

ΣΕΙΡΑΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΩΝ

· ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΩΝ ΣΤΑΔΙΟΝΟΜΕΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΤΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Περιέχων τὴν Ἀριθμητικὴν, καὶ τὸ Συμβολικὸν Λογισμὸν τὰς ἀρχαιοτάτας πράξεις, καὶ τὰ περὶ τῶν Ἀταλογίων μέχρι τῶν Λογαριθμῶν.

Οὐδὲ γὰρ Γεωμετρίαις ἐδ' Ἀστρονομίαις ἀοίσκονται (ἄνθρωπος)· ἀλλὰ ἡ τὰ τῆς γῆς εὐρύδι ἢ τὰ ὕπερθε τοῦ ὕψους, κατὰ Πίνδαρον, ἐπισκοπεῖ.
Γαληνὸς Πρωτὲρ. πρὸς τὰς τέχνας Κεφ. α'.

EN BIENNE: THS ATΣETPIAS

· ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΑΟΥ.

Α Ω Ζ.

ΤΟΙΣ

ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΑΔΕΛΦΟΙΣ

ΖΩΣΙΜΑΔΑΙΣ

A. N. Z. M.

ΟΤΙ ΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΔΙΑΤΕΛΟΥΣΙΝ ΕΤΕΡΓΕΤΟΤΗΤΕΣ

ΟΞΕΔΟΤΗΣ

ΤΗΝ ΒΙΒΛΟΝ ΤΑΥΤΗΝ

ΕΤΙΝΩΜΟΣΤΗΣ ΕΝΕΚΕΝ

ΑΝΑΤΙΘΗΣΙ



ΤΟΙΣ ΑΝΑΓΙΝΩΣΚΟΤΣΙ.

Τῶν πολλῶν, ὧν ἐνήσχευ ὁ καθ' ἡμᾶς χρόνος βιβλίων, ἐντι καὶ τότε, ὧ παῖδες Ἑλλήνων, ᾧ νῦν ἐντυγχάνετε, ἀνδράσι μὲν ἀνὰ πᾶσαν τὴν Εὐρώπην περιωνύμας ἀποτεχθῆν, ἐμοὶ δ', ἐρωτικῶς περὶ τὰς μαθηματικὰς ἔχοντι μελέτας, εἰσποιηθῆν, τόν τε Ἑλληνα λόγον, καὶ ἄλλως ἐντελῆ καὶ τραυλίζοντα, προῖδαι παιδεύειν, ὡς ἂν ἔχαι καὶ ὑμῖν συγγίγνεται, καὶ τῶν ἰδίων αὐτῷ ἀγαθῶν ἐπ' ἀδείας μεταδίδοναι. Ἐπει δὲ πρόθεσις αὐτῷ τῶν Μαθηματικῶν ὅσατε καθαρά καὶ ὅσα φυσικώτερα, ὡς ἂν φαίη ὁ Σταγειρίτης (1), ὡς αἰὼν τε σαφῶς τε καὶ ἐν ἐπιτομῇ ἐκδιδάξαι, φέρε, διὰ βραχείων τὴν ἐνίων πραγματειῶν, τῶν ἐν αὐτῷ, ἀρχήν τε καὶ πρόοδον ἰσορρομώτερον σκεψάμενοι, ὅθεν ταύτας συνελξάμεθα, ἀποδώμεν τελευταῖον τὸν λόγον.

Τὸς μὲν οὖν πάντων ἐν σοφίᾳ διενεγκόντας Ἑλλήνας, ἐξ Αἰγυπτίων καὶ Χαλδαίων τὰ τῆς Γεωμετρίας παραλαβόντας ἐναύσματα (2), εἰς πυρρὸν μέγαν ἐξάραυ,

(1) Φυσ. Ἀρχ. ἐν Β'. Κεφ. Β'.

(2) "Περὶ Αἰγυπτίου αἱ Μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνείησαν· ἐκεῖ γὰρ ἠρεῖσθαι χολάζειν τὸ τῶν ἱερῶν ἔθνος. Ἀριστοτ. Μεταφ. Μειζ. Α'. Κεφ. Α'." "Μαρτυρεῖσι δὲ καὶ τῶν Ἑλλήνων οἱ σοφώτατοι, Σόλων, Θαλῆς, Πλάτων, Εὐδοξος, Πυθαγόρας (ὡς δ' ἐνίοι φασί, καὶ Λυκάργος) εἰς Αἴγυπτον ἀφικόμενοι καὶ συγγεινόμενοι τοῖς ἱερεῦσι,, Πλάτ. περὶ Ἰσίδ. καὶ Οὔσιρ.

μυρία οἰκᾶν προσεπινοήσαντες, ὁμολογῶσι μὲν πάντες μονονυχί, ἐπιμαρτυρῶσι δὲ τέτοις λαμπρῶς καὶ τὰ ἐκ τῆς Ἑλλάδος ναυαγίᾳ περισθέντα συγγράμματα, ὡς ἀξίως ἐαυτῶν ἐκεῖνοι περὶ τὰ γεωμετρικὰ πονήσαντες ζητήματα διετέλεσαν· τῆς μέντοι γενικωτέρας Ἀριθμητικῆς, ἣτις ἡμῖν Συμβολικὸς ἐκλήθη λογισμὸς, δι' ὅς ἐποίησομεν ὕπερον λόγους, ὅδενα ἴσμεν τῶν πάλαι συγγραφεία, ἀλλ' ἢ Διόφαντον τὸν Ἀλεξανδρέα, περὶ τὴν τετάρτην ἀπὸ Θεογονίας ἑκατονταστηρίδα γενόμενον, ὃ πολλὰ καὶ ἄλλα γεγραφότος, ὡς πολλοὶ διατείνονται, εἰς ἡμᾶς ἐξ μόνον διεσώθη βιβλία, τὸ μὲν πρῶτον, εἰς τὴν τῶν Ῥωμαίων ἐρμηνευθέντα φωνήν, ἐν Βασιλείᾳ ὑπὸ Γ. Ξυλαΐδου τῷ 1576 ἔτει τύποις ἐκδοθέντα, εἶτα δὲ πολλαχῶς ὑπὸ διαφόρων Ῥωμαῖσι ἅμα καὶ Ἑλλησιν τῆ τυπικῆς τυχόντα φωτός. Ἀλλ' ἔστιν ἐν τέτοις ἀληθῶς ἰδεῖν τέλειον ὅδε, ὅτι μὴ ἴχνη ἄττα τῶ νῦν τελειοτάτῃ Συμβολικῷ λογισμῷ ἀμυδρὰ καὶ βραχέα, καὶ μόνον δεικνύντα, ὡς ἄρα καὶ τοῖς πάλαι τὸ Θεσπέσιον τόδε χεῖμα καὶ κάμπαν ἦν ἀδύλον.

Ἀλλὰ γὰρ περὶ ἢ δημοσιευθῆναι κατὰ τὴν Εὐρώπην τὰ Διοφάντῳ συγγραφέντα, τὸ Ἀράβων ἔθνος, θαυμάσιος τοῖς ὅπλοις διευδοκιμηκότες, καὶ πᾶσαν μὲν τὴν Αἰθύν, πᾶσαν δὲ μονονὴ τὴν Ἰβήρων χώραν, ὑφ' ἐαυτὸς ποιησάμενοι, τὴν Φιλοσοφίαν μὲν ἐν γένει, τὴν δὲ Μαθηματικὴν ἐν εἴδει, περὶ πολλὰ ποιούμενοι, τῇ τε ὁμόρῳ Γαλλίᾳ, καὶ δὴ καὶ τοῖς λοιποῖς Εὐρωπαίοις ἔβησι, τέτων μετέδωκαν. ἐντεῦθεν ἄρα καὶ τὴν γενικωτέραν Ἀριθμητικὴν, ἣν αὐτοὶ μὲν τῇ ἰδίᾳ φωνῇ Ἀλγεβραν ἐκάλεον, καὶ εὐ

ρεταις Μωάμεθ τῷ Μωσέως ἰψ̄ και Μωάμεθ ἐτέρῳ τῷ Βαγδαδηνῷ ἀπένεμον, εἰκὸς δὲ εἰς τὴν αὐτῶν φωνὴν ἐξ Ἑλληνικῶν συγγραμμάτων σὺν ἄλλαις ἐκ εὐαρέθμοις με-
τηνέχθαι (1), τοῖς τὴν Εὐρώπην οἰκῶσιν ἐκοίνωσαν· καὶ
γὰρ Φ. Λυκάς Πακκίολος πρῶτος ἐξέδοτο βιβλῶν περὶ
τοῦτο σρεφομένην ὑπακείμενον, ἧς ἦν ἐπιγραφὴ Σύνο-
ψις Ἀριθμητικῆς καὶ Γεωμετρίας, ἀναλο-
γιῶν τε καὶ ἀναλογικῶν, τυπωθεῖσα, εἰ χρη-
οὔαλεντι πισεύειν, Ἐνετήσιν κατὰ τὸ 1494 ἔτος· ἀλλ'
ἐν ταύτῃ, ἱκανῶς ἄλλως περίτε τῆς ἐν εἰδῇ Ἀριθμητικῆς
καὶ δὴ καὶ τῆς γενικωτέρας πραγματευομένη, εἰς τὰς δευ-
τεροβαθμίας τῶν ἐξισώσεων αἱ σῆλαι πῆγνυνται, οἱ δηλο-
νότι καὶ τοῖς Ἀραψίν ἀφικέσθαι ἐξηγένετο. Οὐ μὴν ἀλλ' ἔδ'
οἱ ἐκ τέτῳ ἀναφανέντες Μαθηματικοὶ ἐφ' ἱκανὸν χρόνον
ἰχυσάντι οἰκοθεν συνεισενεγκεῖν τῷ πράγματι μέχρι τῆ
1545 σωτηρίᾳ ἔτεος.

Ἐν τούτῳ δὲ ἐξέλαμψε βιβλὸς, Μεγάλη τέχνη
ἐπιγραφὴν φέρουσα, Γερωνύμῳ Καρδάνῳ τῷ ἐκ Μεδιολά-
νων ποτηθεῖσα, ἐν ᾗ πρὸς ταῖς τετραγωνικαῖς ἐπιλύονται
καὶ αἱ κυβικαὶ ἐξισώσεις· ἐκ τέτῳ ἄρχα καὶ τὰς γενικὰς τύ-
πας, καθ' ἑς τριτοβάθμιος ἐξίσωσις ἐπιλύεται, Καρδα-
νείης ὀνομάζεσθαι ἐξενίκησε, ὡς Κάρδανῳ, καί ται καὶ ἄλλων
εἰς τῆτο προμοχθισάντων, καὶ τετελειωκότος καὶ δέδειχότος
καὶ δὴ καὶ τῷ καινῷ τὸ χεῖμα ποιήσαντος, ἔμην ἀλλὰ καὶ μέ-
θοδον καινὴν ἄλλην ἐν τῇ ῥήθεισῃ βίβλῳ πάρεσιν ἰδεῖν θαυμα-

(1) Ἰ'δε Β83δ. ἐν Ἰ'σορ. Φιλοσ. Κεφ. Ε'. §. γ'.

σιωτέραν παρὰ πολὺ· ἦν, τῷ αὐτῷ Γεωμέτρῳ μαρτυροῦ-
τος, Λυδοβίκος ὁ ἐκ Φερράρων, ἀκροατὴς αὐτῷ γενό-
μενος, εὗρατο, ἐκτεθεισομένην καὶ ἡμῖν ἐν τῇ τῶν τεταρ-
τοβαθμίων ἐξισώσεων ἐπιλύσει· ἐκ τούτου δὲ ἔδεν ἐπιεικῶς,
ὅτι καὶ λόγῳ τινὸς εἶναι ἄξιον, ἐπὶ τῆς τῶν ἐξισώσεων ἐπιλύ-
σεως ἐπινηνῶνται· ἐνδεῖ γὰρ ἡμῖν εἰς δεῦρο, καὶ ἐπὶ πολλὴν
ἀναμφορείως ἐνδεῖσαι χρόνον, μεθόδῳ γενικῇς πρὸς ἐπι-
λυσιν τῶν τετάρτου βαθμίου ὑπερθεσῶν ἐξισώσεων·
ἦν δὲ Βικέντιος Φικάτιος εὗρατο, μερικῆτις ὑπάρχει, τὰς
παντὸς βαθμῆς ἐξισώσεις ἐν ῥηταῖς τισὶ θέσεσιν εἰς τύ-
πον ἀδελφὸν τῷ Καρδανείῳ φέρεσα.

Ἀλλὰ γὰρ, τέως μὲν ἔδεν τοῖς τῷ Ἀλφραβήτῳ γεάμ-
μασιν, ὅτι μὴ εἰς ἐνδειξιν τῶς ἀγνώστων ποσῶν, ἀριθμοῖς
δὲ πάντες, οἱ περὶ τούτου ἔχοντες τῆς Ἀριθμητικῆς τὸ εἶ-
δος, ἐχεῶντο· ὅθεν αἵτε λύσεις μερικώτεραι καθίσταντο,
καὶ τῶν θέσεων ἐν προβλήματι ὁμοειδῆ μεταβαλλεσῶν,
ἐνστήσασθαι ἐξ ὑπαρχῆς ἐχεῖν τὰ τῆς πράξεως, πρὶν ἐ-
ξέλαμψεν ὁ ἐκ Γαλλίας ὀρμώμενος Οὐιέτος, ὃν εἴτις εἶ-
ποι τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ πατέρα ἐκ αὐτῶν ἀμάρετοι, πρῶ-
τος ἀντὶ μὲν ἀριθμῶν τοῖς τῶν γραμμάτων στοιχείοις χρη-
σάμενος, συμβόλοις δὲ τῶν ποσῶν τάτε γνωστὰ καὶ τὰ ἀ-
γνωστα διακρίνας· ἡδὲ γε λυσιτελεσάτη αὕτη μεταβολή,
ἢ τὰς λύσεις τῶν προβλημάτων εὐμαρετέρας τε καὶ ἀπλο-
τέρας καὶ καθολικώτερας ἀναδείξασα, τόν τε περικλεῆ Οὐιέ-
τον ἀπαθανατίσασα, μικρῷ πρόθεν τῷ 1600 ἔτις ἐ-
γένετο.

Μετὰ δὲ Οὐιέτον ἀνεφάνη Γυλιέλμος Οὐγγερός Ἀγγλος

τὸ Μαθηματικόν, ἡ Θωμᾶ Αῤῥιότι, Αἴγγλε ἡ αὐτῆ, τὰ συγγράμματα κατὰ τὸ 1631 ἔτος· ἐν δὲ τῷ 1637 ὁ μέγας τῆς Γαλλίας φωνὴ Καρτέσιος ἐξέδοτο τὴν αὐτῆ περίπυσον Γεωμετείαν, ἣν ἄντις δικαιοτέρεον προσείποι Συμβολικὸν λογισμόν. Κατῇ μὲν ἔν οἱ Γεωμέτραι ἔτσι ἐξέφηναν μὲν τὸν σχηματισμὸν τῶν συνθέτων ἐξισώσεων, διεῖλον δὲ τὰς ρίζας εἰς λειπτικὰς τε ἡ ὑπαρκτικὰς, εἰς βητὰς ἡ ἀρρήτους, ἡ τελευταῖον εἰς πραγματικὰς ἡ ἐπιπλάσους, πλήθει τε ἐφευρέσεων ἡ χρήσεων τὸν Συμβολικὸν λογισμόν κατεπλάτισαν· ὁδέγε κλειπὸς Καρτέσιος, τὸ ἀναλυτικὸν τέτε μέρος ταῖς καμπύλαις ἐφαρμόσας, ἔργον ὑπέρεμεγα ἀληθῶς, ἡ ἔδ' ἂν ὁ πᾶς αἰὼν ἐπιλάθοιτο, ἀξίως τῆς μεγαλοφυῖας αὐτῆ ἐξετέλεσε, πολλὰ μὲν ἐπιλύσας αὐτὸς ἔτω προβλήματα, ἐφ' οἷς ἐπόνεν διακενῆς οἱ πάλαι, πολλὰ δὲ καὶ τῶν Γεωμετρῶν τοῖς μεθ' αὐτὸν ἀφορεμῆν δὲς ἐπιλύσασθαι, ἡ πολλὰς μεθόδους εἰς τὸ ἀκριβέστερον ἐξεργάσασθαι.

Τοιγαρῆν ἔτω τὸν Συμβολικὸν λογισμόν, ἡ Ἑλλὰς μὲν τὰς πρώτας γονὰς ἐκυοφόρησεν, Αἰῤῥαβες δὲ βρέφος μάλα νήπιον εἰς Εὐρώπην μετήνεγκαν, μέχρι Καρτεσίῃ γαλακτοτροφόμενον, ἐξ ἐκείνου ἔχ' ὅπως εἰς ἀνδρας παραγωγείλαι συνέβη, ἀλλ' ἐξάίσιοντι κραिताωθῆναι, Ἡρακλῆν ἄλλον ἀτεχνῶς ἀναδειχθέντα, ῥοπάλῳ ὀιονεῖ ὑπερφυεῖ πρὸς πάντα ἄλλον γειναίως ἀναδυόμενον· ἵνα γὰρ αὐτῆ τὸ μέρος παραλίπῳ τὸ ὑψηλότερον, περὶ ἡ λελέξεταῖ προῖδοι, τοσαῦτα μετὰ Καρτέσιον ἡ τοιαῦτα προῖλθε τῆ γένους τέτε συγγράμματα, ὅσα, Ὀμηρος ἂν ἔτσι,

φύλλα καὶ ἀνθεα γίνεται ὥρη· Ἐκ τούτου γὰρ Νεύτωνες καὶ Βάκωνες καὶ Λεϊβνίτιοι ὥφθησαν, οἱ ἐν τοῖς ἄθλοις τοῖς δὲ περικλεῶς ἀγωνισάμενοι· Οὐόλφιος τε ὁ Γερμανὸς, καὶ Μαρία Ἀΐγνισία ἡ μεγάλη τῆς Ἰταλίας φιλόσοφος, ὁ Γάλλοσ τε Καίλλος, καὶ Μάριος καὶ Βεζέτιος καὶ Βοσσύτιος, ἐνδόξως ἐπένησαν περὶ τούτου τοῦ εἶδους τῆς Μαθηματικῆς, καὶ τὰ θαυμάσια ἡμῖν κατέλιπον αὐτῶν συγγράμματα. Τούτων δ' ἀπάντων μακρὰ δυνήενκεν ὁ πολὺς τὴν δόξαν Εὐλερος ὁ Γερμανὸς, ὃ τὸ πολύκροτον σύγγραμμα ἐκ τοῦ λατινικοῦ ἰδιώματος εἰς τὴν Γαλλικὴν ἐρμηνευθὲν φωνήν, ἐτυπώθη ἐν ἔτει 1773· τῷ δ' ἐφεξῆς ἐν Παρισίοις ἐκδόδαται καὶ Σαυρίε (Sauri) ἡ πεντάτομος μαθηματικὴ σειρὰ, ἐξ ἧς καί μοι τὰ πλείω τῶν τῇ αἰᾷ χειρὸς βίβλῳ ἐπεισαχθέντων ἀπήνθισαι. Ἀετίως δὲ καὶ Λακροῖε, τῷ νῦν περιφίμῳ ἐν Παρισίοις διδασκάλῳ τῆς Μαθηματικῆς, καὶ ἄλλων παντὸς λόγου ἄξια συγγράμματα ἐδημοσιεύθησαν. Περὶ μὲν ἔν τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ ἄλλος.

Τῆς δὲ Γεωμετρίας χαλεπὸν μὲν ἐπιεικῶς ἐξευρεῖν τὰ πρῶτα γενέθλια, καίτοι συχνοὶ (1) τοῖς περὶ τὸν Νεῖλλον οἰκῶσι τὴν τῆς ἐπισήμης ἀπονέμεσιν· εὖρεσιν, ὡς ἀνάγκης αὐτοὺς εἰς τούτ' ἐναγύσης, ἵν' εὐμαρῶς διακρίνουν ἔχαιεν τὰς τῶν ἀγρῶν αὐτοῖς ὄρες, συγχεομένους ὑ-

(1) Ἡ ρόδ. Βιβλ. Β'. Διόδωρ. Σικελ. βιβλ. Α'. Μίτιδι δὲ καὶ Ἰώσηπ. Ἀρχαιολ. Βιβλ. Α'. Κεφ. Θ'. τὴν παρὰ τοῖς Αἰγυπτίοις μαθηματικὴν εἰδήσιν διεξερχόμενον.

πὸ τῆς ἐτησίας τῷ ποταμῷ ἐπικλύσεως· Ἐκεῖνο μέντοι ἀμφιβολίας ἐκτός ἐστι πάσης μὴ ὑχλ ἀρχαιότατόν τι πεφυκέναι τὸ χεῖμα· ἐπεὶ γὰρ ἀρχῆθεν ἄνθρωποι χωρία σφίσιν ἤρξαντο νέμεσθαι, ἐδέησε δὴ πρὸς καὶ τὰ εἰς τὴν τάτων καταμέτρησιν αὐτὰς προσευρεῖν. Ὅθεν ὀρμηθέντες καὶ μεθόδες ἄλλας ἐζήτησαν, δι' ὧν ἂν γνοῖεν ποταμῶν μὲν ἀδιαβάτων πλάτη, ὀρέων δ' ἀνεπιβάτων καὶ πύργων ὕψη, τειχέων δὲ πάχη καὶ τὰ τέτοις παραπλήσια· εἰκὸς δ' αὐτὸς, τὰ μὲν πρῶτα τὰ σκοπεῖ ἀτευκτῆσαν, μετὰ δὲ πολλῶν καὶ ἀτρεῦτων πόνων ἀνευρεῖν τὰς κανόνας πρὸς τὴν τῷ σκοπεμένῳ ἐπίτευξιν. Πρῶτος μὲν ἔν Εὐκλείδῃ, ὃ ὁδολὸς ἐστὶν ἡ πατρις, πρὸ δὲ περὶ ἐννιαντῶν χιλιάδων τὰς εἰς ἑαυτὸν γνωθεύσας Γεωμετρικὰς ἀρχὰς εἰς ἓν συλλέξας, τὰ θρυλλέμενα σοιχεῖα ἡμῖν τῆς ἐπισήμης ταύτης προσκατέβαλε, δι' ἃν ἀπανταχὲ γῆς σοιχεῖον εἰώθασι τὰς μαθητιῶντας·

Εὐκλείδῃ δὲ μεθ' ὅλην σχεδὸν ἑκατονταετηρίδα Ἐρατοδένῃς ἐπεγένετο, καὶ ὁ Γεωμετρῶν ἀπάντων νοός τε ὀξύτητι καὶ ἐφευρέσεων πλήθει ἅπασιν μονογενὲς ἐξυμνόμενος ὕπατος Ἀρχιμήδης, ὃ πολλὰ μὲν ὁ πανδαμάτωρ ἐξηφάνισε χερός συγγράμματα, πολλὰ δὲ καὶ εἰς ἡμᾶς διεσώθησαν. Μετὰ δὲ Ἀρχιμήδην ὃ πολλῶν ὕπερον χερόν Α' πολλώσις ἠκμασεν ὁ Περγαῖος, μέγας ἐπονομαδεὶς Γεωμέτρης· δεῖγμα δὲ τῆς τῷ ἀνδρὸς μεγαλοφυΐας τὰ σωζόμενα περὶ τῶν τομῶν τῷ Κώνῃ ἐπτὰ βιβλία· Καὶ Θεοδόσιος δὲ ὁ Τριπολίτης βιβλία τρία περὶ Σφαιρᾶς ἡμῖν κατέλιπεν, ἀεὶ γινώτα τοῖς πᾶσι, καὶ τοῖς καθ' ἡμᾶς φροντιστηρίοις τοῖς

μαθητιῶσι προβαλλόμενα· Εξῆς δὲ Πτολεμαίου Κλαυδίου ἀκμάσαντος, Εὐτοκίῃ τε Ἀσκαλωνίτῃ, καὶ Φίλωνος, καὶ Νικομήδους, καὶ Σπόρου, καὶ Ἡρώωνος, ἔσχατος μὲν Ἑλλήνων Γεωμετρῶν τῷ χρόνῳ, εἰς ἄκρον δ' ἐληλακῶς τῆς περὶ τὰ Μαθηματικὰ παιδείας, καὶ τοῖς πρώτοις ἐγκαταριθμεῖσθαι δίκαιος, Πάππος ἐγένετο ὁ Ἀλεξανδρεὺς, ὁ περὶ τὴν α'. ἀπὸ Χριστοῦ ἑκατονταστηρίδα βιώσας.

Τῶν μὲν οὖν Ἑλλήνων Γεωμετρῶν, ὥντε ἐμνήσθημεν, καὶ ὧν σιγῇ παρεδράμομεν, τῷ λόγῳ σπεύδοντες, οἱ μὲν περὶ τὴν Γεωμετρίαν μαθηματικῶς ἠχαλήθησαν, οἱ δὲ καὶ τῶν φυσικωτέρων ἐκ ὤκησαν ἄψαδαι, Ἀστρονομίας ἀμέλει, καὶ τῆς περὶ τὴν κατασκευὴν τῶν μηχανῶν ἀναστροφόμενης ἐπιστήμης, καὶ τῶν ἄλλων, ὧν ἡδὴ ἠγνόηται εἰς φῶς ὁ χρόνος· καὶ οἱ μὲν μόνῃ τῇ σοιχειώδει, οἱ δὲ καὶ τῇ ὑψηλωτέρᾳ, ἥς ἔργον ἡ τῶν καμπύλων γραμμῶν ἐξέτασις, προσέχον τὸν νῦν, ἥ δὴλον καθίσταται τῷ μετὰ προσοχῆς μετιόντι τάτε περὶ αὐτῶν καθιστορέμενα (1), καὶ μὴν ἀλλὰ καὶ τὰ διασωθέντα ἡμῖν ἐκείνων συγγράμματα, ἐξ ὧν πᾶς ἄντις συνίδοι ὅσον ὀξυνοίας περιῆν τοῖς Ἀνδράσιν ἐκείνοις, καὶ ὅπως ἐπιμελῶς, καὶ εὐτυχῶς καὶ Δία, περιπολλὰ πεπονηκότες ἐγένοντο· ἀλλ' ἦν ἀτεχνῶς, ἢ ἐχρῶντο, ἢ μέθοδος πόνου τε πολλῷ δεομένη, καὶ ἡμιτελής πως ἄτε δὴ πολλῶν μὴ ἐφικνυμένη θεωρημάτων, διὰ τὸ συν-

(1) Ὅρα Βαλάνου τὴν ἐξ Ἰωαννίνων τὸν πρόλογον τῆς τρίτομης Μαθηματικῆς αὐτῇ ὁδῷ, καὶ Εὐγενίου τῷ Βελγάρει τὴν ἱστορικὴν ἀφήγησιν τῇν τῶν κατὰ Τακβετίου Γεωμετρικῶν σοιχειῶν προταχθεῖσαν.

βελτικῶς βαίνειν, καίτοι Ἀρχιμήδην τὴν τῶν νεωτέρων ἀναλυτικὴν μέθοδον, αὐτὸν μὲν ἐπίσαδαι, τῶν ἄλλων δὲ εἶναι ἑκπυσον ποιῆσαι, συχνὰ παρέδωκαν.

Ἐκ δὲ τῶν ἡμετέρων παραδεχόμενοι οἱ τὴν Εὐρώπην οὐκ οὔτε τὰ τῆς Γεωμετρίας ἐνύσματα, καὶ φιλοτίμως περὶ τὴν αὐτῶν ἔχοντες περιβαλψιν, ἔδον ὅ,τι λαμπρὸν, καὶ δόξης παρασκευασικὸν ἐξέτελεσαν, εἰ καὶ λίαν πεπονηκότες καὶ ἐκ ἀγενῆ καταβεβληκότες τὴν σπουδὴν ἐφάνησαν· πρὶν ὁ πολὺς τὴν δόξαν Καρτέσιος τὸν Συμβολικὸν αὐτῇ, ὡς εἴρηται, ἐφαρμόσας λογισμὸν, καὶ ταύτῃ ἐκείνῳ, ἔτω φάναι, συγκαθολικεύσας, τῷ μὲν τὸ κράτος ὅσον, λαμπρῶς ἀπέδειξε· τῆς δὲ ἐκ ὅπως τὰ χαλεπὰ ἐξευμάρισεν, ἀλλὰ καὶ τὰ ὀλίγα ἐπλήθυνε, καὶ πολλὰ, τὰ πρὶν αἰετὰ δοκῦντα, τάχιστα ἅμα καὶ εὐμαρέστα λατὰ ἡμῖν πρῆβηκε, καὶ εἰς μέγαν ἔτω πυρσὸν τὸ τῆς Γεωμετρίας ἀνῆψε φεγγάριον· Οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τοῖς ἐπιγνομέναις ὑποθέσεις παραχῶν, τὸν ὑψηλότερον λογισμὸν ἀναφανῆναι, περὶ ὃ καὶ δὴ ἐρῶμεν, αὐτὸς κατέστη παράτιτος.

Τάδε τοίνυν τῷ καυοφανῶς δοκῦντος ὑψηλοῦ λογισμοῦ διμερῆς ὄντος, τὸ μὲν Λογισμὸς τῶν Ἀπειροσῶν, θάτερον δὲ τῶν Ὀλοκλήρων ἡμῖν ὠνόμασαι· καὶ πατέρες μὲν αὐτῶν παρὰ μὲν Ἀγγλοῖς Νεύτων, Γερμανοῖς δὲ Λεΐβνιτιος γεραίρονται. ὅτι δὲ καὶ τοῖς παλαι, αἱ γὰρ αὐτῇ βεβαιώματα ἀρχαὶ ἐκ ἡγνοῦντο αὐτοῖς ἡμῖν εἰσι μαρτυρεῦντες τῶν νεωτέρων οἱ ὑπάτοι (1)· αὐτίκα Εὐκλείδης ἐν

(1) Σαύριος ἐν τῷ προομίῳ τῷ λογισμῷ τῶν Ἀπειροσῶν, καὶ Λακρόϊος (Lacroix) καὶ ἄλλοι συχνὰ τὰ αὐτὰ μοῖουσι συμφερόγουσι.

Προτάσει β'. τῷ β'. βιβλίῳ τὲς τῶν κύκλων λόγους τοῖς τῶν ἐγγεγραμμένων τοῖς κύκλοις πολυγώνων τὲς αὐτὰς εἶναι δεικνύς τῇ τῶν πλευρῶν ἐπαλλήλῳ διχοτομήσει, ἐπὶ τοσούτον τὸ πολύγωνον τῷ κύκλῳ ἐγγυὲς φησὶ γίνεσθαι, ὡς τούτου διαφέρειν ἐκείνου ποσότητι ἀπάσης δεδομένης ἐλάσσονι· καίτοι ποσότης ἢ ἀπάσης δόσεως ἐλάσσων, καὶ ποσότης ἀπειράκις μικρὰ, εἴτ' ἔν ἀπειροσῇ, τίνι ἂν ἀλλήλων διαφέρειεν; ἢ ψιλοῖς τοῖς τῶν ἐνομάτων ἀπηχίμασι, πράγματος τῷ αὐτῷ ἐκατέρωθι ἐμφαινόμεν· ἀλλ' ἀδελφὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἴδοι τις ἂν ἐπισήσας τὸν νῦν καὶ Ἀρχιμήδην, καὶ Ἀπολλώνιον, καὶ Πάππον καὶ ἄλλους τῶν παλαιῶν Γεωμετρῶν, πολλαχῶς τῶν καθ' ἑαυτὰς συγγεγραμμάτων φρονήσαντάς τε καὶ γράψαντας. Ταύτης ἔν τῆς ὑψηλῆς ἐπισήμης, ἧς ἔχνε' ἅττα καὶ ἀμυδρὰς ἐννοίας, καὶ ψιλὰς ὡς εἰπεῖν τὰς ἀρχὰς οἱ πάλοι κατεῖχον, ὁ μέγας Νεύτων ὑπὸ Καρτερίου διὰ τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ τὰς καμπύλας τῶν γραμμῶν ἀνασκοπεῖν ἐναχθεῖς, νοὸς ὕψει ὑπερφυεῖ καὶ πόνοις ἀτελείτοις χρητάμενος, πατήρ ἀνεδείχθη περικλεέστατος, τὸν δίδυμον ἡμῖν προβαλὼν τοκετὸν, εἴτ' ἔν, ὡς αὐτὸς ὁ τεκὼν ἔχαιρεν ὀνομάζειν, τὸν λογισμὸν τῶν ῥοῶν, καὶ τὸν τῶν ῥεόντων· ἀλλὰ γὰρ ἐκείνου κυοφορῆντος ἐν Ἀγγλίᾳ, καὶ περὶ τὰς ὠδῖνας ἔχοντος, ὁ ἐν Γερμανίᾳ Λεϊβίτιος, μέγας καὶ ἔτος ἀνῆλθ' ἐν τῇ Μαθηματικῇ, καὶ τ' ἄλλα εἶδη τῆς Φιλοσοφίας, φιλοτίμως πρὸς τὸν Ἀγγλον φιλόσοφον ἔχων, καὶ περὶ καλλίστων τῶν τῆς φιλοσοφίας σπουδασμάτων ἐν ἐκείνοις τοῖς χρόνοις φιλονεικῶν, ἀντίγραφά τινά τῆς Νευτωνεῖς σπεδῆς ὑφ' ἀρεπάσαι, φίλων

πρὸς τῶν ὑπερῃσάντων, δεδύνηται. Ταῦτα τοίνυν ὁ Γερμανὸς φιλόσοφος περισκοπήσας ἀτενῶς, καὶ ὅσον τῷ Ἀγγλῷ δόξης ἐκ ταύτης τῆς ἐπινοίας παρέψεῖναι ἔμελλε, κατανοήσας, ἰν' αὐτὸς τῆς δόξης ταύτης τύχη, φιλοτιμωτάτην τὴν ἄμεινον περὶ τῆς ὥφθι ποιησάμενος· καὶ δὴ ἐν τῷ βραχεῖ μὲν ἀλλήλων ἀπέχουσι χώροις, ἐν χρόνῳ δὲ τῷ αὐτῷ δυοῖν πολλῶν καὶ μεγάλων τὴν σοφίαν ἀνδρῶν Νεύτωνος, καὶ Λεϊβνιτίου ἢ τοῦ Λογισμοῦ τῶν ἀπειροσῶν, καὶ ἡ τῶν ὁλοκληρῶν ἐπιστήμη προῆλθεν· εἰσὶν ὅν οἱ διατείνονται, καὶ τυχὸν ἐκ ἀλόγως, ἀδικον φεύγειν τὴν κλοπῆς γραφὴν τὸν Γερμανὸν φιλόσοφον. ἀλλ' ἅμα ἐκάτερον ἰδίᾳ περὶ τὰ αὐτὰ πράγματα ἀχοληθέντας, καὶ τὴν αὐτὴν ἀλήθειαν παρατετηρηκότας ἐξευγνεῖν οἷες τε γινέσθαι τὴν θαυμαζομένην ταύτην ἐπιστήμην, ἣν ἐν διαφόροις ἐσθήμιναν τοῖς ὀνόμασι· ὁ μὲν γὰρ ἐκεῖν προσεῖρηται ῥοή (fluxion), τῷ Λεϊβνιτίῳ κέκληται διαφορά· ὁ δ' ἐκεῖν ῥέον (fluente) τότε (integral) ὁλόκληρον. ἀλλ' ὅπως αὖ ἔχει τὰ περὶ τῆτων, ἐκεῖνο μέντοι παντὸς ἀληθέσερον παρὰ πάντων καθομολογεῖται διὰ ταύτην γὰρ τὴν ἐπιστήμην πλήρης μὲν ἐγένετο ἡ Ἀερονομία καὶ τῶν ἐφευρέσεων, πλοῦς δὲ ἡ μηχανικὴ, πλήρης δὲ γενικῶς εἰπεῖν ἅπαντα ἡ περὶ τὴν φύσιν σφαιρικήν πραγματεία. Διὸ δὴ ὑπὲρ ταύτης Νεύτωνι καὶ Λεϊβνιτίῳ ἀθάνατον περιέσαι τὸ κλέος

Οἱ μὲν ὅν περὶ τοῦ λογισμοῦ τῆς εἰδῆς μετ' αὐτὸς γεγενημένοι πολλοὶ ἐγένοντο καὶ ἀγαθοὶ δι' ὅλης τῆς παρελθούσης ἑκατονταετηρίδος, οἱ καὶ ἐπὶ τὸ τελειώτερον αὐτὴν ἡγάγον, οἱ μὲν ἐν ταῖς καθ' ἑαυτὸς μαθηματικαῖς σει-

ραῖς ἔπερι ταύτης διαλαβόντες τῆς ἐπισήμης, οἱ δὲ ταύτην μόνην ποιησάμενοι πρόθεσιν, ὧν ἔστιν εἰς ὁ καθ' ἡμᾶς ἐν Παρισίοις κλείζομενος Λακρόιος, πάνθ' ὅσα ταῖς πρότερον περὶ τούτῳ τῷ λογισμῷ ἀνέυχται εἰς ἐν ἀθροί-
σας, ἔχοντι τῶν νῦν ὑπερβολὴν ἐν τούτῳ καταλιπὼν, ὡς ἐπιμαρτυροῦσι πάντες, ἔκαστω πάρεσιν ἰδεῖν μετελθόντι τὴν διτομον αὐτῇ πραγματείαν τῇ τῶν Ἀπειροσῶν, ἔξ Ὀλοκλήρων λογισμῶν, τὴν ἐν ἔτει 1797 ἐκδοθεῖσαν, ἣ ἔ-
τρίτον προσέθετο τόμον περὶ σειρῶν ἐκδοθέντα κατὰ τὸ 1800 ἔτος, ἔχοντι μὲν τὸ τῆς καθαρᾶς Μαθηματικῆς χεῖ-
μα, ὡς διὰ βραχέων εἰρήκαμεν, ἐκ παλαιωτάτων χρόνων ἀρξάμενον τοῖς ἐκ τῶν κατὰ τὴν Εὐρώπην ἐθνῶν προσήχθη
τε εἰς μέγα, ἔχοντι ἐξείργασαι, ὡς μεδένα διαμφοισθη-
τεῖν μὴ ὑπὲρ ταύτην μόνην ὑπάρχειν ἐπισήμην, βεβαίαν
δήπευ γινῶσιν ἔξ ἀναμφήριον, ἔξ διὰ μόνην ταύτην πολλὰς
ἔξ ὠφελιμωτάταις καταπλῃτιδῆναι τὸν βίον εἰδήσεσιν.

Ἡ δὲ φυσικωτέρα, ἔξ ὡς τοῖς νεωτέροις φίλον ὄνομα-
ζειν, ἡ μικτὴ Μαθηματικὴ, ἔστι μὲν, ἣ δῆλον παντὶ, ἐ-
κείνης πρεσβυτέρα, ἔξ ὅτῳ φάναι μήτηρ αὐτῆς ἔξ τρο-
φός. Γεωμετρεῖν γάρ πρᾶξιν ἔξ Ἀξονομεῖν ἀρξάμενοι
ἄνθρωποι τὴν γενικὴν ἔξ ἀφηρημένην ἐξήνεγκαν θεωρίαν
τῆς τῷ διαστήματος ἐκμετρήσεως· τετελειώται δὲ ἔξ ἐ-
ξηκριβῶται ἡ γεαῦς ὑπὸ τῆς παιδός, ἔξ οἷον εἰς θρέπτρα ἀ-
πέχει ταῦτα, τὸ ἐμπλήσαι πᾶσαν τὴν φυσικὴν ἐπισή-
μην τῶν θεωρημάτων ἐαυτῆς, μᾶλλον δὲ ἐκείνην τρέψαι
ἔξ, ὅτῳ φάναι, μετεσιῶσαι εἰς ἐαυτήν· καί γε εἰκότως· ἐ-
πεὶ γάρ τοῖς σώμασιν ἀναγκαίως συνῆπται ἔκτασις, ἔξ

βάρος, ἔ κίνησις, ἔ ἐφέλκυσις κτλ. ταῦτα δὲ ὡς πα-
σὰ θεωρούμενα μαθηματικῶν θεωρημάτων ὑπόθεσις γίνε-
ται, ὁ τῆς Φυσικῆς ἐπισήμης τὴν Μαθηματικὴν ἀποσπά-
σαι ἔ ἀπαλλοτριῶσαι, πειρώμενος, ἐδὲν ἔλαττον, εἰ
μὴ ἔ μάλλον, ἔσαι καταγέλαστος, ἢ εἰτις τῶν σωμα-
των τὰς εἰρημένας ιδιότητας ἀποσερεῖν ἀνηνύτως καταναγ-
κάξοιτο. Ταῦτ' ἄρα τοῖς τε πάλαι ἔ τοῖς καθ' ἡμᾶς,
εἴπερ ἄλλοτε, ἐδὲν ἐγένετο τῆς ἀφηρημένης Μαθηματικῆς
σπέδασμα, ὁ μὴ παρέχοιτο τῷ κοινωνικῷ βίῳ τινὰ ξυν-
τέλειαν· διὸ Ἀερονομία τε, δι' ἣν αἰνεῖται κατὰ τὸν ψαλ-
μῶδον ὁ Κύριος (1), ἔ Ναυτιλία, ἔ Μηχανική, ἔ Ἀε-
χιτεκτονική, ἔ Ἀεροςτατική, ἔ Τ'δραυλική, ἔ ἡ τῶν ὀ-
πλων ἐπισήμη, ἔ μυρίαί ἄλλαι, αἱ τὲς καθ' ἡμᾶς κλει-
σασαι χρόνες, ἔ ἀγαθῶν ἀγαθίδας, τὸ τῷ λόγῳ, ἀν-
θρώπῳ ὠρησάμεναι, ἐκ τῆς τῶν Μαθηματικῶν ἐπήγα-
σαν ἐπισήμης· τὰ γὰρ τοῖς πάλαι ἐξευρημένα παρα-
λαβόντες οἱ ὕστερον Γαλιλαῖοι, ἔ Καρτέσιοι, ἔ Νεύτῳνες,
ἔ Δεϊβνίτιοι, ἔ Οὐόλφιοι, Κάιλλοῖτε ἔ Εὐλερσοι, ἄλ-
λος ἄλλο ἐπινοῶντες, ἔ ἐφευερίσκοντες, ἔ τάξιν τοῖς
προευρημένοις ἀποδιδόντες, τῶν Φυσικομαθηματικῶν καλε-
μένων πραγματειῶν τὴν χρυσὴν ἡμῶν ἔπλεξαν σερεᾶν,
ἢ τὰ σοφὰ τῶν νῦν Εὐρωπαϊῶν ἔθνη (2) περιφανῶς ἔγκο-
σμεῖται ἔ ἐναβρύνεται.

(1) Δαβὶδ ψαλμ. ρμῃ.

(2) Τὰ περὶ ἐκάστης μαθηματικῆς ἐπισήμης ἰσορῆμικα
περίτε ἀρχῆς ἔ προόδου αὐτῆς εὐρήσει ὁ βεβλόμενος ἐν τῷ
τῇ Εὐκυκλοπαιδείᾳ λεξικῷ· βραχέα γὰρ ἄττα ἡμῶν ἐνταῦ-

Ἀλλ' ἡ Ἑλλάς ἡ τῆς Φιλοσόφου ἐνεγκαμένη, καὶ
 θρέψασα, ἡ τὴν Εὐρώπην πᾶσαν παιδεύσασα, δι' ἣν το-
 παῦτα καὶ τοιαῦτα ἀγαθὰ τοῖς νῦν εὐνομεμένοις περιέει-
 κθενσι, δουλείας καθυπαχθεῖσα ἀπησάτω ζυγῷ, ἀπεσέρη-
 ται μὲν τῶν προτέρων τῆς σοφίας αὐτῆς θησαυρῶν, γε-
 γύμνωται δὲ τῶν περικλεῶν ὠραϊσμῶν, καὶ Καρτεσίων καὶ
 Νευτώνων ἐν τῇ εὐεργετηθείσῃ Εὐρώπῃ ἀκμαζόντων, ἡ δὲ
 ἔκειτο πένης καὶ κατηφῆς, καὶ ταύτην

Κατ' ὀφθαλμῶν ἐριβηνὴ νύξ ἐκάλυψεν

Ἡ' ῥίπε δ' ἐξοπίσω, ἀπὸ δὲ ψυχῇ ἐκάπυσσε,

Τῆλε δ' ἀπὸ κρατὸς χεῖρ δέσματα σιγαλόντα...

Ἐφ' οἷς ἀνυποίσοις ὑπέστη δεινοῖς· καὶ ἐν τασέτῳ πλή-
 θει κακῶν ἔδεν περισκοπεῖσα ἡ τάλαινα ἦν, ἡ ὅπως τῇ
 τῶν ὀρφανῶν αὐτῆς τέκνων ἐπαρκέσει πενία τε καὶ γυμνότη-
 τι. τὴν δὲ τῶν εὖ παθόντων ἐπισαμένη ἀγνωμοσύνην, πα-
 ρὰ τῶν ἰδίων ἑαυτῆς τέκνων ἡττεῖτο, τῶν ἀλγηδόνων τε θε-
 ραπείαν, καὶ τῶν πόνων ἀνάπαυλαν, εἶδ' αὖ δὲ μόνην τὴν
 φιλοσοφίαν τὰγαθὰ πάντα ἐξευρίσκεισαν, καὶ κατασκευά-
 ζεσαν, καὶ πρὸς τὰς πράξεις ἀνθρώπου παιδεύεσαν, καὶ
 πρὸς ἀλλήλους πράττεσαν, καὶ τῶν συμφορῶν τὰς τε δι' ἀ-
 μαθίαν, καὶ τὰς ἐξ ἀνάγκης γιγνομένης, διατρέψαν, ἐπὶ
 ταύτην παρεκάλει τὰ τέκνα αὐτῆς, ὀδυρομένη καὶ κλαίεσα·
 Πρῶται τοίνυν, εἰδήτνες καὶ ἄλλοι, ὅς ἐνταῦθα καλίσσῃ-

δα παρτέλλεται, ἃ κυριώτερα ἔδοξεν, ἵνα εἰδέναι ἔχουσιν
 τῶν Μαθηματικῶν οἱ διασῶνται, οἷς χρημάτων ἔσσης τῆς Μα-
 θηματικῆς, σφῶς αὐτὰς τῇ περὶ αὐτὴν σκεδῇ παρέξει
 μέλλουσι.

σαι τῷ παρόντος καιρῷ ἔκ ἔσιν, ἀκηκοότες τῆς παρακλήσεως ἐγένοντο, Μεθόδιος ὁ Ἀθηναίτης ὁ ἐξ Ἰταλίας εἰς τὴν Ἑλλάδα σὺν ἄλλαις παιδεύμασι καὶ τὰ Μαθηματικὰ μετακομίσας ὄργια, καὶ ὁ τότε ἀκμῆς γενόμενος ἐξ Ἰωαννίνων Βαλαῖος, ὁ τὴν ἅπασιν γνωρίμην τρίτομον ὁδὸν τῆς Μαθηματικῆς ἐκδὼς, καὶ ἐπιμελῶς καὶ φιλοπόνως τοῖς αὐτῷ φοιτηταῖς παραδόντες· μετὰ δὲ τέτοις πληρέσεσιν τε καὶ ἀκριβέσεσιν κατέβαλον τὰ τῆς σοφίας σπέρματα ταῖς τῶν δυσυχῶν Ἑλλήνων ψυχαῖς, ὁ μέγας τὴν σοφίαν καὶ τὸ κλέος ὁ Ἀσίδιμος Εὐγένιος ὁ Βύλγαρις, δι' ὅλης πενταετίας κατὰ τὴν Ἀθωνιάδα χολὴν διδάξας, καὶ Νικηφόρος ὁ Θεοτόκης, εὐεργέται ἀναδειχθέντες ἀμφοτέρω τῆς Ἑλλάδος. Τύτοις ὅν τῶν συγγραφόντων, καὶ τύποις ἐκδοθέντων, συχνοὶ ἀπολαύσαντες, τὰς πρὶν ἐπιπολαζέσας χιλασικὰς ἐρεχελείας τῶν φροντιστηρίων ἐξώσαντες, διὰ τῶν ὑγιῶν ἐκείνων λόγων τῆς σφίσι προσφοιτῶντας σοχειῶν ἐπειρῶντο· οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τῷ σκοπῷ τέτοι ἔκ ὀλίγου εὐτυχῶς πάνυ κατεσχάσαντο, πνεύματος ἀγχαΐα, καὶ πόντοις γενναίοις χρησάμενοι (1)· καὶ ὅτως ἄρα συνάμα τοῖς

(1) Εἷνός ἐξ ἑσέκμοι ἐπιμνησθῆναι ἐνταῦθα, Ἰωάννης τῷ οἰκονόμῳ καὶ διδασκάλῳ τῆς ἐν Θεσσαλίᾳ Τυρνάβε, ἀνδρὸς ταχυτήτι νοός καὶ ἀκαμάτῳ διαπρίψαντος φιλοπονίᾳ, καὶ Σωκρατικὸν μὲν ἐν ταῖς ἡδέσι τρόπον ἐπιδειξαμένον, τὸν δ' ἅπαντα αὐτῷ βίον ἀγῶνα μέγιστον ὑπὲρ τῶν λόγων ἐκτεταμένον· ὃ γὰρ ἦν μᾶλλον διδασκαλός, ἢ πατήρ τῶν ἐαυτοῦ ὁμιλητῶν. Τάτοι τοῖσιν μετὰ τὰ γραμματικὰ τοῖσιν ἀκροάσαντων τὴν Ἑλληνικὴν Λογικὴν καὶ Μεταφυσικὴν, τὰ κατ' Εὐκλείδην Γεωμε-

διαλεκτικοῖς, καὶ ἃ τοῖς εἰρημένοις Ἀνδράσι συγγέγραπτο, ἐν πᾶσι μοισὸν τοῖς ἐν τῇ Ἑλλάδι φροντισθεῖσι τοῖς φοιτῶσιν ἐδιδάσκοντο· καὶ ἐκ ἀμυδρόν μὲν ἦν εὐτεῦθεν τὸ διαδιδόμενον φῶς, διακαῆς δ' ἀνέφλεγε τὰς καρδίας τῶν ἀκούντων ταῦτα ὁ ζῆλος τῷ καὶ πλεῖω, καὶ τελειότερα τέτων, εἴπερ εἴη, προσκτῆσασθαι· διὸ οἱ μὲν παρὰ τὰς ἐν σοφίᾳ ὑμνεμένας τῶν εὐρωπαίων πόλεων ἀπεδήμουν, ἢ ἄρα τὰ τῆς σοφίας ἀγαθὰ, ὡς οἱ πατέρες ἡμῶν ἀπ' Αἰγύπτου, εἰς τὴν Ἑλλάδα μετενέγκαιεν οἱ δὲ καὶ τῶν ἐν Ἑλλάδι τὰς διατρεῖδας ποιημάτων Εὐρωπαίων σοφῶν, ὅσοι ἂν εἶεν ἀγαθὰ καὶ φίλα φρονῶντες τοῖς Ἑλλησιν, ἀναποσπάσως περιείχοντο, ἥατι καὶ μετάχαιεν τῶν τῆς Εὐρώπης παιδευμάτων. Ἀλλ' ἐν τέτοις γενομένῃ τῷ λόγῳ, εὐθὺς ὅσισιν ἔτε δίκαιον ἂν εἴη σιγῇ παραδραμεῖν τὸν ἐκ Κεφαλληνίας δαιμόνιον Σπυρεῖδωνα τὸν Ἀσάνην, τὸν ἱατρὸν καὶ φιλόσοφον, ὃς ἐν Θεσσαλονίκῃ πολλῶν ἀντάξις ἄλλων ἱατρῶν ὑπάρχων, τότε κατὰ Κάϊλλον τὸν Γάλλον Συμβολικὸν λογισμὸν, καὶ Γεῖδωνος Γεράνδου τὴν τῶν κωνικῶν τομῶν σύνοψιν, εἰς τὴν Ἑλλάδα φωνήν, Ἀνδρὸς φιλομαθοῦς, καὶ τὰ εἰρημένα ἀκηκόστος μαθήματα πρὸς τὸτο αὐτὸν ἐποτρύναντος, μετήνεγκεν ἡμῖν ἀλλὰ καὶ ἡμεῖς μετήνευσεν τοῖς ἐκεῖθι ἔσιν· ὕστερον δὲ καὶ

τρικὰ χοιχεῖα, τὴν κατὰ Νικηφόρον τὸν Θεοτόκην Φυσικὴν, καὶ ἄλλα συχρᾶ, αὐτὸς εἰμὶ πάντων ἐλάχιστος· ἀλλὰ φεῦ τῆς δυσυχίας! πέφυκε τῆς ἐν τέτῳ καυχουμένης Θεσσαλίας κηρ μέλαινα ἀφῆρπασε τὸν κλεινὸν Ἰωάννην, τῆς πρὶν δόξης αὐτὴν ἐρησάσα· αἰωνία σε ἡ μνήμη Ἰωάννη ἀοίδιμε, πάττῳ κοινῇ, καὶ εὐεργέτῃ τῷ ἔδωκε σε!

εἰς Θετταλίαν ἐπὶ σωτηρίᾳ τῶν καμνόντων κληθεῖς, διὰ πολλῶν μὲν καὶ ἄλλων ἐποίησεν εὖ τὰ καθ' ἑμᾶς φροντιστήρια· μάλιστα δὲ τὰ εἰρημένα Γεωμετρικὰ σπουδάσματα ἀναπτύξας πολλοῖς τῶν διδάσκειν λαχόντων· ἀλλ' ἴσασι μοι οὐ πάντες, ὅσον Ἀσάνης ἀξίως ἑαυτῷ ἐπόνησε, ὅπως τὸς ὁμογενεῖς αὐτοῦ τὸν προσγονικὸν τῶν ἀγαθῶν ζῆλον ἀναλαβόντας κατόψεται, τῷτο μόνον σκοπῶν. Ταῦτα ζήλωτέον καὶ τοῖς ἄλλοις τῶν ὁμογενῶν Γατρῶν, ἵν' αὐτοῖτε καὶ φήμην καὶ μνήμην καὶ δόξαν καὶ ζῶντες ἄρωσι καὶ τελευτήσαντες καταλίπωσιν ἀθάνατον, καὶ τὴν φίλην Ἑλλάδα τῷ δαινῷ πτώματος ἐξεγείρωσιν.

Οὕτως ἔν ἡ Ἑλλάς τῷ περὶ τὴν φιλοσοφίαν διεγερθεῖσα ἔρωτι, καὶ ἔτω τὰς ἀφορμὰς δεξαμένη τῶν λόγων, διατρέχει προθύμως ἤδη τὸ θαυμάσιον σάδιον· ἀλείπται δὲ αὐτῆς ἐφεσῆκασιν ἄνθρωποι αἱ σοφοὶ τῶν νῦν ἑλληνικῶν φροντιστηρίων καθηγεμόνες καὶ διδάσκαλοι, ἀποβαλόντες μὲν τὰς ματαιάς, καὶ μὴν ἀλλὰ καὶ ὀλεθρίους, γραμματικὰς συζητήσεις καὶ ἐριδας, ἐκ δὲ τῶν ἐν Εὐρώπῃ Ἀκαδημιῶν μετακομίσαντες τὸν ὑγιαῖν τῷ φιλοσοφεῖν τρόπον, καὶ πρὸ πάντων τὰ Μαθηματικὰ ὄργια· νῦν ἐν Βακχερεσίαις Κωνσταντῖνος ὁ Βαρεδαλάχος· ἐν Βυζαντίῳ Δωρόθεος ὁ Πρώτιος· ἐν Χίῳ Γεωργίου ὁ Σελεπῆς· ἐν Κυδωνίαις Βενιαμὴν ὁ Λέσβιος, καὶ ἄλλοι ἀλλαχῶ, Ἄνδρες ἀληθῶς Ἕλληνες, φιλόσοφοι πάντες, πάντες δεινοὶ τὴν Μαθηματικὴν, τοῖς σφίσι προσφοιτῶσι περιτιθέασιν τὸν τῆς σοφίας σέφανον· νῦν ὁ πλεῖστος συνεφάπτεται τῷ ἔργῳ τοῖς ὑπὲρ τῆς Ἑλλάδος ποιεῖσι· τίς ἀγνοεῖ τὰς μεγαλοδωρεὰς χάριτας τῶν γηγενῶν τῆς

Ελλάδος τέκνων, τῶν ἐκ Ζωσιμᾶ φημι τετραδέλφων, τῶν Ἰωαννίνων τὴν δόξαν; τίς ἔχ' ὁμολογεῖ μὴ ἔχῃ τὰς θεσπισίας αὐτῶν ψυχὰς ἐν τοῖς νῦν καιροῖς ἐπ' αὐτὸ τῦτο καταπεμφθῆναι ἡμῖν, ἐφ' ᾧ κοινὸν ἀγαθὸν τῆς Ελλάδος γενέσθαι; ἀλλὰ γὰρ Ζωσιμαδῶν τὸ κλέος ὀλεῖται ὑδέποτε· νῦν οἱ ἀληθεῖς τῷ Χριστῷ παιμένες, τῆς θείης τῆς ἐκκλησίας ἱεράρχας ζήλῶντες, αὐτοῖτε τὴν σοφίαν ἀγαγέσθαι ἐαυτοῖς νύμφην, κατὰ τὸ Σολομώντειον, σπεύδουσι, καὶ τὰς λογικὰς αὐτῶν ποίμνας εἰς τὰς τῶν λόγων ποδηγετῶσι νομάς· ὃ γὰρ λέληθεν αὐτὸς τὸ τοῖς Γενάρχοις ἐπιταχθῆναι, ἀπὸ παντὸς ξύλου τῷ ἐν τῷ παραδείσῳ βρώσει φαγῇ “ὃ τὴν ἀπάσης θεωρίας καὶ γνώσεως ἀνετον μέθεξιν ἐμφαίνειν πολλοῖς καὶ ἄλλοις τῶν θείων Πατέρων ἡρμηνεύται καὶ δὴ καὶ τῷ ἐκ Δαμασκῆ Ἰωάννῃ (1)· Πολλὰς ἐγὼ οἶδα μυσεῖα καθιδρύοντας, μωδὸς τοῖς ἐν αὐταῖς καθηγηταῖς τελῶντας, καὶ πάντα πράττοντας ἐνθεσιωδῶς, ἃ ἡμῖν ἀνακαλέσῃ τὴν φιλοσοφίαν, καὶ τὰ ἐκ ταύτης ἀγαθὰ, καὶ διαρραγῶσιν οἱ ἡμῖν ἐπιδασκαίνοντες, ἀμαθίαν καὶ μῦθος τῆς παιδείας τοῖς καθ' ἡμᾶς ἐπεγκαλῶντες ἱεράρχαις (2

(1) Ο'ρθοδ. Πίς· Κεφ. ΚΕ'.

(2) Μετὰ Παύλου καὶ Βεϊκάρδον τῆς Γερμανίας, καὶ πολλὰς ἄλλας, ἀμαθίαν καὶ κακίαν ἄπασαν τῷ τῶν Γραικῶν ἔθνεϊ προσάψαντας, ἀρτίως αὐτῷ ἐπετέβη ὁ κατὰ τὸ 1803 — 1804 ἔτος τὴν Ελλάδα περιελθὼν Βορῆσας, ὅς ἐν τῷ πέρυσιν αὐτῷ ἐκδοθέντι βιβλίῳ, ἢ ἐπιγραφῇ, Bruchstücke zur nähern Kenntniß des heutigen Griechenlands gesammelt von J. L. P. Bartholdy, ἐν πολλοῖς, οἷς τῶν Γραικῶν πικρῶς καὶ

συνελόντι δὲ φάναι, νῦν ἅπαντες συνεωράκασιν, ὁ περὶ
 Ἀθηνῶν Ἰσοκράτει εἴρηται ἐν τῷ Πανηγυρικῷ λόγῳ, πε-
 ρὶ μὲν τὰς ἄλλας πράξεις ἔτω ταραχώδεις ἕσας τὰς τύ-
 χας, ὥς πολλὰκις ἐν αὐταῖς καὶ τὸς φρονίμους ἀτυχεῖν.

δυσμενῶς καταφέρεται, καὶ ταῦτα προσέειπε, „Ein unwissender
 und abergläubischer Clerus herrscht überall etc. . .“ ἔνθα ἡ
 μαθὴς καὶ δεισιδαίμων κληρὸς πανταχῶς (τῆς Ἑλλάδος) ἐτι ἐπι-
 κρατεῖ, ὅστις (φησὶν ὁ συκοφάντης) καλύει τὴν ἐπὶ τὴν παιδείαν
 τῶν Γραικῶν πρόοδον· ἀλλὰ πᾶς ἀπανταχῇ τὰς ὀφθαλμοὺς ἔ-
 μυσεν ἡμῖν ὁ ἄνθρωπος· οἱ μὲν γὰρ ἀμβλυώπεις, ἵνα μὴ
 εἴπω τυφλωττοῦτες, πρὸς τὸ φῶς τῆς παιδείας εἰσίνετι κατὰ
 τύχην τινεὶς ἐν τῇ Ἑλλάδι· τῆς δὲ ἀγαθῆς ποιμένης, τῆς φιλο-
 λόγου καὶ φιλοσόφου ἱεράρχου, εὐαμεῖ τῆς Ἑλλάδος ἰώρακεν,
 ὁ πᾶσαν περιελθὼν τὴν Ἑλλάδα· ἐγὼ δὲ τὸν μὲν τῆς Οὐγ-
 κροβλαχίας φιλόσοφον ἱεράρχην παρίημι, ὃ πάντες οἱ εἰδότες
 τὸ φιλογενὲς καὶ μιλόμενον ἥθος ἀξίως γεραίρουσιν· ἂν δὲ
 εἶδα πολλῶν καὶ Δία καὶ ἐνδοσιωδῶς ἐχόντων περὶ τὰς Μήσας,
 δυσὶν ἐνταῦθα μνηθῆσομαι· τῷ πρῶτῳ μὲν Λάρισσαν τὴν ἐμὴν
 πατρίδα κοσμήσαντος, καὶ μετῴσις αὐτὴν καταπλετίσαντος,
 νῦν δὲ τῆς Ἑφῆου τὸν ἀρχιερατικὸν θρόνον σιμενύοντος, Διο-
 νυσίου Βυζαντίου τῷ Καλλιάρχῃ, καὶ τῷ τῆς Ἐλασσῶνος ἀγα-
 θῷ Ἀρχιερεὶ Ἰωαννικίῳ· τῶν τὸν μὲν τιμᾷ μὲν καὶ ἰσχυ-
 ροῦται ἢ εὐεργετηθεῖσα Λάρισσα, ἀγαπᾷ δὲ καὶ ἐκθειάζει ἢ
 εὐεργετημένη Ἑφεσος, ἢ κατὰ Δεῖαν προμήθειαν αὐτῇ λαχούσα,
 ἵνα κηδεμὼν ἢ καὶ προστάτης τῆς ἐν Κυδανίαις ἀρτισυγάτης ἐλ-
 ληνικῆς σχολῆς· διὰ τὴν δὲ ἰσχυρὰ γίνεται ἢ Ἐλασσών, ἀπο-
 λαύουσα αὐτῇ τῆς φιλοσοφίας προνοίας, ἧς ἔργον ἐγένετο καὶ
 ἐφεύρεσις τῇ ἐν Σαρισάνῃ ἐλληνικῇ φροντιστηρίῳ. Ἀλλὰ ζῶντες
 ἱεράρχαι ἀληθεῖς ἐπιμηκίσουν, καὶ μὴ κάμωιτε τὴν τε Ἑλλάδα
 εὐεργετῶντες, καὶ τὰς ἄλλας τῷ ἰδίῳ ὑμῶν ὑποδείγματι ἐπὶ τῇ
 ἀγαθῇ παροτρύνοντες!

ἡ τῆς ἀνοήτης κατορθῶν, τῶν δὲ λόγων ἢ μετὸν τοῖς φαύ-
λοις, ἀλλὰ ψυχῆς εὐφροσύνης ἔργον ὄντας, τὴν τε σοφίαν, ἡ
τῆς ἀμαθείας δοκιμασίας, ταύτην πλείστον ἀλλήλων διαφέροντας·
διὸ δὴ μυσεῖων ἐν βραχεὶ χρόνῳ ἐμπέπλησαι ἡ Ἑλλάς, ἡ
βιβλοῖς παντοίαις πεπλούτισαι, ἡ διδασκάλων εὐμοίρησε
πλεσίᾳ χειρὶ καταδαλλόντων τῆς σοφίας τὰ σπέρματα·
ἡ πάντων ταῖς ψυχαῖς ἀνῆπται τὸ ἔνθεον τῆς Παιδείας
πῦρ. παντοίως σπουδόντων, ἡ ἑκάστῳ τὸν παρ' ἑαυτοῦ
συνεισφερόντων ἔρανον, εἴπως αὐτοῖς γένοιτο ἀποσκηδάσαι
τὸν τῆς ἀμαθείας ζόφον σὺν αὐτῇ τῇ αἰχύνῃ, ὑπὲρ ὧν ἐκ
τῶν νῦν ἐθνῶν τῆς Εὐρώπης ὑφιστάμεθα ἐλέγχων· καί μοι
δοκῶσιν ἐν τῇ ἀγαθῇ ταύτῃ ἀμίλλῃ παροτρύνειν ἀλλήλους
διὰ τῶν ὁμηρικῶν ἐκείνων ἐπῶν

ὦ φίλοι, ἀνέρες ἱεῖ, ἡ αἰδῶ δέο' ἐνὶ θυμῷ
ἄλλων ἀνθρώπων· ἐπὶ δὲ μνήσασθε ἑκάστος
παῖδων ἡδ' ἀλόχων, ἡ κτήσιος, ἡδὲ τοκῆων,
τῶν ὑπὲρ ἐνθάδ' ἐγὼ γενάσσομαι. . .
ἐς ἄμειναι κρατερῶς, μηδὲ τροπαάσθαι φόβονδε

Τοιαύταις ἔν διανοαῖς χρωμένων πάντων μόνον τῶν καθ' ἡ-
μᾶς, πῶς ἢ νειμεσητόν, εἰ μή τις τὸν δυνατόν, καὶ μὴ τὸν
δικαίον, συνεισφέρει τῇ ἀμίλλῃ ταύτῃ ἔρανον; πῶς δ' ἐκ
τῶν ἀγνωμοσύνης, ἡ δειλίας δεινῆς φύγει δίκην, εἰ πάν-
των τῶν ἄλλων περὶ τὴν λαμπρὰν μοχθάντων εὐωχίαν,
ἧς οἱ μεθέξοντες ἄνδρες ἔσονται ἀγαθοί, ὁ δὲ καθεδεῖται
ἀργός, ὅτε παρατεθείη τὰ βρώματα, παραφυλάττων,
ἢ, εἴπερ εἴη, τῶν μοχθήσαντων πρῶτος ἀνακλιθεῖν αὐ-
τός; διὰ ταῦτ' ἔν ἐγὼ ἐπὶ ταύτην προήχθην τῶν, ὧν
ἐν χερσὶ φέρετε, φίλοι Πατέρες ἡ Ἀδελφοί, Μαθη-

ματικῶν ἔς Φυσικῶν Πραγματειῶν τῆς σειρᾶς τὴν εἰς τὸν ἑλληνα λόγον μεθερμηνευσιν, ἡ μὰ Δία τῷτο σκοπή- σας ἀρχῆθεν, ἵνα δὴ κοινῇ παράθωμαι ταύτην τὴν λιτὴν ἔς εὐτελῆ εἰς ἐσίασιν τῶν φαγεῖν δεομένων· πῶς γὰρ ὁ πεικῶν, ἔς τῶν τῇ ἐμῇ γαστρὶ ἐπαρκέντων ἐνδεῶς ἔχων, ἐμαυτῷ ὅν εὐτρέπιζον τὸ πεναλέον τετὶ δειπνάρειον, ἵν' ἀ- μέλει τὴν ἐνδεῖαν τὴν ἐμαυτῷ, εἴπως εἴη, ἀναπληρώσω, ἔς τῷ καταπιάζοντος λιμῷ τὸ φλεγμαῖνον κατακορέσω· ὡς εἶποτε καὶ γὰρ τοῖς λαμπροῖς συγκατακλιθεῖν δαιτυμόσιν ἐν τῇ κοινῇ εὐωχίᾳ, μὴ πάνπαν ἔχοιμι ἀγροίκως ἔς ἀη- δῶς, ἀδδηφάγως ἀφαρπάζων τὰ ὄψα, ἔς τες παρακα- θημένος ἀεὶ παραγκωνιζόμενος· ἀλλὰ πρὶν ἢ ἐγχειρῆσαι τῷ ἔργῳ, ἐκεῖνο ἐσκόπευον ὅτι ὀλιγώρως· ἡδελόμην γὰρ περιτυχεῖν τῶν νεωτέρων τινὶ μαθημάτων συγγραφεῖ, ὃς ἂν ἔχοι ἔς τὸ πλήρες, ἔς τὸ Μαθηματικόν, ἢ ταῦτο, ἔς τῷ Μαθηματικῷ ὅσον ἐστὶ φυσικώτερον· διὸ τῷ ἐπὶ τῆς ἐν Βιέννῃ Ἀκαδημίας τὰ Μαθηματικὰ ἐξ ἐπαγγέλματος διδάσκοντι, τῷ σοφῷ φημι Δαιτλέρῳ, συμβέλω χρησάμε- νος πρὸς τῷτο, οἷον ἐζήτην σύγγραμμα, πρὸς αὐτῷ ἐν- χειριζόμεν τὸ ἐν Βιέννῃ κατὰ τὸ 1800 ἔτος ἐκτυπωθὲν ὀκτάτομον σύγγραμμα ὑπὸ τῷ ἐν Τερέῳ πρὸ τῆς γενο- μένης ἐκεῖνι τῶν πραγμάτων μεταβολῆς διδασκάλῳ ὑπάρ- ξαντος τῆς Μαθηματικῆς ἔς Φυσικῆς Φονταίνῃ (Fontaine), ὃς διὰ τὰς τμηκαῦτα συμβάσας ταραχὰς ἐκείθεν μεταναστεύ- σας, εἰς Βυκερέσιον ἀφικόμενος, τέως μὲν ἐκεῖ ἐποιεῖτο τὰς δαιτερίας· εἶτα δὲ εἰς Βιένναν ἔλθων τύποις ἐξέδοτο τὸ εἰρη- μέιον σύγγραμμα· καὶ τσεῦθεν εἰς Ρωστίαν ἀπῆρεν, ἐν-

θα εἰς δεῦρο διάγει τὸν βίον· τῷτο τοίνυν, ὡς εἶχε, κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν ἐλλάδα μετέφερον φωνήν, ἐν δὲ τῷτο σκοπῶν, ὅπως τὸν νῦν τῷ συγγραφέως ἀνελιζάμενος τοῖς ἐλλησιν ἐκφῆναι σημείοις· ἐπὶ ἤν ἐπιεικῶς τὸ σύγραμμα παντοίας ἰδέας μαθηματικῆς ἐ φυσικῆς ἐμπλεων, ἐ κατὰ σειρὰν, ὡς ἐκ κρήνης εἰς κρήκον, εἰς ἐπισήμην μεταβαῖνον ἐξ ἐπισήμης· ἐπεὶ μέντοι πρόθεσις ἦν αὐτῷ αὕτη, μόνα τὰ στοιχεῖα ἀποδῆναι τῶν γνῶσεων, εἴτ' ἔν τας ἀπλησείας ἐ εὐχερεσέρας ἀρχὰς ἐν τοῖς Μαθηματικοῖς, ὑδὲν δὲ τῶν ὑψηλοτέρων, ὅτι μὴ πάρεργον, ἐκδιδάξαι· ἐν δὲ τοῖς φυσικοῖς ἐν πολλοῖς ἔοικε τῶν ἐνδοξοτέρων συγγραφέων παραλλάττων τῇ τάξει, ἐμὴν ἀλλὰ ἐ ταῖς δόξαις ἐνι-αχῶ, διὰ ταῦτα ἀπὸ τῶν Μαθηματικῶν ἀρξάμενος ἐπὶ τὸ μεταβάλλειν, ἐ μετακινεῖν ὥρμησα τὰ ἐν αὐτοῖς· ὅ γὰρ ἐμοὶ βύλησις ἦν τὰ Φονταίνῳ φρονέμενα ἐρμηνεύσαι, ἀλλὰ συλλογὴν μαθηματικῶν θεωρημάτων, ἐ φυσικῶν δὲ τῶν τῷ λόγῳ ἐ τῇ πείρᾳ μᾶλλον συναδόντων, παύ-σασθαι, ἔν, ὣν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ ἡκροασάμην, ἔχοιμι ἐν τῇ κατ' ἐμαυτὸν μελέτῃ ἐ θεωρίᾳ οἷον ἐναύσματα· διὸ πολ-λά νεωτέρων ἀθροίσας συγγράμματα, τὰ πλείω ἐν τῇ Γάλλῳ γεγραμμένα φωνῇ, ἐξ αὐτῶν, ὑπὸ τῷ χρηστῷ Δαιτλέῳ τὰ πολλὰ ποδηγετούμενος, τῇ τῶν μεθερμηνευόμε-ων ἐνεχείρησα μεταβολῇ. ἐ δὲ πολλὰ μὲν τῶν ἐν αὐ-τοῖς περιττῶς χολιαζομένων (ἦν γὰρ τάλῃθες εἰπεῖν ἐν πολλοῖς ὑπὲρ τὸ δεῖν ἐρμηνεύσαι βυλάμενος τὸν προκειμε-νον νῦν, ὥσε καὶ Μελιτίδας καὶ Μιαμμάκῳ της τοιαῆς δε μὴ ἀνέχεσθαι ἐρμηνεύσεως) περιεῖλαν,} πολλὰ δὲ ἐν-

δέοντα ἀνεπλήρωσα· πολλῶν δὲ καὶ τάξιν μετήλλαξα, ἔνθα παρὰ πολὺ τῶν ἐνδοξοτέρων συγγραφέων ἔδεν δεῶν διεφώνει, καὶ παρήλλαττε· συνελόντι δὲ εἰπεῖν, ὅσαι μὲν τῇ Φονταίνῃ βίβλῳ ὑπῆρχον αἱ πραγματεῖαι, αἱ αὐταὶ καὶ τῇ ἀνὰ χειρὸς ὑπάρχουσιν, οἷαι δ' ἐν ἐκείνῃ, ταύτας δὲ καὶ ταύτῃ χολῇ ἅντις εὐρεῖν ἐλπίσαιεν, ὡς τοῖς τὴν Γάλλων ἐπαῖεσι φωνῇ δῆλον γενήσεται ταῦτα πρὸς ἐκεῖνα παραθεμένοις. Διὰ ταῦτα τὴν βίβλον ἢ Φονταίνῳ, ὅπερ ἐκ ἑσιν, ἐπέγραψα, συλλογὴν δ' ἐκ πολλῶν, ὅπερ ἐστὶ τάλιῃς, συνερανιδεῖσαν προσεῖπον.

Ταύτην ἔν τὴν βίβλῳ, ἣν εἰς ἑμαυτὴ μελέτην καὶ γυμνασιν, ὡς εἴρηται, συνελεξάμην, συχναὶ τῶν εὐνοικῶς πρὸς ἐμὲ ἐχόντων ἦσαν οἱ ἐπικείμενοι, καὶ τύποις ἐκδέναι παρακαλῶντες, μὴ δεῖν κρύπτεσθαι τοῖς γυν' Ἑλλήσι φάσκοντες τὸς Φονταίνῃ, καὶ Σαυρίῃ, καὶ Βεζυτίῃ, καὶ Λακροῖῃ, καὶ ἄλλων εὐκλεῶν σοφῶν πότους· καὶ γὰρ εἶεν οἱ κρεῖττω τὴν συλλογὴν ταύτην ποιῆσαι δυνάμενοι, ἀλλὰ τῆταις διδασκαλικάς κοσμοῦσι καθέδρας ἀγαπητὸν εἶναι τόγε νῦν ἔχον, εἴτις αὐτὲς τε τῶν τῷ μεθερμηνεύειν καὶ μεταφράζειν πόνων, καὶ τὸς ὑπ' αὐτῶν διδασκομένους τῶν τῆς ἀντιγραφῆς ἀπαλλάξαιεν· εἴξαμεν ἔν αὐτῶν ταῖς φιλικαῖς προτροπαῖς, καὶ ἃ ἡμῖν αὐτοῖς ἐχεδίασαι, προτίθεμεν ἤδη πᾶσι τοῖς ὁμογενέσι, καὶ ὡς ἐκ τοῦ ἐκδιδόντος ἄμορφα κομιῇ καὶ ἀκατέργασα, ἢ μέντοι παρὰ τῆτο ἀπόδλητα, ὡς ἑμαυτὸν πείθω, καὶ πᾶμπαν ἐσόμενα ἄχρηστα· εἰσὶν ἔν, ἃς ἡ σύμπασα περιεπλήροχε βίβλος, πραγματεῖαι αἱ ἐφεξῆς.

α'. Πραγματεῖα Ἀριθμητικῆς, ὡς αἰόντε πλήρης

ἐφερμοζομένη ὑποδείγμασι τοῖς ἐκ τῆ κοινωνικῆ βίῃ τὸ πλεῖστον εἰλημμένοις, ἵν' εἴπερ τινὲς περαιτέρω χωρῆσαι ὀκνήσειαν, τῶν γὰρ Ἀριθμητικῶν στοιχείων, ἀναγκαῖον ὑπαρχόντων ἐν τοῖς πρὸς ἀλλήλους συναλλάγμασι, μὴ ὥς πάντῃ ἀμύητοι.

β'. Πραγματεία τῆ Συμβολικῆ λογισμῆ, ὃν ἔτω καλέσαι προήχθην, ἐπεὶ τὸ ποσὸν ἐν αὐτῇ συμβόλαις τισὶν ἐξεικονίζεται, ὃ μὴν ἀλλὰ καὶ ὡς ὑφίσταται πράξεις ἢτε σύναψις, φημί, καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, καὶ τ' ἄλλα καὶ δὴ καὶ ἡ τελευτή δι' αὐτῆ πολυθρύλλητος ἀνάλυσις, διὰ τῶν προταττομένων συμβόλων περαίνονται· ὡς εἴπερ ἀντὶ γραμμάτων εἰπαχθεῖεν ποτὲ ταῖς πράξεσιν ἀριθμητικοὶ χαρακτῆρες, ἐδὲν ἦττον ἔσαι συμβολικὸς ὁ λογισμός, εἰ μόνον αὐτοῖς ἐνυπάρχει τὰ τοῖς συνάψεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιάσεως, διαιρέσεως, ἰσότητος, καὶ τῶν ἄλλων τὰ πασιδὴλα σύμβολα.

γ'. Γεωμετρίας πραγματεία πλήρης.

δ'. Πραγματεία τῆς ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας.

ε'. Πρακτικὴ Γεωμετρία, εἴτ' ὅν τῶν προδεχθέντων ἔντε τῇ Γεωμετρίᾳ καὶ τῇ Τριγωνομετρίᾳ θεωρημάτων προσεφερμογὴ ἐπὶ καταμετρήσει παντοίων φυσικῶν διαστάσεων.

ς'. Σύνοψις τῆς Ἐχυροποιίας, εἴτ' ὅν τῆ τέχνης, καθ' ὃν ἄντις χωρεῖα ἐχυρὰ καὶ ἀσφαλῆ ἀπεργάζονται.

ζ'. Πραγματεία τῶν τῆ Κόνης Τομῶν, αἷς κατ' ἐπιτομὴν προσετέθησαν καὶ αἱ τῶν ὑπερτέρων βαθμῶν κωνικαὶ τομαί.

ή. Σύνοψις τῆς τῶν Καμπύλων γραμμῶν θεωρίας, εἴτ' ὅν περὶ τῶν καμπύλων ἐν γένει, καὶ περὶ τῶν καλυμένων Γεωμετρικῶν καμπύλων, καὶ δὴ καὶ τῶν καλυμένων καμπύλων Τραπεζατικῶν.

θ'. Πραγματεία τῆς λογισμῆς τῆς ὡς ἀπείρου θεωρημένης ποσότητος, εἴτ' ὅν τῆς τῶν ἀπειροσῶν καὶ τῶν ὀλοκλήρων, περὶ ἧς βραχέα μὲν πάνυ ἦν εἰρηκῶς ὁ Φονταίνος· ἐμοὶ δὲ τὰ πλεῖω συνίλεκται ἐκ τῶν τῆς Βεζατίου καὶ Σαυρίου καὶ Λακεροῦ συγγραμμάτων.

ί. Γενικὴ φυσικὴ, εἴτ' ὅν ἡ ἐν γένει τὰς ταῖς σώμασι προσέσας ιδιότητας ἀναπτύσσουσιν ἐν ᾗ ἢτε περὶ κινήσεως θεωρία, καὶ πᾶσαι αἱ τῶν φυσικωτέρων μαθημάτων προσηηματικαὶ γνώσεις, σαφῶς ὡς ἐνὶ ἐκτίθενται.

ια'. Ἡ Μηχανικὴ.

ιβ'. Ἡ Τόξοστατικὴ καὶ Τόξοαυλικὴ, εἴθ' αὖ ὑποσυνάπτεται ἡ περὶ ἀρχῆς τῶν ποταμῶν καὶ πηγῶν θεωρία.

ιγ'. Πραγματεία περὶ Ἀέρος, φυσικῶς ἐξεταζομένη, ἢ ἐφέπεται πάνθ' ὅσα ἐπαινέει τῇ καλυμένῃ Ἀεροστατικῇ ἐπισήμῃ.

ιδ'. Πραγματεία τῆς Ὀπτικῆς, Κατοπτρικῆς καὶ Διοπτρικῆς.

ιε'. Πραγματεία τῆς σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, ἐν ᾗ καὶ αἱ τῆς σφαίρας ἀναπτύσσονται ιδιότητες.

ις'. Στοιχεῖα τῆς Ἀστρονομίας.

ιζ'. Τὰ συστήματα τῆς παντὸς τό, τε φαινόμενοι, εἴτ' ὅν ἐν ᾧ ἐρμηνεύονται τὰ ἐν τῇ Ἀστρονομίᾳ φαινόμενα, καὶ τὸ φυσικόν, εἴθ' αὖ κατὰ τὰς νεωτάτας δόξας ἀναπτύσ-

σονται αὶ ὡς ἀληθεῖς ὑποληφθεῖσαι αἰτίαι τῶν κατὰ τὰ
ἐράνια σώματα φαινομένων· ἐν οἷς ἔῃ ἡ τῶν παλιρρήϊων
ἐκτίθεται αἰτία.

ιγ'. Σύνοψις τῆς μερικωτέρας Φυσικῆς, εἴτ' ἐν Ἀνα-
τομῇ ἔῃ Φυσιολογία ἐπιτετμημένως, ἔῃ φυσικὴ ἰστορία.

ιδ'. Περὶ Μετεώρων, τῷτ' ἔστιν ἀνάπτυξις τῶν ἐν
τῇ Ἀτμοσφαίρᾳ συμβαινόντων.

κ'. Σύνοψις τῆς Χημείας κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ γενο-
μένας νεωτάτας ἐφευρέσεις. Καὶ ταῦτα μὲν εἰσὶν, ἃ ἡ
βιβλος διδάξεν ἐπαγγέλλεται, διὰ βραχείων προῦπο-
σρωθέντα, ἔῃ οἰσιν τῇ τῶν ἐντευχόμενων αὐτοῖς ὄψει
προῦποβληθέντα, ἵν' εἰδέναι ἔχοιεν, ὄντα καρπὸν ἐξ
αὐτῶν ἀποδρέψονται· ἐπεὶ δὲ δι' ὅλης τῆς Σειρᾶς ταύτης
συχὰ ἀπαντᾷ πράγματα, ὧν τὰ μὲν εἰσὶ πάντως
καίνοφάνη, τὰ δὲ ἡμῖν τοιάδε δοκεῖ ὡς ἐκλελοιπότες τῶν
περὶ τέτων διαλαμβανόντων ἐλληνικῶν συγγραμμάτων,
ἔδει ἄρα ἔῃ ὀνομάτων καιτῶν εἰς τὴν τέτων δήλωσιν· διὸ
τὰ μὲν ἐκ τῶν Ἑλλήνων συγγραφέων παρέλαβον, ὅσα δὴ-
που ἐκείνοις ὀνομαζέτηται ἐπὶ πραγμάτων τοῖς ἐν τῇ
βίβλῳ ταυτιζομένων· τὰ δ' ἐκ τῶν ἐνόντων ἐθέμην αὐτός·
ἦσαν δὲ τινά, ἐφ' οἷς, τὰληθὲς εἰπεῖν, ὅλως ἠγνόουν, ὅ,τι
πότ' ἔχρηθ' καταλλήλως ἔχον ὄνομα θεῖναι· τί ἔν' ἐδει ἐν
τέτοις ποιεῖν; ἀλλ' ἔστιν ἄρα καιρὸς ὁ παρὼν, καθ' ὃν προ-
μηθεῖα θειοτέρα ἢ Ἑλλὰς πράξει ἄμεινον, τῷθ' ὅπερ εἶπον,
ἔῃ πάλιν λέγω, ἔῃ λέγων ἔῃ παύσομαι· ὁ γὰρ βύλομαι,
ἡδὺ ἔῃ λέγειν αἶι, ἔῃ εὐχεσθαι, καί γε ἐκ τῶν ἐνόντων συμ-
πράττειν ἔῃ συνεργεῖν εἰς συντέλῃσιν· διὸ ἐν καιροῖς τοῖςτοις

Αἰδρα ἡμῖν ἐξαπέσειλεν ἡ ἐξ ὕψους προμήθεια, εἴπερ τις ἄλλος, καὶ βυλόμενον καὶ δυνάμενον ἐπαρκέσαι ἡμῶν ταῖς χρεῖαις, καὶ τοῖς ἄλλοις παραινεῖν εἰδότα τὰ δεόντα, καὶ αὐτὸν ἀδιαλείπτως μοχθῶντα, καὶ πάσῃ μηχανῇ σπεύδοντα τὴν τῆς Πατρίδος βελτίωσιν· ὃν Σωκράτην ἄντις ἐιομάσας τοῖς ἦθεσιν ἐκ ἂν ἀμάρεται· τῶν γὰρ νῦν ὄντων ταῦτ' Αἰνδρὶ τίς ξυμβήτεται; τίν' ἀντιτάξω τῷδε; τίς φερέγγυος; ἴν' εἰπῶ τὰ τῷ Αἰχύλῳ; Κοραῖς ἡμῖν ἐστὶν ἔτος ὁ περιάνυμος, ὁ ἱατρὸς καὶ φιλόσοφος, ὁ ἐχ' ἥττον πολυμαθεῖα, ἡ φιλογενεῖα διαπρέπων, τῷ δυσήνῃ ἡμῶν γένει ὁ τιμαλφέτατος κόσμος, ὃν πάντες μὲν ἴδασι, πάντες δ' ἐχ' ἥττον τιμῶσιν οἱ ἐν Εὐρώπῃ σοφοί. τέτῳ ταύτῳ δὲ ἐπισολῶν ἐχερσάμην συμβέλω, ἐφ' οἷς αὐτὸς ἦται ἐδί-
σασον, ἡ ὅλως ἡγνούον, ὅπως χρὴ καλέσαι πολλὰ τῶν ὕ-
σερον ἐπισηθέντων πραγμάτων· καίτοι ἐν τῇ τῆς ἐχυσ-
ποιῆας ἐπιτομῇ πάντα μοι οὐδὲ Κοραῇ ὀνοματοθέτηται.

Τὰ μὲν ἔν ἐν τῇ βιβλῳ τὸν εἰρημένον ὠκοιόμῃται τρόπον, καὶ ἔτῳ χειρῶν τῶν ἐμῶν προσέρχεται· ὑμεῖς δὲ, Παῖδες Ἑλλήνων, μετὰ πολλῶν καὶ ἄλλων ἐκδιδόμενων ἡδὴ βιβλίων εὐμενῶς καὶ τόδε τὸ ἀνὰ χεῖρας ὑποδέξασθε· κἀν ἡ δὲ ἐμὲ εὐτελές, μὴ τῷτό μοι, φίλοι, σκοπεῖτε· ὅτι δὲ σοφῶν εἰσι τὰ ἐν αὐτῷ ἐκγονα, καὶ τὰ μάλιστα ὀνησιφό-
ρα, καὶ Φιλοσοφία ἔτις εἰπεῖν αὐτὴν, τῷτο σκεψάμενοι προθύμως ἐναγκαλίσασθε· ἡ γὰρ γυμνῷ ἀπορρίπτειν ἱματισμὸν πενυχρὸν, ὅτι μὴ ἀλεργίδα ἀμφιέσασθαι ἔχει· ἐδ' οἱ ἐν σκότῳ πλανώμενοι ἐχέφρονες ἔσονται, οἱ πα-
ρὰ τὸ μὴ ἡλιακῷ φωτὶ περιαιγιάζεσθαι καὶ λυχνάριον ἀμυ-

δρὸν ἀπώσαντο· ἀλλὰ νῦν μὲν τοῖς παρῶσι σερκτέον, παραμυθεύοντας ἐκ τῶν ἐνόντων τὴν γύμνωσιν, καὶ τὸν παχὺν ἀποσκεδαννύοντας ζόφον· ὅταν δὲ Φοῖβος Ἀπόλλων, καὶ Ἑλικωνιάδες Νῆυσαι, εἰς τὸ ἀρχαῖον ἐπανέλθωσιν ἐαυτῶν ἔδραφος, τὴνικαῦτα, ὡς ἐν ἀπλέτῳ φωτὶ, ὑδερμίαν φανεῖται αὐγὴν προϊέμενα τὰ μικρὰ ταῦτα λαμπάδια· ἀλλὰ γὰρ οἶδα κᾶζεπίσμαι σαφῶς, ὡς εἰ μὴ, ταῦτα εἰλικρινῶς ἀποδεξάμενοι, τὸν ἐνόντα αὐτοῖς ἐγγυμνασαίμεθα τρέπον, ὃδ' ἐκεῖνα κτησόμεθα ὑδέποτε· φύσει γὰρ ἐθέλει τὰ μεγάλα ἐκ μικρῶν ἄρχεσθαι, καὶ τὰ τέλεια ἐξ ἀτελῶν, κατὰ μικρὸν προαγόμενά τε καὶ τελειούμενα.

