ὅπως ἀνέ-
πτατα οὐκ ἐκτετατον ἡγενησάμεθα ἀναπλάσσειν ἱκανόν· ἀποδοτικόν
ἄρα τῶν σημείων ἐκτετατὸν τινὰ ἐλαχίστην, καὶ ὅσον ὁ ποτὴρ·
ἐπεὶ δ' ἡμῖν ὥριται τὸ ἀπειροσθὲν εἶναι τῆς γραμμῆς, εἴτ'
ἂν ἐκτάσεως πεπερασμένης, ἵκει ἄρα ἐκτετατον ἀπειροσθὲν,
ὅτην ἀποσημαστέον σημεῖον πρίνομεν· διὰ ταῦτα δὲ καὶ
τῇ γραμμῇ πλάτος, καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ δὲ βάθος ἀντι-
στήμεν ἀπειροσθόν.

9. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Πᾶσα γραμμὴ (χ' 1) διὰ γράμμασιν ἐπὶ τῶν περὶ τὴν αὐτῆς σταθμισμῶντος ὀρίζεται· ὅτω τὰ Α εἰς Π γράμματα ὀρίζονται τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένην εἰς δὲ τὸ Π τελευτῶσαν γραμμὴν, ἥτις καλεῖται Γραμμὴ ΑΠ.

10. Ἐπισημῶμεν δὴ τὸ Α πέρας τῆς ΑΠ γραμμῆς, ὡς περ ἀπειροῦν μέρος αὐτῆς· ταῦτ' ἐν ἔσει ἡμῖν σημεῖον (4)· ἐπισημῶμεν δὲ ἤδη, ὡς τὸ σημεῖον Α κινούμενον ἐπὶ τὸ Π, ἀπειρα ἰχνη καταγράφει, ὧν ἕκαστη εἰς σημεῖον ἴσον αὐτῷ τῷ κινηθέντι Α· εἰ ὅτω βελίζω, καταγράφει τὴν ΑΠ γραμμὴν, ἥτις ὅδὸν εἴκει ἀλλ' ἢ συμπλήρωμα πάντων τῶν ὑφ' ἑκάστῳ βήματι καταλειφθέντων ἰχνῶν, ἢ πασῶν τῶν ἀπειροῦν γραμμῶν, ἢ πάντων τῶν σημείων, ὧν ἕκαστη εἴκει συνεῖν ταύτης τῆς γραμμῆς.

11. Ἐὰν τὸ γονύων σημεῖον Α ἐπὶ τὸ Π χωρὴν τὴν αὐτὴν ἀεὶ ὁδοῦ ὁδόν, καταγράφει ὅτω γραμμὴν εὐθείαν· εἰ δὲ, ἔς τ' ἂν ἀφίκηται ἐπὶ τὸ Π, φέρεται μὲν ἀπερσυνκλίτως μέχρι τοῦ Ζ, ἐκείθεν δὲ ἀπεξ' παρεκτρέπεται διανύον ἀπαρεκτρέπτως τὸ λοιπὸν διάστημα, καταγράφει δύο εὐθείας γραμμὰς ΑΖ, ΖΠ, ἢ δ' ὅλην ΑΖΠ καλεῖται γωνιώδης· Ἀλλ' εἰ, ὡς ἀφίκηται τὸ Π, ἐφ' ἑκάστῳ διαστήματι ἀπειροῦς παρεκτρέπεται τῆς ὁδοῦ, καταγράφει γραμμὴν ἰδίῳ ὀνόματι καλυμένην Καμπύλην, οἷα ἢ ΑΤΠ· ἐντεῦθεν ἀπαρυσόμεθα τοὺς ὀρισμούς·

12. Εὐθεία γραμμὴ ἐστίν, ἥς ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς καίται φορᾶς· οἷα ἐστὶν ἢ ΑΠ· Καμπύλη δὲ, ἥς ἅπαντα διηλεκτῶς παρεκτρέπεται ἀπειροῦς τῆς ἐν ἀρχῇ ὁδοῦ, οἷα ἢ ΑΤΠ· Γωνιώδης δὲ

ἡ γνησίη ἐπὶ δύο εἴδη· ἢς ἐν συνθεῶν σημείω, ὡς ἡ ΑΖΠ. Μία τὴ δὲ, ἢς μέρος μὲν εἶτα, μέρος δὲ τι καμπύλη, ὡς ἡ ΘΑΥΠ.

13. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εἴτετιρ εἶδους γραμμῆς εἴτε τὰ σημεία ἐπὶ τῆς αὐτῆς καίται φασ (12). αὐτὸ πάντος δὲ σημείου ἐπὶ πᾶν αὐτῇ συναφὲς σημείω μία μὲν ἔσθ' ἡ φασ· διὰ δύο ἄρα συναφῶν σημείων μία μὲν εἶτα διαλεῖται δύνεται.

14. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἴτε τὰ δύο σημεία πλάτος ἄμφοι ὑποθέσται· ἢ δὴ δι' αὐτῶν ὃ μὴ διαλείσεται ὅτι μὴ μία εἶτα· εἴτε ὑποθέσται αὐτοῖς ἀπευρεῖσθαι πλάτος (8), ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ πλάτος ὑποθέσθαι διὰ πρὸς τῆς ὑπὸ τῶν δύο συναφῶν σημείων ἀποτελεμένης εἶδους, τὸ τῆς εἶδους πλάτος καλύψει τὸ τῶν σημείων· ἄρ' αὖ ἔσθ' ἀληθὲς αὐτῇ, ὡς διὰ τῶν σημείων τῷδε μία μὲν εἶτα διαλείσεται.

15. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δύο ἄρα συναφῇ σημεία ἀνεγκλίως συνίωσι μίαν εἶτα (13).

16. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἴτι τῆς ἄρα καμπύλης δύο σημεία ἀλλήλων προσχέσεται συνίωσθαι αἰ μὲν εἶτα (ἀποτ.)· ἐπὶ καμπύλῃ πάντε ἐληγετέα, ὡς ἀποτελεμένη ἐκ πολλῶν εἰδῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἡ ἄρα εἶτα γραμμὴ ΑΠ ἢ ἐλαχίστη ἐπὶ τῶν τὰ αὐτὰ περὶ Α, Π ὄχυσιν· σφίς γὰρ, ὅτι πάντε ἄλλη ὁδὸς, δι' ἣς δύνεται τὸ Α ἐπὶ τὸ Π ἀφικέσθαι περὶ τῇ ΑΠ, ἀφικεμένη τῇ εἶδει, ὥστε γωνιώδης ΑΖΠ, ἢ ἡ καμπύλη ΑΥΠ, μείζων ἔσθ' αὐτῆς ΑΠ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειώσας τὰς πρωτοτέρας ἀπαξ τὰ ἐφεξῆς.

Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ γενικῶς αἱ εὐθείαι ἀποδεικνύονται, ὑποτίθενται μόντοι γραμμαὶ μερικαί, ἐφ' ὧν γίνεται ἡδείξις τῷ προτιθέντος· ταῖς δὲ οἰκονομεῖται ἢ πρὸς τὸ ὑπερμῆεν τὸν λόγον, ἢ μετὰ πρὸς τὸ φοῖ ἔχειν τὸ χῆμα ἐφ' ὅψιν τὸν μελετῶντα, καὶ τὰτα βεβίως συνίσταται τῷ προτιθέντος τὴν ἐπιστάν· τῆς μόντοι δείξεως γενεμίνης, τὰ μερικὰ γραμματα τῷ χῆματος ἀπαλειφούσας, γενικῶς χῆμα ἀπαγγέλλειν τὴν προαποδειχθεῖσαν πρότασιν· ὅπως ἐπὶ τῆς προλαβούσης περὶ τῶν πρῶτων, τὸ κατ' ἀρχὰς ἀπαγγέλλεται· ἡ εὐθεία γραμμὴ ΑΠ ἢ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πρῶτα Α, Β, γωνιών· τὸ δὲ ὡς ὁ πρωτόπειρος καὶ τὸν αὐτῷ λόγον καλῶς γινώσκει, ἐπὶ τὸ γενικώτερον ἀνατρέχων ἀφαιλεῖ τὴν ἀναγκασίαν ὅπως· πᾶσα εὐθεία γραμμὴ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πρῶτα γωνιών· ὅν γὰρ λόγον ἐπὶ τῆς ΑΠ εὐθείας ταῖς δίδεινται, τὸν αὐτὸν καὶ ἐφ' ἀπέσης ἄλλης δείχεται.

18. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἀπὸ πρῶτος ἄρα σημείον Α ἐπὶ πᾶν σημείον Β μία μόνη ἐστὶν ἡ πᾶσιν ἐπιτομωτάτη ὁδὸς (17).

19. ΠΟΡΙΣΜΑ Σ'. Διὰ δύο μόνιμων καὶ ὠρισμένων σημείων, οἷα τὰ Α, Β, μία μόνη διατείνεται γραμμὴ εὐθεῖα ἢ ΑΒ ὠρισμένη καὶ μόνιμος.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὀρισμένην καὶ μόνιμον εἰπόντες τὴν ΑΒ ἐπὶ μόνης τῆς φορδὸς αὐτῆς ταῖς ἐκδοχόμεθα, ὅτι πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἐκ τῆ Α ἐπὶ τὸ Β ἀχθεῖσα συμπίπτει ἀναγκασίως τῇ εὐθείᾳ ΑΒ· κατὰ γὰρ μὴν μῆκος ἐστὶν ὁρίστικῶς προαχθῆναι δυναμένη ἐπ' ἀπειρὸν ἕκαστα τῶν δεξιῶν αὐτῆς ἐκ τῆ Α, καὶ ἐκ τῶν ἀριστερῶν ἐκ τῆ Β· ἢ δ' ὅτω ἀποτελεσθῆναι δυναμένη ἀπειρὸς εὐθεῖα κατὰ

γὰρ τὴν φωνὴν ἢ αὐτὴ ἴσται τῇ Α Π, καὶ τὴν μὴ-
και ἐκείνης αὕτη μέρος ἐν οἷα ἀπορροῖν.

20. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ. Δύο ἄρα σημεία ἰσὺς αἴσιν
ἴσται τὴν δέσιν ἀτάσκει εὐθείας.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Δύο ἄρα ἰσὺς ἐπ' ἀλλήλων
ἐν οἷα σημείω διατηρήσονται, ἢ, ὅ ταυτὶν, δύο ἰσ-
ταί ἐν μόνῳ κατὰ ὅξωσι σημείων. ἄλλως γὰρ ἐκ οἷα
μεταξὺ δύο σημείων μία διατεταμένη εὐθεία (19).

22. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ. Ἀπὸ παντὸς σημείου Α ἐπὶ
τῶν σημείων ἀπειρῶν τῶν ἀρσμένων πεμπύλων ἀχθῆναι δι-
νῶται· ἐξέσαι γὰρ ὅτως ἀπὸ τῆ Α ἐπὶ τῇ Π χωρῶσιν,
ὅτε διὰ τῆ Ζ, ἢ διὰ τῆ Θ, ἢ διὰ παντὸς ἄλλου ἀνω-
τέρου διαλθεῖν σημείου ἐπ' ἀπειρῶν, ἢ ἐκ τῆ ἀκαλόγου μάλ-
λον ἢ μᾶλλον ἐξελθῶσιν καταγραφῇ πεμπύλων ἀπει-
ρῶν.

23. Αἰτημα. Ἐξίσω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ τῶν
σημείων εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγῶν, ὅ δὴ ἢ εὐθείαν ἐπι-
ζῆξαι λέγεται.

24. Αἰτημα. Καὶ γραμμὴν εὐθείαν πεπερασμένην
κατὰ τὸ στοιχείον ἐκβάλλειν.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τοῦ Κύκλου.

25. Νοεῖδω ἢ ΠΖ εὐθεία (χ. 2.) πεμπύλῃ
περὶ τὸ Π σημείον ἀκνητῶν, ἢ ὅλην πεμπύλῃν δι-
νῶσιν. Τὸ ὅν Ζ σημείον, πέρας ἐν ταύτης τῆς εὐθείας,
ὅφ' ἐκαστὴ ἀπειρῶν διακρίματος ἴσως τε ἢ ἀπειρῶν αἰ-

ποθέσται τῆς ἐαυτοῦ τρίτης φάς, ἢ τὴν ἐλαχίστην πεμπίλιν ΑΒΠΟΖ καταγράψει.

26. Ἡ τῶν ὅλην πεμπίλη ΑΒΠΟΖ, ἢ τῆς τῷ Ζ σημείου καταγεγραμμένης κυκλικῆς περιφέρειας ὁ μὲν δὲ ἦτε περιφέρειαν πῶς, ἢ τὴν ἐμπερισχόμενον ἐντὶ χωρίῳ ὀγκάζεται Κύκλος· πολλὰς δὲ καὶ μὲν ἢ περιφέρειαν περιλαίπει κύκλος· Τὸ δὲ Π σημεῖον τὸ κατὰ τὸ μέσον τῆς περιφέρειας κείμενον ἀπὸ Κέντροι τῷ κύκλῳ· Τὸ ξὺν δὲ τῷ κύκλῳ, ὅ,τι δέποτε μέρκ τῆς περιφέρειας, εἶναι τὸ ΖΟ.

27. Ἐν ᾧ ἄρα τὸ Ζ τὴν ἐαυτοῦ καταγράφει κυκλικὴν περιφέρειαν ΑΒΠΟΖ, ἕκαστον τῶν τῆς ΑΠΖ γραμμῆς σημείων καταγράψῃ τὸν ἐαυτοῦ ἴδιον κύκλον· τὸ μὲν Δ φέρε τὸν ΔΗΤ, τὸ δὲ Ι τὸν ΙΓΓ ἢ ἐξῆς ὡσαύτως.

28. Πάντες ἔσονται οἱ κύκλοι ΑΒΠΟΖ, ΔΗΤ, κτλ· γεγραμμένοι ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων Ζ, Δ, κτλ· τῆς αὐτῶν γραμμῆς περισχέσεως περὶ ἀκινήτων τὸ Π, κινῶν ἔξωσι κέντρον τὸ Π, ἢ παρὰ τῷτο κληθήσονται κύκλοι ὁμοκέντροι· τοσούτοι δὲ ἴσονται τῶν ἄλλων ἐλάττω, ὅσῳ τὸ γινώσκον σημεῖον ἐγγύς γήσται τῷ κέντρῳ, ἢ μείγιστος μὲν ἀπείτων εἶναι ὁ ΑΒΠΟΖ, ὃν καταγράφει τὸ Ζ σημεῖον, ἐλάχιστος δὲ, ἢ κύκλος ἀπειρος, ὁ καταγραφόμενος ὑπὸ τῷ σημείῳ, ὁ ἀπὸ τοῦ ἀμέσως μετὰ τὸ κέντρον Π.

29. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἕκαστον τῶν τὴν ΠΖ συνιθέτων σημείων, περιγεγραμμένης τῆς ΠΖ, ἰσάριθμα εἰδύσει διαστήματα· ἐπεὶ γὰρ ἅπαντα τὰ σημεία τῇ αὐτῇ ἐπ' αὐτῇ γραμμῇ, ἰδύσκειν ἐν μὲν αὐτῶν κινεῖσθαι, ταῦτ' ἄλλα ἡρεμεῖν· ἐδ' ἐν μὲν ἡρεμεῖν, κινεῖσθαι δὲ τὰλλα.

30. Ἐκαστὸν ἄρα τῶν σημείων ἰσάριθμα διαβήματα διείπῃ, ἢ μετ' ἑκαστοῦ ἀπειροσὶν διτόμα, σημείων ἐκ τῶ ἴσων καταλείπῃ εἰς σφαίρῃ τῆς ὀλίγης περιμέλου, ἡμεῖς δὴτε συγκροτήσω τὴν ἐκτὸς περιμέλου ἐξ ἰσούριθμων σφαίρων.

31. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἀτίττω ἄρα τῶν κύκλων, ἵνα ἔχοντι σφαίρα, ἢ μείζων κύκλος ἢ μὴ διῶσι τῷ ἐλάττω, ἵνα μὴ τῶ ἑκαστῷ τῷ ἐλάττω σφαίρῃ λόγῳ ἔχῃ πρὸς ἑκαστὸν τῷ μείζον, ὅν ὅλος ὁ ἐλάττω πρὸς ἑλῶ τὸν μείζον.

32. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ταῦτα δὲ τὰ σφαίρα ἀπειροσὶ μέρη ὄντα, ἑκαστῷ τῷ ὅ ἑπόμενος κύκλος, ἵσταται σημεῖα (4). ἐν δὲ σημείων περιφορέας τοὺς πρὸς ἑτέρῳ ἰσῖος λόγῳ ἔξει, ὅν ἡ πρώτη περιφέρεια πρὸς τὴν δευτέραν (6).

33. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. ἑκαστὸν δὲ τῶν δὲ τῶν σημείων, ἢ τῶν σφαίρων, γραμμὴ ἐστὶν εὐθεῖα ἀπειροσὶ· εἰ μὲν γὰρ γραμμὴ· εἰσὶν γὰρ γραμμὴ ἐστὶν ἄπειρος μήκος· ἀλλὰ μὴν τὸ σφαίρῃ τῷ κύκλῳ, εἴτ' ἢ τὸ σημείων, εἰ μέρους ἀπειροσὶν μήκος πεπερασμένον, εἴτ' ἢ τῷ ὀλίγῳ κύκλῳ, ἢ δὴ ἵσταται ἢ πρὸς μήκος· ἄρα το σημείων, τὸ κυκλικὸν σφαίρῃ, εἰσὶν γραμμὴ, ἢ γραμμὴ ἀπειροσὶ (8)· εἴτ' δ' ἵσταται εὐθεῖα· εἰ γὰρ τὸ ἴσος, ὁ καταλείπῃ ἐν ἑκαστῷ διαβήματι τὸ γονῶν σημείων ἐν τῷ περιέγχεσθαι τὴν ΠΖ γραμμὴν· ἀλλὰ τὸ γονῶν σημείων ἢ μεταβάλλει τὴν φασὶν, εἰ μὴ μεταβίβῃ ἀπὸ διαβήματος ἐπὶ διαβήμα· τὸ ἄρα ἴσος ἢ ἡ ἀπειροσὶ γραμμὴ, ἢ καταγράφῃ τὸ σημείων ἐφ' ὅντος διαβήματος, εἰσὶν εὐθεῖα.

34. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα διῶσι μετὰ συναγωγῇ, ὡς ἄπειρος κύκλος ἐκλεβήσῃ διῶσι

ὡς ἤματι συγκριτέων ἐπ' ἀπειρεσίμων ἰσαλλήλων γραμμῶν εὐθείων, εἴτ' ἔκ πλαυρῶν.

35. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Πάντες οἱ κύκλοι μεγάλοι καὶ μικροί, ὅμοια σχήματα ὄντες, καὶ ὅ,τι ἰσαεῖς μὲν πάντες πλαυρᾶς ἔχουσι, καὶ ἕκαστος ἰσαλλήλων, διίσταται τὸν αὐτὸν τρόπον διαιρεθῆναι, εἴτ' εὖν εἰς μέρη ἰσ. ἀερίθμα.

36. Κοινῇ ἔν ἰδοῦμεν Γεωμετρῶν πασι τῇ κυκλικῇ περιφέρειαν εἰς μέρη 360 ἰσαλλήλα διαλαιν, ἃ μέρη ἐκάλεσαν· μοῖραι ἄρα εἰς τὸ τριακοντὸν ἐξηκκτὸν μέρος ἀπάσης κυκλικῆς περιφέρειας· μοῖραι δὲ δύνουν διαφέρων κύκλων ἀνάλογον εἰσι ταῖς ὅλκαις περιφερειᾶς ὧν εἰσι μοῖραι (Συμ. λ. 234)· ἄρα μνησμεῖα ἔκ εἰς ποσὶ ὠρισμένων ἢ μόνιμων· ἀλλὰ κατὰ τὸ μέγεθος τῆς αὐτῆς περιφέρειας ἰσὴ εἶσαι, τοῦ, ἐργιᾶ, λείγῃ κτλ.

37. Η' μοῖρα διαιρεῖται εἰς λεπτά πρῶτα 60, ὧ ἕκαστον εἰς 60 δευτέρα· ἕκαστον δὲ τούτων εἰς 60 τρίτα ἢ ἔτις ἐφεξῆς· γράφονται δὲ ἔτω: 60', 60'', 60''', κτ. ἀναγινώσκονται δὲ: 60 μοῖραι, 60 πρῶτα λεπτά, 60 δευτέρα, 60 τρίτα κτλ.

38. Δύω εὐθείαι ΠΖ, ΠΟ ἐκ τῆς κέντρου ἐπὶ τῇ ἀλλήλοδιαδόχῃ κύκλου ΙΓΤ, ΔΗΤ, ΖΟκ ἀγόμεναι περιέχουσι τόξα, ἢ μέρη τῆς περιφέρειας, ἃ ἢ αὖτις ἀλλήλων ὄντα, ἴσονται ἑμψῆς μέρη ὅμοια ἕκαστα τῆς αὐτῆς περιφέρειας· εἰάν φέρε τὸ ΖΟ τόξον δέκατον μέρος ἢ τῆς αὐτῆς περιφέρειας ΖΠκ, ἢ τὸ τόξον ΔΗ δέκατον μέρος εἶσαι τῆς αὐτῆς περιφέρειας ΔΗΤ, ἢ τὸ ΙΓ τῆς ΙΓΤ· ἢ γὰρ σημεία ἰσακνηστοῦν ἐκ Ζ, Δ, Ι τῆς γραμμῆς ΠΖ διήκυσαν ἰσαερίθμα διαβήματα, τῆς ὅλκῃς γραμμ.

48. ΠΖ ἐκ τῷ Ζ ἐς τὸ Ο ἀκτίως (29)· ἐνταῦθα ἔστι ἴσα σημεῖα ὡς ἐπὶ τῷ ΙΓ τῷ ξυ, τῷ αὐτῷ καὶ τῷ ΔΗ, κτλ· ὁ δὲ ἀρθμὸς τῷ δε τῷ σημεῖον ἰμφοῖ. ἐπὶ τὸν ἀρθμὸν τῷ διαδομῶν, ὃ δὴ ἴσος ἡ ΠΖ γὰρ μὲν ἐκ τῷ Ο μέχρι τῷ Ζ.

39. Πᾶσα εὐθεία ἐκ τῷ κέντρῳ ἀρχομένη ἐκ τῆς περιφέρειας τελευτῶσα καλεῖται Ἀκτίς· ὅτω τῆς μὲν ΖΟκ περιφέρειας ἀκτίς ἐστὶν αἱ ΠΖ, ΠΟ τῆς δὲ ΔΗΤ ἢ ΠΔ, ΠΗ

40. Εὐθεία δὲ ἀπὸ τῆς περιφέρειας ἀρχομένη ἐκ τοῦ κέντρου διήκουσα, ἢ ἐφ' ἑτέρῃ σημεῖον τῆς αὐτῆς περιφέρειας ἀφικουμένη Διάμετρος ἡκουσθ· ὅτω τῆς μὲν ΖΟκ περιφέρειας διάμετρος ἐστὶν ἡ ΖΠκ, τῆς δὲ ΔΗΤ ἢ ΔΠΕ· ἐκ ἐκείνης περιφέρειας σημεῖον, ἐφ' ὃ μὴ ὡς ἰσχυρὸν ἐπισηῶσαι εὐθείαν, ἀγαγέτω μὲν ἐκ τοῦ κέντρου, ἐκ τούτου δὲ μέχρι τῷ ἀντιθέτῳ τῆς περιφέρειας σημείῳ ἡκουσθ· (34)· ὁμοιωτὴν ἄρα ἐπισηῶσαι ἐν ἑκάστῳ κύκλῳ ἀπειραριθμὸς μὲν ἀκτίων, ἀπειραριθμὸς δὲ καὶ διαμέτρων.

41. Παντὸς κύκλου τῷ ΖΟκ πᾶσαι αἱ ἀκτίες ΠΖ, ΠΟ, Πκ, κτλ. τῇ ΠΖ ἀκτὶ τῇ διὰ περικυκλῆς τὴν κύκλον γενητάση ἴσαι ἐκδοχῶς ὄναι, ἢ ἀλλήλων ἴσαι ὥσπερ (26). Ἀλλ' αἱ ἀκτίες ΠΖ, ΠΟ κτ. μεταξὺ πρῶτον τὸ τῷ κέντρῳ Π ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς περιφέρειας ἀπέχουσι· πάντα ἄρα τῆς περιφέρειας σημεῖα ἐπίσης τῷ κέντρῳ ἀπέχουσι.

Ἐξέσται ἄρα τὸν κύκλον ὀρίσαι κυκλικῶς, ἢς καὶ τὰ σημεῖα ἐπίσης ἀφίστανται ἀπὸ σημείου ἐκείνου τῆς περιφέρειας κειμένου, ὃ καλεῖται κέντρον.

Διάμετρος πᾶσα ἢ ΖΠκ κατὰ τὸν ὅρον ἐκδοχῆται

ὁρισμὸν, ἡδὲν ἔστιν ὅτι μὴ ἀκτῖνες δύο ΠΖ ἢ Πκ εἰσι τῆς αὐτῆς κείμεναι φασγῆς· ἄρα ἡ ἀκτίς τὸ ἡμισὺ ἐστὶ τῆς διαμέτρου· ἀλλὰ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἰσιν ἰσάλληλαι· ἄρα (Συμ. λ. 234) ἡ πᾶσαι αἱ διαμέτρου ἀλλήλαις εἰσιν ἰσᾶι.

42. Τὸ τριγωνικὸν χωρίον ΠΖΟ, τὸ ὑπὸ δύο ἀκτῶν τῶν ΠΖ, ΠΟ περιεχόμενον, ἢ τῷ ΖΟ τᾶς τῷ ὑπὸ τῶν δι τῶν ἀκτῶν ἀπολαμβάνομενον, καλεῖται Τμήμας· ἢ τὰ χωρία ἄρα ΠΖΑ, ΑΠΒ, κτλ. εἰσι Τμήματα.

43. Χορδὴ, ἡ ὑποτεινύσα καλεῖται (ἤ. 3.) εὐθεῖα πᾶσα ἀφ' ἑνὸς ἐφ' ἑτέρον περιφερείας σημείων εἰσι ζευγυμένη· ὅπως αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΖΓ, Ικ εἰσι χορδαὶ τῷ ΟΖΨΓ κύκλῳ.

Δήλον ἄρα ὡς ἡ πᾶσα διάμετρος ὡς ἀφ' ἑνὸς ἐφ' ἑτέρον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἀγόμενῃ σημείων, ἐστὶ χορδὴ, ὅμην δὲ ἡ πᾶσα χορδὴ ἔστιν ἡ αὐτὴ ἢ διάμετρος· ἵμιν γὰρ εὐθεῖα ΖΚΓ εἰσι πᾶς ἢ χορδὴ ἢ διάμετρος, ἢ δὲ ΠΑ μόνον χορδὴ.

Πᾶσα χορδὴ ΠΑ αἶτι τέμνει τὸ κυκλικὸν χωρίον ΟΠΨΓ εἰς δύο, ὧν ἑκάτερον ὀνομάζεται Τμήμας· τὸ τε ὑν ὑπερθιν τῆς ΠΑ χωρίον ΟΠΒΑ, ἢ τὸ ταύτης ὑπερθιν ΠΧΨΓΑ εἰσι δύο τμήματα ὑπὸ τῆς ΠΑ χορδῆς ὑποτετινόμενα.

44. Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἰσάλληλαι, ἐκ τούτου ἄρα καμπυλότης ἔσται ἡ αὐτὴ ἐν ἀπέσῃ τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ· ἐνταῦθεν ἄρα, ἀνευ ἄλλης τινὸς δειξέως, τὰ ἐφεξῆς συναχθῆναι δύνανται.

45. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πᾶσα χορδὴ διὰ τῷ κέντρῳ διήκουσα, ἢ ΖΚΓ, πᾶσα ἐκ τῷ ἀκολουθεῖ διαμέτρος, εἰς δύο ἰσάλληλα τμήματα διχοτομεῖ τὸν κύκλον, τὰ ΖΚ ΓΨ, ΖΚΓΟ, ἢ εἰς δύο δὲ ἰσάλληλα τῶς τὰ ΖΟΓ,

ΖΥΓ· Πῶς δὲ παρὰ τὴν διάμετρον χορδὴ ἡ ΑΠ τὸ μισαὶ τὸν κύκλου εἰς δύο ἴσας τμήματα, διχοτομῇ τὴν ἐκλήκην περιφέρειαν εἰς δύο ἴσας τήξας· ἡ τὸ μὲν μισὸν ἀντιμέσθον τὸ ΠΑΚΨ καλεῖται Τμήμα μείζον περὶ τμήτων ὑπὸ τῷ μείζονος καλεμένου τόξου ΠΨΑ (44)· τὸ δ' ἑλάττω, ἑλάττωον ὑπὸ ἑλάττωος τόξου περιμετρζόμενον.

46. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πῶς ἄρα χορδὴ ἡ ΠΑ ὑπερβαίνει διὰ τήξας τὸ ΠΟΑ, ΠΨΑ.

47. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Χορδαὶ ἄρα ἴσαι εἰσι τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ἡ ἐπὶ ἰσακλήλων κύκλων, ἴσα τήξας ὑποτίσθαι· ἴσω γὰρ ἡ ΠΑ χορδὴ ἴση τῇ Ια· ἡ δὲ τὸ ἑλάττω τόξον ΠΟΑ τὸ ὑποτινόμενον ὑπὸ τῆς ΠΑ χορδῆς ἰσωδύεται τῷ ἑλάττω Ιαψ τῷ ὑποτινόμενῳ ὑπὸ τῆς χορδῆς Ια· αἱ δὲ αἰσιν χορδαὶ ΠΑ, ΧΤ ὑποτίσθαι αἰσιν τήξας τὰ ΠΟΑ, ΤΨΧ· Ἀλλὰ γὰρ ἐν δυσὶ κύκλοις διαφέρεισθαι ΟΠΨΑ, ΡΗΔ, χορδαὶ ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι αἱ Ια, ΗΔ, ὑποτινῶσι τήξας αἰσιν· φησὶ δὲ ὡς τὸ ΙΨα τήξων μείζον εἰσι τῷ ΗνΔ· ἔχ' ὅτι ἰσοδυναμεῖ γραμμῇ εὐθείᾳ μαζοι, ὡς φανήσεται ἐν ταῖς ἐφεξῆς, διὰ τὸ εἶναι καμπυλωτέραν, ἀλλ' ὅτι, καθὰ δεῖ ὁταῦθα ἐκληφθῆναι, μείζον εἰσι τῷτο μέρος τῷ ἑλάττωος κύκλου, ἡ εἰσι τῷ ΗνΔ τῷ μείζονος· τῶντι γὰρ εἰάν τὸ ΙΨα τὸ πέμπτον ἢ πέμπε τῷ ἑλάττωος κύκλῳ, τὸ ΗνΔ ἑλάττωον ἴσων ἡ περιτημόριον τῷ μείζονος (44).

48. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ ΖΥΚ τὸ μείζον τόξον ὑπὸ μείζονος χορδῆς ὑποτίσθαι, τὸ δ' ἑλάττωον ὑπὸ ἑλάττωος, ἡ ἀντίστροφως· τὸ γὰρ τόξον ΙΨα μείζον εἰσι τῷ ΧΨΤ, ἡ δὲ χορδὴ Ια μείζων τῆς ΧΤ.

49. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐπεὶ ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ ἡ ἡ

μυδιάμετρος τὸ μέγεθος ὑποτίθει τοῦτον, ἔστι ἄρα αὕτη ἡ μέγιστη πασῶν τῶν χορδῶν.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐν ἡμικυλίῳ ἄρα αἱ χορδαὶ ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ὃ καλεῖται διὰμέτρος ὡς πρὸς τετρασμένον τι τοῦτον (Συμβ. λογ. 530.). ἔκαστ' αὖ μικρὸν αὔξουσαι, τελευτῶσιν εἰς τὸν μέγιστον ἴσον τῷ ἡμισί τῆς ὅλης περιφέρειας (37).

51. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Ἐν δισίῳ ἄρα ἡμικυλίῳ ἡ σὺν τῇς ΖΟΚ, ΖΨΚ, αἱ ἴσες ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου χορδαὶ ΠΑ, Ια ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἃ αἱ ἴσαι ἴσων αὖτις τῷ κέντρῳ ἀπέχουσαι (44).

52. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Ἐν κύκλῳ τῷ ΟΖΨΓ ἐν χορδῇ πρὸς χορδῶν παρεμβληθῇ ὡς πρὸς τὸ μείζω, ὡς ἐλάττω ὑποτίθει, τοῦτον, ὥσω μείζον εἰς τὸ τοῦτον, τοσούτ' ἐλάττωσαν ἐπὶ τῇ χορδῇ· ὅπως ἡ ΧΤ χορδὴ τὸ μείζω ὑποτίθουσα τοῦτον ΧΟΤ ἐλάττωσαν εἰς τῆς χορδῆς Ια τῇ ἐλάττω ὑποτιθέσθης τοῦτον.

53. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Ἐντεῦθεν ἄρα μετὰ τὸ παρεμβλῆναι τῆς ΙΒΟ, εἰς ἅς τὰ τοῦτα αὔξονται, αἱ χορδαὶ φθίνουσιν εἰς 360 (37).

54. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συχνάκις συμβαίνει αὐξέσθης τοῖς ποσότητις ἐξ ἑτέραν συναύξειν, ἢ μείναι ἀναλόγως· ἐπὶ ἐκάστῳ ἄρα αὐτῶν χρειαῖ ἐπὶ τῶν ταύτων ποσοτήτων· σαφές γὰρ εἶρε, ὅτι ὅσῳ μείζων εἰς ἀριθμῶς τις, τοσούτω μείζων ὑπάρχει καὶ ὁ ἀπ' αὐτῇ τετράγωνος· ἄλλ' οὐκ οὕτως εἰσὶ τετράγωνοι δύνανται ἀνάλογοι ταῖς αὐτῶν ῥιζαῖς. εἴγε τοῦ μὲν διπλασίου ὄντος, ἢ ἄλλου, ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος, ὡς ἡ φύσις τῆς ἀναλογίας ἀπαιτεῖ, ἢ εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου διπλάσιος, μᾶλλον μὲν ἔν τετραπλάσιος· εἰάν δὲ ἕτερος ἢ

ἑτέρῃ τριπλάσιον, ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετραγώνου εἰσὶν
 τλάσιος (Συμβ. λη'. 310) ἔσται τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου, ἀλλ'
 ἐν τριπλάσιον· Ταῦτ' ἄρα παρατηρητέον καὶ ἐν τῷ τό-
 ξῳ εἰς χαρδῶν. συνιζύουσι μὲν γὰρ αἱ χαρδαὶ τοῖς τόξοις
 μέχρι 180°, τότεν τε αὐξομένην εἰσὶναι φθίνουσαν εἰς τὰς
 360°, ἥντις μέγιστον κατ' ἀπλογίαν· ἐν γὰρ ἐν ἡμικυ-
 κλίῳ τόξῳ τὴν διπλάσιον ἢ φέρει ἑτέρῃ (30), ὅτι παρὰ τοῦ-
 τος εἰς ἡ χαρδὴν εἰσὶν διπλάσιον ἴσεται τῆς τότε· Δῶμον
 γὰρ (χ. 4.) δὴ τὸ τόξον ΠΟΑ διπλάσιον εἴναι τῷ τόξῳ
 ΠηΟ· ἐκὼν παρὰ ταῦτα εἰς ἡ ΠΑ χαρδὴ διπλάσιον ἴσεται
 τῆς ΠΟ χαρδῆς· διὰ γὰρ τὰ ἰσάλληλα τόξα ΟΒΑ,
 ΠηΟ, ὥστερ' ἑκαστὸν ἴμωσιν εἰς τὸ ΠΟΑ τόξον, εἰτε ἡ ΠΑ
 χαρδὴ διπλάσιον ἢ τῆς ΠΟ, ἴσεται ὡς ταῖς διπλ. ΠΟ, εἰ ΟΑ,
 ἢ τῇ ὅλῃ γωνίᾳ ΠΟΑ. ἀλλὰ μὲν τῆς τε ΠΑ εὐθείας
 εἰς τῆς ΠΟΑ γωνίας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τὸ
 αὐτὸ Α ἐπιζυγυμείωσιν, (17) ἢ εὐθείας τῆς γωνίας
 ἔσται ἐλάττω· ἢ ἄρα ΠΑ χαρδὴ καίτη ἰσότησεν τὸ
 τόξον διπλάσιον τῷ ΠηΟ, ὅτι μέγιστον παρὰ ταῦτα εἰς διπλά-
 σιον τῆς χαρδῆς, ἢ ἰσότησιν τὸ ΠηΟ τόξον· ἐν γένει ἄρα
 ἐν ἡμικυκλίῳ τῶν χαρδῶν τοῖς τόξοις συνιζύουσιν μὲν εἰς
 τὰς 180°, φθίνουσιν δὲ ἐν τῷ εἰσὶν αὐξομένην εἰς τὰς 360°,
 ὡς ἡ αὐξήσις τῇ αὐξήσει, ὡς ἡ μείωσις τῇ αὐξήσει ἀ-
 νελόγως γίνονται.

35. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐν κύκλῳ, ἢ ἐν διπλῇ ἴσας
 κύκλοις, αἱ ἴσαι χαρδαὶ ἴσων ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὅ
 ὡς τισὶν ἴσως.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ'. Τὸ γινώσκον σημεῖον Ζ (χ. 2)
 κατ' ἀνάγκην ἐν ἐκαστῷ διαβήματι περιτρεφίται τῆς
 προῦθι φερέας (23)· ἐκ διαδοχῆς ἄρα τότε τὰ τῆς
 περιφερείας σημεῖα μεταβάλλεται τὴν ἐκαστὴν φερέαν.

36. α. Ἄρα ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ἔχει τρεῖς σημεία ἐπ' εὐθείας γραμμῆς· ἢ πάντα τὰ ἀλληλοδιαδοχὰ σημεία φέρει ἢ μεταβαλῶσιν, ὅπερ ἔστι πον (ἀνωτ.).

37. β'. Χωρὴ ἡ ΑΠ (χ. 3) ἢ δύναται τέμνειν τὸν κύκλον κατὰ σημεία πλείω, ἢ δύο τὰ Α, Π· ἄλλως γὰρ ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ἔχει τρεῖς σημεία κατὰ τῇ ΑΠ εὐθείᾳ, δι' ὧν ὑποτιθέσεται τέμνειν τὸν κύκλον· ἀδύνατον δι' τούτο, ὡς ἤδη δίδεικται.

38. γ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΠ (χ. 5) ἐπὶ κύκλῳ περιφέρειαν προσπίπτουσα, αὐτὴν μίαν μὴ τέμνουσα, καὶ ἐν μόνῳ σημείῳ τὸ Π αὐτῆς ἐφάπεται· εἰ γὰρ κατὰ δύο, προσχθεῖσα ἐπέκεινται τῷ Π, ὥς ὅν διελθῶσα ἐπ' εὐθείας μέρεσσι κυκλικῶν, ἐπιφάνειά τῆς κυκλικῆς περιφερείας ἐκ νῦν, ἄψεται κατὰ σημεία τρεῖς αὐτῆς, ὅπερ ἤδη ἀδύνατον δίδεικται.

39. δ'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὐθεῖα ἡ ΞΡ κύκλῳ διαπερῶσα ἢ δύναται τέμνειν αὐτὸν κατὰ πλείω ἢ δύο σημεία τὰ Ψ, τ.

40. ε'. Κύκλος ὁ ΟΔΤ ἢ δύναται ἐπιφύγειν κύκλῳ τῷ ΔΖΨ κατὰ πλείω ἢ ἐν σημείον τὸ Δ.

41. ς'. Δύο κύκλοι ἑκκαπτεροι, ὧν ἑμῖλοι ἕκ ἐστι κέντρον κοινόν, οἱ ΟΔΤ, ΟΤΠ κατὰ δύο μόνον τέμνονται σημεία τὰ Ο, Τ. Αὐτίκα γὰρ δῆλον, ὅτι τὸ τῷ ΔΖ κύκλῳ γεννητικὸν σημείον ἐκείδαν κατὰ τὸ Δ συναντήσῃ τῷ τῷ ΟΔΤ κύκλῳ γεννητικῷ σημείῳ, εὐθὺς ἀλλήλων ἀποχωρήσουσι ἐν τῷ μὲν ἐνιχθήσεται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ζ, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Τ.

42. ζ'. Δύο ἄρα κύκλοι τρεῖς κοινὰ σημεία ἔχ' ἔχουσιν· εἰ γὰρ τούτο, ἐν τρισὶ τμηθήσεται σημείαις, ὅπερ ἀδύνατον (41).

43. η'. Ἰκανὰ ἄρα τρεῖς σημεία τὴν τῷ κύκλῳ δε-

ση ὀρίσται· καταδηλόν δὲ ἐκ τούτου, ὅτι δύο κυκλικαὶ περιφέρειαι ἐν δύο μόνον σημείοις διατόμονται ἢ ἂν ὅλως (61).

64. Διὼ δὲ σημεία τὰ Ο, Τ ἐχ' ἑκάστην ὀρίζουσιν τῇ κύκλῳ θέσιν, ὡς ὀρίζουσι τὴν τῆς εὐθείας· διὰ γὰρ δύο σημείων δύο διάφοροι κύκλοι εἰ ΟΔΤ, ΟΤΠ διηγαίονται.

65. Αἰτησίμεια ἔν ἐν ταῖς ἐφεξῆς πρὸς κατασκευῇ, Πρὸς τὸ σημείῳ ὡς κέντρῳ, καὶ ἀπὸ τῇ τυχούσῃ, κύκλῳ γράφειν.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ εὐθειῶν Καθέτων καὶ Πλαγίων.

66. Εὐθεία ἡ ἡβ ἐφ' ἑτέραν τὴν καὶ πίπτουσα (χ. 6) ποιεῖ σὺν αὐτῇ δύο ἀνοίγματα, ἃ καλεῖται γωνίαι· τοιαῦτα εἰσὶ τὸ χωρίον β, ὃ παρ' ἡ ἡβ καὶ βδ, καὶ τὸ χωρίον χ, ὃ ποιεῖ ἡ αὐτὴ ἡβ σὺν τῇ χκ.

67. Γωνία ἄρα ἐστὶ χωρίον ἀπολαμβάνομεν ὑπὸ δύο εὐθειῶν, ὧν ἑτέρα ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἐφίσηται· τὸ δὲ β σημείον, καθ' ὃ συνίσταται αἱ δύο εὐθεῖαι, καλεῖται κορυφὴ τῆς γωνίας· αἱ δὲ εὐθεῖαι ἡβ, βδ αἱ διευργοῦνται τῷ γωνιώδει χωρίῳ, πλευραὶ τῆς γωνίας· αἱ μὲν ὡς ἡβ, βδ πλευραὶ εἰσι τῆς β γωνίας, αἱ δὲ ἡβ, χκ τῆς χ.

68. Διτταχῶς σημαίνεται ἡ γωνία· α'. ἐπὶ μόνῳ γράμματι ἐπιχαρᾶσθαι τῇ τῆς γωνίας κορυφῇ, ἢ ἐπὶ τοῖς αὐτῆς τῆς γωνίας· β'. τρισὶ γράμμασιν, ὧν τὸ μὲν πρῶτον καὶ τρίτον ἐπιχαρᾶσσεται τοῖς τῶν πλευρῶν πέρας.

σι, τὸ δὲ μέσον τῇ κορυφῇ τῆς γωνίας· ἔτω τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν δυνάμεθα ἐκδηλῆν λέγοντες: ἡ β γωνία, ἡ εἰς διὰ τῶν τριῶν γράμματων η, β, δ, τῷ μέντοι μέσῳ μάλισα τὸν νῦν προσέχοντες ὡς ἐκείνῳ ἀληθῶς τὴν γωνίαν ἐμφαίνοντι· ἀναγινώσκομεν δὲ ἔτως: ἡ ὑπὸ ηβδ γωνία, ἡ μόνον ἡ ηβδ γωνία.

69. Κάθετος ἡ πρὸς ὀρθὰς ἰσαμένη καλεῖται εὐθεῖα ἡ ηβ, ἡ πίπτουσα ἐφ' ἐτέρας εὐθείας τῆς κδ ἢ κλίνει μᾶλλον ἐπὶ θάτερα, ἢ ἐπὶ θάτερα, τὰς τε ἐφεξῆς γωνίας χ εἰς β ἴσας ποιῶσα, εἰς αὐταῖς παρασκευάσασα καλεῖσθαι γωνίαις ὀρθαῖς.

70. Πλαγία δὲ εὐθεῖα καλεῖται ἡ ΠΔ (σχ. 7), ἡ ἐφ' ἐτέρας τῆς ΑΟ πίπτουσα κλίνει μᾶλλον ἐπὶ θάτερα, ἢ ἐπὶ θάτερα· αἱ δὲ ἐφεξῆς γωνίαι Δ εἰς Α, ἅς σὺν τῇ ἐτέρᾳ ποιεῖ ἡ πλαγία, εἰσὶν ἀνισοί· ἡ γὰρ πρὸς α μᾶλλον ἡ πλαγία κλίνει γωνία ἔσι τῆς ἐτέρας ἐλάττων· τέτων δὲ ἡ μὲν ἐλάττων Δ καλεῖται Ὀξεία, ἡ δὲ μείζων Α, Αμβλεία.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἡ πλαγία ἄρα εἰς ἔτως ὀριζήσεται, ὡς ἔστιν ἀμέλει ἡ ἐφ' ἐτέρας γραμμῆς εὐθείας πίπτουσα, εἰς δύο ἀνίσους γωνίας συνισῶσα.

72. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὸ αὐτὸ διάνοιγμα (σχ. 6), ὃ ἀφορίζει τὴν ἐτέραν τῆς ἐτέρας εὐθείας κοινὸν ἐσι πάντως ἐμφοτέραις· ἐκὼν ἐὰν εὐθεῖα ἡ κβ κάθετος ἡ ἐτέρᾳ τῇ βδ, εἰς ἡ βδ ἔσαι ἀμοιβαδὸν κάθετος τῇ ηβ· ἡ, ὃ ταυτὸν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῇ κβδ πίπτῃ ἡ ηβ, ἐξέσαι εἰπεῖν, ὅτι εἰς ἡ βδ πρὸς ὀρθὰς πίπτει τῇ ηβ προαχθείσῃ, ταυτὸν εἰπεῖν τῇ ηβ Ζ.

72. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐὰν ἡ ΑΠ (σχ. 7)

πλαγία ἢ ἐπὶ τῆς ΑΟ, καὶ ἡ ΑΟ εἶναι πλαγία ἐπὶ τῆς ΑΠ.

74. ΑΙΤΗΜΑ. Η' ΠΖ εὐθεία ἐπιτεθείσα τὸ κατ' ἀρχὰς τῇ ΠΟ (σχ. 2) περιήχθω περὶ τὸ μένον σημεῖον Π ἡμικυκλικὴν περιαγωγὴν τὴν ΟΖΑΒ· ἐκ ταύτης ἐν τῷ κινήσει ἐκ τῷ Ο ἕως τῷ Α γεννηθήσονται πᾶσαι αἱ δυναταὶ ὀξεῖαι γωνίαι (*). ἡ γὰρ μετὰ τὸ πρῶτον διαβήμα, καθ' ὃ ἀποχωρίζεται τὸ Ζ σημεῖον τῷ Ο, σχηματίζεται ἐκ τῆς κινήσεως εὐθείας ἡ τῆς μενέσης ΠΟ γωνία ἀπειροῦς ὀξεῖα· μετ' ἑκάστην δὲ τῶν ἐφεξῆς διαβημάτων ἡ ΠΖ μετὰ τῆς ΠΟ αἰεὶ ποιήσει καινὴν γωνίαν ὀξεῖαν μείζω τῆς πρὸ αὐτῆς· τέλος δὲ, πρὶν ἢ διαλύσῃ τὴν αὐτῆς ὁδὸν ἡ ΠΖ, πρὶν ἢ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον Ζ συμπέσῃ τῷ Α, ποιήσει μετὰ τῆς ΠΟ τὴν μεγίστην πασῶν ὀξεῖαν γωνίαν· ἐν δὲ τῷ διαβήματι, καθ' ὃ τὸ Ζ τῷ Α συναφθήσεται σημείῳ ἢ ὑπὸ ΑΠΟ γωνία τῷ μὲν εἶναι ὀξεῖα παύσεται, γενήσεται δὲ ὀρθή· ὅ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΠΟ συνεχισμένη τηρικαῦτα ὑπὸ τῆς ΠΖ εὐθείας συμπίπτουσα τῇ ΠΑ ἰσωθήσεται τῇ β ΠΑ γωνία (69).

Α'λλὰ γὰρ ἡ ΠΖ γραμμὴ ἐφικνόμενη ἐπὶ τῆς ΠΑ θέσεως ποιεῖτω ἔτι διάβημα ἐν πρὸς τὰ ἐπὶ β· ἔκτ' ἢ γένῃ γωνία, ἣν ποιήσει μετὰ τῆς ΠΟ εἶναι μείζων τῆς ὀρθῆς ΑΠΟ γωνίας, εἴτ' ἢ ποιήσει γωνίαν ἀπειροῦς ἀμβλείαν, εἰ δεῖ ἔτι φαῖναι, εἴτ' ἢ γωνίαν ἀμβλείαν πασῶν τῶν ἀμβλείων ἐλαχίστην.

75. Η' ΠΖ ἔτιω συνεχίζουσα τὴν ἑαυτῆς ὁδὸν ἐς ὃ

(*) Εὐθεῖα ἡ ΠΖ εὐθεῖα ἑτέρα ἰσχυαμένη τῇ βΠΟ δύο μὲν γωνίας ποιεῖ· ἡμῖν δ' ἐνταῦθα μία μόνη ἐξετάζεται, εἴτ' ἢ ἡ ἐντοῖς δεξιότις κειμένη ὑπὸ ΖΠΟ.

συμπέση τῇ ΠΒ παράξει ἐκ διαδοχῆς πάσας τὰς δυνα-
τὰς ἀμβλείας γωνίας· ἐν ᾧ δὲ ἐνὸς μόνου διαδήματος δεῖ
πρὸς τὸ τὴν ΠΖ συμπεσεῖν τῇ ΠΒ, ἐν τούτῳ δὲ μετὰ
τῆς ΠΟ εὐθείας ποιήσει ἀμβλείαν γωνίαν, ἥτις ἐστὶ πα-
σῶν μεγίστη τῶν ἀμβλείων.

76. Συμπεσούσης δὲ ἤδη ἐν τῷ ἐσχάτῳ τῷδε δια-
δήματι τῇ ΠΒ, ἢ ἐν γενόμεναι ἀμφω, ὑδεμίαν τῇ ΛΟ.
πῶ ποιήσους γωνίαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ὅταν ποσό-
της, ὅσον ἂν ἐξῇ, αὐξηθῇ, ἢ ἐπὶ τὸ καλυμένον ΜΕ-
γιστον ἵκηται, εἰν τῷ τυχόντι ἐτι προσαυξηθῇ, ὑφ'
ἐαυτῆς ἀφανίζεται· εἰν γὰρ τῇ μεγίστῃ ἀμβλείᾳ γω-
νία προσεπιτεθῇ ἐν ἐτι διάδημα ἢ ἀπείρως μικρόν, ἢ ἀμ-
βλεία γωνία ἐπὶ τὸ μηδὲν τρέπεται· τοῦτ' ἐστὶν ἡ πα-
σα γωνία ὅτως ἐξυδενῆται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ μέτρων τῶν γωνιῶν.

77. Εὐδὴλον ἅπαντι ὡς ἡ ὑπὸ ΖΠΟ γωνία (σχ. 2)
ἡ ὑπὸ τῶν ΠΖ, ΠΟ εὐθειῶν περιεχομένη, ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς
τῶν διαδημάτων, ὧν διήνυσεν ἡ ΠΖ ἰν' ἐκ τῆς Ο ἐπὶ τὸ
Ζ ἐφίκοιτο· ὁ δὲ δύναται ἀδιαφόρως ἐκτεθῆναι, εἴτε διὰ
τῆς ΖΟ τόξου, εἴτε διὰ τῆς ΔΗ, εἴτε διὰ τῆς ΙΓ κτ. δέ-
δεικται γὰρ πρὸ μικρῶ, ὅτι ὅσα σημεῖα περιέχει τὸ ΟΖ,
τοσαῦτα ἢ τὸ ΔΗ, ἢ τὸ ΙΓ, κτ., ἢ δὴ ὅτι ὁ τῶνδε
τῶν σημείων ἀριθμὸς παρίσχησι τὰ διαδήματα, ἃ διήνυσεν
ἡ ΠΖ ἐκ τῆς Ο ἕως τῆς Ζ (38)· ἐντεῦθεν ἄρα.

78. α. Μέτρον γωνίας τῆς ν ἐστὶ τόξον τὸ ΖΟ, ἡ

μέρος ZO τῆ ZOK κύκλου τῆ γεγραμμένης περὶ τὴν ν κορυφὴν ταύτης τῆς γωνίας ὡς περὶ κέντρον, ἀπολαμβάνομεν ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΠZ , ΠO .

79. β'. Ἡ γωνία τῆς ν δύναμις ἐδ' ἐκ τῆ μήκους τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἐδ' ἐκ τῆ μεγέθους τῆ περὶ αὐτὴν γεγραμμένης κύκλου ἡρτῆται· εἶδομεν γὰρ ὡς γωνία ἡ ν ἐπίσης ἔχει μετρηθῆναι τῷ τε τόξῳ ZO τῷ ἀπολαμβανόμενῳ ὑπὸ τῶν ΠZ , ΠO πλευρῶν, καὶ τῷ τόξῳ ΔH τῷ ὑπὸ τῶν $\Pi \Delta$, ΠH , αἱ ἐλάττους τε εἰσι τῶν ΠZ , ΠO , καὶ κύκλῳ ἐλάττωσι τῆ ZOK ἐπανήκεσι (77).

80. γ'. Εἰς καταμέτρησιν ἐν γωνίας ἀπάσης τῆς ν ἀποχρήσει ἔχειν ἡμικύκλιόν τι, μείζον ἢ ἐλάττω, διηρημένον μέντοι εἰς τὰς αὐτῆς 180 μοίρας· τιθεμένου γὰρ τῆ μὲν κατ' αὐτὸ κέντρου ἐπὶ τῆς Π κορυφῆς τῆς γωνίας, τῶν δὲ πλευρῶν ΠZ , ΠO μειώσει ἢ προαγωγῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τῆ ἡμικυκλίου ἐπεριωθεισῶν, αὐτίκα δὴ διηριθθήσεται ἡ δύναμις τῆς γωνίας· εἰ μὲν γὰρ φέρεται ΠZ , ΠO πλευραὶ περιέχεσι τόξον 50° , ἡ γωνία ἔσεται μοιρῶν 50.

Τῷ δὲ τὸ ἔτω διηρημένον ἡμικύκλιον Ἀ' ναγωγεὺς λέγεται, ἢ Γραφόμετρον.

Ἀναγωγεὺς ἐστὶν ἡμικύκλιον, οἷον τὸ $ZAHK$ (σχ. 8) ἐσκαμμένον τὰ ἐντὸς πρὸς τὸ δύνασθαι τὸν Γεωμέτηρ ὁρᾶν ἐν τοῖς κενοῖς τὴν τῶν πλευρῶν τῆς εἰς καταμέτρησιν προκειμένης γωνίας διεύθυνσιν.

81. Τὸ δὲ Γραφόμετρον (σχ. 9) τὸ αὐτὸ τῶν ἄλλων τῷ Ἀναγωγεὶ ἔχει καὶ κανόνα τὸν OK προσηρμοσμένον μὲν τῶν K κέντρῳ, κινητὸν μέντοι περὶ τὸ κέντρον, ὃς ἀπὸ τῆς Γωνιόμετρον· πρὸς ὁρθὰς δὲ αὐτῷ ἐπὶ τῶν περὶ αὐτὸν ἐσθῆκεσι δύο κλωνίδια χαλυβός, ἢ ἑτέρας ὕλης,

τὰ κχ, πν· εἰσὶ δὲ τετρημένα δι' ὅλα πρὸς τὸ διευθύνε-
σθαι αὐτόθεν τὸν ὀφθαλμόν· καλῶνται δὲ Διόπτραι.

82. Ἰδὲ δὴ νῦν αἱ ἀρχοειδέσσεραι χρήσεις ἐκ-
τέρω τῶνδε τῶν ὀργάνων· χρῶνται δ' αἱ ἐπὶ μὲν χάρτε
τῷ Ἀναγωγεί, ἐπεὶ δὲ τῆς γῆς τῷ Γραφομέτρῳ.

83. Ἐπὶ μὲν ἔν χαρτε, τιθεμένω τῷ κατὰ τὴν Ἀν-
αγωγέα κέντρῳ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν γωνίαν κορυφῆς, ὁ-
ρῶμεν πόσας μοίρας περιέχουσιν ἐπὶ τῷ Ἀναγωγέως αἱ
τῆς γωνίας πλευραὶ, ὡς ἔῃ ἤδη εἰρηται (80).

84. Ἰνα δὲ τὴν ἐπιταχθεῖσαν γωνίαν ἐν χαρτῇ
γράψωμεν (χ. 7), τὴν 25° φέρε· α'. ἤχθω εὐθεῖα ἡ
ΑΟ· β'. τὸ τῷ Ἀναγωγέως κέντρῳ τεθείσθω ἐπὶ τῷ Α
πέρας ταύτης τῆς εὐθείας, ἔ σημειωθήτω τὸ Ο σημεῖον
τῆς περιφερείας τῷ Ἀναγωγέως, ἔνθα ἐπαριθμῶνται 25° .
σημειωθήτω δὲ αὐτῷ ἀντίστοιχον ἐπὶ τῷ χαρτε τὸ Π, ἐξ
ὧ ἐπὶ τὸ Α ἤχθω ἡ ΑΠ εὐθεῖα· εἰδηλόν ἔν ὡς ἡ ΑΠ συν-
τῇ προτῇ ΑΟ περιέξουσι γωνίαν τὴν ὑπὸ ΠΑΟ μετρεμέ-
νην ὑπὸ τῷ 25° .

85. Ἐὰν δὲ ζητῇται γωνίαν συστήσασθαι (χ. 10) ἴσην
τῇ δοθείσῃ ΑΠΖ, ληφθεῖσης διὰ τῷ Ἀναγωγέως τῆς
κατὰ τὴν δοθείσαν γωνίαν δυνάμεως, μοιρῶν φέρ' εἰπεῖν
ἕως 40, συστήσομεν ἑτέραν μοιρῶν 40 κατὰ τὸν ἄρτι εἰ-
ρημένον τρόπον.

Ἐξέσαι δὲ γωνίαν συστήσασθαι καινὴν τὴν ΓΟΧ ἴσην
τῇ δοθείσῃ ΑΠΖ ἔ κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

86. α'. ἤχθω γὰρ διὰ τῷ κανόνος εὐθεῖα ἡ ΓΘ
β'. κέντρῳ μὲν τῷ Θ ἀκτίνι δὲ τῇ ΘΓ γεγράφθω ἀόρι-
στον τόξον τὸ ΕΟΔ (65)· γ'. κέντρῳ μὲν τῇ Π κορυφῇ
τῆς δοθείσης ὑπὸ ΑΠΖ γωνίας, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, ἔ
ἔ πρὶν, γεγράφθω τὸ ΗΙ τόξον· δ'. εἰλήφθω τῷ διαβί-

τῇ τὸ μῆκος τῆ HI τόξου, καὶ μεταβιβασθῇτω ἐκ τῆ E ἐπὶ τῆ ἀορίστου τόξου $EOΔ$, καὶ σεσημειώσθω τὸ O σημεῖον, ἐφ' ᾧ ἴσεται τὸ σκέλος τῆ διαβήτου· ε'. ἐπεζεύχθω ἡ $ΘΟΧ$, ἥτις σὺν τῇ $ΓΘ$ εὐθείᾳ ποιήσῃ γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΓΟΧ$ ἴσην τῇ ὑπὸ $ΑΠΖ$.

Ἐκ γὰρ τῆς τῆ σχήματος κατασκευῆς τὰ τόξα HI , EO εἰσὶν ἰσάμμηλα· ἐπεὶ ἔν μέρη εἰσὶν ἴσα δυοῖν ἰσαλλήλων κύκλων γεγραμμένων περὶ τὰς κορυφὰς τῶν $Π$, $Θ$ γωνιῶν· καὶ αἱ γωνίαι ἄρα $ΑΠΖ$, $ΓΟΧ$, ὥς αὐτὰ μετρεῖσιν, εἰσὶν ἰσάμμηλοι (78).

87. Εἰς καταμέτρησιν δὲ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΑΠΖ$ (α. 10) ἐπὶ τῆς γῆς γεγραμμένης, πρῆξις δὴ αὕτη χρησιμωτάτη τῶν τῆς Γεωμετρίας, καὶ συχνάκις ἐπαναλαμβανομένη, χρῆσέον τῷ Γραφομέτρῳ· α'. κειμένῃ τῇ κατὰ τὸ Γραφομέτρον ποδὸς ἐπὶ τῆς $Π$ κορυφῆς τῆς εἰς καταμέτρησιν προκειμένης γωνίας, τιθέσθω τὸ ἐπίπεδον αὐτῷ ὅσον ἔ παραλλήλως τῷ τῆς καταμετρηθισομένης γωνίας ἐπίπεδῳ· β'. διευθυνέσθω ἔτω τὸ Γωνιόμετρον, ὥς εἶναι ὁρᾶν διὰ τῶν διοπτρῶν ἀντικείμενόν τι ἐπὶ τῆς $ΠΑ$ γραμμῆς, οἰκοδόμημά τι φέρε κείμενον ἐπὶ τῇ A , καὶ σημειώσθω ἐπὶ τῆς περιφέρειας τῆ Γραφομέτρου τὸ σημεῖον, ἢ ὁ H ἀριθμὸς, ὃ ἀντιστοιχεῖ τὸ Γωνιόμετρον· γ'. περιστρεφένθω πρὸς τὸ Z τὸ Γωνιόμετρον, ἕς τ' ἂν ἴδῃ ὁ θεατὴς ὁρατόν τι κείμενον ἐπὶ τῆς $ΠΖ$ γραμμῆς, ἄνθρωπον φέρε ἰσάμενον ἐν τῷ Z · δ'. ζητειώθω ἐπὶ τῇ Γραφομέτρῳ πόσας μοίρας διῆλθε τὸ Γωνιόμετρον ἐν τῇ περιφερείᾳ ἣν ἡ διεύθυνσις $ΠΑ$ εὐρεθείη ἐπὶ τῆς διευθύνσεως $ΠΖ$ · ἔτος ἔν ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν, ἢ ἡ δύναμις τῆ HI τόξου τῆ ἐν τῷ Γραφομέτρῳ ὑπὸ δυεῖν διευθύνσεων $ΠΑ$, $ΠΖ$ τῆ Γωνιομέτρου περιεχομένη, ἐμφανεῖ ὁντως ἐν μοίραις

δύντην τῆς ὑπὸ ΑΠΖ κατὰ γῆν προκειμένης εἰς κατα-
μέτρησιν γωνίας, ὅπερ ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων καταδήλου.

88. Ἰνα δὲ συσάβῃ κατὰ γῆς ἐν τῷ Π γωνία ἴση
τῇ δοθείσῃ, φέρ' εἶπεν 40° , τίθεσθω τὸ γραφόμετρον
ἐπὶ τῷ σημείῳ Π, καὶ προσπηγνύσθω πάσσαλος κατὰ τὴν
φορὰν ΠΑ, ἣν ἠνέχθη τὸ Γωνιόμετρον· ἐκ τούτου δὲ περι-
σφρέσθω ἢ διόπτρα πρὸς τὸ Ζ φέρε μέχρις ἂν διέλθῃ
μοίρας τῷ Γραφόμετρον 40° · ἐξῆς δὲ προσπηγνύσθω πάσ-
σαλος κατὰ τὴν ΠΙΖ φορὰν, ἐφ' ἧς ὀρίζονται αἱ 40 μοί-
ραι, φέρ' εἶπεν ἐπὶ τῷ Ι. Τέλος δὲ αἱ ἐκ τῷ Π ἀχθεῖσχι
εὐθεῖαι, ἡ μὲν πρὸς τὸν Α πάσσαλον, ἡ δὲ πρὸς τὸν Ζ,
περιέξουσιν τὴν ζητούμενην 40° γωνίαν· μετρηθήσεται γὰρ
αὕτη ὑπὸ τῷ κατὰ τὸ Γραφόμετρον τόξῳ ΗΙ, ὃ ἐστὶ μοι-
ρῶν 40 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Παντοίων γωνιῶν ἐκτίμησις.

89. Ἦνικ' ἂν εὐθεῖα ἡ ΚΖ (σχ. 11) ἐφ' ἐτέρας τῆς
ΒΚΟ σαβῇ, τὸ ἄθροισμα τῶν διεπν γωνιῶν ΖΚΟ, ΖΚΒ,
τῶν ἐπ' αὐτῆς γινομένων, αἰ καταμετρεῖται διὰ ἡμικυ-
κλίου, εἴτ' ἐν μοιρῶν 180° · εἴγε ἡ μὲν ὀξεία γωνία ΖΚΟ
μετρεῖται ὑπὸ τῷ τόξῳ ΖΟ, ἡ δ' ἀμβλεία ΖΚΒ ὑπὸ
τῷ ΖΑβ· ἐστὶ δὲ $\text{ΖΟ} + \text{ΖΚΒ} = \text{ΟΖΑβ} = 180^\circ$.

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πᾶσαι ἄρα αἱ γωνίαι, αἱ ἐπὶ
μίας εὐθείας ἐκ πολλῶν ἐφ' ἐνὸς αὐτῆς σημείῳ συνισθῶν
εὐθειῶν συνισάμεναι, αἰ ἐσονται 180° · εἴγε αἱ γωνίαι ΖΚΟ
+ ΖΚΑ + ΑΚΒ καταμετρῶνται περικρῶς ὑπὸ τῷ ἡμικυ-
κλίῳ ΒΑΟ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τῆς ΑΠ (χ. 2) πρὸς ὀρθὰς ἰσαμένης τῇ ΠΒ, ἡ ὑπὸ ΑΠΒ γωνία ἔσται ὀρθή (69) καὶ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΠΟ· ἐπεὶ δὲ τῶν δυεῖν ὁμῶς μέτρον ἔσται τὸ ΒΑΟ ἡμικύκλιον, μιᾶς ὀρθῆς τῆς ΒΠΑ ἔσται μέτρον τὸ ΒΑ τεταρτημόριον· ἀλλὰ πᾶς ὁ κύκλος διήρηται εἰς 360°· ἄρα τὸ ΑΒ κυκλικὸν τεταρτημόριον ἔσται μακρὺν 90°· ἐξέσται ἄρα ὀρίσασθαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὅτι ἔσιν ἡ ὑπὸ τόξου 90° μετρεμένη· ἔκυν διάφορα εἶδη γωνίας ὀρθῆς ἐκ εἰσίν, ἀλλ' εἰσὶν ἅπασαι ἰσάλληλοι.

92. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τὸ ὀξείας γωνίας τῆς ΖΠΟ μέτρον ἔσται τόξον ἐλάττω τῷ κυκλικῷ τεταρτημῳρίῳ· ὀρίσθῆναι ἄρα δύναται ἡ ὀξεία γωνία, ὡς ἔσιν ἡ καταμετρεμένη τόξῳ ἐλάττω ἢ 90°· ἔκυν αὔξασθαι δύναται ἡ ὀξεία ἀπὸ ἀπειροσύνης εἰς τὴν παραλήγουσαν τῶν 90°· ἀπειρα ἄρα τὰ τῆς ὀξείας γωνίας εἶδη.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Τὸ δὲ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΠΒ μέτρον ἔσται τόξον τὸ ΒΑΖ μείζον, ἢ τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΒ, καὶ δὴ μείζον τῶν 90°· ἐξέσται ἄρα καὶ περὶ αὐτῆς εἰπεῖν, ὡς ἀμβλεία γωνία ἔσιν ἡ ὑπὸ τόξου μείζονοι ἢ 90° μετρεμένη· αὔξασθαι ἄρα δύναται ἡ ἀμβλεία ἀπὸ 90° μέχρι τῷ παραλήγοντος τῷ 180°· δύναται ἄρα ὑπάρχειν καὶ ταύτης εἶδη ἀπειράριθμα.

94. Εἴρηται δὲ αὔξασθαι μέχρι τῷ παραλήγοντος λεπτῷ τῶν 180°· ἡ γὰρ ΠΖ εὐθεῖα μετὰ τῆς ΒΠΟ γωνίαν μοιρῶν 180 συστήσασθαι ἔδύναται· εἰ γὰρ συμπίπτῃ τῇ ΒΠΟ, ἐν ἔσται αὐτῇ, καὶ ὡς μία εὐθεῖα γραμμὴ λογισθῆσεται, μηδεμίαν περιέχουσα γωνίαν· ἔπεται δὲ τῷτο ἐκ τῷ ἄρτι εἰρημένῳ (76).

95. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΒΚΟ, ΚΚΖ (χ. 12) ὑπ' ἀλλήλων τέμνονται, τὸ ἀθροῖσμα τῶν ὑπ' αὐτῶν συνιστα-

μένων γωνιῶν α , η , Γ , χ μετρεῖται ὑφ' ὅλης τῆς κυκλικῆς περιφερείας OZBK , ὃ καθ' ἑαυτὸ δῆλον. Τὸ ἄρα ἄθροισμα τεσσάρων ὠγινωνδήποτε γωνιῶν, αἱ συνίστανται ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἀλλήλαις διατεμνομένων, ἔστι ἴσον μοίραις 360.

96. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἄθροισμα ἀπειραρίθμων γωνιῶν (σχ. 2) περὶ ἐν σημεῖον συνισταμένων ὑφ' ὅσων ἂν τις βέληται εὐθειῶν τῶν AH , βH , κH , OH , ZH ἔσαι αἰ ἴσον 360°. πᾶσαι γὰρ ἅμα ὑφ' ὅλης τῆς κυκλικῆς καταμετρῶνται περιφερείας.

97. Ἐὰν ἄρα πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ἴσον ἀλλήλων ἀπέχωσιν, ἐκάστη γωνία ἴση ἔσαι τῷ 360 διαιρεθέντι διὰ τὴν τῶν γωνιῶν ἀπασῶν ἀριθμῷ.

Δεῖν εὐθειῶν ὑπ' ἀλλήλων διατεμνομένων (σχ. 12), αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμεναι εὐθείας γωνίαι καλῶνται γωνίαι ἐφεξῆς· ὅπως αἱ α , η , ἢ αἱ K , χ εἰσὶν ἐφεξῆς γωνίαι ἐπὶ τῆς κZ . αἱ δὲ α , χ ἢ η , K εἰσὶν ἐφεξῆς ἐπὶ τῆς βO γραμμῆς· λέγονται δὲ γωνίαι κατὰ κορυφὴν αἱ διακρινόμεναι ὑπὸ τῆς τῶν εὐθειῶν διατομῆς· ὅπως αἱ α , K γωνίαι εἰσὶ κατὰ κορυφὴν, ὡσαύται· ἢ αἱ η , χ .

Ἐπὶ τούτων ἐν τῶν γωνιῶν ῥᾶτα δειχθήσεται τὰδε.

98. α'. Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ἴσον ἐστὶ μοίραις 180· καὶ γὰρ $\alpha + \eta$ μετρῶνται τῷ ἡμικυκλίῳ $\kappa\beta\text{Z}$. αἱ δὲ $\eta + \Gamma$, τῷ ἡμικυκλίῳ $\beta\kappa\text{O}$ ἢ ὅπως ἐξῆς.

99. β'. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· ἢ γὰρ τὸ ἡμικύκλιον $\beta\text{ZO} = \text{ZO}\kappa$. ἄρα $\beta\text{ZO} - \text{ZO} = \text{ZO}\kappa - \text{ZO}$. ἄρα $\beta\text{Z} = \kappa\text{O}$. ἄρα ἢ $\alpha = \text{K}$. Ὡσαύτως δειχθήσεται ὅτι ἢ ἡ γωνία η ἴση ἐστὶ τῇ χ .

100. γ'. Μιᾶς ἄρα γνωστῆς τῶν τεσσάρων γωνιῶν

των, τῶν συνισταμένων ὑπὸ δύο ἀλλήλαις διατεμνομένων
εὐθειῶν, καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς γνωσθήσονται· ἔσω γὰρ ἡ α
 $= 150^\circ$ · καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ἄρα αὐτῇ $\Gamma = 150^\circ$ · εἰσι
δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι α , ἡ ὁμῶς ἴσαι μοίραις 180° · ἀλλ'
 $\alpha = 150^\circ$ · ἄρα $\eta = 30^\circ$ · ἄρα καὶ $\chi = 30^\circ$.

101. δ'. Μίας ἄρα τέτων τῆς χόρθῃς ὕψους (α. 6),
καὶ ἐκάστη τῶν ἄλλων τριῶν ὀρθὴ ἔσεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς Καθέτου.

102. Τῆς ηβ εὐθείας καθέτη τῇ κδ ἐφεξώσης, εἰάν
ληφθῶσι δύο σημεῖα τὰ κ, Ι ἰσοδιεσῶτα τῷ σημείῳ β,
ὃ εἰς κοινὸν τῆς τε βη, καὶ τῆς κδ, ὡς εἶναι βκ = βΙ,
φημί δὴ, ὡς καὶ ἅπαν ἄλλο σημεῖον τῆς βη καθέτη ἴσον
ἀπέχει τῶν δύο σημείων κ, Ι τῆς κδ εὐθείας· ἴσον φέρε
ἀπέχει τὸ η τῶν κ, Ι, καὶ ἔστιν ηκ = ηΙ· εἰ μὴ γάρ·
ἔσω ἐγγύτερον τῷ κ, ἢ τῷ Ι· καὶ ἐπεὶ, ἐξ ὑποθέσεως,
τὸ β σημεῖον ταύτης τῆς καθέτη ἴσον ἀπέχει τῷ τε κ καὶ
τῷ Ι· ἀναγκάως ἡ κάθετος βη μᾶλλον ῥέψει πρὸς τὰ
ἐπὶ κ, ἢ πρὸς τὰ ἐπὶ Ι· ὅκ ἔστιν ἄρα κάθετος, ὅπερ ἄ-
τοπον· ὡσαύτως δὲ καὶ ἅπαν σημεῖον τῆς καθέτη ἴσον ἀ-
πέχει τῶν δύο τέτων σημείων· εἴτ' ὅν ἔστιν Οκ = ΟΙ καὶ
ἐξῆς ὁμοίως.

103. Εἰάν κάθετος ἡ ηβ προαχθῇ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ αὐ-
τὴ αἰεὶ ἐκληφθήσεται εὐθεῖα (19)· καὶ τοίνυν δύο σημεῖα
ικανὰ εἰσιν ὀρίσασθαι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας (20)· ἐπεὶ ὅν
δύο σημεῖα β, η τῆς καθέτη ηβΖ ἴσον ἀπέχουσιν ἑκάστον

τῶν δύο σημείων κ , I τῆς εὐθείας $\kappa\delta$, ἅπαν ἄρα τῶν ἄλλων ταύτης τῆς καθέτου σημείων, εἴτ' ἔν ϵ τῶν πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Z , ϵ αὐτὸ δὴ τὸ Z , ἴσον ἀπέχει τῶν κ , I , ϵ δὴ ἐστὶ $Z\kappa = ZI$. Τὸναντίον δὲ, εἰάν δύο σημεῖα εὐθείας ἴσον ἀπέχωσιν ἑκασον δύο σημείων ἑτέρας εὐθείας, ἐκείνη ταύτη πρὸς ὁρθὰς ἐφάπτεται· εἰάν γὰρ τῆς $\eta\beta$ εὐθείας τὸ β σημεῖον ἴσον ἀπέχη τῶν κ ϵ I , ἑτερόν τι σημεῖον τὸ η τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ μὴ δυνήσεται ἴσον ἀπέχειν τῶν κ , I , εἰ μὴ, εἰάν ἡ $\beta\eta$ εὐθεῖα μὴ μᾶλλον ῥέπη ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ η , ἢ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ I , ἢ ϵ τεμπαλῇ· ἄρα ἡ $\beta\eta$ κάθετος ἔσται τῇ $\kappa\delta$ (69), ἔχουσα δύο σημεῖα ἴσον ἑκασον ἀπέχοντα δύο σημείων τῆς εὐθείας $\kappa\delta$.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α' φ' ἐνὸς ἄρα σημείου τῆς A (91. 13) ὃ $\epsilon\kappa$ ἔστιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ZO , δοθέντος, κάθετον αὐτῇ σησόμεθα κατὰ τὰδε. α'. κέντρῳ μὲν τῷ A , διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι (65), σημειωθήτωσαν δύο σημεῖα τὰ Z , O ἐπὶ τῆς εὐθείας ZO . β'. κέντρῳ μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ βραχυτί ἐλάττωσι τῇ AZ , γεγραφῶν τόξον κυκλικὸν ἀόριστον τὸ $\Pi\Delta$. γ'. κέντρῳ μὲν θατέρῳ τῶν σημείων O , διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγραφῶν ἕτερον τόξον ἀόριστον τὸ $\Gamma\Theta$. δ'. ἤχθῃ διὰ τῶν σημείων A ϵ κ , καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλα τὰ δύο τόξα, ἡ εὐθεῖα $A\kappa\epsilon$, ἣτις ἔσται ἡ ἐπιταχθεῖσα κάθετος, ὡς φανήσεται.

Ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τό, τε A σημεῖον αὐτῆς ἴση ἀπέχει δυοῖν σημείοιν Z , O τῆς εὐθείας ZO . ϵ τὸ κ δὲ τῆς αὐτῆς ZO ἀπέχει ἴσον τῶν αὐτῶν σημείων Z , O . εἰσὶ γὰρ ἀκτῖνες ἴσων κύκλων αἱ $Z\kappa$, $O\kappa$. ἐπεὶ ἔν τῇ $A\kappa\epsilon$ εὐθείᾳ ἔστι σημεῖα δύο, ἑκασον ἴσως ἀφιστάμενον δυοῖν σημείων Z , O τῆς ZO εὐθείας· ἡ ἄρα $A\kappa\epsilon$ πρὸς ὁρθὰς τῇ ZO ἐφάπτεται (103).

105. Τὸν αὐτὸν δὲ ἴν' ἐκ τῶ σημείου E εὐθείας δεδομένης τῆς ZOE κάθετος ἐγερίη· α' . κέντρῳ μὲν τῷ E , διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, σεσημειώσθων δύο σημεῖα Z, O · β' . κέντρῳ μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ μικρῷ μείζονι ἢ τὸ EZ , γεγραφῶν τόξον κύκλου τὸ $\Pi\Delta$ · γ' . κέντρῳ μὲν τῷ O , διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγραφῶν τόξον τὸ $\Gamma\Theta$ · δ' . ἀπὸ τῶ σημείου κ , καθ' ὃ διατέμνουσιν ἀλλήλα τὰ τόξα, ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον E ἐπεζεύχθω ἡ κE , ἣτις ἔσται κάθετος τῇ ZO ἐπὶ τῷ E σημείῳ· ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τῷ χ ήματος τό τε σημεῖον αὐτῆς E ἴσον ἀπέχει δυσὶν σημείων τῶν Z, O , ὃ τὸ κ τῶν αὐτῶν ἴσον ἀφίσταται (103).

106. Τῇ αὐτῇ (χ . 14) μικρῷ δεῖν χρησόμενοι κατασκευῇ δίχα τεμεῖμεν εὐθεῖαν δοθείσαν τὴν $\Delta\beta$ · κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ Δ πέρατι τῆς δοθείσης εὐθείας, διαστήματι δὲ μείζονι, ἢ τῷ ἡμίσει αὐτῆς, γεγραφῶν κύκλου τόξον ἀόριστον τὸ $\Pi E\chi$ · κέντρῳ δ' αὐτοτέρῳ πέρατι τῷ β , διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγραφῶν τόξον τὸ $\kappa\Gamma$ · εὐθεῖα ἐν ἡ ἀπὸ τῶ O ἐπὶ τὸ H , καθ' ἃ διατέμνονται ὑπ' ἀλλήλων τὰ τόξα, ἀχθείσα, τεμεῖ δίχα τὴν $\Delta\beta$ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Z .

Τὸ γὰρ τῶ O ἀπὸ τῶ Δ ὃ ἀπὸ τῶ β ἀπόστημα ἔστι τὸ αὐτὸ, ὡς ὅν τὸ διάστημα, δι' ἃ ἐγράφησαν τὰ κυκλικὰ τόξα· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ὃ τὸ H ἴσον ἀπέχει τῶ τε Δ , ὃ τῶ β · ἕκην εὐθείας τῆς OZH δυσὶν σημείοιν τοῖν Δ, H ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων τῶν Δ, β , ὃ τὸ Z αὐτῆς σημείου ἴσον ἀπέχει τῶν Δ, β (102, 103)· ἄρα τὸ Z ἔστι τὸ μέσον σημεῖον τῆς $\Delta\beta$ εὐθείας· ἄρα ὕτως ἡ $\Delta\beta$ δίχα τέμνεται.

107. Ἀλλὰ γὰρ ἵνα τὰ αὐτὰ καὶ τῆς γῆς ἐργασώμεθα, μετιτέον τὰ ἐξῆς.

108. Ἰν' ἀπὸ σημείου δοθέντος τῷ Α κάθετος ἀχθῇ τῇ εὐθείᾳ ΖΟ (χ. 13), γνώμονος ἐπιμήκεσθαι ἢ μὲν κορυφὴ τεθεῖτω ἐπὶ τὸ Ε, ἢ δ' ἑτέρα τῶν αὐτῶ πλευρῶν ἐφηρμόσθω τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἄτερα δὲ τεινάτω ἐπὶ τὸ Α· εὐθεῖα ἔν ἢ ἀπὸ τῷ Α ἐπὶ τὸ Ε ἀχθεῖσα ἔσεται ἡ ζητουμένη κάθετος· ὁ δὲ λόγος καθ' ἑαυτὸν σαφής· ὁ γὰρ γνώμων ἔδεν ἀλλ' ἡ εὐθεῖα τις ἐστὶ κάθετος ἑτέρας εὐθείας τῇ ΖΕ· αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶ τῶν ἐπὶ γῆς εὐθειῶν ἔδεν διαφέρουσιν, ἀλλ' ἢ τῷ μήκει.

109. Ἰν' ἐπὶ γῆς ἐγεσθῇ κάθετός τις εὐθεῖα τῇ ΖΟ ἀφ' ἐνὸς αὐτῆς δοθέντος σημείου τῷ Ε, τῆς τῷ γνώμονος κορυφῆς τεθείσης ἐπὶ τῷ δοθέντος σημείῳ Ε, καὶ μιᾶς αὐτῶ πλευρᾶς ἐφηρμασμένης τῇ ΖΟ, διευθυνέσθω ἄτερα πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Α, ἢ προσπηγνύσθω πάσσαλος ἐπὶ ταύτης τῆς φορᾶς ἐνδεικνυμένης τῇ τῷ γνώμονος πλευρᾷ κατὰ τὸ Α φέρε· εὐθεῖα ἔν ἢ ἀπὸ τῷ Α ἐπὶ τὸ Ε ἀχθεῖσα ἔσται ἡ ζητούμενη κάθετος· ὁ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

110. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Τῷ γνώμονος χρησιμωτάτε ὄντος ὄργανον, ἔκ ἄχρητον ἂν εἴη ἀποδῶναι, ὅπως ἂν δειχθεῖν ἢ κατ' αὐτὸν ἀκρίβεια.

α'. Ἡχθῶ εὐθεῖα ἄλλης ἐπιμήκης ἢ ΖΟ ἐπὶ λαίῃ πίναντος· β'. ἐπιτεθείσης ἀκριβῶς μιᾶς τῶν τῷ γνώμονος πλευρῶν τῷ μέρει ΕΟ ταύτης τῆς εὐθείας, ἡχθῶ ἐπὶ τῷ πίναντος εὐθείᾳ ἢ ΑΕ κατὰ μήκος τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΑΕ· γ'. τῆς κορυφῆς τῷ γνώμονος ἐπὶ τῷ Ε μενέσθης, περιήχθω ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ λαίᾳ ἢ τῇ ΕΟ ἐπιτεθειμένη πλευρᾷ, ἢ ἢν ἐφαρμυγῇ ἀκριβῶς τῇ ΖΕ, ἢ μὲν πλευρᾷ ΑΕ συμπεσείτω τῇ κατ' ἀρχὰς ἀχθείσῃ κατὰ μήκος τὸ ταύτης εὐθείᾳ ΑΕ, συναχθήσεται δὲ, ὡς ὁ γνώμων ἐστὶν ἀσφα.

λῆς· κείῳ γὰρ, ὅτι ἡ τῷ γνώμονος γωνία ὀφείλουσα ἐπ' ἀκριβὲς εἶναι 90° , εἰν $< 90^\circ$. ἔκυν ἡ ΑΕ εὐ-
θεία ἡ κατ' ἀρχὰς ἀχθεῖσα ἐπὶ τῷ πίνακος, ποιήσει ἐπὶ
τῆς ΕΟ γωνίαν $< 90^\circ$, ἡ δὲ ῥέφει πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ο·
ἐπιτιθεμένῃ ἄρα τῷ γνώμονος ἐπὶ δάτερα, ἡ τῆς κορυ-
φῆς αὐτῷ μενέσης ἐπὶ τῷ Ε, τὸ πέρας τῆς ἐτέρας τῶν
πλευρῶν ἀντὶ τῷ συμπεσεῖν τῇ ΑΕ ἀποσῆσεται αὐτῆς ὡς
τοσούτῳ, ὅσῳ ἡ τῷ γνώμονος γωνία ἐλασσυέται τῶν 90° .
ἡ γὰρ ἡ πρὸς δεξιὰν γωνία σὺν τῇ πρὸς ἀριστερὰν συνι-
σάμεναι ἀμφότεραι ἐπὶ τῆς ΖΟ εὐθείας διὰ τῆς πλευ-
ρᾶς ΑΕ τῷ γνώμονος ἰσοδυναμεῖσι 180° (89) αἱ δὲ ὥρα
πλευραὶ τῷ γνώμονος ἐμὴ ἐφαρμοδύσονται τῇ ΑΕ καὶ
ΕΟ, εἴτα τῇ ΑΕ ἡ ΕΖ, εἰ μὴ περιέχοιεν γωνίαν ἐπ' ἀ-
κριβὲς $= 90^\circ$.

111. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Εἰπερ ἡ τῷ γραφομέτρῳ
εὐθεία ΑΓ (σχ. 9), ἐφ' ἧς τῷ πέρατι Α σεσημειώται
 90 , σὺν τῇ ΓΗ εὐθείᾳ συνισῶσιν ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ἐκ
τῷ ἀκολούθῳ γνώμονα, εὐμαρέστερον χρησόμεθα ἐπὶ τῶν
προλαβουσῶν πράξεων τῷ γραφομέτρῳ, ἡ τῷ γνώμονι.

112. Ἰνα δίχα τμηθῇ εὐθεία ἐπὶ γῆς, ἡ, ὃ
ταυτόν, ἵν' εὐρεθῇ τὸ μεσαίτατον ταύτης μέρος, ἐκτεί-
ναντες ἐπ' αὐτῆς ἄλυσιν σιδηρᾶν (ἡ χάλκινον) συνάπτομεν
τὰ δύο πέρατα τῆς ἀλύσεως, τὰ συμπεπτωκότα τοῖς πέ-
ρασι τῆς εὐθείας· τῆς ἀλίσεως τοίνυν ἔτω διπλασιασθεί-
σης, τὸ μέσον ἐμφανεῖ τῆς εὐθείας τὸ μεσαίτατον· ὃ
καθ' αὐτὸ σαφές.

113. α. Η' κάθετος ΠΓ (σχ. 15) ἐκ τῷ Π ἐπὶ τῆς
ΑΔ καταχθεῖσα, ἡ ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀχθεῖναι δυ-
ναμένων ἀπὸ τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν· πᾶ-

σα γὰρ ἄλλη εὐθεῖα ἢ ΠΖ πλαγία πίπτουσα ἐπὶ τῆς ΑΔ μείζων ἔσαι τῆς ΠΓ.

114. β'. Τὸ ἀληθὲς μέτρον τῆ ἀποσήμετος, ἢ σημεῖον ἀπέχει ἀπ' εὐθείας, ὁφείλει εἶναι ἐπάναγκες ἢ ἐλαχίστη εὐθεῖα τῶν ἀπ' αὐτῆς τῆ σημεῖς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀχθῆναι δυναμένων· ἄλλως γὰρ, ἐπεὶ ἐκ σημεῖς ἐπ' εὐθεῖαν ἀπειράριθμοὶ εἰσιν ὁδοί, βραχύτεραι, ἢ ἐπιμηκέστεραι, εἴτις ἄλλη παρὰ τὴν ἐλαχίστην ληφθεῖη, ἐκ αὐτοῦ γένοιτο μέτρον μόνιμον τῷδε τῆ ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀποσήμετος· ἀλλὰ ἡ κάθετος ἔστιν ἡ ἐπιτομωτάτη ὁδὸς τῶν ἀπὸ τινος σημεῖς ἐπὶ εὐθεῖαν διατεινυσῶν (113), ἔστιν ἄρα τὸ ἀληθὲς μέτρον τῆ σημεῖς ἀπ' εὐθείας ἀποσήμετος.

115. γ'. Τὴναντίον δὲ, εἰν εὐθεῖα ἐπιτομωτάτη ἢ ὁδὸς τῶν ἀπὸ σημεῖς τινὸς ἐπ' εὐθεῖαν τεινυσῶν, αὕτη κάθετος αὐτῇ ἐφάσκηκε.

116. δ'. Μία ἄρα κάθετος ἀπὸ σημεῖς ἐπ' εὐθεῖαν ἀχθῆναι δύναται.

117. ε'. Δύο πλάγιοι (σχ. 16) αἱ ΑΓ, ΑΟ ἀχθῆσαι ἀπὸ τῆ αὐτῆς σημεῖς Α ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΕ, εἰν ἴσον ἀπέχωσι τῆς καθέτου ΑΔ, ὅ ἐστιν ἐκν ἴσον ὥσι κεκλιμένοι, εἰσιν ἰσάλληλοι, ἢ τ' ἀνάπαλιν.

118. ς'. Εἰν δὲ δυεῖν πλαγίων ΑΕ, ΑΟ, ἢ ΑΕ μᾶλλον ἀπέχη τῆς καθέτου, ἢ ἢ ΑΟ, ἢ μᾶλλον ἀπέχουσα μείζων ἔσαι τῆς ἥττον· ἢ τ' ἀνάπαλιν, ἢ μείζων μᾶλλον τῆς καθέτου ἀπέχει, ἢ ἢ ἐλάττων.

119. Εἰντεῦθεν ἄρα σημεῖς τῆ Α ἐκτὸς εὐθείας τῆς ΒΕ δοθέντος, ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, κάθετον μὲν μίαν, πλαγίας δὲ μονονῆκ ἀπείρου ἐφ' ἐκάτερα τῆς καθέτου ἀγαγεῖν δυνασόμεθα ἴσας, ἀνὰ δύο λαμβανομένης· ὥς περ εἰσιν ΑΓ = ΑΟ, ΑΒ = ΑΕ, πλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ Παραλλήλων εὐθειῶν.

120. Παράλληλοι λέγονται δύο γραμμαὶ αὶ ΠΔ, Ικ, (χ. 17) ὅταν μεταξὺ πάντων τῶν ἐν αὐταῖς ἀντιστοιχῶν σημείων τὸ αὐτὸ ἢ ἀπόστημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι, καὶ ἐπ' ἄπειρον ἢν προαχθῶσιν, ὑδέποτε συμπεσῶνται ἀλλήλαις· εἰν γὰρ ὑποτεθῶσιν, ὅτι ἐντινὶ σημείῳ συμπίπτουσι, ψευδές εἶναι, ὅτι ἐν αὐτῷ τῷ σημείῳ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸ αὐτὸ ἀπόστημα, ὃ καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις· παύσονται ἄρα ὕτως ὕσαι παράλληλοι.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Εἴξεται ἄρα τὰς παραλλήλους ὁρίσαι ὅτι „παράλληλοί εἰσιν αἱ, καὶ ἐπ' ἄπειρον „προαγόμεναι, ἀλλήλαις μὴ συμπίπτουσαι.“

122. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Καίπερ δύο παράλληλοι ἀκριβῶς συμπεσεῖν ἀλλήλαις ὑδύνανται, καὶ ἐπ' ἄπειρον προαχθῶσι· μετὰ γεμὴν ἄπειρον μόνην προαγωγὴν συμπίπτειν ἀλλήλαις ὑποτεθεῖσαι, αἰ ἐκλαμβάνεσθαι ὡς παράλληλοι αὐθις δύνανται· ἐπεὶ γὰρ, ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, προαχθῆναι ἐπ' ἄπειρον ὀφείλουσιν, ἵν' ἀφανισθῇ τὸ μεταξὺ αὐτῶν πεπερασμένον ἀπόστημα, ὅση ἂν αὐταῖς πεπερασμένη προαγωγὴ προσυποτεθείη, ἀπειροσόντι ἀλλήλαις πελάσουσιν· εἰν ἄρα ὡς παράλληλοι ἐκληφθῶσιν, ὅτι δὴ μῆκος ἂν ἔχωσι πεπερασμένον, τὸ διάπτωμα εἶναι ἀπειροσόν, καὶ παρορατέον ἐν τῷ λογισμῷ τῶνδε τῶν εὐθειῶν· πολλάκις δὲ εἰς χρήσιν ἤκει τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ αὕτη ἢ σημειώσεις.

123. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Α'λλὰ δὴ τὸ ἀπόσημα, ἐν ᾧ συνίσχιν δύο εὐθείαι αἱ ΠΔ, Ικ, μὴ ὄντος μὲν πρίγματος ἀπείρου, ἀσυγκρίτως δὲ μείζονος, ἢ τὸ ἀπόσημα ΓΧ, ᾧ ἀλλήλων ἀπέχουσιν, ἐξέσαι ταύτας ὡς παραλλήλους ἐκδέξασθαι· τὸ γὰρ διάπτωμα, ὅτως ἐκληφθεῖσων, ἔσαι ἀνεπαίδητον· αὕτη δὲ ἡ σημείωσις εἰς χρῆσιν ἡκει πολλάκις τῆτε Φυσικῇ, ἢ τῇ καλυμένῃ Μικτῇ Μαθηματικῇ.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἴπει δύο σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσαι τὴν θέσιν εὐθείας, δῆλον, ὅτι δύο εὐθείαι παραλλήλοι εἰσιν, ἐὰν δύο σημεῖα μιᾶς ἴσου ἀπέχουσιν δύο σημείων τῆς ἐτέρας· ἐντεῦθεν γὰρ συνάγεται, ὡς ἅπαντα τὰ μιᾶς σημεῖα ἴσου ἀπέχουσιν τῶν σφίσις ἀντιστοιχῶν σημείων τῆς ἐτέρας.

125. Δύο παραλλήλων διδιδεισῶν τῶν ΠΔ, Ικ, ἐὰν τρίτη τις ἡ ΚΖ παράλληλος ἢ τῇ δευτέρᾳ Ικ, ἔσαι παράλληλος ἢ τῇ πρώτῃ ΠΔ· ἢ γὰρ τὸ ἐκάστου σημείου τῆς ΠΖ ἀφ' ἐκάστου κατὰ κάθετον οἱ ἀπέχοντος τῆς ΠΔ ἀπόσημα ἔσιν ἴσον τῷ ΓΧ + ΓΟ· πάντα ἄρα τὰ τῆς ΚΖ ἀπὸ ΠΔ ἀπόσηματα ἰσάλληλα ἔσονται· ΚΖ ἢ ΠΔ ἄρα εἰσὶ παράλληλοι.

126. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Εἴ γένει ἄρα, ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος ἢ ἐτέρᾳ, ἔσαι παράλληλος ἢ πάσαις ταῖς ἄλλαις εὐθείαις, αἱ ἂν εἶεν θατέρᾳ παράλληλοι.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Δύο παράλληλοι, μεταξὺ δύο ἐτέρων παραλλήλων ἐμπεριλαμβανόμεναι, ἰσάλληλοι εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἦτοι γὰρ εἰσὶ κάθετοι ταῖς ἐτέραις παραλλήλαις (α. 18), αἷς ἐμπεριλαμβάνονται, ἢ πλάγια· εἰ μὲν ἐν ἐκείνῳ, ὡς αἱ ηΧ, Γδ, ἔσονται δῆπε μέτρα

τῶν ἀποσημάτων τῶν δυοῖν σημείων χ , δ τῆς ΙΧ εὐθείας, καθ' ἣ ἀφίστανται δυοῖν σφίσιν ἀντίστοιχων σημείων Γ , η τῆς παραλλήλου ΜΔ . ἄρα ἀλλήλαις ἴσαι ἔσονται (120). εἰ δὲ ὡς πλάγιοι, ὡς αἱ $\Gamma\text{Ι}$, ηδ, εἰ ἔτις ἰσάλληλοι ἔσονται. εἰ γὰρ ὡς παράλληλοι ἔσονται ἐπίσης κεκλιμένοι ἐπὶ τῶν ΜΔ , ΙΧ παραλλήλων, καὶ ἴσον ἀποστήσονται τῶν καθέτων $\Gamma\delta$, η χ , αἵτινες ἰσάλληλοι εἰσιν, ὡς ἡδὴ δέδεικται. εἰ αὐταὶ ἄρα αἱ πλάγιοι (117) ἰσάλληλοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύο πλάγιοι αἱ ηδ, δΑ, ἐμπεριελιγμέναι μεταξὺ διαφόρων παραλλήλων, ὧν ἴσον τὸ ἀπόστημα, εἰ ἴσον κεκλιμένοι ἐπ' αὐτάς, ἰσάλληλοι ἔσονται. α. αἱ γὰρ κάθετοι η χ , δκ εἰσιν ἴσαι. ὑπετέθησαν γὰρ αἱ τρεῖς παράλληλοι ἴσον ἀλλήλων ἀπέχασαι. β. αἱ πλάγιοι ηδ, δΑ ἴσον ἀπέχουσι τῶν καθέτων κατὰ τὸν ἀνωτέρω συλλογισμόν (127). ἄρα αἱ πλάγιοι ηδ, δΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν (117).

129. ΟΡΙΣΜΟΣ Α'. Ὅταν εὐθεῖα (α. 19) εἰς δύο παραλλήλους ἐμπέσῃ, γωνίαι ἀντίστοιχοι καλεῖνται αἱ ὁμοίως κείμεναι πρὸς τὰς παραλλήλους καὶ τὴν ἐμπεσῆσαν εὐθεῖαν. ἔτω τῆς $\Gamma\Theta$ εὐθείας ἐμπεσῆσης εἰς δύο παραλλήλους τὰς δ Γ , η χ , αἱ γωνίαι Α εἰς ο εἰσιν ἀντίστοιχοι. ἑκατέρα γὰρ κεῖται ὑπὸ τὴν ἐτέραν τῶν παραλλήλων, εἰ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ἐμπεσῆσης εὐθείας $\Gamma\Theta$. ἀλλὰ εἰ αἱ Ε, Ι καὶ αἱ β, Ζ εἰσιν ἀντίστοιχοι.

130. ΟΡΙΣΜΟΣ Β'. Ἐν τῷ ἐναλλάξ γωνίαι καλεῖνται αἱ μεταξὺ μὲν δύο παραλλήλων κείμεναι, ὧν μὲντοι ἡ μὲν ἐπὶ θάτερα, ἡ δ' ἐπὶ θάτερα τῆς ἐμπεσῆσης ἐμφιλοχωρεῖ. ἔτις αἱ δύο γωνίαι Ζ, ο καί.

λύνται ἐντὸς ἐναλλάξ, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ I , ρ · ἐκ τῶν δ' ἐναλλάξ καλῶνται δύο γωνίαι, αἵτινες κείνται ἐκ τῶν τῷ χώρῳ τῶν παραλλήλων, ἡ μὲν ἐπὶ τῷ δ , ἡ δ' ἐπὶ ἐκείνῃ τῆς ἐμπειύσης· τοιαῦτα εἰσὶν αἱ ν , ϵ , καὶ β , λ .

131. ΟΡΙΣΜΟΣ Γ'. Δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, μίαν τῶν τριῶν τῶνδε σχέσεων πρὸς ἀλλήλας τηρήσουσιν· ἥτοι γὰρ συγκλίνουσιν ἀλλήλαις, ἢ ἀποχωρῶσιν ἀλλήλων, ἢ τέλος πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ παράλληλοι (α. 15)· δύο γάρ τινες φέρ' εἶπεν κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ὁδεύοντες, ὁ μὲν ἐκ τῆς Γ , ὁ δ' ἐκ τῆς Z , εἰ μὲν εἰς τὸ Z βαδίσωσι, αἱ αὐτῶν ὁδοὶ $\Gamma\P$, $Z\P$ ἐσονται συγκλίνουσαι· εἰ μὲν πρὸς τὰναντία τῆς Π , ὁ μὲν δηλονότι βαδίζῃ τὴν $\Pi\Gamma$, ὁ δὲ τὴν ΠZ , αἱ δύο αὗται ὁδοὶ, ἡ γραμμὰι εὐθεῖαι, προδήλως εἰσὶν ἀποχωρεῖσαι ἀλλήλων· τελευταῖον δὲ, εἰ μὲν ὁ μὲν ὁδεύῃ ἐκ τῆς Π τὴν ὁδὸν $\Pi\Delta$, ὁ δὲ ἐκ τῆς I τὴν $I\kappa$, (α. 17) αὗται αἱ εὐθεῖαι προδήλως ἐσονται παράλληλοι, ὅθεν συναντηθήσονται οἱ δύο ἔτι, καὶ ἐς ἄπειρον προχωρῶσιν ὁδεύοντες.

132. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Εὐθεῖα, εἰς δύο παραλλήλους ἐμπίπτουσα, τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐςωσαν αἱ $\delta\Gamma$, $\eta\kappa$ παράλληλοι (α. 19), καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτέτω ἡ $\Gamma\Theta$, ἣν αὐτοὶ τέμνουσαν ὀνομάζομεν· φημί δὴ, ὡς ἡ β γωνία φέρε, συνισαμένη ὑπὸ τῆς τεμνύσης $\Gamma\Theta$ ἐπὶ τῆς $\delta\Gamma$, ἴση ἔστι τῇ αὐτῆς ἀντιστοίχῳ Z τῇ ἐπὶ τῆς $\eta\kappa$ · εἰ μὴ γάρ, ἔσαι πάντως ἥτοι $\beta < Z$, ἢ $\beta > Z$ ἔσω α. $\beta < Z$ · ἀλλὰ τὸ ἐκ ἀν γένοιτο, εἰ μὴ ἡ $\delta\beta\Gamma$ εὐθεῖα ἀποχωροῖ μὲν κατὰ τὸ Γ ἀπὸ τῆς $\eta\kappa$ ἀντιστοίχου σημείου κ , πελάζει δὲ κατὰ τὸ δ πρὸς τὸ η σημείου· ὅθεν, ἥνικα ἡ $\delta\beta\Gamma$ εὐθεῖα μᾶλλον ἀπέχει κατὰ τὸ Γ

ἀπὸ τῆς $\eta\kappa$, ἢ κατὰ τὸ δ · εἰν ἡ ἄρα $\beta < Z$, αἱ εὐθεῖαι $\delta\beta$, $Z\eta$ προαχθεῖσαι πρὸς τὰ λαίχ τῆς $\Gamma\Theta$ τεμνέσθης, συμπεσῦνται· ἔσονται ἄρα συμπίπτουσαι· ἐτέθησαν δὲ παράλληλοι· ἔσονται ἄρα αἱ αὐταὶ συμπίπτουσαι τε καὶ παράλληλοι· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἐῶ δὲ $\beta'.$ $\beta > Z$ · ἔκιν ἡ δT ἐγγυτέρω ἐσι τῇ $\eta\kappa$ κατὰ τὸ κ , ἢ κατὰ τὸ η , καὶ προαχθεῖσαι κατὰ τὰ δεξιὰ τῆς τεμνέσθης συμπεσῦνται, καὶ δὴ ἔκιν εἰσονται παράλληλοι· ὅτε ἐλάττων ἔν, ὅτε μείζων ἡ β ὑποτεθῆναι δύναται τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς Z , εἰν μὴ καίσωνται παράλληλοι ἔσαι αἱ δT , ηT · ἄρα παραλλήλων ἔσων, αἱ ἀντιστοίχοι γωνίαι ἐξ ἀνάγκης ἰσάλληλοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

133. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εὐθείας εἰς δύο παραλλήλους ἐμπιπτεύσθης, αἶτε ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι, καὶ αἱ ἐκτὸς ἰσάλληλοι ἔσονται.

134. α'. Αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ εἰσὶν ἴσαι, εἴτ' ἔν $\rho = I$ · καὶ γὰρ $\rho + Z = 180^\circ$ (98)· ἄρα $\rho = 180^\circ - Z$ · ὡσαύτως δὲ καὶ $I = 180^\circ - \beta$ · ἀλλὰ $\beta = Z$ (132) ἄρα $\rho = I$ · ἐφόδω δ' ὁμοία συλλογισμῷ δειχθήσεται ὅτι, $\sigma = Z$.

135. β'. Ὡσαύτως ἀποδείξαι δυνατόν ἴσας καὶ τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας· καὶ γὰρ $\beta = 180^\circ - I$, καὶ $A = 180^\circ - E$ · ἀλλὰ $E = I$ · ἄρα καὶ $\beta = A$ · διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ $\nu = E$.

136. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Αἱ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἰσὶν $= 180^\circ$ · ἐπεὶ $\sigma + I = 180^\circ$ (98) ἀλλὰ $I = \rho$ · ἄρα $\sigma + \rho = 180^\circ$ · τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται α., ὅτι καὶ $I + Z = 180^\circ$ · β'. ὅτι καὶ αἱ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη β , E , ἢ δύο ἄλλαι ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ν καὶ A , εἰσὶν ἴσαι 180° .

137. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Εἴεται παράλληλοι ἔσον-

ται, ἐν εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἐμπέπτυσα ἐν τῶν πέντε ποιῇ·
 α'. ἰσαλλήλους τὰς ἀντιστοιχῆς γωνίας· β'. ἰσαλλήλους τὰς
 ἐντὸς ἐναλλάξ· γ'. ἰσαλλήλους τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ· δ'.
 τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη $= 180^\circ$ · ε'. τὰς ἐκτὸς
 καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη $= 180^\circ$. τῶντι γὰρ αἱ ἀντίστοιχοι
 γωνίαι φέρε β, καὶ Z ἰσάλληλοι ὑδύνανται εἶναι, εἰάν αἱ
 γραμμαὶ βT, ZK μὴ ὥσι μῆτε συγκλίνεσαι μῆτε ἀ-
 ποχωρεῖσαι (131, 132), ὅ εἰν εἰάν μὴ ὥσι παράλλη-
 λοι· ἀλλ' ἕκαστον τῶν ἄλλων τεσσάρων ἐκ αὐτῶν κρατοίη,
 εἰμὴ ἰσῶντο ἀλλήλαις αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι· αἱ ἐντὸς ἐ-
 ναλλάξ φέρ' εἰπεῖν γωνίαι ρ καὶ I ἐκ αὐτῶν εἴησαν ἰσάλλη-
 λοι, εἰμὴ ἡ Z γωνία, ἥτις σὺν τῇ ρ εἰν $= 180^\circ$, ἴση
 εἴη τῇ ἀντιστοιχῇ β, ἥτις σὺν τῇ I ὀφείλει ποιεῖν 180° .

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Εὐθεῖαι ἄρα δύο αἱ ΔΤ καὶ ΚΚ
 κάθετοι, ἡ ἐπίσης πλάγιαι ἐπίτινος ἄλλης, παράλλη-
 λοι εἰσιν· ἐπὶ γὰρ τῆς τρίτης συσταθῆσονται ἴσαι αἱ ἀν-
 τίστοιχοι γωνίαι.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ ς'. Σημεῖν δοθέντος τῆ Γ (χ. 20)
 ἐκτὸς τῆς εὐθείας Δδ, εὐθεῖαν παράλληλον αὐτῇ διὰ
 τῷδε τῷ σημείῳ διάξομεν· α'. κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήμα-
 τι δὲ τυχόντι τῷ ΓΕ γεγράφω τόξον τὸ ΕΖ· β'. κέν-
 τρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ γεγράφω τό-
 ξον τὸ ΓΟ· γ'. διὰ τῷ διαβήτῳ μετηνέχσω τὸ ΓΟ τό-
 ξον ἐπὶ τῷ ἀδιορίστῳ ΕΖ· εἶσαι ἐντεῦθεν τὸ τόξον ΕΠ· δ'.
 διὰ τῷ Π, ὅπως ὀριωθέντος, καὶ διὰ τῷ δοθέντος Γ ἀχθεῖ-
 σα εὐθεῖα ἔσεται παράλληλος τῇ Δδ.

Εἰς δὲ τὴν τέττη δεῖξιν ἤχθω ἡ κατεσιγμένη
 ΓΕ, καὶ ἐπεὶ περ αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι ΠΓΕ καὶ
 ΓΕΟ, εἰσιν ἴσαι, ὥς ἴσαις τόξοις τοῖς ΠΕ, καὶ ΓΟ, ἐκ

κατασκευῆς, μετρώμεναι· ἄρα αἱ δύο εὐθεῖαι ΠΓ, Δδ εἰσι παράλληλοι (137).

140. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Βυλομένοις δὲ διὰ τῆ δοθέν-
τος κατὰ γῆς σημείω Ε εὐθεῖαν παράλληλον ἀγαγεῖν
τὴν Δδ εὐθεῖα τῇ ΠΓ, ὥσπερ ζητεῖται κῆπε τὲς πα-
ραλλήλους τῶν ἀνθέων χώρες προσδιορίσαι, τῶν δένδρων
τὰς παραλλήλους τάξεις κτ., καθεύδω ἐκ τῆ δοθέντος
Ε σημείω (108) πρὸς ὀρθὰς τῇ δοθείσῃ ΠΓ ἢ ΕΧ, ἐκ
δὲ τῆ Ε ἐσώθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΧ ἢ ΕΟ, ἣτις παράλ-
ληλος ἔσται τῇ δοθείσῃ ΠΓ· ἢ γὰρ αἱ δύο εὐθεῖαι ΠΓ,
ΕΟ ποιῶσιν ἐπὶ τῆς ΕΧ, τὴν αὐτὴν ἀντίστοιχον γωνίαν,
ὅ ἐστιν, ὀρθήν· εἰσὶν ἄρα παράλληλοι (137).

141. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Εκ τούτων ἄρα εὐθεῖαν ἄπα-
σαν τὴν ΑΕ (σχ. 21) εἰς ὅσα βυλόμεθα ἰσάμμηλα μέρη
τέμνειν μεμαθήκαμεν· καίωθω γὰρ τὴν ΑΕ εἰς πέντε τε-
μεῖν μέρη ἰσάμμηλα· α'. ἔν ἐκ τῆ Α πέρατος τῆς δοθεί-
σης εὐθείας ὑφ' ἡντιναῦν γωνίαν ἤχθω ἀδιορίστως ἢ ΑΤ.
β'. διὰ τῆ διαβήτη εἰλήφθω πέντε ἰσοδιεσῶτα σημεία ἐπὶ
τῆς ἀπεράντης εὐθείας ΑΤ, εἴτ' ἔν γενέσθω ΑΡ = ΡΓ
= ΓΔ, κτλ., ἢ ἐπεζεύχθω τὸ ἔχατον σημεῖον Θ, ἢ τὸ
Ε πέρας τῆς δοθείσης ΑΕ εὐθείας διὰ τῆς ΘΕ. γ'. ἤχθω
δὲ ἐκάστῃ τῶν πέντε σημείων εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΘΕ
εὐθεῖα (139)· ἢ δὴ γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν· αἱ γὰρ
μεταξὺ ἰσοδιεσῶτων παραλλήλων περιεχόμεναι εὐθεῖαι,
ἢ ἐπ' ἴσης πλάγιοι ἐπ' αὐτῶν, εἰσὶν ἰσάμμηλοι (128)·
ἀλλὰ μὲν αἱ παράλληλοι ΖΡ, ΙΓ, κτλ. ἐκ κατασκευῆς
ἴσον ἀλλήλων ἀπέχουσι, ἢ τὰ μέρη ΑΖ, ΖΙ τῆς πύτας
τὰς παραλλήλους τεμνέσης ΑΕ συνισῶσιν ἐπ' αὐτῶν ἀντι-
στοίχες γωνίας ἰσαμμήλους, εἴτ' ἔν εἰσὶν ἴσον ἐπ' αὐτῶν
πλάγιοι· ἄρα ταῦτα τὰ μέρη εἰσὶν ἰσάμμηλα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ἰδιοτήτων τινῶν εὐθειῶν ἀναφερομένων
πρὸς τὸν κύκλον.

142. Πᾶσα εὐθεῖα εἰς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν ἐμπίπτουσα (χ. 22) τέμνεται ἀπὸ τοῦ κέντρου ἢ εἰς τὸν κύκλον ἐκτὸς αὐτοῦ ἐξωτερικῇ· εἰ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐκτὸς αὐτοῦ ἐξωτερικῇ· κακείνως μὲν ἐμπίπτει ἢ ΚΤ, ἢ τὴν δὲ ἢ ΔΖ.

Ἐκ τῆς ἀπανταχῇ ὁμοίας τῶν κύκλων καμπυλότητος (44) ἐποπτεία μόνῃ τῇ ὁμοιότητι, τὰ ταῖς τεμνύσας ἐπ' ἀνήκοντα ἐναργῶς ὑποσυνάψωμεν.

143. α'. Ἐὰν αἱ τέμνουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθῶσιν, ὡς αἱ ΚΓ, ΚΙ, ΚΜ, πᾶσαι ἰσάλληλοι ἔσονται· εἰσὶ γὰρ ἐπιεικῶς κυκλικαὶ ἀκτῖνες (44).

144. β'. Ἐὰν δύο τέμνουσαι ἀπὸ σημείου ὑπερθεῖν τοῦ κέντρου κειμένης ἀχθῶσιν, ὥσπερ αἱ ΤΗ, Τπ, ἐλάττων ἔσαι, ἢ προαχθεῖσα διὰ τοῦ κέντρου διήξει, οἷα ἡ ΤΗ(α).

145. γ'. Ἐὰν δύο τεμνύσας αἱ ΕΓ, Εν ἀχθῶσιν ἀπὸ σημείου ὑπερθεῖν τοῦ κέντρου κειμένης τῇ Ε, μείζων ἔσιν ἢ διὰ τοῦ κέντρου διήκουσα, οἷα ἡ ΕΚ (β).

(α) Πρὸς μῖντοι μείζον πληροφορίαν τῶν πρωτοπειρῶν ἢ δεῖξαι ἢ ἔτι γενέσθαι· ἐπιζεύχου γὰρ ἡ ἀκτὶς Κπ· ἡκὺν ἔσαι $ΚΤπ > Κπ$ (17)· ἐπεὶ δὲ $Κπ = ΚΗ$ (41)· ἄρα ἢ $ΚΤπ > ΚΗ$ · ἄρα ἢ $ΚΤπ - ΚΤ > ΚΗ - ΚΤ$ · εἴτ' ἢν $Τπ > ΤΗ$.

(β) Ἐπιζεύχου γὰρ ἡ ἀκτὶς Κν· κοινῇ δὲ προαχθεῖ-

146. δ'. Δυεῖν τεμνωσῶν ἐξωτερικῶν ἐπὶ τὴν κοί-
λην διαγομένων περιφέρειαν, οἷαι αἱ Δκ, ΔΖ, μείζων
ἐσὶν ἢ διὰ τῆς κέντρου διήκυσσα, οἷα ἡ Δκ (γ).

147. ε'. Δυεῖν ἐξωτερικῶν τεμνωσῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς
ἀγομένων σημεία ἐπὶ τὴν κυρτὴν περιφέρειαν, οἷαι αἱ Δβ,
Δα, ἐλάττων ἐσὶν, ἢ προαχθεῖσα διὰ τῆς κέντρου δίσεισιν,
οἷα ἡ Δβ (δ).

148. Ἐὰν ἡ ΑΔ διάμετρος, ἡ τῇ Κο ἀκτὶνὶ κἀθε-
τος (χ. 23), παραλλήλως ἐαυτῇ ἐρπίσῃ τὴν ὁδὸν Γο κα-
τὰ βραχὺ ὑποσ μικρυνομένη, ἔστ' ἂν τὰ αὐτῆς Α, Δ πέ-
ρτα συμπέσωσι τῷ ο σημείῳ τῆς περιφέρειας, σαφές
ὡς αὕτη ἡ εὐθεῖα, ὅσῳ μὲν ἂν ἐπὶ δεξιὰ προαχθῇ, ὅ-
σῳ δ' ἂν ἐπ' ἀριστερὰ, ὑδέποτε διελθεῖν τὸν κύκλον δυ-
νήσεται, ὑδ' ἀφανθαι αὐτῇ, ὅτι μὴ καθ' ἓν μόνον ση-
μεῖον τὸ ο· τοιάδε ἔν εὐθεῖα, οἷα ἡ οΠ, ἡ οΤ, Α'πτο-
μένη ἢ ἀκύνει.

149. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δυνατὸν ἄρα ὁρίσασθαι τὴν
ἀπτομένην, ὅτι ἔστιν εὐθεῖα ἐπιψάύουσα τῆς κυκλικῆς περι-
φερείᾳ· καθ' ἓν μόνον σημεῖον, ἢ ὅσῳ ἂν προαχθῇ ἐρ-
ἐκτέρῳ, τὸν κύκλον εἰσδύναι μὴ δυναμένη.

σης τῆς ΕΚ ἔσαι ΕΚν = ΕΚΓ (Α'ριθ. 13)· ἔσι δὲ ΕΚν
> Εν (17)· ἄρα ἢ ΕΚΓ > Εν.

(γ) Ἐὰν γὰρ ταῖς ἀκτῖσι ΚΖ, Κκ κοινῇ προσεθῇ ἡ
ΔΚ, ἔσαι ΔΚΖ = ΔΚκ (Α'ριθ. 13)· ἀλλὰ ΔΚΖ > ΔΖ (17)·
ἄρα ἢ ΔΚκ, εἴτ' ἔν Δκ > ΔΖ..

(δ) Ἀχθείσης γὰρ τῆς Κα ἀκτίνος, ἔσαι ΚαΔ >
ΚβΔ (17)· ἄρα ΚαΔ — Κα > ΚβΔ — Δβ, εἴτ' οὖν
Δα > Δβ, τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐφαρμοθῆναι ἐνταῦθα δύ-
νεται ἢ ὅσα Εὐκλείδῃ δέδεικται, ἐν Προτάσεσιν Ζ, καὶ Η
τῶν τῆς Γ βιβλίας.

Τόμ. Β'.