Κωνσταντῖνος Μιχαήλ Κέμας
Λαρισσαῖος.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Α' Τόμῳ περιεχομένων.

	Σελ.
Ε' νοῖαι προκαταρκτικαὶ εἰς ἅπασαν ἐν γένει τὴν Μαθηματικὴν	1

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Α'.

Κεφάλαιον Α'. Ε' νοῖαι προκαταρκτικαὶ τῆς Α'- ριθμητικῆς	6
— — Β'. Περὶ ἀριθμήσεως	10
— — Γ'. Περὶ προθέσεως	16
— — Δ'. Περὶ ἀφαιρέσεως	18
— — Ε'. Περὶ πολλαπλασιασμῶ	24
— — ς'. Περὶ διαιρέσεως	39

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Β'.

Κεφάλαιον Α'. Τί ἐστὶ κλάσμα	55
— — Β'. Περὶ ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων	58
— — Γ'. Περὶ προθέσεως τῶν κλασ- μάτων	78
— — Δ'. Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων	80
— — Ε'. Περὶ πολλαπλασιασμῶ τῶν κλασ- μάτων	82
— — ς'. Περὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων	88
— — Ζ'. Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν προσ- θέσεως καὶ ἀφαιρέσεως	91
— — Η'. Περὶ πολλαπλασιασμῶ τῶν συμ- μιγῶν ἀριθμῶν	95
— — Θ'. Περὶ διαιρέσεως τῶν συμ. ἀριθμῶν	112
— — Ι'. Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων	116

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Γ'.

Κεφάλαιον Α'. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν . . .	129
— — Β'. Περὶ τῆς ἀντιστρόφου τῶν τριῶν μεθόδου.	133
— — Γ'. Περὶ τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.	136
— — Δ'. Περὶ τῆς ἀντιστρόφου συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν	139
— — Ε'. Περὶ τῆς συνεξυγμένης μεθόδου	140
— — ς'. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἐταιρείας	142
— — Ζ'. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ψευδῆς ὑπὸ θέσεως.	143
— — Η'. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τόκων	145
— — Θ'. Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῆς ἀλύσεως	147
— — Ι'. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως	155
— — ΙΑ'. Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ κολλύβου	156
— — ΙΒ'. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς συγκεράσεως	157

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΤ ΛΟΓΙΣΜΟΤ ΤΜΗΜΑ Α'.

Κεφάλαιον Α'. Ἐν ᾧ αἱ προσηγματικαὶ ἀρχαί . . .	163
— — Β'. Περὶ ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὅρων	172
— — Γ'. Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν γραμματικῶν ποσοτήτων	173
— — Δ'. Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων	176
— — Ε'. Περὶ διαιρέσεως τῶν συμβ. ποσ.	185
— — ς'. Περὶ συμβολικῶν κλασμάτων	196
— — Ζ'. Περὶ γενέσεως τῶν βαθμῶν.	203
— — Η'. Περὶ εἰζῶν ἐξαγωγῆς	221
— — Θ'. Τύποι πανταῖσι βαθμῶν καὶ ριζῶν	242



— —	Ι'. Λογισμὸς τῶν βασιμῶν διὰ τῶν κατ' αὐτὸς δεικτῶν. . . .	247
— —	ΙΑ'. Λογισμὸς τῶν ῥιζικῶν . . .	252
— —	ΙΒ'. Περί πασῶν ἐπιπλάσεων . . .	256

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΤ ΛΟΓΙΣΜΟΤ ΤΜΗΜΑ Β',

Κεφάλαιον Α'. Ἀναλογιῶν ὁρισμοί . . .	262
— — Β'. Περί λόγων καὶ ἀναλογιῶν ἀριθ- μητικῶν. . . .	266
— — Γ'. Περί τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τελεῶν μεθόδου	269
— — Δ'. Περί τελεῶν ἀριθμητικῆς . . .	271
— — Ε'. Περί λόγων γεωμετρικῶν . . .	280
— — Σ'. Περί ἀναλογίας γεωμετρικῆς . . .	285
— — Ζ'. Περί τελεῶν γεωμετρικῆς . . .	297
— — Η'. Περί λόγων συνθέτων . . .	309

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

ΣΕΛΙΔΙ 6, εἶχω 21, Διακεδανῦναι, Γράφει, Δια-
 σκεδανῦναι. — Σελ. 21, ς. 4, Κίονταν, Γρ. Κίονται.
 — Σελ. 29, ς. 16, Εἴπὶ τῇ κάτω, Γρ. Εἴπὶ τὰ κάτω.
 — Σελ. 35, ς. 2, Ὡς γε, Γρ. Πρὸς γε. — Σελ. 36,
 ς. 3, Ἡ ἑκατέρω, ἢ ἡ ἀμφοῖν μηδενικά, Γρ. Ἡ ἑκατέρω,
 μηδενικά. — Σελ. 48, ς. 16, τζς, Γρ. τςζ. — Σελ.
 53, ς. 24, Ἡ δύο πολλαπλασιαθείσας, Γρ. Πολλαπλα-
 σιαθείσας. — Σελ. 54, ς. 7, (120), Γρ. (130). —
 Σελ. 55, ς. 12, Οὖν, Γρ. Οὐ. — Σελ. 56, ς. 17, Ἐν χή-
 ματι, Γρ. Ἐν χήματι κλάσματος. — Σελ. 60, Λίγα, Γρ.
 Λεύγη, ἔτω ἐκὼν τοῖς ἐφεξῆς· τὸ γὰρ τῶν Γαλατῶν lieu
 λεύγη τοῖς πάλοι ἐκαλεῖτο, ὥς ἔστιν ἰδεῖν παρ' Ἡ' συχίω. —
 Σελ. 64, ς. 9, Δραχμάς· 400, Γρ. Δραχμάς 400. —
 Σελ. 70, ς. 12, Ὁ ἀριθμητής... (168), Γρ. Ὁ ἀριθμη-
 τής, ἀναχθεὶς ἐκ' εἰδὸς ἑλαττον (168) διηρόδω διὰ τῷ πα-
 ρονομασί. — Σελ. 78, ς. 15, (87), Γρ. (88). — Σελ.
 79, ς. 11, $\frac{8}{9}$, Γρ. $\frac{8}{9}$. — ς. 12, $\frac{8}{9}$, Γρ. $\frac{8}{9}$. —
 Σελ. 98, ς. 3, 700 λεπτ., Γρ. 7 σολ. — Σελ. 102,
 ς. 24, $\frac{2}{3}$, Γρ. $\frac{2}{3}$. — Σελ. 116, ς. 19, Ἀναφύονται,
 Γρ. Ἀναφύονται. — Σελ. 118, ς. 5, 3, 1, 4, 5, Γρ.
 3, 145. — Σελ. 120, ς. 17, Ἐπαύξεται, Γρ. Τὰ ο
 ἐπαύξεται. — Σελ. 132, ς. 19, Διὰ τῷ τρίτῳ, Γρ. Διὰ
 τῷ πρώτῳ. — Σελ. 133, ς. 5, $35\frac{1}{4}$, Γρ. $25\frac{1}{4}$. —
 Σελ. 136, ς. 1, 1250, Γρ. 1230. — Σελ. 142, ς. 6,
 Πάντων, Γρ. Πασῶν. — Σελ. 145, ς. 9, $4\frac{1}{4}$, Γρ. $4\frac{1}{2}$.
 — Σελ. 146, ς. 23, Προκτῆσαι, Γρ. Προσκτήσαι.
 — Σελ. 153, ς. 3, αἱ, Γρ. Ἡ. — Σελ. 155, ς. 16,
 32, Γρ. 22. — Σελ. 158, ς. 22, 120, Γρ. 12. —
 ς. 23, 14 ἀνὰ 7, Γρ. 7 ἀνὰ 14. — ς. 24, 16 ἀνὰ 3,
 Γρ. 3 ἀνὰ 16. — Σελ. 165, ς. 30, Ἰσως, Γρ. Ἰσως.
 — Σελ. 170, ς. 3, Εἴποι, Γρ. Εἴποι. — Σελ. 172,
 ς. 6, ἀποσβύναι, Γρ. ἀποσβῆναι. — ς. 13, 14 συναφδὲν
 τῷ $2\alpha^2\beta$, Γρ. Συναφδὲν τῷ $4\alpha^2\beta$. — Σελ. 173, ς. 10,

$\Delta\prime\pi\omicron\lambda\omicron\lambda\iota\theta\iota\varsigma\mu\omicron\sigma\kappa\upsilon$, Γρ. $\Delta\prime\pi\omicron\lambda\iota\theta\iota\varsigma\mu\omicron\sigma\kappa\upsilon$. — ς. 12, Η'λατ.
 Γρ. Η'λατ. — Σελ. 181, ς. 17, ..β⁴, Γρ. ..β⁴+β¹.
 — Σελ. 189, ς. 25, $\frac{2\alpha^2}{\gamma}$, Γρ. $\frac{2\alpha^2}{\gamma}$. — Σελ. 196, ς.
 14, (59), Γρ. (57). — ς. 18, (60), Γρ. (58). —
 Σελ. 202, ς. 11, αα—β, Γρ. αα—ββ. — Σελ. 214,
 ς. 24, ββγ¹, Γρ. ββ¹γ. — Σελ. 215, ς. 22, +—β¹,
 Γρ. — β¹. — Σελ. 223, ς. 26, $\frac{1}{2}$, Γρ. α $\frac{1}{2}$. — Σελ.
 239, ς. 18, $\Delta\prime\upsilon\alpha\theta\delta\iota\upsilon\tau\omicron\varsigma$, Γρ. $\Sigma\upsilon\alpha\theta\delta\iota\upsilon\tau\omicron\varsigma$. — Σελ. 243,
 ς. 6, (142), Γρ. (55). — Σελ. 244, ς. 11, $\frac{\alpha}{\beta}$, Γρ. $\frac{\beta}{\alpha}$,
 $\acute{\alpha}\sigma\alpha\upsilon\tau\omicron\varsigma$ & τὰ λοιπὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὰ ἐν τῇ αὐτῇ σελ. — Σελ. 246,
 ς. 6, (133), Γρ. (113). — ς. 11, (149), Γρ. (148).
 — Σελ. 250, ς. 12, (11), Γρ. (40). — Σελ. 252,
 ς. 17, $P\prime\iota\lambda\alpha\nu$, Γρ. $P\prime\iota\lambda\alpha\nu$. — Σελ. 254, ς. 4, $\frac{2\delta}{2\epsilon}$, Γρ.
 $\frac{2\delta}{2\epsilon}$. — ς. 19, $\frac{\frac{1}{\beta^5} \frac{1}{\mu^5}}{\mu}$, Γρ. $\frac{\frac{1}{\beta^5} \frac{2}{\mu^5}}{\mu}$. — Σελ. 278, ς. 15,
 — δ +, Γρ. — δ + α.



Σ Ε Ι Ρ Α

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Εὐνοίαι προκαταρκτικαὶ εἰς ἅπασαν ἐν γένει τὴν Μαθηματικὴν.

1. **Μ**αθηματικὴ ἐστὶν ἐπιστήμη, τῆς ποσότητος, καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς, ἐξετασική.

2. Ποσότης δὲ, ἢ μέγεθος, καλεῖται πᾶν ὅ,τι αὐξήσεως, ἢ μειώσεως, ὑπάρχει ἐπιδεκτικόν· ἢ, πᾶν ὅ,τι μερῶν εὐμοιρεῖ· ὁ ἐνιαυτός, φέρε, ἡμέρας περιέχων· ἢ ὄργια, πιδῶν εὐμοιρεῖσα· ὁ στρατός, ὃς σύγκειται ἐκ στρατιωτῶν· πάντα ποσότητες.

3. Τὰ τῆς Ποσότητος μέρη, ὡς μὲν ἀπ' ἀλλήλων διακριδὸν θεωρούμενα, τὸ ὑποκείμενον τῶν ἀριθμῶν συνίστασι· καθ' ἐν δὲ ἐξεταζόμενα, ἐπεὶ συνεχές ἐν ὅλῳ συγκροτῆσι, παράγει τὴν καλαμένην ἑκτασιν. Ὁ δὲ στρατός μὲν τις ἀποτελεῖ ἀριθμόν, τῶν συμπληρέων αὐτὸν μερῶν, εἴτ' ὅν τῶν στρατιωτῶν, διακριδὸν ἐκάστῳ

θεωρημένων· τὸ δέ τοι ἀνθρώπινον σῶμά ἐστιν ἑκτασίς, ἅτε δὴ τῶν συγκροτούντων αὐτὸ μερῶν ἐν ὅλῳ ὑπαρχόντων, καὶ συνεχές τι ἀπεργαζομένων. Ποσότης ἄρα πᾶσα, ἥτοι δι' ἀριθμῶν ἐμφαίνεται, ἢ δι' ἐκτάσεως ἀποδίδεται.

4. Ἡ μὲν ἐν Ἀριθμητικῇ περὶ τὰς ἀριθμῆς, ἢ δὲ Γεωμετρίας περὶ τὴν ἑκτασιν, ἀχολῶνται· ἐπεὶ δὲ, ὡς ἀνωτέρω εἶδομεν, ποσότης πᾶσα, ἥτοι δι' ἀριθμῶν, ἢ δι' ἐκτάσεως, ἀποδίδεται· αἱ διτταὶ ἄρα ἐπισήμηαι αὗται, ἥτε Ἀριθμητικὴ, καὶ ἡ Γεωμετρία, πραγματευόμεναι τὸ ποσόν, ἢ τοιοῦτον, ἀπάσης ἀμέλει φυσικῆς ἄλλης γεγεμινωμένον ποιότητος, οἰκειῦνται τὴν καθαρὰν καλεσμένην Μαθηματικὴν.

5. Ἐὰν δὲ διενθυμηθῇ τις τὴν ποσότητα, οἷσιν περιβεβλημένην καὶ διαφόρων ποιότητος αἰσθητάς τε καὶ φυσικάς, τῆς κινήσεως, φέρε, τὴν φωτὸς, τῆς βαρύτητος, κ.τ.λ. ἐντεῦθεν προκύψει ἡ καλεσμένη μικτὴ Μαθηματικὴ. Μαθηματικῆ γὰρ, ἔχ' ὅπως μονήρεις καὶ ἐν ἀφαιρέσει τὰς τῆς ποσότητος ιδιότητας ἀνερευνῶν, ἀλλὰ, χρώμενον, οἷς φθὰς προαπέδειξε, γενικοῖς θεωρήμασι, μεταφέρειν τὸ φῶς καὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῆς ἐπισήμης, τὸ τέλειον ἀπάσαις ταῖς τέχναις περιζόμενον. Λογισμῷ γὰρ καθυποβάλλων τὰς αἰσθητάς καὶ φυσικάς τῶν σώματος ποιότητας, κίνησιν ἀμέλει, βαρύτητα, κ.τ.λ. ἐξάγει ἐκ τῶν ἰδίων αὐτῶν ἀρχῶν σωρείαν, ὡς εἰπεῖν, γνώσεων ἐπωφελῶν, αἱ κοινῇ ὀνομάζονται μικταὶ Μαθηματικαὶ καὶ, ἢ Φυσικομαθηματικά· οἷαι εἰσιν ἡ Μηχανικὴ, ἡ Ὀπτικὴ, ἡ Ἀστρονομία, κ.τ.λ.

6. Αἱ δὲ εἰς δεῖξιν τοῖς Μαθηματικοῖς προβαλλόμεναι γενικαὶ ἀλήθειαι, καλεῦνται Θεωρήματα,

Προβλήματα, καὶ Λήμματα· γενικώτερον δὲ, Προτάσεις. Θεώρημα μὲν ἔν ἐστιν ἀλήθεια, ἐπ' εὐθείας ἀποδομένη τῇ, περὶ ἧς ὁ λόγος, ὕλη, δείξεως χρήσασα. Πρόβλημα δὲ, ἀλήθεια, ἣν πρῶτον μὲν δεῖ κατασκευάσαι, ἐξῆς δὲ τὴν δειξὶν αὐτῆς ἐπαγαγεῖν. Τύτοις δ' αὐτόματον ἔπεται τὸ Πόρισμα, ὅπερ ἀλήθειά ἐστιν, ἀμέσως προκύπτουσα ἐκ τῶν ἄρτι ἀποδειχθέντων, εἴτ' ἔν ἰδιαιτέρας δείξεως μὴ δεομένη. Τὸ δὲ Λήμμα ἀλήθειά ἐστι, δοκῶσα μὲν ἀλλοτρία τῆς ἐν χειρὶ πραγματείας, δεικνυμένη δὲ, ἢν ἕτερόν τι δι' αὐτῆς εἴτα δείξεως τύχη. Τέλος δὲ Σχόλιον καλεῖται, ἐν ᾧ πᾶν ὅ,τι λόγῳ ἄξιον, σημειῖται.

7. Αἱ ἀρχαί, αἷς χρῶνται Μαθηματικῶν παιδες πρὸς δειξὶν τῶν σφίσι προβαλλομένων προτάσεων, τὰ Α' ξιώματα εἰσιν, οἱ Ὁρίσμοι, ἢ τὰ Αἰτήματα.

8. Α' ξίωμα μὲν ἔν ἐστιν ἀλήθεια, δείξεως ἀνεπίδεκτος, ἐναργῆς αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν, οἷαι ὑπάρχουσιν αἱ ἐφεξῆς.

9. Α' ξίωμα Α'. Τὸ ὅλον ἐστὶν ἴσον τοῖς ἑαυτῷ μέρεσιν, ἅμα ληφθεῖσιν.

10. Α' ξίωμα Β'. Τὸ ὅλον ἐστὶ μείζον ἐκάστῳ τῶν αὐτῶ μερῶν.

11. Α' ξίωμα Γ'. Ποσὰ, τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

12. Α' ξίωμα Δ'. Ὡν δὲ ποσῶν, τὸ μὲν τρίτῳ τινὶ ἐστὶν ἴσον, τὸ δ' ἄνισον, ἐκεῖνα ἢ ἀλλήλοις εἰσὶν ἄνισα.

13. Α' ξίωμα Ε'. Ἐὰν ἴσοις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα ἔσαι ἴσα.

14. Α' ξίωμα ς'. Ἐὰν ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἔσαι ἴσα.

15. Ἀξίωμα Ζ'. Ποσότης, ἐαυτῆς ὅλη ἀφαιρεθεῖσα, γίνεται μηδέν, ἢ ἴσεται τῷ μηδενί.

16. Ὁρισμὸς δέ ἐστι λόγος σύντομος, ἐκδηλῶν, ἤτοι τὴν τῷ ὀνόματος σημασίαν, ἢ τὴν φύσιν τῷ ὑποκειμένῳ πράγματι.

17. Αἴτημα δὲ, ὑπόθεσις τινος πράγματος, πρὸς ἣν μετά γε λόγῳ εὐδεις ἂν διαμφισβητήσκειεν· οἷον, τὸν ἀριθμὸν ἐξ διὰ τῷ θ' χαρακτηρὸς παρίσασθαι· ἐκ τῷ πέ-
ρατος εὐθείας τινὸς εὐθείαν ἑτέραν πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀνίσταται. Οὐκ ἂν εἴη δὲ ἀπο σκοπῆ χάριν τῶν πρωτοπειρῶν σχεδιόοντι σκιαγραφῆσαι τῆς, ἣ κέχρηται οἱ Μαθηματικοί, μεθόδου, ὀνομαζομένης κοινῇ Γεωμετρικῇ μεθόδου.

18. Αὐτίκα ἔν ὁ Μαθηματικὸς προβάλλει, ἢ ὑποτίθῃσιν εἰς γινῶσιν, τὰ ἀξιώματα, τετέστιν, ἀληθείας γενικὰς καὶ ἀναντιρρήτους, αἱ θεμέθλου δίκην αὐτῷ προκαταβάλλονται· εἰτα ὀρίζεται τὸ, περὶ ὃ πραγματεύεσθαι βύλεται, ἀποσκεδαννὺς δὲ ὀρισμῷ πᾶν ὅ,τι ἀσαφὲς ἀπαντᾷ, καὶ ἀμφισβητήσιμον, πρὸς μηδὲν ἄλλο ἀποβλέπων, ἢ πρὸς τὰς ιδιότητες, αἵ περ οἱ παριστᾷσι λαμπρῶς τε καὶ ἀναγκαίως τὴν ιδέαν τῷ πράγματι.

19. Τέλος δὲ ὑποσφώννυσσι τὰ αἰτήματα, ὃ ἐστίν, ὑποθέσεις ἀναμφιλέκτως δυνατάς. Ταύτας ἔν τὰς προκαταρκτικὰς θέσεις συνάπτων, παραβάλλει ἀλλήλαις τὰς ιδέας· διὰ δὲ τῷ συλλογιστικῷ κράτι προσιδύσαι ἐκ τῶν ἀρχῶν παρασκευάζει ποταμὸς ἀληθειῶν, ἐκεῖθι ἐνυπολανθάνοντας.

20. Πρὸς ὑποστήριξιν δὲ τῆς μνήμης, καὶ ἐκκλίσιν τῶν περιττῶν ἐπαναλήψεων, ἀνακαλεῖν εἰώθασι διὰ πα-

ρευνήσεως τὸν παράγραφον, ἔνθα φθὰς ὁ λόγος περὶ τῷ πράγματι ἐγένετο, ὃ συνδέει τὰ νῦν προτιθέμενα.

21. Παρεκτὸς δὲ τῶν ἀξιωματικῶν, ὁρισμῶν, καὶ αἰτημάτων, μέλει τῷ Μαθηματικῷ τῷ πᾶσι, ὃ προβάλλει, ἐναργῶς ἀποδεικνύναι· διὸ τὸ ἄρτι ἀποδεδειγμένον ξυμβάλλεται αὐτῷ ὡς ἀρχὴ, δι' ἧς ἕτερον ἀντι ἀποδείξειεν. Οὐκ ἔναι ἅπαντα ἀλληλοσχεῖνται ἐν τῇ κατ' αὐτὸν δέλτῳ, σειρὰν τινα ἀλληλένδετον παρέχοντα ἀληθειῶν ἐναργῶν, καὶ ἀναγκαίων, ὧν ἡ ἐσχάτη ἐπαγωγὴ βηθμῶν διὰ τῶν μέχρι τῆς πρώτης κρατύνεται, τῆς εἰς λόγον αἰτιώδη τιθεμένης τῶν ἰδίων αὐτῷ γνώσεων.

22. Οὕτως ἄρα ὁ Μαθηματικὸς ἐκ συνεπειᾶς ἐπὶ συνεπειαν μεταβαίνει· οὕτως ἐκλάμπει διὰ τῆς κατὰ τὴν ἐνάργειαν λαμπηδόνης, μιμνέμενος ἀμνηστέῃ ἐν τῇ τῆς ἀληθείας ἐξετάσει τὰς ὁδὸς τῷ πάντα ἐτάζοντις ὑπερτάτω Δημιουργῷ.

23. Ἡ ἕξις τῷ ἀτενῶς προσέχειν, παραβάλλοντας τὰς ἰδέας, καὶ μετ' ἐπιστάσεως σκεπτομένους· τότε τῶν ἰδεῶν ἐναργὲς, ἡ τῶν συλλογισμῶν ἀκρίβεια, τὸ σαφὲς καὶ βέβαιον τῶν ἐκθέσεων, αὐτὸ τὸ ἡδὺ τῆς τάξεως, καὶ τῆς μεθόδου, ἡ αὐτὸς ὁ λόγος συνάδει, καὶ τὸ μνημονικόν, καὶ αἱ πνευματικαὶ ἐργασίαι βηθῦνται· τοιαῖδε εἰσὶ, παρὰ τὰς ἀριθμὸν νικώσας ἐπωφελεῖς γνώσεις, αἱ λυσιτέλειαι, αἷς ποριζόμεθα ἐκ τῆς τῶν Μαθηματικῶν μελέτης τε καὶ ἀσκήσεως, καθ' ἣν φθάσαντες προῤυχεδιάσαμεν μέθοδον.



ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Σ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ

περὶ Ὀλοσχερῶν Ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Εὐνοιαὶ προκαταρκτικαὶ τῆς Ἀριθμητικῆς.

24. Ἀριθμητικὴ εἰσὶν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἐπισήμη· ἀριθμὸς δὲ, ἄθροισμα μονάδων· μονὰς δὲ, κυρίως μὲν ἀριθμὸς ἐκ ἑσὶ· διὰ μὲν τοι λόγῳ εὐμάρειαν κληθήσεται ἡμῖν ἀριθμὸς καὶ αὕτη.

25. Ἄπαν ὃν ὑπάρχει μονὰς, τ' αὐτὸν εἰπεῖν πρᾶγματι μόνιμον καὶ διωρισμένον, ὡς λίθος εἰς, ἐν δένδρῳ, ἐν ὄρῳ· κυρίως δ' εἰπεῖν οἱ ἀριθμοὶ ἐν μόνῳ τῷ ἡμετέρῳ νοὶ ὑπάρχουσιν, ὃ ἔργον τὸ δυσὶν μᾶλλον ἀνθρώπων, ἢ ἐνὸς ἀντιλαμβάνεσθαι, πέντε μᾶλλον, ἢ τριῶν, καὶ ἐν γένει τὰς μονάδας ἀθροίζειν εἰς ἐπινενοημένον τινὰ ὄντων σύλλογον.

26. Τῶν δ' ἀριθμῶν ἐξεταζομένων ὡς ἐκ τῶν, ἃ δηλῶσι, πραγμάτων, ταῦτα μὲν ῥητέον πραγματικῶς διαφέρειν, ἐκεῖνες δὲ κατ' ἐπίνοιαν, ἐκατέρων ἐκάτερα· οὕτως ὀργισαὶ τέσσαρες φύσει μείζας εἰσὶν ὀργισῶν δύο. Ὁ δέ γε Πύρρων, ὃ καὶ τὰς νεφέλας διακεδανῦναι ταῖς ψυχρολογίαις αὐτῇ διατεινόμενος, καὶ τῆς τῶν ἀριθμῶν θεω-

ρίας καταχλευάσας, ὡς μηδενὶ ἀλλήλων διαφερόντων, ἀγαπήνῃ ἂν, εἰ χιλίων χρυσῶν ὀφειλέτης ἀποδοίῃ αὐτῷ μόνον ἓν, ἀπέχεις, ὑπεικῶν, ὥ γὰρ Πύρρων, πᾶν τὸ ὀφειλόμενον, εἶγε χρυσᾷ χίλια πράγματι ἐνὸς ὑδόλωος διαφέρεισιν· οἱ γὰρ ἀριθμοὶ ἐν μόνῳ τῷ ἡμετέρῳ νοὶ ὑπάρχουσι, πραγματικῶς μὴ ὑφιστάμενοι.

27. Εἰ δὲ πᾶν ὄν ἐστι μονάς, ὡς ἤδη ἐμάχουμεν· ἀληθὲς μὲν τοι εἴη ἦττον, ὡς ἐν τῷ ὁρατῷ τῷ δὲ κόσμῳ ἅπαν ὄν συνίστησιν ἐν εαυτῷ ἀριθμὸν, ὡς ἀπάντων τῶν ὄντων, ἃ τοδὶ τὸ πᾶν συμπληρῶσι, παρισυνάπτων ἡμῶν ταῖς αἰσθήσεσιν, ἢ, τὸ μᾶλλον εἰκὸς, τῷ ἡμετέρῳ λόγῳ, ἁθροισμά τι μερῶν, ἃ γε αἰεί τις θεωρεῖν δύναται ὡς διακεχωρισμένα ἀπ' ἀλλήλων.

28. Ἐπειδὴ περ ἡ τῆς μονάδος ἰδέα, εἴ ἢ τῷ ἀριθμῷ κατὰ τὸν ἀποδεδομένον αὐτῶν ὀρισμὸν, ἀλλήλων διαφέρεισιν, ἐκ ἂν εἴποι ὀρθῶς ὑδεῖς, ὡς ἄρα ἡ μονάς ἐστὶν ἀριθμὸς, ἀλλ' ὅρος παραθέσεως, πρὸς τὸ δοκεῖν λαμβανόμενος.

29. Τῶν δ' εἰς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν ὑπαργέντων σημείων, πρὸς τὸ δοκεῖν λαμβανομένων, καθὰ δὴ καὶ οἱ τῶν γραμμμάτων χαρακτῆρες, ὑδὲν ξένον, εἰ διαφοροῖς αὐτοῖς κέχρηνται οἱ ἀριθμῶντες παρὰ διαφέρεισιν τοῖς ἔθνεσιν.

30. Αὐτίκα, Ἑλλήνες μὲν ἀριθμῶντες, τοῖς γραφικοῖς αὐτῶν χαρακτῆρσιν ἐχρῶντο· παρὰ δὲ Ῥωμαίοις ἐσήμαινον τὰς ἀριθμὸς τῶν παρ' αὐτοῖς γραμμμάτων τὰ μεγάλα τάδε, Ι, V, X, L, C, D, M· οἷς ἀπενέμεντο αἱ ἐφεξῆς δυνάμεις, ἓν, πέντε, δέκα, πενήκοντα, ἑκατὸν, πεντακῶσια, χίλια. Οἱ αὐτοὶ δὲ τὰς ἀριθμὸς, δῖω, τρία, τέσσαρα, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτώ, ἐννέα, ἐσήμαινον οὕτω, II, III, IV, VI, VII, VIII, IX· τὸν δὲ

ένδεκα διὰ τῷ ΧΙ, τὸν εἴκοσι, τῷ ΧΧ· τὸν τριάκοντα, τῷ ΧΧΧ· τὸν τεσσαράκοντα, τῷ ΧΛ· τὸν ἐξήκοντα, τῷ LX· τὸν ἑβδομήκοντα, τῷ LXX· τὸν ὀγδοήκοντα, τῷ LXXX· τὸν ἐννεήκοντα, τῷ ΧC, ἢ ἔτιως ἐφεξῆς· ὥς ὁ ἀριθμὸς MDCXLVIII ἀπαγγεληθήσεται, χίλια ἑξακόσια τεσσαράκοντα ὀκτώ· εἰς δὲ δῆλωσιν ἑπτακοσίων ἐννεήκοντα ἕξ, γραφήσεται DCCXCVI.

31. Τὰ γὰρ μὲν μᾶλλον εἰς χρῆσιν ἦκοντα σημεῖα, οἳ δὲ εἰσὶν οἱ δέκα χαρακτῆρες 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Διτταὶ δὲ αὐτῶν αἱ δυνάμεις· ἡ μὲν, ἀπόλυτος· ἡ δὲ, σχετική, ἐξ ὧν προκύπτει τὸ Ἀ' ραβινικὸν καλούμενον σύστημα (ὡς ἄρα Ἀ' ράβων ἐυρόντων τὰς χαρακτῆρας τὲς δὲ) ὅπερ ἐπερεῖδεται μάλιστα τοῖς ἐφεξῆς δυσὶν αἰτήμασιν, ἐξ ὧν ἀπαρίεταί ἅπαντα ἡ τῆς ἀριθμήσεως θεωρία, ἢ αἱ λοιπαὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεις.

32. Αἴτημα Α'. Δύναμις ἀπόλυτος τῶν χαρακτῆρων. Αἰτῶ δὴ, τῶν δέκα τῶν δὲ ἐφεξῆς χαρακτῆρων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δυνάμεις εἶ-

ναι τὰς αὐτοῖς ὑποσημειωμένας· μηδενικόν, ⁰ ἐν, ¹ δύο, ² ³ τρία, ⁴ τέσσαρα, ⁵ πέντε, ⁶ ἕξ, ⁷ ἑπτὰ, ⁸ ὀκτώ, ⁹ ἐννέα.

33. Αἴτημα Β'. Σχετικὴ τῶν χαρακτῆρων δύναμις. Αἰτῶ δὴ δεύτερον, εἰ πλείους χαρακτῆρες ὥς γε γραμμένοι, ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καταλήγοντες, τὸν μὲν ἐν τοῖς δεξιοῖς πρῶτον δύνασθαι μονάδας, φύσιν ἔχοντας τὴν ἀπαιτουμένην ἐκ τῷ ζητήματος, μονάδας, φέρε, βιβλίων, εἰ περὶ βιβλίων πρόκειται ζητεῖν, ὀργάνων, εἰ τῷτο ζητεῖται, κτ. πᾶσαν δὲ μονάδα τῷ δευτέρῳ χαρακτῆρι δύνασθαι δέκα μονάδας

τῷ πρώτῳ, ἢ πᾶσαν τῷ τρίτῳ, ἰσχύειν τὸ δεκαπλῆν τῆς τῷ δευτέρῳ· ἢ ἐν γένει, μιᾷδα πᾶσαν χαρακτῆρος δεκαπλάσιαν αἰεὶ ἔχειν δύναμιν τῆς μιᾷδος τῆς περιεχομένης ἐν τῷ χαρακτῆρι, τῷ ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ ἐν τοῖς δεξιῶς κειμένῳ.

34. Αἱ τῆς ἀριθμητικῆς ἀρχικαὶ πράξεις, πρὸς ἃς ἀνάγονται ἢ αἱ ἄλλαι, εἰσὶν, Ἀριθμήσεις, Πρόσθεσις, Ἀφάίρεσις, Πολλαπλασιασμός, καὶ Διαίρεσις· ἐγγυμνασθήσεται δὲ αὐταῖς, ὅσον ἐνεσιν, ἐντελῶς ὁ πρωτόπειρος, ὅπως ταύτας ἀπόνως ἢ κατανοῇ, ἢ ἐργάζεται.

35. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπισημὴ πᾶσα γενικὰς ποιεῖται τὰς θεωρίας· αὐτίκα γὰρ ὁ φυσικὰς, ἀναδιφῶν τὴν φύσιν ἢ τὴς νόμους τῆς βαρύτητος, ἐκ ἐθέλει λαλεῖν περὶ τῆς τῷ λίθου, ἢ τῆς τῷ ἀνθρώπινου σώματος βαρύτητος, ἀλλ' ἀποχωρίζων ταύτην τὴν ιδιότητα ἀπὸ πάντων τῶν μερικωτέρων, οἷς ἐνεσι, σωμάτων, διαμορφοῖ ἐν ἑαυτῷ ἰδέαν, ἢ καλεῖται γενικὴ, ἢ ἀφηρημένη· ὡσαύτως ὁ Μεταφυσικός, περὶ πνεύματος πραγματευόμενος, ἢ περὶ τῷδε, ἢ τῷδε τῷ πνεύματος τὸν λόγον ποιεῖται, ἀλλ' ἐν γένει περὶ πνεύματος. Ταῦτόν ἐστιν εἰπεῖν ἢ περὶ τῷ Μαθηματικῷ· ἢ γὰρ ἢ ἔτος περὶ ποσότητος μερικῆς, τῆς μόνῃ τῷ εἶδει ἐνός τινος πράγματος ἐνύσης, πραγματεύεται, ἀλλ' ἐν γένει περὶ ποσότητος, δυναμένης ἀπάσῃ μερικῇ ἐφαρμοσθῆναι ποσότητι.

36. Ἔπεται μέντοι ἐντεῦθεν, ὡς τὰ πολλὰ, δύο τὰ ἀντιβαίνοντα· α'. ὁ γὰρ πρωτόπειρος, μὴ προορῶν τὰ μέγεθος τῶν ὠφελειῶν, ἃς ἀφελκίσεται ἐκ τῆς περὶ τὰ μαθήματα ἐνασχολήσεως, ἔδεν ἀλλ' ἢ ἀφηρημέν' ἄττα, γλίσχρα τε ἢ ὀχληρὰ, ἐν ταύτῃ τῇ μελέτῃ εὐρίσκει, ἢ

τέλος ἐπηδιᾶσας αὐτοῖς, ἀπῆλθε, μηδὲν ἀπονάμενος τῶν κόπων· β'. αὐτὸς ἔτος, ὃς τάχα κτήσται· ἂν τὸ κράτος ἐν τῷ θεωρητικῷ τῆς μαθηματικῆς μέρει, πράγματα ἢ τὰ τυχόντα ἔξει, δεῖσαν ἐπὶ τὸ πρακτικὸν μεταβῆναι, ὡς τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀποδειχθησομένων μεθόδων καινόντι αὐτῷ μάθημα ἐσομένης, ἢ δὲ πόνων μεγάλων ἀμέτοχον.

37. Εὐχῆς ἔν ἔργον ἐπιεικῶς ἀμφοτέρας ταύτας τὰς ἀντιπεριστάσεις ἐκκλίνει· ἀλλὰ γὰρ ἐκ μόνης ὀφειwes συνδοι ἄντις, ὡς ἡμεῖς δεῖν ἐγνώμεν ὡς τὰ πολλὰ τὴν θεωρίαν ταῖς πρακτικαῖς περιπτώσεσι συζεύγνυνθαι, οἷας ἐμφιλοχωρεῖν εἰκὸς τῇ σπουδῇ τῶν τε ἐπιστημῶν καὶ τῶν χνῶν, ἣ δὴ ἣ τῷ κοινωνικῷ βίῳ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀριθμήσεως.

38. Ἀριθμησις ἀκύνει ἡ μέθοδος τῇ διὰ προφορικῷ λόγῳ ἐκφράζειν τὴν δύναμιν ἀριθμοῦ, διὰ χαρακτήρων παρισταμένῃ· ἡ τὰνάπαλιν, ἐκφραζόμενον ἀριθμὸν διὰ χαρακτήρων ἐκτιθέναι.

39. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυοῖν αἰτημάτων, ἡ ὑποθέσεων (32, 33), μικρὰ σκεφαμένοις, συναχθήσεται τὰ ἑξῆς.

40. Α'. Ἐκαστος χαρακτήρ δυνήσεται τῇ προσεχῶς πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῷ κειμένῃ χαρακτῆρος τοσαύτας δεκάδας, ὅσων αὐτὸς ἐμφαντικός ἐστι μονάδων· ὁ 5, φέρε, ὁ ἐν τῷ 56 περιεχόμενος, ἐμφαίνει δεκάδας πέντε, πρὸς τὸν 6 τὴν ἀναφορὰν ἔχων, ταῦτόν εἰπεῖν, πενήκοντα μονάδας.

41. Β'. Καὶ δὴ μὴ μὲν μία, ἐμπεριλαμβανομένη χαρακτηριστικῇ τινί, καὶ πρὸς τὸν ἡγούμενον ἐν τοῖς δεξιοῖς ἀναφερομένη, ἰσοδυναμήσει δέκα μονάσι τῷ ἐν τοῖς δεξιοῖς ἡγούμενῳ χαρακτηριστικῷ· ὥτως ἐν τῷ 48 μὴ μὲν μία τῶν τῷ 4, καὶ ὁ 4 μὴ δὲν πλέον ἢ 4 σημαίνει, πρὸς τὸν 8 ἀναφερομένη, δύναται δέκα.

42. Γ'. Τὴν ἀντίστοιχον δὲ, τῆς παραθέσεως ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ γινομένης, μονάδες δέκα ἰσοδυναμοῦσι μονάδι μιᾷ τῶν ἐν τῷ προσεχῶς πρὸς τὰ λοιπὰ ἐπομένῳ χαρακτηριστικῇ.

43. Δ'. Ο' μὲν δέκα δύναται τὸν ἕνα δεκάκις· ὁ δὲ ἑκατὸν, δεκάκις τὸν δέκα· ὁ δὲ χίλια, δεκάκις τὸν ἑκατὸν· τὸ δὲ γὰρ μιλλιόνιον, δεκάκις τὰς ἑκατὸν χιλιάδας· τὸ δὲ διλλιόνιον, μιλλιονάκις τὸ μιλλιόνιον· τὸ δὲ τριλλιόνιον, μιλλιονάκις τὸ διλλιόνιον, καὶ ὥτως ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον.

44. Βαδίζειται ἄρα ἡ σχετικὴ τῶν χαρακτηριστικῶν δύναμις κατὰ τὴν δὲ τὴν τάξιν· μονάδες, δεκάδες τῶν μονάδων, ἑκατοντάδες τῶν μονάδων· μονάδες τῶν χιλιάδων, δεκάδες τῶν χιλιάδων, ἑκατοντάδες τῶν χιλιάδων· μονάδες τῶν μιλλιονίων, δεκάδες τῶν μιλλιονίων, ἑκατοντάδες τῶν μιλλιονίων· μονάδες χιλιάδων τῶν μιλλιονίων, δεκάδες χιλιάδων τῶν μιλλιονίων, ἑκατοντάδες χιλιάδων τῶν μιλλιονίων· μονάδες τῶν διλλιονίων, δεκάδες τῶν διλλιονίων, ἑκατοντάδες τῶν διλλιονίων, καὶ ὥτως ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον.

45. Ε'. Ο', τι δὴποτε μηδενικόν, μονάζον μὲν, ἔδεν ἀλλ' ἢ ἀπυσίαν μονάδος ἐμφαίνει, τιθεμένη δὲ πρὸς τὰ δεξιά χαρακτηριστικῶς καταφατικῶς, αὐτὸς ὀπισθοδρομήσει πρὸς τὰ ἀριστερὰ βαθμὸν ἕνα· καὶ ὑψωθήσεται ὥτω (40)

ἐπὶ τὴν τῶν δεκάδων δύναμιν· ὅτως ὁ 5 δύναται μονάδας πέντε· 50 μέντοι, παντήκοντα· 500 δὲ, δύναται πεντακόσια, κτ..

46. ζ'. Ἐὰν, ἐκ τῶν δεξίων πρὸς τὰ ἀριστερὰ χωρῆσι, διατμηθεὶς ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας, διαιρεθῇ ἀριθμίστις δι' υποδιασολῶν, οἷον ὁ 92567432, γένηται 92, 567, 432, ἐκ τῆς πρώτης ἐν τοῖς δεξίοις κλάσεως ὅτως ἀντιστρεφόμενος ἀπαγγεῖλαι· μονάδες, δεκάδες μονάδων, ἑκατοντάδες μονάδων· κληθεῖν ἂν ἄρα ἡ καταταγὴ αὕτη κλάσις τῶν μονάδων. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας αὐτῆς ὅτως· μονάδες τῶν χιλιάδων, δεκάδες τῶν χιλιάδων, ἑκατοντάδες τῶν χιλιάδων· ῥηθεῖν δ' ἂν αὕτη, κλάσις τῶν χιλιάδων· ὅτω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων, ὡς ὁράται ἐπὶ τῇ ἀπομένῃ ἀριθμῷ.

μονάδες διημιονίων.	χιλιάδες μυλλιονίων.	μονάδες μυλλιονίων.	χιλιάδες.	μονάδες.
2,	135,	485,	580,	976.

47. ζ'. Ταῦτα δὲ δῆλον, ὡς ὅτω διατεταγμένων τῶν χαρακτῆρων, ἡ ἐσχάτη πρὸς τὰ ἀριστερὰ κλάσις δύναται περιέχειν, ἥτοι τρεῖς χαρακτῆρας, ἢ δύο, ἢ μόνον ἓνα.

48. Η'. Καὶ ταῦτα δὲ σαφές, ἐξ ὧν ἄρτι εἵπομεν, ὡς ἐν ἐκάσῃ κλάσει ὁ πρῶτος ἐν τοῖς ἀριστεροῖς χαρακτῆρ ἐμφαίνει ἑκατοντάδας· ὁ δὲ δεύτερος, δεκάδας· ὁ δὲ τρίτος, μονάδας ὁμοταγεῖς· οἷον ἐπὶ τῇ παρόντος ὑποδείγματος, 485 μυλλιόνια, ὁ μὲν 4, ὁ ἐν τῇ ἀριστερᾷ πρῶτος, παρίσχησι τετρακόσια μυλλιόνια· ὁ δὲ 8, ὀγδοήκοντα μυλλιόνια· ὁ δὲ 5, πέντε μυλλιόνια.

Πρόβλημα. Α'.

49. Α' παγγείλαι τὴν δύναμιν ἀριθμῶ, διὰ χαρακτῆρων ἐκτιθεμένῃ.

ΛΤΣΙΣ Α'. Δίελε δὴ τῷτον εἰς κόμματα ἀνὰ τρεῖς περιέχον ἕκασον χαρακτῆρας, δεξιόθεν ἐπ' ἀριστερὰ προΐων. Β'. Εἰς ἀριστερῶν μέτελθε ἅπαντα, ἀναγινώσκων ἕκασον, ὡς εἰ καὶ καθ' ἑαυτὸ ὃν ἔκειτο, καὶ ἀπαγγέλλων τὸ νομα τῆς κλάσεως, ἐς τ' ἂν ἀποδῶς τὴν ἀπάντων τῶν δε τῶν χαρακτῆρων δύναμιν (α).

50. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κληρονόμος κατέστη τις μνῶν, δηλεμένων διὰ τῶν δε τῶν χαρακτῆρων 54367· πῶς ἔν ἐκ πρώτης ὄψεως ἀναγνωσθήσονται ἔτσι; α'. δεξιόθεν ἀρχάμενος λέγε· τρεῖς χαρακτῆρες ταῖς μονάσι· τίθει ἔν ὑποδιαστολὴν μετὰ τῶ 3 καὶ 4 ἔτω, 54, 367, λειπομένων ἔτι ταῖς χιλιάσι χαρακτῆρων δυοῖν· ἀπαγγελεῖς δὲ ἐπὶ μὲν τῶν δύο καταλοίπων χαρακτῆρων, πεντήκοντα τέσσαρες χιλιάδες· ἐπὶ δὲ τῆς κλάσεως τῶν μονάδων, τριακόσιαι ἐξήκοντα ἑπτὰ μυαί.

51. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐν ταῖς κοιναῖς ἐφημερίσιν ἀναγινώσκεται, ὅτι ἐξ ἐμπρησμῶ, ἐπισυμβάντος πόλει τινὶ, ἡ σύμπασα βλάβη τετίμηται μνῶν 6304056. λέγε ἔν,

(α) Πᾶρρε δ' ἂν εἴη τοῖς πρωτοτείοις τῆς πρὸ τῶν ὑποδειγμάτων ἐκτιθεμέναις γενικαῖς κανόνας ἐφαρμόζειν ἐπιμελῶς τοῖς ἐφεξῆς ὑποδείγμασιν· ὡς δ' αὐτοὶ τῷ προσεχῶς μετὰ τὴν θεωρίαν πρώτῳ ὑποδείγματι αὐτὰς ἐφαρμόζομεν· κατὰ ταῦτα δεῖ τῆς πρωτοτείας ἐργαζοῦν καὶ ἐν ἄλλοις ὑποδείγμασι, πολλὰ δὲ καὶ ἀφ' ἑαυτῶν ὑποτιθεμένοις.

τρεις χαρακτήρες ταῖς μονάσι, ἢ τρεις ταῖς χιλιάσι, λοιπομένε ἐνὸς εἰς δῆλωσιν τῶν μυλλιονίων. ἀναγνωσθήσεται ἄρα ἐπὶ τῷ 6,304,056, ἕξ μυλλίονια, τριακόσιαι τέσσαρες χιλιάδες, πενήκοντα ἕξ μναί.

52. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἀφρονόμος τις εἶρηκεν, ὅτι τὸ μεταξὺ γῆς ἢ τῶν ἀκινήτων ἀσέρων διάστημα μικρὸν δεῖν ὑπάρχει σαδίων 1061133412800· εἰς ἔκφρασιν ἔν τε τῷ τῷ ἀριθμῷ θές τρεις μὲν χαρακτήρας ταῖς μονάσι, τρεις δὲ ταῖς χιλιάσι, τρεις δὲ τοῖς μυλλιονίοις, τρεις δὲ ταῖς χιλιάσι τῶν μυλλιονίων, ἕνα δὲ τῶν διλλιονίοις· ἢ ἐπὶ τῷ 1,061,133,412,800. ἀνάγνωθι· ἔν διλλίονιον, ἑξήκοντα ἢ μία χιλιάδες μυλλιονίων, ἑκατὸν τριάκοντα τρία μυλλίονια, τετρακόσιαι δώδεκα χιλιάδες, ὀκτακόσια σαδία.

Πρόβλημα Β'.

53. Ἀριθμὸν ἀπαγγελλέντα ἐν χαρακτήρσιν ἐκθῆσθαι.

ΛΤΣΙΣ Α'. Γράψον τὴν τῆς μεγίστης δυνάμεως κλάσιν δι' ἐνὸς, ἢ δύο, ἢ τριῶν χαρακτήρων, καθ' ἃς αὐτὸς ἢ μονάδας μόνας περιέχει, ἢ μονάδας ἢ δεκάδας, ἢ μονάδας ἢ δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας.

Β'. Ἀναμέμνησο, ὅτι ἐκάστη τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπακολουθουσῶν τάξεων ὀφείλει περιέχειν τρεις χώρους (46), ὧν ἐν μὲν τῷ πρὸς τ' ἀριστερὰ πρῶτῳ τίθενται αἱ ἑκατοντάδες· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, αἱ δεκάδες· αἱ δὲ τοὶ μονάδες τῆς τάξεως ταύτης, κατὰ τὸν τρίτον (48)· εἴαν ἔν εἰς τις τῶν χώρων ταύτης τῆς τάξεως ὡς ἐκ τῷ ζητήματος ἀμειρῇ χαρακτήρος θητικῆς, θές αὐτόθι ο.

Γ'. Ἐπιτεταῖ ἐντεῦθεν, ὡς τάξιν τινος μηδένα πε-

ριεχούσης θετικὸν χαρακτήρα, εἴτ' ἔν τῷ λαλῦντος μη-
δένα τοῖετον εἰπόντος, ἐν τῷ ἀπαγγελθέντι ἀριθμῷ θε-
τέον τρία ο ὑπὲρ ἐκείνης τῆς τάξεως.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Στρατός τις σύγκειται ἐξ ἀνθρώ-
πων χιλιάδων πέντε ἢ τριάκοντα· πῶς ἂρ' ἐκτεθήσεται διὰ
χαρακτήρων ὁ ἀριθμὸς ὕτος; ἀρξάμενος ἐκ τῆς τῶν χι-
λιάδων τάξεως, ἢ ὑπὲρ αὐτῶν γράψας 35, ἢ δι' ὑπο-
διαστολῆς καταχωρίσας τὴν δὲ τῶν δύο χαρακτήρας, μέ-
τελθε ὕτω τὴν τῶν μονάδων τάξιν· ἢ ἐπειδὴ μονάδων ὁ
λαλήσας ἐκ ἐμνήσθη, θεῖς ἐν ταύτῃ τῇ τάξει τρία τῶν ο
(53. Γ'), ἔξεις 35000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἄπερ οἱ ἐχθροὶ ἀφηρεθήσαν λά-
φυρα τιμῶνται ἀργυρίῳ μνῶν ἑπτακαίδεκα μυλλιονίων,
τριακοσίων τεσσαράκοντα χιλιάδων, διακοσίων πέντε· ἀρ-
ξάμενος ἔν γράφον 17 ὑπὲρ τῆς τῶν μυλλιονίων τάξεως, ὑ-
ποδιασειλας δεξιόθεν τὸν 17· μετάβηθι εἴτα ἐπὶ τὴν τῶν
χιλιάδων τάξιν, ἥ χρεὼν ἔχειν χαρακτήρας τρεῖς (46),
τὸν μὲν ἑκατοντάδων, αἱ τινὲς εἰσι 3· τὸν δὲ, δεκάδων,
αἱ τινὲς εἰσι 4· τὸν δὲ, σημαντικὸν μονάδων, αἱ τινὲς εἰσι
ο· γράφον ἔν 340 πρὸς δεξιὰ τῷ 17. Τελευταῖον δὲ
ἐπὶ τῆς τῶν μονάδων τάξεως, ὁ μὲν τῶν ἑκατοντάδων
χαρακτήρ ἐσι 2, ὁ δὲ τῶν δεκάδων ἐσι ο, ὁ δὲ τῶν
μονάδων ἐσι 5· γράψας ἔν ἢ 205, ἔξεις τὸν 17,340.205
ἐμφαίνοντα ἀληθῶς τὸν διὰ λόγου προτεθέντα ἀριθμὸν·
κατὰ γὰρ τὸ πρῶτον πρόβλημα διασειλας ἐπὶ τῷ
17.340.205 ἀριθμῷ τρεῖς μὲν ταῖς μονάσι χαρακτήρας,
τρεῖς δὲ ταῖς χιλιάσι, δύο δὲ τοῖς μυλλιονίοις, δυνήσῃ
αὐτῷ ἀπαγγεῖλαι· δεκαεπτὰ μυλλιόνια κτ., ὅς ἐστιν ὁ
διὰ λόγου προφορικῶς προτεθεὶς ἀριθμός.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Εἰς ἑκθεσὴν δεκαοκτώ χιλιάδων

διλλιονίων, τριακοσίων χιλιάδων μιλλιονίων, τριάκοντα χιλιάδων, ἢ τριακοσίων τεσσαράκοντα, γράφει 18,000,-300,000,030,340.

54. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀριθμὸς ἀπλῆς ὀνομάζεται ὁ χαρακτηῖρος ἐνὸς περιεκτικός· σύνθετος δὲ, ὁ πλειόνων, ἢ ἐνὸς· ἢ ἀμιγῆς μὲν, ὁ ὁμοειδεῖς μονάδας περιέχων· συμμιγῆς δὲ, ὁ ἑτεροειδής· ὀργυαὶ ἄρα 6 ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπλῆς, ὀργυαὶ δὲ 25, σύνθετος· ἢ ὀργυαὶ μὲν 6 ἐστὶν ἀριθμὸς ἀμιγῆς, ὀργυαὶ δὲ 6, καὶ πόδες ἔτι 4, συμμιγῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Προθέσεως.

55. Πρόσθεσις ἐστὶ σύναψις ἀριθμῶν πλειόνων, εἰς τὸ εὐρεῖν αὐτῶν τὸ ὀλικὸν ἄθροισμα· γενήσεται δὲ τυτὶ κατὰ τὸν ἐπόμενον τρόπον.

Α'. Γράψον τέσδε τῆς ἀριθμὸς ὑπαλλήλους, ὡς τε τῆς χαρακτηῖρας τῶν μονάδων, μετὰ δὲ, τῆς τῶν δεκάδων, εἴτα τῆς τῶν ἑκατοντάδων κτ., ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω οἶονεὶ σήλας τινὰς κατ' εὐθείας γραμμὰς σχηματίζειν, ὑποκάτω δὲ πάντων γραμμὴν ἄγαγε εὐθείαν.

Β'. Ἐνερθεν ἀρχόμενος, κατὰ τὰ ἄνω χωρῶν, σύναπτε τὴν τῶν μονάδων σήλην· ἢ εἰ μὲν τὸ ἄθροισμα τῆς σήλης ταύτης μὴ ὑπερέχη τὸν 9, γράψον αὐτὸ ὑπὸ τὴν σήλην ἑνερθεν τῆς γραμμῆς· εἰδ' ὑπερέχει τὸν 9, εἰκὸς αὐτὸν συγκεῖσθαι ἕκτε μονάδων καὶ δεκάδων (33)· διὸ γράψον μόνον τῆς τῶν μονάδων χαρακτηῖρας ὑπὸ τὴν σή-

λην, τηρῶν τῇ ἐπομένῃ σήλῃ, ὅσα εἰς μονάδας (42), τὰς δεκάδας ἀπάσας.

Γ'. Αὐτῷ δὲ οὕτω γενομένῳ καὶ ἐπὶ τῆς τῶν δεκάδων σήλης, εἶτα καὶ ἐπὶ τῆς τῶν ἑκατοντάδων, εἰς δεξιοῦθεν ἐπὶ τ' ἀριστερὰ πάντων τῶν ἀθροισμάτων γραφέντων, ἀποληφθήσεται τὸ ζητούμενον ὅλκρον ἀθροισμα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστὶ γὰρ τὸ ζητούμενον ἀθροισμα, πᾶσαι μὲν αἱ μονάδες, πᾶσαι δὲ αἱ δεκάδες, πᾶσαι δὲ αἱ ἑκατοντάδες κτ., αἱ τὲς ἀριθμὸς συντιθεῖσαι, εἰλημμέναι ὁμῶς (9). ἀλλὰ μὴν, γινομένων ἀπάντων κατὰ τὴν ἀνωτέρω θεωρίαν, λαμβάνονται ὁμῶς πᾶσαι αἱ μονάδες, πᾶσαι αἱ δεκάδες, πᾶσαι αἱ ἑκατοντάδες κτ. τούτων τῶν ἀριθμῶν· εὐρεθήσεται ἄρα, τῆς θεωρίας ταύτης πραττομένης, τὸ ἀληθὲς ἀθροισμα, τὸ ζητούμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

56. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Οφείλειτις, τῷ μὲν μνησ 3891· τῷ δὲ, 462· τῷ δὲ, 50· τῷ δὲ, 3831· πόσῳ ἄρα ὀφείλει ὁμῶς ἅπασι;

Γράψας ἐν ἀρχῇ τὸν 3891, ὑπόσρῳσεν αὐτῷ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν 462, τιθεὶς τὸν μὲν 2 ὑπὸ τὸν 1, τὸν δ' 6 ὑπὸ τὸν 9, τὸν δὲ 4 ὑπὸ τὸν 8· Τέτον τὸν τρόπον γραφέντων εἰς τῶν ἄλλων, ὡς ἐνταῦθ' ὁρᾶν εἶναι. 3891
 νesi, εἰς πλαγίας γραμμῆς ὑπ' αὐτὸς ἀχθεῖ. 462
 σης, συνάπτε τὴν τῶν μονάδων σήλην, λέγων, 50
 1 εἰς 2 ποιῶσι 3, εἰς 1 ποιῶσι 4, ὅνπερ γράψω 3831
 ὑπὸ τὸν 1· μετὰδεῖν εἶτα ἐπὶ τὴν τῶν δεκάδων 8234
 σήλην ὡσαύτως, 3 εἰς 5 ποιῶσιν 8, εἰς 6 ποιῶσι 14,
 εἰς 9 ποιῶσιν 23· θές ἔν τὸν τῶν μονάδων χαρακτῆρα ὑπὸ τὸν 3, κατέχων τὸν 2 ὑπὲρ τῆς ἀκολουθε σήλης, ἣν συνάπτων λέγε, 2 τὰ τηρηθέντα εἰς 8 ποιῶσι 10, εἰς 4

ποιῦσι 14, ἢ 8 ποιῦσιν 22 · γράφων ἕν αὐθις ὑπὸ τὸν 8 τὸν τῶν μονάδων χαρακτῆρα 2, τὸν δ' ἕτερον 2 τηρῶν τῇ τετάρτῃ σήλῃ, σύναπτε ἢ ταῖς 2 οἱ τηρηθέντες ἢ 3 ποιῦσι 5, ἢ 3 ποιῦσιν ὀκτώ, ὃν ὑποκατάγραψον τελευταῖον τῷ 3 · Οἴφεται ἄρα τὰς πᾶσας μνᾶς 8234.

57. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐν ἐμπορικῇ τινι ἐταιρείᾳ ἔθεντο, ὁ μὲν Ἀριστοκλῆς ἀργύρια 54630, ὁ 54630 δὲ Κλεινίας 946, ὁ δὲ Εὐαγόρας 17845, 946 ὁ δὲ Περίανδρος τελευταῖον 85796 · πόσον ἄρ' 17845 ἔθεντο συλλήδων ἅπαντες; Ταυτὰ ἔν πράξας 85796 εὐρήσεις ὀλικὸν ἄθροισμα 159217. 159217

58. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. χάρις γυμνασίας. Στρατηγός τις ἔλαβε κατὰ καιρὸς ἐκ τῆ στρατιωτικῆ τα. 37360 μίσι τὴν ἐνορωμένους ἀργυρίων ἀριθμὸς · ζητεῖ 914 ἔν ἡδὴ μαθεῖν, ὅσον ἐστὶ τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν 8523 ληφθέντων. 50 56402 103449

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Α'φαιρέσεως.

59. Ὅταν Α'ριθμός τις ἀπ' ἀριθμῶ χωρίζεται, ἵνα, ὅσον ἀλλήλων διαφέρουσι, γνωσθῇ, ἡ πράξις καλεῖται Α'φαίρεσις.

60. Ως ἂν ἔν ἀφελῆς ἀριθμόν τινα ἀφ' ἑτέρου,

Α'. Γράψον τὸν ἐλάττω ὑπὸ τὸν μείζονα, μονάδας ὑπὸ μονάδας, δεκάδας ὑπὸ δεκάδας κτ, εἴτ' ἄγαγε ὑπ' αὐτὸς γραμμὴν πλαγίαν.

Β'. Εἰάν μὲν ὁ πρὸς δεξιὰ πρῶτος χαρακτήρ τῷ κάτω ἀριθμῷ ἴσος ἢ τῷ πρώτῳ χαρακτήρι τῷ ἄνω ἀριθμῷ, θές διαφορὰν αὐτῶν τὸ 0 (15). εἰάν δ' ἐλάχιστων, ἀφελὼν αὐτὸν ἀπὸ τῷ ἄνωτέρῳ ἀριθμῷ, γράψον ὑπὸ τῇ γραμμῇ τὴν διαφορὰν. εἰάν δὲ τελευταῖον ἢ μείζων, λάβε ἐκ τῷ προσεχῶς ἐγγύς χαρακτήρος τῷ ἄνωτέρῳ ἀριθμῷ μονάδα, ἢ μετενεχθείσα ἐπὶ τῷ πρὸ αὐτῆς ἐν τοῖς δεξιοῖς χαρακτήρος, δύναται 10 (41). ἐκ τῷ ἀθροίσματος ἐν τῶνδε τῶν 10 ἢ τῷ προϋπάρχοντος χαρακτήρος ἀφελὼν τὸν ἐνερθεν, ὑποκατάγραψον τὴν διαφορὰν. Αὐτῷ δὲ τύτῃ γενομένῃ καπὶ τῶν ἐτέρων χώρων, δεκάδων ἀμέλειται, ἑκατοντάδων κτ., αἱ ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ γραφείσθαι μερικαὶ διδόασιν τὴν ὀλικὴν ζητούμενην διαφορὰν.

ΔΕΙΞΙΣ. Πράδηλον γάρ, ὅτι ἔτις ἔχεις τὸ κατὰ λοιπὸν τῶν μονάδων, δεκάδων κτ. τῷ ἄνωτέρῳ ἀριθμῷ, ὅ ἐστι τὸ κατὰλοιπον τῷ ὅλῳ ἄνωτέρῳ ἀριθμῷ, ἀφελὼν ἀπ' αὐτῷ τὰς ἐν τῷ κατωτέρῳ μονάδας, δεκάδας, κτ., ταυτὸν εἰπεῖν ὅλον τὸν ἐνερθεν ἀριθμόν. ἔχεις ἄρ' ἔτι τὴν ὅλην διαφορὰν, ἢ ἀλλήλων οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ διαφέρουσιν.

Ο. Ε. Π.

61. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἰς τῶν, ὧν ὀφείλει τις, 9594 ἀργυρίων ἀπέδωκε 2834. πόσ' ἄρ' ἔτι ὀφείλει;

Τὸ κατὰλοιπον τῷ ὀφλήματος εἶναι ἀναμφισβόλως ἡ διαφορὰ, ἡ διαφέρει ὁ 9594 ἀριθμὸς τῷ 2834. εἰς ἣν εὗρεσιν ταύτης τῆς διαφορᾶς, α'. γράψον ὑπαλλήλως τὰς δύο ἀριθμούς, ἀγαγὼν γραμμὴν ὑπ' αὐτὰς. β'. ἀρξά- 9594
μενος ἀπὸ τῶν μονάδων, λέγε, 4 πλὴν 4 ἴσος 0, 2834
ὥστε γράψον ὑπὸ τὴν 4. μετὰβῆθι εἰτα ἐπὶ 6760
τὸν τῶν δεκάδων χώρον, 9 πλὴν 3 ἴσος 6, ὃν γράψον ὑπὸ τὸν 3. ἐπὶ δὲ τὸν τῶν ἑκατοντάδων χώρον λέ-

γε, 5 πλὴν 8, ὅπερ γενέσθαι ἀδύνατον· ληφθεῖσα ἔν μονὰς μία ἀπὸ τῆ ἐπομένῃ χαρακτῆρος 9, καὶ μετενεχθεῖσα ἐπὶ τὸν 5, δύναται 10 (41), ὃς συνάμα τῷ 5 ποιεῖ 15· λέγε ἔν, 15 πλὴν 8 ἴσος 7· ὃν ὑποκαταγράψας μέτελθε τὰς χιλιάδας· ἔνθα, ἐπεὶ ἐκ τῆ 9 ἐλήφθη μονὰς, καὶ μετηνέχθη ἐπὶ τὸν 5, ὁ 9 ἰσοδυναμεῖ ἤδη τῷ 8 (α)· λέγε ἔν, 8 πλὴν 2 ἴσος 6, ὃν ὑπογράψας, ἔξεις τὸ λοιπὸν τῆ ὀφλήματος ἀργύρια 6760.

62. Ὅταν ὁ, ἀφ' ἧ δέοι τὴν μονάδα λαβεῖν, ἀριθμὸς ὑπάρχῃ 0, λάμβανε ἐκ τῆ πρώτῃ ἀπαντῶντος ζητικῆς χαρακτῆρος μονάδα, ἣτις μετενεχθεῖσα ἐπὶ τῆ 0 δύναται 10 (41)· τέτῃ δὲ τῆ 10, ὃν δύναται ὁ 0, ληφθεῖσα αὐτὴ μονὰς, καὶ μεταχθεῖσα ἐπὶ τὸν ἐν τοῖς δεξιοῖς τῆ 0 κείμενον χαρακτῆρα, ἰσχύσει καὶ αὕτη 10 πρὸς γε τῶτον τὸν χαρακτῆρα (αὐτοθ.), αὐτὸς δὲ ὁ 0 καταλείπεται δυνάμενος μόνον 9.

63. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἀγρός τις παρέχει ἐτήσιον πρόσδοον ἀργύρια 5031· ἀλλ' ἐξ αὐτῶν δαπανᾶται τοῖς ἐπισιτεῦσιν ἀργ. 250· πόσον ἄρ' ἐστὶ τὸ καθαρὸν τῆς προσόδου; 1 πλὴν 0 ἴση 1, ἣν γράψω ὑπὸ τὸν 0· 3 πλὴν 5 γενέσθαι ἀδύνατον.

	5031
	250
Τῆ δὲ ἐπομένῃ χαρακτῆρος τῆ ἀνωτέρῃ ἀριθμῷ	4781

ὑπάρχοντος καὶ αὐτῇ 0, εἰλήφθω μονὰς ἐκ τῆ 5, ἣτις μεταχθεῖσα ἐπὶ τῆ 0 ἰσοδυναμήσει 10· ἧ 1 ἐπὶ τῆ 3 ἴση 10· 10 ἔν καὶ 3 ποιεῖσι 13· 13 πλὴν 5 ἴσος 8, ὃς γεγράφθω ὑπὸ τὸν 5· ἐπεὶ δὲ τὸ 0 δύναται ἤδη 9 (62)·

(α) Ὅταν ὑπὸ χαρακτῆρος τινὸς δανειζώμεθα μονάδα, ἐκ ἧς ἐστὶν ἄχρηστον ἐπισημειῶν αὐτῷ σίγμα (·), ἵνα μνησκόμῃμεθα, ὅτι μονάδι ἑλαττον δύναται ὁ χαρακτήρ.

9 ἄρα πλὴν 2 ἴσος 7, ὅς ὑποκαταγεγράφθω· ὁ δὲ 5 ἴσος δύναμει 4, ὃν ὑπογράψας τελευταῖον εὐρήσεις τὴν ζητούμενην καθαρὰν πρόσοδον 4781.

64. Οὕτως πλείω κατὰ συνέχειαν κέωνται ο, δὴ λον, ὅτι διαβιβασθεῖσα μονὰς μία ἐκ τῆ ἐγγύς δεξικῆς χαρακτῆρος ἐπὶ τῆ ἐν ἀρισερᾷ πρώτῃ τῶν ο, ἀναδείξει τετὶ τὸ ο δυνάμενον 10· εἰ δ' ἐκ τούτων μεταβιβασθῇ 1 ἐπὶ τῆ ἐπομένῃ ἐν τοῖς δεξιοῖς ο, τετὶ μὲν ἡ αὐτὸ δυνήσεται 10, τὸ δ' ἡγούμενον ἐν ἀρισερᾷ μηδενικὸν δυνήσεται μόνον 9· τέτῃ δὲ κατὰ διαδοχὴν ἡγευμένη, πάντα μὲν τὰ ο δυνήσονται ἕκαστον 9· μόνον δὲ τὸ ἐν δεξιᾷ πρῶτον δυνήσεται 10· εἰ δὲ ἡ ἐξ αὐτῆς τῆ ἐν τῇ δεξιᾷ πρώτῃ ληφθῇ μονὰς, ἡ αὐτὸ τέτο ἐμφανεῖ 9.

65. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τ' πῆρχεν ἐν τῷ δημοσίῳ ταμείῳ ἄθροισμα χρυσίνων 90005002· ἀφηρεθήσαν δ' ἐξ αὐτῆς 1453276· πόσῃ ἄρα κατελείφθησαν ἐν 90005003 τῷ ταμείῳ; Μονὰς μία ληφθεῖσα ἐκ τῆ 1453276 5 ἡ μετενεχθεῖσα ἐπὶ τῆ ἐγγύς ο, δίδω- 88551726 σιν αὐτῷ δύναμιν 10, ἀλλ' ἐπεὶ κατὰ διαδοχὴν μετενεχθῆναι δεῖ τὴν μονάδα ἐπὶ πάντων τῶν ο μέχρι τῆς 2, ἅπαν ο δυνήσεται μόνον 9· 12 πλὴν 6 ἴσος 6· 9 πλὴν 7 ἴσος 2· 9 πλὴν 2 ἴσος 7· 4 πλὴν 3 ἴσος 1. Μεταβιβασθείσης ἔν παλιν μονάδος ἐκ τῆς 9 ἐπὶ τὸ ἐγγύς ο, καὶ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τῶν ἄλλων, τὸ μὲν ἐν δεξιᾷ ο δυνήσεται 10· τὰ δ' ἄλλα δύο, τὰ πρὸς ἀρισερὰν, ἕκαστον 9· 10 πλὴν 5 ἴσος 5· 9 πλὴν 4 ἴσος 5· 9 πλὴν 1 ἴσος 8· τέλος δὲ, ἐπεὶ ὁ τὴν μονάδα δανείσας 9 δύναται ἤδη 8, γεγράφθω ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὁ 8. 6700800053456

Τ' πόδειγμα ἀφαιρέσεως ὑπὲρ πρ. 34621165726
σῶν, ὧν ἐφθίμεν εἰπόντες, περιπτώσεων. 6354585987730

66. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βάσανος πράξεως ἀριθμητικῆς ἐστὶ πρῶξις ἄλλη, δι' ἧς βεβαιύμεθα, εἰ ἀσφαλῶς ἡ πρώτη διήνυσται· ἐπεὶ δὲ ἡ Πρόσθεσις, καὶ ἡ Ἀφαίρεσις τὴν ἐναντίαν ἀλλήλαις βαίνουσι, τῆς ἐτέρας καθαιρέσεως τὸ ὑπὸ τῆς ἐτέρας οἰκοδομηθὲν, καὶ ἀποκαθιστώσης ἀριθμὸν τινα, ὡς εἶχε πρὸ τῆς κατὰ τὴν ἐτέραν πράξεως· οἷον εἰ τῷ 9 ἀφαιρεθῇ ὁ 5, καὶ καταλειφθῇ ὁ 4, προσθεὶς ἔτος ὁ 4 τῷ ἀφαιρεθέντι 5 ἐπανάγει τὸν 9, ὃν εἶχομεν πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως· αὗται ἄρα αἱ διτταὶ πράξεις συμβαλῶνται ἀμοιβαδὸν ἐπὶ τῇ ἀλλήλων βασάνῳ· ὅτι δὲ ταυτόν ἐστι ρητέον καὶ περὶ τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς Διαιρέσεως, φανήσεται καὶ πάνυ λαμπρῶς ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

Βάσανος τῆς Προσθέσεως.

67. Ἀφ' ἑλε, ἀρχὴν ποιησάμενος ἀρισερόθεν, τὸ ἐκάστης σήλης ἄνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω γινόμενον ἄθροισμα ἀφ' ἐκάστου χαρακτῆρος τῷ ὀλικῷ ἄθροίσματι, τῷ διὰ τῆς προσθέσεως συναχθέντος· εἴαν ἔν μετα πάσας τὰς ἀφαιρέσεις μηδὲν κατάλοιπον ἢ μήτε τῷ ἄθροίσματος, μήτε τῶν σηλῶν, ἀσφαλῶς ἐπράχθη τὰ τῆς προσθέσεως· Ἐν τῷ προκειμένῳ τῆς προσθέσεως ὑποδείγματι, ἡ πρώτη ἐπὶ τῶν ἀρισερῶν σήλη περιέχει μόνον 8, ὅστις ἀφαιρεθεὶς ἐκ τῷ χαρακτῆρος 9, ὃς συστοιχεῖ αὐτῷ ἐπὶ τῷ Α 780
 ἄθροίσματος, καταλείπει 1, ἡ τις γεγράφθω 875
 ὑπὸ τὸν 9, καὶ κατήχθω ὁ τῷ ἄθροίσματος 8049
 χαρακτήρ 7 ἐν δεξιᾷ τῆς καταλειφθείσης 1· 9704. Α
 καὶ συνήφθω ἡ τῷ 17 ἀντιστοιχῆσα σήλη· 8 17
 καὶ 7 ποιῆσι 15· ἀφηρήσθω δὲ ὁ 15 τῷ 20
 17, καὶ ὁ καταλειπόμενος 2 γεγράφθω 14
 0

ὑπὸ τὸν 7· ἢ πρὸς τὰ δεξιά τῷ καταλειφθέντος 2 γρα-
φέν τὸ 0, ὃ εἰν ἐν τῷ Α ἀθροίσματι, παρέχει τὸν 20·
4 σὺν 7 ἴσος 11, σὺν 8 ἴσος 19· τῷ ἐν 19 ἀφαιρεθέν-
τος ἀπὸ τῷ 20, καταλείπεται 1, ἣτις γεγράφθω ὑπὸ
τὸ 0· κατήχθω δ' αὖ τελευταίον ὁ ἔσχατος τῷ ἀθροί-
σματος χαρακτήρ 4 ἐν τοῖς δεξίσις τῆς 1, μεθ' ἧς συστή-
σεται ὁ 14· 5 ἢ 9 ποιῶσι 14, ἢ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῷ
14, ἐν ὑδὲν καταλείπεται· τῷ δ' ὅπερ ἡμεῖς καθίστησι
βεβαίως, μηδεμίαν ὅλως παρεισφρῆσαι τῇ προσθέσει ἀ-
πάτην.

ΤΠΟΔΕΙΜΑ ἕτερον βασανιζομένης προσθέσεως
πρὸς ἀσκησιν τῶν πρωτοκείρων.

68. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Σαφὴς δὲ ὁ λόγος,	10579
ἐφ' ὃν ἡ βᾶσανος αὕτη σφρίζεται· τῷ γὰρ ἀ-	3899
θροίσματος, τῷ διὰ τῆς προσθέσεως ἀγειρομένῃ,	200
συμπληρώματος οὗτος ἀπασῶν τῶν συναφθισῶν	577
σηλῶν, ἀνάγκη ἄρα τὰς σήλας ταύτας ἀφαι-	15255
ρεῖσθαι ἔχειν ἀπὸ τῷ ἀθροίσματος, ἐνὸς μηδενὸς	05
καταλειπομένῃ (15).	22
	25
	25
	0

69. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἐν τῇ τῆς προσθέσεως βασά-
νω ἐπαναλαμβάνειν ἐξέσαι τὰ τῆς πράξεως ἐκ τῶν κά-
τω πρὸς τὰ ἄνω ἴσσι, εἰ τὸ κατ' ἀρχὰς ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ
τὰ κάτω ἢ πρᾶξις ἐχώρησε, ἢ τ' ἀνάπαλιν. Δις γὰρ
ἐξηπατησθαι τὰντὰ διὰ δυεῖν ἐποπτεῶν, φασίν, ἀπίθα-
ναν· ἀραρότως ἔν ἑκάστος πεισθήσεται ἐπὶ τῆς πράξεως,
τὴν ἣν ἄρτι δεδώκαμεν βᾶσανον, ἐν γένει εἰπεῖν, βε-
βαίαν ὑπάρχειν.

Βάσανος τῆς Ἀφαιρέσεως.

70. Τῷ, ὃν ἀφείλομεν ἀριθμὸν, συναφθέντος τῇ εὐρε-
θείᾳ διαφορᾷ, τὸ ἄθροισμα ἀποδώσει αὐτὸν ἐκείνον τὸν
ἀριθμὸν· ἀφ' ὃ ἐγένετο ἡ ἀφαίρεσις (9)· ἐν ἑν τῷ
πρώτῳ τῶν ἡγησαμένων τῆς ἀφαιρέσεως ὑποδειγμάτων,
τῷ ὑπ' ὅψιν ἤδη κειμένῳ, προσθέντες τὸν Β ἀριθμὸν, ὃν
ἀφείλομεν, εἴτ' ἐν τὸν 2834 τῷ Γ ἀριθ. 9594 Α
μῷ, ὃν διαφορὰν εὗρομεν, ἔχομεν τὸ α ἄ. 2334 Β
θροισμα, τὸ κάτω γεγραμμένον, ἴσον τῷ ἄνω 6760 Γ
κειμένῳ ἀριθμῷ Α, ἀφ' ὃ ἐγένετο ἡ ἀφαίρεσις. 9594 α

71. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν δὲ προκένται ἀριθμὸς
πολλάκις ἐαυτῷ προσεθησόμενος, ἢ πολλάκις ἀφ' ἐτέρου ἀ-
φαιρεθησόμενος, τὸ μὲν πρῶτον ἐκτελεῖται διὰ συντόμῃ
προσθέσεως, ἢ καλεῖται Πολλαπλασιασμὸς· τὸ δὲ, δι'
ἀφαιρέσεως ἐπιτετμημένης, ἣτις ὀνομάζεται Διαίρεσις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμῷ.

72. Πολλαπλασιασμὸς ἀκρίβει, ὁπόταν ἀριθ-
μὸς τις, ὃς καλεῖται Πολλαπλασιαστέος, τοσάκις
λαμβάνηται, ὅσαι ἐνεῖσι μονάδες ἐτέρῳ ἀριθμῷ, ὃς ὀνομά-
ζεται Πολλαπλασιαστής· κεινῷ δὲ ὀνόματι ὅ, τε πολ-
λαπλασιαστέος, καὶ ὁ πολλαπλασιαστής καλεῖται ποιη-
ταί, ἢ παράγοντες· ὁ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενος τρί-
τος ἀριθμὸς προκύπτων λέγεται, καὶ γινόμενος, καὶ
παραγόμενος· ἐν ἑν τῷ πολλαπλασιάζειν 5 ἐπὶ 4,
εἴτ' ἐν τετράκις λαμβάνειν τὸν 5, ἐξ ὃ γίνεται 20· 5

μέν εἰν ὁ πολλαπλασιαστέος, 4 δὲ ὁ πολλαπλασιαστής, 20 δὲ ὁ προκύπτων, κτ..

73. Α'. Ἐστὶν ἄρα ὁ πολλαπλασιασμός, ἄλλως τε τῇ πολλαπλασιαστῇ πολλάκις τὴν μονάδα περιέχοντος, ἐπιτετμημένη πρόσθεσις· καὶ γὰρ πολλαπλασιάζων τὸν 5 ἐπὶ 4, ἢ τὸν 5 τετράκις λαμβάνων, ταῦτόν ποιήσεις, ὡς εἰ κατὰ τὸ συνεχὲς τετράκις γράψας τὸν 5, τὰ τῆς προσθέσεως διατράξαι, ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ὑπ' ὄψιν πινακίσκῳ.

74. Β'. Οὗ προκύπτων εὐρεθήσεται περιέ-	5
χων τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσάκις τὴν μονάδα ὁ	5
πολλαπλασιαστής· ὥτως ὁ 20 τετράκις περιέχει	5
τὸν 5, ὥσπερ ὁ 4 τετράκις περιέχει τὴν μονάδα.	20

75. Γ'. Πεισόμεθα ἄρα, ὡς ἡ εἰς πολλαπλασιασμόν διδομένη μέθοδος εἰν ἀληθής, εἰ τοσάκις ἔνεσι τῷ προκύπτοντι ὁ πολλαπλασιαστέος, ὅσαι τῷ πολλαπλασιαστῇ ἐνυπάρχουσι μονάδες.

76. Δ'. Συνάγεται δὲ ἔτι ἐντεῦθεν, ὡς ὁ πολλαπλασιασμός ἐξ ἰδίας φύσεως ὑδάτως μεγεθύνει τὴν πολλαπλασιαζομένην ποσότητα, ἀλλὰ νῦν μὲν αὐτὴν μεγεθύνει, τῇ πολλαπλασιαστῇ τὴν μονάδα ὑπερέχοντος, νῦν δ' ἐλάττωι, ἐλάττονος ἢ μονάς ὄντος τῇ πολλαπλασιάζοντος· νῦν δ' ἡκιστα μεταβάλλει τὴν ταύτης δύναμιν, μονάδι τῇ πολλαπλασιάζοντος ἰσόμενον. Αὐτίκα γὰρ ὁ 6, εἰ μὲν ἐπὶ 4 πολλαπλασιασθῇ, ὁ 24 προκύπτων μείζων ἔσται τῇ πολλαπλασιαστῇ· καὶ ὁ πολλαπλασιασμός ἐνταῦθα μεγαλυνεῖ τὴν ποσότητα· εἰ δὲ πολλαπλασθῇ ὁ 6 ἐπὶ τριτημόριον, λιφθήσεται τὸ τρίτον τῇ 6 μέρος εἶπεν ὁ 2 εἰς προκύπτωτα· καὶ ὁ πολλαπλασιασμός

ὥδε σμικρύνει τὴν ποσότητα· τέλος δὲ, εἰάν ὁ 6 ἐπὶ 1 πολλαπλασιασθῇ, προκύπτων ἔσαι ὁ 6· ἢ ὁ πολλαπλασιασμός ἦκιστα μεταβαλεῖ τὴν ποσότητα.

77. Ε'. Ὅταν ἀριθμὸς θεωρεῖσθαι ἔχη ὡς ἀκριβῶς προκύπτων ἀφ' ἐτέρου τινὸς ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ἐπ' ἄλλον ἀριθμὸν, Πολλαπλῆς ἀκρίβει τῷ ἀριθμῷ ἐκείνῳ· ὥτως ὁ 16 πολλαπλῆς ὑπάρχει τῷ 4, ὅτι τετράκις 4 ποιεῖ 16· ὁ δὲ 12 ἐστὶ πολλαπλῆς τῷ 4, ὡσαύτως ἢ τῷ 3, ὅτι τετράκις 3, ἢ τρίς 4 ποιεῖ 12· αὐτὸς δὲ ἔτος ὁ 12 πολλαπλῆς ἔκ ἐστὶ τῷ 5, ὅτι ἕκ ἐσιν, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθεὶς ἀποτελοῖται 12.

78. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἀπασ' ἀριθμὸς πολλαπλῆς ἐστὶ τῆς μονάδος, εἴγε πᾶς ἀριθμὸς ἑαυτὸν παράγει, ἐπὶ τὴν μονάδα πολλαπλασιασθεὶς (72).

79. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐν ἅπαντι πολλαπλασιασμῷ τὸ προκύπτων ἐστὶ πολλαπλὴν τῷτε πολλαπλασιαζομένῳ, ἢ τῷ πολλαπλασιάζοντι.

80. Ἀριθμοὶ ὀλοχερεῖς, οἱ μηδενὸς ἀριθμοῦ πλὴν τῆς μονάδος ὄντες πολλαπλοὶ, καλεῖντο Πρῶτοι· οἷον ὁ 5 ἐστὶν ἀριθμὸς πρῶτος· ἔδεις γὰρ ἐσιν ὀλοχερῆς ἀριθμὸς, ὃς ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ἐπ' ἄλλον, πλὴν τῆς μονάδος, πολλαπλασιασθεὶς, τὸν 5 παράγει· ἢ δὴ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἰσιν: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, κτ.

81. Ἀριθμὸς, ὅστις πλεονάκις ἢ ἅπαξ λαμβανόμενος ἀριθμὸν τινα παράγει, καλεῖται μέρος σύμμετρον ἀριθμῷ τῷ παραγομένῳ· ὥτως ὁ 3 ἐστὶ μέρος σύμμετρον τῷ 12, ὡς τεταρτημόριον αὐτῷ ὑπάρχων· λαμβανόμενος γὰρ τετράκις παράγει τὸν 12· ἢ ὁ 4 δὲ ἐστὶ σύμμετρον μέρος τῷ 12, τὸ τρίτον αὐτῷ ὢν, εἴγε ληφθεὶς τρίς πα-

ρέχει τὸν 12· καθ' αὐτὸ μὲν τοι σαφές, ὅτι ὁ 4 ἤκιστα ὑπάρχει σύμμετρον μέρος τῷ 15.

82. Ἀριθμὸς, ὅς, περιεχόμενος ἐν ἑτέρῳ, μὴ ἢ ἀκριβῶς σύμμετρον μέρος αὐτοῦ, καλεῖται ἀσύμμετρον αὐτῷ μέρος· ὥτως ὁ 4 ἐστὶν ἀσύμμετρον μέρος τῷ 15.

83. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐν παντὶ πολλαπλασιασμῷ ἑκάτερος τῶν ποιητῶν μέρος σύμμετρόν ἐστι τῷ προκύπτοντος.

84. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ μερῶν συμμέτρων εἰσὶν ἄμειροι.

85. Αἱ τῷ πολλαπλασιάζοντος μονάδες ἐμφαίνουσιν, ὅσας οὗ προκύπτων περιέχει τὸν πολλαπλασιαζόμενον (72)· ἀλλὰ καὶ αἱ τῷ πολλαπλασιαζομένῃ μονάδες παρισώσιν, ὅσας οὗ προκύπτων περιέχει τὸν πολλαπλασιασθῆν· οἷον ἐν τῷ τῷ 4 διὰ 3 πολλαπλασιασμῷ, ὁ μὲν 3 παρίσῃσιν, ὅτι ὁ 4 τρίς περιέχεται ἐν τῷ προκύπτοντι, ὁ δὲ 4 ὡσαύτως ὅτι τετράκις ὁ 3· προβαλλομένων ἄρα δυοῖν ἀριθμῶν ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασθῆναι δι' ἀλλήλων, ἡδὲν διόισι, ὁπότερος ἂν αὐτῶν ληφθῇ πολλαπλασιασθῆς, ἢ πολλαπλασιαστέος· τὸν γὰρ αὐτὸν προκύπτοντα 12 ἀποίσομαι, εἴτε τετράκις τὸν 3 λάβω, εἴτε τρίς τὸν 4.

86. Πολλαπλασιάζοντες ἄρα ἀριθμὸν τὸν Α ἐφ' ἑαυτὸν τὸν Β, τὴν πρᾶξιν ἀσφαλῶς πεπράχθαι κρινόμεν, εἰ πολλαπλασιάσαντες εἴτα τὸν Β ἐπὶ τὸν Α, προκύπτοντα ἔξομεν τὸν αὐτὸν τῷ προτέρῳ.

87. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὡς τὰ πολλὰ δὲ τὸν ἐλάττω τῶν δυοῖν ἀριθμῶν εἰς πολλαπλασιασθῆν τίθεμεν εὐμαρείας ἕνεκα.

88. Ἐπεὶ ἔν ἀδιάφορον ὅλως, ὁπότερον τῶν δυοῖν

ἀριθμῶν θώμεθα πολλαπλασιασὴν, ἢ πολλαπλασιαστέον (85), εἰκὸς ἐκ τούτου, πλειόνων ἀριθμῶν ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιασθῆναι προκειμένων, μηδὲν ὡσαύτως διαφέρειν, καθ' ἣν ἂν τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν· ἔθεν ἦτον γὰρ ὁ 60 προκύψει ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5, καὶν εἰπόμεν, τρίς ὁ 4 ποιεῖ 12, πεντάκις ὁ 12 ποιεῖ 60· εἴτε, τρίς ὁ 5 ποιεῖ 15, τετράκις ὁ 15 ποιεῖ 60· εἴτε δὴ, τετράκις ὁ 5 ποιεῖ 20, τρίς ὁ 20 ποιεῖ 60.

89. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν ἄρα ὁ πολλαπλασιασῆς, οἷον ὁ 24, ἢ προκύπτῃ ἐκ δυοῖν, ἢ πλειόνων παραγόντων, ἀδιαφόρως ἔξει πολλαπλασιάζειν τὸν πολλαπλασιαστέον, οἷος ὁ 5, ἦτοι δι' ὅλη τῇ πολλαπλασιαστῇ 24, ἔξ ἧ προκύπτει 120 ἢ κατὰ διαδοχὴν ἐπὶ τὰς παράγοντας τὸν 24, εἴτ' ἔν 2, 3, 4 λέγωντας· δις ὁ 5 ποιεῖ 10· τρίς ὁ 10 ποιεῖ 30· τετράκις ὁ 30 ποιεῖ 120· ἢ ὅπως ἂν ἄλλως ἢ τάξιν κινήσῃ, ὁ προκύπτων ἔστι ἀμεταποίητος.

90. Ὁ παραγόμενος ἔσται ὡσαύτως ἀμεταποίητος, εἴτε τῇ πολλαπλασιαστῇ, οἷον τῇ 20, ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιασὴν, οἷον τὸν 5, πολλαπλασιασθέντος, ὅθεν προκύπτει ὁ 100, εἴτε τὸ πρῶτον πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ μέρος τῇ 5, εἴτ' ἔν τὸν 3, ἔξ ἧ πρόεισιν 60, εἴτε ἐπὶ τὸ κατάλοιπον μέρος 2, ὅθεν προκύπτει 40, καὶ ἐκ τούτου τῶν δύο προκυπτόντων συναπτομένων ἀλλήλοις· σαφὲς γὰρ, ὅτι ἔχ ἦττον ἑκατέρως ληφθήσεται ὁ 20, ὅσκις περιέχεται ἢ μὴ ἐν τῷ 5.

91. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τῇ διὰ συνθετωτέρων ἀριθμῶν πολλαπλασιασμῷ θεωρία αἰεὶ κεῖται ἐν τῷ λαβεῖν ἅπαντας τὰς προκύπτοντας ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπλυστέρων (54)· ἐστὶν ἄρα τῶν ὧν ἐκ ἄνευ τὰς ἐκ τῶν ἀπλυστέρων προ-

κύπτοντας τὸν πρωτόπειρον ἐκδιδασχῆναι· εὐρεθήσονται δὲ πάντες εὐμαρῶς ἐν τῷ προκειμένῳ Ἀΐβακι, ὃν Πυθαγόρειον μονοὺν πάντες ἐκάλεσαν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

92. Ἰδὲ δὴ ὅπως χρῆσόμεθα τῷδε τῷ Ἀΐβακι· εἰς εὐρεσιν τῷ ὑπὸ τῷ 6 καὶ 5 παραγομένῳ, ζητητέον τὸν οἰκίσκον 30, ἐνθ' ἀμέλει ἢ ἐν ἣ ὁ 6 εἴλη, ἢ ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τῇ κάτω χωρῆσα, συμπίπτει τῇ ἐξ ἀρισερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ ἰσῆ, ἐφ' ἧς κεῖται ὁ 5· ἵνα δ' εὐρωμεν τὸν ὑπὸ τῷ 8 καὶ 7 γινόμενον, λαμβάνοντες τὸν 8 ἐν τοῖς ἄνω τῷ Ἀΐβακος, τὸν δ' 7 ἐν τῇ ἀρισερᾷ, ζητῶμεν τὸν οἰκίσκον 56, ὅπερ αἱ δύο εἴλαι, ἢ μὲν τῷ 8 ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἢ δὲ τῷ 7 ἐκ τῶν ἀρισερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, προῖσαι, ἀλλήλαις συμπίπτουσι.

93. Ὅ γε μὴν ἐκ τῷ 9, ἐφ' ἑαυτὸν ἢ ἄλλον ὄντινα εἰς ἀπλὴν ἀριθμὸν ἀχθέντος, παραγόμενος εὐπαιτέστερον εὐρεθήσεται, προσέχεσι τοῖς ἐπομένοις· δις γὰρ ὁ 9 ποιεῖ 20 πλὴν 2, εἴτ' ἐν 18· τρις ὁ 9 ποιεῖ 30 πλὴν 3, 27· τετρακίς ὁ 9 ποιεῖ 40 πλὴν 4, 36· πεντάκις ὁ 9 ποιεῖ

50 πλὴν 5, 45· ἑξάκις ὁ 9 ποιεῖ 60 πλὴν 6, 54...
τέλος δὲ, ἐννεάκις ὁ 9 ποιεῖ 90 πλὴν 9, 81.

94. Τῶν προκυπτόντων ἐκ τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν 6, 7, 8, 9, ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, εἰς εὐρεσιν δυσχερετέρων ὄντων, ἐξέσται παρ' ἑλλειψιν τῷ Πυθαγορείῳ Ἀβανος εὐρίσκειν τρόπῳ τριῶδε.

Α'. Ὑψέσθων τῆς μὲν δεξιᾶς δάκτυλοι ὑπὲρ τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν τῷ πολλαπλασιασῷ, τῆς δ' ἀριστερᾶς, ὑπὲρ τῶν ἀπλῶν τῷ πολλαπλασιασέει· ὑψέσθων δὲ, εἰς μὲν ὑπὲρ τῷ 6, δύο δὲ ὑπὲρ τῷ 7, τρεῖς δ' ὑπὲρ τῷ 8· τέσσαρες δ' ὑπὲρ τῷ 9· ἕκαστος δὲ τῶν ὑψωμένων δακτύλων ἐμφανέτω δεκάδα μίαν.

Β'. Πεπολλαπλασιασθῶ ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων, οἱ λείπονται κεκλεισμένοι, τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἐπὶ τὸν τῶν κεκλεισμένων τῆς ἀριστερᾶς· ὁ δὲ προκύπτων, τῷ τῶν δεκάδων ἀθροίσματι συναφθεῖς, ποιήσῃ τὸν ζητούμενον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἰν' ἔν ἐν εὐρεθῇ ὁ ὑπὸ 6 ἢ 7 παραγόμενος, ὑψέσθωσαν δύο μὲν δάκτυλοι τῆς δεξιᾶς ὑπὲρ τῷ 7, εἰς δὲ τῆς ἀριστερᾶς ὑπὲρ τῷ 6· οἱ ὑψωμένοι τρεῖς δάκτυλοι δηλῶσι τριάκοντα· τρεῖς δὲ οἱ κεκλεισμένοι τῆς δεξιᾶς, πολλαπλασιασθέντες διὰ τῶν τεττάρων κεκλεισμένων τῆς ἀριστερᾶς, ποιῶσι 12· 12 ἔν ἢ 30 ποιῶσι 42, ὅς ἐστι γινόμενος ὑπὸ τῷ 6 ἢ 7.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰν' ἂν δὲ ὁ ὑπὸ 8 ἐπὶ τὸν 8, εὐρεθῇ, ὑψωμένοι 3 ἐν τῇ δεξιᾷ, ἢ τασῶται ἐν τῇ ἀριστερᾷ δηλῶσιν 60· δύο δὲ κεκλεισμένοι ἐν τῇ δεξιᾷ διὰ δύο τῶν ἐν τῇ ἀριστερᾷ πολλαπλασιασθέντες, διδώσιν 4· προσθέσει ἄρα εὐρίσκεται προκύπτων 64.

95. ΟΡΙΣΜΟΣ. Πολλαπλασιασμὸν ἀπλῶν ὀνομάζομεν, ὅστις ὁ πολλαπλασιασθῆς ἐνὸς μόνου χαρακτῆ-

ρός ἐστὶ περιεκτικός, σύνθετον δὲ, οὐ πλείους ἢ ἓνα χαρακτῆρας ὁ πολλαπλασιασὺς περιέχει.

Πολλαπλασιασμός Α' πλῆς.

96. Α. Ο' ελάχιστων ἀριθμὸς (87) ὅσον ὁ πολλαπλασιασὺς, γεγράφθω ὑπὸ τὸν μείζονα· ἢ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ τὸν ἐνερθεν ἀριθμὸν ὁ πρῶτος ἐν δεξιᾷ χαρακτήρ τῷ ὑπερθεν, ἢ γεγράφθω ὑπὸ τὸν πολλαπλασιασὺν ὁ ἐντεῦθεν γινόμενος· εἰ δὲ ὕτος δύο περιέχῃ χαρακτῆρας, γεγράφθω μόνον ὁ τῶν μονάδων σημαντικός (33)· ὁ δὲ δηλῶν δεκάδας, τηρηθήτω ἐπὶ τῷ συναφθῆναι, οἷα δὴ ἢ μονάδες (42) τῷ ἐφεξῆς προκύπτοντι ἐκ τῷ προσεχῶς κειμένῳ χαρακτῆρος τῷ πολλαπλασιασέῳ.

Β'. Πεπολλαπλασιάσθων ὡσαύτως ἅπαντες ἐξῆς οἱ χαρακτῆρες τῷ ἀνωτέρῳ διὰ τῷ κατωτέρῳ, ἢ γεγράφθων οἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντες κατὰ τὸν προρρήθέντα τρόπον, ἐκ δεξιῶν χωρῶντες πρὸς τὰ λαιά· τὸ δ' ὅλον εἶναι ὁ γινόμενος ἀριθμὸς, ὅς ἐζητεῖτο.

Γ'. Ο' πηνίκα ο ἅπαντ' ἐν τῷ πολλαπλασιασέῳ, τηρούμενος τις ἀριθμὸς ἐκ τῷ πρὶν γεγονότος, γεγράφθω ἐν τῷ χώρῳ τῷ προκύπτοντος ἐκ ο· ἢ μηδενὸς τηρούμεν, τεθείσθω ὡς παραγόμενος τὸ ο.

ΔΕΙΞΙΣ. Α'ριθμὸς τις πολλαπλασιασθησόμενος, ὃν καλῶ Α, ἐκ ἔσιν ἀλλ' ἢ συμπλήρωμα μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων, ἐξ ὧν σύγκειται (9)· ἀλλὰ γὰρ, ὃ εἴρηται πρὸ μικρῶ, διαπερανθέντος, λαμβάνονται αἱ μονάδες, μεθ' ὃ αἱ δεκάδες, εἴτα αἱ ἑκατοντάδες κτ. τῷ Α ἀριθμῷ, ὁσάκις ἔνεσιν ἢ μὴ τῷ Β ἀριθμῷ, ὃν ὑποτίθημι πολλαπλασιασύν· εἰληπται ἄρα, τέτε ὕτω γεγο-

νότος, ἅπας ὁ Α ἀριθμὸς, ὁσάκις τὴν μονάδα ὁ πολλαπλασιασῆς περιέχει (72) Ο. Κ. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Δρυμῶν τις, περιέχων δένδρα 300420, πεπώληται ἅπας, τιμηθέντος ἐκάστου δένδρου ἀργυρίων 4. Πίσση ἄρ' εἰσὶν ἡ ὅλη τῆ δρυμῶνος τιμή;

Φανερόν ἐν, ὅτι εἰσὶν ὁ 300420 τετράκις ληφθείς ζητεῖται τοίνυν ἵν' ὁ 300420 πολλαπλασιασθῇ

300420	
ἐπὶ 4,	ὅ γενησεται ἔτω· α'. γεγρά.
φθωσαν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ὑπαλλήλως,	1201680 Γ

ὡς ὁρῶνται· β'. λέγε· τετράκις τὸ 0 ποιεῖ 0· γεγρά· φθω τὸ 0 ὑπὸ τὸν 4· τετράκις ὁ 2 ποιεῖ 8· γεγρά· φθω 8 πρὸς ἀρισεράν τῆ 0· τετράκις 4 ποιεῖ 16· γεγρά· φθω 6 τηρηθείσης τῆς 1 (96)· τετράκις 0 ποιεῖ 0· γεγρά· φθω ἡ τηρηθεῖσα μονάς· τετράκις 0 ποιεῖ 0· γεγρά· φθω 0 (96. Γ')· τετράκις 3 ποιεῖ 12· γραφέντος ἄρα ἐς ταῦτα, ὁ Γ ἀριθμὸς εἶναι ὅλος ὁ προκύπτων, ὅς δηλαδὲ ὅλην τὴν τιμὴν τῆ δρυμῶνος.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πίσση ἄρ' εἰσὶν ἡ τιμὴ ὀργυῶν γῆς 7097, 9 ἀργυρίων τιμηθείσης ὀργυῆς ἐκάστης; Τῶν αὐτῶν πραχθέντων εὐρεθῇ.

7097	
9	
63873 Δ	

σεται 63873.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. 34056 Α

6
204336 Β

Βάσανος τῆ ἀπλῆ πολλαπλασιασμῆ.

97. Δυνάμεθα δὲ τὴν τῆ πολλαπλασιασμῆ βάσανον ἐκτελέσαι ἄνευ τῆς ἀπὸ τῆς διαιρέσεως συνδρομῆς, τρόπῳ τοιῷδε.

Εὰν μὲν γὰρ ὁ πολλαπλασιασῆς ἢ πολλαπλῆς, πεπολλαπλασιάζω πρῶτον ὁ πολλαπλασιαστέος δι' ἑνὸς τῶν τὸν πολλαπλασιασὴν παραγόντων, εἴθ' ἔτις ὁ προκύπτων ἐπὶ τὸν ἕτερον (89)· οἷον, ἐπὶ τῇ ἐσχάτῃ τῶν ὑποδειγμάτων, τῇ 6 πολλαπλασιασῆ πολλαπλῇ ὑπάρχοντος τῇ 2 καὶ 3, πεπολλαπλασιάζω ὁ Α πρῶτον ἐπὶ τὸν 3, ἐξ ἧς πρόεισι 102168· ὕτας δ' εἶτα ἐπὶ τὸν 2, ὅθεν προκύπτει ὁ Β ἀριθμὸς, ὃς εὔρηται κατ' ἀρχὰς τῇ πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ 6 ἐπιτηδευθέντος.

Εὰν δ' ὁ πολλαπλασιασῆς ἀριθμὸς ἢ πρῶτος, οἷος ὁ 7, ἐφ' ὃν ἂν προκείμετο πολλαπλασιάσαι τὸν 3485, ὅθεν παράγεται 24395· πεπολλαπλασιάζω ὁ 3485 δι' ἑνὸς μέρους τῇ 7, ληφθέντος κατὰ τὸ δοκῆν, τῇ 4 φέρε, εἶτα διὰ τῇ καταλοίπῃ μέρους 3· τῇ δὲ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀνὰ μέρος προκυπτόντων 13940, καὶ 10455, παρεχομένους τὸν αὐτόν, συναχθήσεται ἐντεῦθεν, ὡς ὑγιῶς διαπέπρακται τὰ κατὰ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασμόν.

$$\begin{array}{r}
 3485 \\
 \times 7 \\
 \hline
 24395 \\
 \hline
 3485 \\
 \times 3 \\
 \hline
 10455 \\
 \hline
 13940 \\
 \hline
 24395
 \end{array}$$

Περὶ τῆ συνθέτου πολλαπλασιασμῷ.

98. Εὰν ὅ,τε πολλαπλασιαστέος, καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς σύνθετοι ὦσι, τηρηθήτωσαν αἱ αὐταὶ μέθοδοι, αἷς περὶ τῆ ἀπλῆ πολλαπλασιασμῷ ἀπεδώκαμεν, κατὰ τὸν ἐπόμενον τρόπον.

Α'. Πολλαπλασιασθήτωσαν ἅπαντες οἱ τῇ πολλαπλασιαστέῃ χαρακτηῖρες ἐπὶ τὸν πρῶτον ἐνδεξιοῖς χαρακτηῖρα τῇ πολλαπλασιασῆ· εἶτα πάντες ἐπὶ τὸν δεύτε-

ρον, καὶ ἔτως ἐφεξῆς· γεγράφωσαν ὑπάλληλοι οἱ προκύπτοντες ἔκτε τῷ πολλαπλασιασῶν, καὶ ἐκάστῳ τῶν τῷ πολλαπλασιασῶν χαρακτήρων, ὅπως ἑκάστῳ τῶν ἐφεξῆς προκύπτόντων ὀπισθοδρομῇ χώρον ἓνα (44) ἐπὶ τὰ λαϊὰ, πρὸς γε τὸν πρὸ αὐτῷ γινόμενον.

Β'. Τέλος δὲ συναφθέντων ἀπάντων τῶν προκύπτόντων, τὸ τέτων ἀθροισμα εἶναι ὁ γινόμενος, ὃς ἐζητεῖται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πόσα τιμηθήσεται ὕφασμα πήχεων 189, ἐκάστῳ πήχεως 17 τιμωμένῳ ἀργυρίων; ἢ τιμηθήσεται ἑπτακαίδεκάκις 189· εἰς ἣν εὗρεσιν τέτῳ τῷ παραγομένῳ, πεπολλαπλασιασθῶ ὁ 189

189	
17	
1323	B
189	Γ
3213	Δ

πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸν 7, ὅθεν πρῶεσιν ὁ Β, εἴτ' ἢν ὁ 1323· εἴτα δ' ἐπὶ 1, ἔνθα μένει ὁ 189 Γ πολλαπλασιασῶν ἀμετάτρεπτος, εἴτ' ἢν 189· ἐκῶν προσθέσει τῶν δὲ δύο προκύπτόντων Β καὶ 3213 Δ Γ εὐρίσκεται ὁ Δ, εἴτ' ἢν 3213 δηλωτικὸς ἀπάσης τῆς τιμῆς τῷ ὕφασματος.

99. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ο' δεύτερος τῷ πολλαπλασιασῶν χαρακτήρ σημαίνει 10 πρὸς γε τὸν πρῶτον 7· ἄρα ὁ προκύπτων ἐκ τῶν 189 καὶ 1 σημαίνει δεκάδας πρὸς γε τὸν πρῶτον προκύπτοντα ἐκ τῷ 189 καὶ 7, καὶ δὴ δυνήσεται τὸν 1890· γραπτέον ἄρα τὸν ἐν τοῖς δεξιοῖς πρῶτον αὐτῷ χαρακτήρῳ, εἴτ' ἢν τὸν 9, ἐν τῇ τῶν δεκάδων χώρῳ, εἴτ' ἢν ὑπὸ τὸν 2. Ἐὰν δὲ τριῶν εὐμοιρῇ χαρακτήρων ὁ πολλαπλασιασῶν, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τῷ πολλαπλασιασῶν καὶ τῷ ἐπὶ τὰ λαϊὰ τρίτῳ τῶν τῷ πολλαπλασιασῶν χαρακτήρων πρὸς γε τὸν πρὸ αὐτῷ γινόμενον ἐμφαίνει ἑκατοντάδας· ὁ πρῶτος ἄρα κατὰ δεξιὰν τῶν αὐτῷ χαρακτήρων γραφῆσεται ἐν τῷ τῶν ἑκατοντάδων χώρῳ, καὶ ἔτως ἐφε-

ξῆς· ἔδεν ἄρ' ἀπεικός, ἕκαστον τῶν ἐφεξῆς παραγομένων
ὀπισθοποδεῖν χώρον ἕνα ἐπὶ τὰ λαϊά, ὡς γε τὸν πρὸ αὐτῆ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. τῷ συνθέτῳ πολλαπλασιασμῷ.

Α' πὸ καταβολῆς κόσμου παρῆλθον ἡνιαιτοὶ 7314· ἐν ἧν
ὁ ἡνιαιτὸς ὑποτεθῆ συγκείμενος ἐξ ἡμερῶν 365· πόσαι
ἄρ' ἡμέραι παρῆλθον μετὰ τὴν δημιουργίαν τῷ κόσμῳ;
7314 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5 ποιεῖ 7314 A
τὸν E· ἐπὶ δὲ τὸν 6, τὸν Z, οὕτως 365 B
τὸν πρῶτον ἐνδεξιοῖς χαρακτῆρα γρα- 36570 E
πτέον ὑπὸ τὸν 7· πολλαπλασιασθεὶς 43884 Z
τελευταῖον ἐπὶ τὸν 3, παράγει τὸν Θ, 21942 Θ
ἔ τὸν 2 χαρακτῆρα θετέον ὑπὸ τὸν 8 2669610 K
τὸν δεύτερον τῷ προγενομένῳ· οἱ ἔν E, Z, Θ ἀριθμοὶ
συναφθέντες ποιεῖσι τὸν K· ταῦτέσι μετὰ τὴν τῷ κόσμῳ
δημιουργίαν παρῆλθον ἡμέραι 2669610.

Βάσανος τῷ συνθέτῳ πολλαπλασιασμῷ.

Ποιεῖ τὸν μὲν πολλαπλασιασὴν πολλαπλασιαζέον,
τὸν δὲ πολλαπλασιαζέον πολλαπλασιασὴν, ἢ 17
πράττε αὐτὸς τὸν πολλαπλασιασμόν· κἂν γέ- 189
νηται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἀσφαλὴς ἦν ἡ πρῆξις· 153
οἷον ἐπὶ τῷ πρῶτῳ ὑποδείγματι, ἐπειδὴ ὁ αὐ- 136
τὸς γίνεται 3213, πέπρακται ὑγιῶς ὁ πολ- 17
λαπλασιασμός. 3213

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ πρὸς ἄσκησιν. Πό- 57809
σον δαπανηθήσεται ἐν στρατῷ συγκροτημένῳ 207
ἐκ στρατιωτῶν 57809, δαπανωμένων ἐκά- 404663
σθ ἀργυρίων 207; 00000

115618

11966403

Πολλαπλασιασμός ἐπιτετμημένος.

100. Πολὺ δὲ τῆς πράξεως ἐπιτέμνεται, εἰάν ᾗτοι πατέρω τῶν παραγόντων, ἢ ἑκατέρω, ἢ καὶ ἀμφοῖν μηδενικὰ προσῇ· τηνικαῦτα γὰρ συντομώτερον πολλαπλασίομεν κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

Α'. Εἰάν, ὡς ἐπὶ τῷ ἐσχάτῳ τῶν ὑποδειγμάτων, ἀπαντήσῃ κατὰ τὸν πολλαπλασιασὴν ἐν ο, πάντα τὰ ο, ἐξ ὧν συγκροτεῖται ὁ ο, εἴτ' ὑπὸ προκύπτων ἐκ τῷ πολλαπλασιασέω καὶ τῷ ο, ἀχρησθήσουσι πλὴν τῶν δύο πρὸς δεξιὰν πρώτων, ἃ δείκνυσιν, ὅπερ θετέον τὸν ἐφεξῆς παραγόμενον· ἀποχρήσει ἄρα ταῦτα τὰ δύο ο σημειωθέντα ἐν τοῖς δεξιοῖς· ὕτως ἐπὶ τῷ ῥηθέντος ὑποδείγματος ἀποβληθῆναι δύναται τὰ πρὸς τὰ λαιὰ τρία ο.

Β'. Ἦνίκα πρὸς τῷ τέλει τῷ πολλαπλασιασέω, ἢ τῷ πολλαπλασιασῷ, ἢ καὶ ἑκατέρω, ἐν ἣ πλείω πρωταριθμῶνται ο, δυνάμεθα πολλαπλασιάσαι, ἀρξάμενοι ἀπὸ τῶν πρώτων ἐνδεξιοῖς θετικῶν χαρακτήρων, ἐν δὲ τῷ τέλει προσθεῖναι κατὰ δεξιὰν τῷ ὅλῳ γινόμενον πάντα τὰ τῷ τε πολλαπλασιασέω, καὶ τῷ πολλαπλασιασῇ προσόντα ο· ἀποδίσσεται γὰρ τ' αὐτόν, ὃ καὶ διὰ τῷ χαινοτενεσέρῳ πολλαπλασιασμῷ· τετὶ μὲν τοι ἐπεὶ γενέσθαι ἀμήχανον ἐπὶ τῶν κατὰ τὸ μέσον τῶν χαρακτήρων ἀπαντώντων μηδενικῶν, τηνικαῦτα καὶ πὶ τέτων κατὰ τὰ ὀρθηθέντα ποιητέον.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ. Πόσας περιέχει τετραγωνικὰς ὀργιάς ἑκτασις ἀγρῶ, ἢ τὸ μὲν μῆκος ὀργιαὶ 70500, τὸ δὲ πλάτος 48030.

Ἐπειδὴ περ, ζητῶντες ἐν τετραγωνικαῖς ὀργιαῖς τὴν ἑκτασιν χωρὶς τινός, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ

τὸ πλάτος, πολλαπλασιασθήσεται κἀντᾶυθα ὁ 70500 ἐπὶ τὸν 48030· βυλομένοις δ' ἐπιτεμεῖν τὰ τῆς πράξεως, παρῴπτεον τὰ πρὸς τῷ τέλει τῶν δύο τετῶν ἀριθμῶν 0, εἴτ' ἔν πολλαπλασιασέον μόνον τὸν 705 ἐπὶ τὸν 4803· ὁ ἔν ἐκ τετῶν προκύπτων ἐστὶ 3386115, ἐφ' οὗ τῇ δεξιᾷ γραπτέον 3 μηδεκκα, ἅτε δὴ ὑπαρχόντων δυοῖν μὲν ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασέῳ, ἐνὸς δὲ ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασῷ· ὁ δὲ Α ἀριθμὸς ἔσται δηλωτικὸς τῶν τετραγωνικῶν ὀργυῶν τῶν ἐν τῷ Α γρῷ περιεχομένων.

$$\begin{array}{r}
 705 \\
 4803 \\
 \hline
 2115 \\
 00 \\
 5640 \\
 2820 \\
 \hline
 3386115000 \text{ Α}
 \end{array}$$

101. Ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων ἔπεται, ὡς, εἰς ἀριθμῷ παντὸς ἐπὶ 10 πολλαπλασιασμὸν, ἀποχρήσει ἔν 0 προσθεῖναι ἐν τοῖς αὐτῷ δεξιοῖς· πολλαπλασιάζοντες γὰρ ἀριθμὸν ἅπαντα ἐπὶ τὴν 1, ἔχομεν προκύπτοντα αὐτὸν ἐκείνῳ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν (78)· ἢ ἔτις ἀλυσιτελὲς ἔσαι τὸ τῷ πολλαπλασιασμῷ χρῆμα· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον πολλαπλασιάζοντες ἀριθμὸν τινα δι' 100 τιθεμεν δύο 0 ἐν τοῖς αὐτῷ δεξιοῖς· διὰ δὲ 1000, τρία 0, ἢ ἐφεξῆς ἔτις.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ταλάντε τινὸς καθ' ὑπόθεσιν τιμωμένε ἀργυρίων 4256, πόσων χιλιάδων ἀργυρίων τιμᾶται χίλια τάλαντα.

Δέον ἔν πολλαπλασιάσαι 4256 ἐπὶ 1000, ἀποχρήσει δεῖναι πρὸς δεξιὰν τῷ πρώτῳ τῶν ἀριθμῶν 0 τρία, ἢ περανθήσεται ὁ πολλαπλασιασμός· τὰ ἄρα χίλια τάλαντα περιέξουσιν ἀργύρια 4256000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πόλις κατὰ μῆκος μὲν περιέχουσα σάδες 300, κατὰ δὲ πλάτος 100, πόσων ἔσται

περιεκτική τετραγωνικῶν σαθίων ; ἴν' ἔν' πολλαπλασιασθῇ ὁ 300 ἐπὶ 100, ἄλλως ἔσται, εἰ γραφείησαν ἐν τοῖς τῷ 300 δεξιοῖς μηδενικά δύο· εὐρεθήσονται δὲ ἔτω σαθία τετραγωνικά 30000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Τί δὴ ποτε προκύψει ἐκ τῷ 1000, καὶ 1000 ; ἔχεις εἰθὺς τὸν προκύπτοντα, γράψας κατ' ἀκολουθίαν τρία ὁ ἔτω 1000000.

102. Ἐπεὶ περ ἀδιαφόρως ἔξεσι πολλαπλασιάζειν, ἦται ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιασὴν, ἢ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τὲς αὐτὸν παράγοντας (89), ἐπενεγκεῖν δυνάμεθα τὰς ἐφεξῆς μεθόδους, αἱ συχνότερον ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ἐγ-κρίνονται.

Ἰνα πολλαπλασιασθῶσι, φέρ' εἰπεῖν, 35 ἐπὶ 6, ὡς ὅτε βυλόμεθα ἀναγαγεῖν ὀργιάς εἰς πόδας κτ., παρατηρῶντες, ὅτι ὁ 6 ἔσι προκύπτων ἐκ τῷ 2 καὶ 3, πολλαπλασιάζομεν τὸν 35 πρῶτον ἐπὶ τὸν 2, εἶτα τὸν ἐκ τούτου, εἴτ' οὖν τὸν 70 ἐπὶ 3, καὶ ἔτω προελίσσεται 210, ὃς προκύψει καὶ ἐπὶ 6 τῷ πολλαπλασιασμῷ γε-γονότος.

103. Ο' 20 προκύπτει ἐκ 2 καὶ 10· 30, ἐκ 3 καὶ 10· 40, ἐκ 4 καὶ 10· 60, ἔξ 6 καὶ 10· ἴν' ἔν' πολλαπλασιασθῇ ἀριθμός τις ἐπὶ 20, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ 2, προσε-θέντος ἅμα κατὰ δεξιὰν τῷ γινομένῳ τῷ 0· εἰς δὲ τὸ πολλαπλασιάσαι ἀριθμόν τινα ἐπὶ 30 γενέσθω μὲν ἐπὶ 3 ὁ πολλαπλασιασμὸς, τεθείσθω δ' ἐν δεξιᾷ τῷ παραγο-μένῳ 0· ἵνα δὲ πολλαπλασιάσωμεν 8 ἐπὶ 40, ὅπως ἀ-ναγάγωμεν φέρ' εἰπεῖν, 8 γρόσια τερκικὰ εἰς παρὰδας, πολλαπλασιάσωμεν 8 ἐπὶ 4, καὶ προσθῶμεν ὁ τῷ 32. Τέλος δὲ εἰς τὸν ἐπὶ 60 πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῷ τινος, ὡς ὅτε πρόκειται τὰ τῆς Ἀνερίας καλούμενα φορῖνια εἰς

τὰ ἐν αὐτοῖς ἀναλύσαι ὀνομαζόμενα τσαυροφόρα, πεπολλαπλασιασθῶ ὁ 8 φέρε, ἐπὶ 6, καὶ προτεθείσθω μηδε. νικὸν τῷ 48, ἵνα γένηται 480.

Αἱ μέθοδοι αὗται, ἐνδραχέει πάνυ ἐκτελέμεναι, εἰσάει ἐν τῇ πρακτικῇ προκρίνονται τῷ ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀποδοθέντος (98) γενικῷ κανόνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως.

104. Διαίρεσις ἐστὶ πρᾶξις, δι' ἧς, ὅσον ἐνδέχεται ἀριθμὸς ἕτερος ἑτέρῳ ἀφαιρεῖται, ἵνα γνωσθῇ ὅσάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχεται· διακριδὸν δὲ καταλέγνται ἀπ᾽ αὐτῆς διαίρεσει ἀριθμοὶ τρεῖς, ὁ διαιρέτης, ὁ διαιρετέος, καὶ τὸ πηλίκον.

105. Διαιρέτης μὲν ὅν καλεῖται ὁ ἀφαιρέμενος· διαιρετέος δὲ ὁ, ἀφ' οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται· τὸ δὲ πηλίκον, τῆς πράξεως ἐκπερανθείσης, ἐμφαίνει ὅσάκις τῷ διαιρετέῳ ἀφηρέθη ὁ διαιρέτης, εἴτ' ὅν, ὅσάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχεται· οἷον, τῷ 8 ἀφαιρεῖν δυνάμεθα τὸν 2 τετράκις· 8 ἄρα διαιρεθεὶς διὰ 2 δίδωσι 4· καὶ 2 μὲν ἐστὶν ὁ διαιρέτης· 8 δὲ ὁ διαιρετέος· 4 δὲ τὸ πηλίκον.

106. Ἐπειδὴ ἄρα αἱ τῷ πηλίκῳ μονάδες παρισώσιν, ὅσάκις ὁ διαιρέτης ἔνεσι τῷ διαιρετέῳ, ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, ὅσάκις τὸ πηλίκον περιέχει τὴν μονάδα· οἷον ἐπὶ τῷ ληφθέντος ὑποδείγματος, ὁ 8 περιέχει τὸν 2, ὅσάκις τὴν μονάδα ὁ 4.

107. Ἐὰν ἄρα πολλαπλασιασθῇ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ τὰν ἀπάλιν, ἐπειδὴ ὡς ἐκ τούτου ὁ διαι-

ρέτης ληφθήσεται, ὅσας ἀφήρηται τῷ διαιρετέῳ, τῷ ἐκ τῆς διαιρέσεως καταλοίψῃ, εἴπερ εἴη, προσεθέντος τῷ παραγομένῳ, ἐπανακάμψῃ αὐτῷ ὁ διαιρετέος· ἐν ἑν τῷ φθάσαντι ὑποδείγματι τὸ πηλίκον 4, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, ἀποδώσει τὸν 8 διαιρετέον. Μαρτύριον ἄρα ὑγιῶς διαπερανθείσης διαιρέσεως, εἰ, ἐπαχθὲν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀποκαταστήσῃ αὐτῷ τὸν διαιρετέον.

108. Ἐπειδὴ περ ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ αἱ τῷ πολλαπλασιασῷ μονάδες ἐκδηλῶσιν, ὅσας ὁ πολλαπλασιαστέος ἑνὲς τῷ παραγομένῳ, καὶ ἀντιστρόφως (85), διαιρῶσιν ἄρα προκύπτοντα διὰ τῷ ἑτέρῳ τῶν αὐτῷ ποιητῶν, προκύψῃ πηλίκον τῶν παραγόντων ὁ ἕτερος· παράγοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 15 ὑπάρχονσι 3 καὶ 5· διελόντες ἑν 15 διὰ 3 ἔξομεν 5, διελόντες δὲ 15 διὰ 5 εὐρήσομεν 3.

109. Εἰσόμεθα ἄρα, εἴπερ ἀσφαλῶς διαπεπερανται ὁ πολλαπλασιασμὸς, εἰάν, τὸν προκύπτοντα διελόντες διὰ τῷ πολλαπλασιασῷ, ἀπολάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον· ἢ τὸν πολλαπλασιασὴν, διελόντες διὰ τῷ πολλαπλασιαστέῳ.

110. Ἐάν, προκύπτοντός τινος γινωσκομένου, καὶ πατέρου τῶν παραγόντων αὐτὸν, ζητῆται ὁ ἕτερος, διηρήσθω ὁ προκύπτων ἕως διὰ τῷ γνωστῷ παρέγοντος, τὸ δὲ πηλίκον ἀποδώσει τὸν ζητούμενον ποιητήν· γινώσκοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 30 παραγομένον ὑπὸ 6, καὶ ἄλλῃ ἀριθμῷ, ὃν εἰδέναι ζητῶμεν, διαιρῶμεν δι' 6 τὸν 30, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον τὸν 5, ὅς ἐστιν ὁ ζητούμενος.

Καθάπερ δὲ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἢ καὶ αὖξαι τὴν ποσότητα, ὡς εἶναι μείζω τῷ πολλαπλασιαστέῳ τὸν γινόμενον· ἔτι καὶ διαίρεσις ἢ ἐλαττοῖ καὶ τὸ ποσόν, ὡς καὶ

ἐλάττων ὑπάρχειν τῷ διαιρετέῳ τὸ πηλίκον· αὐτίκα γὰρ τῷ 6 προκειμένῳ εἰς διαίρεσιν, εἰ μὲν αὐτὸν διέλωμεν δι' ἀριθμὸν μονάδα ὑπερβαίνοντος, οἷον τῷ 2, πηλίκον ἔσαι ὁ 3, ἐλάττων τῷ διαιρετέῳ 6· εἰ δὲ διὰ τῆς 1, ὁ 6· τῷ γὰρ 6 ἔνεσιν ἐξάκισ ἢ 1· καὶ δὴ τὸ πηλίκον ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ· εἰ δὲ διέλωμεν αὐτὸν διὰ $\frac{1}{2}$, ἔσαι πηλίκον 12, εἴγε ἐν τῷ 6 δωδεκάκισ ὑπάρχει τὸ $\frac{1}{2}$ · καὶ δὴ τὸ πηλίκον ὑπερέξει τὸν διαιρετέον· τῷ δ' ἅπαν ἀπογεννᾶται ἐκ τῆς κατὰ τὴν διαίρεσιν φύσεως· ἡ γὰρ τοι διαίρεσις πέφυκεν ἐν τῷ εὐρεῖν, ὅσάκισ ἄτερος ἀριθμὸς περιέχεται ἐν θατέρῳ· φανερόν ἐν, ὡς ἄρα 1 μὲν ἐξάκισ, 2 δὲ τρεῖς, τελευταῖον δὲ $\frac{1}{2}$ δωδεκάκισ, ἕκαστος τῷ 6 ἐμπεριέχεται. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τῷ διαιρετέῳ, ὑπερέχοντος μὲν τὴν μονάδα, τὸ πηλίκον ἔσαι ἐλάττων τῷ διαιρετέῳ· ἰσχυμένῳ δὲ μονάδι, ἰσῆται· ἐλάττωμένῳ δὲ τέλος τῆς μονάδος, ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον.

111. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀπλὴ ἡμῖν κληθήσεται ἡ διαίρεσις, τῷ διαιρετέῳ ἓνα μόνον ἔχοντος χαρακτῆρα· σύνθετος δὲ, πλείους, ἢ ἓνα.

Περὶ τῆς ἀπλῆς διαίρεσεως.

112. Τῷ διαιρετέῳ ἀπλῷ ἀριθμῷ (54) ὄντος, Α'. γράψον αὐτὸν ὑπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα, ἢ, εἰ μὲν αὐτῷ ἥμισα ἐμπεριέχεται, ὑπὸ τὴν δύο πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρας τῷ διαιρετέῳ.

Β'. Ζήτησον, ποσάκισ ὁ διαιρετέος ἐμπεριέχεται τῷ δευτέρῳ χαρακτῆρι, ἢ καὶ ἀμφοτέροις ἅμα· τὸν δ' εὐρεθέντα ἀριθμὸν θῆς εἰς πηλίκον.

Γ'. Πολλαπλασίσαι τον διαιρέτην ἐπὶ τὸ το πηλίκον, ἢ τὸν προκύπτοντα ἄφελε τῷ χαρακτῆρος, ἢ τῶν δύο χαρακτήρων, ὑφ' ἑς γέγραπται ὁ διαιρέτης.

Δ'. Καταγαγὼν τὸν ἐφεξῆς τῷ διαιρετέῳ χαρακτῆρα, θές πρὸς δεξιὰν τῷ καταλοίπῳ, εἰ δὴ τι κατελείπεται.

Ε'. Γράψον τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τῷ καταλοίπῳ, ἢ τῷ καταχθέντος χαρακτῆρος, ἢ, εἰ μηδὲν εἶη κατάλοιπον, ὑπὸ τὸν καταχθέντα χαρακτῆρα, ἢ ἐπανάλαβε, ἢν ἐδείξαμεν πρᾶξιν.

ς'. Τύτων ἔν εκ διαδοχῆς ἐφ' ἀπάντων τῶν τῷ διαιρετέῳ χαρακτήρων ἐκτετελεσμένων τὰ κατὰ σειρὰν γραφέντα ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ δεξιὰ πηλίκα, ὁμῶς ληφθέντα, συγκροτήσουσι τὸ ὅλικόν, ὃ ἐζητεῖτο, πηλίκον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Γραμμικὴ ὀργιὰ σύγκειται ἐκ ποδῶν ἑξ, πόδες ἔν 2634 πόσας παρέχονται ὀργιὰς; ἢ ὅσας πόδες ὁ ἀφαιρεθῆναι δύνανται τῶν 2634· περιέστηκεν ἄρα εἰς τὸ διαιρεθῆναι τὸν 2634 διὰ 6.

α'. Γράψον ἔν τὸν 6 ὑπὸ τὸν 26.

β'. Λέγε, πόσας ὁ ἐνυπάρχει τῷ 26; τετράκισ· γράψον ἐν τῇ τῶν πηλίκων χώρα, ὡς ὀρᾷς, 4.

γ'. Πολλαπλασίσαι τὸν 6 διαιρέ.

2634	6
6	439
24	
23	
6	
18	
54	
6	
54	
0	

την ἐπὶ τὸ πηλίκον· τετράκισ ὁ ποιῆσι 24, ὃν γράψας ὑπὸ τῆς δύο χαρακτῆραι 26 τῷ διαιρετέῳ, ἢ ἀφαιρῶσιν ποιήσας, θές τὴν 2 διαφορὰν ὑπὸ τὸν 4.

δ'. Καταγαγὼν τὸν τῷ διαιρετέῳ χαρακτῆρα 3, γράψον ἐν δεξιᾷ τῷ καταλοίπῳ 2· ὅθεν ἔσαι 23.

ε'. Γράψας τὸν 6 ὑπὸ τὸν 23, λέγε,

ποσάκισ τῷ 23 ἐνυπάρχει ὁ 6; τρίς· γράψον πρὸς δεξιὰν τῆ πρώτῃ πηλίκῃ 4 τὸν 3, καὶ πολλαπλασιάσον τὸν 6 διὰ τῆ πηλίκῃ 3, καὶ θές ὑπὸ τὸν 23 τὸ προκύπτοντα 18· ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, λείπεται 5, ὃν θές ὑπὸ τὸν 8.

ς'. Καταγαγὼν γράψον ἐν δεξιοῖς τῆ καταλοίπου 5 τὸν ἔχοντα τῆ διαιρετέου χαρακτήρα 4· γεινήσεται ἔν 54· γράψας δὲ τὸν 6 ὑπὸ τὸν 54 λέγε, ἐν τῷ 54 ποσάκισ περιέχεται ὁ 6; ἐνεάκισ· γράψον τὸν 9 ἐν δεξιᾷ τῆ 3, ὡς τελευταίαν πηλίκον· πολλαπλασιασθέντος δὲ 9 ἐπὶ 6, καὶ τῆ προκύπτοντος 54 ἀπαχθέντος ἀπὸ τῆ 54, ἔδεν καταλείπεται· οὕτως ἄρα πίδες 2634 παρέξασιν ὀργυὰς 439.

113. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἰνα δὲ ἀπαιώτερον εὐρίσκωμεν πηλίκον ἑκάστων, ξυντελεῖ τὰ μέγιστα ὁ Πυθαγόρειος ἄβαξ· ὅτως ἵνα γνωσθῇ (111) ἰσάκισ ὁ 6 ἐμπεριέχεται τῷ 54, ἐπερχόμεθα ὀφθαλμοῖς τὴν, ἐν ἣ ὁ 6, γραμμὴν ἀρισερόθεν ἰόντες πρὸς δεξιὰ, μέχρις ἂν ἀπαντήσωμεν τῷ 54, ὃν ὁρῶμεν κατὰ κάθετον ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ἀντιστοιχῶντα τῷ 9· διὸ γράφομεν 9· ἵνα δὲ γνῶμεν ἰσάκισ ὁ 6 ἐνεσι τῷ 23, παρατηρεῖμεν, ποδηγετούμενοι ὑπὸ τῆ 6 ἐξ ἀρισερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τὸν 18 τὸν μείζοντα προκύπτοντα ἐκ τῆ 6 τῶν, περιέχει ὀλοχερῶς ὁ 23· ἐπεὶ δὲ ὁ 18 ἀντιστοιχεῖ κατὰ κάθετον τῷ 3, σημειῶμεν ὡς πηλίκον τὸν 3.

114. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Στίζειν δὲ ἑκάστων τῶν καταγαγμένων τῆ διαιρετέου χαρακτήρων, τὴν ἀμφιβολίαν ἀφίστησι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Τ' φασμά τι πήχεων 7 τιμᾶται ὅλον ἀργυρίων 133· πόσῃ ἄρ' ἑκάστος πήχυς; διελεῖν ἔν χρη' δι' 7 τὸν 133· γράψας δὲ τὸν 7 ὑπὸ τὸν 13 λέγε, ἐν 13 ἅπαξ ὁ 7· σημείωσον 1 ὡς πηλίκον· καὶ πολλα-

πλασιάσας τὸν 7 διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον
 1, ἢ ἀφελὼν τὸν προκύπτοντα ἀπὸ τῆ 13,
 ἕξαις κατάλοιπον τὸν 6· ἐν δεξιοῖς τῆ 6
 γράψον τὸν τῷ διαιρετέῳ χαρακτήρα 3, ἢ
 τὸν 7 ὑπὸ τὸν 63· ἐν τῷ 63 ὁ 7 ἐννεάκις·
 σημείωσον ὡς πηλίκον τὸν 9· ὁ ἔν προκύπτων
 ἐκ τῆ 7 ἢ 9 ἀπαχθὼς ἀπὸ τῆ 63, καταλείπει 0· ὁ ἄ.
 ρα πῆχυσ τιμηθήσεται ἀργυρίων 19.

$$\begin{array}{r} 133 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 19} \\ 63 \\ 7 \\ 63 \\ 0 \end{array}$$

115. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Ο' πηλικά ὁ διαιρετέος ἔκ 3.
 εἰν ἀκριβῶς πολλαπλῆς τῷ διαιρέτῃ (77), μὲναι τι λει-
 ψανον μετὰ τὴν διαίρεσιν· τῷτο ἔν πρὸς δεξιὰ τῆ πηλί-
 κη, γραμμῆς ὀρίζοντες ἀχθείσης, γράφεται ἐκ' αὐτῆς,
 ὑποσημειωμένῃ τῷ διαιρέντος· ὁ δὲ ἄλλος πάντως, ὅτι τὸ κα-
 τάλοιπον τῷτο προσδεῖται ἔτι διαίρεσεως, ἣτις γενήσε-
 ται, ὡς ὀφόμεθα.

116. ΣΧΟΛΙΟΝ Δ'. Λειψάνῃ δὲ μηδενὸς ὅλως
 λειπομένῃ, ἢ τῷ καταχθέντος χαρακτήρος τὸν διαιρέτην
 μὴ χωρῶντος, τίθεται τμηκᾶτα 0 εἰς πηλίκον· ἐν γένει
 δὲ ἐπὶ πάσης διαίρεσεως τοσᾶντα δεῖ 0 εἰς πηλίκον τιθέ-
 ναι, ὅσας κατάγομεν τῷ διαιρετέῳ χαρακτήρα, εἰς συμ-
 πλήρωσιν ἀριθμῷ τὸν διαιρέτην περιέχοντος· ἀναγκαῖον
 δὲ τῷτο, ἵνα τὸ πρῶτον δετικὸν πηλίκον τεθῇ ἐν τῷ
 χώρῳ, ἐν ᾧ κεῖται ὁ δετικὸς τῷ διαιρετέῳ χαρακτήρ,
 ὁ τότε τὸ πηλίκον παρέχων.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Πέντε κληρονόμοι διανεμᾶσθαι
 σφίσι βέλονται κληρονομίαν ἀργυρίων 501054· πόσα
 κληρώσεται ἕκαστος;

Ε'ν 5 ἅπαξ ὁ 5· γεγράφθω 1 πηλίκον· ἅπαξ 5
 ποιῇ 5, ἢ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆ 5, καταλείπεται 0·
 κατήχθω τῷ διαιρετέῳ τὸ 0, ἢ ἐπεὶ τῷτο μὴδ' ἅπαξ

περιέχει τὸν διαιρέτην, τεθείσθω
 ο πηλίκον· κατήχθω ἡ 1, ἥτις ἐδ'
 αὐτὴ περιέχει τὸν διαιρέτην 5·
 γεγράφθω ἢν ἔτι ἐν μηδενικὸν εἰς
 πηλίκον· κατήχθω εἴτα τὸ ἔφε-
 ξῆς ο τῷ διαιρετέῳ· ὅθεν γίνε-
 ται 10· ἐν 10 δις ὁ 5· γεγρά-
 φθω 2 εἰς πηλίκον· δις 5 ποιεῖ 10, ὃ ἀφαιρεθέντος, κα-
 ταλείπεται 0· κατήχθω ὁ 5, ὃς δίδωσι πηλίκον 1, ὃ
 ἀφαιρέσεως γινομένης, λείπεται 0· κατήχθω τελευταῖον
 ὁ 4, ὃ τινος μὴδ' ἀπαξ περιέχοντος τὸν διαιρέτην 5,
 τεθείσθω μὲν εἰς πηλίκον 0· τὸ δὲ κατάλοιπον 4 γεγρά-
 φθω ἐν δεξιᾷ τῷ πηλίκῳ ἔτω $\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{r|l} 501054 & 5 \\ \hline 5 & | 100210\frac{4}{5} \\ \hline 0010 & \\ & 5 \\ & 10 \\ & 05 \\ & 5 \\ & 04 \\ & 0\frac{4}{5} \end{array}$$

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἡμέραι
 14215 πόσας ἑβδομάδας συγκρα-
 τῶσι;

$$\begin{array}{r|l} 14215 & 7 \\ \hline 7 & | 2030\frac{5}{7} \\ \hline 14 & \\ & 021 \\ & 7 \\ & 21 \\ & 0\frac{5}{7} \end{array}$$

Περὶ τῆς συνθέτου διαιρέσεως.

117. Τηρηθήτωσαν ἐν τῇ συνθέτῳ διαιρέσει ἅπαν-
 τες οἱ κανόνες οἱ ἐπὶ τῆς ἀπλῆς ἀποδοθέντες, ἔτω Α'. ὅλος
 ὁ διαιρέτης γεγράφθω ὑπὸ χαρακτῆρας τῷ διαιρετέῳ ἐν
 τοῖς ἀριστεροῖς κειμένους, ὥς αὐτὸν ἐκείνοις ἐμπεριέχεσθαι,
 καὶ σιγῇ τῷ ὀχλατὸς ἐν δεξιοῖς χαρακτῆρ τῷ διαιρετέῳ,
 ὃ ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεῖ.

Β'. Ζητηθήτω, πόσάκις ὁ ἐν δεξιοῖς πρῶτος τῷ διαι-
 ρέτῳ χαρακτῆρ περιέχεται ἐν τῷ πρώτῳ, ἢ τοῖς δυοῖν πρῶ-
 τοις τῷ διαιρετέῳ, οἷς ἀντιστοιχεῖ.

Γ'. Πρὶν ἢ σημειωθῆναι τὸ πηλίκον, σκεπτέον μὴ εἶη μείζον τῷ ἀπαιτούμενῳ· πολλαπλασιασθήτω ἔν ὅλος ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἢν ὁ προκύπτων μὴ ὑπερέχη τῆς τῷ διαιρετέῳ χαρακτῆρας, οἷς ἀντιστοιχεῖ ὁ διαιρέτης, ἔκ εἰς μείζον, ἢ ὅσον ἔδει, τὸ πηλίκον· διὸ σημειωθήτω ἐν τῷ χώρῳ τῶν πηλίκων· ἀλλ' ὑπερέχοντος τῷ γινομένῳ τῆς χαρακτῆρας, μειωθήτω τὸ πηλίκον μονάδι, ἐστ' ἂν ὁ προκύπτων ἐκ τῷ διαιρέτῃ ἢ τῷ καινῷ πηλίκῳ μὴ ὑπερτερῇ τῶν εἰρημένων χαρακτήρων· ταῦτ' ἔν τὸ καινὸν σημειωθήτω εἰς πηλίκον.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Στρατιῶται 35 διηρέθησαν εἰς λειτουργίαν ἑκάστος ἰδίαν, οἷς ἅπασιν ὁ στρατηγὸς ἔδωκεν σάτο ἀργύρια 640· πόσ' ἄρ' ἐπανήκυσιν ἑκάτῳ;

Θεῖς τὸν 35 ὑπὸ τὸν 64 λέγε· ἐν	640 35
6 πρὸς ἀρισερὰν πρώτῳ χαρακτῆρι τῷ διαιρετέῳ, ὡς περ ἀντιστοιχεῖ ὁ 3, πρώτος	35 18 1/2
πρὸς ἀρισερὰν χαρακτῆρ τῷ διαιρέτῃ, πο-	290
σάκῃς ὑπάρχει αὐτὸς ὁ 3; δις· πρὶν ἔν ἢ	35
γράφῃς τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασιάσον	280
τὸν διαιρέτην 35 ἐπὶ 2· ἐπεὶ δὲ ὁ προκύπτων 70 ὑπε-	1 1/2
ρέχει τὸν 64, ὡς ἀντιστοιχεῖ ὁ διαιρέτης, δῆλον ὅτι ὁ 2	
πηλίκον εἰληπται μείζον τῷ δικαίῳ· ἀντὶ ἔν τῷ 2, εἰ-	
λήφθω 1, ἐφ' ἣν πεπολλαπλασιάσθω ὁ διαιρέτης 35·	
ἅπαξ 35 ποιεῖ 35, ἔκ ἐτι ὑπερβαίνοντος τὸν 64, γεγρα-	
φθω πηλίκον 1, καὶ ἀφηρήσθω ὁ προκύπτων 35 ἀπὸ τῷ 64·	
καταλειπομένῳ ἔν 29, πρὸς δεξιὰν αὐτῷ καταχθέν γε-	
γράφθω τὸ τῷ διαιρετέῳ 0· ὅθεν γίνεταί 290· γραφή-	
τω ἔν αἰθῇς ὁ 35 διαιρέτης ὑπὸ τὸν 290, ὥς ἐ δύνασθαι	
ἐνεῖναι αὐτῷ, εἰτ' ἔν ἀντιστοιχεῖν τὸν μὲν 3 τῷ 29, τὸν	
δὲ 5 τῷ 0.	

Λέγε δὴ: ἐν τοῖς δυοῖ χαρακτῆρσιν, οἷς ὁ πρὸς ἀριστερὰν πρῶτος χαρακτῆρ τῷ διαιρέτῃ ἀντιστοιχεῖ, ποσάκις ὑπάρχει ὁ 3; ἐννεάκις· ἐξητάσθω ἔν· ὁ 9· ὅλος ὁ 35 διαιρέτης ἐπαχθεὶς ἐπὶ 9, παράγει 315, ὃς ὑπερέχει τὸν 9, οἷς ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεῖ, χαρακτῆρος τῷ διαιρετέν· μειωθήτω ἄρα τὸ πηλίκον μονάδι, ταυτὸν εἰπεῖν ἕξεται· σθήτω ὁ 8· πολλαπλασιασθεὶς δὲ ὁ 35 ἐπὶ 8, ἐπεὶ ποιεῖ 280, ὃς ὑπέχει τὸν 290, σημαίνει, ὅτι 8 ἐστὶ τὸ ἀπαιτούμενον πηλίκον, ὃ δὴ καὶ γεγράφθω· ἀφαιρεθεὶς δὲ ὁ 280 ἀπὸ τῷ 290, καταλείπει 10 ὅτως ἄρα ἕκαστος τῶν σρατιωτῶν λήψεται ἀργύρια 18, καὶ ἔτι ἑναπολείφθησονται 10 σφίσι διανεμησόμενα.

118. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰστέον δὲ ὅτι τὸ καθάπαξ σημειώμεον πηλίκον ἐκ ἂν ἔχοι ληφθῆναι μείζον τῷ 9· αἶτι γὰρ προκύψει, τῷ διαιρέτῃ ἐπὶ πηλίκον τῷ 9 ὑπεραλλόμενον πολλαπλασιασθέντος, ἀριθμὸς μείζων τῶν τῷ διαιρετέν, οἷς ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεῖ, χαρακτῆρων· ὁ πηλίκος ἂν δοκεῖ εἶναι πηλίκον 10, ἢ 11 κτ., ἀπόπειραν λαμβάνομεν τῷ 9.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Δάκτυλον

144 συμπληρῶσιν ἓνα τετραγωνικὸν πόδα· πόσοι ἂν ἔσονται τετραγωνικοὶ πόδες ἐν δακτύλοις 130320;

Τῷ 144 διαιρέτω μὴ περιεχομέ-

να ἐν τοῖς τρισὶ πρώτοις χαρακτῆρσι

τῷ διαιρέτῃ, προσληπτέον καὶ τὸν τέταρτον, εἴτ' ἐν 1303· καὶ δὴ λέγε· ἐν 13, πρώτοις ἀμέλει πρὸς τὰ εὐώνυμα χαρακτῆρσι τῷ διαιρετέν, οἷς συστοιχεῖ 1, πρῶτος καὶ αὐτὸς χαρακτῆρ τῷ διαιρέτῃ, ποσάκις περιέχεται ἢ 1; δεκατρίς· ἀποπειρατέον ἐν τῷ 9 (118)· καὶ δὴ ὁ 144 διαιρέτης πολ-

130320		144
144		905
1296		
720		
144		
720		
0		

λαπλωσιασθεις ἐπὶ τὸ πηλίκον 9, ποιεῖ 1296, ὅς ἐχ
 ὑπερβάλλει τὸν 1303, ὃ συστοιχεῖ ὁ διαιρέτης· γραπτέον
 ἄρα πηλίκον 9 ἐξ ἀφαιρετέον τὸν 1296 ἀπὸ τῆς 1303,
 ὅθεν καταλειφθήσεται 7. Ἐν δεξιᾷ τῆς καταλοίπου 7 γε-
 γραφῶ ὁ 2 τὸ διαιρέτεον, ἐξ τῆς 72 μὴδ' ἅπαξ περιέ-
 χοντος τὸν 144, σημειωθήτω πηλίκον 0, καὶ κατήχθω
 τῆς διαιρέτεον τὸ 0· 1 ἐν 7 ἑσπτάκις· πολλαπλασιασθή-
 τω ἔν 144 δι' 7, ἐξ αὐθις δι' 6, ἐξ ἑσπεί ἐκατέρωθεν προ-
 κύπτει μείζων τῆς 720, ἀποσπειρατέον τῆς 5, ἐξ ἧς καὶ
 τῆς διαιρέτου ὁ γινόμενος, ἑσπεί ἐχ' ὑπερέχει τῆς 720, ἀ-
 φαιρεθεὶς ἀπὸ 720 καταλείψει 0, πηλίκον λαμβανομένον
 5· ἄρα 130320 δάκτυλοι συμωληρέσι πῶδας τετραγω-
 νικὺς 905.

31169 A	152 B
152	205 Γ τῖς
304	
769 "	
152	
760	
τῖς	

119. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν ἁπάσῃ διαιρέσει, εἰ μετὰ
 τὴν ἀφαιρέσιν τῆς γινομένου ὑπὸ τῆς διαιρέτου, ἐξ τῆς ἤδη
 γεγραμμένου πηλίκου, τὸ κατάλοιπον μὴ ἦ ἥττον τῆς δι-
 αιρέτου, δῆλον ὅτι ἔτι ἅπαξ ἀφαιρεθῆναι ἡδύνατο ὁ διαι-
 ρέτης· διὸ αὐξητέον τὸ πηλίκον μονάδι· τεθείσθω γὰρ,
 ὡς ἐξησάτημαι, λέγων· ἐν 50 ἑσπτάκις ὁ 6· ἑσπτάκις
 ἔν 6 ποιεῖ 42, ὅς ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 50 καταλείψει 8,
 ὅπερ ἐστὶ λείψανον μείζον τῆς διαιρέτου 6· περιέχεται ἄρα
 ὁ 6 ἔτι ἅπαξ ἐν τῇ 50· διὸ ἀντιτίθημι εἰς πηλίκον τὸν 8.

ΔΕΙΞΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

120. Τῇ προεκτεθείσῃ θεωρίᾳ ἐπόμενοι, ἡριθμήσαμεν ὅσας οὐ διαίρετης περιέχεται ἐν τοῖς ἀλληλοχυμένοις τῷ διαιρέτῃ χώροις, ἐξ εὐωνύμων χωρῶντες ἐπὶ τὰ δεξιὰ· ἐσημειώσαμεν δὲ εἰς πηλίκον ὅτε τῷ δικαίῳ πλέον· ἢ γὰρ ἂν ἀφαιρεῖτο ὁ προκύπτων ἀπὸ τῶν ἀντιστοιχόντων χαρακτήρων (117. Γ'). ὅτε μὴν ἔλαττον· ἢ κατελείπετο ἂν λείψανον τῷ διαιρέτῃ ὑπερεκπίπτον (119). ἀλλὰ μὴν ἢ πᾶσα τῆς διαίρεσεως θεωρία τηρεῖται ἐπὶ τῷ λαβεῖν τὴν μονάδα τοσάκις, ὅσας ἐνέσι τῷ διαιρέτῳ· ὁρθῶς ἄρ' ἔτω διαπεραίνεται ἡ διαίρεσις (116). Ο. Ε. Δ.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ.

121. Πολλαπλασιασθήτω τὸ εὐρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ εἰ κατελείφῃ ἐν τῇ διαίρεσει ἔλαττόν τι τῷ διαιρέτῃ (119), προσθεῖσθω τῷ παραγομένῳ· ὁ ὅν προκύπτων ὑπὸ τῷ πηλίκῳ ἢ τῷ διαιρέτῃ συνάμα τῷ καταλοίπῳ, εἰ εἴη, ἰσωθήσεται τῷ διαιρέτῳ (107).

Οἶον, ἐπὶ τῷ ἐσχάτῳ τῶν προεκτεθέντων τῆς διαίρεσεως ὑπὸδειγμάτων, πολλαπλασιασθήτω τὸ Γ πηλίκον ἐπὶ τὸν Β διαιρέτην, ἢ τῷ ἐκ τέτων γινομένῳ 3160 προσθεῖσθω τὸ λείψανον 9, ὅπερ ἐστὶν ἔλαττον, ἢ 152· ἀποδιδόμενα δὲ αὐτῇς τῷ αὐτῷ διαιρέτῃ Α, συνάγεται ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ὑγιῶς.

ΒΑΣΑΝΟΣ ΓΕΝΙΚὴ Τῆ Πολλαπλασιασμῆ.

122. Πέωρανται ἀσφαλῶς ὁ πολλαπλασιασμός,

εάν ὁ παραγόμενος, διαιρεθεὶς διὰ τῆ πολλαπλασιασῆ, ἀποδῶ τὸν πολλαπλασιασέον, ἢ, διαιρεθεὶς διὰ τῆ πολλαπλασιασῆ, παρέχῃ τὸν πολλαπλασιασὴν (109)· ἐπὶ τῆ δευτέρῃ τῆ συνθέτου πολλαπλασιασμῷ ὑποδείγματος, ὁ προκύπτων Κ, διὰ τῆ πολλαπλασιασῆ Β διαιρεθεὶς, ἀποδίδωσι τὸν πολλαπλασιασέον Α· ἀσφαλῶς ἄρα πέπρακται ὁ πολλαπλασιασμός.

Ἐπιτετμημένη διαίρεσις.

123. Α'. Ἐν ἐκάστῃ μὲν διαιρέσει γέγραπται ὁ διαιρέτης ὑπὸ τὸν διαιρετέον, ἢ ὕτω τοῖς πρωτοπειροῖς ῥάων ἢ παρὰ πολὺ ἢ θεωρία· ἐπὶ μέντοι τῆς τέλει ἀποχρήσει διὰ μνήμης αὐτὸν φέρειν, ἢ ὑποτιθέναι κείμενον ὑπὸ τῆς ἀπαιτουμένου τῆ διαιρετέου χαρακτῆρας, ὥστε αὐτοῖς ἐμπεριέχεσθαι.

124. Β'. Ἐπὶ τῆς ἀπλῆς διαιρέσεως, τῆ διαιρετέου τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν ὄντος, οἷον 2, 3, 4, 5, λίαν ἢ πρᾶξις ἐπιτετμηθήσεται, λαμβανομένη ἀφ' ἐκάστου τῶν ἀριστερόθεν ἐπὶ δεξιὰν προϊόντων χαρακτῆρων τῆ ἡμίσεως, εἰς ὁ διαιρέτης ἢ 2, τριτημορίου, εἰς ἢ 3 κτ. δεῖ δὲ μόνον τὸν νῦν προσέχειν τῇ γενικῇ θεωρίᾳ. α'. ὅτιθεναι εἰς πηλίκον ὑπὲρ παντὸς χαρακτῆρος, ὅστις συνάμα τῷ λειψάνῳ, εἴπερ εἷη, μὴ περιέχοι τὸν διαιρέτην· β'. προσλαμβάνειν ἐν παντὶ ἐξῆς διαιρετέῳ τὸ ἐκ τῆ προηγηθέντος χαρακτῆρος κατάλοιπον, εἰ εἷη, συνάμα τῷ ἐπομένῳ χαρακτῆρι, ἢ τὸν, περὶ ὃ ἐτέθη πηλίκον ο, συνάμα τῷ ἐπομένῳ χαρακτῆρι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ο'λυμπιάς ἐκαλεῖτο πάλαι διάστημα χρονικόν, ἐτῶν 4 περιεκτικόν· πόσας ἄρ' Ο'λυμπιάδας συγκροτήσουσιν ἔτη 812641;

Εφ' ᾧ ἔν ἐπιμηθῆναι τὰ τῆς διαιρέσεως, εἰλήφθω, ὡς ὁράται ἐνταῦθα, τὸ τέταρτον τέτε τῷ ἀριθμῷ. Τὸ τέταρτον τῷ 8 ἐστὶ 2, ὅς γεγράφ.
$$\begin{array}{r} 812641 \overline{) 4} \end{array}$$
 φθω ἀντὶ πηλίκου, μηδενὸς λειπο-
$$\begin{array}{r} 203160 \frac{1}{2} \end{array}$$
 μένου. Τὸ τέταρτον τῆς 1 ληφθῆναι ἔδύναται· γεγράφθω ἔν ἀντὶ πηλίκου 0 (116)· ἡ 1, προσλαβῶσα πρὸς δεξιὰ τὸν 2, ποιεῖ 12, ἃ τὸ τέταρτόν ἐστι 3, ἄνευ λειψάνου· τεθείσθω ἔν ἡ 3 εἰς πηλίκον. Τὸ τέταρτον τῷ 6 ἐστὶ 1 μετὰ λειψάνου τῷ 2· ἡ δὲ γεγράφθω ἡ 1· ὁ δὲ 2, προσλαβὼν τὸν 4, ποιεῖ 24, ἃ τέταρτόν ἐστιν ὁ 6 σὺν ὑδενὶ λειψάνῳ· σημειωθήτω ἔν εἰς πηλίκον ἡ ὁ 6· ἐκ δὲ 1 τεταρτημορίου μὴ λαμβανομένου, πηλίκον μὲν γεγράφθω 0 (116), προσκείσθω δὲ τὸ λείψανον 1 ἐπὶ τῷ 4 διαιρέτω.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πενταετηρίς καλεῖται διάσημα χρονικὸν ἔτων πέντε· ἔτη ἔν 5063 πόσας ἀποτελεῖσι πενταετηρίδας; εἰλήφθω τὸ πέμπτον τῷ 5063, εἴτ' ἔν 1012, ὅς δηλοῖ τὰς πενταετηρίδας συνάμα ἔτεσι 3.

125. Γ'. Εἰπὶ δὲ τῆς συνθέτου διαιρέσεως, ὅτε ῥᾶσα καταφαίνεται ὅσakis ὁ διαιρέτης ἔνεσι τοῖς τῷ διαιρέτεσ, οἷς ἀντιστοιχεῖ, χαρακτηῖσι, γεγράφθω πρῶτον τὸ πηλίκον, εἴτα ἐπανειλήφθω ἐξῆς τὰ τῆς πράξεως· κείσθω, φέρε, διελεῖν 5790 διὰ 25· ἂ.
$$\begin{array}{r} 5790 \overline{) 25} \\ 79 \overline{) 231} \frac{1}{2} \end{array}$$
 μέσως καταφαίνεται, ὅτι ὁ 25 δις ἔ-
$$\begin{array}{r} 75 \\ 40 \end{array}$$
 νesi τῷ 57 μετὰ λειψάνου τῷ 7· γρα- φέντος ἔν πηλίκου 2, κατήχθω πρὸς τῷ 7 ὁ 9, ἡ πάντων κατὰ τὰ ὀρθοτεθέντα γενομένων, προκύψει πηλίκον $231\frac{1}{2}$.

126. Δ'. Ἐνὸς δὲ ἡ πλειόνων 0 ἐπαριθμημένων πρὸς τῷ τέλει τῷ διαιρέτεσ, ἡ τῷ διαιρέτεσ, ἀποκόπτειν δυνάμεθα ταῦτα ἰσαριθμῶς ἀφ' ἑκατέρου, διαιρῶντας τὸ τῷ

διαιρετέν κατάλοιπον, διὰ τῷ ἐν τῷ διαιρέτῃ· ἔσαι δὲ ἢ διαίρεσις ἀσφαλῆς, εἴγε ἐπαγομένῃ εἴτα τῷ πηλίκῳ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἔχοντα ὡς τὸ κατ' ἀρχὰς, τὰ ἐκκοπέντα ο ἀπὸ τῷ διαιρετέν, εὐρισκόμενα ἔ, ἐπὶ τῷ διαιρέτῃ, εἰσελεύσονται ἐντεῦθεν ἔ, ἐν τῷ παραγομένῳ (101. Β'), ὅς παρὰ τῷτο ἰσωθῆσεται τῷ διαιρετέῳ. .

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Η' τάξις ἐν ὑποθέσει συγκρο-
τεῖται ἐκ στρατιωτῶν 500· στρατός τις στρατιωτῶν 35000
πόσας περιέχει τάξεις;**

350,00	5,00
	70

Τ' ποδιεσάλθω δύω ο τῷ διαιρέ-
τε, ὅθεν καταλειφθήσεται 5· ὑποδιεσάλθω δὲ ἔ, δύω ο
τῷ διαιρετέν, ἀναπολειπομένῃ τῷ 350· διαιρεθέντος ἔν
350 διὰ 5 προκύπτωσι τάξεις 70· εἰς δέ γε τὴν τέτῃ
βάσιν, πεπολλαπλασιάσθω ὅλος ὁ 500 ἐπὶ τὸ πη-
λίκον 70, ἔ ἀποληφθήσεται αὐτὸς ὁ πρῶτος διαιρετέος
35000.

127. Ε'. Ἰ'να διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ 10, ὑποδιε-
σάλθω εἰς χαρακτήρ ἐκ τῶν δεξιῶν αὐτῷ· ἵνα δὲ διαιρε-
θῇ δὲ 100, ὑποδιεσάλθωσαν δύω· ἵνα δὲ διὰ 1000,
τρεις, ἔ ἔτως ἐφεξῆς· τὸ δὲ καταλειπόμενον πρὸς ἀρι-
σερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἐμφανεῖ τὸ πηλίκον· εἰάν δὲ πρὸς
δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς· ὥσι δετικοὶ χαρακτῆρες, γε-
γράφθω ὑπ' αὐτὸς ὁ διαιρέτης, σχηματιζόμενῃ ἔτω κα-
ταλοίῳ τινος διαίρεσεως. Συμβαίνει δὲ ταῦτι, ὅτι ἀριθ-
μὸς διὰ 10 πολλαπλασιασθεὶς, προσλαμβάνει ο ἐν ἐν τοῖς
δεξιοῖς· διὰ δὲ 100, δύω ο, διὰ δὲ 1000, τρία, ἔ
ἔτως ἐφεξῆς (101).

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῷ Αἰῶνος 100 ἔτη περιέχοντος
πόσοι ἂρ αἰῶνες ἐμπεριλαμβάνονται ἐν ἔτεσι 25000;
ἀπότεμε δύω ο ἐκ τῷ 25000, ἔ ἔξεις αἰῶνας 250· ὡ-**

σαύτως, διαιρούμεν $\tau\bar{\epsilon}$ 504 διὰ 10, πηλίκον ἔσαι $50\frac{4}{10}$.
 διαιρούμεν δὲ $\tau\bar{\epsilon}$ 35849 διὰ 1000, ἔσαι $35\frac{849}{1000}$.

128. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅτι δὲ ὑδὲν διαφέρει πολλαπλασιάζειν ἀριθμὸν ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιασὴν, ἢ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ πάντας τὰς $\tau\bar{\epsilon}$ πολλαπλασιασῶ ποιητὰς (89), ἐκ τούτου ἄρα ἀδιάφορον ἔσαι ἀριθμὸν τινὰ δι' ὅλου $\tau\bar{\epsilon}$ διαιρέτε διελεῖν, ἢ πρῶτον μὲν δι' ἐνὸς τῶν τὸν διαιρέτην παραγόντων, μετὰ δὲ, τὸ πηλίκον διὰ θατέρου· ἐντεῦθεν ὑποσυνάφωμεν τὰ ἐξῆς.

129. Α'. Ἰνα διέλωμεν ἀριθμὸν διὰ 12, ὡς ὅτε βυλόμεθα τὰς δακτύλους ἀγαγεῖν εἰς πόδας, ἢ τὰς μῆνας εἰς ἔτη κτ., ἐξέσαι λαβεῖν τὸ τέταρτον $\tau\bar{\epsilon}$ προβληθέντος ἀριθμοῦ (106) εἴτα τὸ τρίτον $\tau\bar{\epsilon}$ τετάρτῳ ἐκείνου (124), ἢ πρῶτον τὸ τρίτον, εἴτα $\tau\bar{\epsilon}$ τρίτῳ ταυτὶ τὸ τέταρτον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Δάκτυλοι 237 πόσους συμωληρῶσι πόδας; τὸ $\tau\bar{\epsilon}$ 237 τέταρτόν ἐσι 59 μετὰ λειψάνῳ 1· τὸ δὲ τέτῳ τρίτον 19 μετὰ λειψάνῳ 2.

130. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειώτεον δ' ὅτι ἐν ἀνάσῃ διαιρέσει, κατὰ διαδοχὴν γινομένη, ἐκάστη μονὰς $\tau\bar{\epsilon}$ καταλοίπου δύναται τόσας μονάδας $\tau\bar{\epsilon}$ διαιρέτεν τῆς προτέρας διαιρέσεως, ὅσας περιέχει ὁ πρότερος διαιρέτης· ἐν τῇ ἡδὴ ἐκτεθέντι ὑποδείγματι τὸ δεύτερον λειψάνον 2 δύναται δύο μονάδας $\tau\bar{\epsilon}$ πρὸ $\tau\bar{\epsilon}$ διαιρέτεν, ἢ δύο πολλαπλασιασθείσας ἐπὶ τὸν πρὸ $\tau\bar{\epsilon}$ διαιρέτην 4 εἴτ' ἐν 8, καὶ τὸ ὅλον λειψάνον ἔσαι 9· τὸ ἄρα πηλίκον ἔσαι $19\frac{9}{12}$.

131. Β'. Ἰνα δὲ διέλωμεν δι' 20, διαιρῶμεν πρῶτον διὰ 10, ἀποτέμνοντες τὸν ἑσχατον ἐν δεξιοῖς χαρακτῆρα (127)· εἴτα λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ $\tau\bar{\epsilon}$ καταλοίπου (129).

132. Γ'. Ἰ'να δὲ διαιρεθῇ ἀριθμός τις διὰ 40, ὡς ὅτε ζητεῖται τὸς παράδας εἰς γρόσια ἀγαγεῖν, ἀποκεκόφθω ὁ πρὸς ἀριστερὰν αὐτῆ ἑχάτος χαρακτήρ (127). καὶ εἰλήφθω τῷ λοιπῷ τὸ τέταρτον (103). πόσα ἐν γρόσια συγκροτῶσι παράδαί 972; ἀποχωρισθῆτω τῷ δοθέντος ἀριθμοῦ ὁ 2, καὶ εἰλήφθω τῷ 97 τὸ τέταρτον, ὃ ἐστὶν 24 μετὰ λειψάνου 1, ὅπερ δυνάμενον 10 (120) συνάμα τῷ καταχωρισθέντι 2 συνίστησι 12. ἔστιν ἄρα πηλίκον 24 γρόσια καὶ παράδαί 12.

133. Δ'. Ἰ'να δὲ διὰ 60 διέλωμεν, ὡς ὅτε θέλωμεν τὰ σαυροφόρα ἀγαγεῖν εἰς φιορίνια, ἢ λεπτὰ χρονικὰ εἰς ὥρας, ἢ γυν κυκλικὰ εἰς μοίρας, διακεκρίσθω ὁ ἑχάτος πρὸς δεξιὰν χαρακτήρ, καὶ εἰλήφθω τῷ λοιπῷ τὸ ἕκτον, ταῦτέστι τὸ ἡμισυ, καὶ αὐτῷ τῷ ἡμίσεως τῷ τρίτῳ (129). πόσα, φέρε, φιορίνια ἀπωπληρῶσι σαυροφόρα 588; ἀποκοπέντος ἐν δεξιοῖς τῷ 8, καὶ ληφθέντος τῷ ἐν 58 ἕκτῳ, εἴτ' ἐν 9, καὶ τῷ 4 καταλοιπῶ (ὃ ἤδη δύναται 40) συναφθέντος τῷ ἀφορισθέντι 8, ἔχομεν φιορίνια 48 σὺν σαυροφ. 48.

134. Ε'. Δυνάμεθα δὲ ἐν ἐκ ὀλίγαις περιπτώσεσι μεταποιεῖν τὴν σύνθετον διαίρεσιν εἰς ἀπλὴν (111). Προκειμένα γὰρ διελεῖν ἀριθμὸν δοθέντα δι' 24, λαβεῖν ἐξέσαι τῷ ἀριθμῷ τὸ ἕκτον, μεθ' ὃ, τὸ τέταρτον τῷ ἕκτῳ. ἢ τῷ ἀριθμῷ ταῦτε τὸ ἡμισυ, εἴτα τῷ ἡμίσεως τὸ τρίτον, ἐξ ὧν, τῷ τρίτῳ τῷ δὲ τὸ τέταρτον. ἢ γυν τὸ ὁ γδόν κατ' ἀρχάς, εἴτα τῷ ὀγδόν τὸ τρίτον, εἴγε τετράκισ 6 ποιεῖ 24, δις δὲ 3 ποιεῖ 6, τετράκισ δὲ 6 ποιεῖ 24, καὶ τρίς 8 ποιεῖ ὡσαύτως 24.

135. Ἰ'να διαιρεθῇ ὁ 797 διὰ 24, ληφθῆτω τὸ τῷ 797 ἕκτον, ὅπερ ἐστὶ 132, λειπομένῃ 5, εἴτα τὸ τέ-

ταρτων τῷ 132, ὅπερ ἐστὶ 33· ψηλίκην ἄρα πρόεισι 33 με-
τὰ λειψάνῃ 5.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Σ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ Κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Τί ἐστὶ Κλάσμα.

136. Ἀριθμὸς ὀλοσχερῆς καλεῖται ὁ ἅπαξ,
ἢ πλεονάκισ, ὀλοσχερῶς περιέχων τὴν μονάδα· οἷον 5
γροσίᾳ ἐστὶν ἀριθμὸς ὀλοσχερῆς, περὶ οὗ εἴρηται ἐν τῷ
Α'. Τμήματι. Κλασματίας δὲ ἢ Κλάσμα, περὶ
ἐν ἡμῖν διαλαβεῖν πρόκειται ἐν τῷ ἀνα χεῖρας, ὀνομάζε-
ται ἐν ἣ πλείω μέρη τῆς μονάδος· ἔτω, τῷ γροσίῳ 40
παράδας περιέχοντος, οἱ παράδαί ἔσονται μέρη τεσσα-
κοστὰ τῷ γροσίῳ, καὶ δὴ 5 αὐτῶν συστήσουσιν ἀριθμὸν Κλα-
σματίαν, ὄντες πέντε τεσσαρακοστὰ τῷ γροσίῳ, καὶ παρι-
στάμενοι ἔτω 40. Ἐπὶ παντὸς δὲ κλάσματος, οἷον τὸ
40, ὁ μὲν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς καλεῖται Παρο-
νομασίης, ὡς ἂν αὐτὲ παρονομαζομένων τῶν τῆς μο-
νάδος μερῶν, καὶ ἐπὶ τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματος τεσσα-
ρακοσῶν ἂν αὐτὲ καλαμένων· ὁ δ' ὑπερβεν τῆς γραμ-

μῆς ἀριθμὸς, ἀκεί Α'ριθμητῆς, ὡς ἀριθμῶν, ὅποσα τῶν τοιῶνδε μερῶν τὸ κλάσμα ἐμφαίνει, οἷον ἐνταῦθα παρίσχησι τεσσαρακοσὰ πέντε· αἱ δὲ ἐκθέσεις $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ κτ. ἀναγινώσκονται ἔτως· ἐν τριτημόριον, ἢ ἐν τρίτον, δύο τεταρτημόρια, ἢ δύο τέταρτα, τρία πεμψημόρια, ἢ τρία πέμπτα, ἔξ ἑωτημόρια, ἢ ἔξ ἑβδομα κτ.

137. Δυνάμεθα δὲ τὸ κλάσμα ἅπαν, οἷον $\frac{7}{8}$, ὡς σεσημειωμένην ἐκδέξασθαι διαίρεσιν, καὶ ἐπὶ τῆς ἐκθέσεως ταύτης ἀδιφόρως, εἴτε ὡς κλάσματος ἐκλαμβανομένης, ἀπαγγέλλειν· πέντε τεσσαρακοσὰ· εἴτε δὴ θεωρημένης, ὡς εἴπερ εἴη σεσημειωμένη διαίρεσις· πέντε διαιρεῖν διὰ 40· φημι δὴ, ὅτι πέντε τεσσαρακοσὰ, ἢ διαιρεῖν πέντε διὰ τεσσαράκοντα, ἢ δὲν διενηνόχων· 1 γὰρ διωμεμβεῖσα τοῖς 40, ἐκάσῳ παρέχεται τεσσαρακοσὸν ἐν· ἄρα 5 διανεμομένων τοῖς 40, ἕκαστος λήψεται τεσσαρακοσὰ πέντε.

138. Α'. Ἐξέσαι ἄρα διαίρεσιν πᾶσαν, οἷον 4 δι' 2 διαιρῶντας, ἐν χήματι παρίσῃ ἔτω $\frac{2}{3}$.

139. Β'. Καὶ δὴ ἐτι ὀλοχερῇ ἀριθμὸν ἅπαντα, οἷον 5, πᾶσιν τῶν ἐν τοῖς κλάσμασι πράξεων ἐπιδεκτικὸν καθιστάναι, διαμορφῶντας αὐτὸν, ὡς διὰ 1 διαιρῶμενον, ἔτω $\frac{1}{5}$, ὃ τὴν δύναμιν αὐτῆς ἡκιστα λυμαίνεται, εἴγε 5 διαιρεθὲς διὰ 1 παρέχει 5 (104).

140. Γ'. Ταῦτόν ἐστι λαβεῖν δύο τρίτα ποσότητός τινος, καὶ ἐν τρίτον τῆς αὐτῆς ποσότητος διπλασιασθείσης· ἢ γὰρ λαβεῖν τέτταρα ἑβδομα ποσότητός τινος, καὶ ἐν αὐτῆς τετραπλασιασθείσης· κείσθω γὰρ διανεῖμαι χρυσίνες δύο τρισὶν ἀνθρώποις· ἢ ἐν $\frac{2}{3}$ ἐκθεσις, ἐκληφθεῖσα ὡς σεσημειωμένη διαίρεσις, παρίσχησι 2 διαιρῶμενον διὰ 3, ἢ τὸ τρίτον τῶν δύο χρυσίνων· θεωρῶντας μὲν τοὶ τὴν ἐκθεσιν ὡς κλάσμα, δεήσει εἰπεῖν· δύο τρίτα ἐνὸς χρυσί-

78 (136): σαφές ἄρα, ὅτι τὸ τρίτον δυοῖν χρυσίνων ταύ-
τὸν δύναται δυοὶ τρίτοις χρυσίνε ἐνός.

141. Δ'. Πάνθ' ὅσα δέδεικται ἐπὶ τῆς διαιρέσεως,
ἐκληφθῆναι δύνανται καὶ ἐπὶ τῷ κλάσματος, τῷ μὲν ἐν
αὐτῷ ἀριθμητῷ ὡς διαιρετέῳ, τῷ παρονομαστῷ δὲ ὡς διαι-
ρέτῃ θεωρημένων (137).

142. ΑΞΙΩΜΑ Α'. Ἐὰν ἐν ἀπώσῃ διαιρέσει, ἡ
ἐξηγηματισμένη πηλίκῃ, οἷον $\frac{1}{2}$, ὅτε διαιρετέος καὶ ὁ
διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, φέρ' εἰπεῖν τὸν 3, πολ-
λαπλασιασθῶσιν, ἐξ ἧ γίνεται $\frac{3}{2}$, ἡ τῷ πηλίκῃ δύνα-
μις ἀμεταπαύητος ἔσται· ἐπεὶ 12 διαιρεθεὶς διὰ 4, πα-
ράγει 3, καὶ 60 διαιρεθεὶς διὰ 20, ἀποδίδωσιν αὐτῷ καὶ αὐ-
τὸς 3· καί γινεαικότως· ὁ γὰρ 60 διαιρετέος, πενταπλά-
σιος τῷ 12 γεγωνῶς, ὀφείλει περιέχειν τὸν διαιρέτην
20, γεγονότα καὶ αὐτὸν πενταπλάσιον τῷ 4, τοσάκις, ὅ-
σάκις ὁ 12 περιέχει τὸν 4.

143. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ὅτε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τῷ
 $\frac{1}{2}$ διὰ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ, οἷον τῷ 2 διαιρεθῇ, ἀμετακίνη-
τος ὡσαύτως διαμενεῖ ἡ τῷ κλάσματος δύναμις· 6 γὰρ
διαιρεθεὶς διὰ 2, παρέχεται 3, ὃν καὶ ὁ 12, διαιρεθεὶς διὰ
4· ὁ δέ γε τέττε λόγος, ὅτι παρὰ τὴν διὰ 2 διαίρεσιν
ὑποδιπλάσιος γεγωνῶς ὁ 6 τῷ 12, ὀφείλει περιέχειν το-
σάκις τὸν διαιρέτην 2, γεγονότα καὶ αὐτὸν τῷ 4 ὑποδιπλά-
σιον, ὅσάκις τὸν 4 περιέχει ὁ 12.

144. ΑΞΙΩΜΑ Β'. Ἐὰν σύμμετρον μέρος (81)
ὅλῃ τινὸς ἀπαχθῇ ἀπ' αὐτῷ τῷ ὅλῃ, γενήσεται μετὰ τὴν
ἀφαίρεσιν κλάσμα, καὶ ὁ παρονομαστὴς ἔσται μονάδι ἐλάτ-
των ἢ πρότερον· ἐὰν μὲν τοι ἐξ ἐναντίας, σύμμετρον μέ-
ρος τινὸς ὅλῃ αὐτῷ συναφθῇ τῷ ὅλῳ, μονάδα μίαν προσ-
κλήσεται ὁ παρονομαστὴς, ἀναφερόμενος πρὸς τὸ καινὸν

ὅλον· δι' ὑποδειγμάτων ἐκλευκανόμενα μφότερα· 4, ὅς ἐστι μέρος τῆ 20 σύμμετρον, εἴτ' ἔν ἐν πέμπτον αὐτῆ, δηλούμενον διὰ τῆ $\frac{1}{2}$ κλάσματος, αὐτὸς ὁ 4 γίνεται $\frac{1}{4}$ τῆ 20 πλὴν 4, εἴτ' ἔν τῆ 16· ὁ αὐτὸς δὲ 4 ἀποκαθίσταται $\frac{1}{8}$ τῆ 20 σὺν 4, εἴτ' ἔν 24· εἰ γὰρ 4 ἔνδεσι πεντάκις τῷ 20, ἔνδεσι πάντως τετράκις τῷ 20 πλὴν 4, ἢ τῷ 16, καὶ δὴ ἔσαι αὐτῆ $\frac{1}{4}$ · ἔνδεσι μέτοιγος ἑξάκις ἐν τῷ 20 σὺν 4, ἢ 24, καὶ ὅτως ἔσεται τήνικαυτα αὐτῆ τὸ $\frac{1}{8}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀναγωγῆς τῶν Κλασμάτων.

145. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀναγωγή ἐν γένει καλεῖται, μεταμόρφωσις τις, ἢ μεταβολὴ ποσῆ, φαινομένη, τῆς κατ' αὐτὸ δυνάμεως ἀμετακινήτου καὶ διατελεσθῆς,

Πρόβλημα Α'.

146. Κλάμα τὸ δοθὲν ἀναγαγεῖν εἰς ὅλον.

ΛΤΣΙΣ. Φανερόν, ὡς ἔ δυνάμεθα ἀπὸ κλάσματος ὅλον συγκροτῆσαι, μὴ τῆ κλάσματος τύτῃ ἰσχυμένῃ γῶν μονάδι μιᾷ, καὶ δὴ μὴ τῆ ἀντὶ διαιρέτε. παρονομαστὴ ἐξισχυμένῃ τῷ ἀντὶ διαιρέτε ἀριθμητῇ (141)· τῷτῃ ἔν συγκυρήσαντος, θεωρεῖσθω τὸ κλάσμα ὡς σεσημεωμένη διαιρέσις, καὶ ὅτω διηρησθῶ ὁ ὑπὲρ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς διὰ τῆ ἔνερθεν.

Α'. Πόσον συμπληρῶσιν 24 τέταρτα τῆ γρόσιε; Γραφέντος ἔν $\frac{24}{4}$, διηρησθῶ 24 διὰ 4, καὶ εὐρίσκεται ὅλον γρόσια 6· παρὰ ταῦτα συναγαγεῖν ἕκαστος ἐκ τῆ

προχείρου δυνήσεται· ἐπεὶ γὰρ τέσσαρα τέταρτα γροσίῳ συνισῶσι γρόσιον ἓν, 24 τέταρτα ἀποδώσασιν 6 γρόσια ἐξ ἀνάγκης.

Β'. Πόσον συμπληρῶσι 240 δέκατα ὀργιᾶς μιᾶς; Γεγραφθῶ $2\frac{4}{5}$, ἢ 240 διαιρεθεὶς διὰ 10 δίδωσιν πηλίκον ὀργιᾶς 24.

Γ'. Πόσον συγκροτῶσιν ἑνδεκά τριτά πήχεως; Ἐν $\frac{1}{3}$ διαιρεθεὶς ὁ 11 διὰ 3, δίδωσιν ὅλον πήχεις τρεῖς, ἢ δύο $\frac{2}{3}$ α, ὅγε καθ' ἑαυτὸ σαφές.

147. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Τὸ ποσὸν, ὃ τίθεμεν εἰς μονάδα, ἢ ὡς ὅρον παραθέσεως, ὡς τὰ πολλὰ σύγκειται ἐξ ἄλλων μερῶν, ἃ ληφθέντα καθ' ἑαυτὰ καινὰ ὑπάρχασιν μονάδες, εἶδει ἐλαττῦμεναι τῆς σφᾶς περιεχύσεως μείζονος· οἷον ὀργιᾶ μία περιέχει μονάδας 6 εἶδει ἐλάττωνας, αἱ καλεῖνται πόδες· εἰς ἑνῆαυτὸς περιέχει 12 μονάδας εἶδει ἐλάσσονας, αἵπερ μῆνες ἀκῶσι κτ.

148. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ὅλε τινὸς, ὡς μονὰς, θεωρημένη, εἰς μέρη διαιρέσις γίνεται ἐλευθέρως πρὸς τὸ δοκῆν. Προδήλον γὰρ ὡς, οἷς χρώμεθα μέτροις πανταχῶ γῆς, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον διαιρεθῆναι εἶχον· οὕτως εἶχε πᾶν μέτρον διαιρεθῆναι, φέρε, εἰς τέταρτα, εἴτα τέτων ἑκάσον εἰς καινὰ ἄλλα τέταρτα, ἢ ἐφεξῆς ὕτως· ἢ γὰρ εἰς δέκατα, ἢ αὖ τέτων ἑκάσον εἰς καινὰ ἄλλα τοσάδε, ἢ ὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ γὰρ παρὰ πολὺ διαφέροντα ἀλλήλων παρὰ διαφέρουσιν εἰληπται ἔθνεσι· τέτε χάριν κατασρώσομεν ἐνταῦθα πινακὰ τινων μέτρων, ὧν ἡ γινῶσις πρῶτε ἂν γένοίτο τῷ περὶ τὴν ἀριθμητικὴν ἀρχολογίᾳ.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ.

Μέτρον τῷ μήκους.

149. Η' κατὰ	Ποδ.	Δακτ.	Γραμ.	Στίγμ.
μῆκος ὀργυιᾶ περιέχει.	6	72	864	10368
Ο' πῦς.	1	12	144	1728
Ο' δάκτυλος.	0	1	12	144
Η' γραμμή.	0	0	1	12
Τὸ κοινὸν βῆμα.	2½	30	360	4320
Τὸ Γεωμετρικὸν βῆμα.	5	60	720	8640
Ο' τῶν Παρισίων πῆχυς, πόδ. 3, δακτύλους 7, γραμ. μᾶς 10, ἢ ¼ τῆς παρισιανῆς γραμμῆς.				
Ο' μείζων πῆχυς (brasse).	5	60	720	8640

150. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τοῖς ἐφεξῆς μέτροις, ἢ ἐν γένει, ὅταν ἔκτασιν προτεθῇ μετρεῖσαι, χρῆσόμεθα ὡς ὄρω συγκρίσεως αἰὶ τῷ ῥηθέντι ποδί, τῷ 12 δακτύλων περιεκτικῷ, ὃς ὀνομάζεται πῦς βασιλικός, ἢ τῶν Παρισίων.

151. Η' μέση μοῖρα τῷ τῆς γῆς πλάτους περιέχει ὀργυιάς.	ὀργ.	57050
Η' κοινὴ τῶν τῆς Γαλλίας λεγῶν, ὧν περιέχει 25 ἑκάστη μοῖρα.	—	2282
Η' θαλάσσιος, ὧν 20 συμπληρῶσι μίαν μοῖραν.	—	2852½
Η' μεγάλη τῆς Γερμανίας λέγα, ἢ τὸ μέγα μίλιον, ὧν 15 πληροῖ μοῖραν μίαν.	—	3803½
Η' κοινὴ λέγα, ἢ κοινὸν μιλ. τῆς Γερμανίας.	—	3333½
Η' μικρὰ λέγα τῆς Γερμανίας.	—	3042½

Τὸ μίλιον τῆς Φλανδρίας.	ὄργ. 3221
Τὸ μίλιον τῆς Ἀγγλίας, ἢ Ἰταλίας. —	950 $\frac{1}{2}$
Τὸ σάδιον.	85

Μέτρον τῶν ἐπιφανειῶν.

152. ΣΧΟΛΙΟΝ. Φανήσεται ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ὁ λόγος ἀπάντων, ὧν ἐρεῖμεν ἐνταῦθα περίτε τῶν ἐπιφανειῶν, ἢ τῶν σερεῶν.

153. Α'. Πολλαπλασιαζομένα μήκους τινὸς ἐπὶ γραμμὴν, ἣτις καλεῖται πλάτος, αἰεὶ πρόεισιν ἐπιφάνεια, περιέχουσα ἐν ἡ πλείω τετράγωνα· τέσσαρες, φέρ' εἰπεῖν, ὄργυαι κατὰ μῆκος, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τρεῖς κατὰ πλάτος, παράγῃσι δώδεκα τετραγωνικὰς ὄργυας, ὅπερ ἐστὶ, δώδεκα τετράγωνα, περιέχον ἑκάστον ἕξ πόδας κατὰ μῆκος, ἢ τοσούτους κατὰ πλάτος· 5 δὲ πόδες κατὰ μῆκος, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 4 κατὰ πλάτος, ποιῶσιν 20 πόδας τετραγωνικὰς. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μέτρων ὡσαύτως.

154. Β'. Ὡσαύτως ἢ περὶ τῶν σερεῶν· ἐὰν τὸ προκύπτον 12, φέρε, ἐκ μῆκος 4, ἢ πλάτους 3, πολλαπλασιασθῇ πρὸς τέτοις ἐπ' ἄλλην γραμμὴν, ἢ καλεῖται ὕψος, οἷον ὄργυων 2, ἐπὶ τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι, τὸ προκύπτον 24 δηλώσει ὄργυας κυβικὰς, ταύτων εἰπεῖν διασήματα 24 παρεμφερῇ ἑκάστα τοῖς, οἷς παίζομεν, κύβους, ἢ περιέχοντα ὄργυαν μίαν μὲν κατὰ μῆκος, μίαν δὲ κατὰ πλάτος, μίαν δὲ ἢ πρὸς ὕψος.

155. Γ'. Ἰδὲ δὴ τὰ ἐν ἐκάστῳ ἐπιφανείας μέτρῳ περιεχόμενα μέρη.

Τῆς κατὰ μῆκος ὀργιῆς περιεχέσσης πόδας 6 τὴν
Τετραγωνικὴν συμπληρῶσι πόδες τετραγωνικοὶ 36

	ποδ.τρ.	δ.τρ.	γρ.τετρ.	σιγμ.τετρ.
Τετραγωνικὴ ὀργιὰ.	36	5184	746496	107495424
Ο' τετραγωνικὸς πῆς.	1	144	20736	2985984
Ο' τετραγων. δάκτυλ.	0	1	144	20736
Η' τετραγων. γραμμὴ.	0	0	1	144

Τῆς παρὰ Γάλλοις λεγομένης λέγας ἕσσης κατὰ μῆ-
κος ὀργιῶν 2282, ἡ τετραγωνικὴ ἔσαι 5207524 ὀρ-
γιῶν τετραγωνικῶν, δακτύλων δὲ τοιούτων 187470864,
ἢ ἔτως ἐφεξῆς.

136. Δ'. Τὸ δὲ τῶν σερεῶν μέτρον, ὃ ἐστὶ τῶν δια-
σημάτων, οἷς ἐστὶ μῆκος, πλάτος, ἢ ὕψος, ἐκδηλοῖ ὁ
ὑπ' ὀψιν πίναξ.

Η' κυβικὴ ὀργιὰ

	ποδ.κυβ.	δ.κυβ.	γρ.κυβ.	σιγμ.κυβ.
περιέχει:	216,	373248,	644972544,	1114512556032
Πῆς κυβ.	1,	1728,	2985984,	5159780352
Δάκτ.κυβ.	1,	1728,	2985984	
Γραμ.κυβ.	0,	1,	1728	

Η' δὲ κυβικὴ λέγα περιέχει τετραγωνικὰς ὀργιας
11882569768.

Μέτρον τῶν σαθρῶν.

157. Η' λίτρα τῶν Παρισίων.

	ἡμίλ.	ἐγγ.	δραχμ.	δην.	κόκκ.
περιέχει.	2	16	128	384	9216
Τὸ ἡμίλιτρον.	1	8	64	192	4608
Η' Οὐγγία.	0	1	8	24	576

Ἡ Δραχμή.	0	0	1	3	72
Τὸ δηνάριον.	0	0	0	1	24

Τὸ καλύμενον κιντάλιον (quintal) ἐστὶ σαθμὸς, συγκείμενος ἐκ λίτρων 100, 200, 1600, 12800, 38400, 921600.

158. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ καθολικώτερον τῶν ὑγρῶν μέτρον ἐστὶν ἡ σάμνος (pot), ἢ τὸ ἡμισυ καλεῖται μὲν ἐν τῇ Γαλλίᾳ (pinte) ἡμῖν δ' εἰδοκεῖ, καλεῖσθω ἡμισάμνιον· χωρεῖ δὲ τὸ μέτρον τεττὰ τοσούτον, ὥστε πῆς κυβικὸς περιέχει τὸ ὑπὸ τῷ τεττὰ μετρώμενον δεκάκις ἢ ὀκτάκις· ἡ ἄρα σάμνος ἐστὶ μέτρον χωρὲν $\frac{1}{8}$ κυβικῆς πόδος, ἢ δὴ δακτύλις κυβικὸς 96 (156). Τὸ δὲ ἡμισάμνιον περιέχει πόδας κυβικὰς 48. Τὸ δὲ τῆς σάμνης τεταρτον, ἢ τὸ (chopine) περιέχει κυβικὰς πόδας 24.

159. Ἡ σάμνος ἄρα πόδ. κυβ. δακ. κυβ. γραμ. κυβ.				
περιέχει.	$\frac{1}{8}$	96	165888	
Τὸ ἡμισάμνιον.	$\frac{1}{16}$	48	82944	
Τὸ τεταρτημόριον (chopine)	$\frac{1}{32}$	24	41472	

160. Βυλομένοις δ' ἐκτιμήσασθαι τὴν σάμνον ἐν σαλμοῖς ἐξέσαι λαβεῖν ὡς ὅρον συγκρίσεως τὸ κοινὸν ὕδωρ, ὃ πῆς κυβικὸς σαθμώμενος εὐρίσκεται λίτρας ἑλκων 54· ὅθεν ἔπονται τὰ ἐξῆς.

	λίτ.	ἡμιλ.	ἔγγ.	δραχ.	δηνάρ.
Πῆς κυβικὸς ὕδατος.	54	108	864	6912	20736
Στάμνος ἄρα ὕδατος κοινῆς (158).	3	6	48	344	1152
Τὸ ἡμισάμνιον.	$1\frac{1}{2}$	3	24	194	576
Τὸ τεταρτημόριον τῆς σάμνης.	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	12	96	288

161. Ἡ σερεότης μιᾶς λίτρας ὕδατος τὸ τρίτον ἔσται

τῆς σάμνης, ἔσεται 32 δακτύλων κυβικῶν (158)· ὁ ἄρα κυβικὸς ὕδατος δάκτυλος ἔλκει βάρος ἡμισυγίω.

162. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ Αἰτμοσφαιρικὸν αἶρος τῷ πρὸς τῷ ὀρίζοντι βάρος ἔλκοντος $\frac{1}{16}$ τῷ ὕδατος, εἰς πᾶς κυβικὸς ἔλξει βάρος $\frac{5}{16}$ 54 λιτρῶν (160)· εἴτ' ὅν ὡς ἔγγιστα 21 δηνάρια καὶ $\frac{1}{2}$ δηνάριον, ἢ 7 δραχμὰς καὶ δηνάριον ὅν ὡς ἔγγιστα.

163. Ἡ δὲ καθ' ἡμᾶς ἐν χρήσει Οὐκὰ ἐστὶ μέτρον περιέχον δραχμὰς· 400 ἰσοδυναμεῖσι δὲ αἱ 400 δραχμαὶ 288 παρισιαναῖς, ἢ ὑγγίαις 36· ἡ ἄρα ὑκὰ ἔλκει βάρος λιτρῶν δύο καὶ ἐνὸς τετάρτου, καὶ δὴ τὸ σερρεὸν ὕδατος ὑκὰς ἐστὶ δακτύλων κυβικῶν 72 (161) καὶ ἐν τῷ ἀπολύθῃ τριῶν τετάρτων τῆς σάμνης (158).

Περὶ τῶν νομισμάτων.

164. Ἐν τῇ Γαλλίᾳ.	σολδ.	δην.	λεπ.	
Ἡ λίτρα περιέχει	20	240	2880	
Τὸ σολδίδιον.	1	12	144	
Τὸ δηνάριον.	0	1	12	
Ἐν τῇ Αἰθιοπία.	γροσ.	σαυρ.	φεν.	λεπ.
Τὸ φορτίνιον περιέχει.	20	60	240	480
Τὸ γροσσίκιον.	1	3	12	24
Τὸ σαυροφόρον.	0	1	4	8
Τὸ φέννιγον.	0	0	1	2
Τὸ δεκάτον τῆς Οὐλάνδας				
περιέχει φορτίνια $4\frac{1}{2}$.	90	270	1080	2160
Ἐν τῇ Τυρκίᾳ.	παρ.	λεπτά.		
Τὸ γρόσιον περιέχει.	40	120		
Τὸ δεκάριον.	10	30		

Τὸ πεντάριον.	5	15
Ο' παῖς.	1	3
Τὸ δεκάτον τῆς Ο' λάνδας		
περιέχει γρόσια 9.	360	1080

Μέτρον τῶν γωνιῶν.

165. Ο' φόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ὅτι γωνίας μέτρον ἐστὶν αἰ μέρος τῆς κυκλικῆς περιφερείας· ὑποτίθεται τοίνυν ἡ παντὸς κύκλου περιφέρεια, ὅση ἂν ᾖ τὸ μέγεθος, διηρημένη εἰς μοῖρας 360· ἐκάστη δὲ μοῖρα, εἰς 60 ἐξηκὸς πρῶτα, ὧν ἕκασον, εἰς 60 δεύτερα κτ. ὅλη ἡ κυκλικὴ περιφέρεια

	μοιρ.	λεπ.	δεύτερα.
περιέχει.	360	21600	1296000
Ἐκάστη μοῖρα.	1	60	3600
Ἐκασον λεπτόν.	0	1	60

Μέτρον τῆς χρόνου.

166. Ο' καινὸς ἐνιαυτὸς περιέχει ἡμέρας $365\frac{1}{4}$ · ἀκριβέστερον μέντοι, ἡμέρας 365, ὥρας 5, καὶ λεπτὰ 49.

	ἡμ.	ῥ.	λεπ.	δεύτ.
Ο' ἐνιαυτός.	$365\frac{1}{4}$	8765	525949	31556940
Ἡ ἡμέρα.	1	24	1440	86400
Ἡ ὥρα	0	1	60	3600
Τὸ λεπτόν.	0	0	1	60

Αἰὼν ἐστὶ διάστημα χρονικὸν περιεκτικὸν ἐτῶν 100.

Ἰνδικτιῶν δὲ, διάστημα περιέχον ἐνιαυτοὺς 15.

Ο' λυμπιάς δὲ, 4· πενταετηρὶς δὲ, 5.

167. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ρ' ἄδιον δὲ κατανοῆσαι ἐκ τῶν

εἰρημένων, ὅτι ποσότης, ἐλάσσων τῷ εἶδει, αἶε ἐστὶ κλάσμα ποσότητος μείζονος, ἐν ᾗ περιέχεται· τὸ γὰρ λεπτὸν ὑπάρχει τῆς ὥρας $\tau\epsilon$, τῆς δ' ἡμέρας $\tau\acute{\alpha}\tau\epsilon$, τῷ δ' ἐνιαυτῷ $\tau\tau\tau\epsilon\tau\epsilon$ · ἢ δ' ὕγγια, τῷ ἡμιλίτριον τὸ $\frac{1}{2}$ · τὸ δὲ ἡμιλίτριον, τῆς λίτρας τὸ $\frac{1}{2}$ · ἢ δὲ λίτρα, τῷ κινταλίον τὸ $\tau\epsilon$, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων μέτρων ὡσαύτως.

Πρόβλημα Β.

168. Εἶδος ποσότητος μείζον ἐπ' ἑλαττον ἀγαγεῖν.
ΛΤΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ ἀριθμὸς τῷ μείζονος εἶδους ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐμφαίνοντα, ὅσakis ἢ εἶδει ἐλάττων μονὰς ἐμπεριέχεται τῇ τῷ εἶδει μείζονι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Τῆς ὀργυῆς πόδας περιεχέσης 6, ἀγομένων, φέρε, 5 ὀργυῶν εἰς πόδας, πολλαπλασιασθήτω 5 ἐπὶ 6, καὶ προκύψουσιν πόδες 30· τῆς δὲ τετραγωνικῆς ὀργυῆς δακτύλους τοιούτους περιεχέσης 5184, ἀναχθήσονται 5 τετραγωνικαὶ ὀργυαὶ ἐπὶ δακτύλους, πολλαπλασιασθέντος 5 ἐπὶ 5184· ὅθεν ἔσσι 25920.

Β'. Τῆς λίτρας 16 περιεχέσης ὕγγιας, 7 φέρ' εἰπεῖν λίτραι ἀναχθήσονται ἐπ' ὕγγιας πολλαπλασιασθέντος 7 ἐπὶ 16, ἐξ ὧν προκύψουσιν ὕγγια 112.

Γ'. Ἐντεῦθεν ἔν ἡ νομισμάτων λίτραι 8 ἀναχθήσονται εἰς σολῖδια, πολλαπλασιασθέντος 8 ἐπὶ 12· καὶ γρόσια εἰς παράδας, ἐπὶ 40· καὶ φιορίνια εἰς σαυροφόρα, ἐπὶ 60· ἀλλὰ καὶ μοῖραι εἰς λεπτά, καὶ ταῦτα, εἴπη παρείκοι, εἰς δεύτερα κτ., πολλαπλασιάσασιν ἐπὶ 60 (103).

Δ'. 6 ἡμέραι ἀναχθήσονται εἰς λεπτά, ἀμέσως πολλαπλασιασθέντος 6 ἐπὶ 1440 (166), ἢ γυν πρῶτον μὲν ἐπὶ 24· ἐξῆς δὲ τὸ προκύπτον ἐπὶ 60.

ΔΕΙΞΙΣ. Α' πλέσματος δὲ ὁ ταύτης τῆς μεθόδου λόγος· εἶγε μίᾱς ὀργιᾶς, φέρε, 6 περιεχούσης πόδας, 5 ὀργιᾶι ταύτῃ δυνήσονται πρὸς πεντάκις 6· ἀνάγκη ἄρα τὸν ἀριθμὸν 5, τὸν τὸ μείζον ἐκδηλῶντα εἶδος, πολλαπλασιάσαι ἐπὶ τὸν 6, τὸν ἐμφαίνοντα, ὅσάκις ὁ πῦρ τῇ ὀργιᾷ ἐμπεριέχεται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῆς γῆς ἐξ ὑποθέσεως πρὸς τὸν ἑαυτῆς σφερομένης ἄξονα περιφορὰν ὅλην ἐν ὥραις 24, ἕκαστος τῶν ὑπὸ τὸν ἰσημερινὸν οἰκύντων συνάμα τῇ γῇ περιτρέφεται περιφορὰν λεγῶν 9000· πόσους ἄρα πόδας διανύει ἐν δευτέρῃ ὥρας λεπτῷ;

α'. Α'νήχθωσαν 9000 λέγει ἐπ' ὀργιᾶς (168), ἐξῆς δ' ἐπὶ πόδας· ὅθεν προκύψουσι πόδες 123228000. β'. ἀνήχθωσαν ἐπὶ λεπτὰ δεύτερα αἱ ὥραι (166)· ὅθεν προελεύσεται λεπτὰ δεύτερα 86400. γ'. διηρήσθω ὁ τῶν ποδῶν ἀριθμὸς διὰ τῷ τῶν δευτέρων λεπτῶν· εὐρεθήσεται δὴ οἰκίτωρ ἕκαστος τῶν ὑπὸ τὴν ἰσημερινὴν διατρέχων λεπτῷ δευτέρῃ πόδας 1426.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ζητηθῆτω παρασαθῆναι ἐν σαθμοῖς τὸ δεκτικόν τιος ἄγγυς. Τυτὶ ἐν σαθμῇ πληρωθῆτω ἐπ' ἀκριβὲς ὕδατος κοινῷ· εἰ μὲν ἐν συνάμα τῷ ὕδατι βάρος ἔλκει λίτρων 60, πόσας σάμνας περιέξει; ἢ εἰ καὶ τυτὶ βυλόιμεθα, πόσους κυβικὺς δακτύλους; διηρήσθωσαν 60 λίτραι διὰ 3 (160), ὅθεν προκύψουσι σάμναι 20, ἢ πολλαπλασιασθῆτωσαν 60 ἐπὶ 32 (161), ὅθεν προκύψουσι πόδες κυβικοὶ 1920, ὅς περιέχει τῷ ἄγγυς ἡ χωρητικότης.

Πρόβλημα Γ.

169. Ἐλάττον εἶδος ἐπὶ μείζον ἀναγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Αὕτη ἡ πράξις, ἐναντία ὅσα τῇ προεκτεθείσῃ, διαίρεσιν ἀπαιτεῖ τῷ τὸ ἐλαττον εἶδος ἐμφαίνοντος ἀριθμῷ διὰ τῷ, ὅσας μὲν μίαν τῷ ἐλάττονος ἐμπεριέχεται τῇ μείζονι, ἐνδεικνύσας.

Α΄. Ἀναχθήσονται ἄρα, πόδες μὲν ἐπ' ὀργυῖας, διελῶσι δὲ 6· δάκτυλοι δ' ἐπ' ὀργυῖας, δι' 72· ἢ γὰρ πρῶτον μὲν διὰ 12, εἴθ' ἔτι δὲ 6 τὸ πηλίκον· γραμμαὶ δ' ἐπὶ πόδας, διὰ 144, κτ. (149). Πόδες ἔν 506 πόσας ὀργυῖας συνισῶσι; διελὼν πόδας 506 δι' 6, εὐρήσεις ὀργυῖας 84, καὶ πόδας 2.

Β΄. Ἀναχθήσονται πόδες τετραγωνικοὶ εἰς ὀργυῖας τοιαύτας, διελῶσι διὰ 36· δάκτυλοι δὲ (δῆλον ὅτι τὰ πάντα τετραγωνικά) εἰς πόδας, καὶ γραμμαὶ εἰς δακτύλους, διὰ 144· δάκτυλοι δ' ἐπ' ὀργυῖας, ἤτοι ἀμέσως διὰ 5184 (155), ἢ πρῶτον μὲν διὰ 144, ἐξῆς δὲ διὰ 36 (120). Πόσας ἄρα πόδες 8524 συμπληρῶσιν ὀργυῖας; διὰ 36 διαιρέσεως γενομένης, πρόεισι πηλίκον 236 ὀργυῖαι, καὶ πόδες 28.

Γ΄. Ἀναχθήσονται δὲ καὶ πόδες κυβικοὶ εἰς ὀργυῖας τοιαύτας, καὶ δάκτυλοι δὲ ἐπὶ πόδας, καὶ γραμμαὶ ἐπὶ δακτύλους κτ. διελῶσι διὰ 1728· δάκτυλοι δ' ἐπ' ὀργυῖας, διὰ 373248 (156), ἢ πρῶτον μὲν διὰ 1728, εἴτα τὸ πηλίκον διὰ 216 (129). Πόσας ἄρ' ὀργυῖας συμπληρῶσι πόδες 5674310; διαιρεθεὶς οὗτος ὁ ἀριθμὸς διὰ 373248, δίδωσιν ὀργυῖας 15, λειπομένων δακτύλων 75590, οἱ διαιρεθέντες διὰ 1728 (156), δίδασσι πόδας κυβικὰς 43 μετὰ καταλοίπῳ 1286 κυβικῶν δακτύλων.

Δ΄. Τὰ δὲ ἡμισάμνια ἀναχθήσονται ἐπὶ λίτρας, διαιρεθέντα διὰ 2· αἱ ἐγγυαὶ δ' ἐπὶ ἡμισάμνια, δι' 8, αἱ δ' αὐταὶ εἰς λίτρας, διὰ 16 κτ. 236, φέρει εἰπεῖν, καὶ γ-

γίαι, διαιρεθείσαι διὰ 16, ἀποδιδόασι λίτρας 14, ἢ 12 ὑγγίαις.

Ε'. Τὰ δὲ σολδία εἰς λίτρας, διαιρούμενα διὰ 20· οἱ δὲ παράδαι εἰς γρόσια ἀνάγονται, διαιρούμενοι διὰ 40, τὰ δέγε ξαυροφόρα ἐπὶ φοιρίνια, διὰ 60 (131. κτ.).

Ζ'. Τέλος δὲ, αἱ ὥραι εἰς ἡμέρας φέρονται, διαιρούμεναι διὰ 24· τὰ δὲ λεπτὰ εἰς ὥρας, ἢ ἐπὶ πρῶτα τὰ δεύτερα, διαιρούμενα διὰ 60· λεπτὰ ἐν 67054 πόσας συγκροτῶσιν ἡμέρας· ὁ 67054, διαιρεθείς δι' 60, παράγει πηλίκον ὥρας 1125 ἢ 4 λεπτὰ· ὁ δὲ 1125, διαιρεθείς δι' 24, δίδωσιν ἡμέρας 46 ἢ ὥρας 21· συμπληρῶνται ἐν ἡμέραι 46, ἢ ὥραι 21, ἢ λεπτὰ 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ρᾶσα δὲ κατανοηθήσεται, ὡς ἑκάτερα τῶν ἀποδοθεισῶν πράξεων ξυντελεῖ ἀμοιβαδὸν δρατέρα εἰς βάσανον· ἵνα, φεῖρ εἰπεῖν, ἀναχθῶσι λίτραι 35 ἐπὶ σολδία, πολλαπλασιάζεται ὁ 35 ἐπὶ τὸν 20· ἵνα δὲ βασανισθῇ τὰ τῆς πράξεως, ἐπαναγόμενος ὁ προκύπτων 700 εἰς λίτρας τῇ δι' 20 διαιρέσει, ὀφείλει ἀποδῆναι αὐθις λίτρας 35, ἢ ἀνάπαλιν.

Πρόβλημα Δ'.

170. Ἀναγαγεῖν ὅλον ἐπὶ κλάσμα.

ΛΥΣΙΣ. Εἰ μὲν μόνον ἐν εἶδει κλάσματος δέοι ἀριθμὸν ὅλον, οἷον τὸν 6, παραστήσασθαι, γενήσεται ῥᾶσα, γραφέντος $\frac{6}{1}$ (139).

Εἰ δὲ ζητεῖται ἀναγαγεῖν ὅλον ἐπὶ κλάσμα, ἢ εἰη δεδομένος ὁ παρονομασῆς, πεπολλαπλασιάσθω τὸ ὅλον ἐπὶ τὸν παρονομασῆν, ἢ σεσημειώθω ὁ προκύπτων ὡς διὰ τῷ παρονομαστὶ διαιρούμενος (138.)

Ζητεῖται, φέρ' εἰπεῖν, ἀναγαγεῖν τὸν 4 εἰς πέμπτα, πεπολλαπλασιάσθω ἔν 4 διὰ 5, καὶ γεγράφθω $\frac{2}{5}$ · ἐπεὶ δὲ ὄντως ἐκ τῆς $\frac{2}{5}$ προέρχεται ὅλον τῷ 4 ἰσόμενον (146), ἀσφαλῶς ἔχει ἡ μέθοδος (145).

Ζητεῖται ἀναγαγεῖν τὸν 7 ἐπὶ εἰκοσά· τῷ ἔν τῇ 7 διπλασίῳ προσεπιγεγράφθω δεξιόθεν 0 (103)· Τέλος δὲ ἐχρηματίσθω ἔτω $\frac{1}{20}$ · τῷ τῷ 7, ἀσφαλῆς ἐστὶ πάντως ἡ πράξις.

Πρόβλημα Ε΄.

171. Ἐκτιμῆσαι ἐν εἵδει ἐλάττονι τὴν δύναμιν δοθέντος κλάσματος.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ ἀριθμητὴς, διαιρούμενος διὰ τῆ παρονομαστῆς, ἐπ' εἶδος ἀναχθήσεται ἐλάττον (168).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Εἰς εὗρεσιν τῆς δυνάμεως $\frac{2}{5}$ ὀργυῆς κατὰ μῆκος, ἐπεὶ τόδε τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἰσοδυναμεῖ $\frac{1}{5}$ ὀργυῶν 2 (140), ἀνήχθωσαν 2 ὀργυιαί ἐπὶ πόδας, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὸ πέμπτον, ὅπερ ἐστὶ πόδες 2, καταλειπομένων ποδῶν 2, ἐφ' ᾧ διὰ 5 διαιρεθῇ· ἔτοι δὲ ἀνήχθωσαν ἐπὶ δακτύλους· 24 δὲ δάκτυλοι διηρήσθωσαν διὰ 5, ὅθεν προκύψουσιν δάκτυλοι 4, λειπομένων 4, οἱ τινες ἀνήχθωσαν ἐπὶ γραμμὰς· 48 δὲ γραμμαὶ, διαιρεθεῖσαι διὰ 5, διδώσιν γραμμὰς 9, λειπομένων 3, αἵτινες ἀναχθεῖσαι εἰς σίγματα ποῖσιν 36· 36 δὲ, διαιρεθέντα διὰ 5, παράγουσιν πηλίκον σίγματα 7 καὶ $\frac{1}{5}$ σίγματος· τῶτον ἄρα τὸν τρόπον $\frac{2}{5}$ ὀργυῆς εὗρέθησαν ἐκτιμώμενα ποδῶν μὲν 2, δακτύλων δὲ 4, γραμμῶν δὲ 9, σιγμάτων δὲ 7 $\frac{1}{5}$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πόσον ἐκδηλῶσι γροσίστα $\frac{5}{7}$; ἢ $\frac{1}{7}$ τῶν 6 γροσίων (140)· ἀναχθέντα ἔν 6 γροσία ἐπὶ δε-

κάρια συγκροτῶσιν αὐτῶν 24· διηρήσθω δὴ 24 διὰ 7· ὅθεν προκίψει πηλίκον 3 δεκάρια, μετὰ καταλοίπε 3, ἃ περιέχει παράδας 30· 30 δὲ, διαιρεθέντες διὰ 7, παρέχουσι παράδας 4, λειπομένων 2, ἃ περιέχει λεπτά 6· 6 δὲ διαιρεθέντα διὰ 7 διδῶσιν $\frac{6}{7}$ · ἰσοδυναμῶσιν ἄρα $\frac{6}{7}$ γροσίς, 3 μὲν δεκαρίοις, παράδαις δὲ 4, καὶ $\frac{6}{7}$ λεπτῶν ενός.

172. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄπαν λείψανον διαιρέσεως, οἷον τὸ $\frac{1}{2}$, αἰ δύναται ἐκληφθῆναι ἀντὶ κλάσματος (137)· ἵν' ὅν διορισθῇ ἐν εἴδει ἐλάττονι ἢ δύνاميς κατάλοιπε τι· νός, ἀνήχθω ἐπ' εἶδος ἐλάττον, καὶ συνεχισθῇτω, ὡς καὶ πρὶν, τὰ τῆς διαιρέσεως· οἷον, περὶ $\frac{1}{2}$ πρὸ μικρῶ εἵπομεν ὑποδείγματος (117), κατελείφθησαν 10 λίτραι, ἀπανεμηθησόμεναι σρατιώταις 35· ἀνάγονται 10 λίτραι ἐπὶ σολδία, ἃ εὐρίσκεται 200· ταῦτα δὲ διαιρούμενα διὰ 35 διδῶσιν ἐκάσῳ 5, μετὰ καταλοίπε σολδίων 25, ἅπερ αὖθις ἀνάγονται ἐπὶ δηνάρια· καὶ διὰ 35 διαιρούμενα ἀπονεμῶσιν ἐκάσῳ 8, λειπομένων 20, ἅτινα ἀνάγονται ἐπὶ λεπτά 240· διαιρεθέντα δὲ ταῦτα διὰ 35 διδῶσιν ὡς ἑγγύσια ἐκάσῳ 7· ὅτως ἄρα λίτραι 640, διαμερισθεῖσαι σρατιώταις 35, ἀπονεμῶσιν ἐκάσῳ 18 λίτρας, 5 σολδία, 8 δηνάρια, καὶ 7 λεπτά.

Πρόβλημα ε'.

173. Ἀναγαγεῖν κλάσμα ἐφ' ἀπλυσέραν εἰθεσιν.

ΛΤΣΙΣ. Διηρήσθων ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομασὴς διὰ τῶ αὐτῶ μείζονος, ἢ μονὰς, ἀριθμῶ· συνῖδοι δ' ἄντις, ὑφ' ὅτε ἀριθμῶ ἂν τετὶ ἔχῃ γενέσθαι, τοῖς ἐφεξῆς ἀτενῶς προσέχων τὸν νῦν.

Α'. Ἄπας ἄρτιος ἀριθμός, πολλαπλῶς ὢν τῷ 2 (ὡς

καθ' ἑαυτὸ ξυμφανές) διαιρέσιμος ὑπάρχει ἐπ' ἀκριβὲς διὰ 2· εἴη ἄρα ἐκάτερος τῶν ὄρων τῷ δοθέντος κλάσματος ἄρτιος ἢ, εἰλήφθω ἐκατέρω τὸ ἡμισυ, καὶ αὐθις, εἰ καὶ τῷτο δυνατόν, τῷ ἡμίσεως τῷδε τὸ ἡμισυ, καὶ ἐφεξῆς οὕτως· ἐπὶ τῷ $\frac{1}{10}$ κλάσματος, ληφθέντος τῷ ἡμίσεως ἕκ τε τῷ 8 καὶ τῷ 10, συσταθήσεται κλάσμα καινὸν τὸ $\frac{1}{4}$ ἴσον τῷ $\frac{1}{10}$ (143)· ἐκ δὲ τῷ $\frac{1}{12}$ ληφθέντος δις ἐφεξῆς τῷ ἡμίσεως, εὐρεθήσεται $\frac{1}{3}$ ἴσον $\frac{1}{12}$.

Β'. Ἀριθμὸς ἅπας, ἐν δεξιᾷ εἰς 0 λήγων, διαιρεθῆναι δύναται διὰ 10 (101)· εἰς δὲ δύο 0 λήγων, διὰ 100 κτ. εἴη ἄρα ἐκάτερος τῶν τῷ κλάσματος ὄρων ἔχη πρὸς δεξιὰν ἐν ἣ πλείω 0, ἀναχθήσεται ἐφ' ἀπλυσέραν ἔκθεσιν, ἀποχωριζομένων κοινῇ ὑπερθέντε καὶ ἐνερθεν τῶν 0, ὃ τὴν τῷ κλάσματος δύναμιν διασώζει ἀμεταποίητον· ἐν ἐν 100, ἢ 1000, ἢ 10000, ἀφαιρουμένων κοινῇ (126, 143) τῶν 0, ἅπαντα ταῦτα τὰ κλάσματα ἰσωθήσονται τῷ $\frac{1}{10}$.

Γ'. Ἀριθμὸς ἅπας, λήγων εἰς 5, διαιρεῖται ὁλοχερῶς διὰ 5· αὐτίκα δὲ τῷτο καταφαίνεται ἐπὶ τῷ τῶν μονάδων ἐμφαντικῷ χαρακτῆρος, ὅς ἐστι 5, καθ' ἰπόθεσιν· ἀλλὰ μὴν αἱ δεκάδες, αἱ ἐκατοντάδες κτ. τῷδε τῷ ἀριθμῷ, προδήλως ἔσαι τῷ 10 πολλαπλαῖ (77), ἔσονται παρὰ τῷτο καὶ τῷ 5, καὶ διπλῆς ὁ 10· ἅπας ἄρα τοιόσδε ἀριθμὸς διαιρέσιμος ὑπάρχει διὰ 5.

Δ'. Ἄπας ἀριθμὸς, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτῆρων, συναφθέντων ἀλλήλοις, ὡς εἰ ἦσαν μονάδες ἀπλᾶι, ἀποτελοῖ 3, ἢ πολλαπλὴν τῷ 3, διαιρεῖσθαι δύναται διὰ 3· ἔτω κλάσματος $\frac{2}{3}$ τῷ μὲν ἀριθμητῷ αἱ χαρακτῆρες συναπτόμενοι ποιῶσι 18, πολλαπλὴν ὄντα τῷ 3, τῷ δὲ παρανομαστῷ, 9, ὄντα καὶ αὐτὸν τῷ 3 πολλαπλὴν.

διο τὸ $\frac{2}{3}$, διαιρέσει ἑκατέρω ὅρου διὰ 3, γίνεται $\frac{2}{9}$, καὶ τὸ αὐτὸ $\frac{2}{9}$ κρατεῖ δὲ τὸ ἐν ἀπάσαις ταῖς τοιαύταις περιστάσεσιν, ὡς ἐκάστῳ πείρα μαθεῖν ἔξει.

174. Ἐὰν ἄρα ἄτερος τῶν συντιθέντων τὸ κλάσμα ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 5, ἄτερος δὲ εἰς 5, ἢ ἑκάτερος εἰς 5, διηρήσθων διὰ 5· ἐν ἣν τῷ $\frac{1}{5}$ διαιρεθέντων τὸ τε 10 καὶ 25 διὰ 5, συστήσεται $\frac{2}{5}$ · τὸ δὲ $\frac{2}{5}$ τραπήσεται ἔτι εἰς $\frac{2}{5}$.

175. Ἐν γένει δὲ, εἰς ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τῷ δοθέντος κλάσματος πολλαπλασιάζονται ὡς ἀριθμοὶ τῷ αὐτῷ, διαιρεθῆναι ἔχει ἑκάτερος διὰ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ· ἐν ἣν τῷ $\frac{1}{6}$, παρατηρῦντες ὡς ὅ,τε 12 καὶ 18 πολλαπλασιάζονται εἰς 6, διαιρῶμεν ἑκάτερον διὰ 6, ἀποφερόμενοι $\frac{1}{6}$ ἴσον τῷ $\frac{1}{6}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ἀπάσαις ταῖς εἰρημέναις περιπτώσεσι διαιρῶ τὸν τε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν διὰ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ, μείζονος ὄντος τῆς μονάδος· ἑκάτερος ἄρα ἀναγκαιῶς μειωθήσονται (110), ἥτε ἐκθεσις ἔσται ἀπλυστέρα, ἀμεταποιήτε μείωσις τῆς κατὰ τὸ κλάσμα δυνάμεως.

176. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὁ μέγιστος τῶν ἀκριβῶς διαιρέτων ἑτέρους δύο ἀριθμὸς καλεῖται μέγιστος καὶ κοινὸς ἀμφοῖν διαιρέτης, οἷός ἐστιν ἐν 10 καὶ 15 ὁ 5.

Πρόβλημα Ζ΄.

177. Δυσὸν ἀριθμῶν δοθέντων τὸν μέγιστον κοινὸν ἀμφοῖν διαιρέτην προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Δίελε δὴ τὸν μείζονα διὰ τῷ ἐλάττωτος, διὰ δὲ τῷ λοιπῷ, ἐν μέρει σημειωθέντος, δίελε αὐτὸν τὸν ἐλάττω· εἰ δὲ αὐτὸ καταλειφθεῖ, διὰ τῷ δίελε τὸν πρὸ τῷ διαιρέτην, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως· πάντων δὲ τῶν πη-

λίκων παραμελήσας, τὸν ἑχάτον διαιρέτην, ὃς λειψάνῳ δίχα διαιρεῖ, ἕξεις κοινὸν καὶ μέγιστον διαιρέτην τῶν προτεθέντων ἀριθμῶν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἐν τῷ 24 ὁ 8, δίχα λειψάνῳ διαιρῶν, ὁ μέγιστος κοινὸς τῶν 8 καὶ 24 διαιρέτης ὑπάρχει, ὡς δῆλον· ἐπὶ δὲ τῷ 34, διαιρεθέντος 34 διὰ 12, καταλοίπῳ μένοντος τῷ 10, διέλε αὐτὸς τὸν πρὸ τῷ διαιρέτῃ 12 διὰ τῷ λειψάνῳ 10· ἐπεὶ δὲ λείπεται 2, διέλε πάλιν τὸν ἑχάτον διαιρέτην 10 διὰ 2· μηδενὸς δὲ λειπωμένῃ, ὁ ἑχάτος διαιρέτης 2 ἐστὶν ὁ κοινὸς καὶ μέγιστος διαιρέτης τῶν, 12, καὶ 34, ὥς ἐζητεῖτο. Τῷ ὄντι δὲ ὁ λειπόμενος 2 διαιρῶν ἄνευ λειψάνῳ τὸν 10, διαιρήσει ὡσαύτως καὶ τὸν 12, ταῦτόν εἶπεν τὸν 10 σὺν ἑαυτῷ· διαιρήσει ἄρα καταλοίπῳ δίχα καὶ τὸν 10 σὺν δις τῷ 12, ὃ ἐστὶ τὸν 34.

Ἀλλ' ἔσαι γὰρ ὁ 2 μέγιστος κοινὸς τῷ 12 καὶ 34 διαιρέτης· καὶ γὰρ ὁ κοινὸς τῷ 12 καὶ 34 διαιρέτης ὀφείλει διαιρεῖν ἄνευ λειψάνῳ καὶ τὴν διαφορὰν, ἣ διαφέρεισιν ἀλλήλων ὁ 34 καὶ 12, εἴτ' ἔν τὸν 22· ὡσαύτως ὁ κοινὸς διαιρέτης τῷ 22 καὶ 12 ὀφείλει διαιρεῖν καὶ τὸν 10, διαφορὰν τῷ 22, καὶ 12· ὁ δὲ διαιρῶν τὸν 12, καὶ 10 ὀφείλει διαιρεῖν καὶ τὴν αὐτῶν διαφορὰν 2· ἀλλ' ὁ 2 καὶ ἂν διαιρεθῇ διὰ μείζονος ἄλλου ἀριθμοῦ, ἢ δι' ἑαυτῆ· ἄρα ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς διαιρέτης τῷ 10 καὶ 2 ἐστὶν ὁ 2· ἐπεὶ δὲ 12 μὲν σύγκειται ἐκ 10 σὺν δύο· 34 δὲ ἐκ τρις 10 σὺν δις δύο· ἄρα καὶ τῷ 34, καὶ 12 κοινὸς καὶ μέγιστος διαιρέτης ἐστὶν ὁ 2.

178. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα διαιρῶντες ἀφικώμεθα ἐπὶ κατάλοιπον τὴν 1, συνάγειν προσήκει, ὡς ὑδεῖς παρὰ τὴν 1 εὐρίσκεται κοινὸς διαιρέτης τῶν προτεθέντων

ἀριθμῶν· ἐπὶ ὧν τὸ $\frac{1}{2}$, διαιρεθεὶς διὰ 5 ὁ 9, καταλείπει 4, ὅς διελὼν τὸν 5, καταλείπει 1· ἔστιν ἄρα διαιρέτης κοινὸς τῷ 5 καὶ 9 ἕδεις ἀλλ' ἢ 1.

Πρόβλημα Η'.

179. Κλάσμα ἀναγαγεῖν εἰς ὅσον ἕνεσιν ἀπλυσέ-
ραν ἔκθεσιν.

ΛΥΣΙΣ. α'. Ζήτησον τὸν μέγιστον καὶ κοινὸν τῶν ἀ-
ριθμητῶν καὶ τῆ παρονομαστῆ διαιρέτην (177)· β'. διὰ τού-
του διέλε ἐκάτερον.

ΤΠΟΔΕΙΜΑ Α'. Κεῖσθω $\frac{1}{12}$, καὶ τῶν ὁρῶν μέγι-
στος κοινὸς διαιρέτης εὐρίσκεται ὁ 7, δι' οὗ διαιρεθέντες ἐ-
κάτερος συνισῶσι κλάσμα τὸ $\frac{1}{7}$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Εἰς τὸ $\frac{1}{8}$ ὁ μέγιστος κοινὸς δι-
αιρέτης ἐστὶν 8, δι' οὗ διαιρεθὲν τὸ κλάσμα συνίστησι τὸ $\frac{1}{8}$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ο' μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῷ
 $\frac{1}{4}$ ἐστὶν ὁ 2, δι' οὗ διαιρέσει προκύπτει $\frac{1}{2}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὕτω ποιῶσι, α'. ὅ,τε ἀριθμητῆς καὶ ὁ πα-
ρονομαστῆς τῷ κλάσματος ἀποκατασταθήσονται ὅσον ἕνεσιν ἐ-
λάχιστοι· β'. ἢ τῷ κλάσματος δυνάμεις διαμενεῖ ἀμετακί-
νητος. Ο. Β. Δ.

180. ΣΧΟΛΙΟΝ. Η' τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν
παρονομαστὴν ἀναγωγὴ ἔκ ἄντις εἴποι, ὅσης ἐστὶ χρήσεως,
ἐδ' ὅσον ἐστὶ πρὸς γιαιτάτη τῇ τε προσθέσει, καὶ τῇ ἀπ' ἀλ-
λήλων ἀφαιρέσει, καὶ μὴν καὶ τῇ παραβολῇ τῶν κλασμά-
των, ἀφ' ἧς, εἰ ἴσα εἰσὶ κλάσματα δύο, γινώσκεται·
καὶ μὴν ἀλλὰ καὶ τῷ εἶδέναι ἔτι δυεῖν κλασμάτων, ὁπότερον
μὲν ἐστὶ μείζον, ὁπότερον δ' ἔλαττον.

Πρόβλημα Θ'.

181. Δύο κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναγαγεῖν παρονομασὴν σωζομένης τῆς δυνάμεως.

ΛΤΣΙΣ. α'. Πεπολλαπλασιάσθω ὅ, τε παρονομασῆς, καὶ ὁ ἀριθμητὴς τῷ πρώτῳ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομασὴν τῷ δευτέρῳ· β'. πεπολλαπλασιάσθω ὅ, τε παρονομασῆς καὶ ὁ ἀριθμητὴς τῷ δευτέρῳ ἐπὶ τὸν ἐν τῷ πρώτῳ παρονομασὴν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κεῖσθω ἀναγαγεῖν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομασὴν τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$. Πολλαπλασιάζοντες ἕν τῷ πρώτῳ τόν τε ἀριθμητὴν 2, καὶ τὸν 3 παρονομασὴν, διὰ τῷ κατὰ τὸ δεύτερον παρονομασῶ 7 ἔχομεν $\frac{14}{21}$ · εἰδ' ἔτω τὸν τῷ δευτέρῳ ἀριθμητὴν 1, καὶ παρονομασὴν 7 πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν τῷ πρώτῳ παρονομασὴν 3, λαμβάνομεν κλάσμα $\frac{3}{21}$ ἴσον τῷ δευτέρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Ἐκάτερου γὰρ τῶν τῷ κλάσματος ὁρῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὅς ἐστιν ὁ πατερε παρονομασῆς, πολλαπλασιασθέντος, καὶ δευτέρου κλάσματος ἡ δυνάμις κενιῖνται (142)· β'. ὁ καινὸς ἑκάτερου παρονομασῆς προκύπτων ἐκ τῶν πρὸ τῷ δυοῖν παρονομασῶν, ἀναγκαίως ὁ αὐτὸς ἔσται (85). Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰν' ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναχθῶσι παρονομασὴν τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, πολλαπλασιασθέντων τῷ τε 3, καὶ 5 ἐπὶ 4, τὸ πρῶτον ἔσται ἴσον τῷ $\frac{2}{12}$ · πολλαπλασιασθέντων εἴτα τῷ 1 καὶ 4 ἐπὶ 5 γενήσεται τὸ δεύτερον $\frac{4}{20}$.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς εἰ τ' ἀνάπαλιν προκείτο κλάσματα δύο, οἷον $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναγαγεῖν ἀριθμητὴν, δεῖξει ἑκάτερον ὅρον τῷ πρώτῳ πολλαπλασιάζειν ἐπὶ τὸν τῷ δευτέρῳ ἀριθμητὴν, ὅθεν ἔσται τὸ πρῶτον ἴσον $\frac{1}{12}$ · εἴτα ἑκάτερον τῶν τῷ δευ-

τέρη ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τῷ πρώτῳ, ἐξ ἧς εἶναι τὸ δεύτερον ἴσον $\frac{1}{4}$.

Πρόβλημα Γ'.

183. Δυσὶν κλάσματων δοθέντων, ὧν θατέρη οἱ ὁροι μακρῶ διαφέροντες εἰσι τῶν τῷ ἑτέρῳ, εὗρεῖν εἰ ταῦτα εἰλημένοις ἰσῶνται.

ΛΤΣΙΣ. Ἐῴωσαν κλάσματα τὰ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{8}$, καὶ ἤχθω τὸ δεύτερον ἐφ' ἀπλυσέραν ἔκθεσιν (179). γενήσεται ὡς $\frac{1}{2}$. ἡ μὲντοι ἐπιτομωτέρα καὶ γενικωτέρα ὁδὸς ἐστίν, ἀναγαγεῖν ἑκάτερον τῶν δοθέντων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα (181). ὕτως ὡς τῶν δοθέντων ἑκάτερον γενήσεται $\frac{3}{8}$, ἢ $\frac{1}{2}$, ὃ τὴν ἰσαμυλίαν καὶ μάλα προφανῶς δείκνυσι.

Πρόβλημα ΙΑ'.

184. Δυσὶν διαφερόντων κλάσματων προτεθέντων εὗρεῖν αὐτῶν τὸ μείζον.

ΛΤΣΙΣ. Ἐῴωσαν κλάσματα τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{1}{2}$. δι' ἀναγωγῆς ὡς ἐπὶ κοινὸν ὄνομα εἶναι τὸ μὲν $\frac{3}{4}$ ἴσον τῷ $\frac{3}{4}$, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ ἴσον τῷ $\frac{2}{4}$. καταφανὲς τοίνυν, ὡς τὸ $\frac{3}{4}$ περιέχει τὸ $\frac{2}{4}$ τῷ $\frac{1}{4}$, ἢ τῷ $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα ΙΒ'.

185. Πλείω κλάσματα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀναγαγεῖν παρονομασίην.

ΛΤΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου διὰ τῶ παραγομένης ὑπὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων ἀπάντων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κεῖσθω ἀναγαγεῖν ἐπὶ τὸν αὐ.

τὸν παρονομασὴν τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ κλάσματα· πεπολλαπλασιάζω δὲ ἐν τῷ πρώτῳ ὁ 1 ἢ 3 διὰ τῆς 35, προκύπτωντος ἐκ τῶν κατὰ τ' ἄλλα δύο παρονομασῶν 5 ἢ 7· ἔσαι ἐν τῷ πρώτῳ $\frac{35}{105}$ · πεπολλαπλασιάζω εἴτα ἐν τῷ δευτέρῳ ὁ 2 ἢ 5 ἐπὶ 20, παραγόμενον ἐκ τῶν παρονομασῶν 3, ἢ 7 τῆς πρώτης ἢ τρίτης· ἢ ὅπως ἔσαι τὸ δεύτερον $\frac{40}{105}$ · τελευταίον δὲ πεπολλαπλασιάζω ἐν τῷ τρίτῳ ὁ 4 ἢ 5 ἐπὶ 15, προκύπτοντα ἐκ τῶν παρονομασῶν τῆς πρώτης ἢ δευτέρας· τοιγαρὺν ἔσαι τὸ τρίτον $\frac{60}{105}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ἐκάτερος ὅρος ἐκάστῃ ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἐπολλαπλασιάζῃ ποσότητι, ἡ δύναμις ἄρα ὁ μετακινήται (142)· ἐπεὶ δὲ γέγονεν ἐκάστῃ κλάσματος παρονομασῆς ὁ παραγόμενος ὑφ' ἀπάντων τῶν παρονομασῶν, ἔσαι ἄρα κοινὸς ἅπασιν (87). Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰν' ἐπὶ κοινὸν ἀναχθῶσιν ὄνομα τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, πεπολλαπλασιάζω ἐκάστῃ ἐκάτερος ὅρος ἐπὶ τὸν προκύπτοντα ἐκ τῶν παρονομασῶν τῶν ἄλλων· ἢ ὅπως ἔσονται $\frac{40}{60}$, $\frac{30}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{12}{60}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ προσθέσεως τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα.

186. Συνάπτειν κλάσματα δοθέντα.

Ἡχθῶσαν ἅπαντα ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, ἢ τῶν ἀριθμητῶν συναφθέντων, ὑπογεγραφῶν αὐτοῖς ὁ κοινὸς παρονομασῆς.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐσων $\frac{2}{3}$ ὀργυῖαι, καὶ $\frac{1}{2}$ ἐτέ.

ρας· πόσον ἂρ' ἔσιν αὐτῶν τὸ ἄθροισμα; ἀχθέντα ἔν ἐπὶ κοινὸν ὄνομα τὰ κλάσματα γενήσονται $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ · συναφθέντων δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς ἀριθμητῶν· ἔσαι ἄθροισμα $\frac{2}{2}$, ἢ ὀργυλὴ μία ἢ 1 (146).

ΔΕΙΞΙΣ. $\frac{1}{2}$ ἔσιν ἴσον τῷ $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$ ἴσον τῷ $\frac{1}{2}$ (181)· δῆλον ἄρα ὅτι 14 τῶν ἐνὸς ἢ εἰκοσι, ἢ 15 τῶν ἐνὸς ἢ εἰκοσι ποιῶσιν 29 τῶν 21. Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κλασμάτων τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, ζητεῖται τὸ ἄθροισμα· ἀναγωγῆς ἔν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα γενομένης, τραπήσονται εἰς $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{3}$ · τῶν δ' ἀριθμητῶν συναφθέντων, ἔσαι τῶν τριῶν τὸ ἄθροισμα $\frac{6}{6}$, ἢ 1 σὺν 2.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Πόσον ποιῶσι 5 $\frac{1}{2}$ πήχεις ἢ 6 $\frac{1}{2}$ · οἱ λοχереῖς 5 ἢ 6 ποιῶσιν 11· τὸ δ' ἄθροισμα τῷ $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$ (186) ἔσι $\frac{1}{2}$, ἢ 1 ἢ $\frac{1}{2}$ · τὸ ἄρα ζητούμενον ἄθροισμά ἔσι 12 πήχεις ἢ $\frac{1}{2}$.

187. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐώρασαν τὰ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ κλάσματα, ἃ συναφθῆναι ζητεῖται· συνιδῶν ἔν, ὡς ὁ μείζων παρονομασῆς 12, διαιρεθεὶς δι' ἐκάστου τῶν ἄλλων, παρέχεται ἄνευ καταλοίπου πηλίκον, πολὺ τῷ τῆς πράξεως πόνου ὑφελέσθαι δύναμαι, πολλαπλασιάζων τόν τε ἀριθμητήν, ἢ τὸν παρονομασὴν ἐκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον ἐκείνο· 12 ἔν διαιρεθεὶς διὰ τῷ 4, πρώτῃ παρονομαστῷ, παράγει πηλίκον 3, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθέντων τῷ τε ἀριθμητῷ ἢ παρονομαστῷ τῷ πρώτῃ κλάσματος, γενήσεται $\frac{12}{4}$. 12 δὲ πάλιν διαιρεθεὶς διὰ τῷ κατὰ τὸ δεύτερον παρονομαστῷ 3 δίδωσι 4 ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθέντες ὁ 2 καὶ 3 ποιῶσι τὸ δεύτερον κλάσμα $\frac{8}{3}$ · 12 δὲ αὖθις διαιρεθεὶς δι' 6 προάγει 2, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθέντες ὁ, τε 5 ἢ 6,

τὸ τρίτον κλάσμα μεταμορφῶσιν εἰς $\frac{1}{2}$. Τὸ ἔν ἄθροισμα τῶν τεσσάρων κλασμάτων ἔσται $\frac{1}{2}$, ἢ 2 ἢ $\frac{1}{2}$. ἄλλ' ἐργασασμένοις γὰρ κατὰ τὴν γενικὴν θεωρίαν ἔσται $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$ σὺν $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ σὺν $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. τὸ δ' ἄθροισμα $\frac{2}{8} + \frac{2}{8}$, ὅπερ ἢ αὐτὸ ἰσοδυναμήσει τῷ 2 ἢ $\frac{1}{2}$ (146, ἢ 179).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Α' φαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Α'.

188. Α' φαιρεῖν ἀπ' ἀλλήλων κλάσματα δοθέντα.

ΛΤΣΙΣ. Τῆς πράξεως ταύτης ἐναντίως ἐχέσης τῇ προτέρᾳ, τῶν κλασμάτων ἐπὶ κοινὸν ἀναχθέντων παρανομασίην, τὸν ἀριθμητὴν θατέρου ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφαιρέσειν.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ε'ργάτης τις μισθῷ συνθέμενος δύο τρίτα ἔργου τινὸς ἐργάσασθαι, ἔλαθεν ἐργασάμενος αὐτῷ 5 ἔκτα· πόσων ἔν μερῶν τοῦ ἔργου ἐπιπροσθεῖναι αὐτῷ μισθὸν προσήκει; ἢ τῆς ὑπεροχῆς τῶν $\frac{2}{3}$ ὑπὲρ τὰ $\frac{5}{6}$, ἢ ἢ ἀφέλωμεν $\frac{5}{6}$ ἀπὸ $\frac{2}{3}$, ἀναγωγῇ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα μεταχρηματίζοντες αὐτὰ εἰς $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{5}{6}$, ἀφαιρήσομεν ἀπὸ 15 τὸν 12· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔστι $\frac{3}{6}$, ἢ $\frac{1}{2}$ (179) τοῦ ἔργου, ὑπὲρ ἢ ἀνάγκη μισθὸν εἶναι τῷ ἐργάτῃ τελέσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{5}{6}$ ἰσοδυναμῶσι πάντως τοῖς $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ (181)· σαφές ἄρα, ὅτι 15 δεκαοκτημόρια πλην 12 δεκαοκτημορίων ἰσῶνται δεκαοκτημορίοις $\frac{3}{6}$. Ο. Ε. Π. ἢ Δ.

189. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἦνα δ' ἀφέλωμεν κλάσμα τὸ $\frac{5}{6}$ ἀπὸ ὅλου τοῦ 8, λαμβάνομεν μονάδα ἐκ τοῦ ὅλου, ἢν ἀνά-

γοντες εἰς πέμπτα, οἷον $\frac{7}{5}$ (170), ἀφαιρῶμεν τὸν 3 ἀριθμητὴν ἀπὸ τῆς 5 ἀριθμητῆς, λειπομένων $\frac{2}{5}$. ἄρα ἔστιν ὅλη ἡ διαφορὰ 7 ἢ $\frac{7}{5}$, ὡς ἔχ' ἐαυτὸ προδήλον. ἐντεῦθεν ἄρα κατὰδηλον, ὡς ὅτε κλάσμα, οἷον τὸ $\frac{7}{5}$, ὃ πρόκειται ἀφελεῖν ἀπ' ἄλλου, οἷον τὸ $6\frac{1}{2}$, εἴη μείζον τῆς $\frac{1}{2}$, ἀφ' ἧς γενήσεται ἡ ἀφαίρεσις, ἀγαγόντες ἀμφοτέρω ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, εἴτ' ὅν μεταποιήσαντες εἰς $\frac{14}{10}$, ἢ $\frac{7}{5}$, δανειζόμεθα μονάδα ἐκ τῆς ὀλοχερῆς, εἴτ' ὅν $\frac{14}{10}$, ἔπειτα ἀπὸ τῆς ἀθροίσματος τῆς $\frac{14}{10}$ ἢ $\frac{7}{5}$, εἴτ' ὅν τῆς $\frac{14}{10}$, ἀφαιρῶμεν τὸ $\frac{7}{5}$, ἢ ὕτως εὐρήσομεν τὴν ὅλην διαφορὰν ἔσαν 5 $\frac{7}{10}$.

Πρόβλημα Β΄.

190. Στρατός τις συνέκειτο ἐκ στρατιωτῶν 90000, ἢ τὸ μὲν δέκατον ὅπλων ἐγένετο ἔργον, δύο δ' ἑννατα αἰχμαλωσίᾳ ὑπέπεσεν, ἐν δὲ πέμπτον εἰς φυγὴν ἐτράπετο· πόσος ἂρ' ἔστιν ὁ τῶν καταλειφθέντων στρατιωτῶν ἀριθμὸς;

Ἦχθωσαν τὰ τρία κλάσματα $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, ἢ συνήφθωσαν ἀλλήλοις αὐτῶν οἱ ἀριθμηταί· ἔσαι ἄρα ὁ παντοίως ἀπολωλὼς στρατὸς $\frac{235}{450}$. δίκην δὲ μονάδος ἐκλήφθεις ὁ στρατὸς ἰσῆται τῷ $\frac{235}{450}$. ἐκὼν ἀφηρήσθω ὁ ἀριθμητὴς 235 ἀπὸ τῆς ἀριθμητῆς 450· ἔστιν ἄρα τὸ λειφθὲν τῆς στρατῆς τὰ $\frac{215}{450}$. ἀλλὰ γὰρ οἱ στρατιῶται ὥσπερ εἶδος τι ἔλαττον ὑπάρχουσι πρὸς γε τὴν μονάδα, ἢ ἐξελήφθη ἐνταῦθα στρατός· ἀναχθήσεται ἄρα ὁ 215 εἰς τόδε τὸ ἔλαττον εἶδος, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 90000. Τῆς δὲ προκύπταντος 19350000 διὰ 450 διαιρεθέντος (146) τὸ πηλίκον 43000 δηλώσει τὸν ἀριθμὸν τῶν καταλειφθέντων στρατιωτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμῶ τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Α'.

191. Κλασματίαν ἀριθμὸν ἐφ' ὀλοχερῇ πολλαπλασιάσαι.

ΛΤΣΙΣ. Πολλαπλασιάσων ἐπὶ τὸν ὀλοχερῇ τὸν τῷ κλάσματος ἀριθμητὴν, εἰσας αὐτῷ τὸν οἰκεῖον αὐτῷ παρονομασὴν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ὡνήσατό τις 8 πήχεις ὑφάσματος $\frac{3}{4}$ γροσίῃ τὸν πῆχυν· πόσον ἄρα καταβαλεῖ; ἢ ὀκτάκις $\frac{3}{4}$ γροσίῃ· πολλαπλασιασθέντος ἐν 3 ἐπὶ 8 καὶ γραφέντος $\frac{3}{4}$, δῆλον ὅτι καταβαλεῖ 6 γρόσια.

ΔΕΙΞΙΣ. Πολλαπλασιάσαι $\frac{3}{4}$ ἐπὶ 8, λαβεῖν ἐσιν ὀκτάκις $\frac{3}{4}$ (72)· τρία ἄρα τέταρτα, ὀκτάκις ληφθέντα, παράγυσιν 24 τέταρτα· ὁρθῶς ἄρα πεπολλαπλασιάσας μὲν ὁ 3 διὰ 8, ἀπεδόθη δὲ τῷ προκύπτοντι παρονομασῆς ὁ 4. Ο. Ε. Π. εἰ Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Α' πεδόθη μοι κεφάλαιόν τι χρημάτων σὺν ἐτησίῳ τόκῳ, ληφθέντι κατὰ λόγον τῶν 5 πρὸς 100· συναμφοτέρα δὲ εὐρέθησαν γρόσια 8400. Πόσον ἦν ἄρα τὸ κεφάλαιον;

ΛΤΣΙΣ. Τῷ 5 ὄντος $\frac{1}{20}$ τῶν 100, ὁ ἐνιαύσιος τόκος ἔσαι $\frac{1}{20}$ τῆ κεφαλαιῶ· εἰ δὲ $\frac{1}{20}$ τῆ τόνου συνάμα τῷ κεφαλαιῷ (144)· ἔσαι ἄρα τῷ ἀθροίσματος 8400 τὸ $\frac{1}{20}$ ὁ ζητούμενος τόκος· πεπολλαπλασιάσθω τοίνυν $\frac{1}{20}$ ἐπὶ 8400, ὅθεν ἔσαι 420 (191), εἰτ' ἐν γρόσια 400 (146)· ὁ μὲν ἄρα τόκος ἐσιν ἀργύρια 400, τὸ δέ τοι κεφάλαιον 8000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἀπ' ἀθροίσματος, ὅτις ἀποτίσαι ἡθάλετο, ἀφελὼν κατὰ λόγον 4 πρὸς 100, ἀπέτισε γρόσια 4320· πόσον ἂρ' ἦν τὸ ὅλον ἄθροισμα; ὁ 4 ὑπὲρ τῶν 100 εἴτ' ἐν τῷ $\frac{1}{25}$ τῷ ὅλῳ ἀθροίσματος, ἀφαιρεθὲν, ἐποίησε τὸ ἄθροισμα 4320· ἔστιν ἄρα τὸ ἀφαιρεθὲν $\frac{1}{25}$ τῷ καταλειφθέντος, εἴτ' ἐν τῷ 4320 (144)· Τοιγαρὺν πεπολλαπλασιάσθω $\frac{1}{4}$ διὰ 4320, ὅθεν προκύψει 1080 , εἴτ' ἐν 180, ὅς προσεθεῖς τῷ 4320 ἀποδίδωσι τὸ ὅλον 4500, ὅπερ ἔδει ἀποτίσαι.

Πρόβλημα Β'.

192. Ὁλόχερῃ, οἷον τὸν 8, ἐπὶ κλασματίαν, οἷον τὸν $\frac{1}{4}$, πολλαπλασιάσαι.

ΛΤΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω, ὡς καὶ πρότερον, τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ ἐπὶ 8.

ΔΕΙΞΙΣ. Πολλαπλασιάσαι 8 ἐπὶ $\frac{1}{4}$, λαβεῖν ἐς τῷ 8 τὰ $\frac{1}{4}$ (72), ἢ τὸ τετάρτον τῷ τρις 8, ἢ τῷ ὀκτώκισι 3 (85), ὃ περιέσαι πολλαπλασιάσας τὸν τῷ κλάσματος ἀριθμητὴν 3 διὰ τῷ ὀλόχερῳ 8, καὶ λαβῶσι τῷ προκύπτοντος τὸ τέταρτον· ἔσαι τοίνυν $\frac{3}{4}$, ὃ ἐστὶν 6, ὡς ὅτε καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ κλάσμα ἐπῆκται ἐπὶ τὸν 8 ὀλόχερῃ. Ο. Ε. Δ.

193. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Εἰ προτεθεῖη πολλαπλασιάσαι κλάσμα ἐφ' ὀλόχερῃ, ἢ καὶ ἀντιτρόφως, ἀδιάφορον ἔσαι, ὅπερ καὶ περὶ τῶν ὀλόχερων εἴρηται, ὁπότερον τῶν δυοῖν ἀριθμῶν εἰς πολλαπλασιασὴν ἴσῳμεν.

194. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Πολλαπλασιάσαι ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{1}{2}$, λαβεῖν ἐς τῷ ἀριθμῷ τῷ δὲ τὸ ἡμισυ, τετέσι διελεῖν διὰ 2· πολλαπλασιάσαι δὲ διὰ $\frac{1}{2}$, λαβεῖν ἐς τῷ αὐτῷ τὸ τρίτον μέρος, ὃ ταυτόν ἐστι, διελεῖν διὰ 3, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως. Τὸ ἄρα προκύπτει ἐκ, φέρ' εἰπεῖν, 45 γροσ. καὶ $\frac{1}{2}$, τὸ

ἡμισὺ ἐστὶ τῷ 45, ταῦτόν εἶπεν, 45 διαιρεθεὶς διὰ 2· ὅθεν πρόεισι 22 γρόσια καὶ 20 παραδαί.

Πρόβλημα Γ'.

195. Κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάσαι.

ΛΤΣΙΣ. Πολλαπλασιάσον ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν, καὶ παρονομασὴν ἐπὶ παρονομασὴν διατέρω διὰ τῶν τῷ ἐτέρω· καὶ σημείωσον τὴν διαίρεσιν τῷ πρώτῳ προκύπτοντος διὰ τῷ δευτέρῳ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὅλοντι οἰκοδόμημα ἀναβαλλόμενος οἰκοδόμος τις, ὠκοδόμησε κατὰ μῆκος μὲν $\frac{1}{2}$, κατὰ πλάτος δὲ $\frac{2}{3}$ · πόσον ἔν τῷ μισθῷ ἀπενέγκασθαι ἄξιος; τυτὶ δηλώσει ὁ γινόμενος ἐκ $\frac{1}{2}$, καὶ $\frac{2}{3}$ · πολλαπλασιασθεὶς ἔν ὁ 4 ἀριθμητὴς διὰ τῷ 2, παράγει 8· ὁ δὲ 5 παρονομασὴς διὰ τῷ 3, παράγει 15· λήφεται ἔν τῷ μισθῷ τὸ $\frac{8}{15}$, ὅσον ἀμέλει καὶ τῷ ἔργῳ ἐξήνυσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Πολλαπλασιάσαι $\frac{1}{2}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, λαβεῖν ἐστὶ τὸν $\frac{1}{2}$, ὅσαίτις ἔνεσι τῷ $\frac{2}{3}$ ἢ μονὰς (72)· ἀλλὰ τῷ $\frac{2}{3}$ ἔνεσι τῆς μονάδος δύο τριτημόρια· ληπτέον ἄρα τῷ $\frac{1}{2}$ τὰ δύο τριτημόρια, μᾶλλον δὲ ληπτέον δις ἔν τριτημόριον τῷ $\frac{1}{2}$ · εἰάν ἔν ὁ παρονομασὴς 5 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, δηλόν, ὅτι τὸ κλάσμα ὑποτριπλασιάζεται· εἰάν δὲ ὁ ἀριθμητὴς 4 ἐπὶ 2, δηλόν ὅτι λαμβάνονται 2 τῶν ὑποτριπλασίων μερῶν· ἄρα ἀναγκαίως ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομασὴς ἐπὶ παρονομασὴν, πολλαπλασιασθήσεται· ἐστὶ γὰρ δήπερ ὁ $\frac{1}{2}$ δύο τριτημόρια τῷ $\frac{1}{2}$, ὥσπερ τὸ $\frac{1}{3}$ ἐστὶν ἔν τριτημόριον τῷ $\frac{1}{3}$. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα Δ'.

196. Πλείω ἐξῆς κλάσματα πολλαπλασιάσαι.

ΛΤΣΙΣ. Πολλαπλασίασον ἅπαντας τὺς ἀριθμητάς, εἰθ' ἅπαντας τὺς παρονομασάς, καὶ σημείωσον τὴν διαίρεσιν τῷ πρώτῳ διὰ τῷ δευτέρῳ γινομένῳ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Διασχήματός τινος μετρουμένου, τὸ μὲν μήκος αὐτῷ εὐρήται ὀργυῶς $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ πλάτος $\frac{2}{3}$, τὸ δὲ ὕψος $\frac{1}{3}$. ποσημόριον ἄρα ὑπάρχει ἅπαν τὸ διάστημα κυβικῆς ὀργυῶς; Πολλαπλασίασον $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ λέγων δις 3 ποιῶσι 6, ἐξάκις 5 ποιῶσι 30· εἴτα, τετράκις 7 ποιῶσι 28, 28κις 8 ποιῶσι 224· εἰς ἄρα τὸ ζητούμενον ὀργυῶς κυβικῆς $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$.

197. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βυλόμενος δὲ εἰδέναι ὅσον δύναται κυβικῆς ὀργυῶς τὸ $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ πολλαπλασίασον 30 διὰ 373248 (156), ὅθεν παράγονται δάκτυλοι κυβικοὶ 11197440, ὅς περ, διαιρεθεὶς διὰ 224, παρέρξει τὸ περιχόμενον, ἢ τὸ σκερὸν, ὃ ζητεῖται, δακτύλων ὅτι ἔγγισα 49988.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστὶ γὰρ ὁ ἐκ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ γινόμενος πτ (195)· τῷτον δὲ δῆλον ὡς ἐκ ἄλλως, ἢ κατὰ τὰ ὁροβατηθέντα, πολλαπλασιάσαι δεῖ ἐπὶ $\frac{1}{3}$ · ὅθεν προκύπτει $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$.

198. ΟΡΙΣΜΟΣ. Κλάσμα κλάσματος ὄνομάζεται τὰ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{1}{3}$, ἢ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{1}{2}$ κτ., ὡς εἰ εἵπομεν τὸ τῷ $\frac{1}{2}$ τῷ γροσίῳ κτ. $\frac{1}{2}$ γὰρ γροσίῳ εἰσὶν ἐν δεκάριον· δεκαρίῳ δὲ δύο δέκατά εἰσι παράδαι δύο· ὅταν ἔν λέγωμεν τὸ τῷ $\frac{1}{2}$ γροσίῳ, τὸ τοιόνδε καλεῖται Κλάσμα κλάσματος· ἢ ἐν ὀρθῇ ἢ δυνάμει τῶν κλασμάτων τῷδε τῷ εἶδους, εἰς χρῆσιν ἕκει ὁ πολλαπλασιασμός.

Πρόβλημα Ε'.

199. Διορίσαι τὴν δύναμιν τῷ κατὰ τὸ κλάσμα κλάσματος.

ΛΤΣΙΣ. Πολλαπλασίασον θάτερον ἐπὶ θάτερον τὰ κλάσματα.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἡ τῷ Ἀντωνίῳ περιουσία ὥφριλε διανεμηθῆναι κληρονόμοις πέντε ἑαυτῷ ἱμέσιν, ὧν εἷς, ἀγοράσας τὸ δυοῖν ἐτέρων μέρος, κληρεῖται ἐν δίκῃ τῆς περιουσίας $\frac{1}{2}$. ἀλλ' αὐτὸς ἕτος ἀφίησι θανάων ἱεῖς 4· ποσημόριον ἐν ἀποδοθῆσεται ἐκάσῳ; ἢ τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν $\frac{1}{2}$ · πολλαπλασίασον $\frac{1}{2}$ διὰ $\frac{1}{4}$, καὶ τὸ προκύπτον ἐμφανεί σοι τὸ ἐπανήκον ἐκάσῳ μέρος, εἴτ' ἐν $\frac{1}{2}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Λαβεῖν τὸ τέταρτον τῶν $\frac{1}{2}$, λαβεῖν ἔστι $\frac{1}{4}$ τεταρτημοριακίς, εἰ τῷτο θέμις εἶπεν· ἔστι δὲ τῷτο πολλαπλασιάσαι $\frac{1}{2}$ ἐπὶ $\frac{1}{4}$. Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πέτρος, Γάκωβος, καὶ Γιώαννης ἐκτήσαντο ὁμῶς γρόσια 35000· ὁ μὲν Πέτρος ἐδωρήσατο τῷ Παύλῳ τῆς κτήσεως ταύτης τὸ ἡμισυ· ὁ δ' αὖθις Ἀθανασίῳ ἐδωρήσατο τῷ ἡμίσεως τὰ $\frac{1}{2}$ · πόσα ἄρα γρόσια ἀπονεμηθήσονται Ἀθανασίῳ; ἢ τρία τέταρτα ἡμιτριτημορίῃ τῶν ρηθέντων γροσίων· πολλαπλασίασον τοῖνον $\frac{1}{2}$ διὰ $\frac{1}{2}$, τὸ δ' ἐκ τούτων διὰ $\frac{1}{2}$, ὅθεν ἔξεισι $\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{3}{4}$ (179)· ἀπονεμηθήσεται ἄρα τῷ Ἀθανασίῳ $3\frac{3}{4}^{\circ}$, ἢ γρόσια 4375.

Πρόβλημα ε'.

200. Πολλαπλασιάσαι ὀλοχερῇ σὺν κλάσματι ἐφ' ὀλοχερῇ, ἢ ὀλοχερῇ σὺν κλάσματι ἐπὶ κλάσμα.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασίασον ἐξῆς τὸν ὀλοχερῇ καὶ τὸ κλάσμα τῷ πολλαπλασιασέν ἐπὶ τὸν πολλαπλασιασέν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πόσες τιμῶνται 8 πήχεις καὶ $\frac{3}{4}$, 5 γροσίων τιμωμένε ἐκάστῃ πήχεως; 8, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ 5, δίδωσι γρόσια 40· $\frac{3}{4}$, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 5, παρέχεται $\frac{15}{4}$ (191), ἢ γρόσια 3 καὶ $\frac{3}{4}$ · τὸ δ' ὀλικὸν προκύπτον, 43 γρόσια καὶ $\frac{3}{4}$, ἢ 43 γρόσια καὶ παράδαι 30.

ΔΕΙΞΙΣ. Οὕτω γὰρ ποιῶσι τοσάκις λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ὡσάκις ἐνεσι 1 τῷ πολλαπλασιάζοντι (72). Ο.Ε.Δ.

Πρόβλημα Ζ΄.

201. Πολλαπλασιάσαι ὁλοχερῇ σὺν κλάσματι ἐφ' ὁλοχερῇ σὺν κλάσματι.

ΛΤΣΙΣ. Πολλαπλασιάσον πρῶτον ἅπαντα τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν ὁλοχερῇ πολλαπλασιασὴν· εἴτα ἐξ ὑπαρχῆς, ἅπαντα τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸ κλάσμα τῷ πολλαπλασιαστῷ· δεῖξις δὲ ἡ αὐτὴ τῇ προτέρᾳ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Πόση ἐστὶν ἡ περιοχὴ κήπε, ἢ μῆκος μὲν ὀργυαὶ 6 ἢ $\frac{2}{3}$, πλάτος δὲ 4 ἢ $\frac{1}{2}$; Πολλαπλασιάσον τὸν 6 σὺν $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 4, ἐξ οὗ προκύψει 24 σὺν $\frac{2}{3}$ · εἴτα δὲ 6 σὺν $\frac{2}{3}$ ἐπὶ $\frac{1}{2}$, ἐξ ὧν πρόεισι $\frac{1}{2}$, ἢ 4 σὺν $\frac{1}{2}$ · τὰ δὲ δύο κλάσματα $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{1}{2}$ ἀνέχθων ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, προσθεύοντα δὲ ἀποδώσασι $\frac{4}{3}$, ἢ 3 σὺν $\frac{1}{3}$ · τὸ ὅλκον προκύπτων, εἴτ' ἔν τῷ τῷ κήπε ἐμβαδὸν, ἔσαι 31 ὀργυαὶ τετραγωνικαὶ ἢ $\frac{1}{3}$.

202. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Πολὺ δὲ τῷ ἔργῳ ὑπομνηθήσεται, ἀναχθέντων ἐπὶ κλάσματος ὅλημα τῷ τε πολλαπλασιαστῷ, ἢ τῷ πολλαπλασιαστῷ, ὡς ἐν τοῖς ἐχομένοις ὑποδείγμασι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Εἰδέναι τις βέλεται, πόσους φακέλους ὑφασμάτων, ὧν ἕκαστος κυβικῷ ποδὶ ἴσος, δύναται ἐνθῆναι οἰκίσκῳ, ἢ 10 μὲν ὀργυαὶ ἢ $\frac{1}{2}$ τὸ μῆκος, 6 δὲ ἢ $\frac{2}{3}$ τὸ πλάτος, 2 δὲ ἢ $\frac{1}{2}$ τὸ ὕψος;

Α΄. Ζήτησον τὴν τῷ ἐδάφει ἐπιφάνειαν, ἀνάγων τὸ μὲν μῆκος εἰς $\frac{1}{2}$, εἴτ' ἔν $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ πλάτος εἰς $\frac{2}{3}$, ὃ ἐστὶ $\frac{1}{3}$ · ἢ $\frac{1}{3}$ ἐπὶ $\frac{1}{3}$ πολλαπλασιάζων. Ο' ἔν προκύπτων $\frac{1}{9}$.

τετραγωνικῆς ὀργιᾶς (153) ἐμφανει τὴν τῷ ἐδάφους ἐπιφάνειαν· τελευταίον δὲ τὸ ὕψος ἀνήχθω ἐπὶ $\frac{1}{2}$, εἴτ' ἐν γενέσθω $\frac{1}{2}$, ἢ τῷ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπιπολλαπλασιασθέντος ἐπὶ $\frac{1}{2}$, ὁ προκύπτων $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ἐμφανει κυβικὰς ὀργιᾶς· οἱ δὲ δι' ἀναγωγῆς (171) προϊόντες κυβικοὶ πόδες 36006, ἐκδηλῶσι τὸν τῶν φακέλων ἀριθμὸν, ὅς ἐστι τῷ οἰκίσκῳ ἐγκατάθειτο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Διαίρεσεως τῶν Κλασμάτων.

Πρόβλημα Α'.

203. Κλάσμα δι' ὁλοχερῆς διελεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασιάσας τὸν τῷ κλάσματος παρονομασὴν ἐπὶ τὸν ὁλοχερῆ, ἔσται τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Διαίρων ἐν $\frac{2}{3}$ διὰ 4, λέγε, τρίς 4 ποιεῖσι 12· ἢ ἔτω γράφον $\frac{8}{12}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Διαίρειν $\frac{2}{3}$ διὰ 4 ζητεῖν ἐστὶ πᾶσις ὁ 4 ἐμπεριέχεται τῷ $\frac{2}{3}$ (104). Τῆς 1 ἐν δύο τριτημορίων ἐμπεριεχομένων τῷ $\frac{2}{3}$, ὁ 4, περιέχων μονάδας τέσσαρας, ἐκάστης διαιρεμένης εἰς μέρη τρία, περιέξει μέρη αὐτῆς 12· δύο ἐν τῶν δώδεκα, εἰς ἃ διήρηται ὁ 4, ἐμπεριέχονται τῷ $\frac{2}{3}$, εἴτ' ἐν $\frac{2}{3}$ ὁρθῶς ἄρα πολλαπλασιάσαι ὁ 3 παρονομασὴς ἐπὶ τὸν 4 ὁλοχερῆ, μέιναντος τῷ αὐτῷ ἀριθμητῇ 2.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅτε ὁ τῷ κλάσματος ἀριθμητῆς ἀκριβῶς διαιρεθῇται ἔχει δι' ὁλοχερῆς, ἢ διαίρεσις ἀπλυστέρα

ἀποτελείται, ἢ ὅτε πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομασῆς·
ἢ ἔν διαιρεθῇ $\frac{2}{3}$ διὰ 3, διαιρέσει τῷ 6 διὰ 3 ἔσαι $\frac{2}{9}$.

Πρόβλημα Β'.

204. Κλάσμα διὰ κλάσματος διελεῖν.

ΛΤΣΙΣ. Τῷ διαιρέτῃ ἀντιστραφέντος, πολλαπλασιά-
σον δι' αὐτῷ τὸν διαιρετέον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐςω διελεῖν $\frac{2}{3}$ διὰ $\frac{2}{3}$ · ἀντὶ ἔν $\frac{2}{3}$
γεγονότος $\frac{2}{3}$, δι' αὐτῷ πολλαπλασιασθήτω $\frac{2}{3}$ · τὸ δὲ προ-
κύπτει $\frac{4}{9}$, ἢ $1\frac{5}{9}$ (146) ἔσαι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ποσάκις ἔνεσι $\frac{2}{3}$ τῷ $\frac{2}{3}$ (104); τῆς οὖν
μονάδος ἐνόντων αὐτῷ τεσσάρων πεμπτημορίων, τὸ $\frac{2}{3}$, ὑ-
ποτριπλάσιον ὃν τῆς μονάδος, τρεῖς μᾶλλον ἐνέσαι τῷ $\frac{2}{3}$,
ἢ ὅσάκις ἔνεσιν ἡ μονάς· τρεῖς ἔν 4 πέμπτα ἀποτελεῖσι
πέμπτα 12, ἢ $1\frac{2}{3}$ ὁρθῶς ἄρα πολλαπλασιάζεται ὁ τῷ
διαιρέτῃ ἀριθμητῆς, οἷον ὁ 4 ἐπὶ τὸν τῷ διαιρέτῃ παρο-
νομασῆν, οἷον τὸν 3· ἀλλ' εἴπερ $\frac{2}{3}$ ἔνεσι δώδεκα πεμπτη-
μοριάκις τῷ $\frac{2}{3}$ · $\frac{2}{3}$ πάντως ἐνέσονται αὐτῷ ἐξ ἡμισείας·
ὁρθῶς ἄρα $1\frac{2}{3}$ διήρηται διὰ τῷ κατὰ τὸν διαιρέτην ἀριθ-
μητῆς, οἷον τῷ 2, ὅπερ γίνεται, εἰ ὁ παρονομασῆς 5
(203) τῷ $\frac{2}{3}$, εἴτ' ἔν τῷ διαιρέτῃ, πολλαπλασιασθή-
σεται διὰ τῷ 2 ἀριθμητῆς τῷ $\frac{2}{3}$ διαιρέτῃ· ἐντεῦθεν διανοη-
σόμεθα ἔτω· κλάσμα διαιρεθήσεται δι' ἑτέρῃ κλάσματος,
πολλαπλασιάσας πρῶτον τὸν τῷ διαιρέτῃ ἀριθμητῆν ἐπὶ
τὸν τῷ διαιρέτῃ παρονομασῆν· εἴτε τὸν τῷ διαιρέτῃ πα-
ρονομασῆν ἐπὶ τὸν ἀριθμητῆν τῷ διαιρέτῃ· ὁ δὲ ταῦτόν
ἐστιν, εἰ τὸν διαιρέτην ἀναστρέψαντες τὸν πολλαπλασια-
σμὸν ἐκτελέσομεν· συμφέρον δὲ γενήσεται τὸ λεγόμε-
νον, εἰ λάβωμεν διαιρέτεον μὲν τὸν $\frac{2}{3}$, διαιρέτην δὲ τὸ $\frac{2}{3}$ ·
τὸ γὰρ πηλίκον ἐνυπάρχειν ἀνάγκη τῷ διαιρέτῳ, ὅσάκις

ἡ μονὰς τῷ διαιρέτῃ· ἔνests δὲ τῷ διαιρέτῃ τῆς μονάδος τὸ ἡμισυ· τὸ ἄρα ἡμισυ τῷ πηλίκῳ καὶ τῷ $\frac{1}{4}$ ἐνέσαι, ταύτων εἶπεν, ὁ διαιρετέος διπλάσιος ἔσαι τῷ πηλίκῳ· εἰς δὲ $\frac{3}{4}$ διπλὸν τῷ $\frac{1}{4}$, ὡς δῆλον· ἄρα καὶ τὸ πηλίκον ἀνάγκη εἶναι $\frac{3}{4}$ · γίνεται δὲ $\frac{3}{4}$, εἰάν πολλαπλασιάσωμεν $\frac{1}{4}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ · ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα Γ.

205. Διελεῖν ὀλοχερῇ, οἷον τὸν 8, διὰ κλάσματος, οἷον τῷ $\frac{1}{2}$.

ΛΤΣΙΣ. Ἐξηματίσθω ὁ 8 ἔτω $\frac{1}{2}$, καὶ πεπολλαπλασιάσθω $\frac{1}{2}$ ἐπὶ $\frac{1}{2}$ (204), ἔσαι ἔν $\frac{1}{4}$ ἢ 10 $\frac{3}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειπερ ὁ 8 ἐκτεθεῖται ἐν ὀλήματι κλάσματος ἔτω $\frac{1}{2}$, μηδὲως μετακινήσεως αὐτῷ τῆς δυνάμεως· κατ' ἐκεῖνα ἄρα καὶ ἔτος διὰ $\frac{1}{2}$ διαιρεθῆσεται.

Πρόβλημα Δ.

206. Διελεῖν ὀλοχερῇ σὺν κλάσματι δι' ὀλοχερῆς, ἢ ὀλοχερῇ σὺν κλάσματι διὰ κλάσματος, ἢ ὀλοχερῇ δι' ὀλοχερῆς σὺν κλάσματι, ἢ τελευταῖον ὀλοχερῇ σὺν κλάσματι δι' ὀλοχερῆς σὺν κλάσματι.

ΛΤΣΙΣ. Ἐν γένει, τῷ διαιρετέῳ ἢ τῷ διαιρετῇ συγκειμένῳ ἐξ ὀλοχερῆς καὶ κλάσματος, ἅπας ἀνήχθω ἐπὶ κλάσμα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ Α'. Ἰνα διαιρεθῇ $4\frac{1}{2}$ διὰ 5, τῷ 4 εἰς τρίτα μεταποιούμενον, εἰτ' ἔν γινόμενον $\frac{1}{3}$, διηρήσθω $\frac{1}{3}$ διὰ 5 (203)· πηλίκον ἔν ἔσαι $\frac{1}{15}$.

Β'. Ἰνα διαιρεθῇ $6\frac{1}{2}$ διὰ $\frac{2}{3}$, ἀναγομένῳ τῷ 6 ἐπὶ τέταρτα, διηρήσθω $\frac{2}{3}$ διὰ $\frac{2}{3}$ (204), ἐξ οὗ πηλίκον προκύψει $\frac{1}{2}$, ἢ 16 $\frac{1}{2}$.

Γ'. Ἰ"να διαιρεθῇ 4 διὰ $2\frac{1}{2}$, ἀνήχθω 2 ἐπὶ ἑβδομα, καὶ διηρήσθω 4, ἢ $\frac{1}{2}$ διὰ $\frac{1}{2}$. Τὸ δὲ πηλίκον ἔσαι $\frac{1}{2}$.