○

150. Τὸ δὲ σημεῖον σ , καθ' ὃ ἡ ἀπτομένη ἐπι-
ψύχει τῷ κύκλῳ, σημεῖον ἀφ' ἧς ὀνομάζεται.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ ἀπτομένη $\sigma\pi$ παράλλη-
λός ἐστι τῇ διαμέτρῳ $\Lambda\Delta$. εἴγε αὐτὴ ἡ $\Lambda\Delta$, παραλλή-
λως ἑαυτῇ ἐρπύσσα, ἀφίκετο ἐς τὸ οὐνεχθεῖσα πρὸς τὴν
 $\sigma\pi$. ἀλλ' ἡ $\kappa\sigma$ ἀχθεῖσα ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς
σημεῖον κάθετός ἐστι τῇ διαμέτρῳ $\Lambda\Delta$ ἐξ ὑποθέσεως
(148). ἔστιν ἄρα καὶ τῇ $\sigma\pi$ ἀπτομένη κάθετος, καὶ ἀντισφί-
φως ἡ $\sigma\pi$ ἀπτομένη ἐστι κάθετος τῇ $\kappa\sigma$ ἀκτίνι (72).
ἀλλ' εὐδηλον, ὅτι εἰληπται ἐν τῷ κύκλῳ κατὰ τὸ δοκῶν
τὸ σημεῖον σ , καὶ δὴ καὶ ἡ $\Delta\Lambda$ διάμετρος κάθετος τῇ $\kappa\sigma$
ἀκτίνι περατεμένη πρὸς τῷ σ σημείῳ, καὶ δὲ καὶ ἄλλαι
σημεῖν οὐ ληφθῆ, δειχθήσεται τὰ αὐτὰ ἀπαραλλάκτως.
δυνατὸν ἄρα γενικῶς εἰπεῖν „τὴν ἀπτομένην τῷ κύκλῳ
„κάθετον ἐφεσάναι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τὴν ἐκ τοῦ κέν-
„τρου ὡσαύτως τῇ ἀπτομένη.“

152. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ ἀπειροσὴ εὐθεῖα, εἰς ἣν
ἀφίκετο ἡ $\Lambda\Delta$ διάμετρος, ἐνὶ σημείῳ ἀπέχεσα τοῦ σημεί-
ου σ , ἔστιν ὡσαύτως κάθετος τῇ ἀκτίνι $\kappa\sigma$, καὶ τανάπαλιν.
Αὕτη δὲ ἡ ἀπειροσὴ εὐθεῖα ἔστιν ἐνταῦθα τὸ τῆς κυκλι-
κῆς περιφερείας χοιχεῖον. μᾶλλον δὲ, μία τῶν ἀπειρο-
σῶν εὐθειῶν, ἐξ ὧν συγκροτεῖται ὁ κύκλος. ἐξέσαι ἄρα
ἐν γένει εἰπεῖν „ὡς ἡ ἀκτὶς ἐστι κάθετος τῷ τῷ κύκλῳ
„χοιχεῖον, καὶ μὴν καὶ πᾶσα ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα, ἐφ' ἣν ἐ-
„γομένη τῆς κυκλικῆς περιφερείας σημεῖον, κάθετος ἐφέ-
„σηκε τῇ περιφερείᾳ κατ' ἐκεῖνο τὸ σημεῖον.“

153. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἰ'να, σημεῖν δοθέντος τοῦ
ἀπτομένη κατ' αὐτὸ τῆς κυκλικῆς ἀχθῆς περιφερείας· α'.
ἡχθῶ ἡ $\kappa\sigma$ ἀκτὶς· β'. προήχθῶ πρὸς τὰ ἐκτὸς, ἵν' ἐκ τοῦ
κατ' αὐτὴν πέραςτος ἐξῇ κάθετον ἀνεγεῖραι τὴν $\Pi\sigma$ κατὰ

τὰ κανονιζέμενα (105)· αὕτη δὲ παντὶ δῶλον ἐκ τῶν ἄρ-
τι εἰρημένων, ὡς ἔσαι ἀπομένη, ἢ ἐζητεῖτο.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς
τε ἀπομένης οΠ καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα ἔπα-
ρμπεσεῖται· πᾶσα γὰρ ἄλλη εὐθεῖα ἢ οΖ πλαγία σῆ-
σεται τῇ ἀκτίνι (116)· πᾶσα ἄρα κἀξστος ἐκ τῷ κέν-
τρῳ Κ ἐπ' αὐτὴν ἀγομένη τὴν εὐθεῖαν ἐλάττω ἔσαι,
ἢ ἀκτὶς (113)· εἰσελεύσεται ἄρα αὕτη ἢ εὐθεῖα εἰς τὸν
κύκλον, καὶ δὲ ἔπαρμπεσεῖται εἰς τὸν μεταξὺ τῆς ἀπο-
μένης οΠ καὶ τῆς περιφερείας τόπον, κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

155. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τῆς τῆς ἀφῆς σημείου μεταξὺ
τῆς ἀπομένης καὶ τῆς περιφερείας ἄπειροι καμπύλαι διή-
ξουσιν· προήχθω γὰρ ἢ Κο ἀκτὶς πρὸς τὰ ἐπὶ Ι ἐπ' ἄ-
πειρον· εἰάν ἐν κέντρῳ μὲν τῷ τυχόντι β, εἰλημμένῳ ἐπὶ
τῆς οΚΙ εὐθείας ὑπερβῇ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ βο, γρά-
φῃ τόξον τὸ οκ, ταῦτε ὅτε τῇ ἀπομένη οτ, ὅτε τῇ περι-
φερείᾳ Αο συμπεσεῖται, εἰμὴ κατ' ἐν σημεῖον τὸ ο· τὸ
γὰρ καταγράφον σημεῖον μετ' ἑκάστον ἀπειροσὸν διάστημα
παρεκτρέπεται τῆς εὐθείας· ἐντεῦθεν ἄρα α'. τῆς βο ἀκτί-
νος μείζονος ὅσης, ἢ ἢ Κο, εἰς τῷ διαστήτῃ πῶς μετε-
νεχθεῖς ἐπὶ τὸ ο, διατέρῃ ἀκινήτῃ μένοντος ἐν τῷ β, με-
τὰ τὸ πρῶτον ἀπειροσὸν διάστημα ἐκπεσεῖται τῆς οΑΔ κυ-
κλικῆς περιφερείας· β'. ἐν τούτῳ δὲ καὶ τῆς ἀπομένης ἀ-
ποσῆσεται, καὶ καταγράφει καινὴν ἀπειροσὴν εὐθεῖαν· ἐπει-
γὰρ ἢ βο κἀξστος ἐφάσθηκε τῇ ἀπομένη, ἅπαν ἄλλο ση-
μεῖον τῆς ἀπομένης παρὰ τὸ ο, ἀποσῆσεται τῷ β ἀπο-
στήματι μείζονι τῷ βο (113)· ὁ ἄρα πῶς τῷ διαστήτῃ ὁ
τὸν κύκλον καταγράφων ἔδύναται τῆς ἀπομένης ἐπι-
ψαῖσαι κατ' ἄλλο σημεῖον, εἰμὴ κατὰ τὸ ο.

Ὅ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βο κα-

ταγραφείς κύκλος, ὅτε τῷ κύκλῳ ΟΑΔ, ὅτε τῆς ἀπτομένης, ἐπιφάῦσαι δύναται, ὅτι μὴ κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς σημείον ο.

156. Ομοία ἐφόδῳ συλλογισμῷ δειχθήσεται, ὡς εἰν κέντρῳ μὲν τῷ ν, διαστήματι δὲ τῷ νο, καταγραφῇ τόξῳ τὸ οκ, εἰ κέντρῳ μὲν τῷ Ι, διαστήματι δὲ τῷ Ιο, γραφῇ τὸ οε, εἰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἄπειρα ἄλλα κυκλικὰ τόξα γραφῶσιν, ἕκασον τέτων, δι' ὃν λόγον εἰ τὰ οκ, εἰ μὴ ἐπιφάῦσαι ὅτε τῆς ἀπτομένης, ὅτε τῶν ἄλλων περιφερειῶν ὑδεμιάς, εἰ μὴ κατὰ μόνον τὸ τῆς ἀφῆς σημείον ο.

157. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν κύκλῳ ἀκτὶς πρὸς ὀρθὰς χορδῇ ἀγομένη, δίχα αὐτὴν τέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἦ'χθω γὰρ ἡ ΚΕ ἀκτὶς κάθετος τῇ ΠΧ χορδῇ (9. 24). φημί ἔν ὡς δίχα τὴν χορδὴν τεμεῖ κατὰ τὸ ν. τὸ γὰρ Κ σημεῖον τῆς ΚΕ ἀκτίνος ἴσον ἀπέχει τῶν δύο σημείων Π, Χ τῆς ΠΧ χορδῆς διὰ τὰς ἰσαλλήλους ἀκτίνους ΚΠ, ΚΧ. ἀλλ' εἰν εὐθείας εὐθείας καθεύτε ἐφισαμένης ἐν σημείον τὸ Κ ἴσον ἀπέχει δυοῖν σημείων Π, Χ τῆς ἐφ' ἣν ἐφέστηκε, εἰ ἕκασον τῶν ἄλλων τῆς καθεύτε σημείων ἴσον ἀποστήσεται τῶν αὐτῶν δύο σημείων Π, Χ (84). ἄρα πάντα τὰ τῆς ΚνΕ εὐθείας σημεία, εἰ ἐκ τῷ ἀκολουθεῖ εἰ τὸ ν, ἴσον ἀπέχουσι τῶν Π, Χ σημείων, περάτων τῆς εὐθείας ΠΧ. ἄρα τὸ ν ἐστὶ τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς ΠΧ εὐθείας. ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

158. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Καὶ τὸ τῇ χορδῇ δὲ ἰποτεινόμενον τόξον ΠΕΧ δίχα τέμνει· εἶδομεν γὰρ ἦδη, ὡς ἕκασον τῶν σημείων τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΠΧ χορδῇ ἰσαμένης ἀκτίνος ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ αὐτῆς περάτων. ἄρα εἰ τὸ Ε σημεῖον, ὃ κοινὸν ἔχει τῷ τόξῳ ΠΕΧ, ἴσον

τῶν αὐτῶν Π, Χ ἀπέχει· ἄρα αἱ χορδαὶ ΠΕ, ΕΧ, αἱ τὰ ἴσα παρισῶσαι ἀποσήματα, ἰσάλληλοι εἰσιν· ἄρα καὶ τὰ τόξα ΠΗΕ, ΕΚΧ, τὰ ὑπὸ ἴσων χορδῶν ὑποτετινόμενα, εἰσιν ἰσάλληλα (47)· ἄρα τὸ Ε σημεῖον ἐστὶ τὸ μεσαίτατον τῶν τε ὀλίκῃ τόξῳ ΠΕΧ· ἄρα ἡ ΚΕ ἀκτὶς τέμνει τὸ ΠΕΧ τόξον δίχα.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἀλλὰ καὶ τὴν ὑπὸ ΠΚΧ γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΠΚ, ΚΧ, τῶν περατωμένων πρὸς τοῖς πέρασι ταύτης τῆς χορδῆς, δίχα τέμνει· δέδεικται γὰρ ἤδη ἰσάλληλα τὰ τόξα ΠΗΕ, ΕΚΧ· ἀλλὰ τὸ μὲν ΠΗΕ μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΠΚΕ γωνίαν, τὸ δὲ ΕΚΧ τὴν ὑπὸ ΕΚΧ· ἄρα ΠΚΕ = ΕΚΧ.

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἰνα ἐν δίχα τμηθῇ χορδή τις ἡ ΠΧ (χ. 24), μίῃ τις τῶν ἀκτίνων ἐσώθῃ αὐτῇ κάθετος (104).

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἰνα τὸ τόξον, ἢ τὸ κέντρον ἐγνωσai, τὸ ΠΕΧ δίχα τμηθῇ, ἐπεξεύχθω μὲν ἡ χορδὴ αὐτῇ ΠΧ, ἐσώθῃ δ' αὐτῇ κάθετος ἡ ΚΕ ἀκτὶς· τὸ δὲ Ε σημεῖον τῆς ἀκτίνος εἶναι τῷ τόξῳ τὸ μεσαίτατον (158).

162. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἰνα γωνία ἡ ὑπὸ ΠΚΧ δίχα τμηθῇ, κείτρῳ τῷ Κ γεγράφῃ τὸ τόξον τὸ ΠΕΧ, καὶ ἐπεξεύχθῃ ἡ χορδὴ ΠΧ, καὶ ἡγέρθῃ ἡ ΚΕ ἀκτὶς αὐτῇ πρὸς ὀρθάς· ἐκ δὲ δὴ τούτων συσπῆσονται γωνίαι δύο, ἢτε ὑπὸ ΠΚΕ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΚΧ, ὧν ἑκάστη ἡμισεία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΠΚΧ γωνίας (159).

163. ΠΟΡΙΣΜΑ ς'. (χ. 25) Ἐντεῦθεν ἄρα δυνατὸν διελειν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν, ἢ τὸ τόξον τὸ ΑΔΓ, εἰς ὅσα μέρη ἴσα βυλόμεθα, κατὰ τήνδε μέντοι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 2· 4· 8· 16· κτλ. ἡ μὲν γὰρ κάθετος ΒΔ τέμνει δίχα τὸ τόξον, καὶ δὴ καὶ τὴν γωνίαν

εἰς δύο γωνίας ἰσαληύεις ΑΕΔ, εἰ ΔοΓ· ἡ δὲ ΒΕ κάθετος, τὸ τόξον ΑΔ, ἡ δὲ ΒΙ κάθετος, τὸ ΑΕ τόξον ὅθεν τὸ ΑΙ εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆ ΑΔΓ τόξε, εἰ ἐξῆς ὁμοίως.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Τ' ἀνάπαλιν δέ, εἰ ἄκτις ἡ ΚΕ (σχ.24) δίχα τέμνῃ τὴν χορδὴν ΠΧ, ἡ τὸ ὑφ' ὃ ὑπατεῖναι τόξον, ἡ τὴν γωνίαν τὴν τῷ τόξῳ μετρεμένην, πρὸς ὁρθὰς ἐφέσηκε τῇδε τῇ χορδῇ· εἰ γὰρ α'. εἰ ἡ ΚΕ ἄκτις δίχα τέμνῃ τὴν ΠΧ, τὸ ν αὐτῆς σημεῖον ἴσον α.πέχει τῶν Π, Χ· β'. ἀπέχει δὲ εἰ τὸ Κ, ὡς κέντρον τῆ κύκλου, ἴσον τῶν Π, Χ (41)· ἡ ἄρα ΚΕ ἄκτις ἔχει δύο σημεία, ὧν ἑκάτερον ἴσον ἀπέχει δύο σημείων Π, Χ τῆς ΠΧ χορδῆς· ἄρα ἡ ΚΕ κάθετος ἐφέσηκεν αὐτῇ (102).

Ὡσαύτως εἰ ἡ ΚΕ ἄκτις δίχα τέμνῃ τὸ ΠΕΧ τόξον, ἡ τὴν ὑπὸ ΠΚΧ γωνίαν, δύο σημεία αὐτῆς, προαχθείης εἰς τὸ τόξον ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει, τὰ Κ, Ε ἴσον ἀπέχουσι δύο σημείων τῆς χορδῆς ΠΧ, τῶν Π, Χ· κάθετος ἄρα αὐτῇ ἐσῆξει.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Εἰ ἄν κάθετος ἡ ΚΕ δίχα τέμνῃ χορδὴν τὴν ΠΧ, διὰ τῆς κέντρον διήξει· ἐπεὶ γὰρ τὸ ν σημεῖον τῆς ΚΕ καθέτου ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ, ἡ κάθετος ΚΕ προαχθείσα πρὸς τὸ Κ διελεύσεται διὰ σημείων ἴσον ἀπέχοντων τῷ Π, εἰ τῷ Χ, εἰ δὲ εἰ διὰ τῆς κέντρον (41).

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Δυνατὸν ἄρα διὰ τριῶν σημείων τῶν Π, Ε, Χ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων κύκλον καταγράφαι· ἐπιγευγνύτωσαν γὰρ τὰ τρία ταῦτα σημεία δύο εὐθεῖαι αἱ ΠΕ, ΕΧ, εἰ τέτων ἑκατέρα τετμήσῃ δίχα διὰ τῶν καθέτων Κδ, Κο (106) αἵτινες προαχθείσαι συμπεσύνται ἀλλήλαις κατὰ τὸ κέντρον τῆ γραφῆς.

μένε κύκλῳ· ὡς ἔν ὁ κέντρω μὲν τῷ ἔτῳ εὐρεθέντι Κ, διασύνματι δὲ τῷ ΚΠ, γραφεὶς κύκλος, καὶ δι' ἑκατέρων τῶν λοιπῶν δύο σημείων Ε, Χ διελεύσεται, ἐκ τῶν προειρημένων εὐμαρῆστατα συνάγεται.

167. ΠΟΡΙΣΜΑ 1'. 1' ἢ ἄρα τῷ δοθέντος κύκλου ΠΕΚμ τὸ κέντρον εὐρεθείη, ἤχθωσαν μὲν πρὸς τὸ δοκῶν δύο χορδαὶ αἱ ΠΕ, ΕΧ, καὶ τούτων ἑκατέρω δίχα τετμήσῃ διὰ καθέτων τῶν Κδ, Κο, αἵτινες προεχθεῖσαι δείξουσιν τὸ ζητούμενον κέντρον Κ.

168. ΠΟΡΙΣΜΑ 1Α'. Τόξῃ ἄρα δοθέντος τῷ ΠΕΧ, ἢ ἀναπληρωθῇ ὁ κύκλος α'. ἤχθωσαν δύο χορδαὶ αἱ ΠΕ, ΕΧ· β'. εὐρεθῇ τὸ τῷ τόξῳ κέντρον, ὡς ἀνυτέρω· τῷ δὲ κέντρῳ εὐρεθέντος, ῥᾶσα ὁ κύκλος ἀναπληρωθήσεται.

169. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο τόξα μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐςωσαν δύο τόξα τὰ ΠΖ, ΑΔ (σχ. 26) κείμενα μεταξὺ δύο παραλλήλων τῶν ΠΑ, ΖΔ· ἀχθεῖσα ἔν ἡ ΚΟ ἀκτὶς κάθετος ταῖς χορδαῖς ΠΑ, ΖΔ, α'. ποιήσει $ΟΑ = ΟΠ$ · β'. $ΟΔ = ΟΖ$ (158)· εἰάν ἄρα δύο ἰσαμμήλα τόξα τὰ ΟΔ, ΟΖ ἀπὸ δυοῖν ἰσαμμήλων τόξων τῶν ΟΑ, ΟΠ ἀφαιρεθῶσι τὰ κατάλοιπα ΑΔ, ΠΖ εἴτ' ἔν τὰ μεταξὺ δύο παραλλήλων τῶν ΠΑ, ΖΔ κείμενα ἴσα ἔσονται Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν τῶν περιεχο-
μένων ὑπὸ εὐθειῶν παντοίων τῶν ἐν τῷ
κύκλῳ.

170. Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ καλεῖται, ἥς ἡ κορυφή Κ ἐστὶν ἐν τῷ τῷ κύκλῳ κέντρῳ, οἷα ἡ ὑπὸ ΒΚΤ (χ. 27).

171. Σαφές ἄρα, ὅτι μέτρον ταύτης τῆς γωνίας ἐστὶν ἀκριβῶς τὸ βΤ τόξον τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν πλευρῶν βγ, ΤΚ ταύτης τῆς γωνίας (78)· καὶ δὴ τούτῳ μέτρῳ χρῆσόμεθα εἰς τὸ ὀρίσασθαι πάντα τὰ εἶδη τῶν γωνιῶν, περὶ ὧν ἐρῶμεν ἐνταῦθα.

172. Α' φῆς γωνίαν καλῶ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἀπτομένης ηΤ, ἐ τῆς περιφερείας δΤ· ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα ὅλον, ὡς ἡ τῆς ἀφῆς γωνία πασῶν ἐλαχίστη ὑπάρχει· ὁδὲν γὰρ ἄλλο ἐστὶν, εἰμὴ γωνία περιεχομένη ὑπὸ χοιχείᾳ κυκλικῆς τῶν ὧν καταγράφει τὸ γεννιῶν σημεῖον, ἐ τῷ ἀμέσως ἐγγύς κειμένῳ χοιχείᾳ· ἀλλὰ τὸ γεννητικὸν σημεῖον ἐ περεκτρέπεται τῆς εὐθείας μετ' ἑκάστον διάβημα, ὅτι μὴ ἀπειροσῶς (25)· ἄρα δύο χοιχεῖα κυκλικὰ ἐ δύναται ποιεῖν, εἰμὴ γωνίαν ἀπειροσῶς, εἴτ' ἐν ἀπάσῃ δεδομένης ἐλάττονα· ἡ ἄρα τῆς ἀφῆς γωνία πασῶν ἐστὶν ἐλαχίστη.

173. Η' ὑπὸ δύο χορδῶν περιεχομένη γωνία, καὶ πρὸς τῷ κοίλῳ κύκλῳ τελευτῶσα, γωνία πρὸς τῇ περιφερείᾳ καλεῖται· οἷα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΑΔ.

174. Τμήματος γωνία ἔστιν ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς, ἢ ἀπτομένης, ἢ κορυφὴν ἔχουσα τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον· οἷα ἡ ὑπὸ ΔΑΧ, ἢ ΔΑΤ (χ. 28).· πᾶσα ἄρα χορδὴ συνάμα τῇ διὰ τῆς πέρατος ταύτης τῆς χορδῆς διῆεν· ποιεῖ δύο γωνίας τμήματος, τὴν μὲν μείζω τὴν ὑπὸ ΔΑΧ, ἣτις ἀντιστοιχεῖ τῷ μείζονι τμήματι ΔΤΑΚ (43), τὴν δὲ ἐλάττω τὴν ἐλάττονι ἀντιστοιχῶσαν τμήματι τῷ ΔΡΑΘ· καίτοι τῆς χορδῆς διαμέτρου ἔσης, ἐπεὶ ἡ ἀκτὺς, ταυτόν εἶπεν ἢ διάμετρος, ἢ πρὸς τῷ σημείῳ τῆς ἀφῆς περατωμένη, κάθετος ἐφῆσθη τῇ ἀπτομένῃ (151), αἱ δύο γωνίαι τῆς τμήματος ἰσάλληλοι ἔσονται, ὥσπερ ἢ τὰ κατ' αὐτὰς τμήματα (45).· εἴτ' ἐν ἑκατέρᾳ ἔσεται ὀρθή.

175. Γωνία ἐκτὸς περιφερείας ἔστιν, ἥς ἡ κορυφὴ ἐκτὸς κεῖται τῇ κύκλῳ· οἷον ἡ ΓΑΠ (χ. 29). γωνία δὲ ἔκκεντρος, ἥς ἡ κορυφὴ μεταξὺ κεῖται τῇ κέντρῳ ἢ τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΧΑΔ (χ. 30).

176. Θεώρημα σοιχειῶδες. Τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ ἡμισυ τῆς τόξε, ἐφ' ἣ βέβηκε.

ΔΕΙΞΙΣ. Διερχέσθω πρῶτον ἡ ἑτέρα τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν διὰ τῆς κέντρου, εἴτ' ἐν ἔσω πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ἡ ὑπὸ ΘΑΔ (χ. 31).· φημί ἐν, ὥς ταύτης μέτρον ἐστὶ τὸ ἡμισυ τῆς τόξε ΘΔ, ἐφ' ἣ βέβηκε, ταυτόν εἶπεν, ἐφ' ἣ τοῖς πέρασι τελευτῶσιν αἱ ΑΘ, ΑΔ χορδαί, αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι.

Ἦ'χθω γὰρ ἡ ΠΙ παράλληλος τῇ ΑΔ, ἢ ἡ ΑΘ χορδὴ ἐμπίπτειτω εἰς δύο παραλλήλους, ἢ ἐπὶ τῆς ΠΚΙ παραλλήλου ποιείτω γωνίαν πρὸς τῷ κέντρῳ τὴν ὑπὸ ΘΚΙ· αὕτη ἐν ἀκριβῶς μετρηθήσεται ὑπὸ τῆς τόξε ΘΙ, ἐφ' ἣ βέβηκε (171).· ἀλλὰ ΘΚΙ = ΘΑΔ (132).· καὶ

τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας μέτρον τὸ ΘΙ τόξον· ἄρα
 ἔς τῆς ἴσης αὐτῇ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ὑπὸ ΘΑΔ μέ-
 τρον ἐστὶ τὸ αὐτὸ τόξον ΘΙ.

Ἀλλὰ ΘΙ = $\frac{1}{2}$ ΘΔ, ἐφ' ᾧ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ πε-
 ριφερείᾳ γωνία ΘΑΔ· ἔτι γὰρ ΘΚΙ = ΠΚΑ (99)·
 ἄρα ἔς ΘΙ = ΠΑ· ἐστὶ δὲ ἔς ΠΑ = ΙΔ (169)· ἐκὼν
 2 ΘΓ = ΘΔ ἔς ΘΙ = $\frac{1}{2}$ ΘΓ ἄρα ΘΙ ἡμισὺ ἐστὶ τῷ
 ξυ ΘΔ, ἐφ' ᾧ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ὑ-
 πὸ ΘΑΔ.

Διερχέωσαν εἴτα ἐκάτεραι αἱ τὴν πρὸς τῇ περι-
 φερείᾳ περιέχουσαι γωνίαν ἐκ τῶν ἐτέρων τῷ κέντρῳ, ὡς
 αἱ ΠΖ, Πκ (9. 32.)· δειχθήσεται ἐν ἑκὼν ἐπὶ ταύτης
 τὸ αὐτὸ.

Ἀχθείσῃς γὰρ τῆς κατεσιγμένης Πν διὰ τῷ Κ
 κέντρῳ, τῆς ὑπὸ νΠκ γωνίας μέτρον εἶναι τὸ ἡμισὺν τῷ
 Ζκ τόξῳ, ἐφ' ᾧ βέβηκεν, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· ἀλ-
 λὰ $\frac{1}{2}$ νΖκ = $\frac{1}{2}$ νΖ + $\frac{1}{2}$ Ζκ· ἡ δὲ γωνία νΠΖ, ἥ
 ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν νΠ δίδεισι διὰ τῷ κέντρῳ, μετρεῖ-
 ται ὑπὸ τῷ ἡμίσει τῷ τόξῳ νΖ, ἐφ' ᾧ βέβηκε, συλ-
 λογισμέθω τοίγυν ὕτως· ὅλης τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ
 γεγραμμένης γωνίας, νΠκ μέτρον ἐστὶ τὸ ἡμισὺν τῷ
 νΖ συν τῷ ἡμίσει τῷ τόξῳ Ζκ· ἀλλὰ τῆς μερικῆς γωνίας
 νΠΖ μέτρον ἐστὶ τὸ ἡμισὺν τῷ νΖ τόξῳ· λείπεται ἄρα
 τῆς μερικῆς γωνίας ὑπὸ ΖΠκ μέτρον τὸ ἡμισὺν τῷ
 Ζκ τόξῳ· ἄρα ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΖΠκ μετρεῖται
 ὑπὸ τῷ ἡμίσει τῷ Ζκ τόξῳ, ἐφ' ᾧ βέβηκε.

Τέλος δὲ διερχέωσαν ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἐνθεν,
 ἡ δὲ ἐνθεν τῷ κέντρῳ, ὡς αἱ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ περιέχουσαι·
 τοιγαρὼν ἀχθείσῃς διὰ τῷ κέντρῳ τῆς ΑΔ κατεσιγμέ-
 νης, τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας μέτρον εἶναι τὸ ἡμισὺν τῷ

ΔΓ τόξον, τῆς δ' ὑπὸ ΒΑΔ τὸ ἥμισυ τῆ ΒΔ (176). ὅλως ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ΒΔ + $\frac{1}{2}$ ΔΓ· ὃ ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀλικοῦ τόξου ΒΔΓ, ἐφ' οὗ βέβηκεν.

Εὐτεῦθεν ἄρα ἐποίησμεν ἐν γένει: ἀπάσης πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας, καὶ ἡ ἑτέρα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν διήκει διὰ τῆ κέντρου, καὶ ἑκατέρω κείται ἐπὶ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆ κέντρου, ἢ ἡ μὲν ἐνθεν, ἢ δ' ἐνθεν τῆ κέντρου διῶσιν· ἐφ' ἐκάστης τῶν τριῶν τῶν δε περιπτώσεων, μέτρον τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας τὸ ἥμισυ ἐστὶ τῆ τόξου, ἐφ' ἧ βέβηκεν· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

177. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εἰάν ἄρα δύο, ἢ πλείους γωνίαι πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τῇ αὐτῇ, ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων, βαίνωσιν, ἰσάλληλαι ὑπάρχουσι.

178. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Η' πρὸς τῇ κέντρῳ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι (χ. 34). τῆς γὰρ πρὸς τῇ κέντρῳ γωνίας ΕΚΔ μέτρον ἐστὶν ὅλον τὸ τόξον ΕΠΔ, ἐφ' ἧ βέβηκεν (171). τῆς δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΕΒΔ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῇ αὐτῇ ΕΠΔ τόξου, μέτρον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τῆ αὐτῇ τόξου (176).

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τίνας δὲ χάριν, εἰρήτις τυχὸν τῶν πρωτοπείρων, τῆς μὲν πρὸς τῇ κέντρῳ γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ τόξον, ἐφ' ἧ βέβηκε, πᾶν δὲ τόξον, ἐφ' ἧ γωνία τὴν βάσιν ἴσχει, ὡς μέτρον αὐτῆς, ἡμῖς παραλαμβάνεται:

ΛΥΣΙΣ. Εἰάν μὲν γὰρ ὑποθεθῇ γωνία τις πρὸς τῇ κέντρῳ, μονίμως ἢ ὠρισμένως χαίνουσα, τὸ μέτρον αὐτῆς, ὡς ἡδὴ ἐμάθομεν, εἶναι αἰ ἀτρεπτον, εἴτ' ἔν μέρους ὅμοιον τῆς κυκλικῆς περιφερείας, ἣς ὑποτίθεται τὸ

κέντρον, ὅποσον ἂν ὑποτεθῇ τὸ μέγεθος τῆς κατὰ ταύ-
την τὴν περιφέρειαν ἀκτίνος, εἴτ' ἐν τῶν αὐτῶν περιεχέ-
σῶν πλευρῶν (78, 79). τῆς δὲ γωνίας, ἥς ἐκ ἐξιν
ἡ κορυφή πρὸς τῷ κέντρῳ τῷ κύκλῳ, ἐφ' ἧς τῷ τόξῳ βεβήκει,
τὸ μέτρον ποικίλλεσθαι δύναται ἐπ' ἄπειρον, καίτοι τῷ
τόξῳ ἀτρέπτει μένοντος. Θῶμεν γὰρ πλείους ἐξῆς γωνί-
ας τὰς ΑΒΔ, ΑΚΔ, ΑΖΔ, κτλ. (χ. 35.) ἀπάσας
βεβηκυίας ἐπὶ τῷ αὐτῷ τόξῳ ΑΧΔ, ἡ κορυφὰς κατὰ
συνέχειαν ἐχέσας τὰς Β, Κ, Ζ, κτλ. ἐπὶ τῆς ἀπε-
ράντι εὐθείας χ ρ'. ἐκὼν τὸ μὲν ἀνοιγμα τῆς ὑπερβεν
τῷ κέντρῳ γωνίας ΑΒΔ, ἐπαιωδητῶς ἐστὶ μείζον τῷ τῆς
πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΑΚΔ, αὐτῆς δὲ μείζον, ἢ τὸ
τῆς ὑπερβεν τοῦ κέντρου ΑΖΔ. ταύτης δὲ μείζον, ἢ τὸ
τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΑΙΔ. ἡ ὕψος ἐξῆς ἐπ' ἄπειρον.
ἐπεὶ περ τοίνυν ἀπειράριθμοι γωνίαι, μᾶλλον ἢ ἦττον χαί-
νυσαι, ἐπὶ τῷ αὐτῷ τόξῳ τῷ αὐτῷ κύκλῳ βεβηκέναι δύναν-
ται, τυτὶ τὸ τόξον ὑδούλως ξυντελεῖ πρὸς τὸ εἶναι κοινὸν
μέτρον πασῶν τῶν διαφορησῶν γωνιῶν ἢ πρὸς τῷ κέντρῳ
ἄρα γωνία, ἥς ἡκιστα μεταλλαῖται τὸ μέτρον, εἰμὴ ἡ τῆς γω-
νίας ἀλλαιωθείη ἡ ἀνοιγὴ (78, ἡ ἐξῆς), δύναται παραλαμ-
βάνεσθαι ὡς ὅρος παραθέσεως ἀπασῶν τῶν ἄλλων γωνιῶν.

179. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γω-
νία διπλασίᾳ ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, εἰάν ἐπὶ τῷ
αὐτῷ βαίνωσιν αἱ γωνίαι τόξῳ, ἐντεῦθεν ὑποσυνάφομεν
θεώρημά τι, ἀπάσῃ μὲν τῇ Φυσικῇ, ἐξαιρέτως δὲ τῇ Α'-
στρονομίᾳ, πρὸς ῥογιαίτατον. Ἐξω μέγεθος τὸ ΑΓ (χ. 36.)
ἡ διάμετρος φέρ' εἰπεῖν, ἢ ὁ ἄξων ἐνὸς τῶν πλανητῶν,
ὁρώμενος ἐκ δύο διαφορῶν ἀποσημάτων τῶν Ο, Η, ὧν
τὸ ἐλάττον Οτ ἔσω ἡμισυ τῷ μείζονος Ητ, μᾶλλον ἐμ-
πης ἐπαιωδητότερον, ἢ τὸ μέγεθος τῷ ὁρατῷ ΑΓ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὑποτεθῆναι ἔδει τὸν τῷ θ αὐτῷ ὀφθαλμὸν ὁ ἀφίσταται τῷ ὑποκειμένῳ ἀποσήματι τῷ θ ὅτι μείζονι τῷ κατὰ τὸ ὑποκειμένον αὐτὸ μεγέθους (σχ. 37.)· εἰ γὰρ ἰσῶτο τὸ τῷ ὑποκειμένῳ μεγέθος $\alpha\Gamma$ τῷ θ ὅτι ἀποσήματι, ἢ ἔειναι $\alpha\Gamma > \theta$, ὥσπερ, ὅταν φέρε τοίχον τι. καὶ οἶκον ὁρῶμεν ἀπὸ τινῶν παλῶν ἀποσήματος, ἐκ ἂν κρατήσκειν, ὃ πρότερον ἀπεδείξαμεν· ἐν γὰρ τῷ 37 σχήματι κατάδηλον, ὡς αἱ δὶ εὐθεῖαι $\Gamma\eta$, $\alpha\eta$ περιέχουσιν ἐν τῷ κύκλῳ τόξον μείζον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν $\Gamma\theta$, $\alpha\theta$ εὐθειῶν· ἔπειδ' ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία $\Gamma\eta\alpha$ βέβηκεν ἐπὶ τόξῳ μείζονος, ἢ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ $\Gamma\theta\alpha$, ἢ πρώτη γωνία ἔσαι μείζων ἢ ἡμισεία τῆς δευτέρας· ἔτι δὲ τὸ φαινόμενον μέγεθος τοῦ ὑποκειμένου ὁρῶμεν ἐκ τῆς η μείζον ἔσαι, ἢ τὸ ἡμισυ τῷ φαινόμενῳ μεγέθους τῷ αὐτῷ ὁρῶμεν ἐκ τῆς θ · ἐντεῦθεν ἄρα συνάγεται.

α'. Τὸ φαινόμενον μέγεθος ὁρατὲ τινος εὐθέποτέ ἐστὶ κυρίως εἰπεῖν, ἐν λόγῳ ἀντιπεπληῖσθαι τῶν ἀποσημάτων· εἴγε τὸ τόξον, ἐφ' ᾧ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία $\Gamma\eta\alpha$ αἰεὶ ἐστὶ βραχυτέρι μείζον τῷ, ἐφ' ᾧ βέβηκεν ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ $\Gamma\theta\alpha$.

β'. Ὅσῳ μέντοι τὸ ὅτι ἀπόσημα πλέονάκις περιέχει τὸ τῷ ὑποκειμένῳ μεγέθος $\Gamma\alpha$ (σχ. 36.) τοσούτῳ ἢ μεταξὺ τῶν δύο εἰρημένων τόξων διαφορὰ ἔστιν ἀνεπαίδητος· ἔτι δὲ τοσούτῳ ἢ πρότασις „τὸ φαινόμενον μέγεθος ὑποκειμένου τινὸς ἔστιν ἐν λόγῳ ἀντιθέτῳ τῶν ἀποσημάτων“ τῷ ἀληθῆς ἐγγίον γίνεται· εἰ γὰρ προκείμεναι τοίχον φέρε, ὀργῆας πλάτος ἔχοντα, πρῶτον μὲν ὁρᾶν ἐξ ἀποσήματος ὀργῶν 100, εἴτα ἐκ 200, τὸ δεύτερον φαινόμενον μέγεθος τῆς ὀργῆας ἔστι· ὡς πρὸς αἰωθισιν ἀκριβῶς ὑποδιπλάσιον τῷ πρώτῳ.

γ'. Περὶ δὲ τῶν ἀπὸ τῆς γῆς ὁρωμένων οὐρα-
 τίων σωμάτων, ἐπεὶ τὸ ἀπόσημα, ᾧ ἀπέχει ἀστῆρις ἀπὸ
 τῆς γῆς, ἀπαραβλήτως ἔστι μείζον τῆς πραγματικῆς δια-
 μέτρου τῆ ἀστέρος, ἐξέσαι ἐν ἀπάτῃ ὅσον ἐκ ἀπειροσῆς, ὡς
 ἀληθεὶ χρήσασθαι ἐπὶ τῆς ἀστρονομίας τῇ προειρημένη προ-
 τάσει, καὶ ὡς ἀρχῇ μνημονώτα τῇ „τὰ φαινόμενα μεγέθη,
 „ἢ αἱ φαινόμεναι διάμετροι τῶν ἀστέρων, ἀντιπεπονηδώς
 „ἀνάλωγὰ εἰσι τοῖς αὐτῶν ἀπὸ τῆς γῆς ἀποσήμασι.“

180. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γω-
 νία, ἐὰν βάσιν ἔχη τὴν διάμετρον, ὡς ἡ $\eta\alpha\beta$, ἢ $\eta\chi\beta$,
 ἔστιν ὀρθή (α. 40). βεβηκυῖα γὰρ ἐπὶ τῆς διαμέτρου,
 βεβηκεν ἐπὶ τῷ ἡμικυκλίῳ $\eta\tau\omicron\beta$. τὸ δὲ ἡμισυ τῆς γωνίας
 90° , ὃ ἔστι μέτρον γωνίας ὀρθῆς (91).

181. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Διὰ κύκλου ἄρα γραφέντος γω-
 νίαν ὀρθὴν ἐξέσαι συστήσασθαι· ἀπὸ γὰρ τῶν η καὶ δ περάτων
 μιᾶς τῶν διαμέτρων, εὐθειῶν γραμμῶν ἀχθείσῶν πρὸς ἐν τι
 σημείον τῆς περιφερείας, γέγονε τὸ ζητούμενον.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ ς'. Ἐκ τῶν Β. πορίσματος μεμα-
 θήκαμεν, ὅπως ἀπὸ σημείου ἐκτὸς κειμένου τῷ Ο εὐθείαν
 ἀποτομένην τῷ κύκλῳ ἀγαγεῖν δυνασόμεθα (α. 39). ἀ-
 κέντρῳ μὲν τῷ μεσαιοτάτῳ σημείῳ τῆς ΚΟ εὐθείας,
 διαστήματι δὲ τῷ ΚΠ, γεγράφθω νέος κύκλος ὁ ΚΡΟΝ·
 β'. ἐκ τῶν σημείων Ρ, καὶ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι
 ἐπεξεύχθω ἡ εὐθεῖα ΡΟ, ἥτις ἐφάπτεται τῷ δοθέντος
 κύκλου.

Καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ ΟΡΚ γωνίας, διὰ τὸ βεβηκέ-
 ναι ἐπὶ τῆς ΚΟ διαμέτρου, ὕψης ὀρθῆς, ἡ ἀκτίς ΚΡ τῷ
 πρώτῳ κύκλῳ ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τῆς ΡΟ εὐθείας ποιεῖ, καὶ
 οὕτως ἐστὶν κάθετος τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ Ρ· ἡ ἄρα ΡΟ εὐθεῖα
 ἀληθῶς ἀπτεται τῷ προτέρῳ κύκλῳ (151).

Εἴαν δὲ ἐκ τῆ δοθέντος Ο σημεῖα ἀχθῇ πρὸς τὸ ἔτερον σημεῖον Ν, καθ' ὃ οἱ κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, ἢ ΝΟ εὐθεῖα, ἢ μὲν ὑπὸ ΟΝΚ γωνία ἔσται ὀρθή, ἢ δὲ ΟΝ ἐν αὐτῇ ἐφάπεται τῷ κύκλῳ· ἄρα κύκλος ἐκτὸς σημείου δοθέντος τῆ Ο, αἶε ἐξέσται δύο ἀπτομένας τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν.

183. ΠΟΡΙΣΜΑ ε'. Πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι (σχ. 40), εἴαν βάσιν ἔχωσι τόξον ἡμικυκλίου μετξον, οἷα ἢ ΗΑΔ, εἰσὶν ἀμβλείαι· ὀξείαι δὲ τὴν ἀντίστοιχαι ἐπὶ τόξῳ ἐλάττωτος ἢ ἡμικύκλιον βεβηκυῖαι, ὡς ἢ ΗΑΟ· ἐκείνων μὲν γὰρ μέτρον ὄν τὸ ἡμισυ τῆς ἐφ' ἧς βεβήκασι περιφερείας, ἐστὶ $> 90^\circ$, τῶν δὲ $< 90^\circ$.

184. ΠΟΡΙΣΜΑ ζ'. Η' τῆ τμήματος γωνία μετρεῖται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τόξου, ὃ ὑποτείνει ἢ συν τῇ ἐφαπτομένῃ τὴν γωνίαν περιέχουσα χορδῇ· εἴτε γὰρ αὕτη διὰ τῆ κέντρου δίδωσιν, εἴτε μὴ, (σχ. 28.)· ἐν εἰ μὲν ἐκεῖνο, ὡς ἢ ΑΝ, τὴνικαῦτα ἢ γωνία τῆ τμήματος ἔσται ὀρθή (174), ἐν δὲ μετρηθήσεται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως ἡμικυκλίου, ὑφ' ὃ ὑποτείνει ἢ ΑΝ χορδῇ (91)· εἰ δὲ τῆτο, ὡς ἢ ΑΔ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κατὰ τὴν ἀφὴν γωνίας ἀχθείσης τῆς διαμέτρου ΑΚΝ, ἢ ὀρθή γωνία ὑπὸ ΝΑΤ μετρηθήσεται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆ τόξου ΔΝ συν τῇ ἡμίσει τῆ τόξου ΔΡΑ, ὡς μετρουμένη ὑπὸ τῆ ἡμικυκλίου ΝΡΑ· ἀλλ' ἢ ὑπὸ ΔΑΝ ὡς πρὸς τῇ περιφερείᾳ μετρεῖται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆ ΔΝ τόξου (176)· ἄρα ἢ ὑπὸ ΔΑΤ, εἴτ' ἐν ἢ γωνία τῆ τμήματος, μετρηθήσεται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆ ΔΡΑ τόξου, ὃ ὑποτείνει ἢ ΔΑ χορδῇ.

Καὶ ἢ τῆ μείζονος δὲ τμήματος γωνία ΔΑΧ ἐν αὐτῇ μετρεῖται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆ μείζονος τόξου ΔΝΑ, ὑφ' ὃ ἢ χορδῇ αὕτη ὑποτείνει· ἐν γὰρ $\Delta\Lambda\chi = \nu\Lambda\chi +$

ναΔ· ἀλλὰ τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας ναΧ μέτρον τὸ $\frac{1}{2}$ Ατν, τῆς δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας ναΔ, τὸ $\frac{1}{2}$ Δν· ὅ-
λης ἄρα τῆς ΔΑΧ, εἴτ' ἐν τῆς τῷ μείζονος τμήματος γω-
νίας, μέτρον ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}$ Ατν + $\frac{1}{2}$ Δν = $\frac{1}{2}$ ΑτΔ· ἐν γένει
ἄρα μέτρον τῆς τῷ τμήματος γωνίας αἰεί ἐστὶ τὸ ἡμισυ τῷ
τόξου, ὑφ' ὃ ὑποτείνει ἡ χορδὴ, ἢ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης
τὴν γωνίαν περιέχουσα.

185. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Γωνία ἐκτὸς περιφερείας ἢ
ΓΑΠ (χ. 29.) μετρεῖται ὑπὸ τῷ ἡμίσειος τῷ τόξου ΠΓ
πλὴν τῷ ἡμίσειος τῷ τόξου Δδ τῷ περιεχομένῳ μεταξὺ
τῶν δύο αὐτῆς πλευρῶν· ἀχθείσης γὰρ τῆς ΔΧ παραλ-
λῆλος τῇ ΑΠ, ἐστί ΓΔΧ = ΓΑΠ (132)· ἀλλὰ α.
ἡ ὑπὸ ΓΔΧ μετρεῖται ὑπὸ τῷ ἡμίσειος τῷ ΓΧ τόξου, ἢ δὲ
ὑπὸ τῷ ἡμίσειος τῷ ΓΠ τόξου πλὴν τῷ ἡμίσειος τῷ ΠΧ

τόξου, εἴγε ΓΧ = ΓΠ — ΠΧ, καὶ δὲ καὶ $\frac{\Gamma \chi}{2} =$

$$\frac{\Gamma \Pi - \Pi \chi}{2} = \frac{\Gamma \Pi}{2} - \frac{\Pi \chi}{2} \cdot \beta'. \Pi \chi = \Delta \delta (169).$$

ἄρα κτλ.

186. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Η' ἀπτομένη ΑΒ (χ. 38.)
θεωρηθῆναι δύναται ὡς τέμνουσα κατὰ τὴν ΑΓ, ἣτις κι-
νεῖται περὶ τὸ ἀκίνητον Α, ἐστ' ἂν ἐφίκηται τῷ Β, ἢ τὸ
μέρος αὐτῆς ΖΓ ἴσα ἢ μηδὲν γένηται· ὡσαύτως ἡ ΑΕ
ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἡ τέμνουσα ΔΔ, ἣτις ἐλαττῆται
μέχρι τῷ Ε· ἀλλὰ ἡ ΒΑΕ, ὡς γωνία ἐκτὸς τῷ κύκλῳ
περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἑτῶ τεμνουσῶν, μετρεῖται ὑπὸ τῷ ἡ-
μίσειος τῷ ΒΗΕ τόξου πλὴν τῷ ἡμίσειος τῷ ΒοΕ (185)·
ἄρα ἡ ΒΑΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύο ἀπτομένων, μετρεῖται

Τόμ. Β.

P

ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆ κοίτης τόξου ΒΗΕ, πλὴν τῆ ἡμίσεως τῆ κυρτῆς τόξου ΒοΕ, ἐφ' ὧν αὕτη βέβηκε.

187. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Γωνία ἐκκεντρος ἡ ὑπὸ ΧΑΔ (χ. 30.) μετρεῖται ὑπὸ τῆ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων ΧΔ, Πη, τῶν ἀπολαμβάνοντων ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς προαχθεισῶν· ἀχθείσης γὰρ τῆς Γη παραλῆλυε τῇ ΑΔ ἐκ τοῦ ἡ πέρατος τῆς προαχθείσης ΑΧ, ἔσαι $ΧηΓ = ΧΑΔ (132)$ · ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΧηΓ· μετρεῖται ὑπὸ τῆ ἡμίσεως τῆ ΧΓ· μετρεῖται ἄρα ὑπὸ $\frac{1}{2} ΧΔ + \frac{1}{2} ΓΔ$ · ἀλλὰ $ΓΔ = Πη (169)$ · ἄρα ἡ $ΧηΓ = ΧΑΔ$ μετρεῖται ὑπὸ $\frac{1}{2} ΧΔ + \frac{1}{2} Πη$, ἃ περιέχεται ὑπὸ τῶν αὐτῆς πλευρῶν προαχθεισῶν.

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ε' Π Ι Π Ε Δ Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Π ε ρ ῖ χ η μ ᾶ τ ω ν.

188. Αἱ γραμμαὶ, ἐπ' ἀλλήλας μὲν πίπτουσαι, συνιστᾷ τὰς γωνίας· χωρίον δέ τι περικλείουσαι, ποιῶσι τὸ καλύμενον χῆμα. Τοιγαρὲν ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ τῇ λέξει χῆμα σημαίνεται χωρίοντι κατ' ἐπιφάνειαν μόνον πανταχόθεν περικλειόμενον· ὃ αἱ μὲν γραμμαὶ πλεν-

ραὶ τῷ σχήματος λέγονται· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν τῶν τῶν γραμμῶν, περίμετρος ἀκεί· τὸ δὲ περιπεφραγμένον χωρίον, ἐμβαδὸν ἢ ἐπιφάνεια τῷ σχήματος· ὃ δὲ συντομίας χάριν σχῆμα ἀπλῶς καλέσομεν, καὶ τρίγωνον δὲ, τετράγωνον κ.τ.λ. εἰπόντες, τὰς αὐτῶν ἐπιφανείας ἐκληψόμεθα.

189. Ἐπιφάνεια ἐπίπεδος μὲν, ἢ ἀπλῶς ἐπίπεδον, ὀνομάζεται, ὅταν τὰ ἐπ' αὐτῇ σημεῖα, ἔτε ταπεινωμα, ἢ ὑψωμα, σχηματίζουσι· κοίλη δὲ, ὅταν ταπεινωμα· κυρτὴ δὲ τέλος, ὅταν ὑψωμα· ἐπίπεδος μὲν τὰ πολλὰ εἰσι ἢ τῷ κατόπτρῳ ἐπιφάνεια· κυρτὴ δὲ ἢ ἀγγυς τινὸς ὑαλίνου, κύλικος φέρε, ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια· κοίλη δὲ, ἢ ἐσωτερικὴ αὐτῆς κενῆς ὕλης.

Τρίγωνον ἀκεί τὸ ὑπὸ τριῶν πλευρῶν περιεχόμενον σχῆμα· (χ. 41).

190. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τρία ἀτιναῦν σημεῖα, μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, διὰ τριῶν ἐπιζευγνύμενα εὐθειῶν, ποιῶσιν αἰετὸ τρίγωνον· λέγω μὴ ἐπ' εὐθείας· ἡ γὰρ εὐθεῖα περικλείειν χωρίον ἔδυναται, ἔτε σχῆμα περιέχειν (188), ἔτε τρίγωνον ἐπομένως.

191. Τετράπλευρον δὲ ὀνομάζεται τὸ ὑπὸ τετάρων πλευρῶν περιεχόμενον σχῆμα (χ. 52)· πεντάγωνον δὲ τὸ ὑπὸ πέντε· ἑξάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ἑξ· ὀκτάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ὀκτώ· Τέλος δὲ, εἰάν τὸ σχῆμα ὑπ' ἀπειραριθμῶν πλευρῶν ἰσαλλήλων περιέχεται, καὶ ἀπειροσῶν δὲ τῶν αὐτῶν, καὶ ἀπειροσῶς δὲ ἐπ' ἀλλήλας κεκλιμένων, τὸ σχῆμα κληθῆναι κύκλος δυνηθήσεται (25, 34).

192. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α' ῥα α'. τὸ μὲν τρίγωνον ἀπλῆσατόν ἐστι πάντων τῶν σχημάτων· β'. τὸ τρίγωνον καὶ ὁ

κύκλος ὥσπερ δύο ἄκροι ὅροι ἐσήκασι μεταξὺ τῶν ἀπει-
ραριθμῶν δυνατῶν σχημάτων, συμποικιλλομένων τῷ τῶν
πλευρῶν ἀριθμῷ.

193. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δίκην ἔν παραθέσεως ὄρων ξυν-
τελεῖσι τὰ δύο ταῦτα σχήματα πᾶσι τοῖς ἄλλοις· ἢ τοί-
νυν τὰς ιδιότητας τῶν παντοίων ἑτεροειδῶν σχημάτων, ὡς
ἐκ τῶν κατ' αὐτὰ γωνιῶν ἢ πλευρῶν, ἢ τῆς αὐτῶν ἐ-
πιφανείας, γνωσόμεθα διὰ τε τῶν τριγωνικῶν, ἢ τῶν κη-
λικῶν ιδιοτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τριγώνων.

194. Τὸ τρίγωνον, ὡς μὲν ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν
θεωρούμενον, εἴν μὲν ἔχη μίαν γωνίαν ὀρθήν, ὀρ-
θογώνιον (χ. 41.)· εἴν δὲ μίαν ἀμβλείαν, ἀμ-
βλυγώνιον (χ. 42.)· εἴν δὲ πάσας ὀξείας, ὀξι-
γώνιον ἦκεσε (χ. 43.).

195. Ἐκ δὲ τῶν πλευρῶν, ἰσόπλευρον μὲν ἐ-
σιν, εἴν ὥσι πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτῆ ἰσάμηλοι (χ. 44.)·
ἰσοσκελεῖς δὲ, εἴν δύο· σκαληνὸν δὲ, εἴν πᾶ-
σαι ὥσιν ἀλλήλαις ἄνιστοι (χ. 42, 43.).

196. Τρίγωνος ὕψος καλεῖται κάθετος ἀγομέη
ἀπὸ τινος γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτὴν πλευρὰν, ἢ
τηνικαῦτα ἰδίῳ ὀνόματι καλεῖται βάσις· ἐν ἔν τῷ ὀρθο-
γώνῳ τριγώνῳ ΑΔΓ (χ. 41.), τιθεμένης ὡς βάσεως
τῆς ΔΓ πλευρᾶς, τὸ ὕψος αὐτῆ εἶναι ἡ ΑΔ πλευρὰ,
ἡ τῇ βάσει κάθετος ἐφελκῆς. Τὸ παντὸς μέντοι ἄλλο τρι-
γώνῳ τε ΑΓΠ (χ. 42.) ὕψος θηρεύεται, καταγομένης κα-

ἔτε ἑκτὸς γωνίας τῆς A ἐπὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῇ πλευρὰν $ΑΓ$, ὡς βάσιν λαμβανομένην, ἥτις, εἴπη παρῆται, καὶ προάγεται εἰς τὴν κάθετον αὐτῇ ἐμπεσεῖν.

197. Δύο τρίγωνα, ἀλλήλοις παραβαλλόμενα, ἴσα καλεῖνται, ὅταν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔχωσιν ἐκάστην ἐκάσῃ (σχ. 45.).

198. Ὅμοια τρίγωνα λέγονται, ὅταν τὰς γωνίας μόνον ἴσας ἔχωσιν ἐκάστην ἐκάσῃ, τοῦ κατὰ τὰς πλευρὰς μεγέθους ἀλογημένου· ὥτως (σχ. 46.) εἰὰν παρὰ τὴν A κοινὴν γωνίαν τῶν δυοῖν τριγώνων $ΑΟΗ$, $ΑΖΔ$, ἢ $ο = Z$, καὶ $H = Δ$, τὸ τρίγωνον $ΑΟΗ$ εἶναι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ $ΑΖΔ$ διὰ τὴν ἰσότητά πασῶν τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν, καίτοι ἄνισον αὐτῷ ὃν διὰ τὴν ἀνισότητά τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν.

Τριγώνῳ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἶναι, ὅταν κύκλος διήκῃ διὰ τῶν ἐν αὐτῷ τριῶν κορυφῶν (σχ. 48.).

199. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εἶδομεν ἤδη ὡς τρία σημεῖα συνιστῶντα τὰς τρεῖς τῷ τριγώνῳ κορυφὰς, ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι ἔδεποτε δύνανται (190)· ἀλλὰ διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων κύκλος αἰεὶ διέναι δύναται (166)· διὰ τῶν τριῶν ἄρα κορυφῶν παντὸς τριγώνου κύκλος διελθεῖν δύναται, ὃ εἰς πᾶν τρίγωνον κύκλῳ ἐγγραφεῖναι δύναται.

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πᾶν ἄρα τρίγωνον ὥσπερ εἰ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον νοῆσαι ἔχομεν, κύκλον τὰς τρεῖς αὐτῷ κορυφὰς διήκοντα ἐπευθυμένους.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἴσω ἐν τρίγωνον ἔπεν τὸ $ΑΠΓ$ (σχ. 43), ἐγγεγραμμένον κύκλῳ τῷ $ΑΠΓΔ$ · ἢ ἐν ἐκείνῃ τῷ τριγώνῳ γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ εἶναι χωρὶς τόξου, καὶ τὸ ἡμισυ εἰς μέτρον αὐτῆς τῆς γωνίας· ἢ τὴν $Γ$ γω-

νίαν ὑποτείνουσα ΑΠ ἔσαι χορδὴ τῷ ΠΒΑ τόξῳ, ἢ τὸ ἥμισυ καταμετρεῖ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαν ΠΓΑ (176)· ἡ δὲ ΠΓ πλευρὰ χορδὴ ἔσαι τῷ ΠΔΓ τόξῳ, ἢ τὸ ἥμισυ τὴν ὑπὸ ΠΑΓ καταμετρεῖ γωνίαν, ἢ ἢν ἡ ΠΓ πλευρὰ ὑποτείνει· ὡσαύτως δὲ ἢ ἡ ΑΓ.

202. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Πᾶσα ἄρα τριγώνου κύκλω ἐγγεγραμμένη πλευρὰ ἐκληφθεῖη ἂν ὡς χορδὴ τόξου διπλασίᾳ, ἢ τῷ μετρεῖντος τὴν γωνίαν, ἢ ἢν ἡ πλευρὰ ὑποτείνει· ἢ δὴ ἔξῃσαι περὶ ἐκάστης πλευρᾶς τῷ τριγώνῳ, παραβαλλαμένης πρὸς ἢν ὑποτείνει γωνίαν, εἰπὲν πᾶν ὅσα εἴρηται περὶ πάσης χορδῆς τῷ κύκλῳ, παραβαλλομένης πρὸς ὃ ὑποτείνει τόξον· ἐντεῦθεν ἄρα ἐκταγαγεῖν εὐθέως ἔξῃσαι.

203. α'. Ἐν παντὶ τριγώνῳ τῷ ΑΠΓ ἡ μείζων πλευρὰ ὑπὸ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει, ὡς περ ἢ ὑπὸ τὸ μείζον τόξον ἢ μείζων χορδὴ· ἢ τὴν ἀντίον, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ἢ γὰρ ΠΓ ἔσι, φέρ' εἰπὲν, ἢ μείζων πασῶν τῶν πλευρῶν· ἢ ἡ Α δὲ γωνία ἔσι τῶν ἄλλων μείζων, ἢ ἢν αὕτη ὑποτείνει· τῆς δὲ ΑΓ ἐλάττωτος ἕσης ἐκατέρας τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἢ ἡ Π γωνία, ἢ ἢν ὑποτείνει ἢ ΑΓ, ἐλάττωτος ἔστιν ἐκατέρας τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν.

204. β'. Τριγώνου δύο πλευραὶ ἴσαι ὑπὸ δύο γωνίας ἴσας ὑποτείνουσιν, ὡς ἢ δύο ἴσαι χορδαὶ κύκλῳ ὑπὸ ἴσα τόξα ὑποτείνουσι· ἢ τ' ἀναπαλιν, δύο γωνίαι τριγώνου ἴσαι ἴσαις πλευραῖς ὑποτείνονται.

205. γ'. Ἄρα τριγώνου ἰσοπλευροῦ τῷ ΠΓΑ (α. 44) αἱ τρεῖς γωνίαι Π, Γ, Α ἰσάλληλοι εἰσιν ἐξ ἀνάγκης· ἢ τὴν ἀντίον, ἢ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσάλληλοι εἰσιν, ἐκεῖνο ἰσόπλευρόν ἐστι,

206. δ'. Τριγώνου ἰσοσκελὲς ἐξ ἀνάγκης δύο γωνίαι ἴσαι εἰσὶ· καὶ δύο γωνιῶν ἰσαλλήλων ἑσῶν ἐν τριγώνῳ, ἰσοσκελὲς ἐστὶ τὸ τρίγωνον.

207. ε'. Τριγώνου σκαληνῆ (α. 43) αἱ τρεῖς γωνίαι ἄνισοι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ ὁ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἄνισοι εἰσιν, ἐκεῖνο σκαληνόν ἐστι.

208. Σημεώσεως ἄξιον, ὡς αἱ πλευραὶ ἕκαστῃ εἰσὶν ἀνάλογοι ταῖς, ὑφ' αἷς ὑποτείνουσι, γωνίαις· ὥσπερ ἀμέλει καὶ αἱ χορδαὶ συναύξουσι μὲν καὶ συναπομεινῶνται τοῖς τόξοις, αὐτοῖς μέντοι ἀναλογεῖσιν ἡκιστα (34).

209. Θεώρημα σοιχειῶδες. Παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ὑπὸ ἡμικυκλίᾳ μετρεῖται, ὅ ἐστιν, αἱ τρεῖς παντὸς τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἄπαν τρίγωνον, ὅσον ἂν ἡ ἀκανόνισον, ἐγγεγραμμένον ὑποτεθῆναι δύναται κύκλῳ (190), ὡς τὸ ΠΓΑ· ἀλλὰ τῆς μὲν Π γωνίας μέτρον ἐστὶ τὸ ἡμισυ τῆς τόξεως ΑΓ (176)· τῆς δὲ Α, τὸ ἡμισυ τῆς τόξεως ΠΔΓ· τῆς δὲ Γ, τὸ ἡμισυ τῆς τόξεως ΠΒΑ· ἄρα τῶν τριῶν γωνιῶν ὁμῶς Π, Γ, Α μέτρον ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ΑΓ + $\frac{1}{2}$ ΠΔΓ + $\frac{1}{2}$ ΠΒΑ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλκῃς κύκλου ΠΒΑΓΔ, εἴτ' ἔν τὸ μέτρον τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν (91) Ο. Ε. Δ.

210. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'. α'. Ἐὰν τριγώνου μία γωνία ἡ ὀρθή, αἱ λοιπαὶ δύο ἐξ ἀνάγκης εἰσονται ἑκατέρω ὀξεῖα· μιᾶς γὰρ ἕσης ὀρθῆς, αἱ λοιπαὶ δύο ὀρθῇ μιᾷ ἰσωθήσονται· ἑκατέρω ἄρα ὀρθῆς εἶναι ἐλάττων, ὅ ἐστιν ὀξεῖα· β'. τῶν δύο γωνιῶν ἐγνωσμένων, ἀφαιρέσει τῆς ἀπὸ 180°, γνωθήσεται καὶ ἡ τρίτη· γ'. μιᾶς ἐγνωσμένης, ἀφαιρέσει ταύτης ἀπὸ 180°, γνωθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν δύο.

211. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνίας καλεῖται παρὰ πλήρωμα γωνία, ἡ σὺν γωνία δοθείσης, γωνίαν ὀρθὴν συμπληροῖ, ἢ ἡ μετὰ δοθείσης γωνίας ἰσχυμένη 90° . ἀναπλήρωμα δὲ, ἡ μετὰ γωνίας δοθείσης ἀναπληρῶσα τὸ ἄθροισμα ὀρθῶν γωνιῶν δύο (σχ. 2). ἔστω ἡ μὲν ὑπὸ ΑΠΖ γωνία παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ ΖΠΟ γωνίας, ὡς ἐκείνη σὺν ταύτῃ γωνίαν παραπληρῶσα 90° . ἡ δὲ ΖΠΟ ἀναπλήρωμά ἐστι τῆς ΖΠΒ, ἅτε δὴ ὁμοῦ ἄμφω ἀναπληρῶσαι δύο ὀρθὰς, ὧν μέτρον ἐστὶν 180° .

212. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ τῷ ΑΓΔ (σχ. 41) τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν Α, Γ ἑκατέρω μὲν παραπλήρωμά ἐστι θάτερά· ἄμφω δὲ ἀναπλήρωμα τῆς ὀρθῆς Δ.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἴπερ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ παρὰ τὴν ὀρθὴν εἰσὶν ἑκατέρω τῶν γωνιῶν ὀξεία, πολλῷ μᾶλλον ἔσονται τῷτο ἑκατέρω τῶν παρὰ τὴν ἀμβλείαν γωνιῶν παντὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου· ἄρα ἡ πᾶν τριγώνον ἢ δύναται ἔχειν ὀρθὰς γωνίας δύο, μή τι γε δύο ἀμβλείας, ἢτε μὴν ὀρθὴν μίαν, καὶ μίαν ἀμβλείαν· β'. ἀμβλυγωνίῳ παντὸς τριγώνου τὸ μέτρον τῆς ἀθροίσματος τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν ἔσαι ἑλαττον ἢ 90° .

214. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τριγώνῳ ἀμβλυγωνίῳ ἡ ἀμβλεία γωνία ἐπαύξεσθαι δύναται μέχρι τῆς παραλήγοντος λεπτοῦ τῶν 180° (93), εἴτ' ἂν δύναται εἶναι ἀπείρως μείζων τῆς ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν· ἐκ τούτου μέντοι ἢ δύναται καὶ ἡ τὴν ἀμβλείαν ὑποτείνουσα πλευρὰ ἀπείρως εἶναι μείζων τῆς ἀθροίσματος τῶν δυεῖν ἄλλων πλευρῶν, ἀλλ' ἔδ' ἐξισῆσθαι αὐταῖς ἔχει· ἐστὶ μὲν γὰρ ἡ Π γωνία (σχ. 48) πολλῷ μείζων τῶν δυεῖν λοιπῶν ἅμα ληφθεισῶν Α, Γ· ἀλλ' ἡ ταύτην ὑποτείνει.

τα πλευρὰ ΑΓ, πρὸς τῷ μὴ εἶναι μείζων, ἢ ἐλάττω ἐ-
 σιν ἀναγκαίως τῷ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΠ,
 ΠΓ τῶν τὰς δύο λοιπὰς ὑποτείνουσων γωνίας· ἡ μὲν γὰρ
 ΑΓ ἐστὶν εὐθεῖα, ἡ δὲ ΑΠ + ΠΓ = ΑΠΓ ἐστὶ γραμμὴ
 γωνιωδής, ἢ δὴ μείζων τῆς ΑΓ εὐθείας (17)· ἐντεῦθεν
 μᾶλλον καταφαίνεται, ὡς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζω μὲν
 γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἢ μέντοι παρὰ τὸτο
 αἱ γωνίαι ἀνάλογοι ὑπάρχουσι ταῖς αὐτὰς ὑποτείνουσαις
 πλευραῖς.

215. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνία ἐκτὸς τριγώνου καλεῖ-
 ται ἡ περιεχομένη ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΠΓ ἢ ἐτέρας
 προεκβληθείσης τῆς ΑΠ· προσκειμένη δὲ ἡ ἐφεξῆς
 τῆς ἐκτὸς, ἢ περ ἐντὸς τῷ τριγώνου κεῖται· οἷα ἡ Ρ.

216. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἡ ἐκτὸς γωνία παντὸς τρι-
 γώνου ἢ εἰς ἴση ἐστὶ ταῖς παρὰ τὴν προσκειμένην δυσὶν ἐν-
 τὸς τῷ τριγώνου γωνίαις Α, Γ· ἢ γὰρ $\epsilon + P = 180^\circ$
 (98)· ἀλλὰ $P + A + \Gamma = 180^\circ$ (220)· ἄρα $A + \Gamma =$
 $180^\circ - P$ · ἀλλὰ $\epsilon = 180^\circ - P$ · ἄρα $\epsilon = A + \Gamma$.

217. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς ἰσοσκελεῖς τριγώνου Α
 ΠΓ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῇ βάσει κάθετος ἀγομένη ΑΘ
 (9. 42) δίχα τέμνει α. τὴν βάσιν ΠΓ· β'. τὴν γω-
 νίαν Α.

ΔΕΙΞΙΣ. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΠ
 γεγράφθω τόξον τὸ ΓοΠ· εὐδὴλον ὅν ὡς ἡ ΑΘ αἰκτίς,
 κάθετος τῇ ΠΓ χορδῇ, δίχα τέμνει α. τὴν χορδὴν αὐ-
 τὴν ΠΓ· β'. τὴν γωνίαν Α (157, 159)· Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ὁμοίων τριγώνων.

218. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τρίγωνα, ὧν δύο γωνίαι δυσὶ γωνίαις εἰσὶν ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὁμοιά εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Δύο γὰρ τριγώνων τῶν $AZ\Delta$, $\eta\chi\delta$ (σχ. 46) ἔσω $A=\eta$ ἔ $\Delta=\delta$. ἔσαι δὲ ἔ $Z=\chi$, καὶ τέτε τὰ δύο τρίγωνα ὁμοία (198). ἔσι γὰρ ἐν τῷ μὲν $AZ\Delta$ τριγώνῳ $A+Z+\Delta=180^\circ$ (209). ἐν δὲ τῷ $\eta\chi\delta$ τριγώνῳ $\eta+\chi+\delta=180^\circ$. ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $A+\Delta=\eta+\delta$. ἄρα $180^\circ-A-\Delta=180^\circ-\eta-\delta$ (Α' ρηθ. 14), ὅ ἐστι $Z=\chi$. Ο. Ε. Δ.

219. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἰν' ἔν ἐπὶ χάρτι ποιήσωμεν τρίγωνον ὁμοιον τῷ κατὰ γῆν $AZ\Delta$, πρᾶξις συχνὴ ἐν τῇ πρακτικῇ Γεωμετρίᾳ. α'. διὰ τῆ γραφομέτρου μετρήσασαν δύο γωνίαι αἱ A , Δ τῆ $AZ\Delta$ μεγάλης τριγώνου (87). β'. ἤχθω ἐπὶ τῆ χάρτι εὐθεΐαις ἡ $\eta\delta$, ἔ ἐκ τῶν κατ' αὐτὴν περάτων διὰ τῆ ἀναγωγέως ἤχθωσαν αἱ $\eta\chi$, $\delta\chi$ ὑπὸ γωνίας τὰς η , δ ἴσας ταῖς κατὰ γῆν A , Δ ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ (84). Τὸ ἔν μικρὸν τρίγωνον $\eta\delta\chi$ τὸ ἔτως ἐπὶ τῆ χάρτι κατασκευασθὲν, ἔχον δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις τῆ κατὰ γῆν ἴσας ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, ὁμοιον αὐτῷ ἔσται (218).

220. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν τριγώνω αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου τρισὶ πλευραῖς ὡσι παράλληλοι, ὁμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα. ἐμπεριεχέτω γὰρ τὸ ἔλαττον τῶν δύο τριγώνων τῷ μείζονι (σχ. 49), ἔ τὰς ἐαυτῆ πλευρὰς παραλλήλους ἔχέτω ταῖς τῷ μείζονος. φημί δὲ, ὡς τὰ

ΑΔΠ, δχΘ εἰσὶν ὅμοια· προεκβληθείσης γὰρ ἑκατέρωθεν τῆς χΘ πλευρᾶς τῷ ἐλάττονος τριγώνου εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῷ μείζονος, ἢ ὑπὸ ΘοΠ γωνία ἴση εἰς τῇ ὑπὸ Θχδ (132), ἀλλὰ καὶ ο=A (αὐτόθ.) ἄρα καὶ τῷ ἐλάττονος γωνία χ=A γωνία τῷ μείζονος· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ Θ γωνία τῷ ἐλάττονος ἴση τῇ Δ γωνία τῷ μείζονος. Τὸ ἐλάττον ἄρα τρίγωνον χδΘ, ἔχον δύο γωνίας ἴσας δυσὶ γωνίαις τῷ μείζονος ἑκατέραν ἑκατέρα, ὅμοιον αὐτῷ ἔσαι (218).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Δύο τρίγωνα, ὧν ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ κάθετοι ἐφεσκήκασιν, ἔσιν ὅμοια· ἔσωσαν γὰρ τριγώνου τῷ ΘΖΜ (χ. Α. 49) αἱ πλευραὶ κάθετοι ταῖς τῷ ΑΒΓ, καὶ περιήχθω περὶ τὸ σημεῖον Θ τὸ τρίγωνον ΖΟΜ, μέχρις ἂν ἡ ΘΖ εὐθεῖα κυκλικὸν καταγράψῃ τεταρτημόριον· δῆλον ὅτι ἡ μὲν τῇ ΑΓ κάθετος ΖΘ παράλληλος ἔσαι τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΘΜ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΒΓ, τῆς ἑστὶν αἱ διατέρου τριγώνου πλευραὶ ταῖς διατέρου παράλληλοι εὑσκονται ἐκάστη ἐκάστη, καὶ δὴ τὰ τρίγωνα ὅμοια (ἀνωτ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἴσων τριγώνων.

221. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο τρίγωνα ΑΠΔ, χπδ ἴσα (χ. 45) ἔσονται, ἐνὸς δοθέντος τῶν τριῶν· α'. εἰάν τὰ δύο τρίγωνα μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχωσι, καὶ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ταῖς πρὸς ταύτῃ τῇ πλευρᾷ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρα· β'. εἰάν δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἑκατέραν ἑκατέρα ἴσας ἔχωσι, ἔχωσι δὲ ἴσην καὶ τὴν

ἐπὶ τῶν ἰσῶν πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν· γ'. εἰν τὰς τρεῖς πλευρὰς ταῖς τρισὶ πλευραῖς ἐκάστην ἐκάστη ἴσας ἔχωσι.

α'. Ἐ'σω $\Delta A = \delta \chi$, καὶ $\Delta = \delta$, καὶ $A = \chi$. φημι δὴ, ὅτι τὰ τρίγωνα εἰσὶν ἴσα· ἐπινευομένη γὰρ ἡ $\delta \chi$ ἐπιτεθειμένη τῇ ἴσῃ ΔA , τῷ μὲν δὲ πίπτουτος ἐπὶ τὸ Δ , τῷ δὲ χ ἐπὶ τὸ A . ἐπεὶ δὲ εἰσι $\delta = \Delta$, καὶ $\chi = A$, εἰν ἐπινυθῇ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον $\delta \pi \chi$ ἐπιτεθειμένον· ὅλῳ τῷ τριγώνῳ $\Delta \Pi A$, ἡ μὲν $\pi \chi$ πλευρὰ ἐφαρμόσει τῇ ΠA πλευρᾷ, ἡ δὲ $\pi \delta$ ἐφαρμόσει τῇ $\Pi \Delta$. Τὸ ἄρα $\chi \pi \delta$ τρίγωνον ἀπολύτως συνενωθήσεται τῷ $\Delta \Pi A$. Τριγώνῳ, καὶ ὡς ἐν αὐτῷ ἐκλογισθήσεται, τετέστιν ἔσεται αὐτῷ ἴσον.

β'. Ἐ'σω $\Delta A = \delta \chi$, καὶ $\Pi A = \pi \chi$, καὶ $A = \chi$. φημι δὴ ὡς ἴσα ἔσονται τὰ τρίγωνα· ἐπινευομένη γὰρ αὐτῶν ἡ $\delta \chi$ ἐπικειμένη τῇ ΔA , καὶ, ἐπεὶ $A = \chi$, καὶ $\pi \chi = \pi A$, ἡ $\delta \chi$ ἀκριβῶς ἐφαρμόσει τῇ ΔA , ὡς αὐτῇ ἴση, καὶ ἡ $\pi \chi$ τῇ ΠA . ἔκκεν τὸ μὲν δὲ σημεῖον συμπεσεῖται τῷ Δ , τὸ δὲ σημεῖον π τῷ Π , καὶ καὶ τετε καὶ ἡ $\pi \delta$ πλευρὰ συμπεσεῖται τῇ $\Pi \Delta$, καὶ ἀκριβῶς αὐτῇ ἐφαρμυθήσεται· καὶ δὴ αὐτῶν τὰ τρίγωνα ἐν γεγονότα, ἴσα ἔσονται.

γ'. Εἰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ταῖς τρισὶ πλευραῖς ἐκάστη ἐκάστη ἴσαι ὦσι, καὶ ἔτω τὰ τρίγωνα ἴσα ἔσονται· καὶ γὰρ τῆς $\pi \chi$ πλευρᾶς ἴσης ἔσης τῇ ΠA , καὶ τῆς $\delta \chi$ τῇ ἀντιζεύχῳ αὐτῇ ΔA , καὶ $\delta \pi$ ἐκ αὐτῶν εἴη ἴση τῇ ἀντιζεύχῳ $\Delta \Pi$, εἰ μὴ εἴη ἡ χ γωνία, ἵφ' ἣν ὑποτείνει ἡ $\delta \pi$, ἴση τῇ A , ἵφ' ἣν ὑποτείνει ἡ $\Delta \Pi$ (204)· ἐπεὶ τοίνυν εἰσι $\pi \chi = \Pi A$, καὶ $\delta \chi = \Delta A$, καὶ $\chi = A$, τὰ τρίγωνα ἴσα ἔσται (221 β').

222. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἰνα κατασκευαθῇ τρίγωνον

ἴσον τριγώνῳ δοθέντι τῷ ΔΠΑ, ἕτινος γινώσκεται μία πλευρὰ ἢ ΑΠ, ἢ αἱ πρὸς αὐτῇ γωνίαι Α, Π, ἢ ἡχῶ εὐθεῖα ἢ πχ ἴση τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ ΑΠ, ἢ ἐκ τῆ πέ-
ρατος αὐτῆς χ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ Α ἢ χθω ἀδιόριστος ἢ
χδ, ἐκ δὲ τῆ π ὑπὸ γωνίαν $\pi = \Pi$ ὡσαύτως ἢ πδ· αὐ-
ταὶ ἔν αἱ εὐθεῖαι δχ, δπ τέμνεσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ δ,
ποιέσι τὸ ἐπιταχθὲν τρίγωνον πδχ ἴσον τῷ δοθέντι ΠΔΑ
(221. α').

223. Εἰ γνωσμένων δὲ δύο πλευρῶν τῶν ΠΑ, ΠΔ,
καὶ τῆς ἰπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Π, συνεσθῶ
γωνία ἢ $\pi = \Pi$ (85) ἢ ἡχῶ πδ = ΠΔ, ἢ πχ = ΠΑ,
ἢ ἐπεξεύχθω ἢ εὐθεῖα δχ· τὸ ἔν πδχ τρίγωνον, ἔτω συγ-
κροτηθὲν, ἴσον ἔσαι τῷ ΠΔΑ τριγώνῳ (αὐτ.).

224. Εἰ γνωσμένων δὲ δύο πλευρῶν τῶν ΠΑ, ΠΔ,
ἢ γωνίας τῆς Α, ἰφ' ἣν ὑποτείνει μία τις τῶνδε τῶν
πλευρῶν α'. ἡχθω εὐθεῖα ἢ πχ ἴση τῇ ΠΑ, ἢ ἐκ τῆ πέ-
ρατος χ τέρατος ἄτερ ὑψέσθω ἢ δχ ὑπὸ γωνίαν $\chi = \Delta$
β'. διὰ τῆ διαστήτη εἰλήφθω τὸ μῆκος τῆς ἐτέρας τῶν δο-
θεισῶν πλευρῶν ΠΔ, ἢ ἐκ τῆ π ἐπὶ τῆς ἀδιόριστε εὐθείας
σημειώσθω ἢ πδ ἴση τῇ ΠΔ· ἢ ἔν ἐπιζευχθεῖσα δπ μετὰ
τῶν ἄλλων δύο εὐθειῶν δχ, πχ συγκροτήσῃσι τρίγωνον
τὸ πδχ ἴσον τῷ ΠΔΑ· αἱ γὰρ κατὰ τὴν κατασκευὴν
ἴσαι πλευραὶ ΠΔ, πδ ὑποτείνουσιν ἑκατέρω ὑπὸ γωνίας
ἴσας τὰς Α, χ· ἐπεὶ δὲ εἰσιν ἐκ κατασκευῆς ἢ αἱ ΠΑ,
πχ ἴσαι, αἱ Δ, δ γωνίαι, ἰφ' αἷς ὑποτείνουσιν αἱ ἴσαι
πλευραὶ, εἰσιν ἴσαι· ἔσαι ἄρα ἢ $\Pi = \pi$ · ἐπεὶ τοίνυν
τῶν δυοῖν τριγώνων ΠΔΑ, πδχ, ἔσι $\Pi\Delta = \pi\delta$, ἢ $\Pi\Delta$
 $= \pi\chi$, ἢ $\Pi = \pi$ γωνίαι δηλονότι ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν
περιεχόμεναι, τὰ τρίγωνα εἰσιν ἴσα (αὐτόθ.).

225. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν τῶν ΠΑ, Πδ, (χ. 50)

ἐκ μιᾶς γωνίας τῆς A τῆς μίαν τῶν πλευρῶν τῶν δε, ὑπο-
τεινέσης, τεθείωθω εἰς τῶν τε διαστήτε ποδῶν ἐπὶ τὸ Π ,
ἐκ διαστήματι ἴσῳ θατέρω τῶν δοθεισῶν πλευρῶν $\Pi\delta$ με-
τήχθω ἄτερος πῦς τε διαστήτε, εἴτε ἐπὶ τὸ σ , εἴτε ἐπὶ τὴν
δ σημεῖον τῆς ἀδιορίστου $A\delta$, ἐκ ἐπεξεύχθω ἥτοι ἡ $\Pi\sigma$. ὅ-
θεν γενήσεται τὸ $\Pi\sigma$ τρίγωνον· ἢ ἡ $\Pi\delta$. ὅθεν εἶναι τὸ
 $\Pi\delta$ τρίγωνον, ὡς ἂν ἡ βελομένοις τὴν σ γωνίαν, ἢ δ,
ἀμβλεῖαν εἶναι, ἢ ὀξεῖαν.

226. Τέλος δὲ, εἰν δοθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ $\Pi\Delta$,
 $\Pi\Lambda$, $\Delta\Lambda$ (χ. 51), εἰς κατασκευὴν τριγώνου· α'. ἤχθω
εὐθεῖα ἡ $\Delta\Lambda$ ἴση μιᾷ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν, ἐκ κέντρω
μὲν τῷ Δ , διαστήματι δὲ τῷ $\Delta\Pi$ ἴσῳ μιᾷ τινι τῶν λαπῶν δο-
θεισῶν πλευρῶν, γεγράφθω τόξον τὸ $Z\chi$. β'. κέντρω μὲν
τῷ Λ , διαστήματι δὲ τῷ $\Lambda\Pi$, ἴσῳ τῇ τρίτῃ τῶν δοθεισῶν
πλευρῶν, γεγράφθω τόξον τὸ $\sigma\Pi\eta$. γ'. ἐκ τῶν σημείων,
καθ' ὅ διατέμνυσιν ἀλλήλα τὰ τόξα, ἐπεξεύχθων δύο εὐ-
θεῖαι αἱ $\Pi\Delta$, $\Pi\Lambda$. ἐκ δὴ γενήσεται τὸ $\Pi\Delta\Lambda$ τρίγωνον
ἴσον τῷ ἐπιταχθέντι· τῶν γὰρ τριῶν πλευρῶν τῷ $\Pi\Delta\Lambda$ τρι-
γώνῳ ἴσων ἔσῶν (ἐκ κατασκευῆς) ταῖς συσσιχέσαις πλευ-
ραις τῷ ἐπιταχθέντος τριγώνου, τὸ γινόμενον ἐκ τὸ δο-
θέν ἴσα ἔσονται (221. γ').

227. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰντεῦθεν ἄρα πρόδηλον, ὡς εἰς
κατασκευὴν τριγώνου ἰσοπλεύρου τῷ $\Pi\Gamma\Lambda$ (χ. 44), ἐπὶ
τῆς δοθείσης εὐθείας $\Pi\Lambda$, ἀρκέσει κέντροις τοῖς Λ , Π ,
διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ $\Lambda\Pi$ γεγράφθαι τόξα διὼ τὰ $\Lambda\Gamma\Delta$,
 $\Pi\Gamma\eta$, ἐκ ἐπεξεύχθαι τὰς εὐθείας $\Pi\Gamma$, $\Lambda\Gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τετραπλεύρων.

228. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον μηδόλως ἔχη πλευρὰς παραλλήλους, καλεῖται Τραπεζοειδὲς (α. 52)· εἰν δὲ ἔχη δύο παραλλήλους, Τραπεζίον (α. 53), εἰν δὲ πάσας σὺν δύο λαμβανόμενας, γενικῷ ὀνόματι καλεῖται Παραλληλόγραμμον (α. 54, 55, 56, 57).

229. Παραλληλόγραμμον (α. 54), ἢ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἰσὶν ὀρθαί, καλεῖται ὀρθογώνιον· περὶ οὗ ἰστέν, ὡς τῆτο μὲν ἀπλῶς ὀρθογώνιον ὀνομάζεται, τὸ δὲ ὀρθὴν γωνίαν ἔχον τρίγωνον μετὰ προσηύκτης τῆ ὑπὸ αὐτοῦ, λέγεται τρίγωνον ὀρθογώνιον.

230. Τὸ ὀρθογώνιον, ὃ εἶσι τὸ ἐν ὀρθαῖς γωνίαις παραλληλόγραμμον, διαιρεῖται εἰς τετράγωνον, ἢ εἰς ὀρθογώνιον ἐπίμηκες· ἢ τὸ μὲν τετράγωνον εἶσι παραλληλόγραμμον (α. 54), ἢ αἶτε γωνίαι πᾶσαι ὀρθαί, καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι· τὸ δ' ἐπίμηκες ὀρθογώνιον εἶσι παραλληλόγραμμον, ἢ πᾶσαι αἱ γωνίαι ὀρθαί (α. 55), αἱ δ' ἀπ' ἐναντίον πλευραὶ μόνον ἴσαι.

231. Τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς ὀρθογώνιον, περὶ ἃ ἄρτι εἰρήκαμεν, ἢ εἰς πλαγιογώνιον, ἢ ἀμέλειτοι αἱ γωνίαι ἀνισοί, ὡς τὰς μὲν δύο εἶναι ἀμβλείας, τὰς δὲ δύο ὀξείας (α. 56, 57)· τὸ δὲ πλαγιογώνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς ῥόμβον, ἢ ῥομβοειδὲς· ἢ ῥόμβος μὲν εἶσι παραλληλόγραμμον, ἐκ μὲν γω-

νιῶν ἀνίσων ἐκ δὲ πλευρῶν ἴσων συνισάμενον (χ. 56).
 Ρόμβοειδὲς δὲ, ἢ αἴτε γωνίαι καὶ πλευραὶ ἀνισοί (χ. 57).

232. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν μὲν τοῖς τριγώνοις δεδεῖ-
 κται, ὥς, τῶν γωνιῶν ἴσων ἔσων, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πλευ-
 ραὶ ἴσαι ἔσονται, καὶ ἀντιστρόφως· ἀλλ' ἐκ μόνης τῆς τῶν
 προεκτεθέντων σχημάτων ἐκπτείας, ὥς ἔ ταυτὸν κρατεῖ
 καὶ τῶν τετραπλευρῶν, συνιδεῖν ἐκάστω καταφανές.

233. Τὸ τῷ παραλληλογράμμῳ ὕψος, κάθετος ἐμ-
 φαίνει ἢ ΗΘ (χ. 57), ἢ ἐκ μιᾶς ἐπὶ τὴν ἀντίθετον ἀγ-
 μένη πλευράν.

234. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ τῷ τριγώνῳ ὕψος, ὅπερ ἐ-
 σιν, ἰδῆσι (196). ἤδη δὲ καὶ τὸ τῷ παραλληλογράμμῳ
 ὀρισμένοις, ἐν γένει νῦν ὀρίσεν τὸ παντὸς σχήματος, ἢ
 ἐπιφανείας, ὕψος εἶναι ἀεὶ εὐθείαν κάθετον καταγομένην
 μιᾷ τινι τῶν τῷ σχήματος πλευρῶν βάσεως δίκην ἐκλη-
 φθεῖση· τέτων τεθέντων φαιμέν.

Ἐπιφάνεια πᾶσα περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο εὐ-
 θεῶν, ὧν ἡ μὲν ἐστὶ βάση, ἡ δὲ ὕψος τῆς ἐπιφανείας,
 ἢ σαφέστερον εἰπεῖν, γίνεται πολλαπλασιασμῷ τῷ πλά-
 τος ἐπὶ τὸ μήκος· εὐθείας μέντοι ληφθεῖσης ἐν ἐπιφα-
 νεῖα ὥς μήκος, ἢ βάσεως, καὶ ὡς ἀριθμῷ πολλαπλασια-
 σέου, ἢ δεῖ τιθεῖναι εἰς πλάτος, ἢ ὕψος, καὶ οὕτως εἰς πολλα-
 πλασιασὴν, πλαγίαν εὐθεῖαν· ἐν μὲν γὰρ τῷ τριγώ-
 νῳ ἢ ἐκ κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάση, ἐν δὲ τῷ παραλληλο-
 γράμμῳ ἢ ἀπὸ πλευρᾶς ἐφ' ἐτέραν κάθετος ἐστὶ μία (115,
 127)· ἢ μέντοι πλαγία ἐπ' ἄπειρον ποικίλλεσθαι δύνα-
 ται (119)· ἐνθεντοὶ ἀχρηστεῖ πρὸς ἐπιφανείας ἐκμέτρησιν.

235. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὀρισμένοις ἔν ἄπαξ (225)
 τὸ παραλληλόγραμμον δεῖξαι δυνατόν ἐπὶ δύο ἀντι-
 θέτων πλευρῶν, εἰς τὰς ἄλλας δύο ὥσπερ ἐμπιπτουσῶν,

πάνθ' ὅσα δέδεικται ἐπ' εὐθείας εἰς δύο ἐμπιπτόσης παραλλήλους· ἀμέλειτο δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κείμεναι γωνίαι αἱ Α, Ι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ὡς ἔσαι δύο ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίαι τῆς εἰς τὰς ΑΒ, ΙΠ παραλλήλους ἐμπιπτόσης εὐθείας ΑΙ· ἄρα ἀδιαφόρως ἔσονται $A + B$, ἢ $B + \Pi$, ἢ $I + A$ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς· ἐντεῦθεν ἄρα α'. αἱ τέσσαρες συζυγίαι $A + B$, $B + \Pi$, $\Pi + I$, $I + A$ εἰσὶν ἰσάλληλοι· β'. αἱ παντὸς παραλληλογράμμου τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· γ'. δύο γωνιῶν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παρακειμένων ἢ ἐτέρα τῆς ἐτέρας ἐστὶ παραπλήρωμα· δ'. δύο γωνίαι κατὰ διαγώνιον ἀντίθετοι εἰσὶν ἴσαι· φέρ' εἰπεῖν $A = \Pi$ · καὶ γὰρ $A + B = 180^\circ$ · ἀλλὰ καὶ $B + \Pi = 180^\circ$ · ἄρα $A = \Pi$ · διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἐστὶ καὶ $B = I$ · ε'. μιᾶς τῶν τεσσάρων ὀρθῆς ἔσης, καὶ τῶν τριῶν ἐκάστη ὀρθὴ ἔσεται· ς'. μιᾶς τῶν ἐν παραλληλογράμμῳ γωνιῶν ἐγνωσμένης, καὶ ἐκάστη τῶν ἄλλων τριῶν εὐχερῶς γνωσθήσεται· εἰ γὰρ ἢ φέρε $B = 100^\circ$ ἔσαι καὶ $I = 100^\circ$ · ἢ δὲ γωνία $\Pi = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ · ἄρα $\Pi = 80^\circ$ καὶ $A = 30^\circ$.

Ἀνάπαλιν δὲ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον ἔσαι, εἰ αἱ κατὰ διαγώνιον ἀντίθετοι γωνίαι ἴσαι ὦσιν, εἴτ' ἐν $A = \Pi$, καὶ $B = I$.

236. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευраὶ εἰσὶν ἴσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν παντὸς εἶδους παραλληλογράμμῳ (χ. 54, 55, 56, 57) δύο ἀντίθετοι πλευραὶ εἰσὶ δύο παράλληλοι ἀπολαμβανόμεναι ὑπὸ δυσὶν ἐτέρων παραλλήλων ΑΙ, καὶ ΒΠ (χ. 57), εἰσὶ δύο παράλληλοι ὑπὸ δυσὶν ἄλλων παραλλήλων τῶν ΑΒ, ΙΠ περιεχόμεναι· ὡσαύτως ΑΒ καὶ ΙΠ εἰσὶ δύο παράλληλοι μεταξὺ δύο παραλλήλων.

Τόμ. Β.

Q

λων τῶν ΑΙ, ΒΠ κείμεναι· αὐτὰ δὲ ἔτις ἔχουσιν, ἴσαι εἶσιν (127) Ο. Ε. Δ.

237. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἡ διαγώνιος ΑΠ (9. 57) ἅπαν παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα τρίγωνα διαιρεῖ τὰ ΑΙΠ, ΑΒΠ· τὰ γὰρ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΑΠ διαγώνιον· ἔστι δὲ καὶ ΑΙ = ΒΠ (236)· ὡσαύτως καὶ ΙΠ = ΑΒ· ἔκ᾽ ἐν τῶν ἀντιστοιχῶν πλευρῶν ἴσας ἔχουσιν· ἄρα εἰσιν ἴσαι (221. γ').

238. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ ἄρα διαγώνιος ἅπαν τετράγωνον καὶ πάντα ῥόμβιον εἰς δύο τρίγωνα ἴσα καὶ ἴσους σκελῇ διαιρεῖ (9. 54, 56)· ἅπαν δὲ ῥηθρογώνιον, ἢ ῥομβοειδὲς, εἰς δύο ἴσα καὶ σκαληνὰ (9. 55, 57).

239. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τὰν ἀπάλιν δὲ, εἴαν τετράπλευρον αὐτὸ ἀπεναντίον πλευρὰ ἴσαι ᾖσιν, ὡς αὐτὰ ΑΙ, ΒΠ, παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ τετράπλευρον (9. 57)· ἀχθεῖσθαι γὰρ τῆς διαγωνίως ΑΠ παρὰ τὴν ΑΠ κοινὴν πλευρὰν εἰσὶ τῶν τριγώνων ΑΙΠ, ΑΒΠ, αὐτὰς πλευρὰς ΙΠ, ΑΒ, καὶ ΑΙ, ΒΠ, ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΙΠ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΠ τριγώνῳ (221. γ').· ἀλλ' ἐν τοῖς ὁμοῖς ἴσοις τριγώνοις ΑΙΠ, ΑΒΠ αὐτὰς ἀντίστοιχοι γωνίαι ΙΑΠ, ΒΠΑ, ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ὑποτείνόμεναι, εἰσιν ἴσαι (204)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΙΑΠ γωνία, ἢ συνιστάμενη ἐπὶ τῆς ΑΙ εὐθείας διὰ τῆς ΑΠ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίᾳ ΒΠΑ, ἣτις συνίσταται ἐπὶ τῆς ΒΠ ὑπὸ τῆς τρίτης εὐθείας ΑΠ· ἄρα αὐτὴ, ἐφ' ἧς ἐμπίπτει ἡ ΑΠ, εὐθεῖα ΑΙ, ΒΠ εἰσὶ παράλληλοι (137)· ὡσαύτως αὐτὰς δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΒΑΠ, ΙΠΑ, συνιστάμεναι ἐπὶ τῶν εὐθεῶν ΙΠ, ΑΒ διὰ τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπίπτουσας ΑΠ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἴσαι ἔσθαι, τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΙΠ παράλληλους ἐλέγχεσθαι· ἄρα τετράπλευρον τὸ ΑΙΒΠ, ἔχον

πάσας τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας, ἔστι παρὰ τῷτο παραλληλόγραμμον.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δυνατὸν ἄρα μαθεῖν, εἰ τὸ τετράπλευρον ἔστι παραλληλόγραμμον, ἐπισκοπεῖσιν εἰ ἄρα ἴσαι εἶεν αὐτῆ αἱ ἀπεναντίον πλευραί.

241. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀεὶποτε μονονὸς ζητεῖται ἔντα τῇ Φυσικῇ καὶ τῇ Μηχανικῇ ἐπὶ δύο δοθεῖσων πλευρῶν ὑπὸ γωνίαν ἢ αὐτὴν δεδομένην παραλληλόγραμμον κατασκευάζειν· ἐκ δὲ τῶν ἤδη εἰρημένων, ὅπως τὸ τοῖκτο χρή κατασκευάζειν παραλληλόγραμμον, αὐτίκα ἐποιήσομεν.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐπὶ ἐν τῶν προσκεκλιμένων πλευρῶν ΔΑ, ΑΖ (χ. 56) ὑπὸ γωνίαν, ἣν αὐταὶ περιέχουσι, τὴν Α κατασκευάζεται ἔτω παραλληλόγραμνον· α'. συνήθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΖ, κατὰ τὸ Α ὑπὸ γωνίαν τὴν δεδομένην Α (84)· β'. κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΑΖ, γεγράφθω τόξον τὸ ΜΝ· ἢ κέντρῳ αὐτῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ (τιθεμένων ἀνίσων τῶν δοθεῖσων πλευρῶν) γεγράφθω τόξον τὸ ορ· πρὸς δὲ τὸ τῆς διατομῆς σημεῖον Π ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΔΠ, ΖΠ, αὐτὴ μὲν εἶναι ἴση ἐκ τέτε τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ ΑΖ, ἡ δ' ἑτέρα τῇ ΑΔ· τὸ ἄρα ἔτω γραφὲν τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας, εἴτ' ἐν ΑΖ = ΔΠ, ἢ ΑΔ = ΖΠ· ἄρα ἔστι παραλληλόγραμμον.

243. Ὅπως ἄρα τετράγωνον καταγραφεῖν (χ. 54) ἐπὶ πλευρᾷ δοθείσῃ τῆς ΑΒ κατάδηλον· ἡγέρθω γὰρ ΒΓ = ΑΒ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΒ, ἢ κέντροις μὲν τοῖς Α, Γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΑΒ, γεγράφθω τόξα τὰ ΘΗ, ΖΜ, ἢ ἐκ τε τῆς διατομῆς σημεῖον Δ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΔΓ.

244. ΠΟΡΙΣΜΑ. ς'. Παντὸς παραλληλογράμ-

μὲν αἱ δύο διαγώνιοι ΔΠ, ΑΖ (σχ. 55) τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων δίχα κατὰ τὸ τῆς κοινῆς διατομῆς σημεῖον Κ· ἐστὶ γὰρ ΚΠΑ = ΚΔΖ, καὶ ΚΖΔ = ΚΑΠ (134). δύο ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΔΖ, ΚΠΑ, ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην, εἴτ' ἐν ΔΖ = ΑΠ, καὶ δύο γωνίας τὰς πρὸς ταῖς ἴσαις πλευραῖς ἴσας, εἰσὶν ἴσα (221). ἄρα ἡ ΔΚ πλευρὰ τῶν ΚΔΖ τριγώνων ἴση ἐστὶ τῇ ἀντιστοίχῃ πλευρᾷ ΚΠ τῶν ΚΑΠ τριγώνων. ἄρα ἡ ΔΠ διαγώνιος δίχα τέτμηται κατὰ τὸ τῆς κοινῆς διατομῆς σημεῖον Κ· ὡσαύτως καὶ δειχθήσεται ὅτι ἐστὶ καὶ ΑΚ = ΚΖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ πολυγώνων ἐν γένει.

245. Σχῆμα κανονικὸν ἀπὸ αἰ (σχ. 44, 54), ἢ πᾶσαι μὲν αἱ γωνίαι, πᾶσαι δὲ αἱ πλευραὶ, ἰσάλληλοι εἰσὶ· τὸ ἄρα ἀκανόνιστον ἢ γωνιῶν ἢ πλευρῶν ἀνισότης γίνεται· ἐντεῦθεν ἄρα α'. πάντων μὲν τῶν τριγώνων τὸ ἰσόπλευρον, πάντων δὲ τῶν τετραπλευρῶν τὸ τετράγωνον, μόνον ἐστὶ κανονικόν· β'. τῶν τῶν δυοῖν τῆς τῶν γωνιῶν ἀμέλει ἰσότητος, καὶ τῆς τῶν πλευρῶν, ἐνὸς ὁθέτος ἐν τῷ τριγώνῳ, θάτερον ἐξ ἀνάγκης ἔπεται (205). ἐπίσης ἄρα ἐνεσὶν ὁρίσασθαι τὸ κανονικὸν τρίγωνον, εἴτε ἢ αἱ γωνίαι, εἴτε ἢ αἱ πλευραὶ, εἴτε τέλος ἢ αἵτε γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ, εἰσὶν ἰσάλληλοι· ἀλλ' ἔγωγε ταῦτόν κἀπὶ τῶν ἄλλων σχημάτων κρατεῖ· ἢ γὰρ τῆς τῶν γωνιῶν ἰσότητος ἐπὶ τῶν ἔχεται καὶ ἡ τῶν πλευρῶν, ἐδ' ἀνάγκην (232). ἐνεῖναι ἄρα ἀνάγκη τῷ τῶν ἄλλων κανονικῶν σχημάτων ὁρισμῷ ἐκάτερον τῶν γωνισμάτων.

246. Σχήμα ἐγγεγραμμένον μὲν κύκλῳ λέγεται, ὅταν κύκλος διήκῃ διὰ τῶν κορυφῶν ἀπασῶν τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν (χ. 58, 59)· περιγεγραμμένον δὲ, ὅταν ἡ κυκλικὴ περιφέρεια διέρχεται διὰ πάντων τῶν μεσαιτάτων σημείων τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν (χ. 61).

247. Ἀκτὶς πλαγία μὲν καλεῖται εὐθεῖα ἢ ΠΟ, ἢ ἐκ τῆς κατὰ τὸ πολύγωνον μέσης Ο (χ. 59) ἐπὶ μίαν τῶν γωνιῶν Π καθευμένη· ὁρθία δὲ, κείσθης ἢ ΖΟ, ἐπιξενυγνυμένη ἐκ τῆς κατὰ τὸ πολύγωνον μέσης Ο ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν ΠΔ.

248. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἄπαν κανονικὸν πολύγωνον κύκλῳ ἐγγραφῆναι δύναται.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Ἐὰν πολυγώνου κανονικῆς (χ. 59) ἐκάζῃ πασῶν τῶν γωνιῶν Π, Δ, Ο, κτλ. διχῶς τμηθῇ διὰ τῶν εὐθειῶν ΠΟ, ΔΟ, κτλ., αἱ καιναὶ γωνίαι ὑπὸ ΟΠΔ, ΟΔΘ, ὡς ἴσων γωνιῶν ἡμίσεις, ἴσαι ἔσονται· πάντα δὲ τὰ τρίγωνα ΠΟΔ, ΔΟΘ, κτλ. ὡς δύο γωνίαι ἴσαι, ἰσοσκελεῖ εἰσιν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἐν τῷ πολυγώνῳ αἱ πλευραὶ ΠΔ, ΔΘ, κτλ. αἱ πρὸς ταῖς δεξιῖς γωνίαις, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἰσάλληλα ἔσονται (221)· ἐπεὶ ὅν ἐκ τούτου ἐστὶ ΠΟ = ΔΟ = ΘΟ, κτλ.· ἐὰν κέντρον μὲν τῷ Ο, διαστήματι δὲ τῷ ΠΟ, κύκλος γραφῇ, διελύσεται διὰ πάντων τῶν περάτων Π, Δ, κτλ. τέτων τῶν εὐθειῶν, καὶ δὴ διὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τῶν τῷ πολυγώνῳ γωνιῶν· ἄρα ἐγγραφήσεται τὸ κανονικὸν πολύγωνον τῷ κύκλῳ. Ο. Ε. Δ.

249. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Παντὸς κανονικῆς πολυγώνου θεωρημένης, ὡς εἰ κύκλῳ ἐγγεγραπτο, ἐκάζῃ τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν ἀποθήσεται χορδὴ τόξε ἴσῃ 360° μοίραις, διαιρεθείσῃς διὰ τῆς τῶν πλευρῶν ἀριθμῆ· τῆ πενταγώνου φέρει

(χ. 53) ἡ ΑΒ πλευρὰ, καὶ ἐκάστη τῶν ἄλλων, γίνεται χορδὴ τόξου τῆς ΑΤΒ, ὃ ἐστὶ πεμπτημόριον τῆς περιφε-

ρείας, ἢ $\frac{360^\circ}{5}$ · τῆ δ' ἑξαγώνου (χ. 59) ἡ πλευρὰ ΠΔ

χορδὴ ἐστὶ τόξου $\frac{360^\circ}{6}$ τῆς περιφέρειας, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως.

Διαιρύντες ἔν τὴν περιφέρειαν διὰ τῶ ἀριθμῶ τῶν πλευρῶν τῆ κανονικῆς σχήματος, εὐρήσομεν τὸ τόξον, τὸ ὑποτείνον ἐκάστην αὐτῆς πλευρᾶν · καὶ δὴ α'. τῆ ἰσοπλεύρου τριγώνου

ἐστὶ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ · β'. τῆ τετραγώνου $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ ·

γ'. τῆ πενταγώνου $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ · δ'. τῆ ἑξαγώνου $\frac{360^\circ}{6}$

$= 60^\circ$, ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κανονικῶν σχημάτων, ὧν ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἀνευ λειψάνου διέλοι ἀντὸν 360.

Ἀλλὰ μέτρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΠΟΔ (χ. 59) ἐστὶ τὸ τόξον αὐτὸ, ἐφ' ᾧ βέβηκε, τὸ ΠΓΔ · αἱ ἄρα πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ἐν τῷ κανονικῷ σχήματι, μετρηθήσονται ἐκάστη διὰ τῶν 360° διαιρεθεισῶν διὰ τῆ τῶν πλευρῶν ἀριθμῶ · ἐν μὲν ἔν τῷ τριγώνῳ ἔσαι ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία $= 120^\circ$, ἐν δὲ τῷ τετραγώνῳ $= 90^\circ$, κτλ.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δυνατὸν ἄρα κύκλῳ ἐγ-
γράψαι ὅσαδήποτε κανονικὰ σχήματα, μεταφέροντας ἐν
αὐτῷ διὰ τῆ ἀναγωγέως (80) τόξον ἴσον τῷ 360 δια-
ρεθέντι διὰ τῆ ἀριθμῶ τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπιζευγύνοντας ἐν
τῷ ληφθέντι τόξῳ χορδὴν, καὶ ὕτως ἐπαναλαμβάνοντας
ἐπὶ τῆς περιφέρειας τὰ τῆς πράξεως · ὑπὲρ τριγώνου φέ-
ρε, τόξον ἐγχαράσσοντας 120° , καὶ χορδὴν αὐτῷ ἐπι-

ζευγύνοντας, ἡ ἔτι δις τῆς αὐτοῦ ποιῦντας· ὑπὲρ δὲ τετραγώνου, τόξον 90° , ἡ ἐξῆς ὁμοίως.

251. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ ἐξαγώνου κανονικῆ πλευρὰ ΠΔ (χ. 59), ἴση ἐστὶ τῇ ἀκτίνι τῆς ἐγγράφου κύκλου· ἐστὶ μὲν γὰρ αὕτη χορδὴ τόξου 60° (249)· ἐστὶ δὲ ΠΔ = ΠΟ· εἴγε ἡ ὑπὸ ΠΟΔ μετρεῖται ὑπὸ τῆς τοῦ ΠΓΔ, ὅ ἐστιν 60° (78)· ἀλλὰ ἡ γωνία ΟΠΔ = ΟΔΠ (248)· ἐστὶ τε ἐκάστη = $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ (210)·

ἄρα ἐκάστη τῶν τριῶν γωνιῶν τῆς ΠΔΟ τριγώνου μετρεῖται ὑπὸ τόξου 60° · ἔκυν ἐν ἐξαγώνῳ τὸ τρίγωνον ΠΔΟ ἐστὶν ἰσόπλευρον (205)· ἄρα ἡ τῆς ἐξαγώνου πλευρὰ ΠΔ, ἣτις ἐστὶν ἅμα ἡ τῆς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς τριγώνου πλευρᾷ ΠΟ, εἴτ' ἐν τῇ ἀκτίνι τῆς κύκλου, ὅ ἐγγεγράφεται τὸ κανονικὸν ἐξαγώνον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ δ' ἐπόμενον πόρισμα, ἐπεὶ τῆς τριγωνομετρίας ἐστὶ θεμέλιος, δεῖν ᾠθήθημεν πρὸς μείζω ἐπιστάσιαν τῶν μαθητιῶντων ἐν θεωρήματος ἐκθέσθαι σχήματι.

252. Πόρισμα Δ'. ἡ Θεώρημα σοιχειῶδες. Ἡ τῆς κύκλου ἀκτὶς ἴση ἐστὶ χορδῇ τόξου μοιρῶν 60.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ ἐφ' ἐξαγώνου κύκλῳ ἐγγεγραμμένον συνιστάμενον τρίγωνον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ἐξαγώνου τῆς ΠΔ, ἡ δὲ δύο ἀκτίνων τῆς ἐγγράφου κύκλου τῶν ΠΟ, ΔΟ, ἐστὶν, ὡς ἤδη δεδεικται, ἰσόπλευρον· ἄρα ἡ ἀκτὶς ΠΟ ἴση ἐστὶ τῇ ΠΔ πλευρᾷ τῆς ἐξαγώνου· ἀλλ' ἡ ἐξαγώνου πλευρὰ ΠΔ ἐστὶ χορδὴ τόξου = 60° (249)· ἄρα ἡ ἀκτὶς ἐστὶν ἴση χορδῇ τῇ ΠΔ τόξου 60° . Ο. Ε. Δ.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ρᾶσα ἐν καταγραφῇσεται

ἐξάγωνον· α'. γραφέντος κέντρῳ εἰς διαστήματι τοῖς τυ-
χῆσι κύκλῳ· β'. τῆς ἀκτίνος αὐτῆ ἐξάκτις ἐπιζευχθείσης
τόξοις ἐξ ἰσαλλήλοις τῷδε τῷ κύκλῳ (ἀνωτέρ·).

254. ΠΟΡΙΣΜΑ Σ'. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ κατα-
σκευὴ τῷ τε γραφομέτρῳ, εἰς τῷ ἀναγωγέως· α'. ἡ δὲ
ἥς ὁ κύκλος γέγραπται ἀκτὶς, μετενεχθεῖσα ἐπὶ τὴν περι-
φέρειαν, γίνεται χορδὴ τόξου 60° · β'. ἀκτὶς κάθετος ταύ-
τῃ τῇ χορδῇ παρέξει δύο τόξα (σχ. 25) ἕκαστον $= 30^\circ$ ·
γ'. ἀκτὶς δ' ἑτέρα κάθετος τῷ 30° τόξῳ, παράγει τό-
ξον 15° · τὰ δὲ λοιπὰ ἀποτελεσθήσεται διὰ μηχανικῆς
ἐπιτηδεύσεως.

255. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Ἐξάκτις ἡ κύκλῳ ἀκτὶς ἀπο-
δίδωσι τὴν τῷ τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ ἐξαγώνῳ περί-
μετρον· ἀλλ' ἡ κυκλικὴ περιφέρεια προδήλως μείζων ἐστὶ
τῆς περιμέτρου τῷ ἐξαγώνῳ· εἴγε τὸ τόξον ΠΓΔ (σχ.
59), ἡ τὸ ἐκτῆμόριον τῆς περιφέρειας, ἐστὶ καμπύλη,
τῆς χορδῆς ΠΔ, εἴτ' ἐν τῷ ἑκτῷ μέρει τῷ ἐξαγώνῳ εὐ-
θείας ἔντος· ἄρα (17) $\Pi\Gamma\Delta > \Pi\Delta$ · ἄρα ἡ περιφέρεια
μείζων ἐστὶ τῆς τῷ ἐξαγώνῳ περιμέτρου, εἰ δὴ μείζων, ἡ
ἐξάκτις ἡ ἀκτὶς, ταύτῳ εἰπεῖν, ἡ τρεῖς ἡ διάμετρος.

256. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Δυσὶν κανονικῶν πολυγώνων
(σχ. 60) τὴν αὐτὴν πλαγίαν ἀκτῖνα ἔχόντων $ΚΑ = ΚΔ$
μείζων ἐστὶν ἡ περίμετρος, ἢ πλείους αἱ πλευραί.

Δύο γὰρ κανονικὰ πολύγωνα αἰετὶ θεωρεῖσθαι δύνα-
ται ὡς κύκλῳ ἐγγεγραμμένα (248)· ἀλλ' ἐκάστη πλευ-
ρὰ φέρ' εἰπεῖν τῷ δωδεκαγώνῳ ΠΔΤ ἕσα ἐλάττων ἐκά-
στης πλευρᾶς ΑΟ τῷ ΑΟΙ ἐξαγώνῳ ὑποτείνει τόξον ἐλατ-
τον· ἐκὼν ἐγγύς ἐστὶ τῷ συγκεχύωται τῷ τόξῳ τῷδε·
ἄρα πᾶσα ἡ τῷ δωδεκαγώνῳ περίμετρος μᾶλλον ἐγγισ-
τὴν γίνεται τῷ συγκεχύωται τῇ περιφέρειᾳ, ἡ ἡ τῷ ἐξαγώ-

28, ϵ ἐν γένει, ὅσῳ πλείους πλευρὰς ἔχει τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοσέτῳ ἑγγιον γίγνεται τὸ συμπεσεῖν τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ϵ ἰσωθῆναι αὐτῇ· διὼ ἄρα κανονικῶν πολυγώνων τῷ αὐτῷ ἐγγεγραμμένων κύκλῳ, ἢ ὁ ταῦτόν, τὴν αὐτὴν πλαγίαν ἀκτῖνα ἔχόντων, μείζων ἐστὶν ἡ περίμετρος, ϵ πλείους εἰσὶν αἱ πλευραί.

257. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Πᾶν ἄρα κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ἀπειραριθμῶν πλευρῶν συνισάμενον ἀπειροσύν τι ἐλλείπει τὸ μὴ συμπεσεῖν τῷ κύκλῳ, τὸ μὴ γενέσθαι κύκλος· ἄρα δυνατόν ἐκδέξασθαι τὸν κύκλον ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ἀπειραριθμῶν πλευρῶν συγκροτούμενον· εἰν ἔν τὰς κυκλικὰς ιδιότητας ὡς σχήματος κανονικῷ τοιῦδε ἐξετάσωμεν, ἐλάχισ' ἂν ἀμάρτοιμεν τὸ ἀληθές, ϵ τὸ ἐλλείμματος ἀλογυμένε ὡς ἀπειροσῆ, ὅθεν ἂν ποιήσαιμεν ὅλως ἀμάρτημα (Συμ. λογ. 530).

258. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι'. Ἀπαν κανονικὸν πολύγωνον περιγραφῆναι δύναται κύκλῳ· αἱ γὰρ πλευραὶ ΗΠ, ΠΤ τὲ τῷ ἐκτὸς κύκλῳ ἐγγεγραμμένε πολυγώνῳ (χ. 61) εἰσὶν ὡς χροδαὶ ἴσαι (245), ϵ ἴσον τὲ κέντρῳ ἀπέχουσαι (55)· ἄρα πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῷ κέντρῳ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶνδε ἀγόμεναι κάθετοι, εἰσὶν ἴσαι· εἰν ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαστήματι δὲ τῷ Κο γραφῇ κύκλος, διήξει διὰ πάντων τῶν μεσαιτύτων σημείων τῶνδε τῶν πλευρῶν· ϵ δὴ τὸ πολύγωνον κύκλῳ περιγραφήσεται.

259. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ'. Ι'ν' ἐν πολύγωνον γραφεῖν κανονικόν, ϵ ἡ ὀρθία ἀκτὶς Κο εἴη δεδομένη, γεγράφῃ ὁ οοο κύκλος διὰ ταύτης τῆς ἀκτίνος, ϵ συνεχάσω ἐπ' αὐτῆς κατὰ τὸ Κ ἡ ὑπὸ οΚο γωνία = 70° μὲν εἰς πεντάγωνον (249)· 60° δὲ εἰς ἑξάγωνον, ϵ ὕτως ε-

ξῆς (84), ἡ μετήχθω τὸ οὐ τόξον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐνθεῶν Κρ, Κρ, αἵτινες περιέχουσι τάυτην τὴν γωνίαν, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ αἱ τῇ ἀκτίνι κἀθετα ΠΗ, ΠΤ, κ τ. λ. παρέξουσι τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΠΗΖΤ.

260. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΒ'. Οὕτω πλείους εἰσὶ τῷ πολυγώνῳ αἱ πλευραὶ τοσούτω ἢ ὀρθία ἀκτὺς Κρ προσεγγίζει τῇ πλαγίᾳ ΚΠ· ἐγγίζει γὰρ μᾶλλον ἔτι τὸ πολύγωνον τῷ συμπεσεῖν τῷ κύκλῳ· διὸ ἡ Κρ μᾶλλον ἐπιμήκης καθίσταται, ὅ ἐστι προσπελάζει τῇ δυνάμει τῆς πλαγίας ἀκτίνος ΚΠ.

261. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΓ'. Τῷ κύκλῳ ἄρα ὡς πολυγώνῳ κανονικῷ ἐκλαμβανομένῳ, ἡ ἀπειράριθμος αἱ πλευραὶ, ἢ ὀρθία ἀκτὺς, ἢ ἡ ἐκ τῷ κέντρῳ, μιᾷ τινι τῶν ἀπειροσῶν πλευρῶν πρὸς ὀρθὰς ἰσαμένη, δύναμιν ἔχει ὁμοῦ τῆς πλαγίας ἀκτίνος, ἢ τῆς ἀγομένης ἐφ' ἐν τῶν περὶ τῶν μιᾶς τῶν ἀπειροσῶν πλευρῶν, ταύτῃ εἰπεῖν ἢ ὀρθία ἀκτὺς τῇ πλαγίᾳ εἶναι ἴση.

262. Τρισσόν τι εἶδος γωνιῶν ἐν ἐκάστῳ διακρίνεται πολυγώνῳ· ἐστὶ μὲν γὰρ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἢ ὑπὸ ΠΟΔ (σχ. 59)· γωνία δὲ ἐντὸς ἢ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΠΔΘ, γωνία δὲ τέλος ἐξωτερικὴ ἢ ο (σχ. 63), ἢ συνισαμένη ἐκτὸς τῷ σχήματος ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς, ἢ τῆς αὐτῇ προσεχῆς ἐκβαλλομένης.

263. Τὸ τοίνυν ἄθροισμα τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ συνισθῶν γωνιῶν πάντος κανονικοῦ πολυγώνου σχήματος σταθερὸν αἰεὶ ὡς ἀποδέδεικται, εἴτ' ἐν 360° (96)· ἐκάστη δὲ τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ πάντος κανονικοῦ σχήματος ἴση 360° διαιρεθείσῃ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν (249).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν παντὸς
πολυγώνου.

264. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς πολυγώνου κανονικῆ, ἡ ἀκανονίση, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἴσον ἐστὶ διπλασίαις τόσαις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ σχήματι πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυνατὸν ἐν ἅπαντι πολυγώνῳ ἀγαγεῖν ἀπὸ τῆς Α γωνίας εὐθείας τὰς ΑΠ, ΑΓ κτ. (χ. 62) πρὸς πάσας τὰς ἄλλας γωνίας πλὴν τῶν δύο τῶν τῇ Α γειτνιαζουσῶν, καὶ συστήσαι ἔτω τῶσ' αὐτὰ τρίγωνα τὰ Α ΖΠ, ΑΠΓ κτ., πλὴν δύο, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῆ πολυγώνου. Τὸ γὰρ 62 σχῆμα ἔχει ἐπὶ πλευρᾶς· τρίγωνα τοῖσιν συστήθησονται πέντε· ἐπεὶ δὲ πᾶσαι αἱ γωνίαι τῶνδε τῶν τριγώνων συνίστανται ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τῆ πολυγώνου, καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἐκάστῃ τέτῳ τῶν τριγώνων ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς (209)· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῆ πολυγώνου ἴσον ἐστὶ δις ταύταις ὀρθαῖς, πλὴν τεσσάρων, ὅσας ἔχει πλευρᾶς τὸ πολύγωνον Ο. Ε. Δ.

265. Τετραπλεύρου μὲν ἄρα τὸ τῶν γωνιῶν ἄθροισμα ἐξισθῆται ὀρθαῖς $8 - 4 = 4$ · πενταγώνου δὲ, $10 - 4 = 6$. ἑξαγώνου δὲ, $12 - 4 = 8$. κ. τ. λ.

266. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων καθ' ἑκάστην ἐξῆς σχῆμα δυσὶν ὀρθαῖς αὐξεῖ. Τριγώνου μὲν γὰρ αἱ τρεῖς ἴσαι δυσὶ,

τετραγώνου δὲ αἱ τέσσαρες, τέσσαρσι, πενταγώνου δὲ αἱ πέντε, ἕξ, καὶ ἔτις ἕξῃς.

267. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Παντὸς κανονικῆς σχήματος ἐκάστη τῶν γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῷ ἄθροισματι τῶν δις τοσούτων ὀρθῶν, πλὴν τεσσάρων, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῆς σχήματος, διαιρεθέντι διὰ τῆς ἀριθμῆς τῶν πλευρῶν. τριγώνου μὲν γὰρ ἰσοπλεύρου ἐκάστη ἐστὶν $= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, τετραγώνου δὲ $\frac{180^\circ}{4} = 90^\circ$, πενταγώνου δὲ, $= \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$, ἑξαγώνου δὲ, $= \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ καὶ ἔτις ἕξῃς. δὴ λανθάνει ὡς ἡ δύναμις ἐκάστης ἐσωτερικῆς γωνίας συνάξει τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν.

268. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Κύκλου δὲ, ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἐστὶν ∞, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἐστὶ 2 ∞ ὀρθαὶ γωνίαι πλὴν τεσσάρων. κληθείσης ἔν τῆς ὀρθῆς γωνίας O, τὸ τέτων ἄθροισμα ἔστι $2 \infty O - 4O$. ἐκάστη ἄρα ἐσωτερικὴ γωνία ἔστι $\frac{2 \infty O - 4O}{\infty}$. ἀλλὰ $\frac{2 \infty O}{\infty} = 2O$, ἡ ἐκάστης ἄρα ἐσωτερικῆς γωνίας δύναμις, ἣν συνηῶσι δύο ἀπειροεῖς πλευραὶ τῆς περιφερείας, ἡ δύο προσεχῆ χορδαὶ τῆς κύκλου, εἰσὶ δύο γωνίαι ὀρθαὶ πλὴν $\frac{4O}{\infty}$. τοιαύτη ἔν γωνία ἀπείρου ἐστὶν ἀμελутаτή, ὡς ἴση ἔσται δυσὶν ὀρθαῖς πλὴν τῆς ἀπείρου γωνίας $\frac{4O}{\infty}$ (Συμ. λογ. 530).

269. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Παντὸς πολυγώνου, εἴτε κανονικῆς, εἴτε ἀκανονίς, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αἰεὶ ἐστὶ μόνιμον, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἐξισούμενον. (σχ. 63) ἡ γὰρ ὁ γωνία σὺν τῇ ἐφεξῆς δ' ἴση ἐστὶ δυσὶν ὀρθαῖς (98). ἀλλ' εἰσὶ τοσαῦται ὁ πλὴν δ', ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῆς πολυγώνου. τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἐξωτε-

ρικῶν γωνιῶν ο ϵ τῶν ἐσωτερικῶν δ ἰσῆται δις τόσαις ὀρθαῖς, ὅσας ἔχει πλευρὰς τὸ πολύγωνον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν δ ἰσῆται δις τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον πλὴν ὀρθῶν τεσσάρων (264)· τὸ ἄθροισμα ἄρα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ο ἰσῆται ταύταις ταῖς καταλειπομέναις τέσσαρσιν ὀρθαῖς.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Παντὸς κανονικῆς πολυγώνου πᾶσαι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι ο ἰσάλληλοι εἰσιν (243)· ἕκῃ ἐκάσῃ τέτῳν, τετραγώνου μὲν εἰσιν $\frac{360}{4}^{\circ} = 90^{\circ}$, πενταγώνου δὲ $\frac{360}{5}^{\circ} = 72$, ϵ ἐξῆς ὡσαύτως αἰ τῆς τῶν γωνιῶν δυνάμειως συνυπελαττεμένης ἀξέσαις ταῖς τῆ σχήματος πλευραῖς.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ Σ'. Τελευταίον δὲ τῆ κύκλου, ϵ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς εἰσιν ἀπείρος, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία, εἴτ' ἐν ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ϵ τῆς κυκλικῆς περιφερείας περιεχομένη, ἢν αὐτοὶ πρότερον γωνίαν ἀφῆς ὠνομάσαμεν, ἡ, εἰ ϵ τῆτο πρὸς θυμῶ, ἡ γωνία, ἢν συνιζῶσιν ἐκτὸς τῆ κύκλου δύο προσεχῆ χοίχαια τῆς καμπύλης, αὕτη φημί αἰ ἴση εἶν τῷ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἄθροισματι, διαιρεθέντι δι' ἀριθμὸν ἀπείρου· ἡ γωνία ἄρα τῆς ἀφῆς εἰσιν ἀπείροσῃ, ὡς ϵ ἀνωτέρωθι πε δέδεικται (172).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν.

272. Ἡ μὲν γραμμὴ διὰ γραμμῆς ϵ μόνης καταμετρηθῆναι δύναται· δι' ἐπιφανείας δ' ἡ ἐπιφάνεια.

273. Μέτρον δ', ὃ ἂν χρήσαιοτίς ἐπὶ ἐπιφανείῳ καταμετρήσει, ἐστὶ τὸ τετράγωνον· πῶς ἂν ἀκέραιον τετραγωνικὸς ἑκτασις περικλείουσα τετράγωνον, ἢ ἐκάστη πλευρὰ ἐστὶ ποδιαία εὐθεία· τετραγωνικὴ δὲ ὀργάνη ἐστὶ ὀργήμα τετράγωνον, ἢ ἐκάστη πλευρὰ ἐστὶν ὀργήμα κατὰ μήκος.

Διὰ τοῦτο γὰρ ἡ ΒΠ εὐθεῖα (σχ. 64) ὀργάνην γνησίμικρην· ἔσω δὲ ἢ ἐκάστη τῶν ἄλλων τριῶν ΒΑ, ΑΗ, ΗΙ ἴση ὀργάνῃ, αἱ δὲ Β, Π, Α, Η γωνίαι ὀρθαί· ἢ ἂν τὸ ὅλον ἐμβαδὸν ΒΠΑΗ ἔσεται ἡ καλεσμένη τετραγωνικὴ ὀργή.

Εἰ ἂν ἐν ἡδὴ ἤτε ΒΠ ἢ ἡ ΒΑ εἰς ἑξὶ ἰσάλληλα μέρη τμηθῶσιν, εἴτ' ἂν εἰς ἑξὶ πόδας, τέτ' ἔσιν ἂν γένηται $BZ = ZE = B\chi$ κτλ, ἢ ἔτι ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΙ, ΕΔ, κ.τ.λ. ἐπὶ πάντα τὰ σημεῖα τῶν διατομῶν, πάντα τὰ μικρὰ τετράγωνα $BZ\chi\tau$, $\Gamma\Lambda\iota\sigma$ κ.τ.λ., προφανῶς ἰσάλληλα ἔσονται (127)· ἢ ἐπεὶ ἐκ κατασκευῆς ἐκάστη ἡ πλευρὰ ποδιαία, ἑκάστην ἔσαι πῶς τετραγωνικὸς.

274. Οὕτως ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ὀργή ΒΠΑΗ περιέξει ἑξὶ μικρὰ παραλληλόγραμμα τὰ $BZ\Lambda\iota$, $ZE\iota\Delta$, κ.τ.λ. συγκείμενα ἑκάστην ἐκ τετραγωνικῶν ποδῶν ἑξ, καὶ ἐκ τῆ ἀκολουθεῖ ἑξάκις ἑξὶ πόδας τετραγωνικὸς, εἴτ' ἂν 36.

275. Εἰ ἂν δὲ ἢ ἐκάτερος τῶν δυοῖν ποδῶν ΒΖ, Βχ διαιρεθῇ εἰς δώδεκα ἰσάλληλα μέρη, ἑκάστην τέτων ἔσαι δακτύλος, ἢ καθέτων ἀχθείσων ὡς ἐν τῇ ὀργάνῃ, ὁ τετραγωνικὸς πῶς περιεκτικὸς ἔσαι δώδεκα μικρῶν παραλληλογράμμων συντιθεμένων ἐκάστη ἐκ δακτύλων τετραγωνικῶν δώδεκα· ἢ ὅλος ὁ πῶς περιεκτικὸς ἔσαι δώδεκάκις δώδεκα τετραγωνικῶν δακτύλων, εἴτ' ἂν 144.

276. Ὡσαύτως ὁ μὲν τετραγωνικός δάκτυλος περιέχει 144 τετραγωνικάς γραμμάς, τέτων δ' ἐκάστη σίγματα τετραγωνικά 144.

277. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων ὑποδειγμάτων, καὶ ἐκ τῆς ἀπλῆς ἐποπτείας τῷ 64 σχήματος, εἶδηλον ὡς ἀριθμὸς τῶν μερῶν τῷ ἐν ἐπιφανείᾳ μέτρου ἔστιν ὁ τετράγωνος, ὁ ἀπὸ τῷ ἀριθμῷ τῶν μερῶν τῷ αὐτῷ μέτρου ἐν γραμμῇ λαμβανόμενος· ὥτως ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραγωνικῶν ποδῶν τῶν τῇ τετραγωνικῇ ὀργάνᾳ ἐνόντων ἔστιν ὁ ἀπὸ 6 τετράγωνος 36· ἡ γὰρ γραμμικὴ ὀργάνη περιέχει ἕξ πόδας γραμμικὰς· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν τῷ τετραγωνικῷ ποδὶ ἐμπεριλαμβανομένων τετραγωνικῶν δακτύλων ἔστιν 144, τετράγωνος ἀπὸ 12· δώδεκα γὰρ γραμμικὰς δακτύλους ὁ γραμμικὸς πᾶς περιέχει.

278. Ἐπινοήσωμεν ἤδη τὴν βάσιν ΓΗ (σχ. 65) ἐν πλάτει ἀπειροσῶ ἀνίσταν ἐαυτῇ παραλλήλως ἕσ γε τὴν ἀντιθετὸν πλευρὰν ΔΑ, καὶ παραλείψαν μεθ' ἑκαστον ἀπειροσὸν διάστημα ἴχνος τι ἐαυτῇ ἴσον· περικλείσει ἄρα ὥτως ἐκ διαδοχῆς τὴν ἐπιφάνειαν ΓΔΑΗ· ἡ, ἵνα τὸν αὐτὸν αἰεὶ ἐκφραζώμεθα τρόπον, γεννήσει τῇ ἐαυτῆς κινήσει τὴν ΓΔΑΗ ἐπιφάνειαν.

279. Ἄρα α'. ὡς περὶ τὸ σημεῖον κινούμενον γεννᾷ γραμμὴν, ὥτω γραμμὴ κινουμένη γεννᾷ ἐπιφάνειαν· β'. αἱ γραμμαὶ ΙΟ, κ. τ. λ. αἱ παραλείφονται ὑπὸ τῆς γεννητρίας γραμμῆς, ἡ τῆς ΓΗ βάσεως, ἐκλογισθῆναι ἔχουσιν ὡς σοιχεῖα, ἕξ ὧν σύγκεται ἡ ΓΔΑΗ ἐπιφάνεια.

280. ΘΕΩΡΗΜΑ σοιχειῶδες. Πᾶν ὀρθογώνιον ἴσον ἔστι τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τῷ ὕψους.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια παντὸς ὀρθογωνίου τῷ ΓΔΑΗ ἐκ ἔστιν ὅθεν ἄλλ. γ, εἰμὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν σοιχείων

ΙΟ, κ. τ. λ. τῶν τῇ γεννητρίᾳ γραμμῇ, ἢ τῇ βάσει ΓΗ ἴσων, ἃ παραλείπονται ὑπ' αὐτῆς παραλλήλως ἐαυτῇ ἀνίσσης ἐς γε τὴν ΔΑ (278). ἄλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶνδε τῶν στοιχείων ἐμφαίνεται ὑπὸ τῷ ἀριθμῷ τῶν σημείων, ἃ εἰσιν ἐν τῷ ΓΔ ὕψει.

Ὁ ἀριθμὸς ἄρα τῶν στοιχείων, ἀφ' ὧν συντίθεται ἡ ἐπιφάνεια τῆ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ, ἐκδηλεῖται διὰ τῷ ἀριθμῷ τῶν σημείων, ἃ περιέχει τὸ ΓΔ ὕψος· ἐὰν ἄρα ἡ ΓΗ βάσις τοσάκις ληφθῇ, ὅσα σημεία ἔχει τὸ ΓΔ ὕψος, ὁ ἐστίν, ἐὰν ἡ ΓΗ βάσις παραπλασιασθῇ διὰ τῷ ΓΔ ὕψει, περιορῆσεται ἀκριβῶς ἡ ἐπιφάνεια τῆ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου· ἄρα κ. τ. λ.

281. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἰν' ἐν εὐρεθῇ ἡ τῆ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ ἐπιφάνεια, μετρηθῇτω διὰ μήκους γνωστῆ, δι' ὀργῆς φέρε α'. ἡ ΓΗ βάσις· β'. τὸ ΓΔ ὕψος· εἴτα πεπολλαπλασιάσῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀργῶν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀργῶν τῷ ὕψει· τὸ δὲ γινόμενον ἐμφανεῖταις τετραγωνικῶς ὀργῆς, ἃς περιέχει ἡ ἐπιφάνεια· ἐὰν ἐν ἡ ΚΗ=6, εἰ ΓΔ=5 ἡ τῆ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου ἐπιφάνεια εἶναι 30 τετραγωνικῶν ὀργῶν περιεκτική.

282. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς παραλληλογράμμου ἴση ἐστὶ τῇ ὀρθογωνίᾳ, τὴν αὐτὴν βάσιν εἶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστω ἡ τῆ πλαγιογωνίου παραλληλογράμμου ΠΚΤΕ βάσις ΚΕ ἴση τῇ βάσει τῆ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου, πρὸς δὲ εἰ τὸ ΡΒ ὕψος ἴσον τῷ ΓΔ ὕψει· φημὶ ἐν, ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν οὕτω τέτων παραλληλογράμμων ἴσαι εἶσι.

Καὶ γὰρ ἐὰν προαχθῶσι πάντα τὰ στοιχεία ΙΟ, κ. τ. λ. τῆ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ, ἅπαντα τὰ αὐτῶν μέρη

Ζχ τὰ ἐν τῷ πλαγιογωνίῳ ΠκΤΕ εἰσὶν ἴσα τῷ κΕ, ὡς ὄντα παράλληλα τῇ κΕ βάσει, ἢ περιεχόμενα ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἐν αἷς ἢ ἡ κΕ· τὰ μέρη ἄρα Ζκ εἰσὶ διὰ τῆτο ἴσα θατέρᾳ βάσει ΓΗ, ἢ δὴ ἔσονται ἴσα πᾶσι τοῖς ΙΟ χοιχείοις τῷ ὀρθογωνίῳ· παρὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν, ἢ τῶν χοιχείων Ζχ, ἰσῆται τῷ ἀριθμῷ τῶν ΙΟ χοιχείων· ἢ γὰρ ἕκασον χοιχείον τῷ ΠκΤΕ πλαγιογωνίῳ ἑδὲν ἐστίν, ἀλλ' ἢ προαγωγὴ ἑκάστου χοιχείου τῷ ΓΔΗ ὀρθογωνίῳ· αἱ ἐπιφάνειαι ἄρα τῶν δύο παραλληλογράμμων ἔχουσιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἰσαλλήλων χοιχείων, εἰσὶν ἐξ ἀνάγκης ἴσαι Ο. Ε. Δ.

283. ΠΟΡ. ἢ ΘΕΩΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Ἐν γένει ἡ παντὸς παραλληλογράμμου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψους.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τῷ ὀρθογωνίῳ ΓΔΗ ἰσῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψους (280)· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῷ πλαγιογωνίῳ παραλληλογράμμου ΠκΤΕ ἐστίν ἴση τῇ ὀρθογωνίῳ, ἢ βάσει ἢ ὕψος τὰ αὐτὰ τῷ πλαγιογωνίῳ (282)· ἄρα ἢ αὐτῷ ἡ ἐπιφάνεια ἰσῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψους· ἐν γένει ἄρα παντὸς παραλληλογράμμου, εἴτε ὀρθογωνίῳ, εἴτε πλαγιογωνίῳ, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψους Ο. Ε. Δ.

284. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἰν' ἐν εὐρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῷ ΑΟΠΓ παραλληλογράμμου (χ. 67)· α'. ὡς ὕψος ἐσάθω κάθετος ἡ Οτ (104 κτ.)· β'. μετρηθῇτω το μήκος τῷ ὕψους Οτ ἢ τῆς ΑΠ βάσεως διὰ ποδὸς, ἢ ὀργυῶς· γ'. πεπολλαπλασιάθω διὰ θατέρου θατέρου.

285. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Πᾶν τρίγωνον (χ. 66)
 Τόμ. Β'. R.

ἴσων ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῆς ΔΓ βάσεως καὶ τῷ ΠΙ ὕψος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ χθω ἢ ΠΖ παράλληλος τῇ ΔΓ, ἢ ἡ ΖΓ τῇ ΠΔ· ἢ ἔν ΠΓ διαγωνίος διαιρήσει τὸ ΠΔΓΖ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα τρίγωνα τὰ ΔΠΓ, ΓΠΖ (238)· ἀλλὰ ΠΔΓΖ = ΠΙ × ΔΓ (283)· ἢ ΔΠΓ, ἔν τῶν δύο τριγώνων, = $\frac{\text{ΠΔΓΖ}}{2} = \frac{\text{ΠΙ} \times \Delta\Gamma}{2}$. ἄρα γενικῶς ἐπιφέρεται ἡ δεῖξις.

Ἐν γένει παντὸς τριγώνου ταῖς δυσὶ πλευραῖς δυνατὸν παραλλήλους ἀγαγεῖν δύο (χ. 67)· ὅθεν γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΟΠΓ τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΠ, ἢ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΔ τῷ ΑΠΓ τριγώνῳ ἔχον, ἢ τὸ ἡμισὺ ἐστὶ τὸ τρίγωνον διὰ τὴν δίχα τέμνουσαν τὸ παραλληλόγραμμον διαγωνίον, ἥτις ἐστὶν ἡ τρίτη τῶν τῶν τριγώνων πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ΑΟΠΓ = ΑΠ × Οτ· τὸ δὲ ΑΠΓ τρίγωνον ἡμισυ (238) ἐστὶ τῷ ΑΟΠΓ· ἄρα ΑΠΓ = $\frac{\text{ΑΠ} \times \text{Οτ}}{2}$.

Ο. Ε. Δ.

286. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Κληθέντος υ τῷ ὕψει παντός

τριγώνου, ἢ β τῆς αὐτῆς βάσεως, ἔσται $\frac{\nu}{2} \times \beta = \nu \times \frac{\beta}{2}$

= $\frac{\nu \times \beta}{2} = \frac{\nu\beta}{2}$. „ πᾶν ἄρα τρίγωνον ἔστιν ἴσον, ἥτοι τῷ

„ γινόμενῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ἡμίσει τοῦ ὕψους, ἢ τῷ „ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως ἢ τῷ ὕψει, ἢ τέλει τῷ ἡμίσει τῷ „ γινόμενῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψει.“

287. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἐὰν παραλληλογράμμῳ τῷ ΑΟΠΓ (χ. 67) τεθείσης εἰς βάσιν τῆς ΑΠ πλευρᾶς μὴ

ἐξῇ ἀγαγεῖν κάθετον ἄλλην, ἢ τὴν εὐθείαν ΓΔ τῇ ΑΠ βάσει προεκβληθείσῃ, καὶ τὸδε τὸ παραλληλόγραμμον ἢ δὲν μᾶλλον ἴσον ἔσαι τῷ ὑπὸ τῆς βάσεως ΑΠ, καὶ τῆς καθέτου ΓΔ, καίτοι ἐκτὸς πίπτεισθαι τῷ παραλληλογράμμῳ, γινομένῳ· ἔργον γὰρ τῷ ὕψος τὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνειν τῶν τῷ παραλληλογράμμῳ στοιχείων (282)· ἐμφαίνει δὲ ἡ ΓΔ κάθετος τὸν ἀριθμὸν, ὡς καὶ ἡ Οτ ἐν αὐτῷ τῷ παραλληλογράμμῳ, ἐπειδὴ $ΓΔ = Οτ$ (127)· ἄλλως τε καὶ πάντα τὰ διὰ ταύτης στοιχεία καὶ δι' ἐκείνης διίτασι κατὰ κάθετον.

288. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τεθείσης τῆς ΑΠ εἰς βάσιν τριγώνου τῷ ΑΠΓ, τὴν ΓΔ ἀγαγεῖν δεῖ κάθετον τῇ ΑΠ βάσει προεκβληθείσῃ.

289. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Ἀποδείξασι τὰ ἐπὶ τῶν παραλληλογραμμικῶν ἐπιφανειῶν δύο προεκτεθέντα θεωρήματα, ἐξῆς ἂν εἴη διὰ πορισμάτων ἐπαγαγεῖν καὶ τὰς πρὸς ἄλληλα αὐτῶν λόγους.

290. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον περιέχεται ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τῷ ὕψος, τὸ δὲ τρίγωνον ὑπὸ τῷ ἡμίσεως ὕψος καὶ τῆς βάσεως, δύο μὲν παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχουσι συγκείμενον ἐκ τε τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψών, δύο δὲ τρίγωνα, λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων καὶ τῶν ἡμίσεων ὑψών (Συμ. Λογ. 291)· ἐντεῦθεν ἄρα ἔπονται οἱ λόγοι τῶν ἐν αὐτοῖς ἐπιφανειῶν.

α'. Δύο παραλληλόγραμμα, ἢ δύο τρίγωνα, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα, ἢ ὡς αἱ βάσεις ἀντισκεπόνθασιν ταῖς ἐν αὐτοῖς ὕψεσιν, ἴσα εἰσὶ. (Συμ. Λογ. 301, 303).

β'. Δύο παραλληλόγραμμα, ἢ δύο τρίγωνα, ἴσαι

μὲν βάσεις, ὕψη δὲ ἄνισα ἔχοντα, πρὸς ἀλλήλα εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· ἔχοντα δὲ ἴσα μὲν ὕψη, ἀνίσους δὲ βάσεις, ὡς αἱ βάσεις (Συμ. Λογ. 306).

γ'. Ρᾶσα τοίνυν ἐντεῦθεν κατασκευαζήσεται παραλληλόγραμμον ἢ τρίγωνον ἔχον πρὸς παραλληλόγραμμον, ἢ τρίγωνον, τὸν ἐπιταχθέντα λόγον, εἴτ' ἐν διπλῇ, τριπλῇ κτ., ἢ ὑποδιπλάσιν, ὑπερτριπλάσιον κτ.· κείῳ φέρε κατασκευάσαι (α. 67) παραλληλόγραμμον τετραπλάσιον τῷ ΑΟΠΓ· ληφθήσεται τοίνυν, ἤτοι 2ΑΠ καὶ 2ΓΔ (242), ἢ ΑΠ ἔξ 4ΓΔ, ἢ τέλος ΓΔ ἔξ 4ΑΠ (290).

291. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Εἰάν παραλληλόγραμμα δύο ΓΔΑΗ, κΠΤΕ τὴν αὐτὴν ἔχωσι βάσιν ΓΗ = ΚΕ, ἔξ ἐν ταῖς αὐταῖς ὥσι παραλλήλοις ΠΑ, ΚΗ, ἴσα ἔσονται· κοινὸν μὲν γὰρ αὐτοῖς ὕψος τὸ ΓΔ, ἢ ΡΒ (127)· ἴση δὲ ἡ βάσις (282).

292. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον (α. 68) τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΓ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΒΓ, ἔξ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΓ, ΒΔ, εἰσὶν ἴσα· κοινὸν μὲν γὰρ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ὕψος (196, 127)· ἔχουσι δὲ ἔξ βάσιν τὴν αὐτὴν· ἄρα εἰσὶν ἴσα (285).

293. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Εἰντεῦθεν ἄρα συνάγεται μέθοδος, καθ' ἣν πολύγωνόν τι τὸ ΑΔΓΠΖ ἐφ' ἕτερον μετασχηματίζεται τὸ ΒΓΠΖ ἴσον μὲν ἐκείνῳ, μιᾷ δὲ πλευρᾷ ἑλλείπον.

α'. Εἰλήθωσαν γὰρ δύο τινὲς γωνίαι αἱ Γ, Α, ἀφοριζόμεναι τρίτης τινὸς τῆς Δ, ἔξ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ· ταύτη δὲ διὰ τῆς ἀφοριζέσης Δ γωνίας ἤχθω παράλληλος ἡ ΔΒ, ἔξ προεκβεβλήθω ἡ ΖΑ (ἢ ἡ ΠΓ), ἐς τ' ἀν συμβάλῃ τῇ ΔΒ παραλλήλῳ· γ'. ἡ ΓΒ ἐπιζευγνύτω τὰ σημεῖα Γ, Β, καθ' ὃ προαχθεῖσα ἡ ΖΑ συνήνηττε τῇ

ΔΒ παραλλήλῳ· φημί ὅτι ὡς τὸ τετράπλευρον ΖΓΠΒ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταπλεύρῳ ΖΠΓΔΑ· ἐστὶ μὲν γὰρ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΓΒ, ὡς τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ ἔχοντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΓ, ΔΒ κείμενα (292), οἷς κοινῇ προσθεύτος τὸ τετράπλευρον ΖΠΓΑ, ἔσται $ΖΠΓΔΑ = ΓΖΠΒ$.

294. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἄπαν ἄρα πολυγώνον μεταποιηθῆναι δύναται εἰς τρίγωνον ἴσον τῷ πολυγώνῳ· αἰ γὰρ δυνατόν τὴν πρῶξιν ἐπαναλαμβάνειν, μέχρις ἂν ἐπὶ τρίπλευρον τὸ σχῆμα μετατρέπηται, τῆς αὐτῆς αἰ μενύσης αὐτῷ ἐπιφανείας· ὡς γὰρ ἤδη τὸ πεντάπλευρον ἐπὶ τετράπλευρον μετένεκται, τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τρίγωνον τὸ τετράπλευρον τραπήσεται, ἀφοριθεύτων δύο γωνιῶν τῶν Π, Β, ἀπὸ τρίτης τινὸς τῆς Γ, καὶ δι' αὐτῆς παραλλήλῳ ἀχθείσης τῇ ΠΒ ἐπιζευχθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῶν ἄλλων, ὡς καὶ πρὸ τούτου, γενομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ ἐπιφανείας παντοίων εἰδῶν πολυγώνων.

295. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Πᾶν τραπέζιον τὸ ΑΠ, ΓΔ (α. 33), ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμίσεος τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν ΑΓ, ΠΔ, καὶ τῆς ὕψους ΑΠ, εἴτ' ὅτι τῆς ἑκατέρᾳ τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν καθέτου.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀχθείσης τῆς διαγωνίης ΑΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΠΔ, ΑΓΔ, ἐν δυσὶ παραλλήλοις ΑΓ, ΠΔ ὄντα, τὸ αὐτὸ ἔχουσιν ὕψος ΑΠ (127)· ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τρίγωνον $ΑΠΔ = \frac{1}{2} ΠΔ \times ΑΠ$ · τὸ δὲ ΑΓΔ $= \frac{1}{2} ΑΓ$

ΑΠ· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων, εἴτ' ἐν τῷ τραπέζιον $ΑΠΓΔ = \frac{1}{2} ΠΔ + \frac{1}{2} ΠΓ \times ΑΠ$, εἴτ' ἐν τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμίσεως τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν, ἢ τῆς ὕψους. Ο. Ε. Δ.

296. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Πᾶν ἀκανόνιστον πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 62) ἴσον ἐστὶ τῷ ἄθροισματι τῶν τριγώνων ΑΖΗ, κτλ. τῶν αὐτῷ ἐμπεριεχομένων (Ἀριθμ. 9).

297. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς περιμέτρου ἢ τῆς ὀρθῆς ἀκτίνος.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ μὲν πλάγιοι ἀκτίνες ἅπαν κανονικὸν πολύγωνον (σχ. 59) εἰς ἴσα τρίγωνα διαιροῦσι τὰ ΠΟΔ, ΔΟΘ, κτλ. (248)· ἡ δ' ὀρθία ἀκτὶς ΖΟ τὸ ὕψος ἐμφαίνει πάντων αὐτῶν τῶν τριγώνων (196)· ἡ μὲν ἄρα τῆς πολυγώνου περίμετρος ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων πάντων τῶν τριγώνων· ἡ δ' ὀρθία ἀκτὶς ΖΟ ἔσται τὸ κοινὸν ἀπάντων ὕψος· ἀλλ' ἕκαστον τῶνδε τῶν τριγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως ἢ τῆς ὕψους (285)· τὸ ἄρα ἄθροισμα πάντων τῶν τριγώνων, εἴτ' ἐν ὅλῳ τὸ πολύγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμιαθροίσματι πασῶν τῶν βάσεων, εἴτ' ἐν τῇ ἡμιπεριμέτρῳ, ἐπὶ τὴν ὀρθίαν ἀκτίναν πολλαπλασιασθεῖση. Ο. Ε. Δ.

298. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπειδὴ δὲ ἢ ὁ κύκλος συνάμειγξεν πολύγωνόν ἐστι κανονικόν, ἐξ ἀπέθρων πλευρῶν συνιστάμενον, ἢ ἡ ὀρθία τῇ πλάγιᾳ ἀκτίνι ἰσθταί (261), ἡ ἐν αὐτῷ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιπεριφέρειας ἢ τῆς ἀκτίνος.

299. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Κυκλικὸς τομὲς ὁ ΠΓΔΟ ἴσος ἐστὶ τῷ ἡμιγινομένῳ ὑπὸ τῆς ΠΓΔ τόξου ἢ τῆς ἀκτίνος· ἐμφαίνει γὰρ τὸ ΠΓΔ πάσας τὰς βάσεις τῶν ἀπαι-

μεσῶν τριγωνιδίων, ὧν τὸ ἄθροισμα συνίστησι τὸν ΠΓΔΟ τομέα, ἡ δὲ ΓΟ ἀκτὶς τὸ ὕψος ἀπάντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰς δὲ τὴν τέττε εὐρεσιν ζητεῖσθω πρῶτον ἐν εὐθείᾳ γραμμῇ ἡ δύναμις τῆς τόξε κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον· α'. μετρηθῆτω ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ὑπὸ ΠΟΔ· β'. εὐρεθείσῃς τῆς ὀλικῆς περιφερείας τῆς κύκλου, ὡς ὑποδείξομεν μικρῷ ὕστερον (375), ζητηθῆτω διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ἡ τῆ ΠΓΔ τόξου δύναμις· εὐρεταί φέρε ἡ ὑπὸ ΠΟΔ γωνία 5° , εἴτ' ἐν τὸ καταμετρῆν αὐτὴν τόξον $\text{ΠΓΔ} = 5^\circ$ · εἰλήφθω ἔν ἐν ποσὶν ἡ ΠΟ ἀκτὶς, καὶ δὴ εὐρεθήσεται ἡ ὀλικὴ περιφέρεια ΠΗΝΓ ἐξ ὑποθέσεως = 600 ποσίν· ἔκέν $360 : 600 :: 5 : \chi = 8$ ἄρα $\text{ΠΓΔ} = 8$ ποσί. (')

300. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἰν' εὐρεθῇ ἡ τμήματος τῆ ΠΧΕν ἐπιφάνεια (χ. 69.), εἰλήφθω ἡ τῆ ΠΓΧΕν τομέως ἐπιφάνεια, εἴτα ἡ τῆ ΠΓΧ τριώνυς· καὶ δὴ $\text{ΠΓΧΕν} - \text{ΠΓΧ} = \text{ΠΧΕν}$ · ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

301. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Τέλος δὲ ἵνα μετρηθῇ ἡ ΑΒρΔ ζώνη, τῆς ὀλικῆς τῆ κύκλου ἐπιφανείας ἀφηρήσασαν ἐκότερον τῶν τμημάτων ΑΔΕΓ, ΒΜρη· τὸ δὲ λειπόμενον προφανῶς ἐμφανεῖ τὴν τῆς ΑΒρΔ ζώνης ἐπιφάνειαν.

(*) Φανήσεται δὲ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν (369) ὡς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν, καὶ δὴ ὁ,τιῦν τόξον, ἴσαν εὐθείᾳ γραμμῇ ἐπ' ἀκριβὲς εὐρεθῆναι ἀμήχανον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων.

302. Σχήματα καλῶνται ἰσοπερίμετρα τὰ τὴν αὐτὴν περίμετρον ἔχοντα, εἴτ' ἂν ὧν ἡ περίμετρος τῇ αὐτῇ ἴσῃται εὐθείᾳ.

303. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Δύω κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων μείζων ἡ ἐπιφάνεια, ἢ πλείους εἰσὶν αἱ πλευраί.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ κανονικὸν πολύγωνον ὥσῳ πλείους ἔχει πλευρὰς, τοσέτω ἡ ὀρθία ἀκτὺς ἔγγιον γίνεται τῇ ἐξισωθῆναι τῇ τῆς πλαγίας δυνάμει (260), τοσέτω ἔπομένως μείζων γίνεται· τῆς δὲ περιμέτρου ἕτης τῆς αὐτῆς, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμπεριμέτρου καὶ τῆς ὀρθίας ἀκτίνος τοσέτω μείζων ἔσαι, ὥσῳ μείζων εἶη ἡ ὀρθία ἀκτὺς· τῆς ἔστιν, ἢ πλείους αἱ πλευраί, ἐκείνο ἔσται μείζον (297). Ο. Ε. Δ.

304. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἑλαττόν ἐστιν, ἢ τὸ αὐτῷ ἰσοπερίμετρον τετράγωνον· τὸ δὲ τετράγωνον ἑλαττόν, ἢ τὸ ἰσοπερίμετρον πεντάγωνον, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως· ὁ γεμὴν κύκλος, ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἐκληφθεὶς ἐξ ἀπειραριθμῶν πλευρῶν συνιστάμενον, ἔσαι μείζων παντὸς ἄλλου ἰσοπεριμέτρου οἱ κανονικῆς σχήματος.

305. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Δύω ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, ἐκείνο μείζον ἐστιν, ἢ αἱ πλευраί εἰσὶν ἴσαι, ἢ μᾶλλον τῆς ἰσότητος ἔγγιον γίνονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Κεῖσθωσαν δύο ὀρθογώνια τὰ ΑΒΓΔ,

ΑΔΠΖ (χ. 54, 55)· ἡ ἔσω τετραγώνη μὲν ἦτε βάσις
 $BΓ = 4$, ἡ τὸ ὕψος $AB = 4$, ὡν τὸ ἄθροισμα 8· ἔσω
 δὲ ἡ τῆ ἐπιμήκης ὀρθογωνίᾳ ΑΔΠΖ, $ΑΠ + ΑΔ = 8$ ·
 τῇ μὲν ἔν τετραγώνῳ ἐπιφάνεια ἔσται $4 \times 4 = 16$ · ἀλλ'
 ἡ τῆ ἐπιμήκης ὀρθογωνίᾳ ἐπιφάνεια, καίτοι ἰσοπεριμέτρῳ,
 ἔσται ἀλλ' ἐν ἐλάττωι ἢ 16· ἐγγίσει μὲντοι μᾶλλον τῷ 16,
 ὅσω μᾶλλον ἡ βάσις τῇ ἐξισωθῇ τῷ ὕψει ἐγγύς γί-
 νεται· εἰ γὰρ ἡ μὲν βάσις τεθῇ $= 7\frac{1}{2}$, τὸ δὲ ὕψος $=$
 $\frac{1}{2}$, ἔσται ἡ ἐπιφάνεια $= 7\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (283) = 3 + \frac{1}{4}$ · εἰ
 δὲ ἡ μὲν βάσις ἡ $= 7$, τὸ δ' ὕψος $= 1$, ἔσται ἡ ἐπιφά-
 νεια $= 7 \times 1 = 7$ · εἰ δὲ ἡ μὲν βάσις ἡ $= 5$ τὸ δὲ
 ὕψος $= 3$, ἔσται ἡ ἐπιφάνεια $5 \times 3 = 15$ · ὁῦλον ἄρα,
 ὡς ὅσω μᾶλλον ἡ βάσις ἐγγίξει τῇ ἐξισωθῇ τῷ ὕψει,
 τοσέτω μᾶλλον αὔξει ἡ ἐπιφάνεια. Ο. Ε. Δ.

306. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Δύω παραλληλογράμμων,
 τὰς ἀντιστοίχας πλευράς ἴσας ἐχόντων, ἡ ἰσοπεριμέτρων
 ὄντων ἐπομένως, ἀλλ' τῇ μὲν ὄντος ὀρθογωνίᾳ, τῇ δὲ
 πλαγιογωνίᾳ, τὸ ὀρθογωνίον μείζον ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐςωσαν ὀρθογωνίου τῇ ΑΒΓΔ (χ. 70)
 αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ ἴσαι ἐκάσῃ ταῖς τῇ πλαγιογωνίᾳ
 ΑΟΘ· ἡ μὲν ἔν ἐπιφάνεια τῇ ὀρθογωνίᾳ ἴση ἐστὶ τῷ AB
 $\times BΓ$ (283)· ἡ δὲ τῇ πλαγιογωνίᾳ, τεθείσης τῆς Ον
 εἰς βάσιν, ἴση ἔσται τῷ $Ον \times Θτ$ · ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως
 $Ον = AB$, ἡ $ΑΓ > Θτ$, ἔσται $AB \times BΓ > AB \times$
 $Θτ$ (Συμ. Λογ. 307), ἡ δὴ μείζον ἡ τῇ $Ον \times Θτ$ · ἡ
 ἄρα ἐπιφάνεια τῇ ὀρθογωνίᾳ ἐστὶ μείζων τῆς ἐπιφανείας
 τῇ πλαγιογωνίᾳ, ἡ αἱ πλευραὶ ἴσαι τίθενται ταῖς τῇ
 ὀρθογωνίᾳ. Ο. Ε. Δ.

307. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ὅσω ἄρα ἡ μὲν Ο γωνία
 ἀμβλεία, ἡ δ' Α ὀξεία, τοσέτω ἐλάττω γίνεται τὸ

ὅτι ὕψος, ἢ τοσούτω ἐπομένως ἐλαττῆται ἢ ἐπιφάνει·
 δύο ἄρα παραλληλογράμμων πλαγιογωνίων, τὰς αὐτὰς
 ἀντισοίχους πλευρὰς ἔχόντων, μείζονα ἐπιφάνειαν ἔξει, ἢ αἱ
 δύο μείζους γωνίαι εἰσὶν ἥττον ἀμβλείαι.

308. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐν γένει ἄρα πάντων τῶν
 ἰσοπεριμέτρων παραλληλογράμμων τὸ τετράγωνον ἐστὶ
 μείζον· μείζον γὰρ ἢ ὀρθογωνίῳ ἐπιμήκους ἰσοπεριμέτρου
 (305) ἢ παραλληλογράμμῳ πλαγιογωνίῳ ἰσοπεριμέτρου
 (306).

309. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Πολλὴ γὰρ ἄρα ἢ δεῖ τῶν
 πολυγώνων ἐν γένει τὰς ἐπιφανείας ἀνάλογον ἔχειν ταῖς
 αὐτῶν περιμέτροις.

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογικῶν εὐθειῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογίας τῶν γραμμῶν.

310. Ἐὰν εὐθεῖα εὐθείαν περιέχη, ὅσας τις τρίτη
 περιέχει τετάρτην, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι λέ-
 γονται· εἰ γὰρ (σχ. 71) ἡ ΑΖ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς πέν-
 τε μέρη ἰσάμμηλα, εἴτ' ὅν γένηται $AB = BG = ΓΔ,$

κτλ. τιμηθῇ δὲ ἡ AT ὡσαύτως, ὡς ὑπάρχειν $AΘ = ΘΙ = IT$, κτλ. προκύψουσιν τέσσαρες ἀνάλογοι εὐθεῖαι $AB : AΘ :: AZ : AT$. ἐπεὶ γὰρ τὰ ὅμοια μέρη δυσὶν ὁλῶν πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ τὰ ὅλα (Συμ. λογ. 234), ἔσται ἐξ ἀνάγκης ἡ ἐξῆς ἀναλογία: τὸ AB πέμπτον μέρος τῆς AZ πρὸς τὸ $AΘ$ πέμπτον μέρος τῆς AT λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὅλη AZ πρὸς τὴν ὅλην AT .

311. Ἐσται ἐτι κατὰ τὴν ἐσιώδη ιδιότητα ἀπάσης ἀναλογίας (Συμ. λογ. 238.) $AB \times AT = AΘ \times AZ$, ὃ εἰς (280) τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐπὶ τῆς AT ὡς βάσεως δι' ὕψους τῆς AB συνιστάμενον ἴσον τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ συγκροταμένῳ ἐπὶ βάσεως τῆς AZ δι' ὕψους τῆς $AΘ$.

312. Ἰνα δὲ ἡ τῶν εὐθειῶν ἀναλογία, ὡς ἡ τῆς τῶν ἀριθμῶν, οἰκειωθῶμεν, ἐκδηλωθήτωσαν πρὸς τὸ παρὸν ἐν ἀριθμοῖς τέτταρσι τέτταρες εὐθεῖαι.

Ἐς ὧ φέρεται $AT = 2 \cdot AZ$, ἔκκ' ἡ $AΘ = 2 \cdot AB$. τεθείωθαι αὐτῆς $AB = 1$, καὶ $AZ = 5$, οὐκοῦν ἔσται $AΘ = 2$, ἡ $AT = 10$. ἡ δὲ ἀναλογία $AB : AΘ :: AZ : AT$ μεταπέσειται εἰς $1 : 2 :: 5 : 10$. εἰ δὲ $A = 1$ ποδὶ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἔσται ὀρθογώνιον ἐπίμηκες, ἔχον μῆκος μὲν πόδας 10, πλάτος δὲ 1, εἴτ' ἔν πόδας τετραγωνικὸς 10 (281), τὸ δὲ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενον ἔσται ὀρθογώνιον ἐπίμηκες, ἔχον πέντε μὲν ποδῶν μῆκος, δύο δὲ πλάτος· ἐκάτερον δὲ πατέρη διενηροχὸς τῷ σχήματι, ἰσάλληλα μέντοι εἰς τὰς ἐπιφανείας, ὡς περιέχοντα ἐκάτερον δέκα τετραγωνικὸς πόδας.

313. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Δύο εὐθεῖαι ὑπὸ δυσὶν παραλλήλων ἀπολαμβάνονται εἰσὶν ἀνάλογοι

δυσὶν εὐθείαις ὑπὸ δυεῖν παραλλήλων καὶ αὐταῖς ἀπολαμ-
βανομέναις, καὶ ὥσπερ ἐκεῖναι, κεκλιμέναις.

ΔΕΙΞΙΣ. Τετμήσω ἡ ΑΖ (σχ. 71.) εἰς πέντε ἰσάλλ-
ληλα μέρη τὰ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. καὶ συνεξάσω δι' ἄλλης
εὐθείας πρὸς τὸ δοκῦν ἡ Α γωνία, καὶ ἐπεξεύχσω ἡ ΖΤ,
καὶ διὰ τῶν σημείων Β, Γ, κτλ. ἤχθωσαν τῇ ΖΤ παράλ-
ληλοι αἱ ΑΞ, ΒΘ, κτλ. τμηθήσεται ἔν ἡ ΑΤ εἰς πέν-
τε ἰσάλληλα μέρη, ἀλλὰ δὴ ὡσαύτως καὶ ἡ ΑΖ· εἴγε
πάντα μὲν τὰ μέρη τῆς ΑΤ εὐθείας ΑΘ, ΘΙ, ἀπολαμ-
βάται ὑπὸ παραλλήλων, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἐπίσης κέκλιται
(128)· πάντα δὲ τὰ ΑΒ, ΒΓ μέρη τῆς ΑΖ, ὑπὸ παρ-
αλλήλων ἴσων ἀπεχασῶν καὶ ἐπίσης πάντα ἐπ' αὐτῶν
κέκλιται.

α'. Δύω ἄρα μέρη τῆς ΑΖ πρὸς δύο τῆς ΑΤ τὰ
ἐν ταῖς παραλλήλοις παραβαλλόμενα, ἔσονται ἀνάλογα
ταῖς ὅλαις εὐθείαις ΑΖ, ΑΤ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑ-
πὸ δύο ἐτέρων παραλλήλων Ακ, ΖΤ· εἰλήφθων γὰρ πρὸς
τὸ δοκῦν τὰ μέρη ΑΒ, ΑΘ κείμενα ἐν ταῖς παραλλή-
λοις ΑΞ, ΒΘ, καὶ παραβεβλήσω ταῖς δυσὶν ὅλαις εὐ-
θείαις ΑΖ, ΑΤ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΞ, ΖΤ
κειμέναις· φημὶ δὴ ὡς αἱ πρότεραι, καθὰ καὶ αἱ ὕστεραι,
κεκλιμέναι, εἰσὶν αὐταῖς ἀνάλογοι. εἴτ' ἔν ΑΒ : ΑΘ ::
ΑΖ : ΑΤ· ἐν γὰρ πέμπτον τῆς ΑΖ, εἴτ' ἔν ΑΒ πρὸς
ΑΘ πέμπτον τῆς ΑΤ, ὡς ἡ ὅλη εὐθεῖα ΑΖ πρὸς τὴν
ὅλην ΑΤ.

β. Ταῦτόν μέντοι ἔσαι, καὶ εἰάν παραβληθῶσι μέρη
τυχόντα τῶν δύο εὐθειῶν, κείμενα ἐν δυσὶ παραλλή-
λοις, ἀποσηματι ψittinien ἀπεχέσαις, πρὸς αὐτάς τὰς ὅ-
λας εὐθείας· εἰλήφθωσαν γὰρ δύο τυχῆσαι παράλληλοι
ΒΘ, ΕΧ· φημὶ ἔν ὡς ἔστι ΒΕ : ΘΧ :: ΑΖ : ΑΤ, ὃ ἐ-

εἰ τρία πεμπτημόρια τῆς ΑΖ, τῆς ἑστίν ἡ ΒΕ, εἰςὶ πρὸς τρία πεμπτημόρια τῆς ΑΤ, τῆς ἑστὶ τὴν ΘΧ, ὡς ἡ ὅλη ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ, ὃ καθ' ἑαυτὸ εἰςὶ πρόδηλον.

γ'. Ἀλλὰ καὶ μέρη δυεῖν ὁλῶν εὐθειῶν ὑπὸ δυεῖν ὠρισμένων παραλλήλων ἀπολαμβανόμενα ἀνάλογον ἔχουσι δυτὶν ἑτέροις αὐτῶν μέρεσιν ἀπολαμβανομένοις ὑπὸ δύο παραλλήλων ὠρισμένων· ἔσωσαν ἔν δύο παράλληλοι αἱ ΑΞ, ΓΙ, καὶ ἄλλαι αἱ ΓΙ, ΖΤ· φημὶ ἔν ὡς ἔστιν ΑΓ: ΑΙ :: ΓΖ: ΙΤ, εἰτ' ἔν $\frac{1}{2}$ ΑΖ πρὸς $\frac{1}{2}$ ΑΤ, ὡς $\frac{1}{2}$ ΑΖ πρὸς $\frac{1}{2}$ ΑΤ, ὃ καὶ αὐτὸ πρόδηλότατον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀλλὰ γὰρ τὴν προεκτεθείσαν ἀναλογίαν, τὰ μέγιστα ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῆς ξυντελέσουσιν, δεκτέον εἶναι μοι δοκεῖ καὶ καθολικώτερον.

Θῶμεν γὰρ τὴν ΑΖ εὐθεῖαν διηρημένην ἕκ εἰς πέντε μέρη ἰσάμμηλα, καὶ εἰς ἀπειρα, καὶ δι' ἐκάστου σημείου τῶν προσεχεσάτων διατομῶν Β, Γ, Δ, διήσας, ὡς διὰ τῆ Α, παραλλήλους τῇ ΖΤ. α'. πασῶν τῶν παραλλήλων ἰσῶ ἀποσήμετι ἀπεχεσῶν, πάντα τὰ μέρη τῆς ΑΤ, τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ δύο προσεχῶν παραλλήλων τὰ ΑΘ, ΘΙ, ΙΤ, καὶ ἴσον ἐπ' αὐταῖς κεκλιμένα (*), ἴσα ἔσονται. β'. πάντα τὰ μέρη ΑΘ, ΘΙ, κτλ. ἔσονται μέρη ὅμοια τῆς ὅλης ΑΤ, ἀπειροσά, καὶ σημεῖα ἴσα· καὶ ἔτι αἱ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ἔσονται μέρη ὅμοια, ἀπειροσά, ἢ σημεῖα τῆς ὅλης ΑΖ (51). γ'. ὁ ἀριθμὸς τῶν δε τῶν

(*) Πάντα ταῦτα τὰ μέρη ἴσον εἰσὶ κεκλιμένα ἐπὶ τῶν παραλλήλων· ἔδεν γὰρ κυρίως εἶσιν, ὅτι μὴ ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἢ ἐμπέπτησα εἰς πάσας τὰς παραλλήλους ποιεῖ ἴσας τὰς ἀντιστοίχους γωνίας (132), καὶ δι' ἐπίσης ἐφ' ἀπασῶν κλίνεται· αὐτὸ δὲ τῆτο νοητέον καὶ περὶ τῶν μερῶν ΑΒ, ΒΓ κτλ.

ὁμοίων μερῶν, τῶν δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς AT τῶν κειμένων μεταξὺ δύο ὠρισμένων παραλλήλων $AΞ$, $ΕΧ$, ἰσθ. ται τῷ τῶν ὁμοίων μερῶν, τῶν ἀπειροσῶν τῆς AZ , τῶν κειμένων μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ἡ γὰρ ἐκάτερος ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παραλλήλων $BΘ$, $ΓΙ$, $ΔΤ$, $ΕΧ$ τῶν ἐντεταγμένων ἐκ τῆς $AΞ$ ἕως αὐτῆς τῆς $ΕΧ$.

Εἰ ἂν ἐν ληφθῶσι τυχεῖσαι τρεῖς παράλληλοι $AΞ$, $BΘ$, $ΕΧ$, ἔσαι ἡ ἀναλογία AB . $AΘ :: AE : AX$, εἴτ' ἐν ἐν ἀπειροσὸν μέρος τῆς AZ πρὸς ἐν ἀπειροσὸν τῆς AT , ὡς τέσσαρα τῆς AZ πρὸς τέσσαρα τῆς AT (Συμβ. λογ. 34)· ὡς δ' αὐτως ἔσαι $AB : AΘ :: BE : ΘΧ$.

Ληφθέντων ἄρα δύο τινῶν παραλλήλων χωρίων, δύο εὐθεῖαι κείμεναι ἐν τῷ πρώτῳ ἀνάλογοι εἰσι δυσὶν εὐθείαις κειμέναις ἐν τῷ δευτέρῳ κατὰ κλίσιν ὁμοίαν ἐκείναις.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰξέον ἐτι, ὡς ἔδεν τὸ κωλύει τὴν ἀναλογίαν, καὶ αἱ δύο πρότεραι, ἡ δὴ ἡ αἱ ὑστεραι, μὴ ὥσι μέρη τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ὥσπερ ἐν ἀνωτέρῳ ὑποτίθεται (γ'), ἄρκει μόνον, ἵν' αἱ δεύτεραι ὁμοίως ταῖς πρώταις κεκλιμέναι ὥσιν ἐπὶ τῶν παραλλήλων· ταῦτι ἐν ἡ δὴ δεκτέον.

α'. Ἐξωσαν γὰρ αἱ $αβ$, αὖ τοσούτω κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν παραλλήλων $ακ$, $βθ$, ὅσῳ αἱ AB , $AΘ$ ἐπὶ τῶν $AΞ$, $BΘ$ · ἔκκεν ἡ γωνία $β=B$, ἡ $θ=Θ$, ἡ $α=A$ (132).

Ἐπινοήσωμεν τοιγαρὺν τὴν $αβ$ ἐπιτεθειμένην τῇ AB · ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία $α=A$, ἡ πλευρὰ $αθ$ πεσεῖται ἐπὶ τῆς $AΘ$ · ἡ ἐπεὶ ἡ γωνία $β=B$, ἡ $βθ$ παράλληλος

τῇ ΑΖα ἀναγκαίως πεσεῖται ἐπί τινος εὐθείας ὠρισμένης
 παραλλήλῃ τῇ ΑΞ, ἐπὶ τῆς ΒΘ φέρε, ὥσθις $\alpha\beta = \text{AB}$.
 τὰ δὲ ἄρα τρίγωνα $\alpha\beta\theta$ $\text{AB}\Theta$ συγχυθήσονται. καὶ ὥ-
 τως αἱ $\alpha\beta$, $\alpha\theta$ ἀνάλογοι ἔσονται ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, αἷς
 καὶ αἱ AB , $\text{A}\Theta$. ὅ ἐστιν, $\alpha\beta : \alpha\theta :: \text{AZ} : \text{AT}$, ἢ $\alpha\beta :$
 $\alpha\theta :: \text{B}\Delta : \Theta\text{T}$, κτλ.

β' Ἐςωσαν δὲ καὶ τὰ μέρη $\beta\tau$, $\theta\tau$ τοσέτω κεκλι-
 μένα ἐπὶ τῶν παραλλήλων $\beta\theta$, $\tau\eta$, ὥσω αἱ $\text{B}\Delta$, ΘT
 μέρη τῆς ΑΖ, καὶ ΑΤ εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν ἐτέρων
 παραλλήλων. ἐπεὶ ἔν ἡ γωνία $\beta = \text{B}$, καὶ $\theta = \Theta$, προ-
 εκβληθεῖσαι αἱ $\beta\tau$, $\theta\tau$ πέραν τῆς $\beta\theta$, συμπεσῶνται καὶ
 συστήσουσι τὴν γωνίαν $\alpha = \text{A}$ (*). μετῴνυχθαι τοῖνον ἡ $\alpha\beta\tau$
 ἐπὶ τῆς ΑΒΖ, τῆς κορυφῆς α τῇ κορυφῇ Α ἐπιτεθείσης.
 καὶ δὴ $\alpha\theta\tau$ πεσεῖται ἐπὶ ΑΘΤ. καὶ ἐπεὶ $\beta = \text{B}$, καὶ $\beta\theta$
 παράλληλος τῇ $\tau\eta$, καὶ δὴ καὶ τῇ $\alpha\kappa$, πεσεῖται ἀναγκαίως
 ἐπί τινος παραλλήλῃ τῇ ΑΞ τῶν ἐν τῷ ΑΖΤ, ἐπὶ τῆς
 ΒΘ φέρε, ἡ δ' ἐτέρα παράλληλος $\tau\eta$ πεσεῖται ἐφ' ἐτέ-
 ρας ὠρισμένης παραλλήλῃ τῆς ΔΤ τυχόν. τὸ τοῖνον χω-
 ρίσον $\alpha\beta\theta\tau$ συγχυθήσεται τῷ ΑΒΘΔΤ, καὶ αἱ εὐθεῖαι $\beta\tau$,
 $\theta\tau$ ἔσονται ἀνάλογοι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, αἷς καὶ αἱ $\text{B}\Delta$,
 ΘT . ὥτως ἔν ἐσαι $\text{AB} : \text{A}\Theta :: \beta\tau : \theta\tau$ καὶ $\text{BA} : \Theta\text{T} ::$
 $\beta\tau : \theta\tau$, κτλ.

ΣΤΗΜΠΕΡΑΣΜΑ. Ὅταν ἄρα δύο εὐθεῖαι κέωνται
 ἐν δυοὶ παραλλήλοις, καὶ δύο ἕτεραι ἐν δυτὶν ἑτέραις, καὶ ὁ-
 μοίως ὥστὶ κεκλιμέναι, αἱ δευτέραι αἱ εἰσὶν ἀνάλογοι
 ταῖς πρώταις, εἴτε αἱ δευτέραι περιέχονται ἐν τοῖς αὐ-

(*) Τῆτο δὲ γίνεται, ὅτι $\beta\tau$ καὶ $\theta\tau$ τοσέτω κεκλιμέναι
 εἰσὶν ἐξ ὑποθέσεως, ὥσω $\text{B}\Delta$ καὶ ΘT .

τοῖς χώροις, ἐν οἷς ἔσσι αἱ πρῶται, εἴτε ἔσσι μὴ, καὶ ὥσιν
μέρη τῶν αὐτῶν ὅλων, ὧν ἔσσι ἐκείναι, καὶ μὴ· ἐν γένει
ἄρα κτλ. Ο. Ε. Δ.

314. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ὄταν δύο εὐθεῖαι, ὑπὸ δύο
παρὰλλήλων ἀπολαμβάνονται, τέμνονται τρίτῃ παρὰλ-
λήλῳ, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ δύο παρὰλλήλων μέρη εἰσὶν
ἀνάλογα ταῖς ὅλαις εὐθείαις· εἰάν, φέρε, ἵποθεῶσι δύο
εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ (χ. 72.) κείμεναι μεταξὺ τῶν παρὰλ-
λήλων ΙΕ, ΒΓ, ἃ τέμνονται ὑπὸ τρίτης παρὰλλήλου
τῆς ΖΘ, τὰ μέρη ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς ὅλαις
ΑΒ, ΑΓ, εἴτ' ὅν $AZ : A\Theta :: AB : A\Gamma$. ἔσσι γὰρ αἱ ΑΖ,
ΑΘ κείνται ἐν παρὰλλήλῳ διαστήματι· ὡσαύτως ἔσσι αἱ ΑΒ,
ΑΓ· ἔσσι αἱ πρῶται κεκλιμέναι εἰσὶν ὁμοίως ταῖς δευτέραις,
μέρη ἔσσι τέτων ἐκείναι.

315. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔσσι καὶ $ZB : \Theta\Gamma ::$
 $AB : A\Gamma$.

316. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν
ἐν παρὰλλήλῳ διαστήματι, ἔσσι αἱ ΖΒ, ΘΓ ἐν ἑτέρῳ κατ'
ἴσην κλίσειν, εἰσὶν ἄρα ἔσσι τὰ μέρη αὐτῶν ἀνάλογα, εἴτ'
ἐν $AZ : A\Theta :: ZB : \Theta\Gamma$.

317. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Α'φ' ἐκάστης τῶν ἀναλογιῶν
τῶν δὲ, ἔσσι τῶν ὧν περὶ εὐχάσαντες εἰρήκαμεν, ποικίλαι ἀ-
ναφύονται ἐξίσωσεις· ἐκ γὰρ $AZ : A\Theta :: AB : A\Gamma$
πρόεισιν ἡ ἐξίσωσις $A\Gamma \times AZ = AB \times A\Theta$ (311), ὅθεν

$$A\Gamma = \frac{AB \times A\Theta}{AZ}, \text{ ἢ } AZ = \frac{AB \times A\Theta}{A\Gamma}, \text{ κτλ. (Συμ.}$$

Λογισμ. 250), ἔσσι ἔσσι εὐρεῖν ἐσσι τετάρτην εὐθεῖαν ἀνάλο-
γον, τῶν δύο ἐν ἀριθμοῖς προαποδομένων.

318. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δύο ἄρα εὐθειῶν, γωνίαν πε-
ριεχουσῶν τυχεῶσαν τῇν Α, εἰάν τὰ Β, Γ πέρατα ἐπιζέ-

ξη εὐθεῖα ἢ ΒΓ, ἢ αὐτῇ παράλληλος ἀχθῇ ἢ ΖΘ, ἔσαι
 α'. $AZ : AΘ :: AB : AΓ$. β'. $AZ : AΘ :: ZB : ΘΓ$.
 γ'. $ZB : ΘΓ :: AB : AΓ$. εἰν γὰρ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς
 Α γωνίας ἀχθῇ τῇ ΖΘ ἢ ΙΕ παράλληλος, αἱ εὐθεῖαι
 εὐρεθήσονται ἐν δυοὶ παραλλήλοις διαστήμασι (314).

319. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τριῶν ἄρα εὐθειῶν δοθεισῶν
 τῶν Α, Β, Γ, (χ. 74) τετάρτη ἀνάλογος προκύψει·
 α'. ἀχθεισῶν τέρματος ἄνευ ὑπὸ γωνίαν τυχεύσαν τὴν Δ
 τῶν εὐθειῶν ΔΡ, ΔΠ. β'. διὰ τῷ διαβήτι μετενεχθείσης
 τῆς Α ἐπὶ τὴν ΔΡ, ὅθεν γίνεται ΔΕ, τῆς δὲ Β ἐπὶ τῆς
 ΔΠ, ὅθεν ΔΖ, ἢ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΖ· γ'. μετενε-
 χθείσης τῆς τρίτης Γ ἐπὶ τῆς ΔΡ ἐκ τῷ Ε, ὅθεν ἔσαι
 ΕΡ· δ'. ἀχθείσης τῆς ΡΣ παραλλήλως τῇ ΕΖ· ἢ ἔν ΖΣ
 ἔσαι ἢ ζητούμενη τετάρτη ἀνάλογος· ἢ γὰρ ἔσι ΔΕ :
 ΔΖ :: ΕΡ : ΖΣ (318).

320. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Εἰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ,
 (χ. 72.), συνισῶσαι γωνίαν τὴν Α, πίπτωσιν ἐπ' ἄλλην
 τὴν ΒΓ, ἢ δύο ἄλλαι (χ. 73) συνισῶσαι γωνίαν τὴν α = Α
 κλίνωνται ἐπ' ἄλλης, ὡς αἱ πρότεραι, τῆς ΒΓ, ἔσαι ΑΒ :
 ΑΓ :: αβ : αγ· ἀχθεισῶν γὰρ διὰ Α, α παραλλήλων
 ταῖς ΒΓ, βγ, εὐρεθήσονται ἐν παραλλήλοις διαστήμα-
 σιν αἱ εὐθεῖαι, καὶ δὴ καὶ κατ' ἴσην κλίσιν ἐξ ὑποθέ-
 σεως (313).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῆς ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀ-
ναλογίας.

321. ΘΕΩΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Τῶν ὁμοίων
τριγώνων αἱ ὁμόλογοι, ἢ ἀντίστοιχοι, πλευραὶ ἀνάλο-
γον εἰσὶ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ τρεῖς πλευραὶ τρισὶ πλευραῖς ἐ-
πὶ δυσὶν ὁμοίων τριγώνων ἀντιστοιχῶσιν, ἔσονται πάντως
ἀνάλογοι τὰ τρίγωνα, εἰὰν δευχθῇ α'. $AB : AF :: \alpha\beta :$
 $\alpha\gamma \cdot \beta'.$ $AB : BF :: \alpha\beta : \beta\gamma \cdot \gamma'.$ $BF : AF :: \beta\gamma$
 $: \alpha\gamma$ (9. 72, 73.).

α'. Διὰ τῶν κορυφῶν Α, α ἤχθωσαν παράλληλοι
ταῖς βάσεσι ΒΓ, βγ· ἔκέν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΒ, αβ,
ΑΓ, αγ ἐν παραλλήλοις διαστήμασι κεῖνται, καὶ ἐπεὶ Β
= β, καὶ Γ = γ (198) ἴσον εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπ' αὐτῶν
τῶν διαστημάτων (134)· ἄρα $AB : AF :: \alpha\beta : \alpha\gamma$ (313).

β'. Ἡχθω ἡ τ Χ παράλληλος τῇ ΑΓ, καὶ ἡ μ ν τῇ
αγ· τοιγαρὲν αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ ἀπολαμβάνονται ὑπὸ τῷ
παραλλήλῳ διαστήματος Βτ, ΓΑ, αἱ δὲ αβ, βγ ὑπὸ
τῷ μν, αγ· ἐστὶ δὲ Α = α, καὶ Γ = γ (198)· ἔκέν ὁ-
μοίως εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν παραλλήλων αἵτε τΧ,
ΑΓ, καὶ αἱ αβ, βγ· ἄρα $AB : BF :: \alpha\beta : \beta\gamma$.

γ'. Ἡχθω ἡ μὲν θη παράλληλος τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ἰλ
τῇ βα· ἔκέν αἱ μὲν ΓΒ, ΓΑ κεῖνται ἐν τῷ παραλλήλῳ
διαστήματι θηΑΒ, αἱ δὲ γβ, γα ἐν τῷ ἰλβα· καὶ δὴ ὁ-
μοίως, ὡς ἀνωτέρω, συλλογισάμενοι ἀποδειξομεν ὅτι $BF :$
 $AF :: \beta\gamma : \alpha\gamma$ Ο. Ε. Δ.

322. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Συχνήτις ἡ χρῆσις τῆς ἐκτε-
θέντος θεωρήματος παρὰ τοῖς Γεωμέτραις ἐπὶ τὰς δει-
ξεις· δύο γὰρ εὐρίσκοντες ὅμοια τρίγωνα, καὶ ἐκ τούτων
ἥτις πρὸς τὸ τέλος αὐτὲς ἄγῃ, τὴν ἀναλογίαν ἐκλέγον-
τες, καὶ ἐξίσωσιν συνισῶντες, κακταύτης, εἰ δέοι, ἄλλην,
καθικνῶνται τῇ, καὶ ἐσχαζονται τέλος (Συμ. λογ. 394 κτ.).

323. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ὡς περ ἐν ἀριθμοῖς, παντοίῳ
διαθέσειν γινομένων τοῖς ὅροις, ἡ ἀναλογία σώζεται, εἰ
μόνον τῷ ὑπὸ τῶν ἁκρων τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἐξισῶτο γι-
νόμενον (Συμ. λογ. 242). ὥσαύτως καὶ τοῖς ὁμοίοις τρι-
γώνοις ἐπὶ τεσσάρων πλευρῶν ἀναλόγων, ὅπως ἂν μετα-
ληφθεῖεν, ἀλύμαντος διασώζεται ἡ ἀναλογία· εἰ μόνον
παρὰβάλλοιτο αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, εἴτ' ἔν αἱ ὑποτεί-
νεται γωνίας ἴσας· ἔτω σκαληνῇ τριγώνῳ ἡ μείζων τῇ
μείζονι τῶν πλευρῶν, ἡ δ' ἐλάττω τῇ ἐλάττωι, ἡ δὲ
μέσῃ τῇ μέσῃ, παραθετέαι ὑπάρχεσι.

324. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύο ὁμοίων τριγώνων (α. 72.
73.) αἱ πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσι τοῖς ὕψεσι· ἐν τοῖς δυ-
σὶ φέρε ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, αβγ ἔσιν $Αρ : Αδ ::$
 $ΑΒ : αβ$. ἐπεὶ γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ἔστι $δ = ρ$, καὶ $Β = β$,
τὰ δύο τρίγωνα ΑΒρ, αβδ, ἔχοντα δύο ἀντιστοίχους γω-
νίας ἴσας, εἰσὶν ὅμοια (218). ἄρα ΑΒ μείζων πλευρὰ τῇ
ΑΒρ πρὸς αβ μείζονα πλευρὰν τῇ αβδ ὡς Αρ μέσῃ πλευρὰ
τῇ ΑΒρ· πρὸς αδ μέσῃν πλευρὰν τῇ αβδ, εἴτ' ἔν ΑΒ :
 $αβ :: Αρ : αδ$. ἀνάλογοι ἄρα αἱ πλευραὶ ΑΒ, αβ τοῖς
ὕψεσιν αρ, αδ.

325. Ἐπεὶ δὲ $ρ = δ$, καὶ Γ γωνία τῇ ἐλάττωτος
τριγώνῳ ΑρΓ ἐστὶν ἴση τῇ γωνίᾳ θατέρῳ αδγ, διὰ τὸ
ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ· τὰ δύο ἄρα μικρὰ
τρίγωνα ΑρΓ, αδγ, δύο ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας ἔχοντα,

εἰσὶν ὅμοια (218)· ἐκὼν $ΑΓ : αγ :: Αρ : αδ$, τετέστιν αἱ δύο μέσαι πλευραὶ τῶν δύο τριγώνων $ΑΒΓ$, $αβγ$ ἀνάλογοι ἔχουσι τοῖς αὐτῶν ὑψέσιν $Αρ$, $αδ$.

326. Ἐπεὶ δὲ δύο πλευραὶ αἱ $ΑΒ$, $αβ$, ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς βάσεσι $ΒΓ$, $βγ$ (321), εἰσὶ δὲ ἔτι καὶ τοῖς ὑψέσιν $Αρ$, $αδ$ (324)· ἄρα καὶ αἱ βάσεις αὐταὶ ἀνάλογον εἰσὶ τοῖς ὑψέσιν (Α'ριθ. 11), εἴτ' ἐν $ΒΓ : βγ :: Αρ : αδ$.

327. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰνὰ δὲ ἐξακριβώσωμεν τὴν ἡδὴ ἐπενεχθεῖσαν συνέπειαν, καὶ τὰ αὐτὰ ἐν ὁμοίαις περιστάσει συνάγειν ἔχωμεν, εἰληφθῶ ὑπ' ὅψιν τὸ: δύο λόγοι τρίτῳ τινὶ ἴσοι καὶ ἀλλήλοισι εἰσὶν ἴσοι· οἱ μὲν γὰρ λόγοι, πηλίκα (Συμ. λογ. 183)· τὰ δὲ, ποσότητες ἀναμφηρῶς ὑπάρχει· ἀλλὰ ποσὰ δύο τρίτῳ τινὶ ἴσα καὶ ἀλλήλοισι εἰσὶν ἴσα (Α'ριθμ. 11), ἄρα δύο λόγοι τρίτῳ τινὶ ἴσοι καὶ ἀλλήλοισι εἰσὶν ἴσοι· ἀλλ' ὁ λόγος τῶν πλευρῶν $ΑΒ$, $αβ$ ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν βάσεων $ΒΓ$, $βγ$ · ἀνάλογοι γὰρ εἶναι ταύταις, ἡ δ' ἀναλογία λόγων ἐστὶν ἰσότης (Συμβ. λογ. 186)· ἐστὶ δὲ καὶ ὁ τῶν ὑψῶν $Αρ$, $αδ$ λόγος ἴσος τῷ τῶν πλευρῶν $ΑΒ$, $αβ$ διὰ τὴν ἀναλογίαν $ΑΒ : αβ :: Αρ : αδ$ (324)· ἄρα ὁ λόγος τῶν βάσεων $ΒΓ : βγ$ καὶ ὁ λόγος τῶν ὑψῶν $Αρ : αδ$, ἰσόμενοι τῷ αὐτῷ τρίτῳ λόγῳ $ΑΒ : αβ$, εἰσὶν ἴσοι ἀλλήλοισι· ἐκὼν ἐστὶ $ΒΓ : βγ : Αρ : αδ$.

328. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ὅταν εὐθεῖαι $ΑΒ$, $ΓΔ$ (σχ. 75) μεταξὺ παραλλήλων τῶν $κρ$, $σν$ τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν μέρη ἀνάλογον εἰσὶ.

ΔΕΙΞΙΣ. $I = τ$, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΔτ = ΒΓΙ$ (133). τὰ ἄρα τρίγωνα $ΑΔτ$, $ΒΓΙ$ ὅμοια εἰσὶν (218)· ἐκὼν $Ατ : Βτ :: τΔ : ΓΙ$ Ο. Ε. Δ.

329. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Οταν χορδαὶ $ΤΗ$, $Ζρ$ (χ. 76.) τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ μέρη τῆς ἐτέρας ἀντιπεπονθότα λόγον ἔχουσι πρὸς τὰ τῆς ἐτέρας.

ΔΕΙΞΙΣ. $χ = 0$, ὡς κατὰ κορυφὴν· ἡ δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία $ρΖΗ$, βεβηκυῖα ἐπὶ τῇ $ρΗ$ τόξῳ, τῷ ἡμίσει αὐτῇ μετρεῖται (176), τῷ αὐτῷ δὲ μετρεῖται καὶ ἡ $ΗΤρ$, ὡς βεβηκυῖα ἐπὶ τῇ αὐτῇ τόξῳ· ἄρα ἡ ὑπὸ $ρΖΗ = ΗΤρ$ ὁμοία ἄρα εἰσὶ τὰ τρίγωνα $Τρχ$, $ΖρΗ$ · ἄρα $Τρ : ρΖ :: ρρ : ρΗ$ (228)· Ο. Ε. Δ.

330. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Οταν δύο ἐξωτερικαὶ τέμνωσιν ἀφ' ἐνὸς σημείου πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν ἐμπέσωσιν, ὡς αἱ $Γω$, $Γο$ (χ. 77), τὰ ἐκτὸς αὐτῶν μέρη $Γη$, $Γτ$ ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς ὅλαις εὐθείαις, τετέσι $Γη : Γτ :: Γο : Γω$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῶν $ηρ$, $ωτ$, τὰ τρίγωνα $Γωτ$, $Γηο$ ὁμοία εἰσὶ· παρὰ γὰρ τὴν κοινὴν γωνίαν $Γ$, ἔστι $ω = ο$ ὡς ἐπὶ τῇ αὐτῇ τόξῳ $ητ$ βεβηκυῖαι (176)· ἔκων ἔστι $Γη : Γτ :: Γο : Γπ$, ἐνθα καταφανὲς ὡς τὰ μέρη τῶν δύο εὐθειῶν ἀντίστροφον τετάχεται ταῖς ὅλαις εὐθείαις. Ο. Ε. Δ.

331. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἡ ἀπτομένη $ΓΡ$ τῆς διατεμνύσης $Γω$ ὑδενὶ διαφέρει, ἥτις περὶ τὸ μένον σημεῖον $Γ$ περιαγομένη, καὶ πρὸς τὸ $Ρ$ κινημένη, ἐφικνεῖται αὐτῇ τῇ $Ρ$, τῇ ἐσωτερικῇ μέρους $ηρ$ μηδενὶ ἰσχυμένη· ἀλλ' ἐπὶ τῆς διατεμνύσης ἔστι $Γτ : Γη :: Γω : Γο$ (330) ἢ, $Γτ : Γη :: Γη + πη : Γο$, τῇ $πη = 0$ ὄντος ἐν τῇ ἀπτομένῃ, ἔσται $Γτ : Γη :: Γη : Γο$ · ἐπεὶ δὲ ἡ $Γη$ γίνεται $ΓΡ$, ἔστιν ἄρα $Γτ : ΓΡ :: ΓΡ : Γο$, τετέσιν ἡταν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῇ $Γ$ ἀχθῶσιν ἀπτομένη τε τῇ κύκλῳ ἢ $ΓΡ$, καὶ διατεμνύσα ἡ $Γα$ · ἡ ἀπτομένη εἰς μέσην ἀνά-

„λογος, τῆτε ἐκτὸς τῷ κύκλῳ, καὶ τῷ ἐντὸς, τμημάτων τῆς
„διατεμνέσης.“

332. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐῶ ἡ ἀποτομένη ΑΠ = ω
τμήματι ἐσωτερικῷ τῆς τεμνέσης ΑΝ (σχ. 78.)· ἔκῃν ἔ.
σαι ΑΟ : ΟΝ :: ΟΝ : ΑΝ· ἔσι μὲν γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ΑΠ
= ΟΝ, ἔσι δὲ (ἀνωτέρ.) ΑΟ : ΑΠ : ΑΠ : ΑΝ· ἄρα ΑΟ : ΟΝ
:: ΟΝ : ΑΝ, τῆτεσι „τὸ ἐξωτερικὸν τμήμα ΑΟ τῆς δια-
„τεμνέσης ἔσαι πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν ΟΝ ὡς τὸ ἐσωτερι-
„κὸν ΟΝ πρὸς ὅλην τὴν διατέμνουσαν.“

333. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ περι-
πτώσει ἡ ΟΒ παρὰ τὴν Π ἀχθῇ παράλληλος, ἔσαι ΑΒ :
ΒΠ :: ΒΠ : ΑΠ· διὰ μὲν γὰρ τὰς παραλλήλους Π, ΟΒ, ΑΙ
ΑΝ, ΑΠ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τέμνονται (313)· ἔσι δὲ ΑΟ
: ΟΝ :: ΟΝ : ΑΝ.

334. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀκρον καὶ μέσον λόγον
εὐθεῖαι τέμνεσθαι λέγονται, ὅταν τὸ ἔλαττον τμή-
μα πρὸς τὰ μείζον λόγον ἔχῃ, ὃν τὸ μείζον πρὸς τὴν ὅ-
λην· ὡς ἀνωτέρω ἡ διατέμνουσα ΑΝ τέτμηται ὑπὸ τῆς πε-
ριφερείας· καὶ γὰρ ΑΟ (ἐλάττον) : ΟΝ (μείζον) :: ΟΝ (μεί-
ζον) : ΑΝ (ὅλην) (332).

335. Γ'· ἔν ἐν εὐθείᾳ ἡ ΑΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τμηθῇ· α'. ἐσάσθω πρὸς ὀρθὰς τῷ πέρατι Π ἡ ΚΠ = $\frac{1}{2}$ ΑΠ·
β'. κέντρῳ μὲν τῷ Κ, ἀκτίνι δὲ τῇ ΚΠ, γεγράφθω κύ-
κλος ὁ ΠΣΥ· γ'. ἀπὸ τῷ Α ἤχθῳ διὰ τῷ κέντρῳ διατέ-
μνουσα ἡ ΑΚΝ· δ'. ἐπεζείχθῳ ἡ ΝΠ, καὶ ἐκ τῷ ο ἤχθῳ τῇ ΝΠ
παράλληλος ἡ ΟΒ, ἣτις τεμεῖ τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν ΑΠ ἄ-
κρον καὶ μέσον λόγον· εἴτ' ἐν ἔσαι ΑΒ : ΒΠ :: ΒΠ :
ΑΠ· ἐπεὶ γὰρ ἐκ κατασκευῆς ΑΠ = 2ΚΠ = ΟΝ, ἔσιν ἄρα
ΑΟ : ΟΝ :: ΟΝ : ΑΝ (332)· ἐντεῖθεν δὲ (333) ΑΒ :
ΒΠ : ΒΠ : ΑΠ.

336. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Τὰ τρίγωνα (α. 79.), ὧν πᾶσαι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσὶν, εἰσὶν ὅμοια.

α'. Ἐπιτεθείωθω ἡ αβ πλευρὰ τῷ ἐλάττωτος τριγώνῳ ἐπὶ τὴν ΑΕ τῷ μείζονος, τιθεμένου τῷ α ἐπὶ τῷ Α, καὶ γε-
γονέτω $αβ = ΑΒ$. ἔκῃν τὸ β συμπεσείτω τῷ Β. ἐκ δὲ
τῷ Β ἡχθῶ παράλληλος τῇ ΕΗ ἡ ΒΓ, γενήσονται ἔν
δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΗ. ἡ μὲν γὰρ Α γωνία
εἰσὶν ἑκατέρῳ κοινὴ, καὶ $Β = Ε$ (132).

β'. Ἐσὶν ἔν ΑΕ : ΑΗ :: ΑΒ : ΒΓ. ἀλλ' ἐξ ὑ-
ποθέσεως ΑΕ : ΑΗ :: αβ : αγ. ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: αβ :
αγ (327). ἔκῃν (Συμβ. λογ. 242.) καὶ ΑΒ : αβ ::
ΑΓ : αγ. ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἄρα καὶ
ΑΓ = αγ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γὰρ ἀναλογίᾳ δύο ὁρῶν ἴσων ὄν-
των, καὶ οἱ ἄλλοι δύο ἰσάλληλοι εἰσονται. ἢ γὰρ ἂν ἄλ-
λως ἐν ἀναλογίᾳ τέσσαρες ὁροὶ εἴησαν.

γ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, ΑΕΗ εἰσὶν ἑ-
τι καὶ ἡδε ἡ ἀναλογία. ΑΕ : ΕΗ :: ΑΒ : ΒΓ (321 β.)
ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἰσὶν ΑΕ : ΕΗ :: αβ : βγ. ἐν-
τεῦθεν ἄρα, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ΑΒ : ΒΓ :: αβ : βγ, ἡ
ΑΒ : αβ :: ΒΓ : βγ. ἐπεὶ δὲ ΑΒ = αβ, ἄρα καὶ
ΒΓ = βγ.

Ἐπεὶ ἔν ἐκ μὲν κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἐκ δὲ δεύ-
ξεως ΑΓ = αγ, καὶ ΒΓ = βγ. ἄρα τὸ τρίγωνον αβγ ἴ-
σον εἰς τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ (221) καὶ δὴ καὶ ὅμοιον (198).
ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ ὁμοίον εἰς τῷ ΑΕΗ. ἄρα καὶ τὸ αβγ
ὅμοιον εἶναι τῷ ΑΕΗ. ὅταν ἄρα δύο τρίγωνα πτλ.
Ο. Ε. Δ.

337. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. Ἐὰν τριγώνῳ δύο πλευραὶ
Α Ε, ΑΗ δυσὶ τριγώνῳ πλευραῖς αβ, αγ ἀνάλογον ᾤ-

σιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν περιεχόμεναι γωνίαι A , αἰ ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ. Κατεσκευάσθωσαν ἅπαντα ὡς καὶ ἐν τῷ ἡγυμένῳ θεωρήματι· καὶ δὴ εἶναι α . $AE : AH :: AB : AG$. β'. ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως $AE : AH :: \alpha\beta : \alpha\gamma$ ἄρα $AB : AG :: \alpha\beta : \alpha\gamma$ (327), ἢ $AB : \alpha\beta : AG : \alpha\gamma$ (Συμβ. λογ. 442.)· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς $AB = \alpha\beta$, ἄρα καὶ $AG = \alpha\gamma$. ἔκβεν τὸ $\alpha\beta\gamma$ τρίγωνον ἴσον εἰς τῷ ABG τριγώνῳ (321)· ἀλλὰ τὸ ABG τρίγωνον ὅμοιον εἰς τῷ AEN ἐκ κατασκευῆς· ἄρα καὶ τὸ $\alpha\beta\gamma$ ὅμοιον εἰς τῷ AEN . Ο. Ε. Δ.

338. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τριγώνῳ ἄρα δοθέντος τῷ AEN , καὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς $\alpha\beta$, ἐπ' αὐτῆς ἐξέσται τρίγωνον ὅμοιον κατασκευάσαι τῷ δοθέντι· συσθεΐσης γὰρ τῆς ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$ ἴσης τῇ EAH , καὶ πρὸς τὰς AE , AH , $\alpha\beta$ τετάρτης ἀναλόγῃ εὐρεθείσης (319) τῆς $\alpha\gamma$, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς $\beta\gamma$, γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν (337).

339. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Παντὸς κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ τετραπλεύρῳ τῷ $\kappa\beta\omicron\zeta$ (ὁ. 80.), τὸ ὑπὸ τῶν δύο διαγωνίων $\beta\zeta$, $\kappa\omicron$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἰς τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίαις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀπεναντίων πλευρῶν τῷ τετραπλεύρῳ ἅμα ληφθεῖσι· τετ' εἰς $\kappa\omicron \cdot \beta\zeta = \beta\kappa \cdot \zeta\omicron + \kappa\zeta \cdot \beta\omicron$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἄ. Ἡ' χθω ἡ $\beta\gamma$ εὐθεῖα· ὥς τε συνίστην κατὰ τὸ β γωνίαν τὴν ὑπὸ $\kappa\beta\gamma$ ἴσην τῇ ὑπὸ $\zeta\beta\omicron$ (85)· ἔκβεν ὅμοια εἰς τὰ $\kappa\beta\gamma$, $\beta\zeta\omicron$ τρίγωνα· ἐπεὶ παρὰ τὰς δύο γωνίας $\kappa\beta\gamma$, $\zeta\beta\omicron$, τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, εἰς καὶ ἡ ὑπὸ $\beta\kappa\gamma$, ἢ $\beta\kappa\omicron = \beta\zeta\omicron$ ὡς ἀμφοτέρων ἐπὶ τῷ αὐτῷ τόξῳ $\beta\omicron\omicron$ βεβηκνυῖαν (177)· ἀλλὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων

αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσὶν ἀνάλογοι· ἄρα $\gamma\kappa : \kappa\beta ::$
 $ZO : \beta Z$, ἐκὼν $\gamma\kappa \times Z\beta = \kappa\beta \times ZO$ (311).

β'. Τὰ τρίγωνα $\beta\kappa Z$, $\beta\gamma O$, εἰσὶν ὅμοια· ἐπεὶ γὰρ
 ἡ ὑπὸ $\kappa\beta Z = \Gamma\beta O$, (εἴγε κοινῆς ὕψους τῆς ὑπὸ $\gamma\beta Z$, ἡ
 ὑπὸ $\kappa\beta\gamma = Z\beta O$ ἐκ κατασκευῆς,) ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $\beta Z\kappa = \beta O\gamma$,
 ὡς ἐπὶ τῷ αὐτῷ $\beta\eta\kappa$ τόξε βεβηκυῖται· ὅμοια ἄρα τὰ τρι-
 γωνα $\beta\kappa Z$, $\beta\gamma O$ (218)· ἐνταῦθεν ἄρα $\gamma O : \kappa Z :: \beta O :$
 βZ · τοιγαρὺν $\gamma O \times \beta Z = \kappa Z \times \beta O$.

Εἰς ταῦτα ἔτι συλλογιόμεθα· τὸ $\kappa\gamma$ μέρος τῆς κO
 διαγωνίᾳ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν βZ διαγώνιον, ἰσθῆται
 τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐπὶ βάσεως τῆς $\kappa\beta$ δι' ὕψους τῆς ἀπεναντίον
 πλευρᾶς ZO συνισαμένῳ· τὸ δὲ γO κατάλοιπον μέρος
 τῆς κO διαγωνίᾳ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὴν βZ διαγώνιον,
 ἰσθῆται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐπὶ βάσεως τῆς πλευρᾶς κZ δι'
 ὕψους τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς βO συνισαμένῳ· ἀλλὰ ταύ-
 τόν ἐσιν, εἰ πολλαπλασιασθῇ τὸ $\kappa\gamma$ μέρος τῆς κO δια-
 γωνίᾳ ἐπὶ βZ , εἴτα τὸ γO κατάλοιπον μέρος ἐπὶ τὴν
 βZ , ὡς εἰ πολλαπλασιασθῇ ἅπαξ ὅλη ἡ ἐσωτερικὴ δια-
 γώνιος κO ἐπὶ τὴν βZ διαγώνιον· ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἀριθ-
 μητικῆς (142) τὸ αὐτὸ προκύπτει ἐκ τε $20 \times 7 =$
 140 καὶ ἐκ τῶν $20 \times 4 + 20 \times 3 = 140$ · ἐσιν ἄρα
 $\kappa O \times \beta Z = \kappa\beta \times ZO + \kappa Z \times \beta O$. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ᾠδογωνίας τριγώνου.

340. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ
ΒΟΓ (σχ. 81). ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν καθ-
έτος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐσι τῷ
τε ὅλῳ ἢ ἀλλήλοις.

ΔΕΙΞΙΣ. α. Τὸ βοΠ ὁμοίον ἐστὶ τῷ βοΓ· ἡ μὲν γὰρ β γωνία ἐστὶ κοινή, ἡ δὲ Π=ο· ἑκατέρα γὰρ ὀρθή· ἄρα ὅμοια εἰσὶ τὰ δύο τρίγωνα βοΓ, βοΠ (218).

β'. Ὡς αὐτως τὸ $\Pi\Gamma$ ὁμοίον ἐστὶ τῷ $\beta\omicron\Gamma$ · ἡ μὲν γὰρ γωνία Γ κοινὴ, ἡ δὲ $\Pi = \theta$.

γ'. Εὐτεῖθεν δηλονότι ὅτι καὶ τὸ ΓΟΠ ὁμοίον ἐστὶ τῷ
ΟΠΒ (Α'ριθμ. 11) Ο. Ε. Δ.

341. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις
 βΟΠ, οΠΓ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ (321) παρέχουσι τὴν
 ἀναλογίαν βΠ : Πο :: Πο : ΠΓ, τετέστιν ἢ Πρὸς καθέτος
 ἢ ἔστι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τῆς ὑποτείνουσας
 ἢ τμημάτων βΠ, ΠΓ τῶν ὑπ' αὐτῆς τεμνομένων.

342. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐκ μὲν τῆς τῶν τριγώνων
 Πβο, βοΓ ὁμοιότητος ἐστὶ βΠ : βο :: βο : βΓ· ἔκ δὲ τῆς τῶν
 οΓΠ, Γοβ, ΠΓ : οΓ :: οΓ : βΓ, τὲτ' ἔστιν ἡ ἐκατέρω
 ἡ τῶν ὑφ' ἐκατέραν τῶν τῆ ὀρθογωνίᾳ τριγώνων ὀξείων
 ἡ γωνιῶν ὑποτείνουσῶν πλευρῶν μέση ἐστὶ ἀνάλογος τῇ
 ἡ παρακειμένη αὐτῇ τμήματος τῆς βάσεως τεμνομένης ὑ-
 ἡ πὸ καθέτου ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένης, ἢ τῆς ὀ-
 ἡ λης βάσεως. 66

343. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Η' (χ. 82)
ἐκ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀγομένη κάθετος
μέση ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΖ, ΖΟ
τῆς διαμέτρου, εἰς ἃ αὐτὴν διατέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΒΠ, ΠΟ, ἡ
πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΒΠΟ, ὡς βεβηκυῖα ἐπὶ τῷ ΒΟ
ἡμικυκλίῳ, ἐστὶν ὀρθή (180). ἔτις ἐν τῷ ΒΠΟ τρίγωνον
ὀρθογώνιον ἐστὶ κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΖ ἡ ἐκ τῆς περιφερεί-
ας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα κάθετος, ἡ αὐτὴ ἐστὶ κάθε-
τος ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας Π τῷ ΒΠΟ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ
ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη· ἐστὶ δὲ αὕτη μέση ἀνάλογός με-
ταξὺ τῶν δύο τῆς βάσεως τμημάτων, ἃ αὕτη διατέμνει
(341). ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Θαυμασία αὕτη τῷ κύκλου ιδιότης,
ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς περιφερείας τὴν ἀγομένην τῇ δια-
μέτρῳ κάθετον αἰ μέσσην ἀνάλογον εἶναι τῶν δύο τῆς
διαμέτρου τμημάτων, εἰς ἃ αὐτὴν διατέμνει.

344. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'. Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτου τε-
τραγώνῳ (Συμβ. Λογ. 248).

345. Πιπτέτω ἐν πρῶτον ἡ κάθετος ἐπὶ τῷ κέντρῳ·
ἐκὼν ἡ ΠΖ κάθετος, καὶ τὸ ΒΖ μέρος τῆς διαμέτρου, καὶ
θάτερον ΖΟ, εἴθεται τρεῖς ἰσάλληλοι ἔσονται (41). ἐκὼν
 $\Pi Z^2 = \beta Z \cdot \text{ΖΟ}$. τὸ δὲ ΠZ^2 τετράγωνον, ἀναγραφὴν
ἐπὶ τῆς ἀκτίνος τῷ κύκλῳ, μείζον ἐστὶ παντὸς τετραγώνου,
ἀναγραφομένου ἀπὸ πάσης ἄλλης καθέτου ἀγομένης ἀπὸ
παντὸς τῆς περιφερείας σημείου ἐπὶ τὴν διάμετρον· ὥσπερ
καὶ τὸ γινόμενον, ἡ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων
τῆς διαμέτρου ἰσαλλήλων τεθέντων περιεχόμενον, ἐστὶ μεί-

ζον παντὸς ἄλλης ὀρθογωνίης ὑπὸ δύο ἀνίστων τμημάτων περιεχομένη (305).

346. Τεθείσθω νῦν τὸ σημεῖον Π, ἀφ' ἧ καθίεται ἡ ΠΖ, προσεχέσασιν τῷ β πέρατι τῆς βΟ διαμέτρου· ἔ. κεν ἡ ΠΖ λίαν ἔσται σμικρά· ἔ δὴ τὸ τετράγωνον ΠΖ· ἔσαι ἔ αὐτὸ λίαν μικρὸν· ἔ ἔτω μέντοι ἰσωθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἀναγραφόμενῳ ἐπὶ τῆς ΖΟ βάσεως, ἔ ὑψους τῆς βΖ· αἶσι γὰρ, ὡς ἐν γένει δέδεικται (343), ἡ κἀχέτος ἔσι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων.

347. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐντεῦθεν ἄρα δύο δοθεισῶν εὐθείων τῶν βΖ, ΖΟ, μέση αὐτῶν ἀνάλογος εὐρεθήσεται· εἰάν α. αἱ δύο κατὰ μίαν ἐκτεθῶσι τὴν βΖΟ· β'. διὰ τῆ μέσης αὐτῆς Κ ὡς κέντρου (106) ἔ διαστήματος τῆ ΚΟ κύκλος γραφῇ ὁ βΠΟ· γ'. ἐκ τῆ Ζ, κατ' ὃ ἦνυνται αἱ δύο εὐθεῖαι, ἐγερθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΠ, ἥτις ἐς τὴν περιφέρειαν προαχθεῖσα ἔσαι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος· ἔ γὰρ βΖ : ΠΖ :: ΠΖ : ΖΟ.

348. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἰ'να δὲ τρίτη ἀνάλογος εὐρεθῇ, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν βΖ, ΠΖ· α. ὑψύσω ἡ ΠΖ κἀχέτος τῷ πέρατι τῆς βΖ, ἔ ἐπεξέσυχθω ἡ βΠ· β'. ἡγέρθω ἐκ τῆ Π τέρματος ἀνευ κἀχέτος ἡ ΠΟ τῇ βΠ· ἡ δὲ ΖΟ προαχθεῖσα, μέχρις ἀν' συμβάλη τῇ ἀδιόριστῳ ΠΟ, ἔσαι ἡ τρίτη ζητούμενη ἀνάλογος· ὃ κατ' αὐτὸ καταφανές· εἰάν γὰρ διὰ τῆ ταύτης τῆς εὐθείας μέσης Κ, ὡς κέντρου, γραφῇ ὁ κύκλος ὁ βΠΟ, ἔσαι βΖ : ΠΖ :: ΠΖ : ΖΟ (347).

349. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν

ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνου, τῷ ἐστὶ $\beta\Gamma^2 = \alpha\Gamma^2 + \beta\sigma^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Συγκροτηθέντων τῶν τετραγώνων $\Gamma\beta\kappa\lambda$, Νο , ἢ $\sigma\text{Μ}$ · ἤχθω ἡ Πο κάθετος ἐπὶ τὴν $\beta\Gamma$ (χ. 83), ἢ δὴ ἔσαι ὅμοια τὰ τρία τρίγωνα $\beta\sigma\Gamma$, $\text{Πο}\Gamma$, $\beta\sigma\text{Π}$ · παραθέσει ἔν τῷ ὅλῳ τριγώνῳ $\beta\sigma\Gamma$ πρὸς τὸ $\text{Πο}\Gamma$ τριγώνον (321) ἔσαι $\beta\Gamma \text{ ἢ } \Gamma\kappa : \sigma\Gamma :: \sigma\Gamma : \text{Π}\Gamma$, ὅθεν $\kappa\Gamma \times \text{Π}\Gamma = \sigma\Gamma^2$ (311).

Παραθέσει δὲ πάλιν τῷ ὅλῳ τριγώνῳ $\beta\sigma\Gamma$ πρὸς τὸ $\text{Πο}\beta$, ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν, ἢ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν, πρόεισιν ἡ ἀναλογία· $\beta\Gamma \text{ ἢ } \beta\lambda : \beta\sigma :: \beta\sigma : \beta\text{Π}$ · ὅθεν $\beta\lambda \times \beta\text{Π} = \beta\sigma^2$ · ἄρα $\Gamma\kappa \times \text{Π}\Gamma + \beta\lambda \times \beta\text{Π} = \sigma\Gamma^2 + \beta\sigma^2$ · ἀλλὰ $\Gamma\kappa \times \text{Π}\Gamma + \beta\lambda \times \beta\text{Π} = \Gamma\beta^2$ · ἄρα· $\Gamma\beta^2 = \sigma\Gamma^2 + \beta\sigma^2$ Ο. Ε. Δ.

350. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοῖς πρωτοπείραις σημειωτέον τέσσαρα ἀρχικὰ θεωρήματα ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὧν τὸ μὲν δεύτερον διὰ τῆ πρώτης, τὸ δὲ τρίτον διὰ τῶν δύο προτέρων, τὸ δὲ τέταρτον διὰ τῆ τρίτης δείκνυνται, ἐφ' ὧν Θεμελίων δίκην πᾶσα γεωμετρικὴ γνῶσις ἴδρυται, τὰ δὲ λοιπὰ πάντα μονοῦ δι' αὐτῶν ἐμπεδῶνται· ἰδὲ δὴ ταῦτα.

α'. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία μετρεῖται τῷ ἡμίσει τῆ τόξε, ἐφ' ἧ βέβηκεν (176).

β'. Παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι εἰσὶν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς (209).

γ'. Δύο ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσὶν (321).

δ'. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχασῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν (349).

351. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δοθείσων ἄρα δύο πλευρῶν παντὸς ὀρθογωνίου, τῆς τρίτης ἢ δύναμις αἰεὶ εὐρεθήσεται, εἰν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ βΓ (χ. 81) γνωστῇ ἢ ὑποτείνουσά βΓ, καὶ ἡ πλευρὰ οΓ· ἐπεὶ ἐστὶ $\beta\Gamma^2 = \sigma\Gamma^2 + \beta\sigma^2$, ἔκυν $\beta\sigma^2 = \beta\Gamma^2 - \sigma\Gamma^2$. ἄρα $\beta\sigma = \sqrt{\beta\Gamma^2 - \sigma\Gamma^2}$. ἔστω ἐν $\beta\Gamma = 5$, καὶ $\Gamma\sigma = 4$ ἔσαι ἐν $\beta\sigma^2 = 25 - 16$. ἄρα $\beta\sigma = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$. εἰν δὲ γνωστὰ ὥσιν ἢ βΓ ὑποτείνουσα, καὶ ἡ βσ πλευρὰ, ἢ Γσ εὐρεθήσεται ἀφαιρουμένῃ τῷ ἀπὸ βσ τετραγώνῳ ἀπὸ τῷ ἀπὸ βΓ, καὶ ἐκ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Εἰν μέντοι γινώσκονται αἱ Γσ, βσ πλευραὶ, εὐρεθήσεται ἢ ὑποτείνουσα βΓ· ἔσαι γὰρ $\beta\Gamma = \sqrt{\Gamma\sigma^2 + \beta\sigma^2}$.

352. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Οἱ ὀρθογωνίῳ ἄρα καὶ ἰσοσκελῆς τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς σκέλεως.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίᾳ διπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῷ τετραγώνῳ.

353. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἰντεῦθεν δὲ, ὁπώσων ὁδοέντων τετραγώνων ἴσον ἅπασιν τετράγωνον ἀναγράφαι παιδεύομεθα· κείνωσαν γὰρ τετράγωνα τρία, ὧν πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ (χ. 84.), καὶ συνεχάνω γωνία ὀρθὴ ἢ ὑπὸ ΖΒΞ, ἧς τὰ σκέλη ἀπεράντως ἔσωσαν προεκτεινόμενα· ἐπὶ δὲ τῶν σκελῶν μετηνέχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ ΑΓ, ἔκυν ἔσαι $\Lambda\Gamma^2 = \Lambda\text{B}^2 + \text{B}\Gamma^2$. ἐξῆς δὲ μετηνέχθω καὶ ἡ ΑΓ ἀπὸ τῆς Β ἐπὶ τὸ Φ, καὶ ἡ τρίτη τῶν πλευρῶν ΓΔ ἐκ τῆς Β ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ ΕΦ· τοιγαρὺν ἔσαι $\Phi\text{E}^2 = \Phi\text{B}^2 + \text{E}\text{B}^2$ (349). ἀλλὰ $\Phi\text{B}^2 = (\Lambda\Gamma^2) = \Lambda\text{B}^2 + \text{B}\Gamma^2$. ἄρα $\Phi\text{E}^2 = \Lambda\text{B}^2 + \text{B}\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ πυκνοτάτη χρῆσις τῷ ἀποδείχθει.

τὸς θεωρήματος παρέχεται αὐτὸ ἐν τῶν τεσσάρων ἐξαιρέτων τῆς Γεωμετρίας θεωρημάτων· φασὶ δὲ Πυθαγόραν ταῦτ' εὐρόντα ἐκατόμβην τῷ Ἀπόλλωνι δῶσαι, χάριτας αὐτῷ ἀφοσιόμενον ὑπὲρ τῆς εὐρήματος, καὶ δὴ καὶ τὸ θεωρήμα ἐκ τούτου ἐκατόμβη καλεῖσθαι ἐξενίκησεν, ὅπερ ἡ ΜΖ' τῆς Α'. βιβ. τῶν τῆς στοιχειωτῆς καταριθμεῖται.

354. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ τῆς τετραγώνου πλευρὰ (σχ. 34) ἀσύμμετρος ἐστὶν αὐτῇ τῇ διαγωνίῳ· εὐθεῖα γὰρ ἀσύμμετρος ἑτέρᾳ καλεῖται, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν δι' ἑδενὸς ἀριθμοῦ, ἢτε ὁλοκληρῆς, ἢτε κλασματικῆς, ἐκδηλωταί (Συμβ. Λογ. 365), ὅταν, σαφέστερον εἰπεῖν, ἢτε διπλῇ, ἢτε τριπλῇ κτ., ἢ δ' ὑποδιπλῇ, ἢ ὑποτριπλῇ κτ. ἑτέρας ἢ εὐθείας· ἀλλὰ μὴν ἀμήχανον δι' ἀριθμοῦ ἐκδηλωσαι τὸν τῆς ἀπὸ τῆς διαγωνίης τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· καὶ γὰρ ἡ μὲν διαγωνίς ἢ ὑποτείνουσα ἐστὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῆς ὀρθογωνίης καὶ ἰσοσκελεῖς τριγώνου ΑΒΓ· τὸ δ' ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὡς ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις, ἑκατέρω ἐστὶ διπλάσιον· ἀδύνατον δὲ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ἀφ' οὗ ὁ τετράγωνος διπλάσιός ἐστιν ἑτέρῳ τετραγώνῳ ἀφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ (Συμβ. Λογ. 369)· ἀδύνατον ἄρα δι' ἀριθμοῦ σημαίνει τὸν μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὀρθογωνίης καὶ ἰσοσκελεῖς τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν λόγον, ὃ ἐστὶ τὸν μεταξὺ τῆς τῆς τετραγώνου διαγωνίης καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς· ταύτην δὲ τὴν ἀσύμμετρίαν δείκνυσιν Εὐκλείδης ἐν προτάσ. ἐσχάτῃ τῆς Ι'. βιβλίου.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειῶδες δὲ, ὡς δύο εὐθειῶν, καθὰ δὴ καὶ ἀριθμῶν δύο, ἀσύμμετρων ὄντων ἀλλήλοις, τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωγα σύμμετρα εἶναι δύνανται· καίτοι

γὰρ τῆς διαγωνίᾳ, ὡς εἶδομεν, ἀσυμμέτρου ὕψους τῇ πλευρᾷ, τὸ μέντοι ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον σύμμετρόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετραγώνῳ, ὡς διπλὸν ἐκεῖνο τό τε δεικνύμενον (352).

355. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐάν δὲ ἀπὸ τετραγώνου, ἢ πλευρᾷ (χ. 85) ἢ AB , ἀφελεῖν δὲ τετράγωνον, ἢ πλευρᾷ ἢ $ΓΔ$ · ζητῆται δὲ ἡ πλευρὰ τετραγώνου τῷ τῷ καταλοίπῳ ἰσχυμένῳ, γεγραφθῶ ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον, καὶ διὰ τῆς διαβήτη ἀπὸ τῆς A προσηρμόσθω τῇ περιφέρειᾳ χορδὴ ἢ $AE = ΓΔ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ EB · ἔκων εἶναι $EB^2 = AB^2 - ΓΔ^2$ · εἴτ' ἐν EB εἶναι ἡ ζητούμενη πλευρά.

356. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐάν εὐθεῖα ἢ AB (χ. 86) τμηθῇ, εἰς ἴσα κατὰ τὸ K , καὶ ἀνίστα κατὰ τὸ $Λ$, τὸ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον $ΑΛ \times ΛΒ$ ἴσον εἶναι τῇ ὑπεροχῇ, ἢ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετράγωνον AK^2 τῷ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει τὸ μείζον τμήμα τῷ ἐλάττω, εἴτ' ἐν εἶναι $AK \times ΛΒ = AK^2 - ΚΛ^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀνελθῶν ἐκ τῆς $Λ$ κάθετος ἢ $ΛΓ$ τελευτῶσα εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ ἐκ τῆς $Γ$ ἤχθω ἢ $ΓΚ$ ἀκτίς· τοιγαρὲν εἶναι $ΑΛ \times ΛΒ = ΛΓ^2$ (343), καὶ $ΚΚ^2 = ΚΓ^2 - ΛΓ^2$ (351)· ἐπεὶ δὲ $AK^2 = ΚΓ^2$ ὡς ἀπ' ἀκτίνων ἴσων τετράγωνα· ἄρα $AK^2 = ΚΑ^2 - ΛΓ^2$ · ἀντὶ δὲ $ΛΓ^2$ ἀντικατασταθέντος τῷ ἴσῳ αὐτῷ $ΑΛ \times ΛΒ$, εἶναι $AK^2 = ΛΑ^2 - ΑΛ \times ΛΒ$ · μεταθέσεων δὲ γενομένων, $ΑΛ \times ΛΒ = ΚΑ^2 - AK^2$. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἀναγωγῆς τῶν πολυγώνων.

357. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Βάσεως ἢ ὕψους δοθέντων, ὀρθογώνιον συστήται ἴσον ἑτέρῳ ὀρθογώνιῳ, ὃ ἢ βάσιν ἢ τὸ ὕψος διαφέρει τῷ δοθέντος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐῶ φέρε ΓΔ βάσις τῷ ΑΒΓΔ (σχ. 87) ὀρθογώνιῳ, καὶ ΓΑ τὸ ὕψος· δεῖ δὴ συστήσαι ὀρθογώνιον, ἴσον μὲν τῷ ΑΒΓΔ, βάσιν δὲ ἔχον τὴν ΑΙ ἐλάττωτα τῆς ΓΔ· εὐρεθήτω ἔν τετάρτῃ ἀνάλογος (319) τῶν τριῶν ΗΙ, ΓΔ, ΑΓ ἢ ΖΗ· καὶ δὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας ΗΙ : ΓΔ :: ΑΓ : ΖΗ προκίψει $ΗΙ \times ΖΗ = ΓΔ \times ΑΓ$. Ο. Ε. Π.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δ' αἱ εὐθείαι ΗΙ, ΓΔ, ΑΓ ἐν ἀριθμοῖς ὥσι δεδομέναι, γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν ΗΙ : ΓΔ :: ΑΓ : χ, καὶ εὐρεθείσης τῆς τῷ χ δυνάμεως, τεθείσθω βάσις μὲν ἡ ΗΙ, ὕψος δὲ ἡ ΗΖ, μήκος ἔχουσα τὸ ὑπὸ τῷ εὐρεθέντος ἀριθμῷ ἐκδηλούμενον· τὸ δ' ἐκ τούτων συμπληρωθὲν ὀρθογώνιον (242) ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι ὀρθογώνιῳ ΑΒΓΔ.

358. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἰν' ὀρθογώνιον τὸ ΑΒ ΓΔ, ἀμεταποίητον μένον τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς ἕτερον μεταβληθῇ, ἔχον τὸ ἐπιταχθὲν ὕψος ΖΗ τῷ ΖΗΙΟ ὀρθογώνιῳ· α'. προήχθω τὸ ΓΑ ὕψος, καὶ γενέσθω $ΓΧ = ΖΗ$ · β'. ζητηθήτω εἰς βάσιν τετάρτῃ ἀνάλογος, τῶν ὕψων ΓΧ, ΓΑ, καὶ τῆς ΓΔ βάσεως ἡ Γτ· ἐκ δὲ δὴ τῆς ἀναλογίας ΓΧ : ΓΑ :: ΓΔ : Γτ ἔσται $ΓΧ \times Γτ$ (ἐπιφάνεια τῷ νέῳ ὀρθογώνιῳ) $= ΓΑ \times ΓΔ$ (ἐπιφάνεια τῷ πρώτῳ ὀρθογώνιῳ).

359. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἰνα δύο ὀρθογώνια ΕΘΖΗ, Τ
Τόμ. Β.

ΑΓΒΔ εἰς ἓν μόνον ἀχθῶσιν· α'. τὸ δεύτερον, ἄτρεπτον μένον κατ' ἐπιφάνειαν, τραπήτω εἰς ἕτερον, ἔχον ὕψος τὸ τῷ πρώτῳ· β'. συνήφθω κατ' εὐθείαν τῇ ΘΗ ἢ ΗΙ, ἢ εὐρεθείσα, ὡς προδεδείκται, τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΖΗ, ΑΓ ὕψων ἐπὶ τῆς ΓΔ βάσεως· γ'. συμπεπληρώσω τὸ ΗΖΙΟ παραλληλόγραμμον, ἐξαι ἔτω ΘΕΙΟ = ΘΕΗΖ + ΑΓΒΔ, ὃ καὶ εἰς αὐτὸ πρόδηλον.

360. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰυτὰ δὲ νοεῖν χρή καὶ πᾶσι τῶν πλαγιογωνίων παραλληλογράμμων, ἐπὶ παντός δὲ τριγώνου· ἢ ἄρα, περὶ ἧς εἴρηται, ἀναγωγὴ αἰείποτε ἐκτελεσθῆναι δύναται ζητούμενης τετάρτης ἀναλόγου πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας· ὅθεν ἀναγαγεῖν δυνατόν δύο παραλληλόγραμμα ἐν γένει, ἢ δύο τρίγωνα, εἰς ἓν μόνον ἴσην ἔχον τοῖς δυνὸν ἐπιφάνειαν.

361. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Οἷσαδήποτε ἄρα πολύγωνα, ὁμοειδῆ, ἢ ἑτεροειδῆ, κανονικὰ, ἢ ἀκανόνιστα, ἀναχθῆσονται εἰς ἓν μόνον τρίγωνον ἴσον κατ' ἐπιφάνειαν τῷ ἀθροίσματι πασῶν τῶν ἐν τοῖς δοθείσι πολυγώνοις ἐπιφανειῶν· ἕκαστον γὰρ τῶν πολυγώνων εἰς τρίγωνον ἀναγεται (294)· ἀνήχθωσαν ἐν πάντα τὰ δοθέντα πολύγωνα εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα· ἐξέσται ἓν ἐν τρίγωνον συστήσασθαι ἴσον ἅπασιν τοῖς τριγώνοις, ἅμα ληφθεῖσιν, ἔτω· α'. γενέσθωσαν ἅπαντα τῷ αὐτῷ ὕψει, εἴτ' ἐν ΑΔ (σχ. 80), ἣτις ἐστὶ κάθετος τῇ ἀπεράντῳ ΔΖ· β'. ἐν ἑκάστῳ τριγώνῳ ζητηθῆτω τετάρτη ἀνάλογος πρὸς τὸ πρότερον αὐτῷ ὕψει, τὸ ἡδὴ ὑποτεθὲν, ἐπὶ τὴν προτέραν βάσιν, ἣτις ἐσται ἢ βᾶσις, ἢ τῷ δοθέντι ὕψει ΑΔ προσήκευα· τέλος δὲ πᾶσαι αἱ εὐρεθείσαι ἔτω βάσεις· ΔΠ, ΠΕ, ΕΖ, κ.τ.λ. συνήφθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ἀπεράντῳ ΔΖ, ἐπὶ ἡχθωσαν αἱ εὐθείαι ΑΠ, ΑΕ κ.τ.λ. τοιγαρὲν, κατὰ

τὴν δὲ τὴν κατασκευὴν τὸ ὀλικὸν τρίγωνον $\Delta\Lambda\Xi$ ἴσον εἶναι τῷ ἀθροίσματι τῶν τριῶν φέρε πολυγώνων, τῶν εἰς ἀναγωγὴν δοθέντων, ἃ καλέσομεν A, B, Γ . ἢ γὰρ $\Delta\Lambda\Xi = A$, ἢ $\Pi\Lambda\Xi = B$, ἢ $\Xi\Lambda\Xi = \Gamma$. πάντα δὲ τὰ τρίγωνα $\delta\mu\epsilon\acute{\iota} = \Delta\Lambda\Xi$.

362. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Τετράγωνον συστήσασθαι ἴσον παντὶ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, εἴτ' ἐν παντὶ σχήματι, ὃ μὴ εἴη καμπύλιον.

ΛΤΣΙΣ. α'. Τ' πὲρ τριγώνου ζητηθῆτω μέση ἀνάλογος (χ. 73) τῇ ὕψει $\alpha\beta$, ἢ τῇ ἡμίσει τῆς βάσεως $\beta\gamma$ (347). τὸ ἐν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ δοθέντι τριγώνῳ. εἰς μὲν γὰρ τὸ $\alpha\beta\gamma$ τρίγωνον $= \frac{\alpha\beta\gamma}{2}$

(285). κληθείσης δὲ χ τῆς εὐρεθείσης μέσης ἀνάλογον, ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha\delta : \chi :: \chi : \frac{\beta\gamma}{2}$, εἶναι $\chi^2 = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}$.

(Συμβ. Λογ. 248).

β'. Καὶ πολυγώνῳ δὲ παντὶ κανονικῷ τετράγωνον ἴσον συστήσεται, εὐρεθείσης μέσης ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρου τῇ πολυγώνῳ ἢ τῆς ὀρθίας αὐτῇ ἀκτίνος, ἢ τετραγώνῳ ἐπ' αὐτῆς ἀναγραφέντος. ἅπαν γὰρ κανονικὸν πολύγωνον ἰσῆσαι τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου ἢ τῆς ὀρθίας ἀκτίνος (297).

γ'. Ἐπεὶ δὲ ἅπαν ἀκανόνιστον πολύγωνον εἰς ἴσον τρίγωνον ἀναχθῆναι δύναται (361), γενήσεται τετράγωνον ἴσον παντὶ ἀκανόνιστῳ πολυγώνῳ, ἀναγαγῶσι πρῶτον τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνον, ἢ αὐτῷ ἴσον κατασκευάσαι τετράγωνον, καὶ ὃν ἀρίτως δέδεικται τρόπον.

δ'. Ὅσαδὴποτε σχήματα κανονικά, ἢ ἀκανόνιστα, εἰς

ἐν μόνον τρίγωνον ἀναχθῆναι ἔχουσι (361)· ἐπεὶ δὲ παν-
τὶ τριγώνῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι δυνάμεθα· ἴδε
δὴ, ὅπως τετράγωνον ἴσον κατασκευάσομεν παντὶ εὐθυ-
γυρίμῳ ῥήματι, εἴτε κανονικῷ, εἴτε ἀκανονίστῳ. Ο. Ε. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου.

363. Τὸ πρόβλημα τοῦ τὸν κύκλον τετραγωνίσαι.
ἐν τούτῳ κεῖται, κατασκευάσαι ἀμέλει τετράγωνον ἴσον
κύκλῳ, ἢ ἡ διάμετρος, ἢ ἡ περιφέρεια, δέδοται· παντὶ
δὲ κανονικῷ πολυγώνῳ τετράγωνον ἴσον κατασκευάσαι
δυνάμεθα, μέσσην ἀνάλογον εὐρίσκοντες τῆς τε ἡμιπεριμέ-
τρου καὶ τῆς ὀρθίας ἀκτίνος· ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κύκλος ἐστὶ κανο-
νικὸν πολύγωνον (31), ἴσον αὐτῷ τετράγωνον συστήσο-
μεν, εὐρόντες μέσσην ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ,
εἴτ' ἐν τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ τῆς αὐτοῦ ὀρθίας ἀκτίνος,
εἴτ' ἐν τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἐπ' αὐτῆς τῆς μέσης ἀναλό-
γῳ τετράγωνον ἀναγράφαντες· εἰ τοίνυν ἐγινώσκειτο ὁ
κύκλος παντὸς τῆς ἀκτίνος, καὶ δὴ καὶ τῆς διαμέτρου, πρὸς τὴν
περιφέρειαν, ἀληθοῦς λόγος, διδομένης τῆς διαμέτρου εὐρί-
σκειτ' ἂν ἡ περιφέρεια, πολλαπλασιαζομένης τῆς διαμέ-
τρου ἐπὶ τόνδε τὸν λόγον· πρὸς ἐν τὴν ἔτως εὐρεθεῖσαν
ἂν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὴν ἡμιδιάμετρον μέσσην ἀνάλογον
εὐρίσκοντες, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγράφοντες, ἀ-
κριβῶς ἂν ἐθηρώμεθα τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν.

Ἀλλὰ γὰρ τίς ἐστὶν ἔτος ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν
περιφέρειαν λόγος; ταῦτ' ἐστὶν, ὃ πολλοὶ καὶ μεγάλοι διελθόντες

ματικοί, πολλὰ μογήσαντες, ἀνήνυτα μέντοι ἐς δεῦρο πε-
 πονηκότες ὤφθησαν, τὸν ἀκριβῆ λόγον μὴ δυνηθέντες δια-
 ρίσσασθαι· ἐντεῦθεν ἄρα κύκλῳ δεδομένῳ, ἢ μόνῃ ἢ περι-
 φέρειᾳ, ἢ μόνῃ ἢ διαμέτρῳ, ἔγνωσαι, ὅδε πῶ εὐρεῖν
 δυνάμεθα ἀκριβῶς τὴν τῷ ἐπιφάνειαν, ἣν ἀτεχνῶς
 ἔδει ἰσῆσθαι ὀρθογωνίῳ, ἢ βάσις μὲν ἢ ἡμιπεριφέρεια,
 ἢ ὦς δὲ ἢ ἀκτίς (298)· ἐντεῦθεν ἄρα, μήπω εὐρεθε-
 σὼν τῶν δύο τέτων γραμμῶν, τῆς ἡμιπεριφερείας φημι ὅτι
 τῆς ἀκτίνος, ἀμύχανόν ἐστι πρὸς αὐτὰς μέσσην εὐρεῖν ἀνά-
 λογον, ἀφ' ἧς τὸ τετράγωνον ἰσῶτ' ἂν ἀκριβῶς τῷ κύκλῳ.

Τυτὶ ἄρα νοητέον, ὅταν τὸ πρόβλημα τὸ περὶ τῷ
 τετραγωνισμῷ τῷ κύκλῳ μηδέπω ἐπιτελεῖσθαι λέγεται,
 ἢ ὡς ὁ τῷ κύκλῳ τετραγωνισμὸς μηδέπω εὐρηται.

Δυνάμεθα μέντοι τῷ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέ-
 ρειαν ἀληθεῖ προσπελάσαι λόγῳ, εἴτε μηχανικῶς, εἴτε γεω-
 μετρικῶς· καὶ κείνως μὲν,

364. τεθείδῳ εὐθείᾳ φυσικῇ ἐκ νήματος δυνατῷ ἢ
 AB (χ. 89), ἐν ἐπιπέδῳ ὁμαλωτάτῳ, κύκλος δὲ ὁ BKA,
 ἐξ ὀρειχάλκου, ἢ ἐτέρας ὕλης, κατασκευασμένος, ἐχέτω τὸ
 ἑαυτῷ ἐπίπεδον κάθετον τῷ, ἐφ' οὗ ἢ ἡ AB, ἐπιπέδῳ, καὶ
 σημειωθήτω τὸ B ἐπὶ τῷ κύκλῳ σημεῖον, καὶ ἄλλο σημεῖον
 B ἐπὶ τῆς εὐθείας BA, καὶ τιθέτω τὸ τῷ κύκλῳ B ἐπὶ τὸ
 τῆς εὐθείας B, καὶ ἐκκυλιθήτω ὁ κύκλος ἐπὶ τῆς BA εὐ-
 θείας· καὶ δὴ πάντα μὲν τὰ τῆς περιφερείας σημεία ἐγγρί-
 ψουσιν ἄλλο μετ' ἄλλο πᾶσι τῆς σημείοις τῆς εὐθείας BA,
 τὸ δὲ K κέντρον, καταγράψαν τὴν εὐθείαν Kδ, εἴσεται κα-
 τὰ τὸ δ· τὸ δὲ B σημεῖον τῷ κύκλῳ, ἀφ' οὗ ἐκκυλιέσθαι ἤρ-
 ξατο συμπεσεῖται τῷ τῆς AB εὐθείας σημείῳ β· σαφές ὅτι
 ὡς ἡ Bβ εὐθεῖα ἴση ἔσται ἀκριβῶς τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ τῷ
 κύκλῳ· τοιγαρὺν τῷ διαστήτῃ λαμβανομένης τῆς BK ἀκτί-

νος, καὶ μεταφερομένης ἐπὶ τῆς ΒΒ εὐθείας, εὐρεθήσεται ΒΒ = 6BK, ἢ 3 Bt σὺν τῷ καταλοίπῳ ΒΟ, ὁ παραβαλλόμενον πρὸς τὴν ΒΚτ διάμετρον, εὐρεθήσεται ἑλαττον μὲν ἢ ὀκτημόριον, μείζον δὲ ἢ ἑπτημόριον αὐτῆς, σχεδὸν μέντοι ἑπτημόριον.