Δ'. Ἰ"να τελευταῖον διαιρεθῶσι $3\frac{1}{2}$ διὰ $6\frac{1}{2}$, ἀνήχθω ὁ μὲν διαιρετέος ἐπὶ πέμτα, γενόμενος $\frac{1}{2}$ · ὁ δὲ διαιρέτης ἐπὶ ἑβδομα, γεγωνὼς $\frac{1}{2}$ · τέλος δὲ διηρήσθω $\frac{1}{2}$ διὰ $\frac{1}{2}$ · τὸ δέτοι πηλίκον ἔσαι $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς αὐτῶν προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

207. Εἴς ὧν ἔφθημεν περὶ κλασμάτων εἰπόντες, ῥᾶσα κατανοεῖται ὁ λόγος τῶν πράξεων, αἱ γενήσονται ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ὀνομασθέντων ἀριθμῶν (54)· ἀλλ' ἔστι γὰρ πρὸ ἔργου διδάσκεισθαι τὰ περὶ τούτων τῶν ἀριθμῶν, ὅτι μικρὰ πᾶσαι αἱ εἰσθεταὶ συμβαίνειν τῷ κοινωνικῷ βίῳ λογιστικαὶ πράξεις περὶ τὰς συμμιγεῖς ποσότητες εἰσφέρονται.

208. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφὲς δέτοι προσθεῖναι ποσότητας ἑτεροειδεῖς μὴ ἐξεῖναι, ὡς, φέρ' εἰπεῖν, γρόσια, παράδας κτ., ἢ ὀργμας, πόδας κτ., ἀμήχανον γὰρ συνάψαι ὀργμαῖς πόδας, ἢ παράδαις γρόσια· ἀλλὰ μὴδ' ἀφελεῖν ἑτεροειδεῖς ἑτεροειδῶν.

Πρόβλημα.

209. Συνάπτειν ἀλλήλοις ἀριθμοὺς συμμιγεῖς.

ΛΥΣΙΣ. Εἰς τούτο δὴ χρησόμεθα τοῖς ἐξῆς κανόσι.

Α'. Τεθείσθωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς τάξεως αἱ ὁμοειδεῖς ποσότητες, γεγραμμέναι ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω, με-

νάδες ὑπὸ μονάδας κτ., ὡς τὰς εἶδει μείζους ἐν ἀριστερᾷ κείσθαι τῶν ὑσσόνων.

Β'. Εἰλήφθω τὸ ἄθροισμα τῷ ἡττονος εἶδους, καὶ ἂ. νήχθω ἐπὶ τὰς τῷ ἐφεξῆς εἶδους μονάδας· τὸ ἀναχθῆναι μὴ δυνάμενον, ὑπογεγράφθω ὑπὸ τὴν τῷ εἶδους τέττε σήλην.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Καταγραφῆτις δαπάνης πα-
ρίσησι τὲς δὲ τὲς γεγραμμένους γρόσ. παρ. λεπτ.
συμμιγείς ἀριθμοὺς, ὧν ζητεῖται 135 17 5
τὸ ἄθροισμα· συνήφθωσαν οὖν 8 0. 11
πρῶτον τὰ λεπτά, ὧν τὸ 54 ἂ. 1250 15 4
θροισμα περιέχει παράδας 18 καὶ 45 8 9
λεπτὸν 0· γεγράφθω τοίνυν 0 700 0 7
ὑπὸ τὰ λεπτά, καὶ μετακεκο- 7099 18 0
μίσθων 18 ἐπὶ τὸν τῶν παράδων 355 7 8
χώρον· ἕτος δὲ συναφθεῖς, δι- 40 12 10
δωσι παράδας 95· οἱ, ἀναχθέντες ἐπὶ γρόσια, ποιῶσι 2
γρόσ. καὶ παρ. 15. γεγράφθω τοιγαρὺν 15 ὑπὸ τὲς πα-
ράδας, καὶ μεταβιβασθήτωσαν γρόσ. 2. ἐν τῷ χώρῳ τῶν
γροσίων, ἂ. συνήφθωσαν καὶ ταῦτα, ὡς ἔθος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ο' ταύτης τῆς πράξεως λόγος ἐστίν, ὅτι
54 λεπτά εἰσι $\frac{1}{2}$, ἢ παράδαι 18 (167), 95 δὲ παρά-
δαι ἀποτελεῦσιν $\frac{1}{2}$, εἰτ' ἐν 2 γρόσ. καὶ παράδας 15· ὁ
αὐτὸς δὲ λόγος ἐφαρμοσθῆναι ἔχει καὶ τοῖς ἄλλοις εἶδεσι
τῶν συμμιγῶν ποσοτήτων.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Δεδαπάνηται φιορ. σαυρ.
ἐν οἰκοδομῇ τινι τὰ ὁρώμενα. Τὸ ἐν ἀθροι- 240 50
σμα τῶν σαυροφόρων, εἰτ' ἐν 164, διαι- 6 35
ρεθὲν διὰ 60 (169), δίδωσι φιορ. 2 καὶ 317 10
41 σαυροφ.· γεγράφθω τοίνυν 41 ὑπὸ 58 40
τὰ σαυροφόρα, 2 δὲ μετήχθων ἐπὶ τὸν 3 26
χώρον τῶν φιορινίων, ἂ. καὶ αὐτὰ, ὡς ἔθος, συνήφθωσαν. 626 41

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Οἰκοδόμημά τι συνέση ἐκ τῶν ὑπερρωμένων ἐνταῦθα διαφορῶν ποσῶν τῆς τειχοποιίας, ὀργυῶν ἀμέλει, ποδῶν, ἢ δακτύλων· τὸ ἐν τῶν δακτύλων ἄθροισμά ἐστι 296, ὃ διαιρεθὲν διὰ 144 (155) διδωσι, πόδας μὲν 2, δακτύλους δὲ 8· ὀρ. ποδ. δακτ. γεγράφθω ἐν 8 ὑπὸ τῆς δακτύλους, 3 25 120 μετενεχθέντων τῶν 2 ποδῶν ἐπὶ τὸν 7 32 87 τῶν ποδῶν χώρον. Τὸ δ' ἄθροισμα τῶν 2 15 54 ποδῶν συμποσῆται 94, οἱ διαιρεθέντες διὰ 36 (153) παρέχουσιν ὀργυὰς 19 22 8 μὲν 2 πόδας δ' 22· ὑπογραφέντος ἰδὲ 22, μετήχθω ὁ 2 ἐπὶ τὴν τῶν ὀργυῶν τάξιν.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Καίτοι τῆς τοιχοποιίας ἐκ τριῶν συνεσώσης διαστάσεων, δηλονότι μήκους, πλάτους, ἢ βάθους, ἢ σερεᾶς παρὰ τῷτο ἔσης, δυνάμεθα τοῖς οἰκοδομήσι συνθεσθαι κατὰ λόγον τὸν τῆς ἐπιφανείας.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἐξωρύξατό τις ἐκ μεταλλεύεσθαι ἀργύρου ἀσήμῃ τὸν ᾧδὶ ἐκδη- ὀκάδ. λίτρ. δραχ. λόμενον· τὸ τῶν δραχμῶν ἄθροισμά 5 6 7 ἐστὶν 20· ὑπογραφήτωσαν ἐν 20. τὸ 0 5 6 δὲ τῶν λιτρῶν, 24, συγκροτῆν ὀκά- 3 4 3 δας 8· τὸ δέτοι τῶν ὀκάδων ἐστὶν 12 4 9 4 αἱ σὺν ταῖς 8 ἀποτελεῖσιν 20. 20 0 20

Πρόβλημα.

210. Ἀφελεῖν ἀριθμὸν συμμιγῇ ἀφ' ἑτέρου τοιούτου.

ΛΤΣΙΣ Α'. Γράψον τὸν ἥττω ὑπὸ τὸν μείζονα καθ' ἣν ᾧδὶ ὀρᾶς τάξιν.

Β'. Ἐκαστον κατώτερον εἶδος τῷ ἀνωτέρῳ ἀφελε,

94 ΠΕΡΙ ΣΤΜ. ΑΡΙΘ. ΠΡΟΣΘ. ΚΑΙ ΑΦΑΙΡ.

δανειζόμενος, εἰ δέοι, μονάδα ἐκ τῆ ἐγγύς μείζονος πρὸς ἀριστερὰν εἶδους, καὶ μεταφέρων ἐπὶ τὸ ἥττον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κωνσταντῖνος ὁ Κῦμας ἐγεννήθη τῇ 26 Σεπτεμβρίου τῷ 1777· πόσαν ἔν ἔτος ἄγει νυν, εἴτ' ἐν τῇ 23 Οκτωβρίου τῷ 1806; δεῖ ἔν ἀφελεῖν 1777 ἔτη, μῆνας 8, καὶ ἡμέρας 26, ἀπ' ἐνιαυτῶν 1806, μηνῶν 9, ἡμερῶν 23· δανεισάμενος ἔν ἔτη μὴν. ἡμερ. μῆνα ἓνα, καὶ εἰς ἡμέρας 30 ἀναλύ. 1806 8 53
 σας, καὶ ταύτας ταῖς 23 συνάψας, 1777 8 26
 ἀφαιρῶ ἀφ' ἡμερῶν 53 τὰς 26, ὑπο- 28 0 27
 γράφων τὴν 27 διαφορὰν· ἀφαιρῶν δ' ὡσαύτως καὶ τὸς μῆ-
 νας, καὶ ἐνιαυτὸς, εὐρίσκω τὸν Κωνσταντῖνον ἄγοντα ἤδη ἔτος 28, καὶ ἡμέρας 27.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Εἴξ ὧν ἔχοι τις ἀπολαβεῖν γρο-
 σίων μὲν 458, παρὰδων δὲ 7, ἔλαβε γρόσ. παρὰδ.
 γρόσια μὲν 300, παρὰδας δὲ 18, πό. 458 7
 σα ἔν λείπεται λαβεῖν; γρόσιον ἔν, λη- 300 18
 φθὲν ἐκ τῆ 8, ἐμφαίνει παρὰδας 40, οἷ 157 29
 συνάμα τοῖς 7 ἀποτελεῖσι 47 κτ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Εἴξ ἀγρῶ τινος, περιέχοντος ὀρ-
 γιὰς μὲν τετραγωνικάς 1500, πόδας δὲ τοιαύτας 18, ὠνή-
 σατό τις μέρος ὀργιῶν 645 καὶ ποδῶν 25· ὀργ. πόδ.
 πόση εἴς τῆ χωρίε ἡ περιλειφθεῖσα περι- 1500 18
 οχή; προσλαβὼν ὀργιὰν ἐμφαίνουσιν πό. 645 25
 δας 36 (155) καὶ συνάψας τοῖς 18, ἀφε- 854 29
 λε ἀπὸ 54 τὸν 25, ἀπὸ δὲ 1499 τὸν 645, καὶ ἔξεις,
 ὡς ὀρῶς, τὸ ζητούμενον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συμμιγῶν
ἀριθμῶν.

Πρόβλημα.

211. Ποσότητος συμμειγείς πολλαπλασιάζειν.

ΛΤΣΙΣ. Πρὸς ἐπίλυσιν τῆδε τῆ προβλήματος δυσὶ
χρῶνται μεθόδοις, ὧν ἡ μὲν τὸ πρῶτον ἀνάγει τὰς ποσό-
τητας εἰς ἥττονα εἶδη, εἰδ' ὅτω πολλαπλασιάζειν παρα-
κελεύεται θάτερον τῶν κλασμάτων ἐπὶ θάτερον· ἡ δ'
ἐτέρα καλεῖται Πολλαπλασιασμός διὰ τῶν
συμμέτρων μερῶν· ἢ ἡ μὲν πρώτη εἰς γενικωτέρα,
ἀσφαλεστέρα τε ἐπὶ τῆς πράξεως, ἢ οἷον ἐφαρμογή τις
τῶν ἀποδειχθέντων ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν κλα-
σμάτων, ἡ δὲ, ὡς βραχύτερον διαπεραιωμένη, αἰετὶ μικρῷ
προτιμᾶται τῆς πρώτης· τέτων ὅν τῶν μεθόδων, καίτοι
ἀλλήλων διαφερεσῶν, ἀρίστη ἡ ἐτέρα θάτερα καθίσταται
βάσανος· ὁ γάρ τοι λογιστὴς δεὸς ἅπαν ἀπώσεται πόρρω
τῆ μὴ ἀκριβῶς γενέσθαι τὸν πολλαπλασιασμόν, θάτερα
χρησάμενος· ἀλλὰ διαλευκανῆμεν γὰρ ἑκατέραν διὰ τῶν
ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων.

212. Α'. ΜΕΘΟΔΟΣ. Ἀνάγαγε πάντα τὸν πολ-
λαπλασιασέον ἐφ' ἓν κλάσμα, ὡσάυτως δὲ ἢ ἅπαντα
τὸν πολλαπλασιαζήν· εἶτα πολλαπλασιάσον τὰ κλάσμα-
τα διὰ θάτερου θάτερον, ἢ τὸ προκύπτον ἀνάγαγε ἐφ'
ὀλοχρεῇ ἀριθμόν.

213. Β'. ΜΕΘΟΔΟΣ. Πολλαπλασιάσας ὀλοχε-
ρῇ ἐφ' ὀλοχρεῇ, λαβὲ ὑπὲρ τῆς ἐκάστου κλάσματος τῷ
πολλαπλασιασῷ δυνάμει τὸ τῷ πολλαπλασιασέν, ὃ

αὐτῷ ἐπανήκει, καὶ σύναψαν πάσας ταύτας τὰς εὐρεθείσας ποσότητας.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ὅσον τιμῶνται 5 καὶ $\frac{1}{4}$ πήχαις ὑφάσματος κατὰ λόγον τῆς πήχεως πρὸς 3 γρόσια καὶ 10 παράδας.

Διὰ τῆς Α'. Μεθόδου. α'. Ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀναχθεὶς ἐπὶ τέταρτα, καθίσταται $\frac{5}{4}$. ὁ δὲ πολλαπλασιαστής, ἀναχθεὶς ἐπὶ παράδας, εἴτ' ἔν τεσσαρακοσά, γίνε-
ται $\frac{1}{4}$, εἴτ' ἔν $\frac{1}{4}$. β'. πολλαπλασιασθεὶς ὁ $\frac{5}{4}$ ἐπὶ $\frac{1}{4}$, δίδωσι $\frac{5}{16}$. γ'. τὸ $\frac{5}{16}$, ἀναχθέν ἐφ' ὀλοχερῇ, ἀ-
ποτελεῖ γρόσια 18, λειπομένων 11, ἃ περιέχουσιν πα-
ράδας 440. $\frac{5}{16}$ δὲ ἐστὶν ἴσα παράδαις 27 καὶ $\frac{1}{2}$, εἴτ' ἔν
καὶ λεπτά $1\frac{1}{2}$. Τὸ ἔν ὅλον προκύπτει εἶναι 18 γρόσια,
27 παράδαι, καὶ λεπτά $1\frac{1}{2}$.

Διὰ τῆς Β'. Μεθόδου. Προδηλόν, ὅτι 5 πή-
χαις τιμῶνται γροσίων πεντάκις 3, εἴτ' ἔν 15, ἃ σεση-
μειώσθωσαν· πεντάκις δὲ 10 παράδαι ἀποτελεῦσιν 1 γρό-
σιον καὶ 10 παράδας, ἃ καὶ 3 πήχ. $\frac{1}{4}$ | 3 γροσ. 10 παρ.
αὐτὰ σημειώσθωσαν. Περὶ δὲ τῶν γροσ. παρ. λεπτ.
 $\frac{1}{4}$ πήχ. εἰλήφθω α'. ἡ δύναμις τῆς 15 0 0
ἡμιπήχης· ἐπεὶ ἔν ὁ πήχυς τιμᾶ- 1 10 0
ται γροσ. 3. παράδ. 10, τὸ ἡμι- 1 25 0
πήχιον τιμηθήσεται γροσ. 1. παρ. 0 32 $1\frac{1}{2}$
25, ἅπερ ὑπογεγράφθωσαν. Τὸ 18 27 $1\frac{1}{2}$
δὲ περιλειπόμενον τέταρτον τιμηθήσεται ἡμίσεως, ἡ ὅ-
σον τετίμηται τὸ ἡμιπήχιον, ὃ ἐστὶν παράδων 32 καὶ λεπτῶν
 $1\frac{1}{2}$. Τέλος δὲ, συμποσώθέντες ἅπαντες ἔτσι οἱ ἀριθμοὶ,
εὐρεθήσονται, ὡς καὶ πρὶν, 18 γρόσια, 27 παράδαι, καὶ
λεπτά $1\frac{1}{2}$.

Δεῖξις τῆς πρώτης Μεθόδου. Ἐστὶ γὰρ ἄν.

τη ἐφαρμογή τῆς ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἀποδεδειγμένης εἰς πολλαπλασιασμὸν θεωρίας (200, 201)· ναὶ μὲν, καὶ ἀναγωγή αὐτῶν (171).

Δειξίς τῆς δευτέρας Μεθόδου. Λαμβάνεται γὰρ ἕκασον τῶν διαφορῶν εἰδῶν τῷ πολλαπλασιασέῳ, ὁσάκις ἢ παρῶσα μονὰς ἐμπεριλαμβάνεται τῷ πολλαπλασιασῇ ἔντε τοῖς ὀλοχερέσι, καὶ τοῖς κλασματίαις τῶν ἀριθμῶν· ὁ ἄρα προκύπτων τοσάκις περιέξει τὸν πολλαπλασιασέον, ὁσάκις τὴν μονάδα ὁ πολλαπλασιάζων (74).
Ο. Ε. Δ.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐν Παρίσις ὠνήσατό τις 5 λίτρας καὶ 6 ἔγγιαις ὠνὲς κατὰ λόγον λιτρῶν νομίσματος 2 καὶ 7 σολδίων πρὸς τὴν λίτραν τῷ βάρει· πόση ἔν ἐστιν ἡ ὅλη τιμή;

Α'. Οἱ πολλαπλασιασέος, εἴτ' ἔν τὸ 5 λιτρῶν, 6 ἔγγιων, βάρος ἀνήχθω ἐπὶ ἔγγιαις, εἴτ' ἔν δεκαεκτημόρια (170)· καὶ ἔσονται $\frac{7}{12}$ · ὁ δὲ πολλαπλασιασῆς, ἀναχθεὶς ἐπὶ σολδία, εἴτ' ἔν εἰκοσημόρια, γενήσεται $\frac{47}{12}$ · πολλαπλασιασθεὶς δὲ ὁ $\frac{47}{12}$ ἐπὶ $\frac{1}{12}$, παράγει προκύπτων $\frac{47}{144}$, ὅπερ, ἐφ' ὀλοχερῇ ἀναχθέν, δίδωσι πρῶτον 12 λίτρας, λειπομένων 202, αἵτινες πολλαπλασιασμῷ διὰ 20 γίνονται 4040 σολδία· 4040 σολδία, διαιρεθέντα διὰ δηναρίων 320, προάγει 12 σολ. λειπομένων 200 σολ., αἵτινα πολλαπλασιασμῷ διὰ 12 δηναρίων, ἀποτελεῦνται 2400· ἔτος δὲ, διαιρεθεὶς διὰ 320, προάγει 7 δηνάρια, λειπομένων 160, αἵτινα πολλαπλασιασμῷ διὰ 12 γίνονται λεπτὰ 1920· ἔτος δὲ, διαιρεθεὶς διὰ 320, προάγει λεπτὰ 6· ἡ ἄρα ὅλη τιμή ἐστὶ 12 λίτρ. 12 σολδ. 7 δηναρ. 6 λεπτὰ.

Β'. Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Πρῶτον δὲ 5

λίτραι τῷ πολλαπλασιασέν τιμῶνται πεντάκις 2 λίτρων,
εἴτ' ἐν 10· εἴτα πεντάκις 7 σολδία ἀποτελεῖσι 35, ἢ λί-
τραν μίαν καὶ 15 σολ. 5 λίτρ. 6 ὑγγ. | 2 λίτρ. 700 λεπ.
διά· περὶ δὲ τῶν 6 ὑγγίων, λίτρ. σολ. δην. λεω.
ἐπεὶ περὶ ὁ 6 ἐκ ἑσὶ μέρος σύμ- 10 0 0 0
μετρον τῷ 16, εἴτ' ἐν τῆς ἐν 1 15 0 0
σαβμῶ λίτρας· εἰλήφθω πρῶτον 0 11 9 0
ἡ τιμὴ τῶν 4 ὑγγίων, αἱ εἰσι 0 5 10 6

τὸ τῆς λίτρας τέταρτον, ὃ τι 12 12 7 6
μνησεται τῷ τετάρτῳ τῆς τιμῆς λίτρας μιᾶς, καὶ δὴ τῷ
τετάρτῳ νομίσματος λίτρων 2, σολδίων 7, ταῦτόν εἰπείν
11 σολδίων καὶ 9 δηνარიών· αἱ δὲ περιλειφθεῖσαι ὑγγίαι
2 τιμηθήσονται τῷ ἡμίσεως, ὃ εἵρομεν ὑπὲρ ὑγγίων 4,
ὃ ἐσὶ τὸ ἡμισυ 11 σολδίων καὶ 9 δηνარიών, ταυτὸν εἰπείν,
5 σολδία 10 δηνάρια, καὶ 6 λεωτά· προσθέσει ἐν εὐρε-
θήρεται τὸ αὐτὸ τῷ φθάσαντι ἄθροισμα.

214. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειωτέον δὲ τοῖς πρωτοπει-
ροῖς, ὡς ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ὡς τὰ πολλὰ παραμελεῦνται
κλάσματα, ὧν ἡ δύναμις ἡττων καὶ τῶν ἐλαχίστων ἐστὶ νομι-
σμάτων, οἷα ἡμῖν ἔσυνήνησεν ἐπὶ τῶν προλαβόντων ὑ-
ποδειγμάτων· τὰ τοιαῦτα γὰρ τοι μικρὰ δεῖν ἀνεπαίσθη-
τα, καὶ ὕδαμίαν ἐπιφέρει τοῖς νομίσμασιν ἐλάττωσιν, οἷαν
ἔχειν καὶ τινα ἐπαισθητὸν λόγον· εἰ δ' ἡμεῖς ἐπί τε τῶν
προλαβόντων, καὶ δὴ καὶ τῶν ἐπομένων ὑποδειγμάτων καὶ ἐπὶ
τὰ λεπτά ἐφικνύμεθα, ταῦτ' ἅπαν ἡμῖν ξυντελεῖ πρὸς ἀ-
κρίβειαν τῷ λογισμῷ πλείω, ναὶ μὴν καὶ ἵνα αἱ διτταὶ μέ-
θοδοι, ἴσα ἐκάστη προάγῃσιν ἀθροίσματα, καὶ ἴσα ἀλλήλοις
δυνάμεναι τελεωτάτα ἐλεγχθῶσι.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Εἶδέναι τις βέλεται τὴν τιμὴν

20 ὀκάδων, 100 δραχμῶν, ὥν τε κατὰ λόγον τῆς ὁκῆς πρὸς 10 γρόσια, καὶ παράδας 8.

Ὅλος μὲν ὁ πολλαπλασιασέος, ἀναχθεὶς ἐπὶ δραχμᾶς, ποιεῖ $\frac{2100}{4}$, ἢ $\frac{525}{1}$ · ὁ δὲ πολλαπλασιασῆς, ἀναχθεὶς ἐπὶ παράδας, ποιεῖ $\frac{408}{5}$, ἢ $\frac{816}{10}$ · ἐκ δὲ τῶν $\frac{525}{1}$, καὶ $\frac{816}{10}$ γίνεται $\frac{1128}{2}$ · ὅς ἀναχθεὶς ἐφ' ὀλοαχερῇ ποιεῖ γρόσια 206 καὶ παράδας 22.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Δεκάκις 20 ποι. ἔσι γρόσια 200, ἃ γεγράφθωσαν· 8 παράδαι, τὸ πέμπτον ὄντες τῆ γροσίᾳ, ἀποδώσουσι τὸ πέμπτον τῶν 20, εἴτ' ἔν γρόσια 4, ἃ καὶ αὐ. 20 ὁκ. 100 δρ. | 10 γρόσ. 8 παρ. τὰ γεγράφθωσαν· 100 δὲ δραχμαὶ,

γρόσ.	παράδ.
200	0
4	0
2	22
206	22

 τεταρτημόριον ἔσαι οὐκᾶς, παρέξουσιν τεταρτημόριον τῆς τιμῆς, εἴτ' ἔν γρόσια 2, παράδας 22, ἃ τέλος καὶ αὐ. τὰ ὑποσρωθήτωσαν· τὸ ἔν ὅλον ἔσαι γρόσια 206 καὶ παράδαι 22, ὥς καὶ διὰ τῆς πρώτης εὐρηται μεθόδου.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ὡνήσατό τις ἄργυρον, ἔλκοντα βάρος 10 λίτρ. 10 ἐγγιῶν, καὶ 1 δραχμῆς, κατὰ λόγον τῆς λίτρας πρὸς 2 φιορίνια, 15 γροσίκια, 2 σαυροφόρα· πόση ἂρ' ἔσιν ὅλη ἡ τιμή;

Ὁ μὲν πολλαπλασιασέος, ἀχθεὶς ἐπὶ δραχμᾶς, γίνεται $\frac{1361}{128}$ (157)· ὁ δὲ πολλαπλασιασῆς, ἀχθεὶς ἐπὶ σαυροφόρα, γίνεται 167 μετὰ παρονομασῇ τῇ 60 (164)· τὸ δ' ἐκ τούτων προκύπτει ἐς $\frac{27738}{1}$ · τούτο δὲ, ἀναχθεὶς ἐφ' ὀλοαχερῇ, τῷ μὲν πρώτῳ λειψάνῳ πολλαπλασιασθέντος διὰ 20, τῷ δὲ δευτέρῳ διὰ 3, ἢ ὅλη τῇ ἄργύρῳ τιμῇ εὐρεθήσεται 29 φιορίνια, 11 γροσίκια, 2 σαυροφ. καταλειπομένα τῇ κλάσματος $\frac{328}{1000}$ σαυροφ.

Διὰ τῶν συμμετρων μερῶν· 2 φορίνια,
πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10 σαθμικὰς λίτρας, ἀποδιδόασιν
20 φορίνια. Περὶ 10 λίτρ. 10 ἔγγ. ἢ 1 δραχ. | 2 φαρ.
δὲ τῶν 15 γροσ. 15 γροσ. 2 σαυροφ.

σικίων, εἰ μὲν ἰσοδυναμῶν 1 φο-	φορ.	γροσ.	κράϊτ.
ρινίῳ, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ	20	0	0
10 λίτρας σαθμῆ, παρέχον	5	0	0
ἂν φορίνια 10· εἰς μὲν τοὶ $\frac{1}{2}$	2	10	0
φορινίῳ ἐνός· ἰσοδυναμῶσιν ἄρα	0	6	2
$\frac{1}{2}$ τῶν 10 φορινίων· $\frac{1}{2}$ δὲ, ἢ τὸ	1	7	$2\frac{1}{2}$
ἥμισυ τῶν 10 φορινίων ἐστὶ φορ.	0	6	$2\frac{1}{2}$
5, ἃ γεγράφθωσαν· ἐν δὲ τέ.	0	0	$1\frac{1}{4}$
ταρτον ἔσαι τὸ ἥμισυ τῷ ἡμί.	0	0	$0\frac{1}{2}$
σεως, εἴτ' ἔν 2 φορ. ἢ 10 γροσίκια, ἃ γεγράφθωσαν·	29	11	$2\frac{1}{2}$
2 δὲ σαυροφ. πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10 λίτρας, ποιῶσι			
σαυροφ. 20, ἢ γροσ. 6 ἢ 2 σαυροφ., ἃ ἢ τὰντα γε-			
γράφθωσαν.			

Μέτιμεν ἤδη ἐπὶ τὸν δεύτερον τῷ πολλαπλασιασμῷ
ὅρον τῶν ἔγγιων· 8 ἔν ἔγγιαι τιμηθήσονται ἡμίσεως
τῆς τιμῆς τῆς λίτρας, εἴτ' ἔν ἡμίσεως τῶν 2 φορινίων,
15 γροσ., 2 σαυροφ., εἴτ' ἔν 1 φορ. 7 γροσ. ἢ $\frac{1}{2}$ · αἱ
δύω δὲ περιλειφθεῖσαι ἔγγιαι τιμηθήσονται $\frac{1}{4}$ τῷ ἁρτίως
ὑπὲρ 8 εὐρημένῃ ἔγγιων, εἴτ' ἔν 6 γροσ. 2 σαυροφ. ἢ
 $\frac{3}{4}$ σὺν $\frac{1}{8}$, ἢ $\frac{7}{8}$ (187).

Μεταβαίνομεν τέλος ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τῷ πολλαπλα-
σιασμῷ· 1 δραχμὴ τιμηθήσεται $\frac{1}{8}$ ἔγγ., εἴτ' ἔν $\frac{1}{8}$ τῷ ἁρτί
περὶ 2 ἔγγ. εὐρημένῃ, ὃ ἐστὶ 1 σαυροφ. ἢ $\frac{1}{4}$ σὺν $\frac{1}{8}$ σαυροφ.
(203)· τὰ δὲ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ ἀναχθέντα ἐπὶ $\frac{1}{8}$ (187), ἢ
συναφθέντα τῷ $\frac{1}{8}$ (186) ποιῶσι 1 σαυροφ. σὺν καταλοί-
πῳ $\frac{3}{8}$, ἴσον τῷ $\frac{5}{8}$ τῷ πρὸ μικρῷ ἐπὶ τῆς πρώτης με-

θόδα εὐρεθέντι· συνάψει δὲ ἡ ὅλη τιμὴ εὐρεθήσεται ἴση τῇ προεϋρεθείσῃ.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Ἡ γορασέτις ἐν Κωνσταντινουπόλει 6 πήχεις ἢ $\frac{3}{4}$ ὑφάσματος, πήχυν ἑκάστων 8 γροσίων ἢ παραδῶν 35.

Ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀναχθεὶς ἐπὶ τρίτα, γίνε-
ται $\frac{2}{3}$ · ὁ πολλαπλασιαστής, ἀναχθεὶς ἐπὶ παράδας, καθί-
σεται $\frac{1}{2}$ · τὸ δ' ἐκ τούτων προκύπτει $\frac{1}{3}$, ἢ $\frac{1}{2}$ ἴσον
59 γρ. 6 παρ. ἢ $\frac{3}{4}$ (146).

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 8 ἀργύρια
πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 6, 6 πήχ. $\frac{3}{4}$ | 8 γροσ. 35 παρ.
ποιῶσιν ἀργύρια 48· οἱ 38 παράδαι εἰ ἡ-
σαν 40 εἴτ' ἔν 1, πολλαπλασιασθέν ἄν
ἐν γρόσιον ἐπὶ 6 πήχεις, παρεῖχε γρόσια
6· νῦν δὲ τὸ μὲν ἐξ 20 παρ. δίδωσι τὸ
ἡμισυ τῶν 6, εἴτ' ἔν 3· οἱ δὲ 10 τῶν
λειφθέντων 15 ἀποδώσει τὸ ἡμισυ τῶν
ἄρτι περὶ 20 εὐρημένον, εἴτ' ἔν 1 γρό-
σιον ἢ παρ. 20· τέλος δὲ παρ. 5 ἀπο-
δώσει τῶν περὶ 20 ἡμίσεως τὸ ἡμισυ.

γροσ.	παρ.
48	0
3	0
1	20
0	30
2	38 $\frac{1}{2}$
2	38 $\frac{1}{2}$
59	0 $\frac{3}{4}$

Μέτιμιν ἤδη ἐπὶ τὰ $\frac{3}{4}$ πήχεως· $\frac{3}{4}$ πήχ. ἀποδώσει
τὸ τρίτον τῆς τιμῆς ἐνὸς πήχεως, εἴτ' ἔν τὸ τρίτον γροσ.
8 ἢ παρ. 35, ὃ ἐστὶ 2 γρόσ. ἢ παρ. 38 $\frac{1}{2}$. Δις ἔν γρα-
φέντος τῶ ἀριθμῷ τούτῳ, ἀποληφθήσεται ἢ $\frac{3}{4}$ πήχ. ἢ τιμὴ.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τοῖς οἰκοδομήμασι, καίτοι τριῶν
εὐμοιρῶσι διαστάσεων, ἀμέλειται μήκος, πλάτος, ἢ βά-
θος, λογισθήσεται μόνον τὸ μήκος, ἅτε δὴ τῶν
ἄλλων δύοιν οἷον πλάτος ἢ βάθος συνηνωμένων τῶ μήκει
κατὰ συνθήκην· τούτων ἔν δι' ὀργῶν φέρ' εἶπεν, ποδῶν,
δακτύλων κτ. ἐκδηλωμένων, ἢ ποδὸς δύναμις ἔσαι $\frac{1}{2}$ ὀρ-

γυῖας, ἡ δὲ τῷ δακτύλῳ $\frac{1}{2}$ ποδὸς κτ.· κατὰ δὲ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν πολλαπλασιασθήσεται τὸ ἐπόμενον ὑποδείγμα. Ἐπὶ μὲν τοι ὑποδειγμάτων ἄλλων τῶν ἐν ἐπιφανείαις, ἡ ποδὸς δύναμις ἔσαι $\frac{1}{32}$ ὀργυῖας· ἡ δὲ δακτύλῳ $\frac{1}{144}$ τῆς τῷ ποδὸς, ἢ ἐξῆς ἕτω (155)· ἐν δὲ τοῖς σερραῖς ὁ πῦς ἔσαι $\frac{1}{128}$ ὀργυῖας· ὁ δὲ δάκτυλος $\frac{1}{72}$ ποδὸς κτ. (156).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Πόσον ἄρα προσήκει ἀποδῆναι ὑπὲρ ὀργ. 2, ποδ. 3, ἢ δάκτ. 5 τοιχοποιίας, κατὰ λόγον γροσ. 2 παραδ. 10 ἢ λεπ. 2 πρὸς τὴν ὀργυῖαν;

Ὅ μὲν πολλαπλασιασέος, ἀχθεῖς ἐπὶ δακτύλους, γίνεται $\frac{5}{2}$, τῷ δακτύλῳ ὄντος $\frac{1}{2}$ ὀργυῖας· ὁ δὲ πολλαπλασιασῆς, ἀχθεῖς ἐπὶ λεπτά, γίνεται 272· τῷ δὲ λεπτῷ $\frac{1}{2}$ ὄντος γροσίῳ, ἔσαι ὁ πολλαπλασιασῆς $\frac{1}{2}$ · τὸ ἐκ τούτων γινόμενον $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ εὐρίσκεται ἴσον γροσ. 5, παραδαῖς 32, λεπτ. 2 ἢ $\frac{1}{4}$, εἴτ' ἔν ἢ $\frac{1}{2}$.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 2 ὀργυῖαι δις ληφθεῖσαι, ποιῶσι γροσ. 4· περὶ δὲ τῶν 10 παραδ. 2 δεκάκις 2 ὀρ. 3 πόδ. 5 δακτ. | 2 γροσ. 10 παρ. 2 λεπ. ληφθεῖσαι, ποιῶσι παραδ. 20, οἱ γεγράφωσαν· ὡσαύτως περὶ τῶν λεπτῶν, 2 δις ποιῶσι λεπ. 4, ἃ ἢ αὐτὰ γεγράφω· μέτιμεν νῦν ἐπὶ τὸν δευτέρον τῷ πολλαπλασιασῇ ὅρον· 3 ἔν ποδες, ὀργυῖας ἡμισυ ὄντες, τιμηθήσονται ἡμίσεως τῆς ὀργυῖας, εἴτ' ἔν ἡμίσεως τῶν 2 γροσ. 10 παραδ. 2 λεπ. ὃ ἐς γροσ. 1 παραδ. 5 λεπ. 1 ἅπαντα γεγράφωσαν· ἕνεκα δὲ τῶν 5 δακτ. εἰλήφωσαν πρῶτον 4, οἵτινες ὄντες $\frac{1}{2}$ ποδὸς, ταυτὸν εἶπειν $\frac{1}{2}$ τριῶν ποδῶν, παρέχουσιν $\frac{1}{2}$ τῷ ἄρτι

γρο.	παρ.	λεπ.
4	20	4
1	5	1
0	5	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$
5	32	$2\frac{1}{2}$

ὑπὲρ τριῶν ποδῶν εὐρημένον, ὅπερ ἐστὶ 5 παρ. καὶ λεπ. $\frac{2}{3}$ · ὁ δὲ γε περιλειφθεὶς πῶς τιμηθήσεται τεταρτημορίῳ τῷ ἑναγχοῦς εὐρημένον ὑπὲρ δακτύλων 4, εἴτ' ἔν παρ. 1 καὶ λεπτῷ $\frac{2}{3}$ · τὸ δ' ὀλικὸν ἀθροισμα εἶναι 3 γρόστ. παραδ. 32 καὶ λεπτὰ 2 καὶ $\frac{1}{2}$ λεπ. εἴτ' ἔν $\frac{2}{3}$ (183).

Περὶ τῷ ἐν ὀργυιαῖς πολλαπλασιασμῷ.

216. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἡ γράσέ τις χωρίον πρὸς οἶκον ἐν οἴκῳ, περιεκτικὸν ὀργυῶν μὲν τετραγωνικῶν 50, 24 δὲ ποδῶν, 12 δὲ δακτύλων, κατὰ λόγον τῆς ὀργυῆς πρὸς 100 γρόσια. Πόσα τοῖνον ἀποδώσει.

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ὀργυῆς περιεχέσης πόδας 36 (215), τῷ δὲ ποδὸς δακτύλους 144, ὁ πολλαπλασιασμοῦ, ἀναχθεὶς ἐπὶ δακτύλους, καθίσταται 262668· τῷ δὲ δακτύλῳ $\frac{2}{3}$ ὀργυῆς ὄντος (155), τραπήσεται ὁ πολλαπλασιασμοῦ εἰς $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$, ὃ τῷ ἀριθμῷ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ὀλοχρεῆ 100, καὶ τῷ προερχομένῳ ἐντεῦθεν κλάσματος $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3}$ ἐφ' ὀλοχρεῆ ἀναχθέντος, εὐρεθήσονται 5066 γρόσια, 35 παράδαι, 2 λεπτὰ, καὶ κατάλοιπον $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$ (179).

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν. Αἱ 50 ὀργυαὶ διδύασι γρόσια 5000· 24 δὲ πόδες ὄντες $\frac{2}{3}$ ὀργυῆς (155) τιμηθήσονται. 50 ὀργ. τετρ. 24 ποδ. 12 δακτ. | 100 γρόστ.

ταὶ $\frac{2}{3}$ τῶν 100· εἰλήφθω τοῖνον	γρ.	παρ.	λεπ.
τὸ $\frac{2}{3}$ τῶν 100, ὅπερ ἐστὶ 33 γρό-	5000	0	0
σια, 13 παράδαι, 1 λεπτὸν, ἄ-	33	13	1
περ γεγράφθω δὲ· οἱ δὲ 12	33	13	1
δάκτυλοι, ἐπεὶ δωδεκατημό-	0	9	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$
ρίον εἰσι τῷ ποδῷ, τιμηθήσονται	5066	35	$\frac{2}{3}$
τὰ τῷ πρὸ μικρῷ εὐρημένον ὑπὲρ ποδῶν 12, ἢ τῶν 39			

γροσίων, 13 παράδων, 1 λεπτῷ, ὅπερ ἐστὶ παράδων 9 καὶ λεπτῷ $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$ (183)· προσθέσει δὲ τελευταῖον εὐρίσκεται τὸ διὰ ταύτης τῆς μεθόδου προκύψαν ἄθροισμα ἴσον τῷ διὰ τῆς πρώτης.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Πεδίον, οὗ μῆκος μὲν 20 ὀργ. γιῶν, καὶ ποδῶν 5, καὶ δακτύλων 9· πλάτος δὲ, ὀργιῶν 6, καὶ ποδῶν 4, καὶ δακτύλων 7· πόσον ἐστὶ τὸ ἐμβαδόν;

ΛΥΣΙΣ. Οὗ πολλαπλασιαστέος ἀνήχθω ἐπὶ δακτύλους, γενόμενος 1509 (149), τῷ δὲ κατὰ μῆκος δακτύλῳ ὄντος 7 ὀργιῶν κατὰ μῆκος, συσταθήσεται κλάσμα τὸ $\frac{1509}{7}$ · ὃ δὲ πολλαπλασιασθῆς, ἀναχθεὶς ὡσαύτως ἐπὶ κλάσμα γενήσεται $\frac{1509}{7}$ · τὸ δ' ἐκ τούτων τῶν κλασμάτων προκύπτει, ὅτι ἐστὶ $\frac{1509}{7}$, ἀναχθέν ἐφ' ὀλοαχερῇ, παρέχει πρῶτον ὀργιῶν τετραγωνικῶν 141 (153), λειπομένην 3939, ὃς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 36 (τόσοι γὰρ πόδες τετραγωνικοὶ ἐνεῖσι τῇ ὀργιῳ), παράγει 141804· ὃς, διαιρεθεὶς διὰ 5184, δίδωσι πόδας τετραγωνικοὺς 27, λειπομένων 1836· ὃς, πολλαπλασιασθεὶς διὰ 144 (155), παράγει 264384· ὃς, διαιρεθεὶς διὰ 5184, παρέχεται ἐπ' ἀκριβὲς 51 πόδας τετραγωνικοὺς. Τὸ δ' ὅλον, 141 ὀργ. τετρ. 27 πόδ. τετραγ., καὶ 51 τοιοῦτοι δάκτυλοι.

Διὰ τῶν συμμετρῶν μερῶν· 20 ὀργιῶν τῷ πολλαπλασιαστέῳ, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ 6 ὀργιῶν τῷ πολλαπλασιαστῇ, ποιῶσιν 120 ὀργιῶν τετραγωνικῶν· οἱ δὲ 5 πόδες, εἴπερ ἦσαν 6, ἀναπληρῶντες ὀργιῶν κατὰ μῆκος, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 6 ὀργιῶν κατὰ πλάτος, παρήχον ἂν ὀργιῶν τετραγωνικῶν 6· νῦν δὲ πόδες 5 παρέξουσιν $\frac{1}{2}$ τῶν 6 τετραγωνικῶν ποδῶν· εἰλήφθω ἂν $\frac{1}{2}$ τῶν 6 τετραγωνικῶν ὀργιῶν, ἢ $\frac{1}{2}$, ὃ δὲ παρέχει 3

τετραγωνικὰς ὀργυῖας, αἵ τινες γεγραφῶνται δις ὑπὲρ
 τῆς τιμῆς 20 ὀργ. 5 ποδ. 9 δακτ. | 6 ὀρ. 4 πόδ. 7 δακ.
 τῶν $\frac{1}{2}$, ἢ τῶν 4 ποδῶν· ὁ δὲ ὀργ. τετρ. πόδ. δακ.
 γε πέμπτως πῶς τιμηθήσεται ἡμί- 120 0 0
 σεως τῆ ὑπὲρ δύο ποδῶν εὐρεθέν. 2 0 0
 τος, ἢ ὀργυῖας μιᾶς. Περὶ δὲ τῶν 2 0 0
 9 δακτύλων, ἐπεὶ ἤδη ἐωράκα- 1 0 0
 μεν ὅτι 1 πῶς τῆ πολλαπλασια- 0 9 0
 σῆς ὡς γε πρὸς τὸν 6 τῆ πολλα- 0 9 0
 πλᾶσιαις ἀποδίδοι 1 ὀργυῖαν, 6 24 0
 9 δάκτυλοι, ὄντες $\frac{1}{2}$ ποδὸς κατὰ 6 24 0
 μῆκος, ἀποδώσουσι $\frac{1}{2}$ τῶν 36 τε- 9 20 0
 τραγωνικῶν ποδῶν· ληφθὲν ἄρα 0 3 0
 $\frac{1}{2}$ τῶν 36, ὅ ἐστιν 9, γεγραφῶ 0 10 60
 τρις κατὰ συνέχειαν. Μέτιμεν ἤδη 0 2 63
 ἐπὶ τὸν δεύτερον τῆ πολλαπλα- 141 27 51
 σιας ὅρον· 20 ὀργυῖαι, πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ 4 πόδας,
 ἀποδώσουσι πάντως $\frac{2}{3}$, ἧ διδόνσιν 20 ὀργυῖαι, πολλαπλα-
 σιαζόμεναι ἐπὶ πόδας 6, ἧτοι 1 ὀργυῖαν, ὅ ἐστι τὰυτόν $\frac{2}{3}$ τῶν
 20 τετραγωνικῶν ὀργυῖων· εἰλήφθω ἕν $\frac{1}{3}$ τῶν 20 τετρα-
 γωνικῶν ὀργυῖων, ὅ ἐστιν 6 ὀργ. 24 πόδ., ἃ γεγραφῶ
 δις· 6 δὲ πόδες, πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ 4 πόδας,
 ἀποδώσουσιν 20 τετραγωνικὰς πόδας (153)· 1 δὲ πῶς τῆ
 πολλαπλασιασῆς, πολλαπλασιασθεῖς ἐπὶ 4 πόδας τῆ
 πολλαπλασιασῆς, ἀποδώσει 4 πόδας τετραγωνικὰς· 9
 δὲ δάκτυλοι, $\frac{1}{2}$ ὄντες ποδὸς, παρέχονται $\frac{1}{2}$ 4 τετρ. ποδ.,
 ὅ ἐστι 3 πόδας τετραγωνικὰς. Μεταβαίνομεν κατὰ τὸν 7
 τῆ πολλαπλασιασῆς· 1 πῶς κατὰ μῆκος, πολλαπλασια-
 σας 20 ὀργυῖας, ἢ 120 πόδας κατὰ μῆκος, ἀποδίδωσιν
 120 τετραγωνικὰς πόδας· 6 ἄρα δάκτυλοι τέτων ἀπο-

δάσει τὸ ἥμισυ, εἴτ' ἔν 60 πόδας τετραγωνικὸς· ὁ δὲ καταλειφθεὶς δάκτυλος ἀποδώσει $\frac{1}{2}$ τῶν 60, 10 πόδας· ὑπὲρ δὲ τῶν 5 τῷ πολλαπλασιασῆ ποδῶν, ἔτι 1 πῦς τῷ πολλαπλασιασῆ παρέχει πόδας 5 τετραγωνικὸς· ἄρα 6 αὐτῶν δάκτυλοι παρέχουσι τὸ ἥμισυ, εἴτ' ἔν 2 πόδας, 72 δακτύλους· ὁ δὲ κατάλοιπος δάκτυλος ἀποδώσει τὸ $\frac{1}{2}$ τῶνδε τῷ ἡμίσει, εἴτ' ἔν 36 δακτύλους 60. Τελευταῖον δὲ 9 δάκτυλοι, ἔτι 7 πολλαπλασιασθέντες δακτύλους, ποιήσουσι δακτύλους τετραγωνικὸς 63. Προσθήσει δὲ, εὐρεθήσεται τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν, ὃ καὶ πρότερον, εἴτ' ἔν ὄργυιαι 141 τετραγωνικαί, 27 πόδες, 51 δάκτυλοι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Θελάμεν τετραγωνικῷ, ἔσι μὲν τὸ μήκος ὀργυῶν 2, ποδῶν 4, καὶ δακτύλων 3· τεσσόνδε δὲ καὶ τὸ πλάτος· πόση ἂν αὐτῷ τῷ ἐδάφει ἐπιφανεία;

Ὅ,τε πολλαπλασιασέος καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς, ἀναχθέντες ἐπὶ δακτύλους, συνισῶσι κλάσματα τὰ $\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{3}{2}$, ὑφ' ὧν γίνεται $\frac{9}{4}$ · ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, προῖασιν 7 ὄργυιαι τετρ. μετὰ λειψάνῳ 1737, ὃς ἀρχεὶς ἐπὶ 36, ποιεῖ 62532· διαιρεθεὶς δ' ἔτος, φέρει 12 πόδ. τετραγ. μετὰ λειψάνῳ 324· ὁ δὲ, πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ 144· τὸ δὲ προκύπτον διαιρεθὲν ἀποτελεῖ δακτύλους 9· ἢ ἄρα ὅλη ἐπιφανεία ἐστὶν ὀργυῶν 7, ποδῶν 12, καὶ δακτύλων 9.

Διὰ τῶν συμμετρῶν μερῶν. Δις δύο ὄργυιαι ποῖσι 4 ὄργυιαις τετραγωνικαί· 4 πόδες τῷ πολλαπλασιασῆ ἐπὶ 2 ὄργ. τῷ πολλαπλασιασῆ, ποῖσι $\frac{1}{2}$ ὄργ. τετραγ. 2, εἴτ' ἔν 1 ὄργ. καὶ 12 πόδας· 3 δάκτυλοι $\frac{1}{2}$ εἰσὶ ποδός, εἴτ' ἔν τῶν 4· ἔτοι ἔν ἀποδώσουσι $\frac{1}{2}$ τῷ ἤδη περὶ 4 πόδ. εὐρημένῳ, ὃ ἐστὶ 3 πόδας· ὁ δὲ 4 τῷ πολλαπλασιασῆ

ἀποδώσει α'. $\frac{2}{3}$ ὀργ. 2 τῶν τῷ πολλαπλασιασέει, εἴτ' ἔν 1 ὀργ. 2 ὀργ. 4 ποδ. 3 δάκτ. | 2 ὀργ. 4 ποδ. 3 δάκτ. ἢ 12 ποδ. β'. τετράκις 4 πό. ὀργ. τετρ. πόδ. δάκτ.
 δεσ, 16 πόδας τετραγωνικὺς. γ. 4 0 0
 3 δάκτυλοι, $\frac{1}{4}$ τῶν 4 ποδῶν, εἴτ' 1 12 0
 ἔν πόδα 1· ὁ δέ γε 3 τῷ πολλα- 0 3 0
 πλάσιας (ἐπεὶ 1 πῶς ἐπ' ὀργισίας 1 12 0
 2, εἴτ' ἔν πόδας 12, πολλαπλα- 0 16 0
 σιασθεὶς, ποιεὶ πόδας τετραγωνι- 0 1 0
 κὺς 12), δακτύλους σημαίνων, πα- 0 3 0
 ρέξει $\frac{1}{4}$, ἢ πόδας 3· ὡσαύτως, ἐ- 0 1 9
 πεί 1 πῶς ἐπὶ 4 τῷ πολλαπλασιασέει πόδας παράχου- 7 12 9
 ἂν 4 ποδ. τετραγ. 3 δάκτ. παρέξουσιν $\frac{1}{4}$, ἢ πόδα 1·
 τέλος, 3 δακτ. ἐπὶ 3 δακτ. ποιῶσιν 9 τετραγ. δακτ.

Περὶ τῷ ἐν σερεοῖς συμμιγῶς πολλαπλασια-
 σμῶ, ἐν ᾧ τινες τῶν προαποδοθέντων κα-
 νόνων τῇ πράξει ἐφαρμόζονται.

217. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Διορυγὴν τις βεβλόμενος
 ἐν τῇ γῇ ὀρύξαι, μήκους μὲν 6 ὀργ. 5 ποδ.· πλάτους δέ,
 4 ὀργ. 2 ποδ. βάθους δέ, 1 ὀργισίας, 5 ποδ. πυθάνε-
 ται, πόσοι ἂν ἐνέσσονται κυβικοὶ πόδες;

α'. Ἀναγαγὼν τότε μῆκος ἢ πλάτος ἐπὶ κλά-
 σματα τὰ $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{2}{3}$, πολλαπλασιάσας αὐτὰ ἐπ' ἄλλη-
 λα· τὸ δὲ προκύπτον $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$ δηλώσει τῆς ἐπιφανείας τὰς
 τετραγωνικὰς ὀργισίας τῷ ἀνορυγισομένῳ χώρῳ.

β'. Ἀναγαγὼν τὸ βάθος ἐπὶ κλάσμα $\frac{1}{2}$ δι' αὐτῷ
 πολλαπλασιάσας τὸ $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$. Τὸ δὲ προκύπτον $\frac{1}{12}\frac{2}{3}$,

ἀνευ ἀναγωγῆς ἐκδηλοῖ πόδας κυβικὰς 11726 (156),
ἕς περιέξει ἡ διόρυχθησομένη γῆ.

Διὰ τῶν συμμετρῶν μερῶν. Ἀρχόμενος λάμβανε τὸ γινόμενον ὑπὸ ὀργ. 6 καὶ 5 ποδ. καὶ 4 ὀργ. καὶ 2 ποδ., ὡς πεπρακται 6 ὀργ. 5 ποδ. μήκους | 4 ὀργ. 2 ποδ. πλάτους. προλαβόντως· τετράκις 6 ποιῶσιν 24

τετραγωνικὰς ὀργιάς· 3 πόδες τῶν ἐν τῷ	ὀργ. τετρ. πόδ.	
5 ἀποδώσει τὸ ἡμισυ τῶν 4 ὀργιῶν, εἴτ'	24	0
ἐν 2 τετραγωνικὰς ὀργιάς· οἱ δὲ 2 λει-	2	0
πόμενοι πόδες ἀποδώσασιν $\frac{1}{2}$ τῶν 4 ὀργ.,	1	12
εἴτ' ἐν 1 ὀργ. καὶ 12 πόδας τετραγωνικὰς·	2	0
	0	10

2 πόδες τῆς πολλαπλασιασῆς ἀποδώσασιν $\frac{1}{2}$ 29 22
τῶν 6 ὀργ. τῆς πολλα. ἐπὶ 1 ὀργ. 5 πόδας τῆς ὕψους.
πλασιασῆς, εἴτ' ἐν 2 ὀργιάς τετραγωνικὰς· τέλος δὲ,
δις 5 πόδες παρέξουσιν 10 πόδας τετραγωνικὰς· συνάψει
δὲ, εὐρίσκονται 29 ὀργιαὶ τετραγ., καὶ 22 πόδες τοῖστοι.

Πολλαπλασιάσας εἴτα τὸ προκύπτον ἐπὶ 1 ὀργ. 5
ποδ. τῆς βάθους· 29 ὀργιαὶ τετραγωνικαὶ ἐπὶ 1 ὀργιῶν
τῆς βάθους, ποιῶσιν 29 ὀργιάς κυβι- ὀργ.κυβ. ποδ.κυβ.
κὰς· 18 πόδες τῆς πολλαπλασιασῆς, 29 108
εἴτ' ἐν τὸ ἡμισυ τετραγωνικῆς ὀργιάς 0 24
ἐπὶ 1 ὀργ. παρέχουσιν τῆς κυβικῆς ὀρ- 14 198
γιάς τὸ ἡμισυ, εἴτ' ἐν 108 πόδας κυ- 9 144
βικὰς· οἱ κατάλοιποι 4 πόδες παρέξουσιν 0 110
σι $\frac{1}{2}$, 24 ποδ. κυβικ.· 5 δὲ πόδες 54 62
τῆς πολλαπλασιασῆς παρέξουσιν $\frac{1}{2}$, ὃ ἐστὶ α'. τὸ τῶν 29 ἡ-

μισυ, ἡ 14 ὀργιάς κυβικὰς καὶ $\frac{1}{2}$. β'. τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 29 ὀργιῶν, εἴτ' ἐν 9 ὀργιάς, καὶ 144 πόδας. γ'. πεντάκις 22, ἡ 110 κυβικὰς πόδας· ὃ ἐν ὅλκινος ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν ποδῶν εὐρίσκεται ὁ αὐτὸς τῷ καὶ διὰ τῆς πρώτης μεθόδου.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Σωρεία σίτη, ἐν ἀποθήκῃ κειμένη, ἐστὶ μῆκος μὲν ὀργυιὰ, καὶ 4 πόδες· πλάτος δὲ 1 ὀργυιὰ καὶ 3 ποδ· ὕψος δὲ 1 ὀργυιὰ, καὶ 1 πῦς. Τὸ δὲ μέτρον τῆς σίτης ἐξ ὑποθέσεως περιέχει ἓνα πόδα σὺν ἡμίσει κυβικόν. Πόσα εἰσὶ πάντα τὰ μέτρα;

Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, ἀναχθέντα ἐπὶ πόδας πολλαπλασιασμῷ, παράγουσιν 90 πόδας τετραγωνικὸς, οὗ ἀχθέντες ἐπὶ τὸ ὕψος, παράγουσι πόδας κυβικὸς 630· καὶ ἐπειδὴ τὸ μέτρον ἐστὶ πῦς σὺν ἡμίσει κυβικὸς, 1 πῦς κυβικός ἐστὶ $\frac{2}{3}$ τῆςδε τῆς μέτρου· πολλαπλασιασθεὶς ἄρα ὁ 630 διὰ $\frac{2}{3}$ παράγει $1^{\circ} 2^{\circ} 0'$, ἢ μέτρα 420.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἀγνος τι εὐρηται περιέχον μῆκος μὲν 9 ποδῶν, 5 δακτύλων, 1 γραμμῆς· πλάτος δὲ, 4 δακτ. καὶ 6 γραμ., ὕψος δὲ 7 ποδῶν· εὐρεῖν ἔν πόσας ὕδατος σάμνους περιέχει· δίχα τῆς τῆς μέτρου χρήσεως.

9 πόδ., καὶ 5 δακτ., καὶ 1 γραμ., ἀναχθέντα ἐπὶ γραμμὰς, συνισῶσι $1^{\circ} 1^{\circ} 1'$ τῆς δακτύλου· 4 δὲ πόδ. καὶ 6 γραμ. συνισῶσι $\frac{1}{2}$ · τὸ δ' ἐκ τέτων προκύπτει, $1^{\circ} 1^{\circ} 1^{\circ}$ τετρ. δακτ.

7 πόδες ὕψος, ἀναχθέντες ἐπὶ δακτύλους, παρέχουσιν 84 δακτύλους, ἐφ' ὧς πολλαπλασιασθέν τὸ $1^{\circ} 1^{\circ} 1^{\circ}$, παράγει $1^{\circ} 1^{\circ} 1^{\circ} 1^{\circ}$, ὃ δὲ ἀναγωγῆς παρέχει δακτύλους κυβικὸς 42745 $\frac{1}{2}$ · ὃ δὲ, διαιρεθεὶς διὰ 96 (158), δίδωσι σάμνους 445 ὅτι ἐγγισία, ἃς τὸ ἄγνος περιέχει.

Διὰ τῶν συμμέτρων μερῶν· 4 δάκτυλοι τῆς πολλαπλασιασθεὶς παρέχουσι $\frac{1}{3}$ τῶν 9 ποδῶν, εἴτ' ἐν 3 πόδας τετραγωνικὸς· τετράκις 5 ποιῶσι δακτύλους 20· ἐπεὶ δὲ 1 δάκτυλος τῆς πολλαπλασιασθεὶς παρέχει 4 δακτύλους τῆς πολλαπλασιασθεὶς· 1 γραμμὴ παρέχει $\frac{1}{2}$ τῶν 4 δακτ.

τύλων, ἢ $\frac{1}{2}$ τῆ τετραγωνικῆ δακτύλου, εἴτ' ἔν 48 γραμμάς. Αἱ δὲ 6 ποδ. 5 δακτ. 1 γρ. | 4 δακτ. 6 γραμ.

τῇ πολλαπλασιασῶ γραμμαι, ἔσαι $\frac{1}{2}$ δακτύλου, ἂ ποδώσασιν $\frac{1}{8}$ τῇ ἄρτι περὶ 4 δακτύλων εὐρημένον· $\frac{1}{8}$ δὲ τῶν 3 τετραγωνικῶν ποδῶν

ποδ.τετρ.	δακτ.τρ.	γρ.τετρ.
3	20	48
0	54	0
0	2	72
0	0	6

ἐσι δάκτυλοι 54· $\frac{1}{8}$ δὲ τῶν 20 δακτύλων ἐσι 2 δάκτυλοι καὶ γραμμαὶ 72· $\frac{1}{8}$ δὲ τῶν 48 γραμμῶν ἐσιν 6 γραμμαί. Τὸ ἔν προκύπτον ἐσι, 3 πόδες τετραγ., 76 δάκτυλοι τετραγ., καὶ 126 γραμ. τετρ. ἂ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ τὰς 7 τῇ ὑψὺς πόδας·

τρὶς 7 ποιῶσιν 21 πόδας ποδ.κυβ. δακ.κυβ. γραμ.κυβ. κυβικὰς 72 δάκτυλοι, πολ. λαπλασιασθέντες ἐπὶ πόδας 7, παρέχουσι τὸ ἡμισυ τῶν 7 κυβικῶν ποδῶν (155), ἢ 3 πόδας σὺν

ποδ.κυβ.	δακ.κυβ.	γραμ.κυβ.
21	0	0
3	864	0
0	336	0
0	42	0
0	21	0
0	10 $\frac{1}{2}$	0

864 δακτύλοις (156)· 4 δάκτυλοι οἱ λειφθέντες, οἵτινες εἰσι $\frac{1}{8}$ τῶν 72, ἀποδώσασιν $\frac{1}{8}$ τῶν 3 ποδῶν, 864 δακτύλων, εἴτ' ἔν δακ. 336.

Τῷ περ τῶν 126 γραμμῶν· 1 δάκτυλος, ἢ 144 γραμμαί, διδῶσι $\frac{1}{4}$ τῶν 7 κυβικῶν ποδῶν, ἢ 84 κυβικὰς δακτύλους· 72 ἄρα γραμμαὶ παρέξουσι τὸ ἡμισυ, εἴτ' ἔν 42· 36 δὲ παρέξουσι τὸ ἡμισυ τῆδε τῇ ἡμίσεως, εἴτ' ἔν 21· αἱ δὲ περιλειπόμεναι 18 γραμμαί, τὸ καινὸν ἡμισυ, εἴτ' ἔν 10 δακτύλους καὶ 864 γραμμάς, ἢ 10 $\frac{1}{2}$. Προσθέσει δὲ, καὶ ἀναγωγῇ τῶν κυβικῶν ποδῶν ἐπὶ δακτύλους, εὐρεθήσονται, ὥσπερ καὶ πρὶν, δακτ. κυβ. 42745 $\frac{1}{2}$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Αἰερομηχανήτις περιέχει κατὰ

μὲν μῆκος 46 ποδ. 6 δακ., κατὰ πλάτος δὲ 15 ποδ., 20 δὲ πόδας καὶ 4 δακτύλους κατὰ βάθος. α'. πόσους κυβικὸς πόδας αἱρος περιέχει αὕτη; β'. τῷ βάρους τῷ αἱρος, ὃ πεφύσχηται ἡ μηχανή, τριτημορίου ἐξ ὑποθέσεως γενομένη συνεργεία τῷ ῥεύσῃ, πόσον ἔσαι τὸ βάρος, ὃ ἡ ἀερομηχανὴ ἀνέξει;

Διὰ τε τῆς πρώτης καὶ δευτέρας μεθόδου εὐρίσκεται ἡ ἀερομηχανὴ χωρῆσα πόδας κυβικὰς 14182. ὅτοι δὲ αἱρος ὄντες, ἀπολέσαντες, ὡς ὑποτίθεται, $\frac{2}{3}$ τῷ οἰκείῳ βάρους, ἀνισοβαρεῖς ἔσονται τῷ ἀτμοσφαιρικῷ αἱρῷ, ἢ τῷ ὀριζοντιῷ (162). τὸ ἐν βαρυσθησόμενον βάρος ἰσοδυναμήσει $\frac{2}{3}$ τῶν 14182 κυβικῶν ποδῶν τῷ αἱρῷ. α'. εἰλήθω ταῦτα τὰ $\frac{2}{3}$, ἃ ποιῶσι πόδας κυβικὰς 9454. β'. ἐπεὶ 1 πῦς κυβικὸς ἀτμοσφαιρικῷ αἱρῷ βάρους ἔλκει $\frac{1}{54}$ τῶν 54 λιτρῶν (160, 162), πεπολλαπλασιασθῶ 9454 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{54}$ (192), καὶ ἀναγωγῇ εὐρεθήσεται ἀνέχειν ἡ ἀερομηχανὴ δυναμένη βάρος λιτρῶν 537.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ 5'. Μηχανουργός τις, εἰδέναι χρίζων πόσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ γέφυραν διατρέχον ἐν χρίνῳ δεδομένῳ ὕδωρ, εὐρίσκει τὸ τῷ ποταμῷ πλάτος ποδῶν 30, καὶ τὸ μεσάιτατον βάθος 10 ποδῶν. τέλος δὲ, παρατηρῶν διὰ τῷ ἐκκρεμῆς, εὐρίσκει ὅτι ἡμεσπαιτάτη ταχυτῆς τῷ ὕδατος ἐστὶ τοιάδε, ὅα διατρέχειν πόδας $3\frac{1}{2}$ λεπτῷ δευτέρῳ. Πόσον ἐν ὕδατος διαρρέευσται ἐν ὥρᾳ μιᾷ;

ΛΥΣΙΣ. Τὸ διαρρέον ὕδωρ ἐν λεπτῷ δευτέρῳ ἐστὶν ὕλη περιέχουσα 30 πόδας μῆκος, $3\frac{1}{2}$ πλάτους, καὶ 10 βάθος. τῆς ἐστὶ πόδες κυβικαὶ 1050, οἱ διαρρέουσιν ἐν λεπτῷ δευτέρῳ. ἡ ἄρα ποσότης τῷ ὕδατος τῷ ἐν ὥρᾳ μιᾷ διαρρέοντος δηλωθήσεται πολλαπλασιασθέντος 1050 διὰ 3600 (166). ταυτὸν εἰπεῖν, ἔσαι ποδῶν κυβικῶν 3780000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Πρόβλημα Α'.

218. Μόνυ τῷ διαιρετέῳ συμμιγῆς ὄντος, καὶ τῶν τῷ πηλίκῳ μονάδων ὁμοφυῶν ὀφειλουσῶν εἶναι ταῖς τῷ διαιρετέῳ, τὴν διαιρέσιν ἀπεργάσασθαι.

ΛΥΣΙΣ. Διηρήσθω πρῶτον τὸ μείζον εἶδος τῷ διαιρετέῳ· τὸ δὲ λείψανον, εἰ εἴη, ἀνήχθω ἐπὶ τὸ ἐπόμενον εἶδος τῷ διαιρετέῳ, καὶ, συναφθέντος καὶ τῷ ἐν τῷ ἐπομένῳ τῷ δὲ χώρῳ ἀριθμῷ, διηρήσθω τὸ ἄθροισμα διὰ τῷ διαιρετέῳ· γενέσθω δὲ αὐτὸ τῷ κατὰ τῷ κοινῷ καταλοίπῳ, εἰ εἴη, καὶ ὕτως ἐξῆς.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. 546 λίτραι, 17 σολδία, 6 δηνάρια διανεμηθήσονται ἀνθρώποις 10· πόσον ἔσαι ἐκάστῳ; 546 λίτραι, διαιρεθεῖσαι διὰ 10, παρέχουσι πρῶτον 54 λίτρας (127), μετὰ λειψάνῳ 6 λιτρῶν· ὧν ἀναχθεῖσῶν ἐπὶ σολδία, καὶ τῷδε τῷ ἀριθμῷ τῶν σολδίων συναφθέντος τῷ 17, διηρήσθω τὸ ἄθροισμα 137 διὰ 10· πηλίκον ἔν ἔσαι 13 σολδία καὶ κατάλοιπον 7· ἔτος δὲ, ἐπὶ δηνάρια ἀναχθεῖς, καὶ συναφθεῖς τῷ 6, διηρήσθω διὰ 10, ὅθεν ἔσαι πηλίκον 9 δηνάρια. Τὸ ἄρα ἐκάστῳ μέρος ἔσαι 54 λίτραι, 13 σολδία, καὶ 9 δηνάρια.

ΔΕΙΞΙΣ. Αὕτη γὰρ ἡ περίπτωσις ταυτίζεται, ἢ δῆλον, τῇ τῶν τῆς διαιρέσεως καταλοίπων (172)· πράττειν ἄρα καὶ ἐνταῦθα δεῖ κατ' αὐτὴν ἐκείνην τὴν μέθοδον.

ΒΑΣΑΝΟΣ. Τὸ πηλίκον 54 λίτραι, 10 σολδ. 9

δηάρ., πολλαπλασιασθέν ἐπὶ 10, ἀποδῆναι ὀφείλει τὸν διαιρετέον.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἀπέδωκέ τις 15 γρόσια, παράδας 30, ὑπὲρ 6 ὀκάδων ὠνίων· πόσ' ἄρ' ὑπὲρ ἐκάστης; 15 γρόσια, διαιρεθέντα διὰ 6, διδῶσι 2 γρόσια καὶ λείψανον 3, ἅτινα, ἀναχθέντα ἐπὶ παράδας, καὶ συναφθέντα τοῖς 30, γίνονται 150· ὅτος δὲ, διαιρεθεὶς δι' 6 διδῶσι παράδ. 25· ἐκάστη ἄρα τῶν ὠνίων ἕκαστ' ἀποδίδεται 2 γροσίων καὶ 25 παράδων.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Πόσην πρὸσοδον διδῶσι γρόσια 1945 καὶ 20 παράδαι, φερόντων 4 τῶν 100;

Παρατηρηθέντος ὅτι 4 εἰσὶν $\frac{1}{4}$ τῶν 100, εἶσαι ἢ ζητημένη πρὸσοδος $\frac{1}{4}$ παντὸς τῆς τῶν ἀργυρίων ἀρθροσμοτος. Τοιγαρὺν 1945, διαιρεθέντα δι' 25, διδῶσι 77 γρόσια λειπομένων 20, ἅτινα, ἀναχθεῖντα ἐπὶ παράδας, καὶ τοῖς 20 συναφθέντα, γίνονται 820, ὅς, διαιρεθεὶς δι' 25, δίδωσι 32 παράδας καὶ $\frac{1}{4}$.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ὑπὲρ 8450 φορινίων λαμβάνω τόκον 504 φορινία καὶ 40 σαυροφόρα· πόσα ὑπὲρ ἐκάστη;

Ἐπεὶ περ ὁ διαιρετέος 504 φορινία καὶ 40 σαυροφ. εἰσὶν ἐλάττων τῆς διαιρέτης, ἀνήχθω ἐπὶ σαυροφ., καὶ συνήφθω τοῖς 40· τὸ δ' ὅλον 30280, διαιρεθὲν διὰ 8450, δίδωσι σαυροφόρα 3. Τὸ δὲ κατάλοιπον 4930, πολλαπλασιασθέν ἐπὶ 4 (164, 218), καὶ διαιρεθὲν καὶ ταῦτο ἀποδίδωσι 2 φέννιγα σὺν λειψάνῳ $\frac{2}{3}\frac{1}{4}$ φέννιγα.

Πρόβλημα Β΄.

219. Τῆς τε διαιρέτης καὶ διαιρέτου ὁμοφυῶν ὄντων, ὥσπερ ἐπὶ τῇ ἐσχάτῃ τῶν ἐκτεθέντων ὑποδειγμάτων, τῶν δὲ

τῷ πηλίκῃ μονάδων ὀφειλυσῶν ἑτεροφυῶν εἶναι τῷ διαιρετέῃ, ποιῆσαι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει τὴν διαίρεσιν.

ΛΤΣΙΣ. α'. Ἀνήχθω ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρετής ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον εἶδος τῶν τῷ διαιρετέῃ, καὶ διηρήσθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διὰ τῷ δευτέρῃ. β'. πεπολλαπλασιάσθω τὸ κατάλοιπον, εἰ τύχοι, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν, τὸν ἐμφαίνοντα, ποσάκις μονὰς τῷ ἤδη εἰς πηλίκον γραφησομένῃ εἶδος ἐμπεριέχεται τῇ μονάδι τῷ ἄρτι γεγραμμένῃ πηλίκε· ἐπὶ δὲ τέτῳ τῷ προκύπτοντος ἐπανειλήφθω τὰ τῆς διαίρεσεως, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Πόσας λίτρας ὠρήσομαι ὠνίων διὰ λίτρῶν νομίσματος 17, σολδίων 9, δηναρίων 10, κατὰ λόγον τριῶν νομίσματος λίτρῶν πρὸς τὴν λίτραν τῷ ὠνί;

ΛΤΣΙΣ. Αἱ τῷ πηλίκῃ μονάδες εἰσὶναι πάντως λίτραι σαβμῆ, ἑτεροεῖδεις δὴπε τῶν τῷ διαιρετέῃ. α'. τοιγαρὲν ἀνήχθω ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐπὶ δηναρία· 4198, διαιρεθέντα διὰ 720 παρέχουσι 5 λίτρας σαβμῆ· τὸ τοῖνον μετὰ τῷτο ἄμειον πηλίκον εἰσὶναι ἕγγίαι, ὧν 16 περιέχει 1 λίτρα· πεπολλαπλασιάσθω δὲ τὸ λείψανον 548 ἐπὶ 15· τὸ δὲ προκύπτον 9508, διαιρεθὲν διὰ 720, παρέχει ἕγγίαι 13, λειπομένων 208, αἱ, ἐπεὶ τὸ ἐξῆς πηλίκον εἶναι δραχμαί, πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ 8· ὁ δὲ 1664 προκύπτων, διαιρεθεὶς διὰ 720, δίδωσι δραχμὰς 2, μετὰ καταλοίπῳ $\frac{2}{3}$ δραχμῆς.

ΒΑΣΑΝΟΣ. Πολλαπλασιασθέντος τῷ εὐρημένῃ πηλίκῃ ἐπὶ 3 λίτρας (211) πρόεισιν ὁ διαιρετέος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐν τῷ ἐπὶ δηναρία ἀνάγεσθαι, ἐπὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασθέντες ἀριθμὸν ἑκάτερος, ἀμετακίνητον πάντως τὸ πηλίκον διασώσουσι· ἀλλὰ, πρὸ τῆς ἀναγωγῆς, 17

λίτραι νομίσματος, διαίρεται διὰ 3 λίτρων τοιούτων, πα-
ρέχουσι. 5 λίτρας σαθμῶ μετὰ λειψάνου. 2· ἢ μετὰ τὴν ἀ-
ναγωγὴν ἄρα ἀνάγκη προκύψει πρῶτον πηλίκου 5 λί-
τρας ἐν σαθμῶ. Περὶ δέ γε τῷ δευτέρῳ πηλίκῳ, ἐπειδὴ
ἐκάστη αὐτῷ μὲν ὑποδεκαζαπλασίᾳ ἐστὶ τῆς τῷ πρώτῳ,
δεόντως ἄρα τὸ κατάλοιπον πεπολλαπλασιασθῆαι ἐπὶ 16,
κτ. Ο. Ε. Δ.

Πρόβλημα Γ.

220. Διελεῖν ἀριθμὸν συμμιγῇ ἢ ἀμιγῇ δι' ἀριθμῶ
συμμιγῆς.

ΛΤΣΙΣ. Ἀνήχθω ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν
ἐν αὐτῷ εἰδῶν· ὅπως ἔν ἀμιγῆς γεγονότος ἢ τῷ διαιρέ-
τῃ, ῥᾶσα ἡ διαίρεσις γενήσεται κατὰ τὰ ἄρτι ὁροθεν
τηθέντα.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. 6 ὀργυαὶ, ἢ 5 πόδες κατὰ
μῆκος, τετίμηνται 47 λίτρων ἢ 3 σολδίων· πόσα ἂν ἔ-
καστος πῆς; ὁ διαιρέτης, εἴτ' ἔν 6 ὀργυαὶ ἢ 5 πόδες,
ἀναχθεὶς ἐπὶ πόδας 41, ἀμιγῆς ἀποτελεῖται· διαι-
ρεθέντων ἔν 47 λίτρων ἢ 3 σολδίων διὰ 41 (218), εὐ-
ρεθήσεται ἡ ἐκάστῃ ποδὸς τιμὴ 1 λίτρα, ἢ 3 σολδία,

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Περιγηγνήτης τις ἐν σπάνει κα-
ταὰς τῆς δαπάνης, ὅρᾳ αὐτὸν εὐμειρῶντα μόνον γρόσιων
88 ἢ παράδων 8· δαπανᾷ δὲ καὶ ἐκᾶστην γρόσσια 8,
ἢ παράδας 16· πόσον ἄρα χρόνον ἔτι αὐτῷ ἀρκέσουσιν
ἃ ἔχει χρήματα;

Τῷ διαιρέτῃ τὰ 8 γρόσσια ἢ 16 παράδαι ἀνήχθω-
σαν ἐπὶ παράδας, ὅτινες ἔσονται 336, εἴτ' ἔν ἀριθμὸς
ἀμιγῆς· ἀνήχθω δὲ ὡσαύτως ἐπὶ παράδας ἢ ὁ διαιρε-
τέος· 3528, διαιρεθέντες διὰ 336, ποιῶσιν ἡμέρας 10,

λειπομένων 168, ἃ, ἤτοι ἐφ' ὥρας ἀνήχθωσαν, πολλά-
πλασιαζόμενα δι' 24, ἃ διηρήσθωσαν διὰ 336, ὅθεν
προκύψουσιν ὥραι 12· ἢ γεγραφθωσαν ἐν σχήματι κλά-
σματος, εἴτ' ἐν $\frac{1}{336}$, ὅπερ, ἐφ' ἀπαισέραν ἐκθεσιν ἀνα-
χθέν, παρέξει $\frac{1}{2}$ ἡμέραν· ἔξει ἄρα ἡμῖν ὁ περιηγητὴς
δαπανᾶν ἡμέρας 10 ἃ ὥρας 12.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν Κλασμάτων.

221. Αἴτημα. Αἰτῶ δὴ μονάδα, ἣν ἄντις βέ-
λοιο, λέγω δὲ οἷον ὀργάν, ὀκᾶν, πλανήτην κτ. συν-
τιθεσθαι ἐκ δέκα καινῶν μονάδων, ἢ μερῶν ἰσαλλήλων·
ἐκάσῃ ἐν τῶν καινῶν τέττων ἐστὶν $\frac{1}{10}$ τῆς πρώτης. Αἰτῶ δὲ
ἃ ἐκάσῃ τῶν δευτέρων τέττων μονάδων συγκείσθαι ἐξ
ἄλλων δέκα· ἐκάσῃ ἐν τῶν τρίτων τέττων μονάδων ἐστὶ
τῶν δευτέρων μὲν ἐκάσῃς $\frac{1}{10}$, τῶν δὲ πρώτων $\frac{1}{100}$ · εἰάν
δ' αἰτήσω ἐτι ἃ ἐκάσῃ τέττων συντιθεσθαι αὐτὰ ἐκ δέκα
ἄλλων· τέττων τῶν τετάρτων ἐκάσῃ μονάς ἐστὶ $\frac{1}{10}$ μὲν τῶν
τρίτων, $\frac{1}{100}$ τῶν δευτέρων, $\frac{1}{1000}$ δὲ τῶν πρώτων, καὶ
ὕτως ἐφεξῆς· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφύονται τὰ καλούμενα δε-
καδικὰ κλάσματα.

222. Πορίσματα. Α'. Ἀπαν ἄρα δεκαδικὸν
κλάσμα παρονομασίην ἔχει 1 σὺν ἐνὶ ἢ πλείοσι 0· οἷον
 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κτ.

223. Β'. Εἰάν ἀρισερόθεν ἐπὶ τὰ δεξιὰ χωρῶσι τὰ
δε τὰ κλάσματα κατὰ τὴν σχετικὴν αὐτῶν δύναμιν, ἀρ-
χόμενα ἐκ τῶν δεκαδικῶν, ἢ δύναμις αὐτῶν ἐλαττωθῇσε.

ται κατὰ τὰς ἐκ διαδοχῆς μονάδας τῶν ἀριθμῶν ἐν τοιαύτῃ τάξει, δεκατημόρια, ἑκατοσημόρια, χιλιοσημόρια, μυριοσημόρια, ἑκατοντάκις χιλιοσημόρια, μυλλιονιοσημόρια κτ.

224. ΤΠΟΔΕΙΜΓΑ. Τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν θεωρῶμενοι, εὐρίσκεται, ὅτι ἡ διάμετρος αὐτῆς, ἀντὶ μονάδος ληφθεῖσα, τριπλασιαζομένη, ἴσῃται τῇ περιφείῃ σὺν τῷ 3, σὺν τῷ 8 σὺν τῷ 8 σὺν τῷ 8 κτ. τῆς διαμέτρου· ἐὰν ὅν γραφῇ πρῶτον μὲν ὁ ὀλοχρεὺς 3, εἴτα πρὸς δεξιὰν αὐτῆς οἱ ἀριθμηταὶ 1, 4, 1, 5, κατὰ τὴν τάξιν τῶν δυνάμεων, ἀποχωριζόμενοι τῷ ὀλοχρεῶς διὰ τῆς (,) ὑποδιαστολῆς κατὰ τόνδε τὸν τρόπον 3,1415, ἡ μὲν 1, ἡ ἀμέσως τῷ 3 παρακειμένη, δηλώσει τὸ· 4 δὲ, δηλώσῃσι τῷ 3· 1 δὲ, τῷ 8· 5 δὲ, τῷ 8.

225. Γ'. Παρετετηρηκότες ἄρα, ὅτι ὁ μὲν κατὰ δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς πρῶτος χαρακτὴρ δεκατημόρια σημαίνει, ὁ δὲ δεύτερος ἑκατοσημόρια καὶ ἑξῆς ἔτιω, ῥᾶ εὐρήσομεν τὴν ἐνόςτινος χαρακτῆρος δύναμιν, ἀναγιγνώσκοντες ἐπὶ τῶν μετὰ τὴν διαστολὴν χαρακτῆρων κατὰ τάξιν ἔτιω· δεκατημόρια, ἑκατοσημόρια, χιλιοσημόρια κτ. ἐστ' ἂν ἐφικώμεθα τῷ χαρακτῆρος ἐκεῖνα· οἷον, εὐρεῖν πρόκειται ἐν τῷ 1,000052 τὴν δύναμιν τῷ 5, ἐπεὶ εὐρίσκεται ἐν τοῖς ἑκατοντάκις χιλιοσημορίοις, ἔσιν ἄρα τῷ 5, 2 δὲ ἐμφαίνει μυλλιονιοσημόρια ἢ τῷ 5.

226. Δ'. Ἄμα ἐν τῷ ὀφθῆναι τὴν τάξιν, ἡ τὸν χώρον, ἐφ' οὗ ἔσιν ὁ δεκαδικὸς χαρακτὴρ, γνωσθήσεται ἡ δύναμις, μηδὲ τὴν ἀρχὴν τῷ παρονομαστῷ γραφέντος· ἔτιω ἰδὼν τὸν 5 ἐπὶ τῷ πέμπτῳ χώρῳ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ὑποδείγματι, συνάγω ἐκ τούτου, ὅτι ὁ παρονομαστὴς αὐτῷ ἐστὶ 1 παρακολυθέντων αὐτῇ καὶ 0 πέντε, ἢ 100000.

227. Ε'. Ἐκκειμένων πρὸς δεξιὰν τῷ ὀλοχρεῶς τῶν

δεκατημορίων, εἴτα τῶν ἑκατοσημορίων κτ., καθ' ἣν ἤδη σεσημειώκαμεν τάξιν, πᾶσα μονάς, πρὸς τὸ δοκῶν ἀπὸ τινος εἰλημμένη χαρακτῆρος, αἶτις τὸ δεκαπλάσιον δύναται τῆς τῷ πρὸς δεξιὰν ἀμέσως γειτνιαζόντος χαρακτῆρος· ἔτις ἐπὶ τῷ 3, 1, 4, 5· 1 τῶν τῷ 3 ὅλῳ. ὁμοῦ σημαίνει $\frac{1}{3}$ · ταύτης μέντοι σημαίνει μόνον τὸ μονάς τῶν τῷ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν χαρακτῆρος· 1 δὲ ἐκ τῶν τῷ 4 καθ' αὐτὴν μὲν ἐστὶ $\frac{1}{4}$ · ἀλλὰ 1, ἢ τῷ, ὃ κεῖται πρὸς ἀριστερὰν τῷ 4 δεκαπλάσιον δύναται τῷ $\frac{1}{4}$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

228. Ζ'. Εἰκὸς ἄρα δέκα μονάδας χωρὶς τινὸς ἰσχύειν αἶτις ἴσον μὲν τῷ ἐγγύς πρὸς ἀριστερὰν παρακειμένῃ, ἔτις $\frac{1}{10}$ ἐστὶν ἴσον $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ ἴσον $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ ἴσον μονάδι ὅλῳ. σκερεῖ.

229. Ζ'. Ταῦτόν ἄρα, ὃ καὶ τοῖς ὅλοσχερέσι τῶν ἀριθμῶν, ξυμβαίνει καὶ τοῖς δεκαδικοῖς ὁράται κατὰ γὰρ τὴν σχετικὴν αὐτῶν δύναμιν· ἐκεῖθι γὰρ μονάδες δέκα ἀριθμοῦ τινος ἰσοσθένει μονάδι τῷ ἀμέσως πρὸς ἀριστερὰν παρακειμένῃ (33)· καθάπερ ἤδη καὶ ἐν τοῖς δεκαδικοῖς.

230. Η'. Ἰν' ἐν χαρακτῆρσιν ἐκτεθῇ κλάσμα τι δεκαδικόν, διὰ λόγου ἐκπεφρασμένον, γράφοντες τὸν ὅλοσχερῆ, ἢ, εἰ μὴ παρὲν ὅλοσχερῆς, 0, καὶ τιθέντες πρὸς δεξιὰν τῷ ὅλοσχερῆς ὑποδιαστολὴν, πρὸς δεξιὰν αὐτῆς γράφομεν τὸν τῷ κλάσματος ἀριθμητὴν τόσους πλὴν ἐνὸς περιέχοντα χαρακτῆρας, ὅσους περιέχει ὁ παρονομαστής, αὐτὲ δὲ τῷ παρονομαστῇ παραμελῶμεν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ. Εἰς ἐκθεσιν λεγῶν 4 καὶ $\frac{1}{10}$ λέγας, τεθείσθω εἰς μόνος χαρακτῆρ ἐν δεξιᾷ τῆς ὑποδιαστολῆς, ἅτε δυοῖν εὐμνησθέντος τῷ παρονομαστῇ χαρακτῆρων, γραφέντων 4, 5· ὑπὲρ δὲ $\frac{1}{10}$, γεγράφθω 0, 06, τι-

θεμένων δύο χαρακτήρων κατὰ δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς διὰ τῆς τῆ παρονομαστὴ τρεῖς· ἐπεὶ δὲ μηδεὶς πᾶρεσιν ὁ λοχαρῆς, τίθεται ὁ ἀντὶ τῶν ὀλοχαρῶν· ὅτι δὲ ὁ ἐκδηλοὶ ἑκατοσημίρια, δεκατημορίων χῆται, γράφεται ἐν τῷ αὐτῶν χώρῳ 0· ὑπὲρ δὲ τῶν 0,0037. Τὸ γὰρ τῶν ἐς τὸν συν τῶν ἀλλὰ τῶν ἐστὶν ἴσων τῶν (173. Β.)· ἄρα τίθεται ὁ 3 ἐν τῷ τῶν χιλιοσῶν χώρῳ, σημειωμένων δύο 0 κατ' ἀριστερὰν, τὸ μὲν ὑπὲρ τῶν δεκατημορίων, ὑπὲρ δὲ τῶν ἑκατοσημορίων θάτερον.

231. Θ'. Τῶν ἀντίων ἄρα, ἵν' ἐκφρασθῶσιν οἱ ἐκ τε θειμένοι δεκαδικοὶ χαρακτήρες, ἔξέσαι ἐκ τῶν εἰρημίνων, ἢ ἐκάστῳ χαρακτήρι ἀπονεῖμαι τὸν κατὰ τὸν οἰκεῖον χώρον ἐπανήκοντα οἱ παρονομαστὴν, ἢ ἅμα πᾶσι παρονομαστὴν ἀποδῆναι, ἐκδηλέμενον διὰ 1, συνεφελέσεως δεξιόθεν τοσαῦτα 10, ὅσοι πᾶρεσιν ἐν τοῖς δεξιοῖς τῆς ὑποδιαστολῆς χαρακτήρες.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πλανήτε τινὸς ἡ διάμετρος, τῆς κατὰ τὴν γῆν διαμέτρου ὡς μονάδος τεθείσης, εὐρίσκεται ἔσα 25, 235· ἀπαγγελέμεν ἡ 25 γῆς διάμετροι συν τῶν συν τῶν τῶν τῆς διαμέτρου· ἢ γῆν ἀφαιρῶντες τῷ 235 ἀριθμητῇ παρονομαστὴν 1 συν τρισὶ 0· ἀπαγγελέμεν ἐπὶ 25 συν τῶν· 25 διαμέτραι γῆς συν 235 χιλιοστοῖς τῆς διαμέτρου.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐπὶ 0,0502, ἀπαγγελέμεν, ἢ τῶν συν τῶν· ἢ τινέντες παρονομαστὴν 1 συν τέσσαρσι 0, ὡς τεσσάρων ὄντων χαρακτήρων πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ ποῖντες τῶν· 502 μυριοσημόρια.

232. Ι'. Ὅσα ἂν γραφῶσι 0 κατὰ δεξιὰν τῶν τοιούτωνδε κλάσμάτων, ἢ μὴ μετακινήσεται ἢ τῆ κλάσμα.

τος δύναμις· ἔτις ὑδὲν διενήνοχε 0,3000, ἢ 0,3, εἴτ' ἔν τῷ καθ' ἑαυτὸ δὲ τυτὶ φανερόν· πάντα γὰρ τὰ δεξιόθεν τῷ 3 μηδενικά ἐκδηλῶσι μόνον ὅτι παρὰ τὰ 3. μηδὲν ἐστὶ μήτε ἑκατοσημόριον, μήτε χιλιοσόν κτ.. Ὡς περ ἀμέλει τὰ κατ' ἀριστερὰν τῶν ὀλοχερῶν, ὡς ἐπὶ τῷ 47, κατὰ τόνδε τὸν τρόπον, 00047, ἐκδηλῶσι μόνον, ὅτι μηδεμία πάρεστιν ἑκατοντάς, μήτε χιλιάς κτ.. Ἄλλως· εἰς ἔκφρασιν 0,3000 λαμβάνεται παρονομασῆς 10000 (231)· ἀλλὰ $\frac{3}{10000}$ ἐστὶν ἴσον τῷ $\frac{3}{10}$, ἢ 0,3· ἄρα κτ.