365. Μηχανικῶς ἄρα εὕρηται ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος κείμενος μεταξύ τῶν δύο τάτων ὁρίων $3 + \frac{1}{8}$ καὶ $3 + \frac{1}{7}$. εὐρίσκομεν ἀλλ' ὅτι $3 + \frac{1}{7}$, καίτοι μείζον τῆ ἀληθῆς, ἐγγίζει μέντοι μᾶλλον τῷ ἀληθεῖ λόγῳ ἢ $3 + \frac{1}{8}$, τῆ διαπτώματος ἀλογεμένῃ ὡς πάνυ μικρῇ· εἰς κληθῇ, 1 μὲν ἡ διάμετρος, ἡ δὲ περιφέρεια $3 + \frac{1}{7}$, ὁ λόγος ἐκείνης πρὸς ταύτην εἶναι ὡς 7 πρὸς 22· εἰς γὰρ $1 : 3\frac{1}{7} :: 7 : 22$ (Συμ. Λογ. 240)· ἄρα ἐν διαπτώματι μικρῇ δεῖν ἀνεπαιθήτω ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος κατὰ τὴν ἡμετέραν μηχανικὴν πράξιν εἶναι 7 : 22.

366. Αἰψώμεθα δὲ ἤδη τῇ τρόπῃ, καθ' ἣν Μαθηματικῶν παῖδες γεωμετρικῶς προσεγγίξαι τῷδε τῷ λόγῳ.

Δέδεικται ἤδη (255) ὡς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια μείζων ἐστὶ τῇ τριπλῇ τῆς διαμέτρου.

Ἐπινοήσωμεν ὅν νῦν τὴν ΘΔ πλευρὰν (χ. 90) τῇ κανονικῇ ἑξαγώνῳ δίχα τετμημένην ὑπὸ τῆς ΖΓ ἀκτίνος, καὶ ἐπεξευγμένην δωδεκαγώνῳ πλευρὰν τὴν ΓΔ· εὐρεθήσεται ὅτι ἡ τῆς πλευρᾶς τῆς δε δύνამις ὅπως.

Ἦ πατεθείδω ἡ ΖΓ ἀκτίς = 10000000· εἰς δὲ ἐν τῷ ΖΘ ὀρθογωνίῳ $\Theta Z^2 = Z\Theta^2 + \Theta\Theta^2$, ὅθεν $Z\Theta^2 = \Theta Z^2 - \Theta\Theta^2$ · ἀλλὰ $\Theta Z = Z\Gamma = 10000000$, ἄρα $\Theta\Theta = 5000000$ (251)· ἀλλὰ $\Theta Z^2 = 100000000000000$, καὶ $\Theta\Theta^2 = 25000000000000$, ἄρα $Z\Theta^2 = 100000000000000 - 25000000000000 = 75000000000000$ ·

ἔκῃν $Zo = \sqrt{75000000000000} = 8664254$. ἀλλὰ
 $\Gamma o = Z\Gamma - Zo$. ἄρα $\Gamma o = 10000000 - 8664254$
 $= 1339746$.

Τριγώνῳ ἔν ὀρθογωνίῳ τῷ $o\Delta\Gamma$ γνωσταί εἰσι δύο τῶν
 πλευρῶν, εἰτ' ἔν $o\Gamma = 1339746$, καὶ $\Delta o = Oo =$
 5000000 . ἐπεὶ δὲ $\Gamma\Delta^2 = o\Gamma^2 + o\Delta^2$, ἄρα $\Gamma\Delta =$

$\sqrt{1339746^2 + 5000000^2}$, ἡ ζητούμενη τῷ δωδεκα-
 γώνῳ πλευρὰ, ἣν ὁ δηλῶν ἀριθμὸς κεκλήδω π· ἔκῃν 12π
 ἐμφαίνει ὅλην τὴν τῷ δωδεκαγώνῳ περίμετρον· καὶ ἐπεὶ ὑποτί-
 θεται ἡ διάμετρος $= 20000000$ · ὅτῃς τῷ δωδεκαγώνῳ περι-
 μέτρῳ πρὸς τὴν διάμετρον τῷ περιγεγραμμένῳ κύκλῳ λόγος ἔστι
 $\frac{12\pi}{20000000}$ · ἡχθῶ δὲ ἀκτὺς ἄλλη κάθετος τῇ $\Gamma\Delta$ πλευρᾷ.

τριγώνῳ ἔν ὀρθογωνίῳ τῷ $\Gamma\chi Z$ εἰσι δύο γνωσταί πλευραί,
 εἰτ' ἔν ἡ ἀκτὺς $\Gamma Z = 10000000$, καὶ ἡ $\Gamma\chi = \frac{\pi}{2}$. ἐπεὶ

δὲ $Z\chi^2 = Z\Gamma^2 - \Gamma\chi^2$, ἄρα ἡ τρίτη ζητούμενη πλευρὰ
 $Z\chi$ ἔσται $= \sqrt{10000000^2 - \frac{\pi^2}{4}}$, αὕτη δὲ ἐὰν ἀφαι-

ρῇ ἀπὸ τῆς ἀκτὺς, εἰτ' ἔν 10000000, κατάλοιπον ἔσται
 ἡ τῆς $\eta\chi$ δύναμις· ἐπινοήσωμεν ἔτι χορδὴν ὑποτείνουσαν τὸ
 μικρὸν τόξον $\Gamma\eta$. α'. ἔν αὕτῃ ἔσται πλευρὰ πολυγώνῳ ἐκ
 24 πλευρῶν συνισαμένῳ· β'. συσταθήσεται τρίγωνον κατὰ τὸ

χ ὀρθογώνιον τὸ $\Gamma\eta\chi$, ἐν ᾧ γινώσκεται ἥτε $\Gamma\chi = \frac{\pi}{2}$, καὶ
 ἡ ἀρτίως εὐρεθείσα $\chi\eta$ · τοιγαρὲν ἐπεὶ $\Gamma\eta^2 = \Gamma\chi^2 + \eta\chi^2$,

ἔσται $\Gamma\eta = \sqrt{\Gamma\chi^2 + \eta\chi^2}$, πλευρὰ τῷ ἐκ 48 πλευρῶν συγ-
 κροτεμένῳ πολυγώνῳ, ἧς τινος κληθείσης κ, 24κ σημανεῖ

τὴν ὅλην περίμετρον τῆς εἰρημένης πολυγώνου, καὶ $\frac{24\pi}{200000000}$.

δηλώσει τὸν τῆς τέτης περιμέτρου πρὸς τὴν τῆς κύκλου, ὥς ἐγγράπται, διάμετρον λόγον.

Αἰεὶ ἄρα διὰ καθέτων διχοτομημένης τῆς πρὸς τῆς εὐρημένης ἐν ἀριθμοῖς πλευρᾶς, πάντα λόγον περιμέτρου παντὸς πολυγώνου ἀρτιοπλευροῦ πρὸς τὴν τῆς κύκλου, ὥς ἐγγράπται, διάμετρον γνωσόμεθα.

367. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ δὲ ὅσω πολυγωνιότερον τὸ κανονικὸν χῆμα, τοσέτω μᾶλλον ἐγγίζει τῇ συγκεχύθαι τῇ περιφερείᾳ τῆς κύκλου, ὥς ἐγγράπται, ἀφικέσθαι δυνάμεθα ἐπὶ πολύγωνον ὃ ἡ περίμετρος σχεδὸν ἐστὶν ἰση τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, καὶ ἀντικαταστάσης τῆς περιφερείας ἀντὶ τῆς ἀριθμοῦ τῆς τὴν περίμετρον ἐκδηλῶντος, καὶ διαιρέσεως διὰ 2000000, τὸ πηλίκον ἐκληφθήσεται ἰσα καὶ λόγος, ὃν ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν.

368. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον (χ. 61) κύκλῳ, ὃ ἀκτὶς ἡ ΚΟ, περιγεγραμμένον δύναται ἐκληφθῆναι ὡς ἐγγεγραμμένον κύκλῳ, ὃ ἀκτὶς ἡ ΠΚ, ἔξουσιν ἐκ τέτης διὰ τῆς προτεθείσης μεθόδου γινῶναι τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον λόγον· καὶ ἐπεὶ ἡ περιφέρεια μείζων μὲν ἐστὶ τῆς τῆς ἐγγεγραμμένης, ἐλάττω δὲ τῆς τῆς περιγεγραμμένης χήματος περιμέτρου (256), ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον λόγος, καὶ τῆς αὐτῆς πρὸς τὸ περιγεγραμμένον, ἔσονται δύο ὅρια, ἐν οἷς εἶναι ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀληθὲς λόγος.

369. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ὡς περ δὲ ῥίζαν ἐξάγοντες ἀτελὲς τετραγώνου ἀρίμῳ, τὴν μὲν ἀληθῆ εὐρεῖν ὃ δυνάμεθα, αἰεὶ μέντοι μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐγγὺς χωρῶμεν τῆς ἀ-

ληθῆς ἐπαναλήψει τῶν πράξεων· ὅτω καὶ τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν, καὶ τὸν ὄντα εὑρεῖν μὴ ἔχωμεν, ἐπαναλήψει μέντοι τῆς ἐν τῇ προαποδείξει μεθόδου πράξεως, τὸν ὡς ἐγγυτάτω τῷ ἀληθῆς θηρώμεθα, καὶ δὴ διὰ προσεγγίσεως καὶ τὸν τετραγωνισμόν τῷ κύκλῳ ἐπιτηδεύομεν· ὥσπερ δὲ τὴν ἀληθῆ ρίζαν εὑρεῖν ἐκ τετραγώνου ἀτελὲς ἀμήχανον δέδεικται, ὅτω καὶ τὸν ἀληθῆ λόγον ἐνταῦθα καὶ τὸν τετραγωνισμόν εἴτα τὸν τῷ κύκλῳ διὰ τῆς μεθόδου τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων τῶν ἀδυνάτων ἐστὶν εὑρεῖν.

370. Ἰδὲ δὴ, ὅτε ἀφίκοντο, ὡς τὰ πολλὰ, δι' ἧς προεξεθέμεθα μεθόδου, ἐν τῷ τῷ κύκλῳ τετραγωνισμόν.

Ἀρχιμήδης μὲν κύκλῳ περιγράφας κανονικὸν πολύγωνον ἐξ 96 πλευρῶν, εὗρατο τὴν περίμετρον αὐτοῦ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν κύκλου διάμετρον ὡς 22 : 7· ὅθεν συνήγαγεν, ὡς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον ἐλαττονα μὲν λόγον ἔχει ἢ 22 : 7· μείζονα δὲ ἢ 21 $\frac{1}{7}$: 7.

371. Ἀδριανὸς δὲ Μέτιος μετὰ ταῦτα ἀπέδειξεν, ὡς ἔστιν ὁ λόγος ἕτος μικρῷ ἐλάσσων ἢ 21 $\frac{1}{7}$: 7, μείζων δὲ 21 $\frac{1}{7}$: 7, πρὸς δ' ἀποφυγὴν τῶν κλασμάτων ἀντεισήγαγεν ὁ αὐτὸς 355 : 113· ἔστι γὰρ ὡς ἀληθῶς 355 : 113 :: 21 $\frac{1}{7}$: 7 (Συμ. Λογ. 236).

Οἱ τοίνυν λόγοι 7 : 22 καὶ 113 : 355 ἀμφοτέρω μὲν μείζους εἰσὶ τῷ ἀληθῆ· ὁ μὲντοι 113 : 355 τῷ ἀληθεῖ προτεχέστερος ἢ ὁ 7 : 22, ἔστι τε ἀκριβέστερος πάντων τῶν εἰς χρῆσιν παραλαμβανομένων, ὧν ὅ,τε ἡγέμενος καὶ ἐπόμενος πλείους τριῶν χαρακτῆρας ἐπεριέχουσι (Συμ. Λογ. 184).

372. Δέδεικται δὲ, ὡς χρησαμένοις τῷ ἀρχιμήδει λόγῳ 7 : 22, προκίπτει κυκλικὴ περιφέρεια τῆς

ἀληθὲς ὑπερτέρα μέρει, μείζονι μὲν ἢ 2486^ο τῆς περιφερείας, ἐλάττωι δὲ ἢ 2485^ο.

373. Δυνάμευα ἄρα ἐν τοῖς μικροῖς κύκλοις πάνυ ἀδεῶς χρῆσθαι τῷ ἀρχιμηδεῖω λόγῳ 7 : 22.

374. Ἀλλὰ προκριτέος ἀναμφιγνήσως ὁ 113 : 355 ἐπὶ τῶν μεγάλων κύκλων, ὡς ἐν τῷ τῆς ἀστρονομίας λογισμῷ.

Χρῶνται δὲ ὡσαύτως ἐ τῷ λόγῳ 106 : 338^ο ἡ δὲ ὑπερχὴ τῆς ἐκ τέττε ἀνακυπτέσης περιφερείας ὑπὲρ τὴν ἀληθῆ, μείζων μὲν ἐστὶν ἢ 37750^ο, ἐλάττωι δὲ ἢ 37749^ο τῆς εὐρεθείσης περιφερείας.

375. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διαμέτρου δοθείσης, εὐρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὴν αὐτῆς περιφέρειαν, ἢ περιφερείας δοθείσης, εὐρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὴν διάμετρον.

ΛΤΣΙΣ. Γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν, ἐν ἣ δὺ μὲν πρότεροι ὅροι ἔξωσαν ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος, ὃ ἂν δοξῇ χρῆσασθαι· τρίτος δὲ, ὁ τὴν διάμετρον ἢ τὴν περιφέρειαν ἐκδηλῶν ἀριθμός· ἐ πρῶτος μὲν τιθένθω ἡ διάμετρος, εἰάν περιφέρειαν ζητῇται· ἡ περιφέρεια δὲ, εἰάν διάμετρος.

Ἐστω ἔν ἡ διάμετρος ποδῶν 100· ἐ εἰλήφθω εἰς χρῆσιν ὁ 7 : 22 λόγος· ἔκέν ἔσι 7 : 22 :: 100 : χ = 314 $\frac{2}{7}$ ποσί.

376. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῆς γῆς ἐχύσης περίμετρον λειγῶν 9000, πόση ἔσαι ἡ κατ' αὐτὴν διάμετρος;

ΛΤΣΙΣ. Εἰλήφθω εἰς χρῆσιν ὁ λόγος ὁ κατὰ Μέτιον· ἐ δὴ ἔσαι 555 : 113 :: 9000 : χ = 2864 $\frac{1}{2}$ λεύγαις.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰσὶν οἱ τῶν Μαθηματικῶν τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἐκτιθέασιν διὰ τῶν ὁ.

ρων 1 : 3, 141592, κτλ. ὅπερ ἦκιστα ξένον· ἡ γὰρ τιθεμένης τῆς διαμέτρου = 1, ὅσοις δήποτε βεβλόμεθα χρήσθαι ἔξεσι μηδενικοῖς, μᾶλλον ἢ μᾶλλον προσπελάζοντας τῷ ἀληθεῖ λόγῳ ἐν ἀριθμοῖς δεκαδικοῖς ἐπ' ἀπειρον· ἀλλὰ γὰρ ὁμολογητέον, ὡς ὁ ἔτις ἐκτεθειμένος λόγος, ἡ δὲ μὲν ἐστὶν ἐν τῇ θεωρίᾳ, δυσχερέστατος δὲ τῇ χρήσει· ἡ δὲ εἰς ἐστὶν, ὅς αὐτῷ πράττων νυνὶ κέχρηται.

377. Τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἢ διὰ τῆ λογισμῶ τῶν ὁλοκλήρων θηρῶνται Γεωμετρῶν παῖδες, καθὰ ἢ ἡμῖν ἐκείσε γενομένοις τῆς πράξεως ἀπόπειρα ληφθήσεται. Ἰστέον μέντοι ὡς οἱ νεώτεροι Μαθηματικοὶ τὸν ἀπόλυτον τετραγωνισμὸν τῷ κύκλῳ ἡγεμένοι ἀπλῆς περιεργείας ζήτημα, ἢ δαπανᾶν ἐθέλοντες τὸν πολυτίμον χρόνον ἐπὶ τὰ ξυμφορώτερα, ἐπαύσαντο διακενῆς ζητῶντες τὴν τέτι λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ γεωμετρικῆς κλίμακος, καὶ ἀναλογικῆς διαβήτης.

378. Γεωμετρικὴ κλίμαξ ἐστὶν εὐθετα ἡ ΑΤ (χ. 91) διηρημένη εἰς ὅσαδήποτε ἰσάλληλα τμήματα, εἴτ' ἐν ΑΖ = ΖΤ = ΤΣ· ὑποβόμεθα νῦν ἐν τῶν αὐτῆς τμημάτων τὸ ΑΖ διηρημένον εἰς δέκα ἰσάλληλα μέρη, ἢ Α1 = 12, = 23, 34, κτλ. ἔξεσαι ἐν δὲ ἐκάστῳ τῶνδε τῶν μερῶν, ὃ ἂν βεβλόμεθα, ἐκδηλώσασθαι μέτρον· ἔσω γὰρ ΑΖ = 10 ὀργμαῖς, ἔκων ΑΤ ἔσαι = 30 ὀργμαῖς· κείῳ ἐτι ΑΓ = 6Α, εἴτ' ἐν 6 ὀργμαῖς· εἰν ἐν ἀχθῇ ἡ Γ1 εὐ-

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡ. ΚΛΙΜΑΚ.

ἔστω ἅπαντα τὰ τρίγωνα 110, 12κ, 13χ, 14η, κτλ. ὅμοια ἔσονται τῷ τε 1ΓΜ ἢ ἀλλήλοις (318). ἐντεῦθεν ἄρα πανταίαι προκύψουσιν ἀναλογίαι, ὡς 4η : ΓΜ :: 1η : 1Μ· ἀλλὰ 1η = $\frac{1}{4}$ 1Μ, ἄρα ἢ 4η = $\frac{1}{4}$ ΓΜ, εἴτ' ἐν $\frac{1}{4}$ ὀργυῖας, ἐπεὶ ΓΜ = Α1, ἢ δὴ 4η = 4 ποσί.

Ὅμοιῳ συλλογισμῷ δῦλον ἔσαι ὡς 10 = 1 ποδί, ἢ 2κ = 2 ποσί, ἢ ἔτιως ἐξῆς.

379. Εἰάν ἐν ἐκδηλῶσαι βεβλῶμεθα ὀκτωκαίδεκα ὀργυῖας ἢ τρεῖς πόδας, ληψόμεθα τὴν ΖΤ εὐθεῖαν, εἴτ' ἐν ὀργυῖαις 10 σὺν Ζα εἴτ' ἐν ὀργυῖαις 8· τέλος δὲ διὰ τῆ διαβήτου μετὰξομεν τὴν μικρὰν εὐθεῖαν 3χ πρὸς ἀριστερὰν τῆς Ζα.

Μεγίστην χρῆσιν παρέχεται ἡ γεωμετρικὴ κλίμαξ· α'. ὅταν ζητῆται ἐπὶ χάρτε κατασκευάσαι τρίγωνον ὅμοιον μεγάλῳ τριγώνῳ κατὰ γῆς γεγραμμένῳ, ὡς ὀφείμεθα ἴσμεν. β'. ἐπὶ τῇ τῶν γεωγραφικῶν πινάκων σχεδιάσει· αὕτη γὰρ ἡ κλίμαξ, ἥς τὰ ἰσαμνηλὰ μέρη μέλλου, ἢ ἤττον, μεγάλα, ὡς ἂν ὁ Γεωγράφος παραστῇται ταῦτα ἐκτάσεως ἔχοντα βέλοιο, παρέχεται αὐτῷ τὸν κανόνα, ἢ τὸν ὅρον τῆς παραθέσεως· γ'. ἐν γένει ἡνίκα ἐπὶ χάρτε ἐκδηλῶσαι βεβλόμεθα πρᾶγμα, ἢ ἂν εἴησαν τὰ μέρη ἐτέρῳ ἀνάλογα.

Ῥᾶσα δὲ κατανοεῖται, ὡς τῆς κλίμακος ἕκαστον μέρος ἐκδηλῶν δύναται, ὃ ἂν βεβλόμεθα συνεχὲς ποσόν· ἕκαστον γὰρ τῶν ἰσαμνηλῶν μερῶν ἐκδηλῶσαι δύναται, ἢτοι ὀργυῖαν, ἢ λεύγην, ἢ δέκα ὀργυῖας, ἢ τοσαύτας λεύγας κτλ., τηρημένης αἰεὶ τῆς ἀναλογίας μεταξὺ τῶν οὗ τῶν μερῶν· ἔσω γὰρ ἐκδηλῶσαι 250 ὀργυῖας· ὑποθετέον ἐν ΤΤ = 100, ἢ ΤΖ = 100, εἰς δέγε δῆλωσιν τῶν 50 ὀργυῶν ληπτέον τὴν Ζδ = $\frac{1}{2}$ ΑΖ.

380. Ο' δὲ ἀναλογικὸς διαβήτης σύγκειται ἐκ δυοῖν βραχιόνων τῶν ΑΒ, ΑΓ, ὠρισμένοντι μῆκος ἔχόντων, καὶ κινημένων περὶ τὸ σημεῖον Α (χ. 92)· πλὴν δὲ τῷ μῆκει τῶν βραχιόνων, ἵνα γράφειν ἔχωμεν παντοίας εὐθείας, περὶ ὧν ἡμεῖς ἐνταῦθα βραχέα ἐρῶμεν, ὁ ἀναλογικὸς διαβήτης ὑδὲν ἄλλο ἐστίν, εἰ μὴ αἱ κατὰ τὸ Α ἀλλήλας τέμνεσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, καὶ κατὰ τὴν τῷ διαβήτη ἀνοιγὴν ποιῆσαι ἀπάσας τὰς δυνατὰς γωνίας· εἴ ἂν ᾖ ὑποτεθῇ τὸ διάστημα, ἢ τὸ ἀνοιγμα ΒΑΓ, κεκλεισμένον ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν ἀνὰ δύο ἀγομένων, ἀπειρα ὅμοια τρίγωνα συσταθήσονται τὰ ΑΒΒ, ΑΒΓ, κτ. ὧν ἐπομένως αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσι· δυνατόν ἄρα διὰ τῷ ἀναλογικῷ διαβήτη εὐρεῖν εὐθείας ἀνέλογον ἔχουσας πρὸς ἄλλας.

Τ' πάρχουσι δὲ ἐν τῷδε τῷ διαβήτη, α'. αἱ εὐθεῖαι, αἵ μέρη ἰσάμνηλα καλεῖται, καὶ αἱ ἀντὶ τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος κέχρηται, ἐξευμαρίζοντες τὴν σύστασιν διαφορῶν ὁμοίων τριγώνων, καὶ διαφορῶν ἀναλογιῶν· β'. αἱ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εὐθεῖαι, δι' ὧν κύκλῳ, καὶ ἡ διάμετρος δέδοται, ἐγγράψαι δυνάμεθα παντοῖα εἶδη πολυγώνων κ. τ. λ.

381. Ἐπεὶ δὲ ἐν ταῖς φράσασιν τὰ περὶ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως τῶνδε τῶν προβλημάτων ἀπεδώκαμεν, ἡκιστα δεῖν ἡγέμεθα ἐκπονεῖν παριζῶντας, καὶ ὅπως μηχανικῶς διὰ τῷ ἀναλογικῷ διαβήτη ἐπιλύεσθαι δύνανται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ὁμοίων σχημάτων.

382. Σχήματα ὅμοια λέγονται τὰ τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας ἔχοντα, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, εἴτ' ἢν τὰς, αἱ ὑποτείνουσι γωνίας ἴσας, ἀνάλογον.

383. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πάντες οἱ κύκλοι ἀναγκαίως εἰσὶν ὅμοια σχήματα· ἐπεὶ δὴ α'. πᾶσαι αἱ γωνίαι, ας περιέχουσι δύο προσεχῆ χοιρεῖα περιφερείας κύκλου, εἰσὶν ἴσαι ταῖς περιεχομέναις ὑπὸ δύο προσεχῶν χοιρείων περιφερείας παντὸς ἄλλου κύκλου· ἐκάστη γὰρ τούτων ἐπὶ παντὸς κύκλου ἔστιν $= 180^\circ - \frac{180^\circ}{\infty}$. β'. αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, εἴτ' ἢν τὰ χοιρεῖα πάντων τῶν κύκλων εἰσὶν ἀνάλογα (32).

384. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἵνα δύο σχήματα ὦσιν ὁμοία, δεῖ ἔχειν ἐκάτερον πλευρὰς ἰσαριθμους ταῖς ὁπότερ· ἐπεὶ γὰρ τῶν ἐντὸς τῆς περιμέτρου γωνιῶν τὸ ἄθροισμα αἰεὶ αὐξεται δυσὶν ὁρθαῖς (266) τῷ ἀριθμῷ τῶν τῷ πολυγώνου πλευρῶν μονάδι αὐξομένῃ, ἐκάστη ἄρα γωνία μείζων ἔστιν ἐν πολυγώνῳ πλείους ἔχοντι πλευρὰς, ἢ ἐν τῷ ἐλάττω· ἄρα δύο πολύγωνα ἢ δύνανται ἔχειν ἴσας τὰς ἀντιστοίχους γωνίας, καὶ ἐπομένως ὑπάρχει ὅμοια, εἰ μὴ ἔχωσιν ἰσαριθμους πλευρὰς.

385. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Οὐκ ἔστιν ἵνα δύο σχήματα ὦσιν ὅμοια, τριῶν τετῶν ἐξ ἀνάγκης δεῖ, α'. ἰσαριθμους ἔχειν πλευρὰς· β'. τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ἀνάλογον εἶναι· γ'. τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας εἶναι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ πρῶτον τούτων τῶν τρίτων ἐξέχεται

ὡς ἤδη εἶδομεν (384)· ἐκέτι μέντοι καὶ τῷ πρώτῳ τὸ τρίτον· ἔ γάρ, καίτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν δύο ἐξ ἰσαριθμῶν πλευρῶν συνισαμένων πολυγώνων τὸ αὐτὸ ὑπάρχει· ἐκάσῃ μέντοι γωνίᾳ τῷ ἑτέρῳ δύναται εἶναι ἐκάσῃς θατέρῃ ἀπείρως μείζων, ἢ ἀπείρως ἐλάττων (245)· ἐδὲ τὸ δεύτερον δὲ τῷ πρώτῳ ἐξήρηται· εἰσὶ γὰρ ἀριθμὸν ὑπερβαίνοντα σχήματα ἐξ ἰσαριθμῶν μὲν πλευρῶν, ἢ μὴν ἀναλόγων συνισάμενα· ὡσαύτως ἢ τῶν πλευρῶν ἀναλογία ἔχ' ἔπεται ἐκ τῆς τῶν ἀντιστοιχῶν γωνιῶν ἰσότητος, πλὴν τῷ τριγώνῳ, (245), ἐδὲ τ' ἀναπαλιν. Τετραγώνῳ μὲν γὰρ ἔ ὀρθογωνίᾳ ἐπιμήκης (σχ. 54, 55), ἴσαι μὲν αἱ ἀντιστοιχοὶ γωνίαι, ἤκιστα μέντοι ἀνάλογον ἔχουσιν αἱ πλευραὶ, ὡς παντὶ δῆλον· τετραγώνῳ δὲ ἔ ῥόμβῳ ἀνάλογον μὲν εἰσιν αἱ πλευραὶ· ἔ γὰρ ἐκείνυτε ἔ τέττε ἰσάλληλοι ὑπάρχουσι· αἱ μέντοι γωνίαι ἐκείνυ ἤκιστα ταῖς τέττε ἰσούνται.

386. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίῳ λόγῳ εἰς τῶν κατ' αὐτὰ βάσεων καὶ ὑψῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἰσὶ τὰ ἡμιπαράγοιμενα ὑπὸ τῶν βάσεων, ἔ τῶν ὑψῶν (285)· ταῦτα δὲ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν βάσεων ἔ τῶν ὑψῶν (Συμβολ. Λογ. 291)· ἄρα τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὑπάρχει· ἀλλὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ βάσεις ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ὑψέσι (326)· τῷ λόγῳ ἄρα τῶν βάσεων ἴσος ὄντος τῷ τῶν ὑψῶν, ὁ ἐκ τῶν βάσεων ἔ τῶν ὑψῶν σύνθετος λόγος τὸ γινόμενον ἔσαι ὑπὸ δύο ἴσων λόγων, εἴτ' ἐν λόγος ἐνὸς τέτων διπλασίῳ (Συμβ. Λογ. 290)· τὰ ἄρα ὅμοια

τρίγωνα ἐν λόγῳ εἰς διπλασίονι τῶν τε βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν. Ο. Ε. Δ.

387. Ἐΐσωσαν ἐν ὑποδείγματι (χ. 71) ΑΖ, ατ ὑψη τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΖΤ, ατν, καὶ ΖΤ, τν βάσεις· εἰάν ᾖ ΑΖ = 10, εἶσαι καὶ ΖΤ = 6. Ἐσω ἔν ΑΖ = 10· ἐκὼν εἶσαι ατ = 5· Ἐσω δὲ καὶ ΖΤ = 6· τοιγαρὺν εἶσαι τν = 3· ὁ μὲν ἔν τῶν ὑψῶν λόγος εἶσαι $\frac{1}{2}$, ὁ δὲ τῶν βάσεων $\frac{2}{3}$ · πρόδηλον δὲ ὅτι $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} = 2$ · τὸ ἔν ὑπὸ τῶν τῶν λόγων γινόμενον $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ εἶσαι λόγος ἑκατέρου τῶν διπλασίων· τὰ τοίνυν ὅμοια τρίγωνα ΑΖΤ, ατν, ἴσα ὄντα τοῖς ἡμιγινόμενοις 10 × 6, καὶ 5 × 3 ὑπὸ τῶν ὑψῶν καὶ τῶν βάσεων, ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσονται τῶν τε βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν.

388. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ δὲ δὶω τετράγωνα διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν ῥιζῶν, ἢ, ὁ ταῦτόν, ὁ διπλασίων λόγος τῶν ῥιζῶν εἰσιν ὁ αὐτὸς τῷ τῶν τετραγώνων λόγῳ (Συμβ. Λογ. 308), δὶω ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα εἰσιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὑψῶν.

Ἐπὶ γὰρ τῷ προτεθέντῳ ὑποδείγματι ἢ τῷ ΑΖΤ ἐπιφάνεια εἶσαι $\frac{ΑΖ \times ΖΤ}{2}$, ἢ $\frac{10 \times 6}{2} = 30$ (285) ἢ δὲ

τῷ ατν εἶσαι $\frac{ατ \times τν}{2}$, ἢ $\frac{5 \times 3}{2} = 7\frac{1}{2}$ · ἀλλὰ 30 : 7 $\frac{1}{2}$

ὡς τὸ ἀπὸ 10 τετράγωνον 100 πρὸς τὸ ἀπὸ 5 τετράγωνον 25, ὡς δῆλον, καὶ γὰρ 30 : 7 $\frac{1}{2}$:: 100 : 25 (Συμβ. Λογ. 240)· ἄρα κ.τ.λ.

Ἐπὶ τῷ αὐτῷ δὲ ὑποδείγματι εἶσαι 30 : 7 $\frac{1}{2}$ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων 6, 3 τετράγωνα 36, 9· καὶ γὰρ 30 : 7 $\frac{1}{2}$:: 36 : 9.

389. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δύω ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα εἰσι καὶ ὡς τὰ ἀφ' ὧντινων ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· αἱ μὲν γὰρ βάσεις ἀνάλογοι εἰσι τοῖς ὕψεσι· τὰ δὲ ὕψη καὶ αἱ βάσεις ἀνάλογοι δυσὶν αἰστισιν ὁμολογοῖς πλευραῖς· ἔκῃν τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα ἀνάλογά εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν ὕψων· τάτε ἀπὸ τῶν ὕψων καὶ τῶν βάσεων, τοῖς ἀπὸ δύο ὁποιων ὁμολόγων πλευρῶν· ἐπεὶ τρίνουν τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα εἰσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων, ἢ τῶν ὕψων, τετράγωνα, ἔσονται τὰ αὐτὰ καὶ ὡς τὰ ἀπὸ δύο ὁποιων ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα.

390. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω ὁμοίων πολυγώνων αἱ περιμέτροι εἰσιν, ὡς δύο αὐτῶν ὁμόλογοι πλευραὶ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσαι γὰρ αἱ αὐτῶν ὁμόλογοι πλευραὶ (93) ἀνάλογον ἔχουσιν· ἔκῃν εἰσιν $AZ:Z\Delta::\rho\chi:\chi\delta$ · ἄρα (Συμβ. Λογ. 244) $AZ+Z\Delta:Z\Delta::\rho\chi+\chi\delta:\chi\delta$, καὶ δι' ἴσου $AZ+Z\Delta:\rho\chi+\chi\delta::Z\Delta:\chi\delta$ · εἴτ' ἔν δύο πλευραὶ πρὸς δύο πλευρὰς λόγον ἔχουσιν, ὃν μία πρὸς μίαν· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τρεῖς πρὸς τρεῖς, ὡς μία πρὸς μίαν· καὶ ἐν γένει, πᾶσαι αἱ τῇ ἑτέρῃ πρὸς τὰς θατέρου πλευρὰς, εἴτ' ἔν ὅλῃ ἡ θατέρου περίμετρος πρὸς ὅλην τὴν θατέρου, ὡς μία πλευρὰ πρὸς μίαν τὴν αὐτῇ ἀντίστοιχον ἐν θατέρῳ πολυγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

391. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' δὲ τῇδε τῇ θεωρήματος μεταφυσικός λόγος εἰσιν, ὅτι πασῶν τῶν ἐν τοῖς ὁμοίοις πολυγώνοις πλευρῶν, ἀνάλογον ἔχουσιν ἐκάστης ἐκίτης, δύο ἀντίστοιχοι πλευραὶ ὅμοια ὑπάρχουσι μέρη, ἑκατέρα τῇ αὐτῇ ὅλῃ, εἴτ' ἔν τῇ περιμέτρῳ, ἧς ἐστὶ μέρος, ἐπανήκασα· ἔαν, φέρε, ἡ AZ πεμπτημόριον ἢ τῆς $AZ\Delta O\Pi$, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ πλευρὰ ἔσεται καὶ αὐτῇ πεμπτημόριον τῆς $\rho\chi\delta\kappa\pi$

περίμετροι· ἀλλὰ τὰ ὅμοια μέρη δυοῖν ἔλυν πρὸς ἀλλήλας εἰσιν, ὡς τὰ ὅλα (Συμβ. λογ. 234)· ὅνῳ ἄρα ὁποιαῖαν ἀντιστοιχοὶ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας εἰσιν, ὡς αἱ περίμετροι, εἴτ' ἔν $AZ : ρχ :: AZΔΟΠ : ρχδκπ$, καὶ τὸναντίον· $AZΔΟΠ : ρχδκπ :: AZ : ρχ$.

392. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δύο κανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων (χ. 94) αἱ περίμετροί εἰσιν, ὡς αἱ πλάγιοι ἀκτίνες HO , $ηο$ · τὰ γὰρ τρίγωνα $ΠΗΟ$, $πηο$ εἰσιν ὅμοια, ὅτι $Π=Η=π=η$, κ.τ.λ. (382)· ὅθεν $ΠΗ : πη :: HO : ηο$.

Ἐκ τούτου ἄρα εἰσιν αἱ αὐταὶ περίμετροι καὶ ὡς αἱ ὀρθαὶ ἀκτίνες· εἰσὶ μὲν γὰρ ὡς $ΠΗ : πη$, καὶ δὲ καὶ ὡς αἱ βάσεις $ΠΗ$, $πη$ τῶν τριγώνων $ΠΗΟ$, $πηο$ · ἀλλὰ $ΠΗ : πη :: ZO : κο$ (324), αἰτίνες εἰσιν αἱ ὀρθαὶ τῶν πολυγώνων ἀκτίνες, ἄρα αἱ περίμετροί εἰσι καὶ ὡς αἱ ὀρθαὶ ἀκτίνες.

393. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Καὶ αἱ τῶν κύκλων, κανονικῶν ὄντων καὶ ὁμοίων σχημάτων (383), περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτίνες, ἢ ὡς αἱ διαμέτροι· καὶ τὰ ὅμοια τόξα, εἴτ' ἔν τὰ συγκείμενα ἐξ ἰσαριθμῶν μοιρῶν, εἰσιν ὡς αἱ ἀκτίνες, ἢ αἱ διαμέτροι.

394. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ ὅμοια πολύγωνα, ὡς $ΑΠΟΔΖ$, $ρπκδχ$ (χ. 93), δύνανται διαιρεθῆναι εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια ἑκάστον ἑκάσῳ ἀντιστοίχῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ γωνία $Π = π$ · αἱ δὲ ταύτη τῇ γωνίᾳ προσκείμεναι πλευραὶ $ΠΑ$, $ΠΟ$, $πρ$, $πκ$ εἰσιν ἀνάλογοι (382)· ἄρα τὰ τρίγωνα $ΑΠΟ$, $ρπκ$ εἰσιν ὅμοια (337).

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα $ΑΖΔ$, $ρχδ$ ὅμοιά εἰσι.

Τέλος δὲ τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda\Delta\Theta$, $\rho\delta\kappa$ καὶ αὐτὰ εἰ-
 σιν ὅμοια· ἡ γὰρ γωνία ὑπὸ $\Lambda\Theta\Delta = \Pi\Theta\Delta = \Lambda\Theta\Pi$,
 ἡ δὲ $\rho\kappa\delta = \pi\kappa\delta = \rho\kappa\pi$ · ἀλλ' $\Lambda\Theta\Pi = \rho\kappa\pi$ διὰ τὰ ὁ-
 μοια τρίγωνα $\Lambda\Theta\Pi$, $\rho\kappa\pi$ · ἄρα καὶ $\Lambda\Theta\Delta = \rho\kappa\delta$ (Α' ριθ.
 14)· ἀποδειχθήσεται ὡσαύτως, ὅτι καὶ $\Lambda\Delta\Theta = \rho\delta\kappa$, διὰ
 τὰ ὅμοια τρίγωνα $\Lambda\Delta\Theta$, $\rho\chi\delta$, καὶ διὰ τὰς ἴσας γωνίας
 $\Delta\Lambda\Theta$, $\chi\delta\kappa$ (382)· ἄρα καὶ τὰ $\Lambda\Delta\Theta$, $\rho\delta\kappa$ τρίγωνα εἰ-
 σιν ὅμοια.

Τὰ δύο ἄρα ὅμοια πολύγωνα $\Lambda\Pi\Theta\Delta\chi$, $\rho\pi\kappa\delta\chi$
 διήρηνται εἰς τρία τρίγωνα ὅμοια ἕκαστον ἐκάσῳ ἀντιστοι-
 χῶντι. Ο. Ε. Δ.

395. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν ἔν πλευρῶς δοθείσης
 τῆς $\pi\kappa$ ἐπ' αὐτῆς πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώ-
 νῳ $\Lambda\chi\Delta\Theta\Pi$ κατασκευάζειν παιδευόμεθα· τῷ γὰρ δοθέν-
 τος πολυγώνῳ εἰς τρίγωνα, ὅσ' ἀνέγκωροίη, διαιρεθέντο,
 ἐπὶ τῆς $\pi\kappa$ συσταθήτω τρίγωνον ὅμοιον τῷ $\Lambda\Pi\Theta$ (339)·
 ἐξῆς δ' ἐπὶ τῆς $\rho\kappa$ συνεστιάθω ὅμοιον τῷ $\Lambda\Delta\Theta$, καὶ ἐπὶ τῆς
 $\rho\delta$ τέλος τὸ $\rho\chi\delta$ ὅμοιον τῷ $\Lambda\chi\Delta$ · ἐπεὶ ἔν ἕκαστον τῶν ἐν
 τῷ $\rho\chi\delta\kappa$ τριγώνων ὁμοίων ἐσιν ἐκάσῳ τῶν ἐν τῷ $\Lambda\Pi\Theta\Delta\chi$
 ἀντιστοίχων τριγώνων, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα καὶ τὸ ὅλον $\rho\chi$
 $\delta\kappa$ ὁμοίον ἐστὶ τῷ $\Lambda\Pi\Theta\Delta\chi$.

396. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Τὰ ὅμοια
 πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ
 ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς ὁμόλογον, εἴτ' ἔν εἰσὶν ὡς τὰ ἀπο
 δύο ὠντινωνῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα.

ΔΕΙΞΙΣ. Δύο τρίγωνα φέρε τὰ $\Lambda\chi\Delta$, $\rho\chi\delta$, ὅμοια
 ἀλλήλοις, εἰσὶ προδήλως ὅμοια μέρη δύο ὁμοίων πο-
 λυγώνων $\Lambda\Pi\Theta\Delta\chi$, $\rho\pi\kappa\delta\chi$ · ὡς, εἰάν τὸ $\Lambda\chi\Delta$ τρίγω-
 νον τεταρτημόριον, φέρε εἶπείν, ἢ τῷ $\Lambda\Pi\Theta\Delta\chi$ πολυγώνῳ,
 καὶ τὸ $\rho\chi\delta$ τεταρτημόριον εἶναι τῷ $\rho\pi\kappa\delta\chi$ · ἀλλὰ $\Lambda\chi\Delta$:

$\rho\chi\delta :: AZ^1 : \rho\chi^2$ (389)· ἐπεὶ ἄρα τὰ δύο ὅλα ΑΠΟΔΖ, $\rho\pi\kappa\delta\chi$ εἰσὶν, ὡς τὰ αὐτῶν ὅμοια μέρη ΑΖΔ, $\rho\chi\delta$ · ἄρα $\epsilon\delta$ ΑΠΟΔΖ : $\rho\pi\kappa\delta\chi :: AZ^1 : \rho\chi^2$. Ο. Ε. Δ.

397. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὰ ὅμοια κανονικὰ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν πλαγίων ἀκτίνων ΠΟ, πρὸς τετράγωνα· εἰσὶ γάρ, ὡς ἤδη δέδεικται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· ἐπεὶ δὲ τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσιν ταῖς πλαγίαις, ἢ ταῖς ὀρθαῖς, ἀκτίσι (324, 386, 392), τὰ ἄρα κανονικὰ πολύγωνα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν πλαγίων, ἢ τῶν ὀρθίων ἀκτίνων, τετράγωνα.

Ἐῶς ὅν ἡ πλαγία ἀκτὶς ΗΥ διπλῇ, τριπλῇ, τετραπλῇ, τῆς πλαγίας ἀκτίνος ηο· ἔκθ' τὸ μείζον ἐξίγνωνον ἔσαι τετραπλῆν, ἐνεαπλῆν, ἐκκαιδεκαπλῆν, τῇ ἐλάσσονος.

398. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Οἱ κύκλοι ἄρα πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων (Συμβ. Λογ. 234), ἢ ὡς τὰ ἀπὸ δύο ὁμοίων τόξων, ἢ τέλος ὡς τὰ ἀπὸ τῶν περιφερειῶν· ἔσαι γὰρ ἀνάλογον τοῖς ἀπὸ τῶν ἀκτίνων τετραγώνοις, ἀνάλογον ἔξουσιν καὶ τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ πάντων τῶν ποσῶν τῶν ταῖς ἀκτίσιν ἀναλόγων (Συμβ. Λογ. 263)· τὰ δ', αἰετομεν, μέρη ἀνάλογον ἅπαντα ἔχουσιν ταῖς ἀκτίσιν (257 292)· ἄρα οἱ κύκλοι ἀνάλογοι ἔσονται πᾶσι τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν εἰρημένων ποσῶν.

Ἐὰν ὅν τριῶν κύκλων, τῷ μὲν ἡ διάμετρος ὑποτεθῇ = 1 ποδὶ, τῷ δὲ, = 5, τῷ δὲ, = 10· ἢ τῷ πρώτῳ ἐπιφάνεια, ἔσαι πρὸς τὴν τῷ δευτέρῳ ὡς 1 πρὸς 25· ἢ δὲ τῷ πρώτῳ πρὸς τὴν τῷ τρίτῳ ὡς 1 πρὸς 100· ἢ δὲ τῷ δευτέρῳ πρὸς τὴν τῷ τρίτῳ ὡς 25 πρὸς 100, τετέστιν ἢ

τῇ τρίτῃ ἔσαι ἑκατονταπλῇ μὲν τῆς τῷ πρώτῃ, τετραπλῇ δὲ τῆς τῷ δευτέρῃ.

399. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις (χ. 95).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐσὼ ὅμοιαι εἶδη τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ· καὶ ἐκ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ συναξάτω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΕΖΗ, ἐν ᾧ ΕΖ = ΑΒ, καὶ ΖΗ = αβ· ἐκ δὲ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῷ τριγώνῳ πλευρᾶς συναξάτω σχῆμα τὸ ΕΗΘΙ ἐν τῶν δευτέρῳ ὅμοιῳ (395) ὥτως, ὡς τὴν ΕΗ πλευρὰν πρὸς τὰς τῷ σχήματος γωνίας ὥτως ἔχειν θέσεως, ὡς κεῖται ἡ ΑΒ πρὸς τὰς ἐν τῷ ΑΒΓΔ πολυγώνῳ γωνίας τὰς ἴσας ἐκάστην ἐκάσῃ ἀντιστοίχῳ τῶν τῷ κατασκευασθέντος πολυγώνῳ· ἐπεὶ γὰρ ΑΒ² : αβ² :: ΑΓ : αγ (396), ἄρα καὶ ΑΒ² + αβ² : ΑΒ² :: ΑΓ + αγ : ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ ΕΖ = ΑΒ, καὶ ΖΗ = αβ, καὶ ΕΖ² + ΖΗ² = ΕΗ² (349)· ἄρα καὶ ΑΒ² + αβ² = ΕΗ², καὶ ΕΗ² : ΑΒ² :: ΑΓ + αγ : ΑΓ· ἀλλὰ καὶ ΕΗ² : ΑΒ² :: ΕΘ : ΑΓ (398)· ἄρα καὶ ΕΘ : ΑΓ :: ΑΓ + αγ : ΑΓ· ἐπεὶ δὲ ΑΓ = ΑΓ· ἄρα καὶ ΕΘ = ΑΓ + αγ. Ο.Ε.Δ.

400. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶν ἄρα κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῷ τριγώνῳ ἀναγεγραμμένον, ἴσον ἐστὶ δυοὶ κανονικοῖς, τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἀναγεγραμμένοις.

401. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Καὶ κύκλος, ὃς διάμετρος ἢ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἴσος ἐστὶ δυοὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ περιέχουσιν τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὡς γὰρ τὰ ὅμοια πολύγωνα ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν ὁμο-

λόγων πλευρῶν τετραγώνοις, ἔτω ϵ κύκλοι τοῖς ἀπὸ τῶν διαμέτρων (398),

402. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐπεὶ δὲ ἔτω ϵ ἡμικύκλιον τὸ ΑΓΕ ἴσον ἐστὶν ἡμικυκλίοις τοῖς ΑΒΓ, ΓΔΕ, αἷς καὶ τὰ τμήματα ΑΓΖ, ΓΗΕ· εἰὰν ταῦτα κοινῇ ἀφαιρεθῇ, ὑπολειφθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν μηνίσκων ΑΒΓΖ + ΓΔΗΕ = τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ· εἰὰν δὲ γένηται ΑΓ = ΓΕ, οἱ μηνίσκοι ἀλλήλοισι ἴσοι ἔσονται, ἐκάτερός τε τῶν ἴσος ἔσται τῷ ἡμίσει τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ, εἴτ' ἐν τεταρτημορίῳ τῷ τετραγώνῳ, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ ἐγγράφατο (χ. 96).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῶν ἐπιφανειῶν ὡς ἐπιπέδων θεωρημένων.

403. Ἐπίπεδον ἐστὶν ἐπιφάνεια, ὑψώματος παντὸς ϵ ταπεινώμετος ἄμοιρος (189).

404. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ (χ. 97), δύο σημεῖα ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου ἔχουσα τῷ ΓΔΕΤ, ἅπαντα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖται, τῷ ἐπεκτείνεσθαι ϵ τὸ ἐπίπεδον, ὥσπερ ἡ εὐθεῖα· τυτὶ δὲ ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι δύο σημεῖα ἰκανά εἰσι διορίσασθαι τὴν θέσιν, ἢ τὴν φαρὰν τῆς εὐθείας (20).

405. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δυσὶν ἐπιπέδων ΓΔΕΤ, ΑΒ Ψρ, τεμνόντων ἀλλήλα, ἡ κοινὴ διατομὴ ΑΒ ἔσται γραμμὴ εὐθεῖα· ἐδὲν γὰρ αὕτη ἐστὶν, ἀλλ' ἢ τὰ ἐκαστέρῳ τῶν ἐπιπέδων κοινὰ σημεῖα· ἐκὼν ἔτε ὑψωμα ἔτε ταπεινώμα αὕτη διασχηματίζει κατὰ τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων· ἄρα ἔσται γραμμὴ εὐθεῖα.

406. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἴαν εὐθεία ἡ ΨA κάθετος
 εὐθείᾳ ἐπιπέδῳ τῷ $\Gamma \Delta \epsilon\tau$ κατὰ τὸ A σημεῖον, αὕτη κά-
 θετος εἴσεται ἐξ ἀνάγκης ἐπὶ πάσαις ταῖς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ
 εὐθείαις, ταῖς εἰς ἐν σημεῖον τὸ A συνιέσαις.

407. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Εἰνὸς σημείου τῷ Ψ δοθέντος
 ἐκτὸς ἐπιπέδου τῷ $\Gamma \Delta \epsilon\tau$, μία μόνη ἀπ' αὐτοῦ τῷ ἐπιπέ-
 δῳ ἀχθήσεται κάθετος.

408. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Τρία σημεῖα β , σ , Γ , (χ. 81)
 μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα ἐπιπέδου θέσιν ἀναγκαιῶς διορίζουσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεξεύχθησαν γὰρ ταῦτα τὰ τρία ση-
 μεῖα διὰ τριῶν εὐθειῶν $\beta\Gamma$, $\beta\sigma$, $\Gamma\sigma$ · συστήσεται ἐν τῷ
 $\beta\sigma\Gamma$ τρίγωνον, ὃ τὸ ἐπίπεδον εἶναι μόνιμον ἐξ ὠρισμένου,
 ὃ πάντως τῷ μεγέθει, ἀλλὰ τῇ φερᾷ, καθ' ἣν ἐπ' ἀπει-
 ρον ἐπεκταθῆναι δύναται. Ο. Ε. Δ.

409. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν δύο εὐθεῖαι αἱ $A\Psi$, $A\tau$
 (χ. 97) τέμνωνται κατὰ τὸ A , καίτοι δυνάμεναι ἡ μὲν
 ἐπ' ἀνῆκειν ἐπιπέδῳ τῷ $\Gamma \Delta \epsilon\tau$, ἡ δὲ κείσθαι ἐπὶ τῷ
 $A\tau\Psi$, ἐν μέντοι εἶναι μόνιμον ἐξ ὠρισμένου τὸ ἐπίπεδον,
 ἐφ' ὃ ἀμφοτέραι κείσονται, εἴτ' ἐν τῷ τῷ $A\tau\Psi$ τριγώνῳ
 τῷ ἀποτελεσμένῳ ἐπιζεύξει τῶν κ , Ψ περάτων διὰ τῆς
 $\rho\Psi$ εὐθείας.

410. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι
 αἱ $\Gamma\epsilon$, $\Delta\tau$ αἰεὶ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς κείμεναι ἐπὶ τῷ
 αὐτῷ μόνιμῳ ἐξ ὠρισμένου ἐπιπέδῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυνατὸν αἰεὶ, δύο δοθεισῶν παραλλήλων,
 σχῆμα περικλεῖσαι διὰ δύο ἄλλων εὐθειῶν τῶν $\Gamma\Delta$, $\epsilon\tau$,
 ὅθεν συσταθήσεται τὸ παραλληλόγραμμον $\Gamma\Delta\epsilon\tau$, ἐν ὃ
 τῷ ἐπιπέδῳ ἀνήκουσιν αἱ δύο πρῶται παράλληλοι $\Gamma\epsilon$, $\Delta\tau$.

411. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Εἴαν δύο, ἡ πλείονα, παρ-

ἀλλήλα ἐπίπεδα ὑφ' ἑτέρου ἐπιπέδου τέμνονται, αἱ κοινὰ διατομαὶ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐ'σῶσαν τρία παράλληλα ἐπίπεδα ΔΕ, ΘΟ, Ρμ, ἃ τέμνέωσαν ὑπὸ τῷ ΑΒΨΡΤκ ἐπιπέδῳ· ζημι δὴ, ὡς αἱ διατομαὶ ΑΒ, Ψρ, Τκ εἰσὶν εὐθεῖαι παράλληλοι· ἃ γὰρ ΑΒ, ἃ Ψρ, ἔδεν πραγματικῶς εἰσιν, ὅτι μὴ τὰ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ ἃ τοῖς τεμνομένοις παραλλήλοις κοινὰ σημεῖα.

412. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὄταν ἐπιπέδον τι ἑρεῶν τέμνη, ἢ ἐντεῦθεν ἀναφουμένη τομὴ, εἴτ' ἐν ἡ ἐπιφάνεια, ἢν καταλείπει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τὴν τῷ ἑρεῶ τμήσιν, ἔστι ἢ αὕτη ἐπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ τομὴ, ἢ τὸ σχῆμα τῆτο, ἔδεν ἑτερόν ἐστιν, εἰμὴ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμβάλλει τῷ ἑρεῶ· πάντα δὲ ταῦτα τὰ σημεῖα δυνήσονται ἐκληθῆναι ὡς ἐπὶ τῷ τέμνοντος ἐπιπέδου κείμενα· ἀρχὴ τὸ τέτων συμπλήρωμα συγκροτήσεται ἐπίπεδον.

413. Αἵτημα. Δύο ἐπίπεδα ἴσα τὰ ΑΒΡΟ, ΒΓΡΞ (χ. 98) μὴ συνισάτωσαν κατ' ἀρχὰς μηδεμίαν γωνίαν· ἀλλ' ἔσω τὸ Α σημεῖον ἐπὶ τῷ Γ, τὸ δὲ Ο ἐπὶ τῷ Ξ· ἔκῃν τὰ δύο ἐπίπεδα διὰ τὴν κοινὴν εὐθεῖαν ΒΡ ἀλλήλοισι συγχυθήσονται· ἢ δὲ τῷ ΑΒΡΟ μεσαιτάτῃ εὐθεῖα ΧΛ συγχυθήσεται ἐπομένως τῇ τῷ ΒΓΡΞ μεσαιτάτῃ εὐθείᾳ ΧΠ.

414. Νῦν ἐν, τῷ ΒΓΡΞ ἀκινήτῳ μένοντος, τὸ ΑΒΡΟ κινεῖω περὶ τὴν ΒΡ ὅλην ἡμιπεριαγωγὴν· ἔκῃν ἢ ΧΛ εὐθεῖα μετὰ τῆς αὐτῆς ἀντισοίχῃ ΧΠ, ἢ προσυγκέχυντο, ἐκ διαδοχῆς συζηήσονται ἀπάσας τὰς δυνατὰς γωνίας, αἵτινες ἰσάριθμοι ἔσονται τοῖς βήμασι τοῖς γινομένοις ὑπὸ τῆς ΧΛ, ἀποχωρέσεως ἀπὸ τῆς ΧΠ μέχρι τινὸς βαθμῆ δε-

δομείης κλίσεως · μετρηθήσονται δὲ ἐκάστη ὑπὸ τῆς τόξε, τῆς καταγραφομένης μὲν περὶ τὸ χ , ἀπολαμβανομένη δὲ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $\chi\Lambda$, $\chi\Pi$.

Α' δὲ περὶ τῶν δύο εὐθειῶν $\chi\Lambda$, $\chi\Pi$ εἵπομεν, νοηθῆναι δύνανται τὰ αὐτὰ εἰς περὶ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἱ συνισῶσαι τὰ στοιχεῖα δυοῖν ἐπιπέδων, εἰςὶ παράλληλοι ταῖς $\chi\Lambda$, $\chi\Pi$, οἷαι αἱ OP , AB , κτλ., ἐπὶ τῇ ὑπερθεῖ ἐπιπέδῳ, εἰς BT , EP , κτλ. ἐπὶ τῇ ἐνερθεῖ · ἡ ἄρα γωνία, ἣν συνισῶσι δύο ἐπίπεδα, ἡ αὐτὴ ἐστίν, ἣν συνισῶσι δύο εὐθεῖαι αἱ $\chi\Lambda$, $\chi\Pi$ · ἔκῃν αἱ δύο ἐπιπέδων, ἄλληλα τεμνόντων, ιδιότητες, ὡς ἐκ τῶν γωνιῶν, αἱ αὐταὶ εἰσι ταῖς τῶν ἄλλήλας τεμνεσῶν εὐθειῶν · ἐντεῦθεν ἄρα.

415. α'. Δύο ἐπιπέδων ἄλληλα τεμνόντων δύο αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἰσὶν ἴσαι δυοῖν ὀρθαῖς (89) · δύο δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν ἴσαι (99) · τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν συνισαμένων ὑπὸ δυοῖν ἢ πλείονων ἐπιπέδων ἄλληλα τεμνόντων περὶ μίαν εὐθεῖαν τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσων ἐστὶ (96).

416. β'. Δύο, ἢ πλείω, ἐπίπεδα (97) παράλληλα, τεμνόμενα ὑπ' ὅλλω ἐπιπέδῳ, συνισῶσι μετὰ τῷ τέμνοντος, ἴσας μὲν τὰς ἀντιστοιχῆς γωνίας (132), ἴσας δὲ τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ (133), ἴσας δὲ εἰς τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ (135) · δυεῖν δὲ ἐντὸς εἰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὴν ἐτέραν διατέρεα παραπλήρωμα, δυεῖν δὲ ἐκτὸς εἰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ διατέρεα τὴν ἐτέραν ὡσαύτως (136) · τὴν ἀντίαν δὲ δυοῖν ἐπιπέδοις τρίτῳ ἐμπέπτοντος, εἴαν ἓν τῶν εἰρημένων πέντε δοθῇ, τὰ δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἔσονται (137).

417. γ'. Τὰ δ' ἐπιπέδα πρὸς ἐπίπεδον ἴσχυοντος τὴν ἀναφορὰν, κρατεῖ τὰ αὐτὰ εἰς εὐθείας, ἢ εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδον ἀναφερομένων.

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ

ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Σ τ ε ρ ε ω μ ε τ ρ ί α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ γενέσεως τῶν σερεῶν.

418. **Σ**τερεωμετρία εἰν ἐπιζήμη τῶν σερεῶν· σερεὸν δὲ ἔκτασις, μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχουσα· σερεότης δὲ, ἡ χωρητικότης αὐτῆς, τὸ μᾶλλον, ἢ ἥττον ἐκτετάθαι κατὰ ταῦτα τὰ τρία.

419. Ἐὰν ἡ ΓΔΖΙ (σ. 99) ἐπιφάνεια, ἀπειροσὺν ὅσον ἔχουσα πυκνῶμα, ἐπινοηθῇ παραλλήλως ἑαυτῇ ἀνιῶσα μέχρι τῆς ΑΒΟΕ ἐπιφανείας, καὶ ἐν τῷ ἀνιέναι καταλείπεσα τοσαύτας ἐπιφανείας ἑαυτῇ ὁμοίας, ὅσα διαβήματα ἀπειροσὰ διανύει, ἀπογεννήσει διὰ τῆς ἀνόδου ταύτης σερεὸν τὸ ΖΔΛΕ, ὃ καλεῖται πρίσμα· ἐκάστη δὲ τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΓΖ καταγράφει καὶ αὕτη παραλληλόγραμμον ΓΖΑΟ, ΖΟΕΙ, κτλ.· αἱ δὲ καταλειπόμεναι αὐτῆς ἀναβαινύσης ἐπιφάνειαι ΓΔΖΙ ἔσονται σοιχεῖα τῆ σερεῶ· ὥσε πρίσμα εἰς σερεὸν, ὑπὸ δυσὶν ἴσων καὶ παραλλήλων βάσεων ΓΔΖΙ, ΑΒΟΕ περατῶμενον, καὶ διὰ παντὸς τῆ μήκους ὁμοίως ἔχον πυκνότητος.

Ἐὰν δὲ ἡ γεννήτρια βάσις παραλληλόγραμμον ἢ

ρχήμα, τὸ εὐτεῦθεν ἀπογεννώμεον πρίσμα καλεῖται παρ-
αλληλεπίπεδον.

420. Ἐὰν μέντοι τῆς ἐπιφανείας ΓΔΖΙ (χ. 100)
ἀνέσσης μέχρι τῆς Α, ἐκάστη τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΖΓ μεθ'
ἐκαστον διάβημα ἐλαττώται κατ' ἀριθμητικὸν λόγον, ἕως
ἢ ἐπὶ τὸ Α ἀφικόμεναι γένωνται ἀπειροσαί, ἢ ἐπομένως
συμπέσωσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἡ ΓΔΖΙ ἐπι-
φάνεια ἀπογεννήσει ἔτω σφαιρὸν τὸ Α ΓΔΖΙ, ὃ καλεῖται
πυραμὶς, ἀφ' ἐκάστης δὲ τῶν αὐτῆς πλευρῶν τριγώνων
ἀπογεννηθήσεται τὸ ΖΓΑ.

421. Ἡ δὲ ΓΔΖΙ βάσις γεννήτρια ἀκύει τῷ
σφαιρῷ ἢ δὲ πυραμίδι, τριγωνικὴ μὲν, εἴαν ἢ ἡ γεννή-
τρια βάσις τριγώνων, τετραγωνικὴ δὲ, εἴαν τετρά-
γωνον, πεντάγωνος δὲ, εἴαν πεντάγωνον κτλ.

422. Πρίσμα, ἢ αἱ μὲν γωνίαι εἰσὶν ὀρθαί, ἴσαι δὲ
πᾶσαι αἱ πλευραὶ ΓΖ, ΖΟ, κτλ. καλεῖται κύβος·
ὥς ἐκείνος ἐστὶ ὅμοιον ὑπὸ ἑξ ἐπιπέδων περατέμε-
νον ἴσων ἢ παραλλήλων.

Πρίσμα, ἢ ἡ γεννήτρια βάσις ἐστὶ κύκλος ΑΒΓΔ,
καλεῖται κύλινδρος (χ. 101)· πυραμὶς δὲ, ἢ ἡ γεν-
νήτρια βάσις ΒΓΔΤ ἐστὶ κύκλος, κώνος (χ. 102).

423. Τ' ψος σφαιρῷ ἐστὶν ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ
τὴν βάσιν καταγομένη κάθετος ΑΓ (χ. 99) ἢ ΑΜ (χ.
103). Ἀξων δὲ, πρίσματος μὲν ἐστὶν εὐθεῖα ἢ Πη
(χ. 99), καταγομένη ἀπὸ τῆς κέντρου τῆς ὑπερθεν βάσεως
ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερθεν· πυραμίδος δὲ, ἢ Αη (χ. 100),
ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ κέντρον ἢ τῆς κατ' αὐτὴν
βάσεως.

424. Πυραμίδος ἀπόθετος ἀκύει ἢ ΑΒ κάθετος

ἡ ἀπὸ τῆς Α κυρφῆς ἐπὶ μίαν τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΙΔ καταγομένη.

Οὐρθὸν μὲν καλεῖται τὸ σερεὸν, ὅταν ὁ Πη ἄξων κάθετος ἐφεσκήκῃ τῇ αὐτῇ βάσει· πλάγιον δὲ, ὅταν πλάγιος· (χ. 99, 100).

425. Πυραμὶς ΑΒΓΔ (χ. 104) κόλυρος λέγεται, ὅταν ἡ τετμημένη δι' ἐπιπέδου τῆ ΙΗΤ.

426. Ἐν γένει δὲ τὰ ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν περατέμενα σερεὰ, κοινῇ μὲν καλεῖται πολύεδρα, ἰδίᾳ δὲ τετράεδρον, πεντάεδρον, ἑξάεδρον, κτλ., ἕκασον κατὰ λόγον τῶν ἐπιπέδων, οἷς περατῆται· ὧν δὲ, αἱ μὲν γωνίαι πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα κανονικὰ πολύγωνα, ἢ ὁμοειδῆ, ἢ ἰσάλληλα, ἐκεῖνα πολίεδρα καλεῖται κανονικά.

427. Ἐὰν ἡμικύκλιον τὸ ΜΟΔ περὶ τὴν αὐτῇ διάμετρον περιεγεχθῇ, ἢ μεθ' ἕκασον αὐτῇ διάστημα καταλίπη ἡμικύκλιον αὐτῷ ὅμοιον (χ. 105), τὸ ἐξ αὐτῇ ἀπογεννώμενον σερεὸν καλεῖται σφαῖρα· ἡ δὲ ΜΔ εὐθεῖα, τῆς σφαίρας διάμερος, ἢ ἄξων, τὰ δὲ σημεῖα Μ, Δ, πόλοι καλεῖνται τῆς σφαίρας.

428. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὸ ΗΚ ἀπόστημα, καθ' ὃ σημειόντι τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ Η ἀπὸ τῆ Κ κέντρου ἀφέσκηκε, ἔστιν ἀκτὶς τῆ γεννώτος ἡμικυκλίου ΜΟΔ· ἔστιν ἄρα ἡ σφαῖρα σερεὸν, ἢ τῆς ἐπιφανείας ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπίσης ἀφέσκηκεν ἐσωτερικῶς αὐτῆς σημείω, ὃ καλεῖται κέντρον.

429. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Σφαίρας ἄρα ἅπασαι αἱ ἀκτῖνες ΚΗ, ΚΔ, ἅπασαι ἐπομένως αἱ διάμετροι, διπλαῖ εἶναι τῶν ἀκτίνων, εἰσὶν ἴσαι.

430. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τῇ ΜΟΔ περὶ τὴν ΔΜ πε-

ριαγομένε, ἕκασον σημεῖον O , δ , κτλ. καταγράφει προδήλως κύκλον περὶ ἐν τῆς διαμέτρου σημεῖον K , Z , κτλ. ὡς περὶ κέντρον· ἔξ ὃ μὲν ὑπὸ τῆς ἀκτίνος OK πέρατος O καταγραφόμενος, πάντων τέ ἐς μείζων ἔξ ἐῖς ἴσα τὴν σφαῖραν διχοτομεῖ· δι' ὃ ἔξ μέγας κύκλος ἀκύει· οἱ δὲ ἄλλοι, παραλλήλως γραφόμενοι τῷ μεγάλῳ, τοσούτῳ γίνονται ἐλάττους, ὅσῳ μᾶλλον τῶν Δ , M πόλων ἐγγίξουσιν· θεωρῶνται δὲ ἅπαντες ὡς σοιχεῖα τῆς σφαίρας.

431. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ὅτι εἰὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπίπεδον καθέτω τῷ ἄξονι $ΜΔ$, ἡ τομὴ εἶναι κύκλος (412), γεγραμμένος δι' ἐνός τινος τῶν σημείων τῆς $ΜΟΔ$ · ἐπεὶ ἄρα πᾶσα διάμετρος τῆς σφαίρας ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἄξων, περὶ ὃν περιήνεκται τὸ ἀπογεννῶν ἡμικύκλιον, ἔξ πᾶν ἐπίπεδον τὴν σφαῖραν τέμνον ἀναγκαίως ἐςὶ κάθετον μίᾳ τινι ἀκτίνι, ἔξ ἐπομένως ἔξ διαμέτρω· ἅπασα τομὴ τῆς σφαίρας, δι' ἐπίπεδον γινομένη, εἴσεται κύκλος.

432. Εἰὰν τὸ ἔτω τὴν σφαῖραν τέμνον ἐπίπεδον διὰ τῆς κέντρου διήκῃ, ἐκάτερον τμῆμα καλεῖται ἡμισφαίριον· εἰὰν δὲ μὴ διὰ τῆς κέντρου, ἀπλῶς τμῆμα σφαιρικόν.

433. Τομεὺς δὲ σφαίρας καλεῖται ἀπόμοιρα σφαιρική, ὑπὸ μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἀπολαμβανόμενον ἔξ τομέων κυκλικῶν, οἷος ὁ $ΟΔΚ$ (χ. 103.).

434. Εἰὰν δὲ τὸ $ΤΙΜ$ (χ. 106) ὡς ἡμιπολύγωνον κανονικὸν ἐκληφθῇ, ἐξ ἀπείρων συνεχῶς πλευρῶν (257)· ἐκάσῃ αὐτῆς πλευρᾷ $ΠΙ$ ἐπακήκυσσα εἶναι ἐνὶ τινι τραπεζῷ $ΖΕΠΙ$, ὅπερ ἐν τῇ περιαγωγῇ τῆς $ΤΙΜ$ ἀπογεννήσει κῶνον κόλυρον τὸν $ΑΟΠΙ$ · τὰ ἄρα σφαίρας σοι-

χείρα θεωρηθῆναι δύνανται, ὡς εἶπερ ἦσαν ἄπειροι κῶνα πολυροί, ὧν ὕψη ΖΕ εἰσὶν αὐτὰ τὰ ἀπειροσὰ τῷ ἄξονος μέρη, ἃ ἀντιστοιχεί τῇ ΠΙ πλευρᾷ τῷ πολυγώνῳ· ἐν ὃ ἄξων εἰς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὑψῶν τῶν κῶνων.

435. Τέλος δὲ θεωρηθῆναι ἔχει ἡ σφαῖρα καὶ ὡς συντεθειμένη ἐξ ἀπειροπληθῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων, ἔχουσιν, τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ κέντρῳ, τὰς δὲ βάσεις ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας· τῶν γὰρ τετραγώνων, ἃ συνισῶσι τὰς τῶν πυραμίδων βάσεις, ὄντων ἀπειροσῶν, ἡ ἀπόθετος ἀπὸ τῷ κέντρῳ ὡς ἀπὸ κορυφῆς (424) ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀχθεῖσα, ἔσται παρὰ μίαν πρὸν ὕψος τῆς πυραμίδος· ὑποτεθέντων ἄρα τῶν δε χοιχείων, ἡκιστ' ἂν λυμανθείη ἡ τῶν τῆς σφαίρας ἀκτίνων ἰσότης.

436. Ὅμοια στερεὰ καλεῖνται, ὧν αἱ πλευραὶ ἰσάριθμοί τε εἰσὶ, καὶ συνισῶσι γωνίας τὰς ἀντιστοίχας ἴσας, καὶ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ὁμόλογοι· ὥστε μόνῳ τῷ μεγέθει τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπομένως τῇ στερεότητι, διαφέρειν ἀλλήλων τὰ ὅμοια στερεά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιφανείας τῶν στερεῶν.

437. ΟΡΙΣΜΟΣ. Στερεὺν παράπλευρος ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ περατῶσα τὸ στερεὸν ἄνευ τῆς ὑπερβεν καὶ ἐνερθεν ἐπιφανείας· ὅτω παράπλευρος ἐπιφάνεια τῷ ΑΕΓΙ πρίσματος εἰς τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα ΑΟΓΖ, ΔΒΓΔ, ΒΕΔΙ, καὶ ΟΕΖΙ, ἀλογυμένων τῶν δύο ΑΒΟΕ, καὶ ΓΔΖΙ, τῷ ἀνωτέρῳ φημι καὶ κατωτέρῳ.

438. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Η' παντός ὀρθῆς πρίσματος, ἢ ἐπομένως ὀρθῆς κυλίνδρου, παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆς κατ' αὐτὸ βάσεως ΓΔΖΙ, ἢ τῇ ΓΑ ὕψει (χ. 99.).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστὶ γὰρ αὕτη τὸ συμπλήρωμα πασῶν τῶν περιμέτρων τῶν ὑπὸ τῇ ΓΔΖΙ ἀπογεγνημένων πολυγώνων· τὸν δὲ ἀριθμὸν αὐτῶν, εἴτ' ἔν τὴν παραπλευρὸν ἐπιφάνειαν, ἐμφαίνει τὸ ὕψος ΓΑ. Ο. Ε. Δ.

439. ΠΟΡΙΣΜΑ. Συνάπτοντες δὲ τῷ γινομένῳ τὰς δύο ἐπιφανείας ἀνωτέραν τε καὶ κατωτέραν, ἢ τὸ διπλὴν τῆς ΓΔΖΙ βάσεως, ἔχομεν τὴν ὀλικὴν τῇ πρίσματος ἐπιφάνειαν.

Ἰν' ἔν εὐρεθῇ ἡ πρίσματος ὀρθῆ, φέρε' εἰπεῖν τῇ ΑΕ·ΓΙ, ἐπιφάνεια, μετρηθῆτω πρῶτον ἡ περίμετρος ΓΔΖΙ, ἢ πολλαπλασιασθῆτω ἐπὶ τὸ ΑΓ ὕψος· εἴτα πολλαπλασιασθῆτω ἡ ΓΖ πλευρὰ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀχθεῖσαν πρὸς ὀρθὰς, εἰμὴ ἦν, τῇ ΓΖ, ἢ τὸ διπλὴν τῇ γινομένου τῷδε συνήφθω τῷ προτέρῳ γινομένῳ· ἢ δὴ ἔτω ποριοθήσεται ἡ ὀλικὴ τῇ πρίσματος ἐπιφάνεια.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Βάσιν δ' ἀκύντες, ἐπὶ μὲν τῶν ἐπιφανειῶν εὐθεῖαν ἐννοῶμεν ὡς τὴν ΓΖ, ἐπὶ δὲ σφαιρῶν ὅλην ἐπιφάνειαν, ὡς τὴν ΓΔΖΙ.

440. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Η' πάσης ὀρθῆς πυραμίδος ΑΓΔΖΙ, κανονικὸν πολίγωνον βάσιν ἐχέσης, ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτης, ἢ τῆς ἡμiperιμέτρου τῆς ΓΔΖΙ βάσεως (χ. 100.).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἰση γὰρ ἐστὶν αὕτη τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν τριγώνων, ἃ καταγράφει κινέμενον τὸ ἀπογεγνηῶν πολύγωνον ΓΔΖΙ διὰ τῶν ἐαυτῇ πλευρῶν· ἀλλὰ πυραμίδος ὀρθῆς, κανονικὸν πολύγωνον βάσιν ἐχέσης, πάντα

τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰσὶν ἴσα, ὥς δῆλον· ἕκαστον δὲ τρίγωνον $\Lambda\Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως $\Delta\Gamma$ ἔξ τῆς ἀποθέτου AB (285). ἄρα τὸ πάντων τῶν τριγώνων ὄθροισμα ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμισυμμετρίας τῶν βάσεων $\Delta\Gamma$, $\Delta\Gamma$ κτλ., ἢ τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς κατὰ τὴν πυραμίδα βάσεως, ἔξ τῆς ἀποθέτου $O.E.$ Δ .

441. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τῷ δὲ συναφθείσῃ τῆς $\Gamma\Delta\Gamma$ βάσεως, εὐρεθήσεται ὅλη τῆς πυραμίδος ἡ ἐπιφάνεια.

442. ΠΟΡΙΣΜΑ Β. Ὡς ἡ τῆς ὀρθῆς κώνου παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτου ἔξ τῆς βάσεως ἡμικυκλίου $B\Gamma\Delta\Gamma$.

443. Ἐὰν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, (σχ. 102.) περιεγεχθῇ περὶ τὸν $A\Delta$ μένοντα ἄξονα, τὸ ἐντεῦθεν ἀπογινώσκον σφαιρὸν $AB\Gamma\Delta\Gamma$ εἶναι κώνος· ὑφ' ἑκάστου δὲ τῶν τῆς τριγώνου σιγχαίρων $B\Gamma$, EO , κτλ. κύκλοι γραφήσονται $B\Gamma\Delta\Gamma$, $IMO\chi$, κτλ., ὧν αὐτὰ εἰσὶν διαμέτροι· ἐπεὶ δὲ ὁμοιά εἰσι τὰ AIO , $AB\Gamma$ τρίγωνα, εἰσὶν $IO : B\Gamma :: AZ : A\Delta$ (321), τῷ τῆς IO , $B\Gamma$ τῶν ἐν κώνῳ κύκλων, ὡς τὰ ἀπὸ τῆς κορυφῆς A μέχρις αὐτῶν τῶν κύκλων ἀποσήματα AZ , $A\Delta$.

Ἀλλὰ τὰ ἀποσήματα AZ , κτλ. τῶν κύκλων συνεχῶς αὖξεναι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 1. 2. 3. 4. 5 κτ. ἐντεῦθεν ἄρα τὰ ἐξῆς ὑποσυνάξομεν, ἃ ἡμῖν εἰς ἀρχὰς τῶν ἐν τοῖς ἐξῆς προκαταβληθήσεται.

444. α'. Αἱ διαμέτροι, ἢ αἱ περιφέρειαι, τῶν ἀλλήλοδιαδόχων κύκλων, οἵτινες σιγχαίρᾳ εἰσι τῆς κώνου, συγκροτῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν.

β. Οἱ κύκλοι $IMO\chi$, $B\Gamma\Delta\Gamma$ ὄντες πρὸς ἀλλήν

λας ὡς τὰ ἀπὸ τῶν κατ' αὐτὸς διαμέτρων τετράγωνα (398), ἔσονται καὶ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς αὐτὸς τὰς κύκλους ἀποσημάτων.

445. γ'. Ἡ ἴση τῆς τε κορυφῆς Α καὶ τῆς βάσεως ΒΓΔΤ ἀπέχουσα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῷ ἡμισυθροίσματι τῆς ἐλαχίστης πρὸς τῇ κορυφῇ περιφέρειας Α, καὶ τῆς κατωτάτης περιφέρειας ΒΓΔΤ (Συμβ. λογ. 202), εἴτ' ἐν τῷ ἡμίσει τῆς κατωτάτης περιφέρειας· ἄπειρος γὰρ ὢν ὁ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὄρων ἀριθμὸς ὡς περὶ τὸς θεωρεῖσθαι δύναται.

446. δ'. Εἰάν ὁ ὀρθὸς κῶνος ΑΒΓ δι' ἐπιπέδου τοῦ ΡΠη παραλλήλῳ τῇ βάσει τμηθῇ, αἱ κατάλοιποι περιφέρειαι συστήσουσι καὶ αὗται ἄπειρον ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἥς μόνον ἀφωρισθῶσαν οἱ πρῶτοι τῶν ὄρων· ἔκθεν αὖτις ἡ ΙΟ περιφέρεια, ἡ ἴση ἀπέχουσα τῶν δύο περιφερειῶν ΒΓ, ΡΠ, ἴσεται τῷ αὐτῶν ἡμισυθροίσματι.

447. Ἐπεὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια τῆς κωνικῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῇ ἴσων ἀπεχέσει τῆς κορυφῆς καὶ αὐτῆς τῆς βάσεως περιφέρειᾳ (445)· ἔκθεν ἡ παράπλευρος τῷ κῶνι ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτου καὶ τῆς ἴσον ἀπεχέσεως περιφέρειας (442).

448. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Πυραμίδος ὀρθῆς καὶ κανονικῆς τῆς ΗΙΤΓΒΔ (α. 104.), τετμημένης δι' ἐπιπέδου τῇ βάσει παραλλήλῳ τῷ ΗΙΤ, ἡ κατάλοιπος παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τῇ τομῆς ΗΙΤ, καὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τῆς βάσεως ΒΓΔ, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τὸ ΙΠ κατάλοιπον τῆς ἀποθέτου ΑΠ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ πυραμίδι πάντα τὰ τραπέζια ΗΙΒΓ, ΙΤΓΔ, κτλ, εἰσὶν ἴσα (245)· ἀλλ' ἕκαστον τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῷ ἡμισυθροί-

σματος τῶν δύο ἀπ' ἐναντίον εὐθειῶν ΗΙ, ΒΓ καὶ τῆ ὕψους ΙΠ (295), ὃ ἐστὶ τῆς ἀποθέτου τὸ κατάλοιπον· ἄρα τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν τραπεζίων, εἴτ' ἐν ἡ παρά- πλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ ἡμιαθροίσματος πασῶν τῶν ὑπερθεν καὶ ἐνερθεν εὐ- θειῶν καὶ τῆ καταλοίπου τῆς ἀποθέτου. Ο.Ε. Δ.

449. ΠΟΡΙΣΜΑ Η' παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆ ὀρθῆ κώνου ΑΒΓ (χ. 102), τετμημένου δι' ἐπιπέδου τῆ ΡΠ, παραλλήλου τῇ βάσει, ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμπεριφερειῶν ΡΠκ, ΒΓΤ, καὶ τῆ καταλοίπου τῆς ἀπο- θέτου ΠΓ· αὗται δὲ αἱ ἡμιπεριφέρειαι ἰσούνται τῇ αὐτῶν ἴσον ἀπεχέσθαι περιφέρειᾳ (Συμβ. λογ. 202)· ἄρα ἐξισύ- ται ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς μεσαιτά- της περιφερείας καὶ τῆς ἀποθέτου.

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν, ἔ καταμετρεῖται ἡ πα- ράπλευρος ἐπιφάνεια, τὸ σρεὸν πλάγιον ἢ, ἢ τὸ ἀπο- γεννῶν ἐπίπεδον ἢ πολύγωνον ἀκανόνισον (421)· εἰάν μὲν ἢ πρίσμα, ληφθήσεται ἰδίᾳ ἢ ἐκάστῃ παραλληλογράμμῳ ἐπιφάνεια· εἰάν δὲ πυραμῖς, ἢ ἐκάστῃ τριγώνῳ· εἰάν δὲ ἢ πυραμῖς κώλυρος, ἢ ἐκάστῃ τῶν τραπεζίων, ἢ τῶν τραπε- ζοειδῶν κτλ.

451. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Η' σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆ μεγάλῃ κύκλῳ, καὶ τῆς διαμέτρου.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Ἐξω κώνος κώλυρος ὁ ΑΟΠΙ (χ. 106)· καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ μέσον δ τῆς ἀπειροῦς πλευρᾶς ΑΟ ἡ διάμετρος ΔΗ, ἣτις ἔσται κάθετος τῇ δὲ τῇ πλευρᾷ (152), καὶ ἤχθω ἡ δν παράλληλος τῇ ΟΙ, καὶ ἡ ΑΒ καὶ νΗ κάθετος τῇ δν, καὶ ἐπομένως τῇ ΟΙ· ἐκέν τὰ δύο τρί- γωνα ΑΒΟ, νΔΗ ἔξῃσι γωνίας ἴσας τὰς ὀρθὰς Β,ν· ἀλ.

λὰ ἐκ ἡ ὑπὸ ΑΟΒ = ΔΗν· ἐκ γὰρ τὸ ΑΤΙ τόξον, ἔστω ἡμισυ μετρεῖ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαν ΑΟΒ, ἴσον ἐστὶν ἀκριβῶς τῷ τόξῳ ΔΤν, ἔστω ἡμισυ μετρεῖ τὴν γωνίαν Η διὰ τὰς δύο ἀπειροσὰς πλευρὰς ΑΟ, ΠΙ· ἄρα τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΟ νΔΗ εἰσὶν ὅμοια.

β' Ἐπεὶ ΑΒ = ΕΖ (127)· ἐστὶν ἄρα ΕΖ (ΑΒ) : ΑΟ :: Δν : ΔΗ· κληθείσθης ἔν, κ μὲν τῆς περιφερείας, ἥς διάμετρος ἐστὶν ἡ Δν, Κ δὲ τῆς τῷ μεγάλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλῳ περιφερείας, ἥς διάμετρος ἡ ΔΗ, ἔσται Δν : ΔΗ :: κ : Κ. ἄρα ΕΖ : ΑΟ :: κ : Κ (393)· ὅθεν ΕΖ × Κ = ΑΟ × κ, εἴτ' ἔν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ὕψους ΕΖ τῷ κολύρῳ κώνῳ ΑΟΠΙ ἐκ τῆς περιφερείας τῷ μεγάλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλῳ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀπόθετος ΑΟ τῷ κολύρῳ κώνῳ ἐκ τῆς κ περιφερείας, τῆς ἐν τῷ μέσῳ τοῦ δε τοῦ κώνου, εἴτ' οὖν τῇ αὐτοῦ παραπλεύρῳ ἐπιφανείᾳ (249).

γ'. Ἐὰν ἔν ὅλῃ ἡ ΤΜ διάμετρος τῷ μεγάλῳ κύκλῳ, ἄθροισμα ἔσται πάντων τῶν ὑψῶν τῶν κολύρων κώνων (423), πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῷ μεγάλῳ κύκλῳ, ποριοθήσονται πᾶσαι αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι πάντων τῶν κολύρων κώνων, οἱ συντιθέασιν τὴν σφαῖραν, ταῦτόν εἶπεῖν, ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ο. Ε. Δ.

452. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπεὶ δὲ ἡ τῷ μεγάλῳ ἐπιφάνεια κύκλῳ ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας ἐκ τῆς ἀκτίνος (268), ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τετραπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ μεγάλου κύκλου (Σιμβ. λογ. 310.)

453. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ὡς αὐτως δειχθήσεται, ὅτι ἐκ ἡ κυρτῇ ἐπιφάνειᾳ τῷ σφαιρικῷ τμήματος τῷ γεννωμένῳ ὑπὸ τῷ τόξῳ ΠΤ, περιεχομένῳ περὶ τὴν διάμετρον ΤΜ, ἐστὶν ἴση

τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆ μεγίστης τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων, ἢ τῆ ὕψους ΤΕ αὐτῆ τῆ τμήματος.

454. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων σφαιρῶν ΑΒΓΙ, ἢ ΑΗΚΒ (σχ. 99.) εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ δύο ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, αγ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκάστη ἐπιφάνεια τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ σφαιρῷ ἐστὶν ὁμοία τῇ ἐν θατέρῳ ἀντίστοιχῳ (436). ἀλλὰ τὰ ἐμβλάδ' δύο ὁμοίων πολυγώνων ΑΟΓΖ, αἰγΔ εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ δύο ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, αγ τετράγωνα (405). ἄρα ἑκάστη ἐπιφάνεια τῶν ἐν τῷ σφαιρῷ πρὸς τῇ ἐν θατέρῳ ἀντίστοιχον, ὡς τὰ ἀπὸ δύο πλευρῶν ὁμολόγων ΑΓ, αγ τετράγωνα. ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιφανειῶν αὐτὸς ἐστὶν ἐν ἑκατέρῳ σφαιρῷ. ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων σφαιρῶν εἰσὶν ὡς κτ. (Συμβ. λογ. 234.) Ο. Ε. Δ.

455. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι ὁμοῖα εἰσὶ σφαιρᾶ, ὧν αἱ διαμέτροι θεωρηθῆναι δύνανται ὡς ἀντίστοιχοι πλευραὶ, αἱ αὐτῶν ἐπιφάνειαι εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν περιφερειῶν, τετράγωνα (393).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν σφαιρῶν σωμάτων σφαιρότητος.

456. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἡ σφαιρότης παντὸς πρίσματος ἢ κυλίνδρου ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΓΔΖΙ ἢ τῆ ὕψους ΑΓ (σχ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστὶ γὰρ αὕτη τὸ συμπλήρωμα τῶν σφαιρίων, εἴτ' ἢν τῶν ἴσων τῷ ἀπογενῶντι ἐπιπέδῳ

ΓΔΖΙ ἐπιφανειῶν, ἃς καταλείπει ἐν τῷ ἀνιέναι παραλλήλως ἐαυτῷ τὸ ΑΓ ὕψος· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν χοιχείων τέτων ἐκδηλεῖται διὰ τῶν σημείων, ἃ κεῖνται ἐν τῷ ἀποσήματι τῶν δύο βάσεων τῆς ὑπερθεῖν ΑΒΟΕ, ἢ τῆς ἐνερθεῖν ΓΔΖΙ, εἴτ' ἐν διὰ τὸ ὕψος ΑΓ· ἄρα τὸ γινόμενον ὑπὸ τῷ ὕψος ἢ τῆς βάσεως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν χοιχείων, ταῦτόν εἶπεν τῇ σερεότητι τοῦ πρίσματος. Ο. Ε. Δ.

457. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἡ σερεότης τῆς πυραμίδος ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ $\frac{1}{3}$ τῷ ὕψος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ τῶν μέσων σημείων τῷ ΑΒ κύβου ὀχθεῖσιν τῶν εὐθειῶν οΔ, ογ, κτλ. (α. 107) πρὸς ἐκάστην γωνίαν, ἀνακίψουσιν ἕξ ἴσαι πυραμίδες ΧΒγΔο, ΗΙΒΔο, κτλ.· ἄρα ἐκάστη τῶν πυραμίδων ἐκτημόριον ἐστὶ τῷ κύβου· ἀλλὰ α'. ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῷ κύβου· τὸ δ' αὐτῆς ὕψος δο, ἡμισυ τῷ ὕψος τῷ κύβου· β'. ἡ σερεότης τῷ κύβου ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψος (456)· ἄρα ἡ τῆς πυραμίδος ἰσῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΧΒγΔ ἢ $\frac{1}{3}$ τῷ ὕψος δη, εἴτ' ἐν $\frac{1}{3}$ τῷ ἐαυτῆς ὕψος δο. Ο. Ε. Δ.

458. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πυραμὶς, τὴν αὐτὴν βάσιν ἢ τὸ αὐτὸ ὕψος πρίσματι ἔχουσα, τριτημόριον ἐστὶ τῷ πρίσματος· ἢ γὰρ τὸ πρίσμα δύναται ἴσα τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τῷ ὕψος· ἡ δὲ πυραμὶς τῷ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ $\frac{1}{3}$ τῷ ὕψος, ἄρα κτλ.

459. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Κῶνος ὁ ΑΒΓΔΖ (α. 108) τριτημόριον ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ ΑΒΓΔΕΖΘ τῷ τὴν αὐτὴν βάσιν ἢ τὸ αὐτὸ ἐκείνου ὕψος ἔχοντος.

460. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Κυλῶδρος, ταῦτόν δ' εἶπεν, ἢ πρίσματος τετραγώνικῃ (α. 90. 101), πυραμίδος ἢ δὴ ἢ

κῶν (χ. 100. 102) ἡ χωρητικότης τάχιστα διὰ τῆ πλά-
τους, ἢ διὰ τῆ μήκους αὐξεται· πλάτος μὲν γὰρ τῷ ΑΒΓΔΕ
κύλινδρῳ ἐστὶν ἡ ΑΓ διάμετρος, μήκος δὲ ἡ πλευρὰ ΑΕ·
τοιγαρὲν κυλίνδρων αἱ χωρητικότητες εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ
τῶν διαμέτρων τετράγωνα, ὑποτιθεμένου ἴσου τῷ μήκους·
εἰσι γὰρ ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τὴν βάσιν συνισῶντων κύ-
κλων (Συμβ. Λογ. 307)· αἱ δὲ, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέ-
τρων τετράγωνα (398)· αἱ αὐταὶ δὲ χωρητικότητες εἰ-
σὶν ὡς τὰ μήκη, ἴσης ὑποτιθεμένης τῆς βάσεως· ἔσω
γὰρ τὸ ΑΕ μήκος, εἰ τεθείδω, τῆς βάσεως ἡμιποδιαίαν
ἐχέσης διάμετρον, περιέχειν ὁ κύλινδρος δέκα μέτρα·
εἰν ὅν τὸ ΑΕ μήκος διπλασιασθῇ, ἔσται ὥσπερ δύο
ἴσαι κύλινδροι, καὶ τότε περιέξουσιν ἐπ' ἀκριβὲς μέτρα
20· τοιγαρὲν αἱ τῶνδε τῶν κυλίνδρων χωρητικότητες ἔ-
σονται ἀπλῶς ὡς τὰ μήκη.

461. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐντεῦθεν ἄρα σαφὲς, ὡς
πλεον κερδαίνεται αὐξομένης τῆς τῷ ἄγγυς διαμέτρου,
ἢ αὐξομένου τῆ μήκους· καθὼς γάρ τις, ἢ ἡ διάμετρος τρι-
πλασιάζεται, περιέξει ἐνεαπλάσιον ἐν τῷ αὐτῷ μένων
μήκει· ἀλλ' ὁ αὐτὸς ἔτος ἐν τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ τῷ μήκους
τριπλασιαζόμενος, περιέξει μόνον τριπλάσιον.

462. ΣΧΟΛΙΟΝ. Αὐτὸ τὸ θεωρήμα ἐμπεριέχει
τὸν λόγον παντὸς τῷ ἤδη εἰρημένῳ· ἡ γὰρ σφαιρῆς τῆ
πρίσματος, ἢ τῆς πυραμίδος, ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ
τῆς βάσεως εἰ τῷ ὕψει, ἢ τῷ $\frac{1}{3}$ τῷ ὕψει· ἐστὶ δὲ ἡ βά-
σις γινόμενον ὑπὸ δύο εὐλειῶν, ὧν ἡ μὲν ὕψος, ἡ δὲ
πλάτος καλεῖται· τοιγαρὲν ἡ βᾶσις ἐκ ἐμφαίνει πλά-
τος ἀπλῶς, ἀλλ' ἐστὶν ἐν λόγῳ συνθέντῳ τῷ μήκους, καὶ
τῷ πλάτους, ὅφ' ὧν παράγεται· ἀλλὰ μὲν τὸ μήκος, ἐφ' ὃ
ἡ βᾶσις πολλαπλασιάζεται, ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ α·

πλῆς παράγων τῷ νέῳ προκύπτοντος, ὃ ἐμφαίνει τὴν σε-
ρεΐτητα, τῶν βάσεων ἴσων ὑποτεθεισῶν, τὰ προκύπτον-
τα ἄρα ἔσαι ἀπλῶς ὡς τὰ μήκη, ἢ ὕψη (Συμβ. Λογ. 307).

463. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἡ σερεΐτης τῆς σφαίρας
ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κατ' αὐτὴν ἐπιφανείας καὶ
τῷ τριτημορίῳ τῆς ἀκτίνος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ σφαῖρα ἐκληφθῆναι δύναται ὡς
συμπλήρωμα ἀπείρων πυραμίδων, ἐχουσῶν, τὴν μὲν κορυ-
φὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, διὰ δὲ τῶν καθ' ἑαυτὰς ἀπειροσῶν
βάσεων, σχηματίζουσῶν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας (435).
ἐκάστη δὲ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς οἰκείας
βάσεως ἐπὶ τῷ $\frac{1}{3}$ τῷ ὕψους (457), εἴτ' ἔν τῆς ἀκτίνος τῆς
σφαίρας· πᾶσαι ἄρα αἱ πυραμίδες, εἴτ' ἔν ἡ σφαῖρα αὐ-
τῇ ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῷ ἀθροίσματος πασῶν τῶν
βάσεων, εἴτ' ἔν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐπὶ τῷ $\frac{1}{3}$ τῆς
ἀκτίνος. Ο. Ε. Δ.

464. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Καὶ τομέως ἄρα σφαιρικῇ
τῷ ΔΓΟ (χ. 105) ἡ σερεΐτης ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ
τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ΔΟ ἐπὶ $\frac{1}{3}$ ΔΑ.

464. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ σερεΐτης (χ. 109) τῆς
ΑΒΓΔ σφαίρας ἴση ἐστὶ $\frac{2}{3}$ κυλίνδρου τῷ ΕΘΖΗ, ὃ ἐγγέ-
γραπται· κληθῆτω γὰρ Ε ἡ ἐπιφάνεια τῷ μεγάλῳ κύ-
κλῳ ΓΔΙΟ τῆς σφαίρας, εἴτ' ἔν ἡ τῷ κυλίνδρῳ βάσις
ΒΘΗρ, ἣτις ἐστὶν ἐκείνῳ ἴση· Α δὲ ἡ γ' ἀκτὶς τῆς σφαί-
ρας, ἐπὶ 2Α τὸ τῷ κυλίνδρῳ ὕψος ΑΒ· ἐκέν ἡ μὲν τῆς
σφαίρας σερεΐτης ἔσαι ἴση $4Ε \times \frac{Α}{3}$ (452) = $\frac{4ΕΑ}{3}$, ἡ

τῆς τῷ κυλίνδρῳ = $Ε \times 2Α$ (456) = 2ΕΑ· ἀλλὰ $\frac{4ΕΑ}{3}$

: 2ΕΑ :: 2 : 3 (Συμβ. Λογ. 237). ἄρα ἡ σφαιρότης τῆς σφαίρας κτλ.

465. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Τὰ ὅμοια στερεὰ πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων διαστάσεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀπαν στερεὸν παράγεται ὑπὸ τῆ μήκους καὶ πλάτους τῆς βάσεως, καὶ ὑπὸ τῆ ὕψους ἢ βάθους (456, 457). ἀλλὰ δύο ὁμοίων στερεῶν αἱ τρεῖς διαστάσεις εἰσὶν ἀνάλογαι· ὥς, εἰ τὸ τῆ ἐτέρου μήκους διπλασίον, φέρε' εἶπειν, εἴη τῆ ἐν θατέρῳ, καὶ τὸ πλάτος τῆ πλάτους, καὶ τὸ ὕψος τῆ ὕψους, ὡσαύτως εἶναι διπλασία· ἐκεῖν ὁ λόγος ὁ τῶν ὑψῶν, καὶ ὁ τῶν μηκῶν, καὶ ὁ τῶν πλάτεων εἰσὶν ἴσοι, ἀλλ' ὁ λόγος ὁ ἐκ τριῶν ἴσων συγκείμενος ἐνὸς τούτων ἔστι τριπλασίον (Συμβ. Λογ. 290). αἱ δὲ στερεότητες δύο ὁπωπῶν στερεῶν ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθετῶ τῷ ἀπὸ τῶν τριῶν αὐτῶν διαστάσεων· ἄρα τὰ ὅμοια στερεὰ κ. τ. λ. Ο. Ε. Δ.

466. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τὰ ὅμοια στερεὰ εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι δύο τινῶν ὁμολόγων διαστάσεων, εἴγε εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν ὁμολόγων διαστάσεων· ἀλλ' ὁ τριπλασίονι λόγος ὁ αὐτός ἐστιν, ὅς καὶ τῶν κύβων τῶν ἀπὸ δύο ὁμολόγων πλευρῶν (Συμβ. Λογ. 311). ἄρα κ.τ.λ.

467. Ἐὰν ἄρα δύο ὁμοίων στερεῶν (α. 99. 107) θατέρου τὸ ὕψος ΑΓ ἢ ἐξ ὑποθέσεως διπλῆν, ἢ τριπλῆν, ἢ τετραπλῆν, τῆ θατέρου ὕψους αγ, ἡ στερεότης τῆ πρώτου πρὸς τὴν τῆ δευτέρου ἔσται ὡς ὁ κύβος τῆ 2, ἢ τῆ 3, ἢ τῆ 4, πρὸς τὸν κύβον τῆ 1, εἴτ' ἐν ἔσται ὀκταπλῆν, ἢ εἰκοσιεπταπλῆν, ἢ ἐξηκοντατετραπλῆν, τῆ δευτέρου.

468. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ὡςπερ οἱ κύκλοι ὁμοιά εἰσι σχήματα (383), ὥτως αἱ σφαῖραι, αἱ διὰ περιπαγωγῆς

ἡμικυκλίῳ ἀπογεννώμεναι, ὁμοιά εἰσι σφαιρὰ (427)· ἐντεῦθεν ἄρα, α'. τῶν σφαιρῶν αἱ ἀκτίνες, αἱ διάμετροι καὶ αἱ περιφέρειαι, δύνανται αἰεὶ ἐκλαμβάνεσθαι ὡς ὁμολόγοι πλευραὶ, καὶ αἰεὶ ὡς ὁμοίοις σφαιροῖς ἐπανήκοντα ἀνάλογον εἶναι· β'. αἱ σφαιρότητες τῶν σφαιρῶν εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐν αὐταῖς μεγάλων κύκλων.

Ἐὰν ὅν σφαῖρα διάμετρον ἔχῃ ἐτέρας δεκαπλάσιον, ἔξει χωρητικότητα, ἢ μέγεθος, χιλιοπλάσιον, τετέστιν, εἰ ἡ δευτέρα χωρὴν φέρε ἓνα κιβικόν πόδα ὕδατος, ἢ πρώτη χωρήσει χίλις· ἐπεὶ 1000 εἰσὶν ὁ κύβος τῆς 10· καὶ εἰ ἡ, κατὰ τὰς ἐσχάτας τῶν ἀφρονισμένων παρατηρήσεις, ἡ διάμετρος τῆς ἡλίου ὑποτεθῇ ἑκατονταπλῇ τῆς κατὰ τὴν γῆν, ἡ σφαιρότης αὐτῆς ἔσται πρὸς τὴν τῆς γῆς ὡς 1000000 : 1· ἔστι γὰρ ἐκείνη πρὸς ταύτην ὡς 100³ : 1³, εἰτ' ὅν ὡς 1000000 : 1.

469. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐνταῦθεν συνάγεται, ὁ λίαν ἑυμβόλλει ἐν τῇ Φυσικῇ, ὡς ὁ τῶν σφαιροτήτων λόγος τάχιον αὖξει, ἢ ὁ τῶν ἐπιφανειῶν· δύο γὰρ ὁμοίων σφαιρῶν, αἱ μὲν ἐπιφάνειαι εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα, αἱ δὲ σφαιρότητες, ὡς οἱ κύβοι· ἢ ἐπιφάνεια φέρε σφαῖρας, διπλὴν ἐχούσης διάμετρον, τετραπλῇ ἐστὶ τῆς ὑποδιπλὴν ἐχούσης, ἢ δὲ σφαιρότης ταύτης ἐκείνης ἐστὶν ὀκταπλῇ· εἰ δὲ τριπλὴν ἔχῃ διάμετρον ἢ σφαῖρα, ἢ μὲν ἐπιφάνεια ἔσται ἐννεαπλῇ, ἢ δέ γε σφαιρότης εἰκοσιεπταπλῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Πολυέδρων.

470. Γωνία σφαιρὰ καλεῖται, ἥτις ἐκ τῆς συνδρομῆς τῶν κορυφῶν πλειόνων ἐπιπέδων γωνιῶν, ἀλλήλαις προσκεκλιμένων, συνίσταται· ταιαίδε εἰσὶν αἱ τῶν πυραμίδων κορυφαί, αἱ τῶν πρισμάτων γωνίαι κτλ.

Αἱ σφαιραὶ γωνίαι, αἱ ὑπὸ ἰσαριθμῶν ἑὺώσαντως κειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν αἱ ὁμόλογοι ἀλλήλαις ἴσαι, περιεχόμεναι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Μέτρον γωνίας σφαιρᾶς ἐστὶ σφαῖρα, ὥσπερ ἐπιπέδου κύκλος· διὸ ἐπινοητέον αἰ τὴν κορυφὴν τῆς σφαιρᾶς γωνίας κείσθαι ἐν τῷ κέντρῳ σφαίρας, ἧς ἡ ἀκτὶς πρὸς τὸ δοκῶν παραλαμβάνεται· τέτα δὲ τεθέντος, ἐκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν σφαιρὰν συνιστωσῶν, ἐν ἐπιπέδῳ ἔσεται κύκλος μεγίστος τῆς σφαίρας, ὃ μέτρον μὲν ἔχει τὸ αὐτὸ τόξον τὸ ὑπὸ τῶν σφαιρῶν αὐτῆς ἀπολαμβάνόμενον, βάσιν δὲ τὴν χορδὴν τῆς καταμετρῆντος τῆς· μέτρον ἄρα σφαιρᾶς γωνίας ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βηθμῶν τῶν τόξων, ἅπερ αἱ βάσεις τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ταύτην συνιστωσῶν ὑποτείνουσιν· ἐπεὶ δὲ ἐκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν τὴν σφαιρὰν συγκροτουσῶν κοινὰς ἔχει τὰς πλευρὰς πρὸς ἐκατέραν τῶν προστεχῶς κειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, δῆλον ὅτι ὃ καὶ τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, τῶν τὰς ἐπιπέδους ταύτας γωνίας καταμετρῶντων ἀλλήλοις συζεύγνυνται, ὥσπερ ἀμέλει ὃ αἱ αὐτῶν χορδαί, ὃ πάλυγωνόντι συνισῶσιν, ὑπὸ τῆς ἐξ αὐτῶν συγκροτουμένης περιμέτρου περιεχόμενον, ὅπερ βάσις ἐστὶ τῆς σφαιρᾶς γωνίας.

471. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Τριῶν τετράχισον γωνιῶν ἐπιπέδων χρεῖα εἰς σύστασιν σφαιᾶς· τὸ γὰρ ἀπλῶστα τῶν πολυγώνων, τῶν βάσις εἶναι δυναμένων τῆς σφαιᾶς γωνίας, ἐστὶ τὸ τρίγωνον.

472. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τὴν μεγίστην τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν σφαιᾶν συνισωσῶν, ἐλάσσονα δεόν εἶναι τῇ τῶν λοιπῶν ἀθροίσματος.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰ γὰρ εἴη ἴση, καὶ τὸ ταύτην καταμετρῆν τόξον τῆς σφαιᾶς ἴσον ἂν ἦν τῷ ἀθροίσματι τῶν τόξων τῶν τὰς λοιπὰς καταμετρύντων· τότε δὲ τεθέντος, τὰ λοιπὰ τόξα ἄλλως ἢκ ἂν ἐφικνοίτο τῶν περάτων τῇ τὴν μεγίστην καταμετρύντος γωνίᾳ, ὥστε ἀλλήλοις συνάπτεσθαι, ἢ συμπεσόντα ἐκείνῳ· ἅπαντα ἄρα τὰ τόξα ταῦτα, καὶ δὴ καὶ αἱ τέτων χορδαὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἂν εἴεν ἐπιπέδῳ, ὅπερ τῇ τῆς σφαιᾶς γωνίας καταμετρήσει διαμάχεται· πολλῷ μᾶλλον ἄτοκον τὸ τὴν μεγίστην τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν μείζονα τῇ τῶν λοιπῶν ἀθροίσματος ὑποτεθῆναι· ἔτω γὰρ ἡδὲ ἔχει ὅλως τὰ τόξα κατὰ τὰ αὐτῶν πέρατα ἀλλήλοις συνέρχεσθαι.

473. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ ἀθροισμα ἀπασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν σφαιᾶν συνισωσῶν, ἐλάσσον εἶναι δεόν ἢ 360° .

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ ἴσον εἶναι 360° , τὰ τόξα τῆς σφαιᾶς, ἢ τὰς ἐπιπέδους γωνίας καταμετρεῖ συζευχθέντι ἀλλήλοις, μεγίστη κύκλου περιφέρειαν ἀκριβῶς συμπληρώσει, καὶ αἱ ἀπασῶν ἄρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κορυφαί, συνελθούσαι ἀλλήλαις, ἔσονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἡμισφαιᾶν γωνίαν ποιήσουσιν· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

474. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐὰν δύο σφαιαὶ γωνίαι Α, Β, ἕκ τριῶν ἐπιπέδων ἑκατέρω συνισάμεναι, τὰς δύο ἐπι-

πέδους Β, Δ ταῖς δυσὶν ἐπιπέδοις β, δ ἴσας ἔχουσιν ἐκατέραν ἑκατέρα, καὶ ἐπίσης ἀλλήλαις προσκεκλιμένας, καὶ ἡ τρίτη τῇ τρίτῃ ἴση ἔσται, καὶ αἱ σερεαὶ αὗται ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ Οὐσῶν γὰρ τῶν πλευρῶν ἀπασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀλλήλαις ἴσων (ἐστὶ γὰρ ἡ σερεὰ γωνία ἐν κέντρῳ σφαίρας, ἧς ἐφικνύνται τῆς ἐπιφανείας αἱ πλευραὶ (470)), δῆλον ὅτι δι' αὐτὸ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ ἐπίσης ὑποτιθεσθαι ἀλλήλαις προσκεκλιμένας τὰς δύο ἐπιπέδους γωνίας Β, Δ (ἐξαιρουμένης τῆς τρίτης) γωνίαν τινὰ ὁμῶς ποιῶσιν, ἀκριβῶς ἐν ἑαυτῇ τὴν ὑπὸ τῶν ὁμολόγων β, δ συνισαμένην χωρῆσαν· τὰ πάντα γὰρ ἴση ὑποτίθεται· αἱ κοίλαι ἄρα αὗται γωνίαι οὐκ ἂν εἶχον συγκλείεσθαι, εἴπερ ἄριστοι εἶεν αἱ ἕτεραι δύο ἐπιπέδοι γωνίαι· ἔσεται ἄρα ἀνάγκη τὰς δύο ταύτας σερεὰς Α, α ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

475. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῷ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι καὶ δύο σερεαὶ γωνία, ὑπὸ τεσσάρων συνισάμεναι ἐπιπέδων, ἔχουσι τὰς τρεῖς ἐπιπέδους ταῖς τρισὶν ἴσας ἐκάστην ἐκάστη, καὶ ὡσαύτως κειμένας, καὶ ἡ τετάρτη τῇ τετάρτῃ ἔσεται ἴση, καὶ ἡ σερεὰ ὅλη ὅλη τῇ σερεᾷ· τὸ αὐτὸ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν σερεῶν γωνιῶν τῶν ὑπὸ 5, 6, 7, κτ. ἐπιπέδων συνισαμένων.

476. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Εἰς πολυέδρου σύστασιν τεσσάρων τετράχιστον ἐπιπέδων χρεία· τρία γὰρ ἐπιπεδὰ ἀλλήλοισι ὁπασθεν συζευχθέντα τὴν σερεάν ποιῶσι γωνίαν (471)· δεῖ ἄρα ἑνὸς ἔτι ἵνα τὸ χωρίον πανταχόθεν περικλεισθῇ, καὶ διασάσεις τρεῖς τὸ πολυέδρον οὕτως· ἄρα κτλ.

477. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ΄. Πᾶν πολυέδρον ἔδύναται ελαττεῖν, ἢ τέσσαρας ἔχειν γωνίας.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴπερ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν τῇ σερεᾷ γωνίαν

συνιστώντων ἐπιπέδων κενὸν ἀπολειπόμενον χωρίον ἐστὶ ὀχθόμυ, τρεῖς τελάχιστον ἔχον γωνίας· εἰς ἃς περικλειομένης τρεῖς σφαιρῆαι γωνίαι ἐντεῦθεν ἀναρῶσονται· τὸ πολυέδρον ἄρα τέτταρας σφαιρᾶς γωνίας ἔχειν ἐπάναγκες.

478. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Πέντε μόνα εἰσὶ τὰ κανονικὰ καὶ πολυέδρα, τρία μὲν, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἰσὶν ἰσοπλευρὰ τρίγωνα· ἐν δὲ, ἢ τὰ ἐπίπεδα τετράγωνα, ἢ ἐν, ἢ πεντάγωνα εἰσὶ κανονικὰ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ εἰς σύσασιν σφαιρᾶς γωνίας τριῶν ἐπιπέδων χρεῖα (471)· ἢ σφαιρᾶ γωνία ὑπὸ ἐπιπέδων, αἵπερ εἶεν ὁμῶς 360° , ἢ ἂν ἔχῃ συσῆναι (473), δῆλον ὅτι πενταχῶς μόνον αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τὴν σφαιρὰν συνισῶσι γωνίαν· α'. ἐπεὶ ἡ τῆ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνία εἰς 60° , τρεῖς ἄρα τέτων ἀλλήλαις συνελθῆσαι γωνίαν σφαιρὰν $= 180^\circ$ συνισῶσι, ἢ ἐπομένως ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων σφαιρὸν κανονικὸν συνίσταται, ὅπερ καλεῖται τετράεδρον· β'. τέτταρες γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίαν σφαιρὰν $= 240^\circ$ ποιῶσιν· ὁκτὼ ἄρα τοιαῦτα τρίγωνα, ἀλλήλοις συζευχθέντα, κανονικὸν σῶμα ὁκτάεδρον συνισῶσι· γ'. πέντε γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀλλήλαις συνελθῆσαι γωνίαν σφαιρὰν $= 300^\circ$ συνισῶσιν· εἴκοσι ἄρα τοιούτων τριγώνων ἀλλήλοις συναφθέντων, ἀποφέρεται σφαιρὸν εἰκοσάεδρον καλούμενον· ὑπὸ γεμὴν ἕξ γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων γωνία σφαιρᾶ ἢ ἂν ἔχῃ συσῆναι· ἕξ γὰρ τοι ἐπίπεδοι τοιαῖδε γωνίαι 360° ποιῶσι· ἢ εἰσὶν ἄρα ἅπαντα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (473)· δ'. ἡ τῆ τετραγώνου γωνία ἐστὶ μοιρῶν 90° · τρεῖς ἄρα συνελθῆσαι γωνίαι σφαιρὰν ποιῶσι μοιρῶν 270° · ἢ ἐπομένως ἐκ τετραγώνων ἕξ ἀποφέρεται σφαιρὸν, ὃ καλεῖται ἑξάεδρον, ἢ ἰδίῳ ὀνόματι κύβος· τέσσαρες μόντοι

τοιαῖδε γωνίαι σερεᾶν ἢ συνισῶσι· τετράκις γὰρ 90° εἰν ἴσον 360° · εἰ ἡ τῷ κανονικῷ πενταγώνῳ γωνία μοιρῶν εἰν 180° · τρεῖς ἄρα τῶν συναρθεῖσαι σερεᾶν γωνίαι ποῖσι μοιρῶν 324· ἐνθεντοι ἐκ πενταγώνων δώδεκα ἀποφέρεται σῶμα κανονικὸν δωδεκάεδρον· τέτταρες δὲ τῷ πενταγώνῳ γωνίαι ποῖσι μοίρας 432, ἢ ἐπομένως σερεᾶν γωνίαν ἢ συγκροτῶσι· τέλος δὲ τῆς τῷ κανονικῷ ἑξαγώνῳ γωνίας ἕσης μοιρῶν 120, τρεῖς ἅμα τοιαῖδε ληφθεῖσαι παῖσι 360° · γωνία ἄρα σερεᾶ ἐκ τῶν ἢ συζητήσεται· ἢ δὴ ἔδ' ἐκ πλειόνων κανονικῶν ἑξαγώνων πολυέδρον· ταυτόν εἰν εἶπεν ἢ περὶ τῶν ἑπταγώνων, ὀκταγώνων κτλ· εἶδη ἄρα κανονικῶν σωμάτων, παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε, ἢ συζητήσεται. Ο. Ε. Δ.

479. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῷ πρωτοκείρῳ, τὰ περὶ τῶν κανονικῶν πολυέδρων ὧδε ρηθέντα μετιόντι, ἐπ' ἀνάγκης ἔχειν ἀνὰ χεῖρας κανονικὰ πολυέδρα ἐκ χάρτου σερεῖν, ἢ εἰς διάφορα ἐπίπεδα ἐκτετμημένα· ὅτω γὰρ ῥᾶτα τὴν τῶν πολυέδρων κατασκευὴν μηχανήσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Β'. ΤΟΜΟΥ.

Τῶν ἐν τῷ Β'. Τόμῳ περιεχομένων.

ΣΥΜΒΟΛ. ΛΟΓ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ Β΄.

Κεφάλαιον Θ'.	Περὶ λογαριθμῶν	1.
— — — Ι'.	Περὶ μεγεθῶν συμμετρῶν ἢ ἀ- συμμετρῶν	30
— — — ΙΑ'.	Περὶ διαφορῆ διαθέσεως ἢ συν- τάξεως	34

Κεφάλαιον	Α΄.	Περὶ ἐξισώσεων ἐν γένει	37
—	—	Β΄. Ἐκθεσις τῶν ἀρχοειδῶν μετα-	
		χηματισμῶν	40
—	—	Γ΄. Περὶ πρωτοβαθμίων προβλημάτων.	45
—	—	Δ΄. Προβλήματα τῷ Α΄. βαθμ. ἐκ	
		πλειόν. ἐξισ.	65
—	—	Ε΄. Περὶ ἐξισώσεων τῷ Β΄. βαθμῷ	81
—	—	ς. Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων	91
—	—	Ζ΄. Περὶ γενικ. τύπων τῶν ἐξισ.	101
—	—	Η΄. Περὶ ἀορίστων προβλημάτων	133
—	—	Θ΄. Περὶ ἀπείρου ποσότητος	139
—	—	Ι΄. Περὶ σπειρῶν	143

Κεφάλαιον Α.	Ἀρχαὶ τῆς Γεωμ. ἢ περὶ γραμ-	
—	μῶν	169
—	Β'. Περὶ τοῦ κύκλου	175
—	Γ'. Περὶ εὐθειῶν καθεύτων ἢ πλαγίων.	185
—	Δ'. Περὶ μέτρου τῶν γωνιῶν . . .	189
—	Ε'. Παντοίων γωνιῶν ἐκτίμησις . .	192
—	ς. Περὶ τῆς καθεύτου	195
—	Ζ'. Περὶ παραλλήλων εὐθειῶν . . .	201
—	Η'. Περὶ εὐθειῶν ἀναφερ. πρὸς τὸν	
	κύκλον	208
—	Θ'. Περὶ δυνάμ. γωνιῶν τῶν ἐν τῷ κύκλῳ	216

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Β΄.

Κεφάλαιον	Α΄.	Περὶ σχημάτων	226
— —	Β΄.	Περὶ τριγώνων	228
— —	Γ΄.	Περὶ ὁμοίων τριγώνων	234
— —	Δ΄.	Περὶ ἴσων τριγώνων	235
— —	Ε΄.	Περὶ τετραπλεύρων	239
— —	ς΄.	Περὶ πολυγώνων ἐν γένει	244
— —	Ζ΄.	Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου	251
— —	Η΄.	Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐπι- φανειῶν	253
— —	Θ΄.	Περὶ ἐπιφανείας πολυγώνων	261
— —	Ι΄.	Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων	264

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Γ΄.

Κεφάλαιον	Α΄.	Περὶ ἀναλογίας τῶν γραμμῶν	266
— —	Β΄.	Περὶ ἀναλογίας τῶν ὁμοίων τρι- γώνων	274
— —	Γ΄.	Περὶ ὀρθογωνίου τριγώνου	282
— —	Δ΄.	Περὶ ἀναγωγῆς τῶν πολυγώνων	289
— —	Ε΄.	Περὶ τῆς τετραγωνισμῶς τῆς κυκλικῆς ἀναλογικῆς διαθέτης	292
— —	ς΄.	Περὶ γεωμετρικῆς κλίμακος καὶ ἀναλογικῆς διαθέτης	299
— —	Ζ΄.	Περὶ ὁμοίων σχημάτων	302
— —	Η΄.	Περὶ ἐπιφανειῶν ὡς ἐπιπέδων θεωρουμένων	310

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Δ΄.

Κεφάλαιον	Α΄.	Περὶ γενέσεως τῶν στερεῶν	314
— —	Β΄.	Περὶ ἐπιφανείας τῶν στερεῶν	318
— —	Γ΄.	Περὶ τῆς τῶν στερεῶν σωματίων στερότητος	324
— —	Δ΄.	Περὶ πολυέδρων	330