233. 1Α'. Ὅσοιδηποτὲν τῶν δεξιόσε δεστικῶν χαρακτῆρων, ὑδέποτε ἰσοδυναμήσουσι 1 τῶν ἐκ τῶν λαιῶν· ἔτις ὁ 2,0, φέρ' εἰπεῖν, μείζων ἐστὶν ἢ 1,9999999· ἵνα γὰρ ἔτις ἐκείνῳ ἐξισωθῇ δεήσει 1 προσθεῖναι τῷ ἐν δεξιόσε ἐσδόμῳ 9, ἥτις παρεχομένη τὸν 2 ὀλοχερῇ, ἀφανίζει πάντας τὰς 9, ὡς δὴ ἐδῶκεται $\frac{1,9999999}{1}$ ἐν τῇ ἐπομένῃ προσθέσει· ἄρα ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ὑδὲν ὅλως ἐπαύξυσί τὴν $\frac{1}{2,0000000}$ τῷ ὀλοχερῇ 2 δύναμιν (232).

234. Διὰ τῷ αὐτῷ λογισμῷ πᾶς τις πεισθήσεται, ὡς ὅσοι δὴ ποτε δεστικοὶ χαρακτῆρες τῶν ἐν τῇ δεξιᾷ ὑδέποτε ἰσοδυναμήσουσι μονάδι τῷ ἐν λαιοῖς χαρακτῆρος· καὶ γὰρ 0,3, ἢ τῷ μείζων ἐστὶ τῷ 0,299999999 τῇ ποσότητι $\frac{1}{1000000000}$.

235. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ἐκθέσθαι ὑπὲρ παντὸς πράγματος, ἐν εἶδος μέτρῳ, ἐν τὸν τρόπον, καθ' ὃν ῥᾶσα λογισθῆσονται αὐτῷ τὰ μέρη.

ΛΥΣΙΣ. Α'. Δυνατὸν ἂν εἴη διὰ κοινῆς ψηφίσματος διορίσαι τῷ μήκει μέτρον, ἢ γραμμὴν κατὰ μῆκος, εἰλημμένην πρὸς τὸ δοκῆν, τὸν βασιλικὸν καλούμενον, φέρ' εἰπεῖν, πόδα· τοιούτῳ τι σχέδιον θεωρηθεῖν ἂν κοινὸν ἐπὶ

πάσης επικρατείας, καὶ πάντα τὰ τῶν ἀνθρώπων ἔργα παραβληθείησαν τῷ τοιῷδε σχεδίῳ. Διαιρεθείη δὲ τοῦτ' ὁ μέτρον τὸ, ὡς ὅρος συγκρίσεως, ἐκληφθῆσόμενον, εἰς δέκα ἰσάλληλα μέρη, ἃ σημανθείη, εἰ δόξειεν, ὀνόματι κατὰ νῦν, κληθέντα, φέρ' εἰπεῖν, δάκτυλοι. Ταῦτα δὲ τῷ δεκατημόριον, ἢ δάκτυλοι, ὑποδιαιρεθείησαν ἂν ἔτι εἰς ἄλλα δέκα μέρη, ἃ κληθείησαν, εἰ καὶ τὸτο δόξειε, γραμμαί, ἔσαι καὶ αὐταὶ τῷ δακτύλῳ δεκατημόριον, καὶ κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἑκατοσημόριον τῷ ποδὸς, καὶ αἰεὶ ἔτω.

Β'. Ο' τετραγωνικὸς πῦς, συνιστάμενος ἐκ τῷ κατὰ μήκος ποδὸς, εἴη ἂν τὸ τῶν ἐπιφανῶν μέτρον· ὁ δὲ κυβικός ἐκ τῷ τετραγωνικῷ ποδὸς, εἴη ἂν τὸ τῶν στερεῶν καὶ ὑγρῶν μέτρον· ἑκάτερα δὲ διαιρεθείη ἂν εἰς δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά κτ.

Γ'. Περὶ δὲ γε τῶν σαβμῶν, κυβικὸς εἰς πῦς ὕλης ἡστίνων καὶ τῆς μέντοι κατὰ καιρὸς μὴ μεταλλοιμένης, ὅσον μολύβδου, κληθείη ἂν Τάλαντον. Παραβληθείη δὲ τούτῳ τῷ σαβμῷ διὰ ζυγῶν δικαιοτάτη πάνθ' ὅσα βάρους ἔχει ἐν τῷ μετ' ἀλλήλων κοινωνικῷ βίῳ. Τούτῳ δὲ τὸ βάρους διαιρεθείη ἂν καὶ αὐτὸ εἰς δέκα μέρη ἰσάλληλα, ἃ κληθείη, εἰ δόξειε, λίτραι· αἱ δὲ εἰς δέκα ἄλλα μέρη, ἃ κληθείησαν ὑγγαίαι, ὧν ἑκάστη εἰς δέκα ἄλλα ἰσάλληλα, ἃ δραχμαὶ κληθείησαν κτ.

Δ'. Περὶ δὲ τῶν νομισμάτων, ληφθείη ἂν κυβίσκος ἀργύρου καθαρῷ, ὅς εἴη ἀκριβῶς δεκαδικὸν τῷ κυβικῷ ποδὸς, ὅσον τοῦτο· αὕτη δὲ ἡ μονάς, ἢ τὸ τῶν νομισμάτων μέτρον. διαιρεθείη ἂν ἐκτιμηθὲν εἰς δεκαδικὰ, ὧν ἑκάστων κληθείη δέκατον· τὸ δὲ αὐτὸ εἰς ἄλλα δεκατημόρια, ὧν ἑκάστων κληθείη ἂν ἑκατοσόν· αὕτη δὲ εἰς καινὰ δεκατημόρια, ἃ κληθείη ἂν χιλιοστά κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ο' γὰρ ἔτω τεθεὶς πῦς, ἢ ἐν ἀκριβὲς τῷ ποδὸς δεκατημόριον, εἴη ἂν τὸ μόνον μέτρον ὑπὲρ παντὸς πράγματος· ὁ δὲ λογισμὸς τῶν διαφορῶν μερῶν τῆδε τῷ μέτρῳ, αἰεὶ ὄντων δεκαδικῶν, γένοιτ' ἂν ἐν τῇ αὐτῇ εὐμαρείᾳ, εἰ μὴ καὶ πλείονι, ὥσπερ καὶ ὁ τῶν ὀλοχερῶν (229). Ο. Ε. Π. καὶ Δ.

236. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων λογισμὸς, εἰ καὶ μηκέτι τῷ κοινωνικῷ βίῳ εἰς χρῆσιν παρειληπταί, τοῖς μὲν τοι Γεωμέτραις εὐχρηστότος ὑπάρχει· δι' αὐτὴ γὰρ, ὡς ὀφόμεθα, ῥιζῶν ἐξαγωγὰς, λογαριθμῶν τε, καὶ ἡμετέρων κτ. πίνακας ἐπιτηδεύουσι.

237. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Λείψανον διαιρέσεως, ἢ κλάσμα τὸ τυχὸν ἐπὶ δεκαδικὰ ἀναγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Γράψον οὐ πρὸς δεξιὰν τῷ λειψάνῳ, ἢ τῷ ἀριθμητῇ, καὶ διέλε τὸ ἅλον διὰ τῷ διαιρέτῃ, ἢ τῷ παρονομαστῇ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Τῷ 73 διὰ 5 διαιρεθέντος, πηλίκον προέκυψε 14, καὶ κατάλοιπον 3· οὐ ἐν γραφέντος ἐν δεξιᾷ τῷ καταλοίπῳ 3, $\frac{3}{5}$ δίδωσιν 6· ἅπαν ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 14,6 (230).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ὑπὲρ τῷ λειψάνῳ, ἢ κλάσματος $\frac{2}{5}$, γράψον οὐ ἐν δεξιᾷ τῷ 9, καὶ διέλε 90 διὰ 20· πηλίκον εἶναι 4 μετὰ κατάλοιπον 10· τότε πρὸς δεξιὰν γράψον 0, καὶ διέλε 100 διὰ 20, ὅθεν εἶναι πηλίκον 5· εἶναι ἄρα τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 0,45 ἢ δύναμις τῷ $\frac{9}{20}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ τῷ ἐν δεξιᾷ τεθέντος 0, ὁ διαιρέτεος 90, γεγωνὸς δεκάκις μείζων, παρέξει πηλίκον 4 ὡσαύτως δεκάκις μείζων· ἐμφαίνει ἄρα ὁ 4 δεκατημόρια· πρὸς δεξιὰν δὲ τῷ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως πηλίκῳ 10 γρα-

φέντας ἔτι 0, ὁ νέος διαιρετέος ἀποκαταστήσεται ἑκατον-
ταπλάσιος. Τὸ ἄρα πηλίκον 5 ἐμφαίνει ἑκατοσημόρια·
ἀλλὰ 0, 45 δηλαδὴ $\frac{45}{100}$ σὺν $\frac{1}{100}$ (231) ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Πλανήτε τινὸς περιφέρειά ἐστὶν ἴση $106\frac{1}{3}^{\circ}$ λέγας· ἢ ἐν ἐκτιμῇ ἡ τῆς περιφέρειας ταύτης δύναμις, εὐρίσκεται τὸ κατ' ἀρχὰς (146) ἐν ὀλοχερέσι λέγαι 9424, μετὰ καταλοίπυ 88· γραφέντος ἔν ἐν δεξιᾷ τέτυθ 0, διηρήσθω 880 διὰ 113, ὅθεν ἔσαι πηλίκον 7 μετὰ καταλοίπυ 89. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐπανειλημμένης τῆς διαιρέσεως, εὐρεθήσεται ἔντε ὀλοχερέσι 5 δεκαδικοῖς πηλίκον 9424, 77876106194.690265 κτ.

238. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἰδέν ἐξέειν ἐπὶ τῷδε τῷ
υποδείγματι, ὡς εἰσθ' ὅτε τελείως ἐπὶ δεκαδικὰ ἀνα-
χθῆναι λείψανον διαιρέσεως ἢ κλάσμα, ἀνένδεκτον· καί
τοι αἱ εὐρεθῆναι δύναται ἀριθμὸς δεκαδικῶν ὡς ἐγγίσει
τῷ ἀληθεῖ γινόμενος. Εἴπερ γάρ τῷδε τῷ υποδείγματι,
συνεχιζομένης τῆς διαιρέσεως γραφῆναι δύναται ἐν δε-
ξιά τῷ ἐσχάτῳ χαρακτήρι δεκαδικῷ 5, νέοι χαρακτήρες
ἀπειροὶ δεκατικοί, οἵτινες ἅμα ἔτα μονάδι τῷ 5 ἰσοδυνα-
μοῦσι (234)· ἕτως ἄρα τὸ καταλειφθέν μετὰ τὸν χαρα-
κτήρα 5, ἓκ ἰσοδυναμεῖ ἑτά μονάδι τῶν τῷ 5, τυτέσι ἐπὶ
τῷ δεκάτῳ ἐβδόμῃ χώρῃ· ἐκτίθειται ἄρα ἡ ζητούμενη τῷ
πηλίκου δύνاميς ἐλάττων σχεδόν τοσοῦτος τοσοῦτος
λέγας, εἴτ' ἐν ἐλάττω ἢ τοσοῦτος τοσοῦτος σήματος (149).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ως αὐτως περὶ τῆ $\frac{2}{3}$ εὐρεθήσονται
α,666666666 κτ.

239. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Συνάψαι δεκαδικὰ κλάσματα.

ΛΤΣΙΣ. Ποίησον ὡς καὶ τοῖς ἐλοχερέσι, γράφων

μετὰ προσοχῆς πάντα τὰ δεκαδικὰ κατὰ σήλην μίαν ἀνωθὲν ἐπὶ τὰ κάτω, ὡσαύτως ἅπαντα τὰ ἑκατημόρια ἐξῆς ἔτω.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐς συναπτεῖα 15, 37, ἐξ 0,005, ἐξ 4, 3, ἐξ 0,89· γράψον ἐν ὀλοχερεῖς ὑπὸ ὀλοχερεῖς, κλάσματα ὑπὸ κλάσματα, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα· μέτελθε εἰς τα τὰ τῆς συνάψεως, ὡς καὶ τοῖς ὀλοχερεῖσιν· ἔσαι δὴ ἀθροισμα 20 ἐξ 1000.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπερίδεται ἡ τῆς πράξεως θεωρία ἐπὶ τοῖς σεσημειωμένοις (228)· δέκα, φέρ' εἰπεῖν ἑκατοτημόρια συνισῶσιν ἐν δεκατημόριον, ἐξ δέκα δεκατημόρια, μίαν μονάδα τῶν ὀλοχερῶν.

ΤΠΟΔΕΙΔΜΑ Β΄.

240. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄.** Ἀφελειν

κλάσματα δεκαδικὰ.

ΛΤΣΙΣ. Ὡς περ ἐπὶ τῆς προσθέσεως, ἔτω καὶ ταῦθα γράψον ὀλοχερεῖς ὑπὸ ὀλοχερεῖς, κλάσματα ὑπὸ κλάσματα, ἑκασον χαρακτῆρα κατὰ τὴν σχετικὴν αὐτῇ δύναμιν· ποιήσον εἴτα τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς περ ἐπὶ τῶν ὀλοχερῶν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἀγγος τι χωρεῖ ἐγγύας 15, 072 πλὴν 3,98· γράψον ἐν. . .

Ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, ὡς καπὶ τῶν ὀλοχερῶν, εὐρίσκεται 11, 092.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἀπὸ λεγῶν 9 ἀφελειν ζητεῖται 5, 0942· γράψον τέσσαρα 0 ἐκ δεξιῶν τῇ 9, ὅπερ ἡκιστα λυμάνεται τὴν αὐτῇ δύναμιν (232), ἐξ ἀφελα, ὡς περ ὠροθέτηται.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ μὲν δεῖξις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῆς προσθέσεως· ἡ δ' ἀμφοτέρων βάσανός ἐστιν ἡ αὐτὴ, ἥτις καὶ πρὸς τῶν ὀλοχερῶν.

241. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.** Πολλαπλασιάσαι κλάσματα δεκαδικά.

ΛΥΣΙΣ. Πολλαπλασιάσον τὰ δοθέντα δεκαδικά, ὡς εἰ ἦσαν ἀριθμοὶ ὀλοχρεῖς· εἴτα διαχώρισον ἐκ δεξιῶν τῷ προκύπτοντος τοσούτους χαρακτῆρας, ὅσα ἦσαν κοινῇ τῷ τε πολλαπλασιασέῳ καὶ τῷ πολλαπλασιασῇ δεκαδικά.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πρόκειται τετραγωνίσαι, εἴτ' ἐν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαι τὸν 2,05·

2,05	2,05
πολλαπλασιάσον τοίνυν κατὰ τὴν ἐν τοῖς ὀλο-	2,05
χερείσιν ἀποδοθέντας κανόνας· καὶ ἐπεὶ πάρει-	10 25
σι δύο δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τῷ πολλαπλα-	0 0
σιασέῳ, καὶ τοσοῦτοι τῷ πολλαπλασιασῇ, δια-	410
χώρισον τέσσαρας χαρακτῆρας ἐκ δεξιῶν τῷ	4,20 25
προκύπτοντος· ἔσται ἔν τῳ 4,2025.	

ΔΕΙΞΙΣ. 2,05 ἐστὶ 2 σὺν $\frac{5}{100}$, εἴτ' ἐν $\frac{170}{100}$ (170), ἀλλαμὴν $\frac{170}{100}$, πολλαπλασιασθέν ἐπὶ $\frac{170}{100}$, παράγει $\frac{28900}{10000}$ · τῷτο δὲ ἐστὶ τῶνόντι ταυτὸν τῷ 4 $\frac{28900}{10000}$ · τατέσι ταυτὸν τῷ 4,2025 (280)· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

242. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Εἰάν δὲ τῷ προκύπτοντι μὴ πᾶρῶσιν ἱκανοὶ χαρακτῆρες, ἵν' ἀποχωρισθῇναι ἔχωσιν, ὅσοι ὑπάρχουσιν δεκαδικοὶ τῷ τε πολλαπλασιασῇ καὶ πολλαπλασιασέῳ, τοσῶντα οὖν δετέον κατὰ τὰ λαϊὰ τῷ προκύπτοντος, ὥστε ἐξεῖναι τὴν ἀναγκαίαν χαρακτῆρας καταχωρίσαι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κεῖσθω ἐν πολλαπλασιάσαι 0,007 διὰ 0,0004· λέγε δὴ τετράκις 7 ποιῶσιν 28, καὶ ἐπεὶ ἐπτὰ πάρεσι δεκαδιὰ ἀμφοῖν τῷ τε πολλαπλασια-

ση ἢ τῷ πολλαπλασιασέω, τίθει μηδενικά 5 κατὰ τὰ λαιὰ τῷ 28, ἢ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς (242)· ὅθεν ἔσαι 0,0000028.

ΔΕΙΞΙΣ. 0,007 εἰν ἴσον τῷ 888 (888) ἢ 0,0004 εἰν ἴσον τῷ 400· ἄρα τῷ 888 πολλαπλασιασθέν διὰ τῷ 400 δίδωσι τῷ 355200, ὅπερ δύναται ἴσα τῷ 0,0000028 (230).

243. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Εὑρεῖν τὴν δύναμιν κλάσματος δεκαδικῆ, ὀργιᾶς, λίτρας κτ. ἐμφαίνοντος.

ΛΤΣΙΣ. Πολλαπλασίασον τὸ κλάσμα διὰ τῷ ἐμφαίνοντος, ὅσakis μὲν τῷ γραπτῷ εἶδους ἐμπεριέχεται τῇ μονάδι τῷ παρισταμένῳ κλάσματος.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πόσοις ποσὶ, δακτύλοις κτ. ἰσοδυναμεῖσι 4,532 ὀργιᾶς κατὰ μῆκος; δέον ἔν λαβεῖν πρῶτον τὴν πόδας, πολλαπλασίασον 4,532 ἐπὶ 6, ὅθεν προκύπτει 27,192· πολλαπλασίασον εἴτα τὸ 0,192 ἐπὶ 12 ἢ εὔροις τὴν δακτύλους· προκύπτει ἔν 2,304· εἰς δὲ πολλαπλασίασον 0,304 ἐπὶ 12 εἰς εὔρεσιν τῶν γραμμῶν· ὅθεν ἔσαι 3,648· τέλος δὲ εἰς σιγμάτων εὔρεσιν πολλαπλασίασον ἐπὶ 12 τὸν 0,648· ὅθεν πρόεισι 7,776, ἢ ὅτι ἔγγισα 8 σίγματα· ἢ ἄρα ὅλη δύναμις, 27 πόδες, 2 δάκτυλοι, 3 γραμμαὶ, 8 σίγματα. Οἱ δέ γε τῆς πράξεως ταύτης λόγος ἔπεται ἐξ ὧν φθάσαντες εἰρήκαμεν (171, 172 κτ.).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. 0,98 κυβικῆ ποδὸς πόσοις κυβικοῖς δακτύλοις κτ. ἰσοδυναμεῖσι; ὁ μὲν 0,28 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 1728 (156), παράγει 1693,44· ὁ δὲ 44 ἐπὶ 1728, τὸν 760, 32· ὁ δὲ 32 ἐπὶ 1728, τὸν 552,96· ἢ ἄρα ὅλη δύναμις, 1693 δάκτυλοι κυβικοὶ, 760 γραμμαὶ, 552 σίγματα κυβικά.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Πόσου τιμῶνται 5,45 ὀργυῖαι κατὰ μῆκος, κατὰ λόγον τῆς ὀργυῖαι πρὸς γρόσια 5. Πεπολλαπλασιάσθω πρῶτον ἐπὶ 5· ἐκ δὲ τῆς προκύπτουσας 27,25, πεπολλαπλασιάσθω ὁ 25 ἐπὶ 40 (243)· ὅθεν προκύψει 10,00· ὅτως ἄρα 5,25 ὀργυῖαι τιμῶνται γροσίων 27 καὶ 10 παράδων.

244. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.** Διελεῖν δεκαδικὰ κλάσματα.

ΛΥΣΙΣ. α'. Ἰσώσων τὴν ἑντε τῷ διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρετῇ τῶν δεκαδικῶν χώρου, προσθεῖς, εἰδείοι, κατὰ δεξιὰ τὰ δεξιά ὅσα ἀπόχρη τῶν 0 (232). β'. μέτελθε τὰ τῆς διαιρέσεως, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ὀλοχερῶν. γ'. εἴτι περιλειφθεῖη, θέμενος ἀντὶ κατὰ δεξιὰν 0, ἐπανάλαβε τὴν διαίρεσιν, ὡς γέγονεν (237), ὅθεν ἀναφύοντα τὰ δεκαδικά.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἰνα διαιρεθῇ 8,44 διὰ 4, 22, παρατηρηκότες ὅτι ὁ ἐν τῷ διαιρετέῳ ἀριθμὸς τῶν δεκαδικῶν ἰσῆται τῷ τῶν ἐν τῷ διαιρετῇ, διαιρούμεν 844 διὰ 422· πηλίκον δ' ἔσαι λειψάνον ἄτερ ὁ 2 ὀλοχερῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. 8,44 ἴσον τῷ $\frac{844}{100}$ (170), καὶ 4,22 ἴσον $\frac{422}{100}$ · σαφές ἄρα ὅτι $\frac{844}{100}$ δις ἔνεσιν ἐπ' ἀκριβὲς τῷ $\frac{422}{100}$.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰνα διαιρεθῇ 125,202 διὰ 54,2, γραπτέον δύο 0 πρὸς δεξιὰν τῆς διαιρέτης, ἵν' ἔχη καὶ αὐτὸς ὅσα δεκαδικὰ πάρεισι τῷ διαιρετέῳ· 125202 διαιρεθεὶς διὰ 54200 δίδωσιν ἐν ἀρχῇ τὸν ὀλοχερῆ 2 μετὰ λειψάνου 16802, ὃ πρὸς δεξιὰν θέτεον 0· διαιρέσει δὲ προκύπτει 3 πρῶτον δεκαδικὸν μετὰ καταλοίπου 5420· γραπτέον ἐτι 0 ἐν δεξιοῖς τεῷδε τῷ λειψάνῳ· καὶ εὐρεθήσεται 1 δεύτερον δεκαδικὸν σὺν ὑδενὶ καταλοίπῳ· τὸ ἄρα ὅλον πηλίκον ἔσαι 2,31.

ΔΕΙΞΙΣ. 125, 202 εἰν ἴσον τῷ $1\frac{25}{100}$ (170).
 54,2 δὲ ἴσον τῷ $\frac{542}{10}$, ἢ τῷ $1\frac{40}{100}$. σαφὲς ἄρα ὅτι
 54200 χιλιοστὰ δις ἐμπεριέχονται χιλιοστοῖς 125202.
 Τὸ ἄρα πρῶτον πηλίκον ὀφείλει εἶναι ὁ 2 ὀλοχυρής· ἐκ
 δὲ τῆ προσθέντος 0 ἐν ταῖς δεξιοῖς τῆ πρώτης λειψάνου,
 μονὰς μία τῶν ἐν τῷ ἀμέσως γραφησομένῳ πηλίκῳ 3 ὑπο-
 δεκαπλασία εἶναι 1 μιᾶς τῶν ἐν τῷ πρὸ τέτῃ πηλίκῳ 2·
 3 ἄρα σημαίνει ἑξ. κτ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ. Γ'να διαιρεθῇ 4 διὰ 2,5· προ-
 σθέντος 0 τῷ 4, διηρήσθω 40 διὰ 25· τῷ δ' αὖ λει-
 ψάνῳ 15 προσεθήτω 0· ἡ πηλίκου προκύψαντος ἑξ., ἐ-
 πεί μηδὲν καταλείπεται, εἶναι τὸ ὅλον πηλίκον 1,6.

Βάσανος τῆς πράξεως. Εἰς ἐκάστου τῶν προ-
 εκτεθέντων τριῶν ὑποδειγμάτων, τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν δι-
 αιρέτην πολλαπλασιασθὲν ἀποδίδωσι τὸν διαιρετέον
 (241).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Μεθόδων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν.

245. Ο τρόπος, καθ' ὃν, τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, τέταρτος προσευρίσκεται, ὃς περιέχει τοσάκις τὸν τρίτον, ὡσάκις ὁ δεύτερος τὸν πρῶτον, Μέθοδος τῶν τριῶν ἀκρίει.

246. Εὐρίσκεται δὲ ὁ τέταρτος ὅτος, εἰὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τρίτος διὰ τὸ δεύτερον, ὃδ' ἐντεῦθεν προκύπτων διαιρεθῇ διὰ τὸ πρῶτον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐργάται δύο ἐτεκτῆναντο ὀργυῖαις 6· πόσας ἔν τεκτανῦσιν ἐργάται 5; γράψον ἐφεξῆς, 2, 6, 5· εἴτα πολλαπλασιάσων τὸν 6 δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τὰ 5 τρίτη, τὸν δ' ἐντεῦθεν προκύπτοντα 30 διέλε διὰ τὸ 2 πρῶτον ἀριθμὸν· τὸ ἔν 15 πηλίκον ἐστὶν ἀριθμὸς τῶν, ὧν εἰργάσαντο ἐργάται 5, ὀργυιῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ ἐργάται δύο εἰργάσαντο 6 ὀργυῖαις, εἰς ἅρα εἰργάσαντο τῶν 6 τὸ ἡμισυ, ἢ $\frac{6}{2}$ ὀργυῖαις· 5 ἅρα ἐργάται ἐργάζονται πεντάκις τὸ $\frac{6}{2}$, εἴτ' ἐν $\frac{1}{2}^\circ$, ὃ ἐστὶν ὀργυγαὶ 15· σαφὲς ἅρα ἐντεῦθεν, ὡς ἐχρῆν πολ.

λαπλασιάσαι μὲν τὸν 6, δεύτερον ἀριθμὸν, ἐπὶ τὸν 5 τρίτον, τὸν δ' ἐντεῦθεν προκύπτοντα διελεῖν διὰ τῆ πρώτου.
Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ δειχθήσεται γενικώτερόν τε καὶ ἀκριβέστερον, ὃ ἤδη ἐν ἀριθμοῖς εἰδικῶς δέδεικται· τοῖς γὰρ νυνὶ ἀποδοδομένοις ἀγαπήσασιν, οἷς ἂν μὴ ἐξείη μὲν ἐπὶ πολὺ ἐνδιατρίψαι τοῖς μαθηματικοῖς, ἐφιεμένοις ἀλλ' ἢν ἅλῃς τῷ τῆς ἀριθμητικῆς λογισμῷ ἐγγεγυμνασθαι.

247. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πάνθ' ὅσα ἐπιλύονται διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου, καὶ διὰ τῆς ἀποδοδομένης τῶν κλασμάτων θεωρίας ἐπιλυθήσεται· ἐπὶ γὰρ τῇ ἐκτεθέντος ὑποδείγματος ἀνευ τῆς εἰρημένης μεθόδου ὅπως ἄντις συλλογίσαιτο· ἄνθρωποι δύο εἰργάσαντο ὀργυὰς 6· εἰς ἃρ' αὐτῶν εἰργάσατο $\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{2}{3}$, ἢ 3· πέντε ἄρα ἐργάσσονται πεντάκις 3, εἴτ' ἔν 15.

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπὶ βασάνῳ δὲ ταύτης τῆς μεθόδου, τεθέντων τῇ μὲν τρίτῃ ἀριθμῷ, καὶ τῇ ἄρτι εὑρημένῃ τετάρτῃ ἐν τοῖς χώροις τῇ πρώτῃ καὶ τῇ δευτέρῃ· τέττων δὲ γενομένων, τῇ μὲν τρίτῃ, τῇ δὲ τετάρτῃ, γενέσθω καινὴ μέθοδος τῶν τριῶν· ἐν ἑν τῷ φθάσαντι ὑποδείγματι, ἐνθ' εὔρηται τέταρτος ὁ 15, ἀντὶ 2, 6, 5, 15, γεγράφθωσαν 5, 15, 2, 6· καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δεύτερος ὅρος 15 διὰ τῇ 2 τρίτῃ· ὁ δ' ἐντεῦθεν προκύπτων 30 διηρήσθω διὰ τῇ 5 πρώτῃ τῶν ἀριθμῶν· πηλίκῃ ἔν προκύπτοντος 6, συνάγεται ἐκ τούτου ὅτι ἡ πρώτη μέθοδος, ἐξ ἧς ἐπορίσθη ὁ 15, ὡγίως διαπέπρακτο. Ο' δὲ τούτου λόγος, ὅτι ἐπὶ τῆς δευτέρας διαθέσεως εἰ ἀληθύνει, ὡς ὁ 6 τέταρτος ὅρος περιέχει τοσάκις τὸν 2 τρίτον, ὡσάκις περιέχει ὁ 15 τὸν 5, ἐπάναγκες

καὶ τῆς πρώτης τὸν εὐρημένον τέταρτον ὄρον 15 τοσάκις περιέχειν τὸν 5, ὅσάκις ὁ 6 τὸν 2· ἄρα ὁ διὰ τῆς πρώτης μεθόδου εὐρεθεὶς τέταρτος ἀριθμὸς 15 εἶναι ὁ ζητούμενος (245).

249. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Α' διάφορον ἂρ' ἔσαι, ὁπότερον ἄν τις θεῖη τῶν ὄρων δεύτερον, ἢ τρίτον· ἐπὶ γὰρ τῷ προτεθέντος ὑποδείγματος ἀδιαφόρως ἔχει ἐκτεθῆναι, ἢ 2, 6, 5, ἢ 2, 5, 6· εἴτε γὰρ πεντάκις 6, εἴτε ἑξάκις 5, τὸν αὐτὸν προκύπτοντα 30 παρέξωσι, ὅς διὰ τῷ 2 πρώτῃ διαιρεθείς αἰὶ παρέξει τέταρτον τὸν 15.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Α' μ' ἀδιάφορον ἐπὶ ταύτης τῆς μεθόδου ἔχ' ἦττον ἔσαι, εἴτε μείζων εἴη τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ δεύτερος, εἴτ' ἐλάττων, τῷ πρώτῳ· ἐπισκοπῶν γὰρ, εἰ ἐπὶ τῷ φθάσαντος ὑποδείγματος ὑποβώμεθα 6 ἐργάτας διηνυκώτας ὀργιὰς 2, καὶ εἰδέναι βυληθώμεν, ὅποσας ἂν διανύσειαν 15 ἐργάται, συλλογισθώμεθα ὕψι· ὁ ἐργάσαντο 2 ὀργιὰς, εἰς ἓν ἐργάσεται $\frac{1}{2}$, καὶ διὰ 15 ἐργάσανται δεκαπεντάκις τὸ $\frac{1}{2}$, εἴτ' ἓν ὀργιὰς 5· ἐντεῦθεν ἄρα καταφανές, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας περιπτώσεως γραφέντων 6, 2, 15, δεήσει ὡς καὶ πρὶν τῆς πρώτης πολλαπλασιάζειν τὸν 2 δεύτερον ὄρον ἐπὶ τὸν 15 τρίτον, καὶ τὸν ἐκ τούτων προκύπτοντα 30 διαιρεῖν διὰ τῷ πρώτῳ 6· ἐξέσαι δ' εἰπεῖν κανταῦθα (245), ὅτι ὁ εὐρεθεὶς τέταρτος 5 περιέχει τῷ τρίτῳ ὄρῳ 15 τὸ τρίτον, ὥσπερ καὶ ὁ 2 δεύτερος περιέχει τῷ 6 τὸ τρίτον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. 2000 ζρατιῶται λαμβάνουσιν ἐκ τῷ κοινῷ ταμιεῖ 80000 ἀργύρια. Πόσα ἄρα λήφεται ζρατὸς ἀνθρώπων 55640; γράψον τοῖνον 2000, 80000, 55640· καὶ πολλαπλασιάσων τὸν δεύτερον ὄρον ἐπὶ τὸν τρίτον, ὅθεν γενήσεται 445120000, ὅς διὰ 2000 δι-

αιρεθείς ἀποδώσει 2225600 ἀργύρια τῷ προτεθέντι στρατῷ.

Διὰ τῆς τῶν κλασμάτων μεθόδου. Ἐπειδὴ 2000 στρατιῶται λαμβάνουσι 80000, εἰς ἅρα λήφεται $\frac{2}{3}0000$, ἢ 40 ἀργύρια· πολλαπλασιάσον τοῖνον 55640 ἐπὶ 40, καὶ εὐρήσεις, ὡς καὶ προτὲ, ἀργύρια 2225600.

251. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅπηνίκα δὲ, καθάπερ ἐπὶ τῷ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, τὸ κλάσμα, ὃ δίδωσιν ἡμονίαν, ἀναχθῆναι δύναται ἐφ' ὀλοχερῇ, ἢ ἐπ' ἔκθεσιν ἀπλυσέ-
ραν. α'. ὀλογισμὸς ἐπιτομώτερον διανυσθήσεται, διὰ τῶν κλασμάτων πραττόμενος· β'. συντελέσει δὲ καὶ ἐπὶ βα-
σανισμῷ τῆς ὀρεινότευς τῶν τριῶν μεθόδου ὁ δεύτερος λογισμὸς.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. κατέβαλέ τις γρόσια 45 καὶ παράδας 10 ὑπὲρ πήχεων $6\frac{2}{3}$ ὑφάσματος. Πόσας ἔν ἀναλόγως καταβαλεῖ ὑπὲρ $13\frac{1}{2}$ πήχεων; γράψον δὴ πή-
χεις $6\frac{2}{3}$, γρόσια 45 καὶ 10 παράδας, πήχεις $13\frac{1}{2}$. τὸν δὲ δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τῷ τρίτῳ πολλαπλασιάσας, καὶ τὸν ἐντεῦθεν προκύπτοντα διελὼν διὰ τῷ τρίτῳ, ἔξεις γρόσι. 91 παράδ. 25 καὶ $\frac{1}{4}$ παρὰ ὑπὲρ τῆς ζητεμένης τιμῆς.

Διὰ τῆς τῶν κλασμάτων μεθόδου. 6 πήχεις καὶ $\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{20}{3}$ τιμῶνται 45 γροσίων, καὶ 10 παρα-
δῶν, εἰς ἅρα πῆχυς τιμηθήσεται $\frac{2}{3}0$ (*) τῶν 45 γροσίων καὶ

(*) Ἐὰν γὰρ $\frac{20}{3}$ τιμῶνται 45 γροσίων, καὶ 10 παρα-
δῶν, εἰς εὐρεσιν τῆς τιμῆς ἐνὸς πῆχεος συνισῶμεν τὴν
ἑξῆς τῶν τριῶν μέθοδον: $\frac{20}{3}$, 45 γρόσι., 10 παραδ.,
1 πῆχυς· τῷ ἔν γινόμενῳ ἐκ 45 γροσ., 10 παραδῶν,
καὶ 1, ὄντος 45 γροσίων, 10 παραδῶν (78), λοιπὸν

10 παραδῶν, ὅ ἐστι 6 γροσίων ἢ παραδῶν $31\frac{1}{2}$ (303)
 13 ἄρα πήχεις τιμηθήσονται δεκάκις ἢ τρίς 6 γροσίων,
 ἢ παραδῶν $31\frac{1}{2}$. τὸ δὲ ἡμιπήχιον τῷ ἡμίσεως τῶν 6
 γροσίων, ἢ $31\frac{1}{2}$ παραδῶν, ὅπερ ἐστὶν ὡσαύτως 91 γρό-
 σια, ἢ παράδαι $35\frac{1}{2}$

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πηγῆς τινος τετρακρένου, ὁ μὲν
 πρῶτος κρηνὸς πληροὶ τὴν δεξαμενὴν ἐν ὥραις 2, ὁ δὲ
 δεύτερος, ἐν 3, ὁ δὲ τρίτος, ἐν 4, ὁ δὲ τέταρτος, ἐν 5· ἐν
 πόσῳ ἄρα χρόνῳ συλλήβδην πληρώσυσιν αὐτήν; 1 ὥρα πα-
 ρέξει τὸ ἡμισυ τῆς πρώτης, τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς δευτέρας, τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς τρί-
 τας, τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς τετάρτης· ταῦτα ἔν τὰ κλάσματα ἀνήχθω-
 σαν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρνομασίην, ἢ συνήφθωσαν ἀλλήλοις,
 ὧν ἔσται ἄθροισμα $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$. λέγε δὴ ἔν: εἰ ἐπὶ τὸ πληρω-
 θῆναι $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ μέρη τῆς δεξαμενῆς ἀπαιτεῖται 1 ὥρα, ἢ λε-
 πτὰ 60 τοῖς τέσσαρσι κρηνοῖς, πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται
 ἐπὶ τὸ πληρωθῆναι $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ αὐτῆς μέρη, ἢ αὐτὴν ὅλην τὴν
 δεξαμενὴν, ἣν ἤδη καλῶ 1; γράψον ἔν $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, 60 λεπτὰ,
 1. τὸ δὲ προκύπτει ἐκ τῆς 1 ἢ τῆς 60, εἴτ' ἔν τὸν 60
 διελὼν διὰ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ (205) ἔξεις 46 λεπτὰ, 45 δεύτερα,
 11 τρίτα ἢ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ἐνὸς τρίτου τὸν χρόνον, ὃν δαπανήσυσιν
 οἱ τέσσαρες κρηνοὶ συλλήβδην εἰς πλήρωσιν τῆς δεξαμενῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῆς ἀντιστρόφου τῶν τριῶν Μεθόδου.

252. Ὅταν μὲν, τῷ τρίτῳ τῶν τριῶν δεδομένων α.

ἔσι διελεῖν αὐτὸν διὰ τῷ $\frac{2}{3}$, εἴτ' ἔν πολλαπλασιάσαι
 (205) ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ἕκαστ' εἰς πῆχυς τιμηθήσεται $\frac{1}{2}$ τῶν 45
 γροσίων, παράδαι 10.

ριθμῶν μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ ζητούμενος τέταρτος μείζων ἢ τῷ δευτέρῳ· ἢ γὰρ, τῷ τρίτῳ ἐλάττωτος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ τέταρτος ἐλάττων ἢ ἢ ὁ δεύτερος, τῇ καὶ τῶν τριῶν μέθοδος καλεῖται ὀρθή, περὶ ἧς διελήπται ἐν τῷ φθάσαντι Κεφαλαιῷ· ὅταν δὲ, τῷ τρίτῳ τῶν ἀριθμῶν μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ τέταρτος τετραπλάσιον ἢ ἐλάττων τῷ δευτέρῳ· ἢ γὰρ, τῷ τρίτῳ ἐλάττωτος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ τέταρτος μείζων ἢ, ἢ ὁ δεύτερος, ἢ μέθοδος τῶν τριῶν καλεῖται τῇ καὶ τῶν τριῶν Πλαγία, ἢ Ἀντίστροφος, περὶ ἧς ἐνταῦθα ὁ λόγος.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. 4 ἄνθρωποι εἰργάσαντό τι ἐν ἡμέραις 30· ζητεῖται ὅν ἐν πόσαις ἡμέραις τὸ αὐτὸ ἔργον ἐργάσαιντο ἂν ἄνθρωποι 10; εἰ ὅν ἐξ ἧς γραφῶσι: 4 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 10 ἄνθρωποι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητούμενων ἡμερῶν, ὅς ἐστιν ὁ ζητούμενος τέταρτος ὅρος, καὶ ὅν αὐτίκα ὀψόμεθα ὄντα 12, ἔσαι ἐλάττων, ἢ ὁ 30 δευτέρος ὅρος, καί τοι τῷ τρίτῳ ὅρῳ, εἴτ' ὅν τῷ 10 μείζονος ὄντος ἢ ὁ 4 πρῶτος· φανερόν γάρ, ὡς εἰ 4 ἄνθρωποι 30 ἡμέρας ἐδαπάνησαν εἰς τὴν ἐργασίαν, 10 ἄνθρωποι δαπανήσουσιν ἐλάττους ἡμέρας ἀναλόγως εἰς τὴν αὐτὴν ἐργασίαν.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ. ἵνα δὲ διαπραχθῇ ἢ ἀντίστροφος μέθοδος τῶν τριῶν, τεθείωω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἐν τῷ τῷ τρίτῳ χώρῳ, ὁ δὲ τρίτος ἐν τῷ τῷ πρώτῳ, καὶ τὰλλα πεπραχῶ, ὡς ἐπὶ τῆς ὀρθῆς τῶν τριῶν μεθόδου, οἷον ἐπὶ τῷ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, ἀντὶ τῶν 4 ἀνθρώπων, 30 ἡμερῶν, 10 ἀνθρώπων, γεγράφθωσαν: 10 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 4 ἄνθρωποι· διαπραχθείσης ὅν τῆς εὐτάκτου τῶν τριῶν μεθόδου, εὐρεθήσεται τέταρτος ὅρος ἡμέραι 12.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῇ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν τριῶν μεθόδου

διαθέσει: 4 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 10 ἄνθρωποι, 12 ἡμέραι, ὁ τέταρτος ἀριθμὸς 12 περιέχει τοσάκις τὸν πρῶτον 4, ὡσάκις ὁ δεύτερος 30 περιέχει τὸν τρίτον 10· γραφέντων ἔν τῃ μὲν πρώτῃ ἀριθμῷ 4 ἐν τῇ χώρῃ τῇ τρίτῃ 10, καὶ τ' ἀνάπαλιν, συστήσεται νέα διαθέσις τοιαύδε: 10 ἄνθρωποι, 30 ἡμέραι, 4 ἄνθρωποι, 12 ἡμέραι, ἐνθ' ὁ τέταρτος ὅρος 12 τοσάκις περιέχει τὸν 4 τρίτον ὅρον, ὡσάκις ὁ 30 δεύτερος περιέχει τὸν 10 πρῶτον· ἐσι δὲ τῷτο ἰδιότης τῆς ὀρθῆς τῶν τριῶν μεθόδου (243) Ο.Ε.Δ.

Βάσανος τῆς ἀντιξρόφου τῶν τριῶν μεθόδου. Καίτοιγε τῆς βασάνου γενέσθαι δυναμένης ὡς καὶ τῇ ὀρθῇ μεθόδῳ (248), γεγῆσεται μέντοι βέλτιον διὰ τῶν κλασμάτων· ἐπὶ γὰρ τῇ προεκτεθέντῃ ὑποδείγματι, ἐπεὶ 4 ἄνθρωποι εἰργάσαντο ἑκάστης ἡμέρας $\frac{1}{30}$ τῇ ἔργῃ· εἰς ἅρα εἰργάσατο $\frac{1}{12}$ · 10 ἅρα ἐργάζονται καθ' ἑκάστην $\frac{1}{20}$, ἢ $\frac{1}{12}$ · ἐργάζονται ἅρα οἱ αὐτοὶ ὅλον τὸ ἔργον δι' ἡμερῶν 12, ὅς εὐρηται τέταρτος ὅρος καὶ διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Τυπογράφος τις εἰσήγαγεν εἰς βιβλίον σελίδας 400, ἔχουσας ἑκάστην εἰς 30· ἐν δὲ δευτέρᾳ τῆς βίβλου ἐκδόσει ἔθετο ἑκάστη σελίδι εἰς 34· πόσαι ἅρα σελίδες εἰσήχθησαν ἐν τῇ καινῇ ἐκδόσει; ἐσι δὴπε σαφές, ὅτι πλείονων εἰσαχθέντων ἑκάστη σελίδι εἰς 34, αἱ σελίδες ἐλαττωθήσονται· ἀντὶ ἔν: 30, 400, 34 γεγράφθωσαν 34, 400, 30 (252)· ὁ δὲ προκύπτων 12000, διαιρεθεὶς διὰ 34, δίδωσι σελίδας $352\frac{1}{2}$ σελίδας.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἐντινι ἐπαύλει τρέφονται 1230 στρατιῶται, ἐνθ' ἐσὶν ἐδωδιμα μηνῶν 15· ἀλλ' οἱ στρατιῶται ἐπληθύνθησαν μέχρι τῶν 2560· πόσον ἔν χρόνον ἀρκέσουσιν αὐτοῖς τὰ ἐδωδιμα; ἀντὶ: 1230, 15, 2560·

γεγράφθωσαν: 2560, 15, 1250. Πολλαπλασιασθέντος δὲ 15 ἐπὶ 1230, καὶ τῇ ἐντεῦθεν προκύπτοντος διαιρεθέντος διὰ 2560, εὐρεθήσονται θρεψόμενοι 2560 ἄνθρωποι μῆνας 7, ἡμέρας 6, ὥρας 5 καὶ τὶς ὥρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς συνθέτου Μεθόδου τῶν Τριῶν.

254. Ὅταν, ἀντὶ τριῶν ἀριθμῶν, ἡ ὥρων ἐγνωσμένων, δοθῶσι πέντε, ἢ ἑπτὰ, κτ., τινικαῦτα ὀνομάζεται τῷτο Μέθοδος τῶν Πέντε, ἢ Μέθοδος τῶν Ἑπτά, ἢ Μέθοδος τῶν Ἑννέα, καὶ ἐν γένει, Σύνθετος Μέθοδος τῶν Τριῶν, ὡς ἐπιλινομένων τῶν ζητημάτων τὰ πολλὰ διὰ πλείονων μεθόδων ταιῶνδε.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ. Εἴπερ ἐργάται 5 εἰργάσαντο ὅρου γιὰς 17 ἐν ἡμέραις 8, πόσας ἐργάσονται 12 ἐν ἡμέραις 15; ἐπὶ τούτῳ ἐν τῇ προβλήματος πέντε προτιθενται ἐγνωσμένοι ὅροι: τοιγαρὲν, εἰς ἐπίλυσιν ταιῶνδε ζητημάτων, ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δυοὶ χρώμεθα μεθόδοις, ἅλῃς μὲν διαφερέσαις, συμβαλλομέναις μὲντοι ἀμοιβαθὸν τῇ ἀλλήλων βασάνῳ.

255. Α'. ΜΕΘΟΔΟΣ. Γενέσθωσαν δύο μὲν μέθοδοι τῶν τριῶν, ὅπηνικ' ἂν οἱ ἐγνωσμένοι ὅροι ὥσι πέντε: τρεῖς δ', ὅταν ὥσιν ἑπτὰ: τέσσαρες δ', ὅταν ὥσιν ἐννέα κτ.: αἰ μὲντοι ὁ εὐρεθεὶς τέταρτος ὅρος ἐν τῇ ἡγησαμένη μεθόδῳ γενέσθω δεύτερος ἐν τῇ ἐπομένῃ: αὐτίκα ἐν ἐπὶ τῇ προλαβόντος ὑποδείγματος τῶν ἡμερῶν παραφθεισῶν, γενέσθω ἡ μέθοδος κατ' ἀρχὰς ἐπὶ μόνων τῶν

ἐργατῶν, καὶ τῶν ὀργυιῶν: 5 ἐργάται εἰργάσαντο ὀργυι-
 ας 17, πόσας ἔν ἐργάσονται ἐργάται 12; γεγραφθῶ-
 σαν τοίνυν 5, 17, 12, καὶ διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου
 εὐρεθήσεται τὸ τῶν 12 ἔργον ὀργυιαὶ 40½, μηχανισάντων
 ἐν τῷ αὐτῷ, ὡς καὶ οἱ 5 χρόνῳ, ὅεσιν ἡμέραις 15· ἐπη-
 νέχθω εἶτα: εἰ 8 ἡμέραι διανύουσι 40½ ὀργυιας, πόσας
 διανύουσιν ἡμέραι 15; καὶ ἔτω γενέσθω ἡ δευτέρα τῶν
 τριῶν μέθοδος: 8, 40½, 15· ὁ ἔν γινόμενος ὑπὸ τῶν
 δύο ἐσχάτων ἀριθμῶν, ὅεσι 600 σὺν ½, ἢ 612, διαι-
 ρεθεὶς διὰ τῆ πρώτου ὅρου, παρέξει πηλίκον 76½, ὅεσιν
 ὁ ἀριθμὸς τῶν, ὧν ἐν ἡμέραις 15 ἐργάται 12 ἐργάσον-
 ται, ὀργυιῶν.

256. Β'. ΜΕΘΟΔΟΣ. Ὅσοι ποτ' ἂν οἱ ἐγνωσμέ-
 νος ὅροι ᾧσι, μία μόνη γενέσθω τῶν τριῶν μέθοδος κατὰ
 τὰδε. Πᾶντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ συνισῶντες τὸ πρῶτον ἐγνω-
 σμένον ἀποτέλεσμα γραφέντες ὑπάλληλοι πεπολλαπλα-
 σιάσθωσαν ἐπ' ἀλλήλους, ὁ δ' ὑπὸ τετῶν γινόμενος ἔστω
 ὁ πρῶτος τῶν τῆς τῶν τριῶν μεθόδου ὅρων· αὐτὸ δὲ τὸ
 ἐγνωσμένον ἀποτέλεσμα τετάχθω δεύτερος ὅρος· εἶτα δὲ
 γεγραφθῶσαν αὐτῷ ὑπάλληλως οἱ ἐπὶ τῷ προβλήματος
 σπεύδοντες συζηῆσαι τὸ δεύτερον ἀποτέλεσμα καὶ δι' ἀλλή-
 λων πεπολλαπλασιασθῶσαν· τὰ δ' ἄλλα περανθήτωσαν
 κατὰ τὰξιν· ἐπὶ ἔν τῷ προλαβόντος ὑποδείγματος, 17
 μὲν ὀργυιαὶ εἰσὶ τὸ ἐγνωσμένον ἔργον τῶν 5 ἐργατῶν,
 καὶ ἡμερῶν 8· τὸ δὲ ζητούμενόν ἐστι τὸ τῶν 12 ἐργατῶν, καὶ
 ἡμερῶν 15· γεγραφθῶσαν

5 ἐργ.	12 ἐρ.
8 ἡμ.	15 ἡμ.

δὴ πολλαπλασιασθέντων ἔν

40	17	180. 76½
----	----	----------

τῷ μὲν 5 ἐπὶ 8, τῷ δὲ 12 ἐπὶ 15, προκύψουσιν ὑπὲρ τῆς συνήθους τῶν τριῶν μεθόδου

οἱ ὅροι: 40, 17, 180, ἀφ' ὧν ἐξέρχονται, ὡς καὶ πρὶν, 76½ ὀργυαί.

Δειξίς τῆς δευτέρας μεθόδου· 5 γὰρ ἐργάζεται ἐργάζονται τὸ αὐτὸ ἔργον ἐν ἡμέραις 8, ὅπερ ἐργάζεται 40 ἐργάσαιντ' αὐ, ἐν ἡμέρᾳ 1· ἐργάζεται δ' αὐ 12 τὸ αὐτὸ ἐν ἡμέραις 15, καὶ 180 ἐν μιᾷ· ἐξέσαι ἄρα πολλαπλασιάσαι τὰς ἀριθμοὺς 5 καὶ 8, οἵτινες συνισῶσι τὸ πρῶτον ἀποτελεσμα· μετὰ ταῦτα δὲ τὰς 12, 15, τὰς συνισῶντας τὸ δεύτερον, διὰ πατέρου τὸν ἕτερον, καὶ εἰπεῖν ἕτως, εἰ ὁ πρῶτος προκύπτων, 40 ἐργάζεται, διδόνασιν ὀργυὰς 17, πόσας δώσει ὁ δεύτερος, οἱ 180 ἐργάζεται; ἐξ' ὧν γενήσεται ἡ ἀπλὴ τῶν τριῶν μέθοδος ἕτω· 40, 17, 180.

257. Ἀλλὰ ταυτὸν γὰρ αὐ εἶη καὶ περὶ τῆς μεθόδου τῶν ἑπτὰ, τῶν ἐννέα κτ. ὑποβώμεθα γὰρ, ἵν' ἀνακύψῃ τῶν 7 μέθοδος, ὅτι ἐντῷ προεκτεθέντι ὑποδείγματι 5 ἐργάζεται διήνυσαν ὀργυὰς 17, μοχθῶντες ἡμέραις, 8 δι' ὥρων 6 ἐκάστης ἡμέρας, εἰδέναι ἔν βυλόμεθα, πόσας διανύσασιν ἐργάται 12, πανῶντες ἡμέρας 15, δι' ὥρων 8 ἐκάστης ἡμέρας; ἐπενεγκεῖν τοίνυν ἐξέσαι: ἐξάκις 40, ἢ 240 ἐργάται ἐν ὥρᾳ μιᾷ ἐργάζονται τὸ αὐτὸ, ὃ αὐ 40 ἐν ὥραις 6· καὶ αὐ, ὀκτάκις 180 ἐργάται ἐν ὥρᾳ μιᾷ, ὃ καὶ 180 ἐν 8. Πολλαπλασιάσομεν τοιγαρὺν τὰς τρεῖς ἀριθμοὺς 5, 8, 6, οἱ ἀποδιδόντες τὸ πρῶτον ἀποτελεσμα· εἴτα τὰς ἄλλας τρεῖς 12, 15, 8, τὰς ἀποδιδόντας τὸ, ἐν ᾧ τὸ ζήτημα, ἀποτελεσμα, καὶ ἕτως ἐκπερανῶμεν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν: 240 ἐργάται, 17 ὀργυαί, 1440 ἐργάται, 102 ὀργυαί. Ο. Ε. Δ.

258. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ δευτέρα τῶν δύο προεκτε-

θεισῶν μεθόδων ἐπιτομωτέρα τῆς πρώτης τυγχάνουσα αἰ-
ποτε ἐν τῇ πράξει προκρίνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἀντιστροφῆς συνδέτου Μεθόδου τῶν Τριῶν.

259. Μετὰ τὸ ἀναγαγεῖν ἐπὶ τρεῖς πάντας τὲς ὁρὰς
διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου, εἴαν, τῇ τρίτῃ ὁρᾷ μείζονος
ὄντος ἢ ὁ πρῶτος, ὁ ζητούμενος τέταρτος ὁρὰς τὴν ἀντίστοιχον
ἢ ἐλάττω, ἢ ὁ δεύτερος, ἢ ἡ ἀντιστροφῆς, ἀντικαταστα-
θῇ· ὁ τρίτος ὁρὰς ἐν τῷ χώρῳ τῆς πρώτης (253) ἢ πε-
ρανθήτω κατὰ τάξιν ἢ μέθοδος.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τέσσαρες τινες, περιηγούμενοι μη-
νῶν 10, ἐχρήσαντο ὁρισμένῳ ἀθροίσματι χρημάτων, δα-
πανῶντες ἕκαστος 3 γρόσια κατ' ἐκάστην· ἐν πόσοις ἄρα
μηνὶ περιηγῶσιντ' ἂν εἴ τις διὰ τῆς αὐτῆς ἀθροίσματος,
δαπανῶντες ἕκαστος γρόσια

4	10	6
3		5

5 ἐκάστης ἡμέρας; γραφέν-
των ἐν τῷ πρώτῳ, ὡς ὁρᾶται

12	10	30
30	10	12

ἐνταῦθα, ἐπεὶ ὁ τῶν μηνῶν ἀ-
ριθμὸς, ὁ ζητούμενος δηλονότι τέταρτος ὁρὰς, εἴσται ἐλάττω
ἢ ὁ δεύτερος 10, τῇ 30 τρίτῃ μείζονος ὄντος ἢ ὁ πρῶτος
12, συνάγεται ἐντεῦθεν, ὅτι συστήσεται μέθοδος τῶν τρι-
ῶν ἀντιστροφῆς· γεγραφθῶσαν ἄρα: 30, 10, 12, εἴς ὧν
εὐρεθήσεται τέταρτος ὁρὰς ὁ 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ τῆς Συνεξευγμένης Μεθόδου.

260. Ο πηνίκ' ἄν, λόγῳ γινομένη περὶ βαθμῶν, νομισμάτων, ἐκτάσεων κτ. λέγεται μόνιμόν τινα ποσότη-
τα τῷ δεινὸς μέτρῳ ἰσοδυναμεῖν μόνιμῳ ποσότητι τῷ δει-
νός· τότε δ' αὖ μόνιμον ποσὸν ἰσοφνεῖν ποσῷ μόνιμῳ
μέτρῳ ἄλλῃ, καὶ αἰεὶ ὕτω· ὁ κανὼν τῷ εὐρίσκειν τὴν μόνι-
μον τινὸς ποσότητος τῷ πρώτῳ μέτρῳ πρὸς τὴν τῷ ἐσχάτῳ
ἀναφρᾶν καλεῖται Μέθοδος Συνεξευγμένη· ἐπε-
ριδεταὶ δὲ αὕτη αἰεὶ τῇ συνθέτῳ τῶν τριῶν μεθόδῳ, καὶ
ἐπιλυθῆναι δύναται δι' ἐκατέρας τῶν προεκτεθεισῶν με-
θόδων προκρινομένης μέντοι τῆς δευτέρας αἰείποτε.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐάν, πισόλα τῆς Σαβοΐας ἰσο-
 δυναμῇ 36 λίτραις τῆς Γενέβας· δύο δὲ λίτραι τῆς
 Γενέβας ἰσοδυναμῶσι γροσίῳ τῆς Κωνσταντινουπόλεως·
 τρία δὲ γροσία τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἰσοδυναμῶσι δυ-
 σί φορινίσις τῆς Βιέννης, 9 δὲ φορίνα τῆς Βιέννης ἰσοδυ-
 ναμῶσι 2 δεκάτοις τῆς Οὐλάνδας, 10 πισόλαι τῆς Σα-
 βοΐας πόσοις ἰσοδυναμῶσι δεκάτοις τῆς Οὐλάνδας;

Α'. Γεγραφῶσταν ἕκασον εἶδος νομίσματος δις,			
καθ' ἣν ἐν.	1 πιδόλα	36 λίτραι	Γενέβας
ταῦθα ὁρῶν.	2 λίτραι	Γενέβ.	1 γρόσιον
ται τάξιν.	3 γρόσια		2 φιορίνια
	9 φιορίνια		2 δεκάτα. 10 πιδ.
Β'. εἰλήφ-			
θω τὸ προ.	54	144	10 πιδ. 26 δεκ. $\frac{2}{3}$

κύντον ἐξ ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν τῆς πρὸς τὰ λαϊὰ πρῶ-
της σήλης, ὅ ἐσι 54· μετὰ δὲ, τὸ ἐκ τῶν τῆς δευτέρας

ὅ ἐστιν 114· τέλος δὲ τεθείσθωσαν 10 πισόλαι εἰς τρίτον ὅρον τῆς μεθόδου: 54, 144, 10, ἐξ ὧν εὐρεθήσονται αἱ 10 πισόλαι ἰσοδυναμεῖσαι δεκάτοις $26\frac{2}{3}$. βελομένοις δὲ ταῦτα μετελθεῖν κατὰ τὴν πρώτην τῶν μεθόδων, τεσσάρων ἐξῆς δεήσει πράξεων α'. εἰ 36 λίτραι Γενέβας δύνανται 1 πισόλαν Σαβοϊακὴν, 2 λίτραι Γενέβας δύνανται $\frac{2}{3}$ πισόλας· β'. τεθέντων τῶν $\frac{2}{3}$ ἐν τῷ τῶν λιτρῶν χώρῳ ἐπὶ τῆς πρώτης σήλης, εἴπερ 1 γρόσιον δύναται $\frac{2}{3}$, 3 δὴ πε δηνήσονται $\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{1}{3}$ · γ'. τεθέντος $\frac{1}{3}$ ἐν τῷ τῶν γροσίων χώρῳ, εἴπερ φιορίνια 2 δύνανται $\frac{1}{3}$ πισόλας, 9 φιορίνια δυνήσονται $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{1}{3}$ πισόλας· δ'. εἴπερ $\frac{1}{3}$ πισόλας δύνανται 2 δεκάτα, 10 πισόλαι δυνήσονται $\frac{2}{3}$ (205) ἢ $26\frac{2}{3}$, ὡς καὶ πρὶν εὐρηται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐὰν 100 λίτραι σαθρῆ Παρισιακαὶ ἰσοσαθμῶνται 116 λίτραις τῇ Λαγδένῃ· 100 δὲ λίτραι τῇ Λαγδῇ. 100 σαθ. λίτρ. Παρ. 116 λίτρ. Λαγδ. 98, 104 τῇ Μοντ. 100 λίτρ. Λαγδ. 104 Μοντ. πελλιῇ· 100 δὲ 100 λίτρ. Μοντ. 102 Μαρσίλ. τῇ Μοντπελιῇ, 100 λίτρ. Μαρσίλ. $72\frac{1}{2}$ Γενέβ.

 102 τῆς Μαρ- 100000000· 88905648· 85· 75· $\frac{1}{2}$ σιλλίας· 100 δὲ τῆς Μαρσιλλίας, $72\frac{1}{2}$ τῆς Γενέβας, 85 λίτραι παρισιακαὶ πόσαις ἰσοσταλάντευονται γενεδικαῖς; Ἀπάντων τῶν ἀριθμῶν γραφέντων, ὡς ἐνταῦθ' ὁρῶνται, γενέσθω ἀπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν· 100000000, 88905648, 85, ἐξ ὧν εὐρεθήσονται 85 λίτραι Παρισιακαὶ ἰσοσαθμώμεναι Γενεδικαῖς 75 σὺν $\frac{1}{2}$ λίτρας ὡς ἐγγίσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς Ἑταιρείας.

261. Μέθοδος τῆς Ἑταιρείας ἀκεί τὸ εὖρος σκεῖν τὸ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν, τὴν ἐπανήκεσαν ἐκάστῳ τῶν καταβαλόντων ἐν ἑταιρείᾳ τινὶ μερίδας. Τοιγαρὺν ἐν τῷ θα τὸ πάντων ὁμῶς τῶν μερίδων συμπλήρωμα τὸν πρῶτον καθέξει χώρον τῆς τῶν τριῶν μεθόδου, ἢ δ' ὅλην ζημίαν, ἢ τὸ κέρδος, τὸν δεύτερον· ἢ δὲ ἰδιαιτέρα ἐκάστῳ μερὶς τὸν τρίτον, κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Φορμίων, Πausανίας, Ξάνθιππος, ἔθεντο ἐν ἑταιρείᾳ μερίδας· ὁ μὲν Φορμίων γρόσια 5000, ὁ δὲ Πausανίας 9000, ὁ δὲ Ξάνθιππος, 16000· ἐκέρδησαν δ' ὁμῶς πάντες γρόσια 8000· πόσον ἐν ἑσσι ἐκάστῳ κέρδος;

Τὸ πασῶν τῶν μερίδων ἄθροισμὰ ἐστὶ 30000 γρόσια· ὑπὲρ ὧν τῷ Φορμίῳ συγκροτηθήσεται ἡ δεῦτε ἡ μέθοδος· 30000, 8000, 5000, ὅθεν προκύψει 1333 $\frac{1}{3}$ λίτρας.

Τ' πὲρ δὲ τῷ Πausανίᾳ· 30000, 8000, 9000, ἐξ ὧν προκύψει 2400.

Τέλος δὲ ὑπὲρ τῷ Ξανθίππῳ συσταθήσεται ἡ δεῦτε, 30000, 8000, 16000, ὅθεν προκύψει κέρδος 4266 $\frac{2}{3}$.

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρία κέρδη συναφθέντα ἀποπληρῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ταῦτ' ἐπὶ βασάνῳ ξυντελέσει, ὅτι ὑγιῶς πεπέρανται ἢ πρᾶξις.

262. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔστιν ὅτε, παρὰ τὰς τῆς ἑταιρείας μερίδας, προσδεῖ προσέχειν τὸν νῦν καὶ τῷ χρόνῳ· ὡς εἶπερ ὁ Φορμίων ἔθετο 30 οὐκᾶτα ὑπὲρ 5 μηνῶν·

Παυσανίας δὲ 50 ὑπὲρ 10, Ξανθίππος δὲ 80 ὑπὲρ 16· ἐπεὶ τότε τὸ ἐκάστου κέρδος, ἢ ἡ ζημία ἀναλογεῖται ὀφείλει καὶ τῇ κατατεθείσῃ μερίδι, καὶ τῷ χρόνῳ, γενήσεται σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν (256) κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

263. Ὑποθώμεθα τὺς τρεῖς ἐταίρους ἐζημιωμένους ὁμῶς 40 δεκάτοις· πεπολλαπλασιάσθω δὴ ἡ ἐκάστου μερίς ἐπὶ τὸν ἐκάστου χρόνον· ὥτως ἔν τῷ μὲν Φορμίωνι ἔσαι 150, τῷ δὲ Παυσανίᾳ 500, τῷ δὲ Ξανθίππῳ 1280· τὸ δ' ἀπάντων ἄθροισμα 1930· γενέσθω ἔν πρώτῳ μὲν ὅρος ἔτος, δεύτερος δὲ ἡ ὅλη ζημία, τὸ δ' ἐκ τῆς μερίδος ἐκάστου καὶ τῷ χρόνῳ προκύπτει, ὁ τρίτος· ἐκὼν ὑπὲρ μὲν τῷ Φορμίωνος γενήσεται ἡ δὲ ἡ μέθοδος· 1930, 40, 150, ἀφ' ὧν πρόεισι ζημία δεκάτα 3 καὶ $\frac{2}{193}$ · ὑπὲρ δὲ τῇ Παυσανίᾳ· 1930, 40, 500, ὅθεν ζημία 10 καὶ $\frac{7}{193}$ · τῷ δὲ Ξανθίππῳ· 1930, 40, 1280, ὅθεν προκύπτει ζημία 26 δεκάτα καὶ $\frac{1}{193}$ · αἱ δὲ, συναφθεῖσαι, τὴν ὅλην ἀποκαθιστῶσι ζημίαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ψευδὲς ὑποθέσεως.

264. Ὅταν, πολλῶν ἀριθμῶν ἄθροισμᾶτι ἀπαρτιζόντων, ὁ ἐκάστου τέτων πρὸς τὸν ἐλάχιστον λόγος ἐκτίθεσθαι ἔχη δι' ὁλοχρεῶν, ὅ ἐσιν εἴαν ἢ διπλῆς, τριπλῆς, τετραπλῆς κτ. τῷ ἐλάχιστῳ, συνίσταται εἰδός τι μέθοδος τῶν κατὰ τὰς ἐταιρείας, ἣτις ὀνομάζεται μέθοδος τῆς ψευδὲς ὑποθέσεως, ὡς ἐξόν, ἀντὶ τῷ αὐτὸν ἐκείνον ἐκτίθεσθαι τὸν ἀριθμὸν, γράψαι 2, ἢν ἢ διπλῆς τῷ ἐλάττονος· 3, ἢν ἢ τριπλῆς κτ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Θέων, Α'λκιβιάδης, Κλεόμβροτος, εἰς Πεισιράτος, συνάμα ἔλκυσιν ἔτη 110· ἀλλ' ὁ μὲν Α'λκιβιάδης, τὸ τριπλὺν τῶν Θέωνος, ὁ δὲ Κλεόμβροτος, τὸ διπλὺν τῶν τῷ Α'λκιβιάδου, ὁ Πεισιράτος δὲ, τὸ διπλὺν τῶν τῷ Κλεομβρότῳ· πόση ἄρ' ἔσιν ἡ ἐκάστῃ ἡλικία; Κληθήτω δὴ ἡ μὲν ἐλαχίστη ἡλικία ἡ τῷ Θέωνος 1, ἡ δὲ τῷ Α'λκιβιάδου, τριπλὴ ὕσα τῆς τῷ Θέωνος, κληθήτω 3· ἡ δὲ τῷ Κλεομβρότῳ, διπλὴ ὕσα τῆς τῷ Α'λκιβιάδου, 6· ἡ δὲ τελευταίῳ τῷ Πεισιράτῳ, διπλὴ ὕσα εἰς αὐτῇ τῆς τῷ Κλεομβρότῳ, κληθήτω 12· συναφθειςὼν δὲ πασῶν τῶν χρέσεων, διὰ τῷ 22 ἀθροίσματος γενέσθω μέθοδος τις κατὰ τὰς τῶν ἐταιρειῶν (261) ἔτω· 22, 110 ἔτη, 1 (χρέσις τῷ Θέωνος)· ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν δηλώσει τὴν τῷ Θέωνος ἡλικίαν ὕσαν ἔτη 5· ἀλλ' ἡ Α'λκιβιάδου ἡλικία ἐστὶ τριπλὴ τῆς τῷ Θέωνος· ἔσιν ἄρα ἔτη 15· ἀλλ' ἡ τῷ Κλεομβρότῳ ἐστὶ διπλὴ τῆς τῷ Α'λκιβιάδου· ἔσιν ἄρα ἔτη 30· τέλος δὲ ἡ τῷ Πεισιράτῳ ἐστὶ εἰς αὐτῇ διπλὴ τῆς τῷ Κλεομβρότῳ· ἔσιν ἄρα ἔτη 60· ἐπεὶ δὲ τὸ ἀθροισμα τῶν τεσσάρων τέτων ἡλικιῶν ἔσιν ἴσον ἑτέσιν 110· ὑγιῶς ἔχυσα ἄρα βεβασάνισαι ἡ πράξις.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Νικίας, Νικηράτος, εἰς Νικόστρατος, συλλήβδην ἐκέρδησαν γρόσια 1800· ἀλλ' ὁ μὲν Νικηράτος τὸ διπλὺν τῷ Νικίᾳ· ὁ δὲ Νικόστρατος τὸ τριπλὺν τῷ Νικηράτῳ· πόσον ἐκέρδησεν ἕκαστος; Κληθέντος τῷ κατὰ τὸν Νικίαν κέρδους 1, ἐπομένως τὸ μὲν τῷ Νικηράτῳ 2, τὸ δὲ τῷ Νικοστράτῳ κληθήσεται 6· ὑπὲρ ἔν Νικίᾳ γενήσεται μέθοδος τοιαύδε, 9, 1800, 1, ὅθεν προκύψει 200· ἄρα τὸ τῷ Νικηράτῳ κέρδος, διπλὺν ὄν, ἔσται 400· τὸ δὲ τῷ Νικοστράτῳ, ὡς τριπλὺν τῷ κατὰ τὸν Νικηράτον, ἔσται 1200· τῶν τριῶν δὲ τὸ ἀθροισμα, 1800,

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΩΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν Τόκων.

265. Ἴν' εὐρεθῇ ὁ τόκος γροσίων 5000, φέρ' εἰπεῖν, πρὸς δέκα τῶν 100 τοκιζομένων, σκέπτε ἕτως· 100 γροσίων κεφάλαιον δίδωσι τόκον 10, πόσον ἄρα δώσῃσι 5000; ποιήσον δὲ ἕτω τὴν μέθοδον τῶν τριῶν· 100, 10, 5000, ἕκῃν ἔσαι τόκος 500. Πρὸς δὲ 5 τῶν 100, ἕτω: 100, 5, 5000, ὅθεν ἔξεισι τόκος 250· πρὸς 4½ τῶν 100, ἕτω: 100, 4½, 5000· ἔσαι ἄρα τόκος 225 γρόσια, ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπ' ἄλλων περιπτώσεων.

266. Ἐὰν τὸναντίον, δοθέντος τῷ ἀθροίσματος τῶν τόκων, οἷον 500, ζητηθῇ τὸ κεφάλαιον, πρὸς 10 τῶν 100, φέρε, λέγε ἕτως· ἐὰν τόκος 10 ἀπονέμῃ κεφάλαιον 100, τόκος 500 πόσον κεφάλαιον ὑποτίθῃσιν; γράφεδῇ, 10, 100, 500· ἄρα κεφάλαιον ἔσαι 5000.

267. Διὰ τῆς μεθόδου τῶν κλασμάτων (247)· πολλαπλασιάσον τὸ δοθὲν κεφάλαιον ἐπὶ κλάσμα, ὃ παρονομαστὴς μὲν 100, ἀριθμητὴς δὲ ὁ τῶν 100 τόκος (194)· ἕκῃν τὸ γινόμενον δηλώσει τὸν τόκον (146, 192)· ἡ-γῶν δι' αὐτῆς τῆς κλίσεως διέλε τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐμφαντικὸν τῷ τόκῳ, καὶ ἔξεις κεφάλαιον τῷ πηλίκῳ (205).

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Γρόσια 336 πόσα φέρουσι, πρὸς 7 τῶν 100; 336 γρόσια, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 178 δώσῃσι τόκον 23 γρόσια, 20 παραδ. 2 λεπτά ὡς ἔγγιστα.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Β. Πόσος ἔσαι ὁ τόκος γροσίων 4375, πρὸς 5 τῶν 100; 4375, πολλαπλασιασθεὶς διὰ 178· ἡ διὰ 178 δίδωσι τόκον 218 γρόστ. 30 παραδ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ὁ Πέτρος καρπύεται ἀπ' ἀγροῦ τινος γρόσια 1250· πωλῆσαι ἐν βέλεται τὸν ἀγρὸν, ἀλλὰ τιμήματος τσάτε, ὅσον ἐπὶ τόκῳ πρὸς 5 τῶν 100 ἐκδοθὲν φέρειν αὐτῷ τὴν αὐτὴν πρόσδοσιν· πόσα ἐν αὐτῇσαι δεῖ; ὁ 1250, διαιρεθεὶς διὰ τῷ τῷ κλάσματος, ἢ τῷ $\frac{1}{20}$ (205) φήσει, ὅτι δεῖ αἰτῆσαι γρόσια 25000.

268. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐς δὲ ἕτερος τῷ τοκίζεσθαι τρόπος, ὃς καλεῖται πρὸς τόκον 10, ὅταν 10 λίτραι λαμβάνωσι 1· πρὸς τόκον 12, ὅταν 12 λίτραι λαμβάνωσι 1, ἢ ἐφεξῆς ὡσαύτως· ἐν τῷ αὐτῷ ἀρα τῷ λογίζεσθαι τῷ εἶδει ἀποχρήσει διελεῖν τὸ ὅλον κεφάλαιον διὰ τῷ ἀριθμῷ, τῷ ἐμφαίνοντος, πρὸς πόσον τόκον, εἰς εὐρεσιν τῷ τόκῳ, ἢ πολλαπλασιάσαι τὸν τόκον ἐπὶ τῷ τῷ ἀριθμῷ, ὅτε τὸ κεφάλαιον ζητεῖται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πόσα δώσωσι 5345 γρόσια πρὸς τόκον 20; δέλε 5345 διὰ 20, ἢ εὐρήσεις τόκον 267 γρόσια, ἢ 10 παράδας.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὰ ἐπιλύοντες διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου εἵπομεν ἂν· 20 γρόσια παρέχουσι γρόσιον 1· πόσα παρέξουσι τὰ 5345; καταγράφοντες τοῖνον: 20, 1, 5345· ἐπεὶ περ ἀσυντελές ἐστὶ πολλαπλασιάζειν 5345 ἐπὶ 1, διαιροῦμεν μόνον τὸν 5345 διὰ 20. Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἀντώνιος προκτῆσασθαι βέλεται πρόσδοσιν τινα 650 γροσίων· πόσον ἀρ' ἐστὶ τὸ κεφάλαιον, ὃ καταθέσθαι χρεὼν πρὸς τόκον 24; πολλαπλασιάσθωσαν 650 γρόσια ἐπὶ 24, ἢ ὁ προκύπτων 15600 ἔσαι τὸ κεφάλαιον, ὃ δεῖ καταθέσθαι.

ΔΕΙΞΙΣ. 1 γρόσιον τόκος ὑποτίθησιν 24 γρόσια κεφάλαιον, τόκος γροσίων 650 πόσα ὑποτίθησι γρόσια, εἰς κεφάλαιον; ἐντεῦθεν ἡ μέθοδος: 1, 24, 650· ὅθεν κα-

ταφανές ὅτι μόνον χρὴ πολλαπλασιάσαι τὸν 650 ἐπὶ 24.

269. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ περὶ ὁ τόκος 10 ἐστὶν τῷ κεφάλαιῳ· ὁ δὲ τόκος 20, $\frac{1}{2}$ ἢ ἕως ἐξῆς· ἀριθμῶ τινος, περιέχοντος κεφάλαιον ἅμα καὶ τόκον αὐτῷ, εὐρεθήσεται ὁ τόκος, καὶ μὴν καὶ ὅσον ἐστὶ τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάσας τὸνδε τὸν ἀριθμὸν, ἐν μὲν τῷ τόκῳ 10 ἐπὶ 11· ἐν δὲ τῷ τόκῳ 20 ἐπὶ $\frac{1}{2}$ κτ. (144)· τέταρτον δὲ, εἴπερ παρίσῃσιν ὁ ἀριθμὸς κεφάλαιον, καὶ προαφώρισαι ὁ τόκος, εὐρεθήσεται ὁ τόκος αὐτὸς, καὶ μὴν καὶ τὸ κεφάλαιον, διελῶσι τὸνδε τὸν ἀριθμὸν διὰ 9 ἐν τῷ τόκῳ 10, διὰ 19 ἐν τῷ τόκῳ 20, καὶ ἐρεξῆς ἕτως.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ο' 5922 ἀριθμὸς ἐμφαίνει τὸ κεφάλαιον ἡνωμένον ἐνιαυσίῳ τόκῳ πρὸς τόκον 20· πόσος μὲν ἐστὶν ὁ τόκος; πόσον δὲ τὸ κεφάλαιον; πολλαπλασίσας 5922 ἐπὶ 11, ἢ διέλε αὐτὸν διὰ 21 (194), καὶ ἔξεις τόκον μὲν 282, κεφάλαιον δὲ 5640.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ο' Πέτρος ἔθετο κεφάλαιόν τι πρὸς τόκον 16· συνέθετο δὲ τῷ δανεισῇ καταχρόντι ἐνιαυσίον τόκον, ἀποδῆναι οἱ τὰ ἄλλα· ἀπεδωκεν ἐν 6840· πόσος ἂρ ἦν ὁ τόκος καὶ αὐτὸ τὸ κεφάλαιον; 6840, πολλαπλασιασθεὶς διὰ 11, ἢ διαιρηθεὶς διὰ 15, δίδωσι τόκον 456, ὅς τις συναφθεὶς τῷ 6840, δώσει κεφάλαιον τὸν 7296.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τοῦ λογισμῷ τῆς Ἀλύσεως.

270. Ζητούμεν τῷ ὅλκιμῳ ἀθροισματός, τῷ συμπληρωθησομένῳ μετὰ πλείω ἔτη, ἐν ᾧ περιέχεται τό τε κε-

φάλαιον, ἢ ὁ τόκος τῷ κεφαλαίῳ, ἀλλὰ δὴ ἢ ὁ τόκος τῷ τόκῳ, χροιοτενέστερος αἰεὶ ἔσται ὁ λογισμὸς· ἀλλὰ δύο γὰρ ἡμεῖς ἢ περὶ τούτου ἐξοίσομεν μεθόδους.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐκδέναι τις βέλεται 20000 γρόσια πρὸς 10 τῶν 100, προσεπιλογιζόμενος αἰεὶ τὰς τόκους τῶν παροιχομένων ἐνιαυτῶν, ἢ ἅμα τὰς τῶν τόκων τόκους· πόσον ἔσται ὁμῶς ἄθροισμα μετὰ πέντε ἐνιαυτοῦς;

271. Α΄. Μέθοδος διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· 20000 γρόσια τέξουσιν τὸν πρῶτον ἐνιαυτὸν 2000 γρόσια (265) ἂ, συναφθέντα τῷ 20000, παρέχουσιν τὸ τῷ δευτέρῳ ἔτους κεφάλαιον, γρόσια 22000. Τυτὶ δὲ οἶσει τὸ δευτέρον ἔτος, 2200, ὃ, συναφθὲν τῷ 22000, ἀπαρτιεῖ τῷ τρίτῳ ἔτους κεφάλαιον 24200· τυτὶ δὲ γεννήσει ἐν τῷ τρίτῳ ἔτει 2420, ὃ, συναφθὲν τῷ 24200, ἀποκαταστήσει τῷ τετάρτῳ ἔτους τὸ κεφάλαιον 26620· τὸ δὲ, τέξει κατὰ τὸν τέταρτον ἐνιαυτὸν 2662, ὃ, προσθεθὲν τῷ 26620, σχηματίσει τῷ πέμπτῳ ἔτους τὸ κεφάλαιον, εἴτ' ἔν 29282· τελευταῖον δὲ τὸ δε παρέξεται τῷ πέμπτῳ ἔτει 2928 γρόσια, ἂ, συναφθέντα τῷ 29282, παράξουσιν τὸ ὅλικόν κεφάλαιον 32210 γρόσια ἢ παράδ. 8, ἂ παρέφονται τῷ χρήσῃ μετὰ τὰς 5 ἐνιαυτοῦς, λογισαμένῳ τότε κεφάλαιον ἢ τὰς τόκους, ναὶ μὴν ἢ τὰς τόκους τῶν τόκων.

272. Β΄. Μέθοδος. α΄. τὸ 20000 γροσίων κεφάλαιον, πρὸς 10 τῶν 100, οἶσει ἐκάστῳ ἔτους τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ· ἐκὼν γεγράφθω ὑφ' ἑκάστου ἐνιαυτοῦ τὸ $\frac{1}{10}$ κατὰ τὸν Α εἶχον, ὡς ἐπὶ τῷ Α' βακίσκῳ ὁράται. β΄. τοῦτ' ὁ $\frac{1}{10}$, ἢ ὁ τόκος τῷ πρώτῳ ἐνιαυτῷ, γενήσεται κεφάλαιον εἰς τὸν δεύτερον, ἢ οἶσει $\frac{1}{10}$ τούτου τῷ $\frac{1}{10}$ · γεγράφθω τοίνυν $\frac{1}{10}$ ὑπὸ τὸ δεύτερον ἔτος ἐπὶ τῷ εἶχῳ Β, λαμβανομένη ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ δεξιᾷ· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον $\frac{1}{10}$ τῷ πρώτῳ ἐνι-

αυτῆ, καὶ ἐν τῇ	α΄.	β΄.	γ΄.	δ΄.	ε΄.	20000 0
δευτέρου, γε.	ἐτ.	ἐτ.	ἐτ.	ἐτ.	ἐτ.	λίτρ. σολ,
γραμμένον	A	ῖσ	ῖσ	ῖσ	ῖσ	10000 0
ἐν τῷ A σίχῳ,	B	ῖσ	ῖσ	ῖσ	ῖσ	2000 0
οἰσσι τῷ τρίτῳ ἔτει	Γ	ῖσ	ῖσ	ῖσ		200 0
τῷ ὁμοειδῇ τοῖς ἡδὴ γε.	Δ	ῖσ	ῖσ			10 0
γραμμένοις ἐν τῷ B σίχῳ· γε.	E	ῖσ				0 8
γράφῃω τοίνυν ἔτι ῖσ ἐν τῷ αὐτῷ σίχῳ						32210 8

ὑπὸ τὸν τρίτον ἐνιαυτόν. Τὰ δεκατημόρια τῆ πρώτῃ, καὶ δευτέρῃ, καὶ τρίτῃ ἔτας, τὰ κατὰ τὸν A σίχον, οἰσσι τῷ τετάρτῳ ἐνιαυτῷ ῖσ, ἃ γεγράφῃω ἐν τῷ B σίχῳ· τὰ δὲ τέσσαρα ῖσ τῶν προλαβόντων ἐτῶν ἀπονεμῶσι ῖσ τῷ πέμπτῳ ἔτει, ἃ καὶ ταῦτα γεγράφῃωσαν. γ΄. τὸ ῖσ, τὸ σημειωθὲν ἐπὶ τῇ B σίχῃ ὑπὸ τὸ δεύτερον ἔτος, ἀποδώσει τῷ τρίτῳ ἔτει ῖσ τῷδε τῇ ῖσ· ἡκὼν γεγράφῃω ῖσ ὑπὸ τὸ τρίτον ἔτος ἐπὶ τῇ Γ σίχῃ· ῖσ καὶ ῖσ τὰ ἐν τῷ B σίχῳ οἰσσι τῷ τετάρτῳ ἔτει ἐν τῷ Γ σίχῳ ῖσ, ἅπερ σε-
σημειώσῃω· ῖσ δὲ καὶ ῖσ καὶ ῖσ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ B σίχῳ οἰσσι εἰς τὸν πέμπτου ἐνιαυτόν ῖσ, ἃ καὶ ταῦτα γε-
γράφῃωσαν.

Τὸ ὑπὸ τὸ τρίτον ἔτος ἐν τῷ Γ σίχῳ σημειωθὲν ῖσ παρέξει τῷ δ΄. ἐνιαυτῷ ῖσ τῷδε τῇ ῖσ· ἡκὼν γεγράφῃω ῖσ ὑπὸ τὸ τέταρτον ἔτος κατὰ τὸν Δ σίχον· ῖσ δὲ καὶ ῖσ τῶν ἐτῶν τῇ τρίτῃ καὶ τετάρτῃ, τὰ κατὰ τὸν Γ σίχον, οἰσσι τῷ ε΄. ἔτει ῖσ.

Τελευταίον δὲ τὸ ἄρτι ὑπὸ τὸ δ΄. ἔτος ἐν τῷ Δ σίχῳ γεγραμμένον ῖσ ἀπονεμει τῷ πέπτῳ ἐνιαυτῷ τὸ ῖσ τῷδε τῇ ῖσ, ὃ γεγράφῃω τελευταίον ὑπὸ τὸ πέμπτου ἔ-
τος ἐν τῷ E σίχῳ.

Νῦν ἔν σνήφῃωσαν· ῖσ. τῇ A σίχῃ εἰσιν ῖσ τῶν

20000, ἡ γρόσια 2000· ἀλλ' εἰσι γὰρ πέντε δεκατη-
μόρια ἐν τῷ Α εἴχῃ· ἄρα γεγράφθωσαν ὑπὸ τὸ κεφάλαιον
γρόσια πεντάκις 2000, εἴτ' ἐν 10000,

τὸ τῷ Β εἴχῃ, ὃν ὁ τόκος τῷ Α εἴχῃ, ἐσιν τὸ ἐκεῖν
τῷ τσ, ἡ γρόσια 200· ἀλλὰ μὲν εἰσι δέκα τὸ ἐν τῷ Β
εἴχῃ· ἄρα γρόσια 2000 γεγράφθωσαν ὑπὸ τὰ 10000.

τὸ τῷ Γ εἴχῃ ἐσιν τὸ τῷ τσ τῷ Β εἴχῃ· ἐμφαίνει
ἄρα γρόσια 20· δέκα ἄρα τὸ τῷ Γ εἴχῃ δύνανται γρό-
σια 200· τὸ τῷ Δ εἴχῃ ἐσιν τὸ γροσίων 20, ἡ γρό-
σια 2· ἄρα τὸ, τὰ ἐν τῷδε τῷ εἴχῃ, ἐμφαίνεσι 10 γρό-
σια, ἃ ὑπογραπτέον.

Τέλος δὲ τὸ τῷ Ε ἐσιν τὸ γροσίων 2, εἴτ' ἐν παρ' Β.

Ἀπασῶν δὲ τέτων τῶν δυνάμεων συναφθεισῶν,
πρόεισιν ὁ ἀριθμὸς 32210, ὁ ἐξ διὰ τῆς πρώτης προελ-
θὼν μεθίδου.

273 ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰπὶ τῷ προεκτεθέντος Ἀ' θακίῳ
παρατηρητέον, ὅτι οἱ ἀριθμηταί, καίτοι τῶν αὐτῶν αἰ-
δόντων παρονομασῶν, ποικίλλονται κατὰ τινα ἀπαράβατον
νόμον· α'. ἐν μὲν γὰρ τῷ Α εἴχῃ ὁ ἀριθμητὴς ἀτρεπτος
διαμένει 1. β'. ὁ πρὸς ἀρισερὰν πρῶτος ἐκάστῃ εἴχῃ ἀριθ-
μητὴς, ἐξ αὐτὸς αἰδίων 1, αἰὶ προχωρεῖ βῆμα ἐν, ὥτως
εἰπεῖν, πρὸς τὰ δεξιὰ τῷ ὑπερθεῖν πρῶτῳ παραβαλλόμε-
νος. γ'. ἕκαστος ἀριθμητὴς εἴχῃ παντὸς περιέχει τὸ πάν-
των τῶν πρὸς ἀρισερὰν πρὸ αὐτῆ ἀριθμητῶν τῷ ἀνωτέρῃ
εἴχῃ ἄθροισμα.

ΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ο' 2 ἀριθμητὴς τῷ Β εἴχῃ ἐσὶ τὸ
ἄθροισμα τῶν δυνά ἀριθμητῶν 1, 1, οἵτινες προηγῶνται
αὐτῷ ἐν τῷ Α εἴχῃ· ὁ δὲ 3 ἀριθμητὴς τῷ Β εἴχῃ ἐσὶ τὸ
ἄθροισμα τῶν ἡγεμένων αὐτῷ ἐν τῷ Α εἴχῃ τριῶν ἀριθ-
μητῶν 1, 1, 1, ὁ δὲ 4, τὸ τῶν ἀριθμητῶν 1, 1, 1, 1·

ὡσαύτως ἐπὶ τῷ Γ εἶχῃ, ὁ 3 ἀριθμητὴς ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προηγυμένων αὐτῷ ἐπὶ τῷ Β εἶχῃ ἀριθμητῶν 1, 2· ὁ δὲ 6 ἀριθμητὴς, τὸ τῶν ἡγυμένων αὐτῷ ἐν τῷ Β εἶχῃ ἀριθμητῶν 1, 2, 3, ἄθροισμα, καὶ ἐξῆς ἐπὶ τῶν ἄλλων εἶχων ὡσαύτως.

274. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν ἄρα ὁ ἐνός τινος εἶχῃ ἀριθμητὴς σημαίνει πάντων τῶν ἡγυμένων αὐτῷ ἐν τῷ ὕ. περτέρῳ εἶχῃ ἀριθμητῶν τὸ ἄθροισμα· ἐν γὰρ τῷ Γ εἶχῃ ὁ 3 ἀριθμητὴς ἐνδείκνυσιν τὸ τῶν 1, 2 προηγυμένων ἀριθμητῶν τῷ Β εἶχῃ ἄθροισμα· συναφθέντος ἄρα ἀριθμητῷ κατωτέρῳ, οἷος ὁ 3 ἐν τῷ Γ εἶχῃ, ἀριθμητῇ καθυπερτέρῳ τῷ 3, τὸ 6 ἄθροισμα, α'. παρέξει τὸν ἐφεξῆς ἀριθμητὴν τῷ Γ εἶχῃ· β'. εἶσαι πάντων τῶν ἐπὶ τῷ Β εἶχῃ ἡγυμένων τῷ ἐν τῷ Γ εἶχῃ ἀριθμητῷ 6 ἀριθμητῶν ἄθροισμα.

275. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπάναγκες ἄρα ἰκάστην σήλην, τὴν τῷ πέμπτῳ, φέρ' εἰπεῖν, ἐνιαυτῷ, ἐνδείκνυναι τὸ πάντων τῶν ἀριθμητῶν τῶν παρωχαμένων ἐνιαυτῶν ἐν ἐκάστῳ ἄθροισμα· ὥτως ὁ 4 ἀριθμητὴς τῷ ε'. ἔτις ὁ ἐν τῷ Β εἶχῃ ἐστὶ τὸ τῶν ἐν τῷ Α εἶχῃ ὑπὲρ τεσσάρων ἐνιαυτῶν ἀριθμητῶν ἄθροισμα· ὁ δ' ἐν Γ ἀριθμητὴς 6 τῷ ε'. ἔτις ἐνδείκνυσιν τὰ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐν τῷ Β εἶχῃ ὑπὲρ ἑτῶν τεσσάρων ἀριθμητῶν, καὶ καθεξῆς ὥτω.

276. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Προαχθεὶς ἄρα τὸ Α' ἑκάκιον εἰς ὅσων ἄντις βύλοιτο ἑτῶν ἀριθμὸν· καί· 5. ἐνιαυτός. σθῶ γὰρ συνάψαι τέτρω τὴν ἐνός ἐτι ἐνι· 1 Α αὐτῷ τῷ ἑκτῷ σήλην· ὅκην γεγράφθω 5 Β ἐν τῷ Α εἶχῃ, ὥσπερ ἐνταῦθ' ὁρᾶται· 10 Γ 10 ὁ δὲ τῷ Β ἀριθμητὴς τῷ προτέρῳ Α' ἑκάκιῳ, 5 συναφθεὶς τῇ ὑπὲρ αὐτὸν 1, παρέχει τῇ 1

τις εἴποι ὅσον ροινοτενήςτε ἢ περιπεπλεγμένος καθί-
σεται ὁ λογισμὸς παρὰ τὴν ἀφεικτον παροδὸν διαφόρων
κλασμάτων· ἐκ ἧρ' ἀξυντελὲς πάμπαν ἂν εἴη ὑποσώ-
σασθαι τὸν Α' βῆκα τῆτον μέχρι προήκοντα τῶν 16 ἐνι-
αυτῶν· ἔ τὴν χρῆσιν ῥᾶω παρεξόμεθα προσιδέντες ἐξῆς
προβλημάτων δυάδα.

279. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Α' πορφανισθείς τις ἐκλη-
ρονόμησε γρόσια 80000. Παρελθόντων ἔν ενιαυτῶν 12
αἰτεῖ λόγον τὸν ἑαυτῷ ἐπίτροπον τῷτε κεφαλაίη, ἢ τῷ
τόκῳ τῷ κεφαλαιῷ, νὰ μὴν ἢ τῶν τόκων τῶν τόκων πρὸς
5 τῶν 100, ἢ πρὸς τόκον 20· πόσ' ἄρα καταβαλεῖ χρή-
ματα;

ΛΤΣΙΣ. Εἰλήφθω ἐπὶ τῷ Α' βῆκος αἱ τῷ 17'. ἐνι-
αυτῷ σήλη, ἢ ἢ 17'. σήλη, γραφέντος ἰδίᾳ τῷ 80000
κεφαλαιῷ.

Ο' ἐν τῇ 17'. σήλη 12 ἐνδείκνυσι τὸ ἄθροισμα πάν-
των τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἐν τῷ Α' εἴχῳ ὑπὲρ ἐτῶν 12
(274)· ἀλλ' ἢ ἐν τῷδε τῷ εἴχῳ 1 τὸν ενιαύσιον τόκον
τῶν 80000 δηλῶσα, πρὸς τόκον 20, παρίσῃσι $\frac{1}{20}$ τῶν
80000, ἢ 4000· ἔτος ἄρα δωδεκάμης, ποιεῖ 48000,
ὅς γεγράφθω ὑπὸ τὸν 80000.

Η' ἐν τῷ Β' εἴχῳ 1 ἔσαι $\frac{1}{20}$ τῷ ἐν τῷ Α' $\frac{1}{20}$, εἴγε
ἔσι τῷτε τόκος ἐκεῖνο· δηλώσει. ἄρα $\frac{1}{20}$ τῶν 4000, εἴτ'
ἐν 200· ἀλλ' ὁ τῆς 17'. σήλης γ'. ἀριθμητῆς 66 καταγγέλ-
λει, ὅτι ἐσὶν ἐν τῷ Β' δευτέρῳ εἴχῳ ὑπὲρ ἐτῶν 12 ἐξή-
κοντάνης ἢ ἐξάνης τὸ $\frac{1}{2}$, ⁶⁶πολλαπλασιασθέντος ἄρα τῷ 200
διὰ 66, γεγράφθω 13200 προκύπτων ὑπὸ τὸν 48000.

Θ' τῷ Γ' τρίτῳ εἴχῳ ἐσὶν $\frac{1}{20}$ τῷ ἐν τῷ δευτέρῳ εἴχῳ
 $\frac{1}{20}$, ἄτε αὐτῷ ὃν τόκος· ἐσὶν ἄρα $\frac{1}{20}$ τῶν 200, ὅ ἐσι
10· ἢ ἔν πεπολλαπλασιάσθω 10 ἐπὶ 220 τέταρτον ἀριθ-

μητὴν τῆς ιγ'. σήλης. ἢ γεγράφ-	80000		
θω ὁ προκύπτων 2200 $\frac{1}{25}$ τῷ τε-	48000		
τάρτε ὄρου Δ ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῶν 10 γρόσιων,	13200		
εἴτ' ἔν $\frac{1}{25}$, ἢ $\frac{1}{2}$ · πεπολλαπλασιά-	2200		
σθω ἄρα $\frac{1}{2}$ διὰ 495 πέμπτη ἀριθμη-	247	20	0
τὴ τῆς ιγ'. σήλης, ὅθεν προκύψουσιν	19	32	0
247 γρόσ. ἢ 20 παράδαι. $\frac{1}{25}$ τῷ	1	6	$\frac{1}{2}$
	0	2	

Εἰς ἴχου ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῷ $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{45}$, ὁ πολλαπ. 143668 20 $\frac{1}{2}$
 διὰ 792, ἀποδ. 19 γρ. 32 παρ. $\frac{1}{25}$ τῷ Ζ ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῷ
 $\frac{1}{25}$, ἢ $\frac{1}{2500}$, ὁ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 924 παρέχεται 1
 γρόσιον, 6 παρὰδ. ἢ $\frac{1}{2}$ λεπτά· $\frac{1}{25}$ τῷ Η εἰς ἴχου ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῷ
 $\frac{1}{2500}$, ἢ $\frac{1}{62500}$, ὁ πολλαπλασιασθὲν διὰ 792 παρέχει 2
 παρὰδ· ὡς ἐγγίσα.

$\frac{1}{25}$ τῷ Θ εἰς ἴχου ἐστὶν $\frac{1}{25}$ τῷ $\frac{1}{62500}$, ἢ $\frac{1}{1562500}$, ὁ
 πολλαπλασιασθὲν διὰ 495 παρέχει μόνον $\frac{1}{2}$ λεπτῷ. Πα-
 ροπτέον ἄρα τόνδε τὸν εἶχον, πολλῷ δὲ μᾶλλον ἢ τὸς
 ἐξῆς. Προθέσει ἔν εὐρίσκεται ἀποδώσων ὁ ἐπίτροπος
 143668 γρόσια, ἢ παρὰδας 20, ἢ λεπτὸν 1.

280. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εἰς ἐλήλεγμαι τις κατασχὼν
 ἀδίκως πρὸ ἐτῶν 8 γρόσια 1000· κατακέκριται δὲ τὸ κε-
 φάλαιον καταβαλεῖν συνάμα τῷ τόκῳ αὐτῷ, ἢ τοῖς τόκοις
 τῶν τόκων, κατὰ λόγον τῶν 4 πρὸς 100· πόσον ἀποτίσει;

Ἡ Θ'. σήλη ἐμφαίνει τὸς ἐτῶν 8 ἀριθμητάς· τῷ 4
 δὲ πρὸς τὰ 100 ὄντος $\frac{1}{25}$, παρονομαστὴς ἔσαι ὁ 25.

$\frac{1}{25}$ τῷ Α εἰς ἴχου, ὁ τόκος ὢν τῶν	1000	0	0
1000, ἔσαι $\frac{1}{25}$ τῶν 1000 ἢ 40 γρό-	320	0	0
σια· ἀλλ' ὁ δευτέρως ἀριθμητὴς τῆς Θ'.	44	32	0
σήλης ἐκδείκνυσιν ὅτι ἐξ αὐτῶν εἰσιν 8	3	23	1
ἐν τῷ Α εἰς ἴχου· πολλαπλασιασθέντος	0	7	$\frac{1}{2}$
ἄρα τῷ 40 ἐπὶ 8, ὁ προκύπτων 320	0	0	1
γεγράφθω ὑπὸ τὸ κεφάλαιον 1000.	1368	22	$2\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ τῆ Β' εἶχε ἐστὶν $\frac{1}{2}$ τῶν 40 γροσίων, ἢ $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$. ἐπεὶ δὲ ὁ τῆς Δ' σήλης τρίτος ἀριθμητικὸς 28 μαρτυρεῖ, ὡς ἔστιν ἐξ' αὐτῶν 28 ἐν τῇ Β' εἴχῃ· πεπολλαπλασιάσθω ἕκαστος $\frac{1}{2}$ ἐπὶ 28· ὁ δὲ προκύπτων 44 γρόσια, 32 παραῖται, γεγράφθωσαν ἐν τῇ αὐτῶν τάξει.

$\frac{1}{2}$ τῆ Γ' εἶχε ἐστὶν $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$ X 56, τέταρτον ἀριθμητικὸν τῆς Δ' σήλης· ἔκῃς ὁ προκύπτων 3 γρόσια, 23 παραῖται, 1 λεπτόν, κατὰ τῆς γραφῆς.

$\frac{1}{2}$ τῆ Δ' εἶχε ἐστὶν $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$, ὁ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 70 προάγει 7 παραῖτας, $\frac{1}{2}$ λεπτόν, ἃ ἐξ ταῦτα σημειώσων.

$\frac{1}{2}$ τῆ Ε' εἶχε ἐστὶν $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{1}{2}$, ὁ πολλαπλασιασθὲν διὰ 56, προάγει ὡς ἑγχεῖς 1 λεπτόν, ὃ προσεθήτω τῇ τάξει τελευταίον.

Οἱ ἔντες εἶχοι παροπτεοί· ὁ δὲ κατακριθεὶς, καταβαλεῖν ὀφείλει 1368: γρόσια, 32 παραῖτας, κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως.

281. Τ' φερέσιν καλῶ τὴν ἀπότινος κεφαλὴν ἀποχωρίσιν ποσότητος κατ' ἀναλογίαν, ἢ προλαμβάνει τις χρόνος εἰς τὸ ἀποδῶναι τοδὶ τὸ κεφάλαιον· ὃ δὲ αἰετοτε εἴωθε γίνεσθαι διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ὡνήσατό τις οἶκον γροσίων 20000, ἃ ἀποτίσει μετ' ἐνιαυτόν· ἢ πρὸς τὸ παρὸν καταρχὸν καθ' ἑκάστον 10, ἀποτίσει τὰ λοιπὰ πόσα ἔν ἀποδώσει; σκέπτῃ δὲ ἔτω· εἰπερ 110 γρόσια ἀποδοτέα μετ' ἐνιαυτόν, ἃ

156 ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔ. ΤΗΣ ΤΦΑΙΡΕΣΕΩΣ.

ποδίδονται πρὸς τὸ παρὸν γινόμενα 10, πόσοις ἐλαττωθήσονται γρόσια 20000; ἐντεῦθεν ἡ τῶν τριῶν μέθοδος· 110, 100, 2000 ἀποκρίνεται 18181 γρόσια, καὶ 32 παράδας καὶ 2 λεπτά.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Χρήζων λαβεῖν κεφάλαια γρόσιων 5000, ἃ ἀποδοθήσονται μοι μετὰ ἐνιαυτὸν, συντίθεμαι τῷ δίδοντι ἀφείναι καθ' ἑκατὸν 10 τῷ ἔτους, ἵνα ἀπολάβω τὰ ἑμαυτῷ πρὸς μηνῶν 8. πόσ' ἂρ ἀπολήψομαι; σκέπτομαι δὴ ἔτω· 12 μῆνες ὑφαιρῶσι 10 τῶν 100, πόσα ἔν ὑφαιρήσεσι μῆνες 8; 12, 10, 8, ἐξ ὧν πρόεισι $6\frac{2}{3}$ · σκέπτομαι αὖθις· εἰάν $106\frac{2}{3}$, πρὸ μηνῶν 8 ἀποδιδόμενα, γίνωνται 100, πόσα γενήσονται γρόσια 5000; ἡ μέθοδος· $106\frac{2}{3}$, 100 5000 ἀποκρίνεται (206) γρόσια 4687, καὶ παράδας 20.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς Κολλύβου.

282. **ΤΠΟΔΕΙΜΓΑ. Α΄.** Συντίθεμαι ἐν Κωνσταντινουπόλει Κολλυβισῆτινι, ἵνα ἐν Θεσσαλονίκῃ ὁ ἐκεῖθεν ἑταῖρος ἀποδῶ τῷ ἐμῷ ἑταίρῳ γρόσια 4000· περὶ δὲ τέτων ἀφήμι τῷ ἐν Κωνσταντινουπόλει 4 καθ' ἑκατὸν· πόσα ἔν αὐτῷ ἀποτίσω; σκέπτομαι ἔτω· 100 γρόσια ἐν Θεσσαλονίκῃ αἰτῶσιν 104 ἐν Κωνσταντινουπόλει, πόσα αἰτήσεσι 4000; ἡ μέθοδος τῶν τριῶν δίδωσι 4160, ἃ ἂν ἡγήμην καταβαλεῖν τῷ ἐν Κωνσταντινουπόλει κολλυβισῇ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Αἰτήσας ἔλαβον ἐν Κωνσταντινουπόλει παρὰ κολλυβισῆς συγγραφὴν κολλυβισικὴν, δι' ἧς λή-

φομαι γρόσια 3000 ἐν Λαρίσση τῆς Θετταλίας παρὰ τῷ ἑτέρειαν ἔχοντος μετὰ ταῦτα ἐκεῖθι, ἀφείς καθ' ἑκατὸν 3. Πόσα ἐν λήψῃ ἐν Λαρίσση; ἐπεὶ ἐνταῦθα τὰ 100 ἐκεῖθι καθίστανται 97 ἡ μέθοδος 100, 97, 3000 ἀποκρίνεται· 2910 γρόσια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῆς Συγκράσεως.

283. Ἡ Μέθοδος αὕτη κεῖται ἐν τῷ μιγνύειν ὁμῶς πράγματα παντοίως τιμώμενα, εἰς τὸ εὑρεῖν μίγματι μέσης τιμῆς, ἢ, τῷ μίγματος γενομένῳ, εὑρεῖν μέσῃν τιμῇν ἢ, ἔτι, πόσον ἐκάστης τιμῆς εἰσελθεῖν ἐδυνήθη τῷ μίγματι· ἐπιλυσόμεθα τοιγαρὲν προβλήματα, ὧν εἰσι ὅσους πρὸς τὰς τρεῖς ταύτας περιπτώσεις.

284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Μίξαι πράγματα, παντοίως τιμώμενα, ὥστε τὸ μίγμα δίδόναι τὴν ζητούμενην μέσῃν τιμῇν.

Ἀντικατασταθήτω ἡ διαφορὰ τῆς τὴν μέσῃν τιμῇν ὑπερκειμένης ποσότητος ἐκ αὐτῆς τῆς μέσης τιμῆς τῇ διαφορᾷ, ἢ διαφέρει ἡ μέση τιμὴ τῆς λειπομένης, ἐκ ἀντιστροφως.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Οἶνου 5 παραδῶν τιμωμένης ἐκάστης ὁκάς, ἄλλῃ δὲ, 9· ἄλλῃ δὲ, 14· ἐκ ἄλλῃ, 16· μίγμα ποιῆσαι, τιμώμενον 12 παραδῶν ἀνὰ ὁκάν.

ΛΥΣΙΣ Α'. Γράψον ἔνερθεν μὲν τῆς μέσης τιμῆς 12 τὰς ποσότητας, αἱ εἰσι μείζους ἢ 12· ὑπερθεν δὲ τὰς ἐλάττους, ἢ 12, ὡς ὁρᾶται ἐνταῦθα. β'. λάβε τὴν διχ-

φορὰν, ἥ διαφέρει ὁ 5 τῷ 12, ἥτις ἐστὶν 7, καὶ 5 2
 γράψον αὐτὴν ἐν δεξιᾷ τῷ 14· καὶ τὸναντίον 9 4
 τὴν διαφορὰν, ἥ διαφέρει ὁ 14 τῷ 12, ἥτις 12
 ἐστὶ 2, γράψον ἐν δεξιᾷ τῷ 5· μέτελθε δὲ τὸν 14 7
 αὐτὸν τρόπον τὸν 16 μετὰ τῷ 9· ἡ διαφορὰ, 16 3
 ἥ διαφέρει ὁ 9 τῷ 12, ἐστὶ 3, ὃν γράψον ἐν 16
 δεξιᾷ τῷ 16· ἡ δὲ διαφορὰ τῷ 16, ἥ διαφέρει ὁ 12 τῷ
 9, ἐστὶ 4, ὃν γράψον κατὰ δεξιὰν τῷ 9.

Συναφθέντων δὲ τῶν ἐν τοῖς δεξιοῖς χαρακτηρῶν,
 συνάγεται, ὅτι δυνήσασθαι μίγματι ἀπεργάσασθαι 16
 ὀκάδων, 12 παραδῶν τιμωμένης ἐκχύσεως, ἐνθήμενος 2 μὲν
 ὀκάδας τῷ διὰ 5 παραδῶν, 4 δὲ τῷ διὰ 9, 7 δὲ τῷ διὰ
 14, καὶ 3 τέλος διὰ 16.

ΔΕΙΞΙΣ. Πωλῶν 12 παραδῶν 2 ὀκάδας οἶνου, ὅς
 ἐτιμᾶτο παραδῶν 5, ἀποίσεται κέρδος 1 παραδάς· ἀλλὰ
 πωλῶν μετὰ τὴν μίξιν 12 παραδῶν 7 μέτρα οἶνου, ὅς
 ἐτιμᾶτο 14 παραδῶν ζημιωθήσεται παραδαῖς 14· παρα-
 τηρημένης ἅρα τῆς τῷ μίγματος μεθόδου, τῆς ἄρτι ἀποδε-
 δομένης, ἀντάμειψίς τις ἐγένετο ἀκριβοῦς τῷτε κέρδους καὶ
 τῆς ζημίας. Ο. Ε. Δ.

Βάσανος τῆς πράξεως. Ἐπεὶ ὀκάδαι 16 ἀνὰ
 128 παραδάς παρέχουσιν 192 παραδάς· εἰν συναφθῶσιν
 αἰτιμαὶ ὀκάδων 2 ἀνὰ 3 παραδάς· 4 ἀνὰ 9· 14 ἀνὰ 7
 16 ἀνὰ 3, τὸ τῶν αἰτισμάτων ἄθροισμα εἶναι παραδαῖς 192.

385. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἀδιαφορὸν δὲ, καθ' ἣν ἂν
 συγκραθεῖεν τάξιν αἱ πισότητες· ἀντὶ γὰρ 5 τοῖς 14,
 καὶ 9 τοῖς 16, ὥς ἤδη γέγονεν, ἐξέσαι συνάπτειν 5 τοῖς
 16, ὥς ὁραῖται ἐνταῦθα, γράφοντας τὴν 7 διαφορὰν,
 ἥ διαφέρει ὁ 5 τῷ 12, ἐν δεξιοῖς τῷ 16· μετὰ δὲ, 4
 διαφορὰν, ἥ διαφέρει ὁ 16 τῷ 12, κατὰ δεξιὰν τῷ 5,

ἢ δὴ ἐκ τὴν 3 διαφορὰν, ἢ διαφέρει ὁ 9 τῷ 5 4
 12, ἐν δεξιοῖς τῷ 14· μετὰ δὲ, 2 διαφορὰν, 9 2
 ἢ διαφέρει ὁ 14 τῷ 12, ἐν τοῖς δεξιοῖς τῷ 9· 12
 ἔψεται ἐν κἀνταῦθα τὸ αὐτὸ μίγμα 16, τῆς 14 3
 ἑκτε τῷ κέρδους, ἢ τῆς ζημίας συνανταμείψεως 16 7
 γενομένης τῆς αὐτῆς· ὅταν ἄρα πλείω μὲν πο. 16
 σὰ ἢ ἐν ὧσιν ὑπὲρ τὴν μέσσην τιμὴν, πλείω δὲ ἐνερθεν,
 τὸ πρόβλημα παντοίως λυθήσεται.

286. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῶν πολλῶν, ὧν ἐπιδέχεται ἐπιλύσεων τόδε τὸ πρόβλημα, κατὰ παντοίας περιπτώσεις, ἄλλην αἰρετέον πρὸ ἄλλης· τῶν γὰρ ἐνταῦθα τὸ πρῶτον μὲν μετιτέον τῶν μιγμάτων, οἷς πλείων μὲν εἶνος ὁ ἀνὰ παράδας 9, ἢ ὁ ἀνὰ 3· πλείων δὲ ὁ ἀνὰ 14 ἢ ὁ ἀνὰ 16· οἷς γέ μὴν ἐστὶ πλείων ὁ ἀνὰ 5, ἢ ὁ ἀνὰ 9· πλείων δὲ ὁ ἀνὰ 16, ἢ ὁ ἀνὰ 14, ἀνθαιρετέον τῷ πρῶτῳ τὸ δεύτερον.

287. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ὧσιν ἐνερθεν τῆς μέσης τιμῆς ποσότητες πλείους, ἢ ὑπερθεν· ἢ ἐκ τέναντιόν, μικτέον μίαν τῶν ποσοτήτων τῶν ἐν ταῖς ἐλάττοσι, πλείοσι τῶν ἐν ταῖς πλείοσι· ἢ δ' ἀντάμειψις γενήσεται ὡς ἐκ προτέρου, καθὰ φανήσεται ἐντῷ ἑξῆς ὑποδείματι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Γεωργὸς τις βύλεται χαρίσασθαι τινὶ 100 μέτρα κριθῆς, τιμωμένῃ ἀνὰ 12 γρόσια ἐκάστῃ μέτρῳ· ἀλλὰ ταύτης ἀπορῶν, ἀναγκάζεται συμμῖξαι ἐκ τῆς 8 γροσίων τιμῆς, ἢ ἐκ τῆς 10, ἢ ἐκ τῆς 11, ἢ 14, ἢ 15 γροσίων· πῶς ἂν ποιήσῃε τετὶ τὸ μίγμα;

Συμμίξας 8 τοῖς 14, ἢ 10 τοῖς 15, ἀδιαφόρως σύμμικρον 11 ἢ τοῖς 14, ἢ τοῖς 15 (287)· ἐνώσας ἐν αὐτὸν τοῖς 15, εὐρήσεις, ὅτι δυνήσεται ὁ Γεωργὸς ποιῆσαι μίγμα τι 15 μέτρων, τιθεὶς 2 μέτρα τῶν ἀνὰ γρόσια

8, 3 ἀνὰ 10, 3 ἀνὰ 11, 4 ἀνὰ 14, καὶ 3 ἀνὰ 15.

Εἴπερ δ' ἔχι 15 ἀλλὰ 100 μέτρα κριθῆς χαρίζεται, ὑπὲρ ἐκάστου τῶν πέντε ἀριθμῶν ποιήσον ἰδίαν μέθοδον τῶν τριῶν· ὑπὲρ τῆς 2 ἔτως· εἰάν 15 μέτρα μίγματος αἰτῶσι 2 μέτρα ἀνὰ γρόσια 8, 100 μέτρα πόσα αἰτήσῃσι; 15, 2, 100, ὅθεν ἔσαι 13 ἢ $\frac{1}{2}$ · ὡσαύτως πάλιν· 15 μέτρα μίγματος αἰτῶσι 3 μέτρα τῆς τιμῆς τῶν 10 γροσίων, πόσα τὰ 100 αἰτήσῃσι; εὐρεθήσονται 20 ἐκ τῶν τῆς τιμῆς ταύτης 10· ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῆς τιμῆς τῶν 11, ἢ 15 γροσίων· τέλος δὲ ὑπὲρ τῆς 4 ἀριθμῆς λέγε ἔτω: 15 μέτρα μίγματος αἰτῶσι 4 μέτρα τῶν ἀνὰ 14 γρόσια, πόσα αἰτήσῃσι τὰ 100; ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἀπο-

8	2
10	3
11	3
12	
14	4
15	2
	1
	15
8	13 $\frac{1}{2}$
10	20
11	20
14	26 $\frac{2}{3}$
15	20
	100

νέμει 26 ἢ $\frac{2}{3}$. Προσθέσεως δὲ γενομένης, ὡς ἐνταῦθα φαίνεται, εὐρηθήσονται τὰ 100 μέτρα τῆς μίγματος, ἐν ᾧ ἐνθήσῃ ὁ Γεωργὸς 13 μέτρα ἢ $\frac{1}{2}$ κριθῆς τῆς ἀνὰ γρόσια 8· 20 δὲ μέτρα τῆς ἀνὰ 10· τοσαῦτα δὲ ἢ τῆς ἀνὰ 11 ἢ 15, ἢ 26 ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀνὰ 14· τὸ ἐν ἄθροισμα τῆς τιμῆς τῆς ἔτω γενομένης μίγματος ἔσεται ἀκριβῶς 1200 γρόσια, ἅτινα διαιρεθέντα διὰ 100 μέτρων παρέχῃσι τὴν 12 μέσην τιμὴν, ἣν ἐθέλετο ὁ Γεωργός.

288. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εἰπὶ μίγματος πραγμάτων τιμῆς παντοίας, τὴν μέσην αὐτῶν εὐρεῖν τιμὴν.

ΛΥΣΙΣ. Διελε τὸ ἄθροισμα τῆς τιμῆς, ἥς τιμᾶται ὅλον τὸ μίγμα, διὰ τῆς ὀλικῆς ἄθροίσματος τῶν εἰς τὸ μίγμα εἰσελθεσῶν ποσοτήτων· τὸ ἐν πηλίκον ἔσαι ἡ ζητούμενη μέση τιμή.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κλεάνθης ὠνησάμενος 30 μὲν ὀκάδας ὠνιῦ τινός, 12 παραδῶν ἐκάστην ὀκῶν, 48 δὲ ὀκάδας, παραδῶν 14· 50 δὲ ὀκάδας, 17 παραδῶν· 100 δὲ ὀκάδας, 18 παραδῶν· συμμίζας δὲ πάντα, ἀπέδοτο τῷ Νικοστράτῳ ἐξ αὐτῶν ὀκάδας 60· πόσον ἔν ὑπὲρ τέτων καταβαλεῖ ὁ Νικόστρατος.

Ἄψasai συναφθεῖσαι αἱ ὀκάδαι ἀποπληρῶσι 228·
 τὸ ὑποτεθέν μίγμα 30 — κῖς 12 παράδ. 360 σολ.
 τιμηθὲν 30 κῖς 12 48 κῖς 14 672
 παραδῶν κτ., ὡ- 50 κῖς 17 850
 σπερ ἐνταῦθα κα- 100 κῖς 18 1800
 ταφαίνεται, συμ- 228 3682

πληροῖ παράδας 3682, ὅς διαιρεθεὶς διὰ 228, ἀποδίδωσι τὴν μέσσην τιμὴν τῆς ὀκῆς, 16 παράδας ἢ $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$ λεπτε· 60 τοῖον πολλὰ πλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν εὐρεθεῖσαν μέσσην τιμὴν προβαλεῖ γρόσια 24, παράδας 9, ἢ λεπτὰ 2 $\frac{1}{2}$, ἃ ἀποτίσσει ὁ Νικόστρατ.

289. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Μίγματος δοθέντος εὐρεῖν ὅσον οἱ εἰσεχώρησε τιμῆς ἐκάστης.

ΛΤΣΙΣ. Ποίησον εὐθύς ὡς καπὶ τῶν δύο προηγησαμένων προβλημάτων (284, 288).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. 30 μέτρων διαφόρου κριθῆς πωληθέντων, τῶν μὲν ἕκαστον τετίμηται γροσίων 10, τῶν δὲ, 8· τῶν δὲ, 6· τῶν δὲ, 4· τῶν δὲ, 2· συλλήβδην δὲ, 212· πόσα ἔν εἰσεχώρησαν τῆς τῶν 10 γροσίων τιμῆς πόσα τῆς τῶν 8, πόσα τῆς τῶν 6, πόσα τῆς τῶν 4, ἢ πόσα τῆς τῶν 2;

Α'. Ζήτησον τὴν μέσσην τιμὴν, 212 γρόσια διελὼν διὰ μέτρων 30 (288), ἔξεις 7 $\frac{1}{3}$ τιμὴν μέσσην.

Β'. Σύμμιξον τὰς διαφόρους τιμὰς τῇ μέσῃ ταύτῃ τιμῇ· ὅθεν φανήσεται, ὅτι 16 μέτρα συζηῖναι δύνανται

τιθεμένων 6 $\frac{1}{5}$ μέτρων τῶν πρὸς 10 γρόσια, 3 $\frac{1}{5}$ τῶν πρὸς 8 κτ., ὡς φαίνονται ἐνταῦθα κατεστρωμένα.

Γ. Ποίησον, ὡς ἐπὶ τῷ ὑποδείγματος (287), σκεπτόμενος: 16 μέτρα μίγματος ἐπιδέχονται 6 $\frac{1}{5}$ κριθῆς τῆς γροσίων 10, πόσα ἐπιδέχονται μέτρα 30; 11 $\frac{1}{5}$ μέτρα, φησὶν ἡ μέθοδος.

Διὰ δὲ μεθόδων ὡσαύτως εὐρεθήσονται 5 $\frac{1}{5}$ τῆς τῶν 8 γροσίων, 5 $\frac{1}{5}$ τῆς τῶν 6, 1 $\frac{1}{5}$ τῆς τῶν 4, καὶ 5 $\frac{1}{5}$ τῆς τῶν 2.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰπεὶ δὲ πολ.

λαχῶς ἔξεις ἀναμιγνύειν ἐκ πλείονων τιμῶν ἐν ὅλῳ σύγκραμα (285), ὃ παρὰ τούτο ἐξέσαι ἀναλύειν ἅπαν μίγμα εἰς τὰ ἐξ ὧν πραγματικῶς ἀναμέμικται.

ἐπὶ γὰρ τῷ προεκτεθέντος ὑποδείγματος πέφανται, ὅτι τὸ ὅλκον μίγμα τῶν 30 μέτρων, τιμηθὲν ὁμῶς 212 γροσίων, ἡδύνατο ἀναμιχθῆναι ἐκ μέτρων 11 $\frac{1}{5}$ κριθῆς τῆς ἀνὰ γρόσια 10 κτ., ὡς σεσημειώται· ἀλλ' ἀντὶ γὰρ τῷ ἐνῶν 10 σὺν 6, καὶ ἔτι σὺν 2, ὡς ἤδη πεπρακται, ἡδύνατ' ἂν ἀναμιγνύειν 10 ἢ σὺν 6, ἢ σὺν 4, ἢ σὺν 2 μόνον· ὅθεν ἂν προέκνυον ἀριθμοὶ τρεῖς ὑπὲρ τῷ 10 παντοῖοι, τῷ 11 $\frac{1}{5}$ ἐλάττω· ἐντεῦθεν ἄρα, εἰ καὶ ἄρτι γεγονῆα ἐπίλυσις ἐπὶ τῷ προεκτεθέντος ὑποδείγματος ἐστὶν ὧν ἂν ἐπιδέξαίτο πρόβλημα, ἀλλ' αὐτὸν εἶναι ἀληθῶς τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐτελέσθη ἡ ἀνάμιξις, συναγαγεῖν ἐπιεικῶς ὃ δυνήσόμεθα. Ἀλλὰ ταῦτα μὲν ἄλλις τοῖς γε τῇ ἀριθμητικῇ καὶ μόνῃ ἐξαρκεσθεῖσι· τοῖς δ' ἐνδοτέρω γενέσθαι ἐπιποθήσασιν ἰδεῖν ἐξέσαι ἐν τοῖς περὶ ἐξισώσεων προβλήματα τῆς ἀναμίξεως ἐν ἀναπτύξεσι καιναῖς, καὶ πρὸς τὸ ἀκριδέστερον μᾶλλον ἐκλελεπτουργημέναις.

10	{ 1 $\frac{1}{5}$	11 $\frac{1}{5}$
	{ 5 $\frac{1}{5}$	
8	3 $\frac{1}{5}$	5 $\frac{1}{5}$
7 $\frac{1}{5}$		
6	2 $\frac{1}{5}$	5 $\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$	1 $\frac{1}{5}$
2	2 $\frac{1}{5}$	5 $\frac{1}{5}$
	16	30



ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Τ Μ Η Μ Α Α'

ἐν ᾧ περιέχονται αἱ ἀρχοειδέσεις αὐτοῦ
πράξεις.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ἐν ᾧ αἱ προηγιματικαὶ ἀρχαί.

1. Σ υμβολικὸν λογισμὸν ὀνομάζειν ἀξιῶ
τὸν καθολικώτερον μὲν τὸ ποσὸν ἀνερευνῶντα, στοιχείαις
δὲ ἢ σημείοις τισὶ συμβολικῶς τὰ πράγματα παρεμφαι-
νοντα· τὰς δὲ κατὰ τῆτον τὸν λογισμὸν τῶν ποσοτήτων
ἐκθέσεις ἐξέσω ἀδιαφόρως καλεῖν, συμβολικὰς, ἢ
καθολικὰς, ἢ γενικὰς, ἢ γραμματικὰς, διὰ
τὸ παρίστανται, ὡς αὐτίκα ὀφόμεθα, διὰ τῶν τε Ἀλφα-
βήτου μικρῶν γραμμάτων.

2. Πρὶν ἢ δὲ τὰ στοιχεία τοῦ λογισμοῦ τῆτε ἀποδῆ-
ναι, πρῶτον ἂν εἴη τὴν δύναμιν ἐκδηλώσαι τῶν εἰς
ταῦτα παραλαμβανομένων λογιστικῶν συμβόλων.

Αὐτίκα ἐν αἱ μὲν ἔτω = γραφόμεναι διττὰι εὐθεῖαι,
ὅτι ἡ τέτων ἡγευμένη τῇ αὐταῖς ἐπομένη ποσότητι ἴση

ἐσιν, ἐμφαίνουσιν· ἀναγινώσκεται δὲ ἴσον, ἢ ἴσα, ἢ ἴση, κατὰ τὴν χρείαν.

Τὸ δὲ $+$ σύμβολόν ἐστι προθέσεως, ὃ ἀπαγγέλλομεν σὺν· οἷον βελλόμενοι ἐκθέσθαι τὸ ἄθροισμα, ἢ γὰρ τὴν σύναψιν τῶ 5 καὶ 4, γράφομεν ἔτω: $5 + 4 = 9$ · ἀπαγγέλλομεν δὲ: 5 σὺν 4 ἴσα 9.

Τὸ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως γραμμὴ ἐστὶ πλαγία —, ἣν ἀπαγγέλλομεν πλὴν· 3 ἐν ἀπὸ τῶν 5 ἀφελεῖν βελλόμενοι, σημαίνομεν τὴν ἀφαίρεσιν ἔτω: $5 - 3 = 2$ · ἀπαγγέλλομεν δὲ: 5 πλὴν 3 ἴσον 2.

Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς σημαίνεται διὰ ταυρῆ ἀνίσσεως ἔχοντος γωνίας, $\times$, ἐφ' ἧς ἀπαγγέλλομεν, ἐπὶ· ἵν' ἐν σημάνωμεν τὸν τῶ 6 ἐπὶ 5 πολλαπλασιασμὸν, γράφομεν: 6×5 · ἀπαγγέλλομεν δὲ: 6 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5, ἢ ἑξάκις 5· ἐπίσης δὲ χρώμεθα καὶ τῷ (·) σύμματι· ἀντὶ γὰρ 6×5 , δυνάμεθα γράψαι $6 \cdot 5$.

Ἡ δὲ διαίρεσις, γραμμῆς ὀριζοντεῖς ἀχθείσης, καὶ ὑπὲρ αὐτῆς μὲν τῷ διαιρετέῳ, ὑπ' αὐτὴν δὲ τῷ διαιρετῷ γραφέντων, σημαίνεται· οἷον, διαιρῶντες 60 διὰ 4 γράφομεν $\frac{60}{4}$, ἀπαγγέλλοντες: 60 διαιρεθεὶς διὰ 4· ἐπίσης δὲ διασημαίνειν εἰώθασι τὴν διαίρεσιν καὶ τῷ (:) σημείῳ, ὃ ὀπίωθεν μὲν ὁ διαιρετέος, πρόωθεν δ' ὁ διαιρετὸς τάττεται ἔτω $60 : 4$,.

Τὸ δὲ $>$ σύμβολον μείζω μὲν δηλοῖ τὴν πρὸς ὃ διαχαίνει ποσότητα, ἐλάττω δὲ τὴν πρὸς ὃ διοξίνεται· καὶ τοίνυν $8 > 5$ ἀπαγγελέμεν· 8 μείζων τῶ 5· ἐπὶ δὲ $5 < 8$: 5 ἐλάττων τῶ 8.

Τὸ δὲ ∞ ποσότητα ἀπειρον ἐμφαίνει, ταυτὸν εἰπεῖν, μείζω πάσης διορισθῆναι ἐχέσης ποσότητος.

Ο ρ ι σ μ ο ι.

3. Ποσότης μόνιμος μὲν, ἢ ἀμετάβλητος, ἢ ἄτρεπτος, ἐστὶν ἡ μεδεμίαν ὑφισταμένη μεταβολήν, οἷός ἐστιν ὁ 5 ἀριθμὸς, ὃς αἰείποτε πέντε μονάδας σημαίνει· τρεπτὴ δὲ ἢ μεταβλητὴ, ἢ ποικίλλουσα τὰς ἐαυτῆς δυνάμεις, οἷός ἐστιν ὁ γινόμενος ὑπὸ 5 καὶ παντῶν ἄλλων ἀριθμῶν, ἐφεξῆς κατὰ τὸ δοκῶν λαμβανομένων· εἰ γὰρ ἐπ' ἀδείας ὑποθώμεθα πολλαπλασιασὰς τὰς, 1, 2, 3, 4 ∞, ὁ ἐκ τῆ 5 καὶ τῶν ἄλλων κατὰ διαδοχὴν προκίπτων ἀριθμὸς ἔσται 5, 10, 15, 20 5∞, ποικιλεῖται ἐμέλει ἐπ' ἄπειρον.

4. Ἐπιδιαιρῶσι δὲ καὶ ἄλλως τὴν ποσότητα εἰς ἐγνωσμένην, ἥς ἡ δύναμις γινώσκεται· καὶ ἄγνωστον, ἥς ζητεῖται· κατὰ δὲ ταύτην τὴν διαίρεσιν, 70 μὲν ἐστὶ ποσότης ἐγνωσμένη· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῆ 7 καὶ ἐτέρου τῆ, ὃν ἂν πρὸς τὸ δοκῶν θείη τις ἀριθμὸν, ἐστὶν ἐμὸι γυν ποσότης ἄγνωστος.

5. Ποσότης συμβολικὴ, ἢ ὅ,τι δῆποτε τῶν ἀποδοθέντων ὀνομάτων (1), ἀκείει ἢ ἐκτιθεμένη δι' ἐνός, ἢ πλειόνων γραμμάτων τῷ Α'λφαβήτῳ· διὰ μὲν ἔν τῶν πρώτων, οἷον α, β, γ κτ αἱ ἀμετάβλητοι καὶ ἐγνωσμεναὶ ἐκδιχλῶνται ποσότητες· διὰ δὲ τῶν ἐσχάτων, οἷον χ, υ, ω, τῶν ποσότητων αἱ τρεπταῖτε καὶ ἄγνωστοι· ταύτας δὲ ἀδιαφόρως ἐκφέρμεν, ἥτοι διὰ τῆ θηλυκῆ ἀρεμῆς ἢ, ἢ διὰ τῆ ὑδετέρου τὸ, ἀμέλει ἢ α, καὶ τὸ α, τετέστιν ἢ ποσότης α, καὶ τὸ ποσὸν α.

6. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τίνες δ' ἄρ αἱ δυνάμεις τῶν γραμμάτων α, β, γ, ι κτ, τῶν ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ λαμβανομένων; πύθοιτ' ἅντις ἴσως ὑδεμίᾳ· ἐφ'

ἡμῖν γὰρ ἐστὶ σημεῖναι δι' αὐτῶν, ὅντινα ἂν βεβλώμεθα ἀριθμὸν, ἢ ποσότητα, ἐγνωσμένην τε καὶ ἄγνωστον, μόνιμόν τε καὶ τρεπομένην, ἐν γένει λαμβανομένην ἢ γένει καὶ εἰδικωτέραν.

7. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Διὰ τῆ συμβολικῆς ἄρα λογισμῆς ποικιλοειδεῖς πράξεις ἐπὶ ποσοτήτων τρεπτῶν τε καὶ ἄγνωστον διαπερανῶμεν, ὡς διὰ τῆς προκειμένης ἡμῖν πραγματείας κατάδηλον ἔσται.

8. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἰ'να δὲ μηδεμία ἡ ταῖς ἀπάταις καὶ ἀμφιγνοῖαις ἡ χώρα, τὰ αὐτὰ ποσὰ διὰ τῶν αὐτῶν ἐκτεθῇσονται γραμμάτων· τὰ δὲ διαφέροντα, καὶ πολλαπλᾷ ἀλλήλων μὴ ὄντα, διὰ διαφερόντων, ναὶ μὴν καὶ γράμμα ἕκασον τὴν οἰκείαν ἐαυτῇ τηρήσαι δύναμιν ἐπὶ πάσης τῆς λογισμῆτινος διαπράξεως.

9. Ὄταν ποσότης συμβολικὴ μὴ περιέχῃ πλεῖον μέρη διακεκριμένα τῷ +, εἰ τῷ — συμβόλῳ, ἀκέραια ποσότης μονώνυμος, ἢ ποσὸν μονώνυμον· ὅπως ἐν α, ἢ αβ, ἢ αχβχγ, ποσότητές εἰσι μονώνυμοι· ἀλλ' εἰ μερῶν εὐμοιροῖα διακρινομένων ταῖς +, — συμβόλοις, ἢ καὶ δι' ἀμφοῖν, γενικῶς τὸ μὲν ποσὸν καλεῖται πολυνύμον, τὰ δ' αὐτῇ διακριδὸν ἐκκείμενα μέρη, ὅροι· ἰδιαίτερον μέντοι, διώνυμος μὲν ἀκέραια, εἰ δύοιν ὅροι ἢ ποσότης ἡμιοῖρησε· τριώνυμος δὲ, εἴπερ τριῶν, καὶ ἐφεξῆς ὅπως· ὥστε τὸ μὲν ποσὸν α + β — γ ἐστὶ τριώνυμον· α δὲ καὶ β καὶ — γ εἰσὶν αὐτῇ οἱ ὅροι· ὅτοι γὰρ ὀνομάτων λόγον ταῖς ποσότησιν ἐπέχασι.

10. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ μονώνυμο παντός, ἢ ὅτε συμβολικῇ, τεσσάρων τέτων διασκέψεως ἀκριβῆς χρεῖα, τῆ γραμματος, τῆ συνεργῆς, τῆ συμβόλου, καὶ τῆ δείκτε, ὧν ἕκασον καὶ δὴ ἐπιμελῶς διασκοπήσομεν.

11. Α'. Περὶ μὲν ἐν τῇ γραμματος, ὅταν μονώνυμόν τι,

ἡ ὄρε πλείω περιέχη γράμματα, ὡς α β γ, τὸ δηλοῖ, ὡς περ κοινῇ συνέθεντο, ὅτι ἡ διὰ τῷ α ἐκτιθεμένη ποσότης πεπολλαπλασίασαι ἐπὶ τὴν τῷ β σηματομένην ποσότητα, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ἐπιπεπολλαπλασίασαι ἐπὶ τὴν ἐμφαινόμενὴν ὑπὸ τῷ γ ποσότητα· ὡσαύτως δὲ, καὶ ὡς πλείω τῶν τριῶν γράμματα.

12. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. α β γ δ, φέρ' εἶπεν, ταυτὸν δηλοῖ, ὃ καὶ α χ β χ γ χ δ· εἰ δ' ὑποτεθῶσιν ὅτι τὸ μὲν α δηλοῖ 3, τὸ δὲ β, 4· τὸ δὲ γ, 5· τὸ δὲ δ, 6· τὸ α β γ δ σημαίνει 360· εἴγε τὸ α β γ δ ταυτὸν ἐστὶ τῷ α χ β χ γ χ δ, ταυτὸν ἐπομένως τῷ 3 χ 4 χ 5 χ 6, ὅπερ ἐστὶ 360· ἐπὶ δὲ τῷ ααα, εἰαν α ἐμφαίνῃ 10, ααα δύνησεται 1000, εἴγε ααα = α χ α χ α = 10 χ 10 χ 10 = 1000.

13. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. αβ καὶ βα ταυτὸν ἐμφαίνουσι· τῶν γὰρ δοτῶν παραγόντων α καὶ β, ἀδιάφορον ὁπότερον ἄν τις δεῖῃ πολλαπλασιασέον (Α'ριθμ. 85)· διὰ ταῦτα δὲ καὶ αβγ ἴσον τῷ βγα· ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ αχβγ σημαίνεται, ὅτι τὸ α, ἢ τὸ βγ ἐστὶ πολλαπλασιασέον, τὸ γινόμενον εἶναι ταῦτον, εἴτε αχβγ γραφείη, εἴτ' ἐν αβγ, εἴτε βχγα, εἴτ' ἐν βγα, ὃ εἶναι ἐν γένει ἢ παντὸς ὄρε, ἡ δύναμις ἀμεταποίητος αἰεὶ μένει, ὅπως ἂν διαταχθεῖν, ἢ τὰ γράμματα.

14. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἴεσθαι μέντοι αἰεὶ διὰ τὸ εὐτακτον ἐκτιθέναι τὰ ὄρε παντὸς γράμματα κατὰ τὴν τῷ Α'λ. φαθήτῃ τάξιν, μηδεμιᾶς προσγινομένης τῆς ἀλλοιώσεως, οἷον ἀντὶ δγβα, γράφειν αβγδ.

15. Β'. Ο' παντὸς ὄρε Συνεργὸς χαρακτήρ ἐστὶν ἀριθμητικός, ἐν ἀριστερᾷ τῷ ὄρε τιθέμενος, καὶ αὐτὸν

πολλαπλασιάζων· ἔτω $3\alpha\beta$ ἐς ταυτόν τῷ τρίς $\alpha\beta$, ἢ $\alpha\beta \times 3$ · ὁ τοῖνον 3 ἐς συνεργός τῷ $\alpha\beta$ ὄρε.

16. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ὅρε, ὃ μὴδεις προσκείτο συνεργός, προεξυπακύνειν αἰνὴν συνεργὸν τὴν μονάδα, ἢ τε δὴ ποσότης πᾶσα πολλαπλῆν ἐς τῆς 1 (Ἀριθμ. 78.) ἔτως $\alpha\beta$ ταυτόν ἐς τῷ $1 \times \alpha\beta$, ἢ τῷ $1 \alpha\beta$.

17. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Φανερόν ἄρα, ὡς ἀντὶ ἀριθμῶν ἐξέσαι χρῆσθαι συνεργῶν ὄρε γράμματι· οἷον τὸ 4χ ἐξέσαι ἐκθέσθαι $\alpha\chi$, τιθεμένον ἀντὶ 4 τῷ α , ὅπερ τὸ α συνεργός τῷ χ ῥηθήσεται· ἀλλ' ὅθεν γὰρ τὸ κωλύον μὴ αὐτοπακύνειν τὴν 1 πρὸ τῆς καινῆς ταύτης ἐκθέσεως $\alpha\chi$ · δηλοῖ γὰρ τὸ $1 \alpha\chi$, ὅτι ἄπαξ κεῖται τὸ $\alpha\chi$.

18. Γ'. Δείκτης δὲ ἐσιν ἀριθμοί, ὅς, γραφόμενος ἐπὶ παντός γράμματος ἐν ταῖς δεξιοῖς, δείκνυσιν, ποσάκις ἐξῆς γραπτέαν ἐς τὴν ποσότητα· ἔτως ἐπὶ $\alpha^3 \beta^2$, ὁ μὲν 3 δηλοῖ τὸ α τρίς ἐξηκδὸν εἶναι γραπτέαν, ὁ δὲ 2 , ὅτι δις τὸ β · ἄρα $\alpha^3 \beta^2$ ἐς ταυτόν τῷ $\alpha\alpha\alpha\beta\beta$.

19. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Μηδενὸς ὄντος δείκτη ἐν δεξιοῖς τῷ γράμματι, ἐπειδὴ ἄπαξ γεγραπται, νοητέον τὴν 1 .

20. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Πολὺ δὲ τὸ διάφορον συνεργῶν πρὸς δείκτην. α'. ὁ μὲν γὰρ ἐπιτετμημένως δηλοῖ τὸν τῷ ὄρε ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασμόν· οἷον $\alpha\alpha\alpha = \alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^3$ · ὁ δὲ συνεργός γινόμενον δηλοῖ ὑπὸ τῷ γράμματι ἐξ αὐτῷ τῷ ἀριθμῷ, τῷ συνεργῷ καλεμένον· οἷον $3\alpha = 3 \times \alpha$ (15)· διὸ ἐξ διαφόρων πάνυ ἐπενεργῶσι τῇ τῷ ὄρε δυνάμει· ὑποθώμεθα γὰρ ὅτι α ἐσιν $= 10$ · 3α ἄρα ἐφανερὶς τρίς τὸ α , εἴτ' ἐν τρίς τὸν 10 , ὃ ἐστὶ 30 · ἀλλὰ α^3 ἐμφανερὶς $\alpha\alpha\alpha$, ἢ $\alpha \times \alpha \times \alpha$, ἢ $10 \times 10 \times 10$, ὃ ἐστὶ 1000 · β'. ὁ μὲν ἐκάστου γράμματος δείκτης ἐκείνῳ μόνῳ τῷ γράμματι ἐπε-

μεργεί· ὁ δὲ συνεργὸς ὅλον πολλαπλασiazει τὸν ὅρον· ἐν γὰρ τῷ 3 α³ β² ὁ 3 δείκτης ἐπιδρᾷ μόνῳ τῷ α· ὁ δὲ δείκτης 2 μόνῳ τῷ β· ἀλλ' ὁ 3 συνεργὸς πολλαπλασιάζει ὅλον τὸν ὅρον α³β².

21. Δ'. Ἐκδέγε τῶν συμβόλων ἡ ποσότης, ἀκύει μὲν ὑπαρκτικὴ προκειμένη αὐτῆς ἐν ἀρισερᾷ τῷ +· ἔλλειπτική δὲ, προαττομένη τῷ —· ἀλλὰ συμβόλου γὰρ μὴ παρόντος μηδενός, ἐξυπεκυσέον αἰ τοῦ +, τῆς ποσότητος τηλικαῦτα ὑπαρκτικῆς ἐκλαμβανομένης, οἷον, + αβ, ἢ αβ. — αβ δὲ ποσότης λειπτῆ.

22. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπειδὴ τὸ — σύμβολον ἀφαιρέσιν ἐμφαίνει (2), ἡλειπτικὴ ποσότης ἐκ ἑσιν ἀπλῶς ἀπυσία, εἴτ' ἐν μηδέν, ὥσπερ ἡ ἐκθεσις ἀμα φανεῖσα ἐμφαίνει· ἀλλ' ἑσι ποσότης, ἣν ἀφαιρῆν χρή ποσότητος ἐτέρας, ὑπαρκτικῆς ὀνομαζομένης, πρὸς ἣν ἀντιθέτως ἔχει αὐτή.

23. Α' ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐκτῆσατότις εἴκοσι χιλιάδας γροσίων· ὀφείλει μέντοι χιλιάδας ἐξ· ἡ ἔν ἀληθῆς κτῆσις ἐσιν 20000 — 6000, ὃ ἐσι 14000· τὰ γὰρ 6000 γρόσια ἀφαιρεθῆναι προσήκει τῶν 20000, εἰς εὔρεσιν τῆς ἀληθῆς κτήσεως· τοιαῦτα ἐν ποσότητες κληθῆσονται λειπτικά, ἔχουσαι πρὸ ἑαυτῶν τὸ — σύμβολον· ἐκὲν εἰάν μὲν 20000 κληθῇ α, 6000 δὲ β, ἡ πραγματικὴ κτήσις σημαίνεται διὰ τῆς συμβολικῆς ἐκθέσεως + α — β, ἢ α — β.

24. Β' ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τιμόθεος Λαρίσσηθεν ἀπάρας εἰς Ἰωάννηνα διήγυσεν ὥρας 20, ὅθεν ἀναγκάζεται ὀπιθοδρομῆσαι ὁδὸν ὥρων 5· Προδῆλον ἐν ὥς αἱ 5 ὥραι ταῖς 20 ἀντίκεινται, ἢ ἀφαιρεθῆναι τῶν 20 δεήσει ταύτας, ἵνα γνωσθῇ ὅσον τῆς ὁδῆ τῷ Τιμόθεῳ διήνυσαι· αὕτη τοί.

νυν κληθήσεται ποσότης λειπτική ὁ δὲ, διήνυσεν ὥρας 20 — 5, ἢ διὰ γραμμάτων, α — 6.

25. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐποίησιν ἄν, τὰ ληθῆ φθεγγόμενος, ὡς ἡ λειπτική ποσότης τοσούτω τῷ ο ἔνερθεν κείται, ὅσῳ τῷ ἐπέρκεται ἢ ὑπάρχουσα. Παῦλος, μηδὲν ὀφείλων, κέκτηται ἀργύρια 1000. Ἀντώνιος δὲ, μηδὲν κέκτημενος, ὀφείλει 1000. Ἴν' ἔν τὴν Παύλου περιεσίαν τῷ μηδενὶ ἐξισώσωμεν, ἐπάναγκας ἀφελεῖν αὐτῷ ἀργύρια 1000, ἵνα δὲ ἐν τὴν Ἀντωνίου ὀφειλὴν ὡταύτως τῷ μηδενὶ ἴσῃ ποιήσωμεν, δυνάμεται αὐτῷ χρεῶν ἀργύρια 1000.

26. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐκτιμῆσαι ἐν ἀριθμοῖς τὸ ἀποτελεσμα πάσης συμβολικῆς πράξεως.

ΛΥΣΙΣ. Ἀντικατάστησον ἐκάστῳ γράμματι ἐν ἀριθμοῖς τὴν δύναμιν, ἣν ἀπένευμας αὐτῷ πρὸ τῆς πράξεως, καὶ ἐκτέλεσον ἐν ἀριθμοῖς τὰς πράξεις, ὡς ἐνδείκνυσιν ἅπασι ἐκθέσεις.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ. Α'. Προβλήματός τινος ἐπιλυθέντος, ἀνέφυν ἐκθέσεις ἡδὲ: $6\alpha^3 6^2\gamma$. πρὸ δὲ τῆς ἐπιλύσεως ἐτέθη $\alpha = 5$, καὶ $6 = 10$ καὶ $\gamma = 20$. Ἴν' ἔν ἐν ἀριθμοῖς ὁριθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς περιπτώσεως ἡ δύναμις τῷ $6\alpha^3 6^2\gamma$, ῥητέον: α^3 ταύτον ἐστὶ τῷ ααα (18) ἢ τῷ $\alpha \times \alpha \times \alpha$, ἢ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $5 \times 5 \times 5 =$, 125, ἢ ἐστὶν ἡ δύναμις τῷ α^3 . πάλιν: $6^2 = 66 = 10 \times 10$, = 100 δύναμις τῷ 6^2 . ἀλλ' α^3 πολλαπλασιάσαι δεῖ ἐπὶ 6^2 . ἄρα πολλαπλασιαστέον τὸν 125 ἐπὶ 100. ὁ δὲ προκύπτων 12500 ἐκδηλώσει τὴν τῷ $\alpha^3 6^2$ δύναμιν. ἀλλ' $\alpha^3 6^2$ ἐπιπολλαπλασιασθῆναι δεῖ ἐπὶ γ . πολλαπλασιαστέον ἄρα 12500 ἐπὶ 20. ὁ δὲ προκύπτων 250000 ἔσται ἡ δύναμις τῷ $6\alpha^3 6^2\gamma$. τελευταίον δὲ ἅπας ὁ $\alpha^3 6^2\gamma$ ὅρος ὀφείλει πολλαπλασιασθῆναι ἐπὶ τὸν συνεργὸν 6 (20). πολ.

λαπλασιαθέντος ἄρα τῆ 250000 ἐπὶ 6 ὁ προκύπτων 1500000 ἔσαι ὅλη ἢ τῆ 6 α³ β³ γ δύναμις, ἐν ἀριθμοῖς ἐκτεθειμένη.

ΔΕΙΞΙΣ. Προφανές τετὶ ἐξ ὧν ἔφθημεν εἰπόντες ἐν ταῖς προλαβῶσι παραγράφοις.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐπὶ τῆς 5α²β³ γδ² ἐκθέσεως, ὑποτεθέντων α=4, ἢ β=5, ἢ γ=10, ἢ δ=7· ἄ. α² = α × α = 4 × 4 = 16· β³ = βββ = 5 × 5 × 5 = 125· ἄρα α² β³ = 16 × 125 = 2000· γ'. α² β³ γ πολλαπλασιασέον εἶναι ἐμφαίνει τὸ α² β³, εἴτ' ἐν 2000, ἐπὶ γ, ταῦτόν εἰπαιν ἐπὶ 10· ἄρα ἢ τῆ α² β³ γ δύναμις ἐσιν 20000· δ'. α² β³ γδ² ἐμφαίνει, ὅτι πολλαπλασιάσαι χρεὼν τὸ α² β³ γ, εἴτ' ἐν 20000 ἐπὶ δ²· ἀλλαμὴν δ² ἐσιν ἴσον 49, εἴγε δ² = δ × δ = 7 × 7 = 49· πολλαπλασιασέον ἄρα 20000 ἐπὶ 49, ὅθεν προκύψει 980000· ἢ αὕτη ἐσιν ἢ τῆ α² β³ γδ² δύναμις· ε'. τέλος δέ, 5α²β³γδ² ἐκδηλοῖ πολλαπλασιασέον ὃν τὸ α² β³ γδ², ἢ 980000 ἐπὶ 5, ὅθεν πρόεισιν ἐν ἀριθμοῖς ἢ ὅλη δύναμις τῆς 5α²β³γδ² συμβολικῆς ἐκθέσεως, 4900000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἐν $\frac{2\alpha^3\beta}{\gamma^2}$ · εἰν ὑποτεθῇ α = 10, ἢ β = 5, ἢ γ = 20, ζητητέον τὸ πρῶτον τὴν τῆ 2α³β διαιρετέον δύναμιν· α³ = ααα = α × α × α, 10 × 10 × 10 = 1000· ἄρα 2α³ = 2000· ἐπεὶ δὲ β = 5 ἔσαι ἄρα 2α³β = 10000· ὁ δὲ διαιρετέος γ² = γ × γ = 20 × 20 = 400· ἢ ἄρα $\frac{2\alpha^3\beta}{\gamma^2}$ καθολικὴ ποσότης παρέχει κλά.

σμα ἀριθμητικὸν τὸ $\frac{10000}{400} = 25$, ὅπερ ἀποτελεῖ 25 ἐν ὀλοχερέσι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀναγωγῆς τῶν ὁμοίων ὄρων.

27. ΟΡΙΣΜΟΣ. Οἱ ἐφ' ἓνα μόνον ἀναχθῆναι, ἢ ἐξ ἄρδην ἀποσβῦναι δυνάμενοι ὄροι, μηδὲ ὅλως μετακινυμένης τῆς συμβολικῆς ποσότητος, ὁμοιοὶ ὄροι καλεῖνται.

28. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἰνα δὲ τῦτ' ὦσιν, ἀπόχρη τὰ αὐτὰ ἔχειν γράμματα, καὶ τὸν αὐτὸν ἕκαστον γράμμα δείκτην· τοιοῦτοι οἱ $2\alpha^2\beta$, $4\alpha^2\beta$, ὅς ἐφ' ἓνα ἀγαγεῖν δύναμεθα, γράφοντες $6\alpha^2\beta$. ἢς τινοςθὺν γὰρ ὑποτεθείσης τῆς $2\epsilon\alpha^2$ δυνάμεως, ἐκ ἑσιν ὅς ἂν ἐπικεικῶς ἀποφύσειε μὴ $2\alpha^2\beta$, 14 συναφθὲν τῷ $2\alpha^2\beta$ ἐχλ' παρῆξειν $6\alpha^2\beta$. ἀντὶ δὲ $5\alpha^2\beta - 3\alpha^2\beta$ γράφειν ἐξέσαι $2\alpha^2\beta$. αὐτικά γὰρ δῆλον, ὡς $5\alpha^2\beta - 3\alpha^2\beta$ ἑσὶν ἴσον τῷ $2\alpha^2\beta$. τέλος δὲ ἡ $5\alpha^2\beta - 3\alpha^2\beta$ ἑκθεσις διαγραφίσεται ἄρδην, ἅτε ποσότης πᾶσα ἐαυτῆς ὀλοχερῶς ἀφαιρεθεῖσα ἐξυδενῆται (Αριθμ. 15) ἐφ' ἐκάστης ἄρα τῶν τριῶν τῶνδε περιπτώσεων ῥᾶσον ἦν ξυνοδεῖν, ὅτι οἱ δύο προτεθέντες ὄροι ἀναχθῆναι ἠδυνήθησαν, ἐπεὶ εἶχον τὰ αὐτὰ γράμματα, καὶ τὴς αὐτῆς ἐφ' ἑκάστου γράμματος δείκτας, ὃ ἐστὶ 2 ἐπὶ τῷ α , καὶ 1 ἐπὶ τῷ β .

29. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἀλλὰ παρόντος γὰρ ἐνί τινι ὄρῳ γράμματος, ὃ θατέρου ἄπεσιν, ἢ κοινῆ ἀμφοῖν γράμματος τὸν αὐτὸν μὴ ἔχοντος δείκτην, οἱ ὄροι τηνικαῦτα, ἀνόμοιοι ὄντες, ἀναγωγῆς ἔσονται ἀνεπίδεκτοι· σαφὲς γὰρ τὴς $2\alpha^2\beta\gamma$,

$3\alpha^3\beta$ μὴ δύνασθαι ἀναχθῆναι μηδ' ἐπὶ $5\alpha^3\beta\gamma$, μηδ' ἐπὶ $5\alpha^3\beta$. ἀλλ' ἔδὲ $2\alpha^3\beta$, $3\alpha^3\beta^2$ ἀναχθήσονται, καὶ αὐτοὶ ἀνόμοιοι ὑπάρχοντες.

30. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Εἰς ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὄρων, εἰ μὲν τὸ αὐτὸ ἐκάτερος ἔχωσι σύμβολον, συνήθωσαν μόνον οἱ κατ' αὐτὴς συνεργοί. εἰ δὲ μὴ τὸ αὐτὸ, ἀφηρήθω ὁ μείζων συνεργὸς ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος, ἢ δὲ διαφορὰ ἔσω συνεργὸς, μεθ' ἧς εἶχεν ὁ μείζων σύμβολον. τέλος δὲ, εἰ μὴ τῶν συμβόλων ἐναντίων ὄντων, οἱ συνεργοὶ ἰσῶνται ἀλλήλοις, ἀπολελείθωσαν πάντα. Πᾶσα δὲ τέτοια ἐξ ὧν τε εἰπόντες ἐφθίμεν, καὶ ἐξ ὧν ἐποιήσαμεν, κατανοηθήσεται. ἐπὶ γὰρ $3\alpha\beta\gamma + 4\alpha\beta\gamma$ τὰ σύμβολα ταυτίζονται παρὰ τὸ ἐξυπακούμενον πρὸς τὰ λοιπὰ τοῦ $3\alpha\beta\gamma + (21)$, συναφθέντων ἄρα τῶν συνεργῶν, ἔσται $7\alpha\beta\gamma$. ἐπὶ μέντοι — $5\alpha\beta\gamma + 2\alpha\beta\gamma$ τῶν συμβόλων διαφερόντων, ἀφαιρεθήσεται μὲν ὁ 2 ἀπὸ τοῦ 5, γραφήσεται δὲ τὸ — ὁ παρὴν τῷ μείζονι συνεργῷ 5, ἐκ δὲ τούτων ἔσται — $3\alpha\beta\gamma$. ἐν γὰρ τετρίῳ τῷ ὑπόδειγματι, εἴπερ 2 $\alpha\beta\gamma$ ἐμφαίνει 2000 κτήσιν — $5\alpha\beta\gamma$ ἐμφανεῖ 5000 ὄφειλιν. ἐνθα καταφανὲς, ἀναγωγῆς γενομένης, λειφθῆναι μόνον 3000 ὀφλήματος καὶ ἐπομένως — $3\alpha\beta\gamma$. Τέλος δὲ, εἰ εἷη $5\alpha\beta\gamma - 5\alpha\beta\gamma$, ἅπαν ἐξῃσθενώσεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Προθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως τῶν γραμματικῶν ποσοτήτων.

31. Πᾶσα ἡ πράξις τῆς προθέσεως κεῖται ἐν τῷ

γραφῆναι πάσας τὰς προτεθείσας ποσότητας κατ' ἄλλη-
 λην, ἡγουμένη ἐκάστη τῷ οἰκείῳ αὐτῆς συμβόλῳ· ἐκά-
 στε δὲ ὅρου τὰ γράμματα κατὰ τάξιν ἐκτεθῆναι τὴν τῷ
 Ἀλφαβῆτε, καὶ ἀναχθῆναι δὲ πάντας τοὺς ὁμοίους ὅρους εἰ-
 εῖν (27, 30)· κείθω γὰρ εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῆς
 $2\gamma\alpha\beta - 3\gamma\delta + 5\gamma\delta - \alpha\gamma\delta$ · αὕτη μὲν ἔν κατὰ τὰ
 εἰρημένα κατ' ἑαυτὴν ἡθροῖσαι· γραφῆναι μέντοι δεῖ κα-
 τὰ τάξιν ἔτω· $2\alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma + 5\gamma\delta - 3\gamma\delta$, ἀναχ-
 θῆναι δὲ ἐπὶ $\alpha\beta\gamma + 2\gamma\delta$ · συνάψαι δὲ βυλόμενος τὴν
 $2\delta\gamma$ τῇ $3\alpha\beta - 6\alpha\beta\gamma$, γράψον αὐτὰς ἔτω· $3\alpha\beta -$
 $6\alpha\beta\gamma + 2\gamma\delta$.

32. Ἰν' ἀφαιρεθῇ ποσότης συμβολικὴ ἀφ' ὑτέρας
 τοιαύτης, γεγράφθω πρῶτον ἡ, ἀφ' ἧς ἡ ἀφαίρεσις ἔσαι,
 ποσότης, σώζουσα τὸ ἑαυτῆς σύμβολον· εἴτα ἡ ἀφαιρεθη-
 σομένη, τὸ ἑαυτῆς μεταβαλῶσα.

33. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸν δὲ τῷ κανόνος τῷδε λόγον
 ἔῃς· ἂν κατανοήσῃμεν ἐπὶ τῶν ἰδιαιτέρων περιπτώσεων, ἀ-
 ναπολῶντες αἰ κατὰ τὴν ἐφεξῆς ἀρχὴν „Ἀφαίρεσις
 „ἔστιν εὐρεσις ποσοτήτων δυεῖν διαφορᾶς, ἡ διαφέρει τῆς
 „ὑτέρας ἁτέρας”.

Ἐῷ εἰν ἀφελεῖν β ἀπὸ α· γεγράφθω πρῶτον α,
 δεξιόθεν δ' αὐτῆς ἡ ἀφαιρεθησομένη β, τὸ — λαμβάνουσα
 ἀντὶ τῷ +, τῷ αὐτῆς προεξυπακνομένη· ἐκ δὲ τούτων ἔσαι
 $\alpha - \beta$ · σαφές γάρ ἐστιν ὅτι ἡ τῷ + α πρὸς + β διαφο-
 ρὰ ἔστι +α, ἡ ἀφαιρεθὲν ὑποτίθεται τὸ β· ἡ ἄρα, τούτων
 διαφορὰ σημανθήσεται $\alpha - \beta$ · ἔσω αὖ — β ἀφελεῖν
 ἀπὸ + α· γεγράφθω ἔν τὸ α, καὶ μεταβεβλήθω τὸ
 πρὸ τῷ β — εἰς +, ὅθεν ἔσαι $\alpha + \beta$ · εἰς δὲ τούτω τῷ
 κανόνος κατάληψιν, ὑποθώμεθα ὅτι + α, ὡς ὑπαρκτικὴ,
 ἐκδηλοῖ 10000 γρόσια κτήσεως, ἡ δὲ — β, ὡς λειπτι-

ἢ 4000 γρόσια ὀφειλῆς· ἢ ἔν διαφορὰ τῆς 10000 ἀργυρίων περισσίας πρὸς τὴν 4000 ὀφειλὴν ἐστὶ 10000 + 4000, εἴτ' ἔν 14000 ἀργύρια· ἵνα γὰρ ἐξιῶσωμεν τὸν, πρὸς τῷ μηδὲν κεκτηῖσθαι, καὶ 4000 ἀργύρια ὀφείλοντα, τῷ 10000 ἀργύρα κεκτημένῳ, παραχεῖν τῷ πρώτῳ ἀνάγκη ἀργύρια 14000.

Ἰνα δὲ ἀφαιρεθῇ + β — γ ἀπὸ α, γεγράφθω α, καὶ πρὸς δεξιὰν αὐτῆ β καὶ γ, ἐνηλλαγμένων τῶν πρὸ αὐτῶν συμβόλων, ὅθεν ἔσαι α — β + γ· εἰ γὰρ μόνον τὸ + β ἀφαιρεθῇ καὶ γραφῇ — β, ἡ ἀφαίρεσις τῆ ζητεμένη γίνεται μείζων ὅλῳ τῷ γ· ἢ γὰρ ἅπαν τὸ β ἀφαιρεθῆναι πρὸτεθείται, ἀλλὰ τὸ β ἡλλαττωμένον τῷ γ· ἐπ' ἀνάγκης ἄρα πρὸς εὐρεσιν τῆς διαφορᾶς τῆ α πρὸς β — γ συνάπτειν ἐν δεξιᾷ τῆς α — β τὴν + γ ποσότητα, ταῦτε εἰν ἐν τῇ συμβολικῇ ἀφαιρέσει μετατρέπειν τῆς ἀφαιρέμενης ποσότητος τὰ σύμβολα. Ταῦτὸν δὲ φανεῖται καὶ ἐν ἀριθμοῖς· κειώω γὰρ α = 10000, καὶ β = 5000, καὶ γ = 2000· προδήλον ἄρα, ὅτι ἡ τῆ α πρὸς β — γ διαφορά, εἴτ' ἔν ἡ τῆ 10000 πρὸς 5000 — 2000 ἐστὶ 10000 — 5000 + 2000, ὅπερ ἐστὶν 7000.

Ἀφαιρῦντες δὲ — α ἀπὸ + α γράψωμεν + α + α ὅ ἐστὶ + 2 α· ἢ γὰρ τῆς 1000 ἀργυρίων, φέρειπεῖν, περισσίας πρὸς 1000 ἀργυρίων ὀφειλὴν διαφορά ἐστὶ περισσίας ἀργύρια 2000.

Ἀφαιρῦντες δὲ + α ἀπὸ — α γράψωμεν — α — α, ὅπερ ἐστὶν — 2 α· ἐπειδὴ γὰρ ἡ + α ποσότης ὑπέρεκειται τῆς — α τῷ — 2 α, ἡ — α ποσότης ἡττων ἐστὶ τῆς + α τῷ + 2 α, ταῦτὸν εἰπεῖν, ἡ διαφορά τῆς — α παραβαλλομένης τῇ + α ἐστὶ 2 α.

Τελευταῖον δὲ, ἵνα ἀφαιρεθῇ + α ἀπὸ + α, ἢ — α

ἀπὸ — α , γεγράφθω $+\alpha - \alpha$, ἢ — $\alpha + \alpha$, καὶ δι' ἀναγωγῆς ἔσαι 0.

34. ΣΧΟΛΙΟΝ. Μετὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν, ἀνακτέον τὰς ὁρμὰς ἐπὶ τὸ ὡς οἶόν τε ἀπλῆστερον· εἰάν ἔν ἀπὸ $2\alpha\alpha - \alpha\beta + \gamma\gamma$ ἀφαιρεθῇ $\alpha\alpha + \alpha\beta - \beta\gamma$, προκύψει $2\alpha\alpha - \alpha\beta + \gamma\gamma - \alpha\alpha - \alpha\beta + \beta\gamma$, εἰτ' ἔν $\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\gamma$: εἰάν δὲ ἀπὸ $6\alpha - 3\beta + 4\gamma$ ἀφαιρεθῇ, $5\alpha - 5\beta + 6\gamma$, προκύψει $6\alpha - 3\beta + 4\gamma - 5\alpha + 5\beta - 6\gamma$, εἰτ' ἔν $\alpha + 2\beta - 2\gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμῶ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων.

35. Ὅσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς ἀριθμὸς ἀπλῆς δι' ἀριθμῷ ἀπλῆ πολλαπλασιάζεται, καὶ σύνθετος δι' ἀπλῆ, ἢ τέταντίον, καὶ σύνθετος τέλος δι' ἀριθμῷ συνθέτου ἔτω δυνατόν πολλαπλασιάζειν ἢται μονώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, ἢ πολυνύμον ἐπὶ μονώνυμον, καὶ ἀντιτρόφως, ἢ πολυνύμον ἐπὶ πολυνύμον.

Περὶ τῆ πολλαπλασιασμῶ τῶν Μονωνύμων.

36. Μονώνυμον ἔν ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιάζοντες, τηρεῖν ὀφείλομεν τὰς κανόνας τῶν συμβόλων, τῶν συνεργῶν, τῶν γραμμάτων, καὶ τῶν δεικτῶν τῶν γραμμάτων, ἃ κοινῇ παρέπεται τῷτε πολλαπλασιασέω, καὶ τῷ πολλαπλασιασῇ.

37. Κανὼν Α'. Τῶν ὅρων, ὁμοίων μὲν ὄντων, τίθει τῷ προκύπτοντι τὸ +, ἀνομοίων δὲ, τὸ —

38. Β'. Πολλαπλασιάσον τὸν ἕτερον συνεργὸν ἐπὶ τὸν ἕτερον.

39. Γ'. Γράφε ἐξῆς ἐπὶ τῷ προκύπτοντος πάντα τὰ ἔντε τῷ πολλαπλασιασῶ καὶ τῷ πολλαπλασιασῇ γράμματα μετὰ τῶν οἰκείων δεικτῶν.

40. Δ'. Ὅταν γράμματι παρῇ κοινῇ τῷτε πολλαπλασιασῶ καὶ τῷ πολλαπλασιασῇ, τὸτο μὲν γράφε ἅπαξ, συνάπτων δὲ τὸν τῷ πολλαπλασιασῶ δεικτὴν τῷ τῷ πολλαπλασιασῷ, τὸ τῷτῶν ἄθροισμα ἐπιχάρασσε ὡς δεικτὴν τῷ προκύπτοντι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κείτω πολλαπλασιάσαι $2 \alpha^3 \beta$ ἐπὶ $5 \alpha \beta^2 \gamma$. Ἄ. ἐπεὶ ἔν κοινῇ ἐξυπακύνεται τὸ +, προχάραξον, ἢ ἕα προεξυπακύνεσθαι τῷ προκύπτοντος τὸ +.

Β'. Πολλαπλασιάσον 2 ἐπὶ 5 , καὶ γράψον προκύπτοντα τὸν 10.

Γ'. Γράψον $\alpha\beta\gamma$: τέλος δὲ: α , κοινῇ παρὸν τῷτε πολλαπλασιασῶ καὶ τῷ πολλαπλασιασῇ, γράψον ἅπαξ· τὸν δὲ 3 δεικτὴν τῷ πολλαπλασιασῶ συνάψας τῷ 1 δεικτὴ τῷ πολλαπλασιασῷ, τὸ ἄθροισμα 4 τίθει δεικτὴν ἐπὶ τῷ προκύπτοντος· β δὲ κοινῇ ἐνόντος τοῖς παράγυσι, προῶδεις τὴς ἐπ' αὐτῶν δεικτας, τὸ 3 ἄθροισμα τίθει ἐπ' αὐτῷ τῷ προκύπτοντος δεικτὴν· προκύψει ἄρα ὁλικῶς τὸ $10 \alpha^4 \beta^3 \gamma$.

41. Ἰνα δὲ φανῇ, ὡς καὶ ἐκ τῆ συμβολικῆς πολλαπλασιασμῶ, αὐτὸ δὲ τετονοητέον καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως, ταῦτὸν ἔπεται, ὅ καὶ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν, προσοικειώσομεν τοῖς γράμμασι μίαντινὰ ἀριθμητικὴν δύναμιν ἐν ἑκατέρῳ πράξεως εἶδει· τεθείτω ἔν ἐπὶ τῷ ἀνωτέρῳ ὑποδειγματος

$\alpha = 10$, $\epsilon\beta = 5$, $\epsilon\gamma = 4$. γενήσεται ἄρα ὁ μὲν $2\alpha^3\beta$ πολλαπλασιασέας, 10000, ὁ δὲ $3\alpha\beta^2\gamma$ πολλαπλασιασῆς, 3000· ἐκὼν τὸν ὑπ' αὐτῶν γινόμενον δεῖξει εἶναι 50000000· ἢ ἄρα τῷ 10 $\alpha^4\beta^3\gamma$ δύναμις εὐρεθήσεται ἴση 50000000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰ'να πολλαπλασιασθῇ $\alpha^2\beta$ ἐ. — $3\beta\delta$, ἐπεὶ τὰ σύμβολα διαφέρουσι, θετέον — τῷ προκύπτοντι· ὁ δ' ἐν ἀρισερῇ τῷ πολλαπλασιασῆν ἐξυπακουόμενος συνεργὸς 1, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τῷ πολλαπλασιασῆ 3, δίδωσι 3· ἐκ δὲ τῷ (39), εἰσι $\alpha\beta\delta$ · τέλος δὲ ἐκ τῷ (40) δείκτης μόνῃ ἐπανήκει τῷ β · ὁ ὕντῃ πολλαπλασιασῆ β δείκτης, συναφθεὶς τῷ τῷ πολλαπλασιασῆ β , ἀποτελεῖ 2, ὃν θετέον ἐπὶ τῷ προκύπτοντι β · εἶσαι ἄρα τὸ ζητούμενον — $3\alpha^2\beta^2\delta$.

Ἔτερα ὑποδείγματα· ἔτω ποιῶσιν εὐρεθήσεται $\epsilon\beta$ τὰ ἐξῆς ἄ. ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ — $\alpha\epsilon\beta$ εἰσι — $\alpha\beta\beta$. τὸ ὑπὸ — $\alpha\epsilon\beta$ εἰσι — $\beta\epsilon\beta$ + $\alpha\beta$. γ'. τὸ ὑπὸ — $\alpha\epsilon\beta$ — α , ἢ ὑπὸ + $\alpha\epsilon\beta$ + α , εἰσι + α^2 .

Περὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν πολυωνύμων.

42. Ὡς περ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς πολλαπλασιάζοντες ἀριθμὸν σύνθετον ἀφ' ἀπλῆν ἢ $\epsilon\beta$ ἀντιστρόφως, πολλαπλασιάζομεν ἐξῆς πάντας τὰς τῷ συνθέτῳ ἀριθμῷ χαρακτῆρας ἐπὶ τὸν ἀπλῆν· ἔτω $\epsilon\beta$ ἐπὶ τῷ τῶν πολυωνύμων ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιασμῷ, πολλαπλασιάζονται πάντες οἱ τῷ πολυωνύμῳ ὅροι ἐπὶ τὸ μονώνυμον κατὰ τὰς ἄρτι ἀποδοδομένης ἐπὶ τῷ τῶν μονώνυμων ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιασμῷ κανόνας.

43. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰστέον δὲ, ὡς ἐπεὶ καθάπαξ ὅτε

τικὴν ἢ κέκτηνται δύναμιν οἱ γραμματικαὶ ὄροι, ὡς αἱ ἀρχομένοις τηρεῖται τάξις κατὰ τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ἐν τῇ τῶν πολυωνύμων πολλαπλασιασμῷ, ἢ ἐν τῇ τέτων διαιρέσει, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

ΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄.

$$2\alpha\beta^2 + 4\alpha^2\beta\gamma - \alpha\gamma$$

Κεῖθω πολλαπλασιά-

$$2\alpha\beta\gamma$$

σαι $2\alpha\beta^2 + 4\alpha^2\beta\gamma -$ $4\alpha^2\beta^2\gamma + 8\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta\gamma^2$
 $\alpha\gamma$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$.] Πολλαπλασιάσον ἐν κατὰ τὴν διθέντας
 κανόνας (36) $2\alpha\beta^2$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$ · προκύπτων εἶσαι $4\alpha^2\beta^2\gamma$ ·
 πολλαπλασιάσον εἶτα $4\alpha^2\beta\gamma$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$ · προκύπτων εἶ-
 σαι $8\alpha^2\beta^2\gamma^2$ · τέλος δὲ πολλαπλασιάσον — $\alpha\gamma$ ἐπὶ
 $+ 2\alpha\beta\gamma$ · προκύπτων εἶσαι — $2\alpha^2\beta\gamma^2$ · ὁ δ' ὅλικός
 προκύπτων εἴσεται $4\alpha^2\beta^2\gamma + 8\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta\gamma^2$

44. Ὅταν δὲ ὅ,τε πολλαπλασιαστέος ἐν ὁ πολλα-
 πλασιαστέος τῶν πολυωνύμων ὡσι, πολλαπλασιάσον πρῶ-
 τον πάντας τὴν ὅρους τῆ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶ-
 τον τῶν τῆ πολλαπλασιαστέου ὅρων, εἴθ' ἅπαντας ἐπὶ τὸν
 δεύτερον ἐν ἐξῆς ὥτως· εἰθ' ἐπὶ τῆ προκύπτοντος ἐκ
 τῆ πολλαπλασιαστέου ὅμοιοι ὑπάρχωσιν ὄροι (27), μέτεθι
 τύτους δι' ἀναγωγῆς (20).

Αὐτίκα ἐν, ἵνα πολ.

$$\alpha + \beta + \gamma$$

απλασιασθῇ $\alpha + \beta +$

$$\delta + \xi$$

ἐπὶ $\delta + \xi$, πολλα

$$\alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta$$

πλασιασθῇτω πρῶ.

$$\alpha\xi + \beta\xi + \gamma\xi$$

τον $\alpha + \beta + \gamma$ διὰ δ ,

$$\alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta + \alpha\xi + \beta\xi + \gamma\xi$$

ὅθεν προκύψει $\alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta$ · εἶτα δὲ $\alpha + \beta + \gamma$ διὰ ξ ,

ὅθεν εἴσαι $\alpha\xi + \beta\xi + \gamma\xi$ · τὸ δ' ὅλον, $\alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta + \alpha\xi$

$+ \beta\xi + \gamma\xi$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἴνα πολλαπλασιασθῇ $2αβ — 3βγ$ ἐπὶ $3α — β$, πολλαπλασθήτω πρῶτον $2αβ — 3βγ$ ἐπὶ $3α$, ὅθεν ἔσαι $6α^2β — 9αβγ$. ἔξ ὑπαρχῆς δὲ πολλαπλασιασθήτω $2αβ — 3βγ$ ἐπὶ $—β$, ὅθεν ἔψεται $—2αβ^2 + 3β^2γ$. τὸ ἄρα ὅλικόν προκύπτει ἔστιν $6α^2β — 9αβγ — 2αβ^2 + 3β^2γ$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἴνα πολλαπλασιασθῇ $α + βζ — γ$ ἐπὶ $α — βζ + γ$ γραφήτωσαν ὑπάλληλοι οἱ δύο ποιηταί, πολλαπλασιασθήτω, α'. ὁ πολλαπλασιαστέος ἐπὶ $α$, ὅθεν ἔσαι $α^2 + αβζ — αγ$, εἶτα ἐπὶ $—βζ$, ὅθεν προκύψει $—αβζ — β^2ζ^2 — βγζ$, ὃ γεγράφθω ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον, ὡς τὲς ὁμοίους ὁρμῃ τοῖς ὁμοίοις ἀντιστοιχεῖν· τέλος δὲ, ἐπὶ $+γ$, ὅθεν προκύψει $+αγ + βγζ — γ^2$ ὃ κ' ἐτῷτο γεγράφθω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπὸ τὸ δεῦτερον γινόμενον. Ταῦτα δὲ τὰ τρία γενόμενα, δι' ἀναγωγῆς συναφθέντα, ἀποτελεῖσιν ὅλικόν γινόμενον τὸ ἐνταῦθα ὁρώμενον.

45. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γένει δὲ, γραμμῆς πλαγίας ἀχθείσης ἐπὶ πολλῶν συλλήθεον ποσοτήτων, σημαίνεται ὁ πολλαπλασιασμός τῆς σκεπομένης ὅλης ποσότητος δι' ἑτέρας ὡσαύτως σκεπομένης, μεσολαβήντος τῷ $κ$ · οἷον, ἵνα δηλωθῇ τὸ προκύπτειν ἐκ τῆς $α + β + γ$ κ' δ $+ ζ$, γράφεται $α + β + γ \times δ + ζ$, ὃ ἐμφαίνει ὅτι ὅλη ἡ ποσότης $α + β + γ$ πολλαπλασιάζεται ἐκ' ὅπως διὰ $δ$, ἀλλ' ἔτι καὶ διὰ $ζ$.

Εἰσὶ δ' οἱ ἀντὶ $α + β \times ζ + θ$, γράφουσιν ἔτιως $(α + β) \cdot (ζ + θ)$.

ὑποδείγματα πολλαπλασιασμοῦ πρὸς ἀσκήσιν τῶν
πρωτοπείρων.

$$\begin{array}{r}
 a^2 + 2a\beta + \beta^2 \\
 \hline
 a + \beta \\
 \hline
 a^3 + 2a^2\beta + a\beta^2 \\
 + a^2\beta + 2a\beta^2 + \beta^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2a\beta - 3a\gamma + \beta\gamma \\
 \hline
 a\gamma - 2\beta\gamma \\
 \hline
 2a\alpha\beta\gamma - 3a^2\gamma\gamma + a\beta\gamma\gamma \\
 - 4a\beta^2\gamma + 6a\beta\gamma\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma \\
 \hline
 2a\alpha\beta\gamma - 3a\alpha\gamma\gamma + 7a\beta\gamma\gamma - 4a\beta\beta\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{3}a^2\beta + \frac{1}{3}\beta^3 \\
 \hline
 \frac{1}{3}a\beta - 2\beta^2 \\
 \hline
 \frac{2}{3}a^4\beta - \frac{1}{3}\frac{2}{3}a^3\beta^2 + \frac{2}{3}\frac{2}{3}a\beta^4 \\
 - \frac{1}{3}a^3\beta^2 + \frac{2}{3}a^2\beta^3 + \beta^5 \\
 \hline
 \frac{2}{3}a^4\beta - \frac{1}{3}\frac{2}{3}a^3\beta^2 + \frac{2}{3}a^2\beta^3 + \frac{2}{3}a\beta^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5a^3 - 4a^2\beta + 5a\beta^2 - 3\beta^3 \\
 \hline
 4a^2 - 5a\beta + 2\beta^2 \\
 \hline
 20a^5 - 16a^4\beta + 20a^3\beta^2 - 12a^2\beta^3 \\
 - 25a^4\beta + 20a^3\beta^2 - 25a^2\beta^3 - 15a\beta^4 \\
 + 10a^3\beta^2 - 8a^2\beta^3 + 10a\beta^4 - 6\beta^5 \\
 \hline
 20a^5 - 41a^4\beta + 50a^3\beta^2 - 45a^2\beta^3 + 25a\beta^4 - 6\beta^5
 \end{array}$$

Δεῖξις τῶν προεκτεθέντων κανόνων.

46. Α'. Πολλαπλασιάζειν $2a$ ἐπὶ 3β , φέρειπείν,
λαμβάνειν ἐς $2a$ τοσάκις, ὅσα ἐς β ἐν τῷ 3β , θεω-
ρούμενα δίκην μονάδος (72), ὅθεν ἔσται προδήλως $6a$.

δει ἄρα πολλαπλασιάζειν τὸς συνεργὺς διὰ πατέρου τὸν ἕτερον.

Β'. Ὡρῖσαι κατὰ συνθήκην, ἵν' εἰς δήλωσιν τῆ πολ. λαπλασιασμοῦ τῶν γραμμάτων ἀδιαφόρως δυναίμεθα, ἢ διασέλλειν ταῦτα τῷ κ, ἢ ἄνευ τέττε κατ' ἀλ. ληλυχίαν ἐκτιθέναι, ἢ παρεντιθέναι αὐτοῖς τὸ εἶγμα (.)

Γ'. Ο' δὲ τῶν δεικτῶν κανὼν ὑδὲν ἀλλ' ἢ ἀπλῆν εἰς αἴτημα, ἢ, ἐπὶ εἰ τέτο βυλόμεθα, ἐπιτομήτις· πολλα. πλασιάζοντας γὰρ βββ ἐπὶ ββ χρεῶν γράφειν κατὰ τὸν τῶν γραμμάτων κανόνα βββββ (18, 39)· ἀλλ' αἰτῶμεν διὰ τεπίτομεν γράφειν β' ἀντὶ βββββ· μόνος δ' ἂν ὁ κανὼν τῶν σημείων πράγματα ἡμῖν παράχοι· τέττω δὲ (37) ἀναπτίξω δει τεσσάρων τῶν ἐφεξῆς.

α. + x + = +. β'. — x + = —. γ'. + x — = —. δ'. — x — = +.

47. Α' + x + = +. Ο' ἐ καὶ εἰς αὐτὸ ξυμφανὲς· εἴγε ποσότης ἅπαντα ὑπαρκτικὴ εἰς αὐτὴ συναφθεῖσα τεσσά. κισ, ὅσαι μονάδες ἔνευσιν ἑτέρω ὑπαρκτικῇ, ὀφείλει ἀποδῆναι ἄθροισμα ὑπαρκτικόν

48. Β'. — x + = —. Ποσότης γὰρ ἅπαντα λει. πτική, ταυτὸν εἰπεῖν, ὀφειλὴ πᾶσα, συναφθεῖσα εἰς αὐτὴ ὁ. σάκισ ἔνευσιν ἡμῶς ἑτέρω ποσότητι ὑπαρκτικῇ, ὀφείλει ἀποδῆναι ποσότητα λειπτικήν· εἰ γὰρ ὀφείλω 4 χρήσεις ἐκάστῃ γρόσια 5000, σαφὲς ὅτι τὰ 5000 γρόσια, πολ. λαπλασιαθέντα ἐπὶ 4, ποιήσουσι γρόσια 20000 ὀφει. λῆς, ἢ μὴν δὲ 20000 περισσίας.

Λόγος ἕτερος· Ἐξω 5 — 2 πολλαπλασιαστέος ἐπὶ + 4, ὑφ' ὧν ὁ προκύπτων ἐνὺς καταφαίνεται ὧν 12. Πολλαπλασιάσαντες ἐν + 5 διὰ + 4 ἔχομεν 20 προκύ. πτοντα μείζω τῆ δικαίε, τῇ ποσότητι 8, ἥτις ἐς πρ.

κύπτων ἐκ 2 (ὅς ἀφώρισαι τῷ 5 πρὸ τῷ πολλαπλασιασμέ) ἢ τῷ 4· πολλαπλασιάζοντες ἔν — 2 διὰ + 4 γράφομεν — 8, ἥτις ἀπομαῖνι τὸν προκύπτοντα 20 τῇ ποσότητι 8, καθ' ἣν τῷ δικαίῳ ὑπερέβαινε· δι' ἣν ἀντάμειψιν τὸ — πολλαπλασιάζσαν τὸ + ἀποδώσει —.

49. Γ'. + x — = —. Πολλαπλασιάζοντες γὰρ + 5 ἐπὶ + 4, ληφόμεθα ὑπαρκτικῶς τετράκις τὸν 5, ὅθεν προκύψει 20· ἀλλὰ πολλαπλασιάζοντες + 5 ἐπὶ — 4, τὴν ἐναντίαν πάντως βαδιέμεθα, ὃ ἐστὶ ληφόμεθα τετράκις λειπτικῶς τὸν 5, εἴτ' ἔν τετράκις αὐτὸν ἀφαιρησόμεθα· ἀφαιρῶντες τοίνυν τετράκις τὸν 5 γράφομεν — 5 — 5 — 5 — 5 (32) ὅπερ εἰς — 20· ~~— + x~~
— = —

Δειχθήσεται δὲ ἢ τῷτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω δεύτερον λόγον ἀπαραλλάκτως.

50. Δ'. Τελευταῖον δὲ — x — = +· πολλαπλασιάζοντες γὰρ — 4 ἐπὶ + 3, φέρ' εἰπεῖν, συνάπτομεν τρεῖς τὸν — 4, ὡς εἰ ἢ γράφοιμεν — 4 — 4 — 4 τετέσι — 12. Πολλαπλασιάζοντες τοίνυν — 4 διὰ — 3, ἐπ' ἐναντίας δῆπευ χωρήσομεν, τετέσιν ἀφαιρήσομεν τρεῖς τὸν — 4· ἢ ἂν ἔν δηνηθείμεν ἀφελεῖν τρεῖς τὸν — 4, εἰμὴ γράψαιμεν + 4 + 4 + 4, ὅπερ ἔσαι + 12· Ἀλλ' ὡς — x — = ἦτοι +, ἢ γ' ἔν —· ἀλλὰ μὴν — γενέσθαι ἢ δύναται· ἐστὶ γὰρ τὸ — γινόμενον ἐκ — x +, ἢ ἐκ + x — (48, 49)· ἀναγκαιῶς ἄρα ἔσαι + *)

*) "Λεῖψις ἐπὶ λῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὑπαρξιν·
"Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὑπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν"· ὅπως ἐκφράζει τον

Ἔτερος λόγος· Ἐξω γὰρ πολλαπλασιάσαι
 $5 - 2$ διὰ $9 - 3$, ὡν τὸ γινόμενον πᾶς τις ξυνορᾷ ἐσό-
 μεν $18 \cdot 5 - 2$, πολλαπλασιασθέν ἐπὶ 9 , δίδωσι 45
 $- 18 \cdot$ πολλαπλασιασθέντος δ' ἐφεξῆς $τῷ 5$ ἐπὶ $- 3$,
 προκύψει $15 \cdot$ ἀλλαμὴν $- 3$ ἔκ ὧφειλε πολλαπλασιά-
 σαι ὅλον τὸν 5 , ἀλλ' ἀπομεμειωμένον τῷ $2 \cdot$ ὁ ἄρα 2
 τρίς πλεόν $τῷ$ δικαίῳ εἰσῆχθῇ τῷ λειπτικῷ προκύπταντι
 $- 15 \cdot$ ἢ δὴ τὸ 15 προκύπτον, ὡς λειπτικὸν θεωρήμε-
 νον, ἐς μείζον $τῷ$ δικαίῳ τῇ ὅλῃ ποσότητι $- 6 \cdot$ ἄρα
 πολλαπλασιάζοντες ἐπομένως $- 2$ ἐπὶ $- 3$ ὀφειλομεν
 γράψαι $+ 6$, ἀναπληρῶντες ἀμέλει ἐν τῷ προκύπτοντι,
 ἣν ἔσθ' ὅσον ἀφειλόμεθα ποσότητα $6 \cdot$ ἐντεῦθεν ἔξομεν προ-
 κύπτοντα ἀληθῆ τὸν 18 , ὅνπερ χρεὼν εὑρεῖν, ὡς ἐν ἀρχῇ εἴ-
 δομεν· ἐπεὶ $45 - 18 - 15 + 6 = 18 \cdot$ Ὅτι δὲ τὰντα
 κρατεῖ καὶ τῶν ἐν γράμμασι ποσῶν, μὴ ἢ περιττὸν ἢ
 δεικνύειν.

κανόνα τόνδε Διόφαντος, Βιβ. Α' Ὁρίσμ. 3'. Ὅθεν ἢ
 ἡμῖν αἱ ἐναντίαί ποσότητες, ἢ τῶν συμβόλων τοῖς ἐναν-
 τίοις $+$, $-$ σημειώμεναι, ἢ καταφατικαὶ ἢ ἀποφατι-
 καὶ, ὥσπερ ἄλλοις εἶδισαι, ὑπαρκτικαὶ δὲ καὶ λειπτι-
 καὶ ἐκλήθησαν (21)· ἢ γὰρ ἢ ἡ ἀρχαία χρῆσις ἔτω
 τηρεῖται καὶ τὸ πρᾶγμα ἁλὶς διερμηνεύεσθαι· Δουτὶν γάρ-
 τινων, ὅμην ἔχέτω ἀργύρια 20 , ἄτερος δὲ ὀφειλέτω 20 .
 δῆλον ὅτι τῷ μὲν ὑπάρχεσιν ἀργύρια 20 , ἀπὸ δὲ τῷ
 δευτέρῳ λείπεσιν ἀργύρια 20 · διὰ ταῦτα $τῷ$ μὲν ἢ τῶν
 20 περισσία ἐστὶ ποσότης ὑπαρκτική· $τῷ$ δὲ ἢ τῶν 20
 ὀφειλή, ποσότης λειπτική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Συμβολικῶν
Ποσοτήτων.

51. Η' διαιρέσεις ἐναντίως ἔχουσα τῷ πολλαπλασι-
ασμῷ, αἰτεῖ μέντοι κατ' ἐκείνον ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ
τῆς κανόνας τῶν συμβόλων, τῶν συνεργῶν, τῶν γραμ-
μάτων, καὶ δὴ καὶ τῶν δεικτῶν.

52. Κανὼν Α'. Ἐὰν μὲν ὁμοία σύμβολα παρῶσι
τῷ τε διαιρετέῳ, καὶ τῷ διαιρέτῃ, τίθει πρὸ τῆ πηλίκου τὸ
+· εἰ δ' ἀνόμοια, τὸ —.

53. Β'. Δίελε τὸν τῷ διαιρετέῳ συνεργὸν διὰ τῆ
κατὰ τὸν διαιρέτην.

54. Γ'. Γράφε πηλίκον τὰ ἐν τῷ διαιρετέῳ συνά-
μα ταῖς δείκταις γράμματα, ἃ μὴ ἔχει ὁ διαιρέτης.

55. Δ'. Ὅταν ὁ, τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τὸ
αὐτὸ ἔχωσι γράμμα, ἀφελε τὸν δείκτην τὸν ἐν τῷ διαι-
ρετέῳ ἀπὸ τῆ ἐν τῷ διαιρέτῃ, καὶ γράψον πηλίκον αὐτὸ
τὸ γράμμα μετὰ δείκτη, ὅς ἐσιν ἡ διαφορὰ τῶν προτέ-
ρων δεικτῶν· τῆς δὲ διαφορᾶς οἷσθης, ὡς ὅταν ὁ αὐτὸς
ἡ δείκτης τῷ τε ἐπὶ τῷ διαιρετέῳ, καὶ τῷ ἐπὶ τῷ διαιρέτῃ
γράμματι, μὴδύλως γράφε τὸ γράμμα.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐῶ διελεῖν $\beta \alpha^2 \beta^3 \gamma$ διὰ
 $\alpha \alpha^2 \beta$ · τὰ ἐξυπακυόμενα σημεῖα + εἰσὶ ταυτὰ, γράφε ἔν
πρὸ τῆ πηλίκου, ἢ ἔα προσξυπακυόμενον τὸ +· δίελε εἴτα
τὸν τῷ διαιρετέῳ συνεργὸν β , διὰ τῆ κατὰ τὸν διαιρέτην
συνεργῆ α , τὸν δὲ προϊόντα β · ἔξυπναι τῷ πηλί-

κα· τὸ δὲ α, παρὸν κοινῇ τῷτε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ μετὰ τῷ αὐτῷ δείκτῃ, μηδὲ γράψῃς ἐν τῷ πηλίκῳ ὅλως· τὸ δὲ β κοινῇ μὲν ἀπαντᾷ, ἀλλὰ μετὰ δείκτῃ, ἐν μὲν τῷ διαιρετέῳ μείζονος, ἐν δὲ τῷ διαιρέτῃ ἐλάσσονος· διὰ ταῦτ' ἐν ἄφελε τὸν δείκτην τῷ διαιρέτῃ 1 ἀπὸ τῆς ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτῃ 3, τὸ δὲ β γράμμα θὲς πηλίκον ἐπιθεὶς αὐτῷ δείκτην τὴν 2 διαφορὰν· τέλος δὲ τὸ γ παρὸν μὲν τῷ διαιρετέῳ, ἀπὸν δὲ τῷ διαιρέτῃ, γράψῃς πηλίκον, τὸ δ' ὅλον πηλίκον ἔξεις $3\beta^2\gamma$

Ἐςω $\alpha=4$, καὶ $\beta=10$, καὶ $\gamma=5$ · ὁ τοίνυν διαιρετέος $6\alpha^2\beta^3\gamma$ ἔσται 480000, ὁ δὲ $2\alpha^2\beta$ διαιρέτης, 320· διαιρεθέντος ἔν τῷ 480000 διὰ 320, πηλίκον πρὸς 1500· εὐρεθήσεται δὲ ὅτι καὶ τὸ $3\beta^2\gamma$ συμβαλικὸν πηλίκον δύναται ὡσαύτως 1500.

56. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ, ὡς καὶ τῇ ἀριθμητικῇ, γενικὴ βάσανος τῆς μὲν διαιρέσεως ἔστιν ὁ πολλαπλασιασμὸς, τῆς δὲ ἡ διαίρεσις· ὅθεν εἰδέναι βεβλόμενος ἐπὶ τῷ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, εἰ ἄρα ἀληθὲς πηλίκον ἔχομεν, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀποληψόμεθα ἀναγκαίως τὸν διαιρετέον· τὴν ἀντίστοιχον δὲ μετὰ τὸ πολλαπλασιάσαι $2\alpha^2\beta$ ἐπὶ $3\beta^2\gamma$, βασανίζοντες τὴν πρᾶξιν, τὸ προκύπτειν $6\alpha^2\beta^3\gamma$ διαιρήσομεθα διὰ τῆς πολλαπλασιασῆς $3\beta^2\gamma$ ἀποληψόμεθα δὲ ἀναγκαίως εἰς πηλίκον τὸν $2\alpha^2\beta$ πολλαπλασιασέον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐςω διελείν — $\alpha\beta^3\gamma$ διὰ — $\beta^2\gamma$ · ὁ ἔν τῶν σημείων κανὼν ἀφορροῖ τὸ + τῷ πηλίκῳ· περὶ δὲ τῶν συνεργῶν, 1 ἐξυπακουμένη πρὸ τῆς διαιρέτου, διαιρεθείσα διὰ 1, προεξυπακουμένης τῆς διαιρέτου, παρέχει 1, ἣν ἔα προεξακέεσθαι τῷ πηλίκῳ· τὸ δὲ α παρὸν μὲν τῷ διαιρετέῳ, ἀπὸν δὲ τῷ διαιρέτῃ γράψῃς ὡς πηλίκον· τῷ

δὲ β ἀφελὼν τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ δείκτην α ἀπὸ τῆ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτη 3, γράφει πηλίκον τὸ β μετὰ δείκτη 1, ἢ ἐ παραλείπεται ἐννοουμένη· τὸ δὲ γ ὡς τῷ τε διαιρετέῳ ἐ τῷ διαιρέτῃ σὺν τῷ αὐτῷ δείκτη παρὸν, μὴ γράφει ὅλως· πηλίκον ἄρα ἔσται + αβ· ὡσαύτως δὲ 8 αβ: — αβ = — 4· ἐ — 8 αβγ²: + αβγ = — 8 γ.

Δείξεις τῶν προαποδοθέντων κανόνων.

Α' τας κανὼν διαιρέσεως ἀσφαλῆς ἔσται, εἰὰν παράγῃ πηλίκον, ὃ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀποδίδωσιν ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον· ἐπεὶ δὲ τῆτο ξυμβαίνει ἐκ τῶν ἄρτι προτεθειμένων κανόνων· ἄρα ἐ αὐτοὶ εἰσιν ἀσφαλεῖς.

Α'. Εἰ γὰρ τῶν συμβόλων ἀρξαμένοις, εἰ ἔσται τῷ τε διαιρετέῳ ἐ τῷ διαιρέτῃ +, τὸ + τῷ πηλίκῃ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ + τῷ διαιρετέῳ ἐπιστρέψει τὸ τῷ διαιρετέῳ +· εἰ δ' ἔσται — τῷ διαιρετέῳ τε ἐ τῷ διαιρέτῃ, τὸ + τῷ πηλίκῃ πολλαπλασιασθὲν διὰ τῆ — τῷ διαιρετέῳ ἀποδώσει τὸ — τῷ διαιρετέῳ· εἰ δ' ἔσται + μὲν τῷ διαιρετέῳ, — δὲ τῷ διαιρέτῃ, τὸ τῷ πηλίκῃ —, πολλαπλασιασθὲν διὰ τῆ — τῷ διαιρετέῳ ἀποδώσει τὸ τῷ διαιρετέῳ +· τέλος δὲ, εἰ ἔσται — μὲν τῷ διαιρετέῳ, + δὲ τῷ διαιρέτῃ, τὸ τῷ πηλίκῃ — πολλαπλασιασθὲν διὰ τῆ + τῷ διαιρετέῳ ἀποδώσει τὸ τῷ διαιρετέῳ —.

Β'. Ὅτι δὲ τῶν συνεργῶν, ἐπεὶ περ ὁ τῆ συμβολικῆ πηλίκῃ συνεργὸς ἀριθμητικὸν πηλίκον ὑπάρχει, προῖον ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆ κατὰ τὸν διαιρετέον διὰ τῆ κατὰ τὸν διαιρέτην συνεργῆ, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τῆ διαιρέτη συνεργὸν ἀποδώσει ἀναγκαίως τὸν τῆ διαιρετέον.

Γ'. Περὶ δὲ τῶν γραμμάτων, πάντα τὰ τῷ διαιρέ-
τε, ἢ τὰ τῷ πηλίκῃ (54, 55) ἢ ἐ ἀμφοῖν κοινῇ παρευ-
ρισκόμενα, εὐρεθήσονται ἀναγκαίως καὶ τῷ γινομένῳ ὑ-
πὸ τῷ πηλίκῃ, ἐ τῷ διαιρέτῃ (39).

Δ'. Τὸ δ' ἐπὶ τοῖς δείκταις· ἅπαν γράμμα τῷ διαιρε-
τέῳ, ὃ μὴ πάρεσι τῷ διαιρέτῃ, παρέσαι τῷ πηλίκῃ, ἐ
δὴ ἐ τῷ προκύπτοντι, ἔχον τὸν αὐτῷ δείκτην, ὃν εἶχεν ἐν
τῷ διαιρετέῳ (39). Περὶ δὲ τῶν κοινῇ παρόντων τῷτε
διαireτέῳ, ἐ τῷ διαιρέτῃ, εἰς ἔχουσιν ἴσους δείκτας,
παρόντα τῷ διαιρέτῃ παρέσονται ἐ τῷ προκύπτοντι· εἰς
δὲ ὁ δείκτης, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρετέῳ,
μείζων ἢ τῷ δείκτῃ, ὃν τὸ αὐτὸ γράμμα ἔχει ἐπὶ τῷ
διαireτέῳ, ἢ ὑπεροχὴ τῷ ἐντῷ διαιρετέῳ, ἢ ὑπερέχει τὸν
ἐν τῷ διαιρέτῃ, συναφθεῖσα αὐτῷ τῷ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἀ-
ναγκαίως ἀποδώσει τὸν ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτην (55).

57. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. α. Ὅταν ὁ τῷ διαιρέτῃ συνεργὸς
μείζων ἢ τῷ κατὰ τὸν διαιρετέον, ἢ ὅταν λειψάνῃ ἄτερ
ἐκ ἔχῃ γενέσθαι διαίρεσις· β'. ὅταν ὁ διαιρέτης γράμματα
περιέχῃ, ἃ μὴ ἔχει ὁ διαιρετέος· γ'. ὅταν ὁ δείκτης κοι-
νῇ γράμματος τῷτε διαιρετέῳ ἐ τῷ διαιρέτῃ μείζων ἢ
ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἢ ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἢ συμβολικῇ διαίρε-
σις ὀλοχρεῶς ἢ γενήσεται· ἀποχρήσει ἢ τῇ καὶ αὐτὰ ση-
μεῖον τὴν διαίρεσιν ἥτοι μεσολαβῶντος μεταξὺ τῷ (:)
σημεῖον· οἷον 7 αβγ : 3 αβγδ, ἢ ἐν εἶδει κλάσματος, ἢ
ἀριθμητικῇ μὲν ὁ διαιρετέος, παρανοματικῇ δὲ ὁ διαιρέτης
οἷον $\frac{7 \alpha \beta \gamma}{3 \alpha \beta \gamma \delta}$.

58. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἀλλὰ συχνάκις γὰρ ἢ ἔτω
περισσεύουσα διαίρεσις, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα, ἐφ' ἀπ-
λυσέραν ἐκθεσιν ἀναχθῆναι δύναται· ἰδὲ δὴ ἢ μέθοδος· α.

διέλε, εἰ ἐξείη, ἐκάτερον συνεργὸν διὰ τῆ αὐτῆ ἀριθμῆ, ἢ ἐν τῷ χώρῳ αὐτῶν τίθει τὰ προκύπτοντα πηλίκᾳ β'. ὅταν ὡς ἰ γράμματα κοινὰ τῷ τε διαιρετέῳ ἢ τῷ διαιρέτῃ, σὺν τῷ αὐτῷ δείκτῃ, ἀμφότερα ἀπάλειψον (35). ὅταν δὲ ἐν διαφοροῖς δείκταις, ἕα κατὰ χώραν τὸ, ὃ εἶχε τὸν μείζω δείκτην, μετὰ δείκτε τῆς διαφορᾶς τῶν δύο προτέρων δείκτων.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ι' ἐν ἀναγὰγῃς ἐφ' ἀπλυσέ-
ραν ἔκθεσιν τὴν σεσημειωμένην διάιρεσιν, ἢ τὸ συμβολι-

κὸν κλάσμα $\frac{4\alpha\beta^3\gamma\delta}{12\alpha\beta\gamma^2}$ α'. διέλε τὴς συνεργῆς 4 ἢ 12

διὰ 4, ὅθεν προκύψει $\frac{1}{3}$ β'. τὸ α, κοινὸν ὃν τῷ τε διαιρε-
τέῳ ἢ τῷ διαιρέτῃ, ἐξάλειψον γ'. τὸ β ἔχον ἐν μὲν τῷ
διαιρετέῳ δείκτην 3, ἐν δὲ τῷ διαιρέτῃ δείκτην 1, ἕασον
ἐπὶ τῷ διαιρετέῳ μετὰ δείκτε τῷ 2, ὃς ἔστιν ἡ διαφορὰ
τῷ 3 ἢ 1, ὃς εἶχον πρότερον δείκτας τὰ γράμματα·
ἀπὸ δὲ τῷ γ, 1 ἀφαιρεθεῖσα τῷ 2, καταλείπει γ ἐν
τῷ διαιρέτῃ· ἢ δὲ διαίρεσις, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα

γενήσεται δι' ἀναγωγῆς $\frac{1\beta^2\delta}{3\gamma}$, ἢ $\frac{\beta^2\delta}{3\gamma}$.

Πᾶς ἄν τις ῥᾶστα συνίδοι, ὅτι ταῦτόν ποιῶμεν ἐνταῦ-
θα, ὃ ἢ εἰ διέλοιμεν τόντε ἀριθμητὴν ἢ παρονομαστὴν

τῷ κλάσματος $\frac{4\alpha\beta^3\gamma\delta}{12\alpha\beta\gamma^2}$ διὰ τῆ αὐτῆ ποσῆς 4αβγ, εἴ-

γε 4αβ διαιρεθὲν διὰ 4αβγ ἀποδίδωσι β²δ, τὸ δὲ
12αβγ² διαιρεθὲν ὡσαύτως ἀποδίδωσι 3γ· ἔτω δὲ ἀ-
μετακίνητος μένει ἡ δύναμις τῷ κλάσματος (Α'ριθμ. 143).

Εἴτερον ὑπόδειγμα· ἔτω δὲ ποιῶντες εὐρή-
σομεν ἢ τὸ $\frac{18\alpha\beta\zeta^3}{9\beta\gamma\zeta}$ γινόμενον δι' ἀναγωγῆς $\frac{2\alpha\zeta^2}{\gamma}$, ἢ

$\frac{9\alpha\gamma}{7\gamma} = \frac{9\alpha}{7}$, ἢ $\frac{\alpha\beta}{2\alpha\beta} = \frac{1}{2}$ εἰν δὲ ὅ,τε διαιρετέος ἢ ὁ διαι-
ρέτης πλείους ἐνὸς ὅρου ἔχωσιν, ἐν ἀναχθῶσιν εἰς ἀπλύ-
περον σχῆμα, ἐπάναγκες εὐρεῖν τὸν μέγιστον κοινὸν ἀμ-
φοῖν διαιρέτην, ὡς ἐν τῷ ἐξῆς κεφαλαίῳ ὀφόμεθα.

59. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐς $\frac{\alpha}{\alpha}$ παρεπόμενοι τοῖνον τῷ

γενικῷ τῶν δεικτῶν κανόνι (55) ὅς ἀφαιρεῖν παρεκελεύε-
το τὸν δείκτην, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρέ-
τῃ, τῷ δείκτῃ ὃν ἔχει ἐν τῷ διαιρετέῳ, ληφόμεθα πη-
λίκον α^{-1} , ἢ α^0 , ἀλλὰ α διαιρεθὲν δι' α παρέχει πη-
λίκον $1 \cdot \alpha\alpha, \alpha^0$, ἢ ἐν γένει ἅπαν γράμματα δείκτην
ἔχον 0, ἴσον ἐς $1 \cdot$ ὅταν ἄρα ἀναγαγεῖν βελώμεθα ἐφ'
ἀπλυσέραν ἔκθεσιν κλάσμα συμβολικόν, ἔχον τὰ αὐτὰ
γράμματα ἐπίτε τῷ ἀριθμητῷ ἢ τῷ παρονομαστῷ μετὰ
τῷ αὐτῷ δείκτῃ, ταῦτα, ἐπεὶ ἰσοδυναμεῖσι μονάδι, ἥτις
τὰ λοιπὰ γράμματα πολλαπλασιάζουσα ἢ μετατρέπει,
ἀπαλειπτόν.

Διαιρέσεις τῶν πολυωνύμων.

60. Ὡς περ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς διαιρεῖν ἀδύνατον
ἀριθμὸν ἀπλῶν διὰ σύνθετε, ὕτω καὶ τῷ συμβολικῷ λο-
γισμῷ ἀδύνατον διελεῖν διὰ πολυωνύμου μονωνύμου· ἀπο-
χρήσει ἔν μόνον τὴν πρᾶξιν σημειῶσαι· ὕτως ἐπὶ διαι-

ρέσει τῷ $\alpha\gamma$ διὰ $\alpha + \beta$ γραπτέον $\frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta}$ · ἢ γυν $\alpha\gamma : \alpha + \beta$

ἢ ἢ $\alpha\gamma : (\alpha + \beta)$ · Ἀλλ' ἐπὶ πολυωνύμου διὰ μονωνύμου
διαιρέσιν, διαιρέμεν ἐξῆς πάντας τὰς τῷ πολυωνύμου
ὅρους διὰ τῷ μονωνύμου.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐξω διελείν $6αβ^2 + 2βγ — 4βδ$ διὰ $2β$ · $6αβ^2$ διαιρεθὲν διὰ $2β$, δίδωσι $3αβ$ · $2βγ$ διαιρεθὲν διὰ $2β$, δίδωσι $γ$ · $ε$ — $4βδ$ διαιρεθὲν διὰ $2β$ παρέχει — $2δ$ · τὸ δ' ὅλον πηλίκον, $3αβ + γ — 2δ$ · πολλαπλασιασθέν γὰρ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $2β$, προβάλλει τὸν διαιρετέον.

Ἐξω $α=10$, $ε β=5$, $ε γ=4$, $ε δ=3$ · Ὅλος τοίνυν ὁ διαιρετέος $6αβ^2 + 2βγ — 4βδ$ ἐκτιμηθεὶς ἐν ἀριθμοῖς, ἔσται 1480· ὁ δὲ διαιρέτης ἔσται 10· 1480 ἐν διαιρεθείς διὰ 10, δίδωσιν 148· καταφανὲς δὲ, ὅτι $ε$ τὸ πηλίκον $3αβ + γ — 2δ$ δύναται ὡσαύτω 148.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κεῖσθω διαλείν — $α + αβ — 3αβγ$ διὰ — $α$ · — $α$ διαιρεθὲν διὰ — $α$, δίδωσι + 1· $αβ$ διαιρεθὲν διὰ — $α$ δίδωσι — $β$ · — $3αβγ$ διαιρεθὲν διὰ — $α$ δίδωσι + $3βγ$ · τὸ δ' ὅλον πηλίκον, + 1 — $β + 3βγ$.

61. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀπαντήσαντος δὲ ἐν τῷ διαιρετέῳ ὄρου, ὅς μὴ εἴη διαιρέσιμος λειψάνῳ δίχα, ἀποχρήσει αὐτὸν

σημεῖον ὡς διηρημένον· διαιρῶντες ἔν $3αβ — βγ$ διὰ

$2αγ$, γράφομεν μόνον $\frac{3αβ — βγ}{2αγ}$, ἢ γέν $3αβ — βγ : 2αγ$

ἢ τέλος $(3αβ — βγ) : 2αγ$

62. Οἱ πηλίκ' ἂν ὅ, τα διαιρετέος $ε$ ὁ διαιρέτης τῶν πολυωνύμων ὑπάρχῃσι· α'. δέλε διὰ τῆ πρώτῃ ὄρου τα διαιρέτε, ἔνα τινὰ ὄρον τῆ διαιρετέου, ὅς ἂν ἡ λειψάνῳ ἄνευ διαιρέσιμος· β'. πολλαπλασίασον ὅλον τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὐρημένον πηλίκον· γ'. ἀφείλε ἀπὸ τῆ διαιρετέου τὸ προκύπτον τόνδε τὸν τρόπον· μεταβαλὼν τὰ τῶν ὄρων τῆ προκύπταντος σύμβολα, τίθει ἕκαστον ὄρον ὑφ' ἑκα-

σον τῶν τῷ διαιρετέῳ, οἱ σφίσιν ἂν εἶεν ὅμοιοι, καὶ ἀνά-
 γαγε ὕτω ἐκάστην δυάδα ὁρῶν τῷ προκύπτοντος καὶ τῷ
 διαιρετέῳ· ἐπαναλαμβάναν δὲ, ἕως ἂν ἐξῇ, τὰς αὐτὰς
 πράξεις, μέχρι τέλους τῆς διαιρέσεως.

63. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ρ' ἄς' ἄντις ξυνίδοι, ὡς ἡ μέθο-
 δος αὕτη τῷ διαιρεῖν τὰ πολυώνυμα ἀκριβῶς ταυτίζεται
 τῇ μεθόδῳ τῆς ἀριθμῶ συνθέτε διαιρέσεως· ὡς καὶ ἡ μέ-
 θοδος τῷ πολυώνυμῳ διὰ μονωνύμων διαιρεῖν ἢ αὐτὴ ἐς
 τῇ ἐκδεδομένη περὶ τῆς τῷ συνθέτε δι' ἀπλῆ ἀριθμῶ δι-
 αίρεσεως· ἐν γένει ἄρα εἶπεῖν, παρὲς τῶν προσημέ-
 νον ἐκ τῆς σχετικῆς τῶν ἀριθμῶν δυνάμεως ὅ, τε πολλα-
 πλασιασμός καὶ ἡ διαίρεσις τῶν συμβολικῶν πολυωνύμων
 τὰλλα πάντα ἀκριβῶς ταυτίζονται τῷ πολλαπλασια-
 σμῷ τε καὶ τῇ διαιρέσει τῶν συνθέτων ἀριθμῶν.

ΤΠΟΔΕΙΜΑ Α'. Ἐςω διελεῖν $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma$ διὰ $\alpha\beta + \gamma$ · γραφέντων ἔν τῷ τε διαιρετέῳ καὶ τῷ
 διαιρετέῳ ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς διαιρέσεως, καθάπερ
 φαίνεται ἐνταῦθα,

διέλε $\alpha^2\beta$ διὰ τῷ $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma \mid \alpha\beta + \gamma$
 πρώτῳ ὅρῳ τῷ $\alpha\beta$ · $-\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\gamma + \beta\gamma \mid \alpha - \beta$
 τὸ δὲ α τίθει ἐν

τῷ χώρῳ τῶν πῆ-

λίκων· Ὅλον δὲ τὸν $\alpha\beta + \gamma$ διαιρέτην πολλαπλασιάσας
 ἐπὶ τὸ πηλίκον α , γράψον τὸ $\alpha^2\beta + \alpha\gamma$ γινόμενον ὑφ'
 ὅρῳ τῷ διαιρετέῳ ὁμοίως, ἀλλὰ μετὰ συμβόλων ἐναν-
 τίων εἰς ἀφαίρεσεως ἐνδείξιν (32)· ἀναγωγῆς δὲ γε-
 νομένης κοινῆς τῶν ὁρῶν τῷ προκύπτοντος τοῖς ἀντιστοίχοις
 ὅροις τῷ διαιρετέῳ, καταλείπεται ο· μένουσι δὲ ἔτι ἐν τῷ
 διαιρετέῳ οἱ ὅροι $-\alpha\beta^2 - \beta\gamma$ · διέλε ἔν αὐτοῖς $-\alpha\beta^2$
 διὰ τῷ πρώτῳ ὅρῳ $\alpha\beta$ τῶν κατὰ τὸν διαιρέτην· τὸ δὲ

— β γράψον ἐν τοῖς πηλίκοις· ὅλος δὲ ὁ διαιρέτης $αβ + γ$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ — β, ποιεῖ — $αβ^2 - βγ$. τέτες δὲ γράψον ὑφ' ὅρου τῆ διαιρετέως σφίσιν ὁμοίους, ἐχοντας ἀντὶ — τὸ + σύμβολον· ἀναγωγῆς δὲ αὐθὺς γενομένης, ἔδὲν λείπεται· Τὸ δ' ὀλικὸν πηλίκον ἐστὶν $α - β$, ὃ πολλαπλασιασθέν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $αβ + γ$ ἀποδίδωσι τὸν αὐτὸν διαιρετέον $α^2β - αβ^2 + αγ - βγ$.

Εἴς, ἐπὶ τῇ προτεθέντος ὑποδείγματος, $α = 10$, καὶ $β = 5$, καὶ $γ = 4$. ὅλος ἄρα ὁ διαιρέτης ἔσται 270, ὃ δὲ διαιρέτης 54· 270 διαιρεθεὶς διὰ 54 δίδωσι 5· ἀλλ' ὡσαύτως καὶ τὸ συμβολικὸν πηλίκον $α - β$ ἐστὶν = 5.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κεῖθω διελεῖν $χ^3 - 11χ^2 + 38χ - 40$ διὰ $χ - 2$. διηρήσθω ἔν ὃ τῇ διαιρετέω ὅρος $χ^3$ διὰ τῇ πρώτῃ τῶν κατὰ τὸν διαιρέτην ὅρου $χ$. ὅθεν προκύψει πηλίκον $χ^2$. ὅλος δὲ τῇ διαιρέτῃ $χ - 2$, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τῇ το τὸ πηλίκον, προκύψει $χ^3 - 2χ^2$, ὃ γεγράφθω ὑπὸ τὸν διαιρετέον σὺν ἐναντίοις συμβόλοις· ἀναγωγῇ δὲ καταλείπεται ἐν τῇ διαιρετέω — $9χ^2 + 38χ - 40$. διηρήσθω τοίνυν — $9χ^2$, διὰ $χ$. πηλίκον ἔσται — $9χ$. ὅλος δὲ τῇ διαιρέτῃ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ — $9χ$, προκύπτει — $9χ^2 + 18χ$. γεγράφθων ἔν τῷ ὅρῳ τῷδε μετ' ἐναντίων συμβόλων ὑφ' ὁμοίῳ σφὶν ὅρῳ· ἀναγωγῇ δὲ λείπεται ἐν τῇ διαιρετέω $20χ - 40$. διηρήσθω δὲ $20χ$ διὰ $χ$. πηλίκον ἔν ἔσται + 20· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τῇδε τῇ πηλίκῃ καὶ τῇ διαιρέτῃ, εἴτ' ἔν + $20χ - 40$, γράψον μετ' ἐναντίων συμβόλων ὑπὸ δὺν ὁμοίους ἀντιστοιχῶντας ὅρους· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, καταλείπεται 0, ὃ, τε διαιρετέος φθίνει· Τὸ ἄρα ὀλικὸν πηλίκον ἔστι $χ^2 - 9χ + 20$, ὃ πολλαπλασιασθέν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $χ - 2$ ἀποδίδωσι τὸν διαιρετέον.

$$\begin{array}{r}
 \chi^3 - 11\chi^2 + 33\chi - 40 \mid \chi - 2 \\
 \hline
 -\chi^3 + 2\chi^2 - 18\chi + 40 \mid \chi - 9\chi^2 + 20 \\
 0 - 9\chi^2 + 20\chi \\
 + 9\chi^2 - 20\chi \\
 0
 \end{array}$$

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἐςω διελθὲν $\chi^3 - 117\chi - 324$ διὰ $\chi + 3$ · διηρήσθω ἐν χ^3 διὰ χ · πηλίκον ἔσαι χ^2 · ὁ δὲ $\chi + 3$ διαιρέτης, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πηλίκον χ^2 , ποιῇ $\chi^3 + 3\chi^2$ · γεγράφθω δὲ τὸ χ^3 μετὰ τῷ — ὑπὸ τὸ χ^3 τῷ διαιρετέῳ· ἀναγωγῇ δὲ λείπεται 0· περὶ δὲ τῷ $+3\chi^2$ ὅρε βλέπων, ὅτι ἔκ ἐσιν αὐτῷ ὁμοῖος ὅρος ἐν τῷ διαιρετέῳ, γράφει αὐτὸν ὑπὸ τὸν — χ^3 μεταβάλλων τὸ σύμβολον, ὑποτιθεὶς δὲ αὐτὸν ὡς ὅρον τῷ διαιρετέῳ διέλε εὐθὺς διὰ τῷ χ πρώτῃ τῶν τῷ διαιρετέῳ ὄρων· πηλίκον ἐν ἔσαι — 3χ · ὁ δὲ $\chi + 3$ διαιρέτης, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ — 3χ , ποιῇ — $3\chi^2 - 9\chi$ · Τέτων δὲ τῶν δυοῖν ὄρων ὑπὸ τῆς σφίσιν ὁμοίους γραφέντων, ἢ ἀφαιρεθέντων, λείπεται ἐπὶ τῷ διαιρετέῳ — $108\chi - 324$ · διαιρεθεὶς δὲ διὰ χ ὁ — 108χ ὅρος παρέχει πηλίκον — 108 · πολλαπλασιασθεὶς δὲ ἐπὶ — 108 ὁ $\chi + 3$ ποιῇ — $108\chi - 324$, ὧν ἀφαιρεθέντων δι' ἀναγωγῆς, λείπεται ἐν μηδὲ ἐν· Ὀλικὸν ἄρα πηλίκον ἔσι $\chi^2 - 3\chi - 108$

$$\begin{array}{r}
 \chi^3 - 117\chi - 324 \mid \chi + 3 \\
 \hline
 -\chi^3 + 9\chi + 324 \mid \chi^2 - 3\chi - 108 \\
 0 - 108\chi \\
 - 3\chi^2 + 108\chi \\
 + 3\chi^2 \\
 0
 \end{array}$$

64. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡνίκα ἐπὶ τῷ προκύπτοντος

ἐκ τῆ $\chi + 3$ διαιρέτω διὰ τῆ χ^3 πηλίκῳ ἀπὸντησεν ὅρος $\delta + 3\chi^2$, ὃν εἶδομεν ὁμοίῳ κατὰ τὸν διαιρετέον ἀμοιρῶν-
τα ὅρου, μεταλλαγῇ τῆ συμβόλου ἐπεχαραξάμεν τὴν ἀ-
φαίρεσιν, ἥς πράγματι μὴ ἐκτελεσμένης χήτει ὅρου πα-
ραπλησίῳ, ἐτήρησαμεν αὐτὸν ὡς ἓνα τῶν τῆ διαιρετέου, καὶ
ἀμέσως διείλομεν διὰ τῆ χ πρώτῃ τῶν τῆ διαιρέτω ὅρων,
πρὸς εὗρεσιν τῆ δευτέρου ὅρου — 3χ , ὅς γέγραπται
ἐν τῷ πηλίκῳ ὡς εἰς τῶν παραγόντων τὸν διαιρετέον·
ἐν γένει ἄρα ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς ὅτε ἐπὶ τῆ γινομένη
ὑπὸ τῆ πηλίκῳ καὶ τῆ διαιρέτω ἀπαντᾷ ὅρος ὁμοίῳ ἀμοιρῶν
ἐν τῷ διαιρετέῳ, τῆτον δὲ αὐτίκα τροπῇ τῆ συμβόλου δι-
αιρεῖν διὰ τῆ πρώτῃ τῶν τῆ διαιρέτω ὅρων·

Τὸ ποδείγματα διαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν τῶν πρω-
τοπείρων.

$$\begin{array}{r}
 \alpha^3 - \beta^3 \mid \alpha - \beta \\
 \hline
 -\alpha^3 + \alpha^2\beta \mid \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\
 \hline
 + \alpha^2\beta - \beta^3 \\
 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\
 \hline
 + \alpha\beta^2 - \beta^3 \\
 - \alpha\beta^2 + \beta^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8\alpha^4 - 2\alpha^3\beta - 13\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 \mid 4\alpha^2 + 5\alpha\beta + \beta^2 \\
 \hline
 -8\alpha^4 + 10\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 \mid 2\alpha^2 - 3\alpha\beta \\
 \hline
 - 12\alpha^2\beta - 15\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 \\
 + 12\alpha^3\beta + 15\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 a^4 + 2a^2\beta^2 + \beta^4 - \gamma^4 & a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\
 -a^4 - a^2\beta^2 - a^2\gamma^2 & a^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\
 \hline
 + a\alpha\beta\delta - a^2\gamma^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \\
 - a\alpha\beta\delta - \beta^4 - \beta\gamma\gamma & \\
 \hline
 -a^2\gamma^2 - \beta\gamma\gamma + \gamma^4 & \\
 + a^2\gamma^2 + \beta\gamma\gamma - \gamma^4 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{2}{7}a^3 - \frac{3}{5}a^2\beta + \frac{1}{4}a^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \frac{2}{5}a^2 - \frac{3}{5}\beta^2 \\
 -\frac{2}{7}a^3 + \frac{3}{5}a^2\beta & \frac{2}{7}a - \frac{1}{4}\beta \\
 \hline
 +\frac{1}{4}a^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \\
 -\frac{1}{4}a\beta^2 + \frac{3}{20}\beta^3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συμβολικῶν κλασμάτων.

Τὰ συμβολικὰ κλάσματα ἔδὲν ἄλλ' ἢ διαιρέσεις εἰσὶ σσημειωμένοι, ὡς εἶδμεν (59 κτ.)· ὑπόκειται δὲ καὶ ταῦτα ταῖς αὐταῖς, αἷς περ καὶ τὰ ἀριθμητικὰ, πράξεσι· δι' ὃ τὰ ρηθισόμενα ἀνάκλησις τις οἶονεῖ εἶναι τῶν ἐκεῖθι δεδειγμένων· ρητέον ἔν πρώτον ὅπως ἐφ' ἀπλαξέρων ἀνάγεται ἐκθεσὶν γενικώτερον, ἢ ὡς διεῖληπται (60)· εἰς δὲ τὸτο ἀνάγκη τὸν κοινὸν παρονομαστὴ καὶ ἀριθμητὴ καὶ δὴ καὶ μέγιστον διαιρέτην εὑρεῖν· προκείσθω τοῖνον λημμάτι εἰς τὸτο τεῖνον.

65. ΛΗΜΜΑ. Ποσῶν δυοῖν τε μεν Α μείζονος, τε δὲ Β ἐλάσσονος, ἀκριβῶς διαιρημένων δια τῆ αὐτῆ ποσῆ π,

εάν διαιρεθέντος τῆ A διὰ B καταλειφθῇ λείψανον τὸ γ ,
ἢ τῆτο ἀκριβῶς διὰ τῆ π διαιρεθῇσεται.

ΔΕΙΞΙΣ. Τῆ A διὰ B διαιρεθέντος ἔσω πηλίκον τὸ
 μ . ἄρα $A = \mu \times B + \gamma$ (Ἀριθμ. 107) · ἐπεὶ ἔν τῷ
 A ἀκριβῶς διαιρεῖται διὰ π , διαιρεθῇσεται ἀκριβῶς διὰ
τῆ αὐτῆ π ἢ τὸ $\mu B + \gamma$ · ἀλλὰ B διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ
τῆ π , ἄρα ἢ τὸ τῆ B πολλαπλῆν μB *) ἀκριβῶς διὰ
τῆ π διαιρεθῇσεται· διαιρεθῇσεται ἄρα διὰ τῆ π ἢ τὸ
 γ · Ο. Ε. Δ.

66. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ B ἢ γ ἀκριβῶς διὰ π διαι-
ρῶνται, εἰς τῆ B διὰ γ διαιρεθέντος καταλειφθῇ λείψα-
νον τὸ δ , ἢ τῆτο, ὡς ἔπεται ἐκ τῆ λήμματος, ἀκριβῶς
διὰ π διαιρεθῇσεται· ὡσαύτως διαιρεθῆναι ἔχει διὰ π ἢ
τὸ κατάλοιπον ϵ , ὃ ἂν εὐρεθείη διαιρεθέντος τῆ ϵ διὰ δ ,
ἢ ἐφεξῆς ὁμοίως, ἕως ἂν καταλειφθῇ μηδέν.

67. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δυσκὲν καθολικῶν ποσοτήτων τὸν
κοινὸν ἢ μέγιστον διαιρέτην εὐρεῖν.

ΛΤΣΙΣ. α'. Τεθείσθωσαν ἕτως ὑπάλληλοι αἱ ποσό-
τητες, ὡς ἀντιστοιχεῖν, εἰ οἷόν τε, τὰ κοινὰ ἀμφοῖν γράμ-
ματα· β'. διηγήσθω ὁ πρῶτος ῥῶρος τῆς ὑπερθεν διὰ τῆ
πρώτης τῆς ὑποκειμένης, ἕως ἂν ὁ δείκτης τῆ διαιρέτου ὅρου
ἐλάττων γένηται τῆ κατὰ τὸν διαιρέτην, ἢ γυν ἰσωθῇ·

*) Εὐξύνετον πάνυ ἔδδ' δείξεώς ἐςι χρῆζον μηδεμιᾶς τῆ-
το· τοῖς ἔν πρωτοπείροις ληπτέον ἀριθμητικὰ ὑποδεί-
γματα πλεῖστα εἰς κατάληψιν τῆς καθολικῆς ἀληθείας·
εἰ γὰρ τὸν 6 ὁ 3 διαιρεῖ, δῆλον ὅτι ἢ τὸν τῆ 6 πολ-
πλῆν 18, ἢ τὸν 24, ἢ τὸν 30. κτ.

γ'. διηγήσθω ὁ διαιρέτης διὰ τῆ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως καταλοίπων, καὶ τῆτο, εἰ τύχοι, διὰ τῆ δευτέρου λειψάνου, καὶ ὅτως ἐξῆς, μέχρις ἂν γένηται ἀκριβῆς τις διαίρεσις, ἥς ὁ διαιρέτης ἔσαι ὁ ζητούμενος μέγιστος καὶ κοινὸς διαιρέτης.

68. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὶν ἢ δὲ τῆς πράξεως ἐφάψασθαι παρατηρητέον ταῦθ' ἅπερ ἔκ ἐσιν εἶπεν ὅσον ἐξευμαρίζει τὸ ἔργον· α'. Ὅταν ποσότης καθολικὴ πολυώνυμος ἅπασι τοῖς ἐαυτῆς ὅροις γράμματι ἔχη ἐγκείμενον, δῆλον ὅτι γίνεται ὑπ' ἐκείνου τῆ γράμματος καὶ τῶν ἄλλων αὐτῆς ὅρων ὅτως $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta = \alpha\chi$ ($\beta + \gamma + \delta$) ὡς καθ' ἑαυτὸ καταφανές· β'. Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν δυεῖν ποσοτήτων ᾗται πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ ποσότητος τὴν ἑτέραν μὴ διαιρέσης, μηδὲ κοινὸν αὐτῇ διαιρέτην ἐχέσης, ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης ἐτρέπεται· αβ φέρε καὶ αγ κοινὸν ἔχουσι διαιρέτην α· εἰς ἂν εἰς αβ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ δ, τὸ γινόμενον αβδ καὶ αγ τὸν αὐτὸν κοινὸν ἔξουσιν διαιρέτην α· εἰς μὲντοι αβ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα, ἢ διαιρεῖ τὴν αγ, ἐπὶ γ φέρε, τὸ γινόμενον αβγ, καὶ αγ ἔξουσιν τήνικαῦτα κοινὸν διαιρέτην αὐτὸ τὸ αγ· ὡσαύτως εἰς αβ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα ἐχουσιν κοινὸν τῇ αγ ποιητὴν ἕνα, εἴτ' εἰς ἐπὶ γδ, καὶ ὅτω τρέφεται ὁ κοινὸς διαιρέτης· τῆς γὰρ ποσότητος αβγδ καὶ αγ ἔσαι πάλιν κοινὸς διαιρέτης αγ.

69. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον, α'. ὡς εἰ θεωρούμενοις τὸν μέγιστον κοινὸν δυεῖν ποσοτήτων διαιρέτην ἐν ταῖς ἐπαναλαμβανομέναις διαιρέσεσιν ἀπαντήσῃ διαιρέτεος, ἢ διαιρέτης, ἔχων ποιητὴν, ἢ διαιρέτην, ὃν ἔκ χειρὸς ἑτεροῦ, ἀδεῶς τῆτον τὸν ποιητὴν ἀποβαλεῖν δυνάμεθα· β'. δυνάμεθα πολλαπλασιάσαι τὴν ἑτέραν τῶν

ποσοτήτων ἐφ' ἡντιναὺν ποσότητα, ἥτις ἔχει διαιρετὴν τὴν ἑτέραν, ὅτε κοινὸν αὐτῇ ἔχει διαιρέτην· κατὰ ταῦτα τοίνυν κείσθω εἶρεῖν τὸν μέγιστον καὶ κοινὸν διαιρέτην τῆς $\alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta$ καὶ $\alpha\alpha - \alpha\beta - 2\beta\beta$.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α΄.

$$\begin{array}{r|l} \alpha. \text{ διαιρετέος} & \alpha. \text{ διαιρέτης} \\ \alpha\alpha - 3\alpha\beta + 2\beta\beta & \alpha\alpha - \alpha\beta - 2\beta\beta \\ - \alpha\alpha + \alpha\beta + 2\beta\beta & \hline \alpha. \text{ λείψ.} - 2\alpha\beta + 4\beta\beta & 1 \text{ α. πηλίκ.} \end{array}$$

δεῖ τοίνυν διελεῖν $\alpha\alpha - \alpha\beta - 2\beta\beta$ διὰ $-2\alpha\beta + 4\beta\beta$. ἐπεὶ μέντοι ὁ διαιρέτης ἔχει ποιητὴν τὸν 2β, ὃς ἐκ ἑσὶ καὶ πάντων τῶν τῷ διαιρετέῳ ὄρων, ἀπερὶφθῶ μὲν ὁ 2β ἐκ τῷ διαιρετέῳ, διηρήσῃ δὲ $\alpha\alpha - \alpha\beta - 2\beta\beta$ διὰ $-2\alpha\beta + 4\beta\beta$

$$\begin{array}{r|l} \beta. \text{ διαιρετέος} & \beta. \text{ διαιρέτης} \\ \alpha\alpha - \alpha\beta - 2\beta\beta & -\alpha + 2\beta \\ - \alpha\alpha + 2\alpha\beta & \hline + \alpha\beta - 2\beta\beta & -\alpha - \beta. \beta. \text{ πηλ.} \\ - \alpha\beta + 2\beta\beta & \\ \hline \text{λείψ.} \dots 0 & \end{array}$$

κοινὸς ἄρα καὶ μέγιστος διαιρέτης ἔσται $-\alpha + 2\beta$

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β΄.

$5\alpha^3 - 18\alpha^2\beta + 11\alpha\beta^2 - 6\beta^3$ | $7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$
ἐπεὶ περὶ ὁ 5 ἐκ ἑσὶ δι' 7 διαιρέσιμος, ὅτε 7 ἐκ ἑσὶ ποιη-
τὴς πάντων τῶν τῷ διαιρετέῳ ὄρων, πολλαπλασιασέον τὴν
διαιρετέαν ποσότητα ἐπὶ 7 καὶ δὴ ἔσται

α. διαιρετέος	α. διαιρέτης
$35\alpha^3 - 126\alpha^2\beta + 77\alpha\beta^2 - 42\beta^3$ $- 35\alpha^3 + 115\alpha^2\beta - 30\alpha\beta^2$ $\alpha. \text{λείψ.} - 11\alpha^2\beta + 47\alpha\beta^2 - 42\beta^3$	$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$ $5\alpha. \alpha. \text{πηλ.}$

δυνάμεθα ἔτι τὸ λείψανον διελεῖν διὰ τῆ αὐτῆ διαιρέτου, πολλαπλασιάσαντες αὐτὸ ἐπὶ 7, καὶ ἐκκρούσαντες αὐτὸ τὸν ποιητὴν β

β. διαιρετέος	β. διαιρέτης
$- 77\alpha^2 + 329\alpha\beta - 294\beta^2$ $+ 77\alpha^2 - 253\alpha\beta + 66\beta^2$ $\beta. \text{λείψ.} \dots + 76\alpha\beta - 228\beta^2$	$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$ $- 11. \beta. \text{πηλ.}$

δεῖ τοίνυν διελεῖν $7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$ διὰ $76\alpha\beta - 228\beta^2$, μᾶλλον δὲ διὰ $\alpha - 3\beta$, ἐκκρουθέντος τῆ ποιη. τῆ 76β · τοιγαρὲν

γ. διαιρετέος	γ. διαιρέτης
$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$ $- 7\alpha^2 + 21\alpha\beta$ $- 2\alpha\beta + 6\beta^2$ $+ 2\alpha\beta - 6\beta^2$ $\text{λείψ.} \dots \dots \dots 0$	$\alpha - 3\beta$ $7\alpha - 2\beta. \gamma. \text{πηλίκον}$

ἄρα ὁ κοινὸς διαιρέτης τῶν δυοῖν προτεθέντων ποσῶν ἐστὶν $\alpha - 3\beta$. ὅτι δὲ οἱ ἕως εὐρισκόμενοι διαιρέται κοινοὶ εἰσὶ καὶ μέγιστοι, δῆλον· διαιρῶσι γὰρ ἀκριβῶς, ὡς ἐκ τῆς πράξεως καταφαίνεται, πάντα τὰ ἀλληλοδιαδόχα κατάλοιπα (65)· τῆτον ἔν τὸν τρόπον εὐρισκομένων τῶν κοινῶν διαιρετῶν δυεῖν ποσοτήτων, πᾶν κλάσμα ἐς τ' ἂν ἐξῇ ἐφ' ἀπλῆστερον σχῆμα μετενεχθήσεται, διαιρουμένων ἀμέλει ἑκατέρου τῶν κατ' αὐτὸ ὄρων διὰ τῆ κοινῆ καὶ μεγίστη διαιρέτου τῆτε παρονομαστῆ καὶ τῆ ἀριθμητῆ· εἰ δὲ

τῶν διαιρέσεων ἐπαναλαμβανομένων, ὅροι ἐφεξῆς προέρχονται πέρατος ἄνευ, πρόδηλον, ὅτι κοινῆ διαιρέτῃ ἄμμοι-
ρῶσι τὰ προτεθέντα ποσά.

70. Τὸ κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ μεταμορφωθῆναι δύναται, ἄ-
νευ τινὸς μεταβολῆς τῆς κατ' αὐτὸ δυνάμεως, εἰς $\frac{a\alpha}{\beta\alpha}$, ἢ $\frac{a\gamma}{\beta\gamma}$,
ἢ $\frac{a\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta + \beta\beta}$, καὶ ἔτις ἐξῆς. Τὰ γὰρ ἔχοντα ἐδὲν εἰσιν
ἀλλ' ἢ τὸ πρῶτον, ὃ ἐπολλαπλασιάσθησαν οἱ ὅροι, ἐν μὲν
τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἐπὶ α, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐπὶ γ, ἐν
δὲ τῇ τρίτῃ ἐπὶ α + β, ὃ ἥκιστα μεταλλοιοῖ τὴν ἀξίαν
τῆς κλάσματος.

71. Τὸ κλάσμα $\frac{a\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$ εἰς τὸ αὐτὸ τῷ $\frac{a}{\beta}$, καὶ τὸ
 $\frac{6a^3 + 3a^2\beta}{12a^3 + 9a^2\gamma}$ τὸ αὐτὸ ὁ καὶ $\frac{2a + \beta}{4a + 3\gamma}$.

72. Ἰν' εἰς ἕν μόνον κλάσμα ἀναχθῇ ποσότης σύνθετος
ἐξ ὀλοχερῆς καὶ κλάσματος, πολλαπλασιασέον, καθὰ
δὴ καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, τὴν ὀλοχερῇ ἐπὶ τὸν παρονομα-
στὴν τῆς κλάσματος, καὶ τὸ γινόμενον συναπτέον τῷ ἐν αὐτῷ
ἀριθμητῇ, μένοντος τῆς αὐτῆς παρονομαστῆς· ἔτις ἔν α + $\frac{\beta\delta}{\gamma}$
πραεῖν εἰς $\frac{a\gamma + \beta\delta}{\gamma}$, καὶ α + $\frac{\gamma\delta - \alpha\beta}{\beta - \delta}$, εἰς $\frac{\alpha\beta - \alpha\delta + \gamma\delta - \alpha\beta}{\beta - \delta}$
= $\frac{-\alpha\delta + \gamma\delta}{\beta - \delta}$

73. Ἰνα δὲ εἰς ὀλοχερῇ ἀναχθῇ, ὅπῃ παρείκοι,
κλάσμα συμβολικόν, διηγήσω διὰ τῆς παρονομαστῆς ὁ ἀριθ-
μητῆς, ὡς καὶ τῇ Ἀριθμητικῇ (146)· ἔτις ἢ μὲν πο-

σότης $\frac{3\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\delta}{\alpha}$ ἀναχθήσεται εἰς, $3\beta + \gamma + \frac{\gamma\delta}{\alpha}$, ἢ δὲ $\frac{\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta\beta + \gamma\gamma}{\alpha + 2\beta}$ εἰς $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma\gamma}{\alpha + 2\beta}$.

74. Ἰνα κλάσματα δεδομένα συμβολικὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, ὁ κανὼν ἔσται ὁ αὐτός, ὅς καὶ τῇ Ἀριθμητικῇ (181). ἔτω τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ κλάσματα ἀνάγεται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, πολλαπλασιαζομένων τῶν δυοῖν τῶ πρώτῃ ὅρων ἐπὶ $\delta\zeta$, καὶ τῶν τῶ δευτέρῃ ἐπὶ $\beta\zeta$, καὶ τῶν τῶ τρίτῃ ἐπὶ $\beta\delta$, ἀποκαθιστάμενα $\frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, $\frac{\gamma\beta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, $\frac{\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}$, τὰ δὲ $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$, $\frac{\alpha - 2\gamma}{\alpha - \beta}$, ἀναγόμενα ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, γίνονται τὸ μὲν $\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$,

τὸ δὲ $\frac{\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, πολλαπλασιαζέντων ἑκατέρῃ μὲν τῶν ὅρων τῶ πρώτῃ ἐπὶ $\alpha - \beta$, ἑκατέρῃ δὲ τῶν τῶ δευτέρῃ, ἐπὶ $\alpha + \beta$

75. Οὕτως ἔν παρωνυμίων γενομένων τῶν κλασμάτων, ῥᾶσα γίνεται ἢ τε πρὸς αὐτῶν καὶ δὴ καὶ ἢ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσεις, τῶν ἀριθμητῶν ἀμέλει τετὶ μόνον ὑφισταμένων. ἔτω τῶν δυοῖν κλασμάτων $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$, $\frac{\alpha - 2\gamma}{\alpha - \beta}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομασὴν ἀναγωγῇ γινομένων. . . $\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, $\frac{\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, τὸ μὲν αὐτῶν ἄθροισμα ἔσται

$$\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma + \alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma =}{\alpha\alpha - \beta\beta}$$

$$\frac{2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\beta - 3\beta\gamma + \alpha\alpha}{\alpha\alpha - \beta\beta} \cdot \text{ἢ δ' αὐτῶν διαφορὰ}$$

$$\frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma - \alpha\alpha + 2\alpha\gamma - \alpha\beta + 2\beta\gamma =}{\alpha\alpha - \beta\beta}$$

$$\frac{3\alpha\gamma - \beta\beta + \beta\gamma - \alpha\alpha}{\alpha\alpha - \beta\beta}$$

76. Ἰ"να κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ κλάσμα τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ πολλαπλασιασθῇ, πολλαπλασιασθῇ τῷ ἀριθμητικῇ ἐπ' ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστῇ ἐπὶ παρονομαστὴν, καθὰ δὲ καὶ ἐν τῇ Α'. ἀριθμητικῇ, καὶ δὴ ἔσται $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$. ὡσαύτως $\frac{1}{2} \alpha \times \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{4} \alpha\beta$.

77. Ἰ"να δὲ διαιρεθῇ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ γενέσθω πολλαπλασιασμός $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ ὡσαύτως $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} : \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \times \frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta} = \frac{(\alpha+\beta) \cdot (\gamma-\delta)}{(\gamma+\delta) \cdot (\alpha-\beta)} = \frac{\alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta}{\gamma\alpha - \delta\alpha - \gamma\beta + \delta\beta}$ δει. ξεις δὲ τῶνδε τῶν πρῶξεων αἱ αὐταί εἰσι ταῖς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ (195. 204).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ γενέσεως τῶν βαθμῶν.

78. Ὅποτεν ποσότης ἐφ' ἐαυτὴν πολλαπλα.

σιασθῇ, τὸ γινόμενον βαθμὸς τῆς ποσότητος ἐκείνης προσαγορεύεται· αὕτη δὲ ἡ ποσότης ῥίζα ἢ πλευρὰ τῆ βαθμῆ· ἔτις ἐν 25 μένεσι βαθμὸς τῆ 5, εἴγε 5 πεντάκις ἰσῆται τῷ 25· 5 δὲ καλεῖται ῥίζα τῆ 25, καλεῖται δὲ ὁ 5 ὁ βαθμὸς πρῶτος· πᾶσα ἄρα ποσότης ὑπάρχει ὡς ῥίζα, ὡς βαθμὸς πρῶτος πρὸς γε τὴν ἀπ' αὐτῆς προελθεῖν δυναμένην βαθμὸν· ὡς τὸ μὲν προκύπτον ἐκ πάσης ποσότητος, ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, καλεῖται τετράγωνον, ἡ βαθμὸς δεύτερος, τῆς ποσότητος ἐκείνης· τὸ δὲ προκύπτον ἐκ τῆς τετράγωνου, εἴτ' ἐν τῇ τετραγώνῳ, ὡς τῆς ῥίζης, ὀνομάζεται κύβος, ἡ τρίτος βαθμὸς, τῆς ποσότητος ἐκείνης· τὸ δὲ ἐκ τῆς κύβου ὡς τῆς ῥίζης, τετραγωνοτετράγωνον, ἡ βαθμὸς τέταρτος, ὡς ἐφεξῆς ἔτις· ὡς κὲν ὁ ἀπὸ 3 τετράγωνος ἀριθμὸς ἐστὶν 9, εἴγε $3 \times 3 = 9$ · ὁ δ' ἀπὸ 3 κύβος ἐστὶν 27· ἐπεὶ $9 \times 3 = 27$ · ὁ δ' ἀπὸ 3 τέταρτος βαθμὸς ἐστὶν 81· ὡς γὰρ $27 \times 3 = 81$ κτ. *)

*) Τοῖς μὲν παλαιοῖς ποσότης πᾶσα τετράγωνος ὡς δύναμις ἠκαστα, ὡς ἐστὶν ἰδεῖν παρὰ τοῦ Διοφάντου (Βιβ. Α'. Οἰσμ. Ε.) ὡς τοῖς ἄλλοις Γεωμέτραις, οἱ ὡς ἐν γραμμαῖς δύνασθαι ἔλεγον τὴν, ἀπ' ἧς τὸ τετράγωνον σημαίνει ἐβάλλουτο. Τοῖς δὲ νεωτέροις καθολικώτερον τὸν ὄνομα ἐληφται εἰς τὸ σημαίνειν βαθμὸν πάντα, προσδεμένον τῶν τακτικῶν ὀνομάτων εἰς δήλωσιν τῆς προκειμένης δυνάμεως, οἷον δύναμις δευτέρα, δύναμις τρίτη κτ. ἐπεὶ δ' ἡμῖν τὸ δύναμις δι' ὅλης τῆς ἐν χειρὶ πραγματείας τέτακται εἰς τὸ σημαίνειν τὴν τιμὴν τῶν πραγμάτων, ἢ Λατῖνοι διὰ τῆς *valor* ἐμφαίνουσιν, ὅθεν ταρῆται τὸ γαλλικὸν *valeur*, ἵνα μὴ σύγχυσις τῶν πραγμάτων ἐκ τῶν ὀνομάτων συμβαίνει, ἐξέτω καλεῖσθαι βαθμὸν τὴν παρ' ἄλλοις δύναμιν.

79. Ο' ἀπὸ 1 τετράγωνος, καὶ ὁ ἀπὸ 1 κύβος, καὶ ἐν γένει ὅστις ἐν ἀπὸ 1 βαθμὸς, αἰέποτε ἔστι 1· εἶγε 1 πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 1, ἢ ληφθεῖσα ἅπαξ, ποιεῖ 1· ἰδὲ δὴ ὁ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνος, ὅς περ ἐποπλασιασθεῖς ἐπὶ 1 ποιεῖ αὐτὸς 1· ἰδὲ δὴ καὶ ὁ κύβος αὐτῆς κτ.

80. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀριθμὸς ὁ ἑτινός ἐστι βαθμὺς ἢ ποσότης ἐκδηλῶν, καλεῖται δὲ δείκτης τῷ βαθμῷ ἐκείνῳ· ἕτως ἐν 1 ἐστὶ δείκτης τῷ πρώτῳ βαθμῷ, 2 ὁ τῷ τετραγώνῳ, 3 ὁ τῷ κύβῳ, 4 ὁ τῷ τετάρτῳ βαθμῷ κτ.

81. ΣΧΟΛΙΟΝ· Ἰν' ὑψωθῇ ποσότης πᾶσα εἰς βαθμὸν ζητούμενον, πεπολλαπλασιάσθω ἐφ' ἑαυτὴν τοσάκις, ὡς ἤδη καταδεδεικται, ὅσων πλήν μιᾶς μονάδων περιεκτικός ἐστιν ὁ δείκτης· τὸ δὲ ἔσχατον προκύπτον ἔσται, ὅς τις ἐζητεῖτο, βαθμὸς· οἷον ἰν' ἀρθῇ ὁ 6 ἐπὶ τετράγωνον, ἐκπερ τετραγώνῳ δείκτης ἐστὶν ὁ 2, ζητεῖσθω μόνον ὁ γινόμενος ὑπὸ 6 καὶ 6, ὅς ἔσται 36, ὁ ζητούμενος τετράγωνος, ἵνα δὲ ὁ αὐτὸς 6 ἐπὶ κύβον ἀρθῇ, ἐπειδὴ κύβῳ δείκτης ἐστὶν ὁ 3, ζητεῖσθωσαν δύο γινόμενοι ὑπὸ 6 καὶ 6, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔσται $6 \times 6 = 36$ · ὁ δὲ δεύτερος, $36 \times 6 = 216$ · ἵνα δὲ ὁ 6 ἐπὶ πέμπτον ἀναχθῇ βαθμὸν, τῷ κατ' αὐτὸν δείκτῳ ὄντος 5, τέσσαρες ἐξῆς θηρευθήσων γινόμενοι ὑπὸ τῷ 6· ὁ δὲ τέταρτος 7776 ἔσται ὁ ἀπὸ 6 πέμπτος βαθμὸς.

82. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπὶ δὲ ποσοτήτων συμβολικῶν μονώνυμος ποσότης ἐπὶ βαθμὸν προτεθέντα ἀρθήσεται ἐπιτιμώτερον, ὑψαμένῳ μὲν τῷ κατὰ τὴν μονώνυμον συνεργεῖ ἐπὶ τὸν βαθμὸν, πολλαπλασιαζομένῳ δὲ τῷ ἐφ' ἑκάστω γράμμα δείκτῳ ἐπὶ τὸν δείκτην τῷ προτεθέντος βαθμῷ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ἐπὶ τὸ ὑψῶσαι ἔν 2 α' β' γ'. πρὶ βαθμὸν τέταρτον, α'. ὑψῶω ὁ 2 συνεργῶς ἐπὶ τὸν τέταρτον βαθμὸν, ὅς τις ἐστὶ 16 · β'. πολλαπλασιαζέω ἐπὶ 4 δείκτην τῷ δ'. βαθμῷ ὁ ἐπὶ τῷ α' δείκτης 3, ὅθεν ἔσαι 12, καὶ ὁ ἐπὶ τῷ β' 2, ὅθεν προκύψει 8 · ἔτιωσ ἄρα ὁ α' πρὸ 2α' β' τέταρτος βαθμὸς ἐστὶ 16α'² β'. τῷ ὄντι δὲ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα (81) τριῶν ἐξῆς γινομένων, ὁ μὲν ἐστὶ 2α' β' × 2α' β' = 4α' β', ὁ δὲ 4α' β' × 2α' β' = 8α' β'. Ο' δὲ τρίτος, ὅς ἐστιν ὁ ζητούμενος τέταρτος βαθμὸς, ἐστὶ 16α'² β', ἡ αὐτὴ ποσότης, ἡ καὶ διὰ τῷ επιτομωτέρῳ κανόνος εὑρεταί· καὶ ἐν γένει ἵνα αὐτὸ ἐπὶ τὸν μὲν ὑψώθῃ βαθμὸν (τῶν μ καὶ ν δείκτας σημαίνοντων ἀορίστως) ἔσαι α^μ × α^ν = α^{μ+ν}.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰ'ν' εὐρώμεν τὸν ἀπὸ αβ κύβου, ἐπεὶ ὁ τῷ ἐπινυμένῳ συνεργῶ 1 κύβος ἐστὶ 1 (79), ἐπινοηθήτω αἷδις ὁ αὐτός· ἀρκεσθυσόμεθα δὲ μόνον πολλαπλασιάσαι τὸν ἐκάστῳ γράμματος δείκτην 1 ἐπὶ 3 δείκτην τῷ κύβῳ· ὅθεν ἔσαι α' × 3 β' × 3 = α' β'. ἐξ ὧν κατάδηλον, ὡς ὅτε ὁ τῷ γράμματος δείκτης ἐστὶ 1, δύναμεθα ἐπιβεῖναι αὐτῷ δίχα τῷ ἑτέρῳ τὸν τῷ ζητούμενον βαθμῷ δείκτην.

83. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐς α ποσότης ἡτισῆν· οἱ τοίνυν ἀπ' αὐτῆς κατὰ τάξιν βαθμοὶ ἔσονται α', α², α³, α⁴, α⁵, α⁶ κτ (81). σημειώσκειν ἔν αὐτῇ ἐπὶ τῷ δε τῷ τύπῳ τὰ ἐφεξῆς· ὁ αὖ ἀπάσης ποσότητος τέταρτος βαθμὸς εὑρεθήσεται, πολλαπλασιασθέντος τῷ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνῳ ἐφ' ἑαυτὸν· α² × α² = α⁴· τὸ γινόμενον ὑπὸ τῷ τετραγώνῳ καὶ τῷ κύβῳ ποιήσει τὸν πέμπτον βαθμὸν· α² × α³ = α⁵· τὸ δ' ὑπὸ τῷ κύβῳ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, τὸν ἕκτον, α³ × α³ = α⁶· καὶ ἐν γένει καθυπέρ-

τερος βαθμὸς ἀπὸ ποσότητός τινος εὐρίσκεται, εἰ πολλαπλασιασθεὶς δὺν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἤττης βαθμοί, ὧν τὸ τῶν δεικτῶν ἄθροισμα δίδωσι τὸν δείκτην τῷ καθυπερτέρῳ· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποφέρεται μέθοδος ἐπίτομος τῷ εὐρίσκειν βαθμὸν μέγαν ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ· εὐρήσθω, φέρε, ὁ εἰκοστὸς πέμπτος ἀπὸ 10 βαθμὸς· ἀντὶ ὧν τῷ εὐρεῖν τέσσαρα καὶ εἴκοσι γινόμενα ἐξῆς κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον, εὐρεῖν ἐξέσαι λαβόντας καὶ πλεῖν ἢ πέντε γινόμενα ὕτως· $10 \times 10 = 100$, τετράγωνος ἀπὸ 10· $100 \times 100 = 10000$, τέταρτος βαθμὸς· $10000 \times 10000 = 100000000$, ὄγδος, ὅστις ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς ποιῇσι τὸν δέκατον ἕκτον· τέλος δ' ὕτος ἐπὶ τὸν ὄγδοον πολλαπλασιασθεὶς, εἴτ' ὧν $1000000000000000000 \times 100000000$ ποιῇσι τὸν ζητούμενον εἰκοστὸν πέμπτον.

84. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀφ' ἀπάσης λειπτικῆς ποσότητος τὸ μὲν τετράγωνον ἔξει σημεῖον +, ὁ δὲ κύβος —, ὁ δὲ τέταρτος βαθμὸς +, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως, ὅ ἐστιν ἐν γένει „οἱ ἀπὸ ποσότητος λειπτικῆς βαθμοὶ δείκτε μὲν „εὐμοιρεῖντες ἀριθμῷ ἀρτίῳ, τὸ +, περισσῷ δὲ, τὸ —, πρὸ „ἑαυτῶν κεχαραγμένον ἐξῆσι“· ὕτως ἐν οἷς κατὰ σειράν βαθμοὶ ἀπὸ — α, ἔσονται — α, + α², — α³, + α⁴, — α⁵, + α⁶, κτ· Ἔστι δὲ τῷτο, ὅτι + × — = —, καὶ — × — = + (49, 50)

85. ΠΟΡΙΣΜΑ. βαθμὸς ἅπας, καὶ ὁ μὲν δείκτης ἐστὶν ἀριθμὸς ἀρτίος, τὸ δὲ σύμβολον ὑπάρχει +, αἵποτε δὺν ρίζων ἐστὶ περιεκτικὸς τῆς μὲν ὑπαρχέσης, λειπέσης δὲ τῆς ἐτέρας· + α² ἔχ ἥττον ἐστὶ τετράγωνον ἀπὸ + α, ἢ ἀπὸ — α· + α⁴ ἔδεν μᾶλλον ἐστὶ τετράγωνον ἀπὸ + α², ἢ ἀπὸ — α² κτ, ἀλλὰ βαθμὸς λειπτικὸς, καὶ ὁ

δείκτης ἀριθμός ἐστὶ περιττός, οἷον — α^3 , μίαν μὲν ῥίζον ἔχει λειπτικήν τὴν — α · ἑδεμία γὰρ ἄλλη ποσότης, ἢ — α κυβιζομένη ἀποδίδωσι — α^3 .

86. Ἰνα κλάσμα ἐπὶ βαθμὸν τινα ὑψωθῇ, ὑψωθήτω ἐπὶ τῆτον ὁ ἀριθμητής, εἴθ' ἔτις ὁ κατ' αὐτὸ παρνομασῆς· ἢ ἐν τετραγωνισθῇ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ α τε-

τράγωνον ἐστὶν α^2 , τὸ δ' ἀπὸ β, β² γεγράφω $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. ἐπεικώς

γὰρ τὸ ἀπὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τετράγωνον ἐστὶν $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Ἰνα δὲ κυβισθῇ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπεὶ ὁ ἀπὸ 3 μὲν κύβος ἐστὶν 27, ἀπὸ δὲ 4, 64, γεγράφω $\frac{27}{64}$.

87. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφές ἐστὶν, ὡς ὅταν ὁ πολλαπλασιασῆς ἐλάττων ἢ τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον ἔσαι ἔλαττον τῇ πολλαπλασιασέῃ· ἡνίκα ἄρα ὑψῆται κλάσμα μονάδος ἔλαττον εἰς βαθμὸν ὑπέρτερον, πολλαπλασιάζεται αἶι ὁ κατώτερος βαθμὸς διὰ τῆς τῆς κλάσματος τῇ μονάδος ἐλαττωμένῃ· τὸ ἄρα γινόμενον, ὁ παρίσῃσι τὸν ἀνώτερον βαθμὸν, ἀνάγκη γίνεσθαι αἶι ἔλαττον τῇ κατωτέρῃ βαθμῇ· ἰσέον ἔν ὡς ἡ δύναμις κλάσματος ἐλάττονος ἢ μονάδος, ὅσῳ ἐπὶ καθυπερτέρας βαθμὸς αἰρεται, τοσούτῳ ἐλάττων γίνεται· οἷον τὸ ἀπὸ $\frac{1}{6}$ τετράγωνον ἐστὶν $\frac{1}{36}$, ὃ ἐστὶ δεκάκις ἔλαττον τῇ $\frac{1}{6}$ · ὁ δὲ ἀπὸ $\frac{1}{6}$ κύβος ἐστὶ $\frac{1}{216}$, ὃ ἐστὶν ἑκατοντάκις ἔλαττον τῇ $\frac{1}{6}$ ἢ ἑξῆς ἔτις.

Γένεσις τῶν ἀπὸ πολυωνύμου ποσότητος βαθμῶν.

88. Ἰνα πολυώνυμος ποσότης ἐπὶ βαθμὸν ἀρθῇ,

ζητηθήτω τὸ γινόμενον, ὃ ἀπαιτεῖ ὁ βαθμὸς (81) ἐκ τῆς ἐκτεθείσης περὶ τῶν πολυωνύμων πολλαπλασιασμῷ θεωρίας.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἰὺνα τετραγωνισθῇ τὸ δυνάμου $\alpha + \beta$, πεπολλαπλασιασθῶ ἐφ' ἑαυτὸ ὕτως: α . $\alpha + \beta \times \alpha = \alpha\alpha + \alpha\beta$. β . $\alpha + \beta \times \beta = \alpha\beta + \beta\beta$. γ . γενέσθω ἀναγωγή τῶν δυοῖν ὁμοίων ὄρων $\alpha\beta + \alpha\beta$ ἐπὶ τῇ ὀλικῇ προκύπτοντος $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$. καὶ δὴ τὸ ἀπὸ $\alpha + \beta$ τετράγωνον ἔσαι $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. Τὸ δ' ἀπὸ $-\alpha - \beta$ τετράγωνον ἔσαι ὡσαύτως $+ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὅπερ γινεται, ὅτι $- \times - = +$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἀπὸ $-\alpha + \beta$, ἢ $+ \alpha - \beta$, ἔξει αἰ λειπτικὸν τὸν δεύτερον ὄρον, (ὃ καὶ τῷτο παρέπεται ἐκ τῆ περὶ τῶν συμβόλων πολλαπλασιασμῷ κανόνος (37)) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἰὺνα δὲ τετραγωνισθῇ $\alpha + \beta + \gamma$. α . $\alpha + \beta + \gamma \times \alpha = \alpha\alpha + \alpha\beta + \alpha\gamma$. β . $\alpha + \beta + \gamma \times \beta = \alpha\beta + \beta\beta + \beta\gamma$. γ . $\alpha + \beta + \gamma \times \gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma\gamma$. ἐπὶ ἔν τῇ ὀλικῇ τετραγώνῳ $\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta^2 + \beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2$ ἀναγωγῆς γενομένης τῶν ὁμοίων ὄρων $\alpha\beta + \alpha\beta$, καὶ $\alpha\gamma + \alpha\gamma$, καὶ $\beta\gamma + \beta\gamma$, ἔσαι $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$

89. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τῶν δυοῖν ποσοτήτων τῶν συντιθεῖσων δυνάμυντι, ἡ μὲν πρώτη αἰ δύναται παρίστανθαι διὰ τῆ α , ἡ δὲ διὰ β . ἅπαν ἄρα δυνάμυν παρὰ τὴν ἀναθήσεται διὰ $\alpha + \beta$ παρεκτός τῶν $-$ ἢ $+$ συμβόλων. Τὸ ἄρα ἀπὸ $\alpha + \beta$ τετράγωνον $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὃ κληθήτω A , παραστήσει αἰ τὸ ἀπὸ παντὸς δυνάμυν τετράγωνον· ἐκὼν ἐπὶ τῇ A τύπῃ παρατηρητέον τὰ εἰ-

ξῆς ἡ, τὸ ἀπὸ δυωνύμου ποσότητος τετραγώνων περιέχει
 ἡ, α. τὸ ἀπὸ τῆ πρώτης ὁρῆς τετραγώνων (a^2)· β. τὸ δι-
 ἡ, πλὴν γινόμενον ὑπὸ τῆ πρώτης καὶ τῆ δευτέρας ὁρῆς ($2ab$)·
 ἡ, γ. τὸ ἀπὸ τῆ δευτέρας ὁρῆς τετραγώνων (b^2)· ὡσαύ-
 τως ἐπὶ τῆ τετραγώνου $a^2 + 2ab + b^2 + 2a\gamma + 2b\gamma$
 $+ \gamma^2$, τῆ ἀπὸ τῆ τριωνύμου $a + b + \gamma$, ὃ κληθήτω Β'.
 παρατηρήτεον, ὅτι περιέχει ἡ, α. τὸ ἀπὸ τῆ πρώτης ὁρῆς
 ἡ, τετραγώνων (a^2)· β. τὸ διπλὸν γινόμενον ὑπὸ τῆ
 ἡ, πρώτης καὶ τῆ δευτέρας ($2ab$)· γ. τὸ ἀπὸ τῆ δευτέρας
 ἡ, τετραγώνων (b^2)· δ. τὸ διπλὸν γινόμενον ὑπὸ τῆ πρώ-
 ἡ, τῆς καὶ τῆ τρίτης ($2a\gamma$)· ε. τὸ διπλὸν γινόμενον ὑπὸ
 ἡ, τῆ δευτέρας καὶ τῆ τρίτης ($2b\gamma$)· ς. τὸ ἀπὸ τῆ τρίτης
 τετραγώνων (γ^2)."

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Προδείχεται ἔτι δυνάμεθα, ὅτι
 τῶν τετραγώνων Α καὶ Β, ὃ μὲν πρῶτος ὁρὸς (α) τῆ ριζι-
 κῆς πολυωνύμου εἰσάγει ἐν τῷ ὅλῳ τετραγώνῳ τὸ ἀφ' ἐ-
 αυτῆς τετραγώνων (a^2)· ὃ δὲ δεύτερος (β), τὸ διπλὸν
 γινόμενον ὑπὸ τῆ πρώτης καὶ τῆ δευτέρας σὺν τῷ ἀπὸ τῆ
 δευτέρας τετραγώνῳ ($2ab + b^2$)· ὃ δὲ τρίτος (γ), τὸ
 διπλὸν γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο προτέρων καὶ τῆ τρίτης σὺν
 τῷ ἀπὸ τῆ τρίτης τετραγώνῳ ($2a\gamma + 2b\gamma + \gamma^2$) καὶ ε.
 ξῆς ἔτι, εἰ πλείους τῶν τριῶν τύχοι ἔχον τὸ πολυ-
 νυμον ὁρῆς.

91. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Α' ἡδὴ δέδεικται ἐπὶ τῶν
 γραμματικῶν ποσῶν, κρατεῖ ὡσαύτως καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς·
 Ὡς μὲν γὰρ τὸν ἀπὸ 235 τετραγώνων, ὁ ἑξῆς 235×235
 $= 55225$, Δ' ποιήσωμεν δὲ ἐκ τῆ 235 τόδε τὸ τριώ-
 νυμον $200 + 30 + 5$ · εἰς τὸν λάβωμεν τὸν ἀπὸ 200 τε-

τράγωνον 40000, συν τῷ δις γινομένῳ ὑπὸ 200	40000
ἢ 30, εἴτ' ἐν 12000, συν τῷ ἀπὸ 30 τετραγώνῳ	12000
900, συν τῷ δις γινομένῳ ὑπὸ τῶν δύο προτέρων	900
ὄρων ἢ τῷ τρίτῳ, εἴτ' ἐν 2300, συν τῷ ἀπὸ 5 τε-	2300
τραγώνῳ 25, ἢ ταῦτα πάντα συνάψωμεν, εὐρή-	25
σομεν ἀκριβῶς 55225 τὸν ἀπὸ 235 τετράγωνον.	55225

92. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Βραχὺ τὸν νῦν προχόντες τῷ, καθ' ὃν τετραγωνίζεται τὸ δυνάμειον, τρόπῳ, γνωσόμεθα δι' ὅτι τὸ ἀπὸ πολυνύμου τετράγωνον τὰ εἰρημενα^α πε-
ριέχει μέρη· αὐτὰ δὲ ταῦτα κρατύντα νοήσομεν καπὶ
τῶν κύβων, περὶ ὧν ἐφεξῆς ἐρῶμεν· τετραγωνίζοντες
γὰρ $\alpha + \beta + \gamma$ · α . πολλαπλασιάζομεν α ἐπὶ α , ὅθεν
προκύπτει α^2 · β . β ἐπὶ α , ἢ α ἐπὶ β , ὅθεν προκύπτει
 $2\alpha\beta$ · γ . γ ἐπὶ α , ὅθεν προκύπτει $\gamma\alpha$ · β ἐπὶ β , ὅθεν προκύπτει β^2 · δ . γ ἐπὶ β ,
ἢ β ἐπὶ γ , ὅθεν προκύπτει $2\gamma\beta$ · ϵ . γ ἐπὶ γ , ὅθεν γ^2 .

93. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐδόλως ἐν χρήσει πολλὰ πλα-
σιασμῷ πρὸς ὑτινοσέν πολυνύμου τετραγωνισμόν· ἀρκέ-
σει γὰρ λαβεῖν τετραγωνίζουσι φέρε τὸ $\delta + \gamma + \zeta$ τὴν
ἐκτετακμένην ὄρεν· α . τὸ ἀπὸ δ τετράγωνον δ^2 · β . τὸ δις
γινόμενον ὑπὸ δ ἢ γ , εἴτ' ἐν $2\gamma\delta$ · γ . τὸ ἀπὸ γ τε-
τράγωνον $\gamma\gamma$ · δ . τὸ δις ὑπὸ δ ἢ ζ γινόμενον $2\delta\zeta$ · ϵ .
τὸ δις ὑπὸ γ ἢ ζ γινόμενον $2\gamma\zeta$ · ς . τὸ ἀπὸ ζ τετράγω-
νον $\zeta\zeta$. Ὡς αὐτως δὲ εὐρεθείη ἂν ἢ ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ
ὁ τετράγωνος· εὐρεθῇ γὰρ ἀνωτέρω ὁ ἀπὸ 235 τε-
τράγωνος λαμβανόμενος τῷ ἀπὸ 200 τετραγώνῳ κτ. ἀλλ'
ἔστι γὰρ ἐπεικὼς ἐν ἀριθμοῖς τὸ ἔτι τετραγωνίζειν μα-
κρῷ ἐργωδέστερον, ἢ τὸ τὸν ἀριθμὸν δι' αὐτῆς τῆς πολ-
λαπλασιάζειν· ξυντελεῖ μέντοι ἄριστα ἀτέρη τῶν μελό-
δων θατέρω εἰς βασανισμόν.

94. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ γενικὴ βάσανος τῷ τετραγώνῳ ἡσμεν ἐν τῷ διαιρεῖν κεῖται τὸ εὐρεθὲν τετράγωνον διὰ τῆς ῥίζης· ἀνάγκη γὰρ τὸ πηλίκον αὐτὴν ταύτην ὑπάρχειν τὴν ποσότητα· διαιρεθὲν ἐν $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ διὰ $\alpha + \beta$ ἀποδώσει πάντως πηλίκον $\alpha + \beta$ · ὁ δὲ 55225 τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς διὰ 235 ἀποδώσει πάντως τὴν ῥίζαν 235.

95. Ἴνα δὲ κυβίσωμεν τὸ διώνυμον $\alpha + \beta$, λαμβάνομεν πρῶτον τὸ ἀπ' αὐτῷ τετράγωνον $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ὃ πολλαπλασιάζομεν εἴτα ἐπὶ $\alpha + \beta$ (81), ἐξ ἧς προέσιν $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + \beta^3$ · ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων εὐρίσκομεν $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$, Μ.

96. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. $\alpha + \beta$ ἐμφαίνειν δυναμένον ἅπαν διώνυμον, ἐκτὸς τῆς τῶν συμβόλων ἐνδεχομένης διαφορᾶς, ὁ ἀπ' αὐτῷ ἄρτι εὐρημένος κύβος Μ, τύπος εἶναι καθολικός, πάντα ἀπὸ δυναύμε παριστὰς κύβον· ἐν γένει ἄρα ἡ ἅπας δυναύμε κύβος περιέχει, ἅ. τὸν ἀπὸ τῆς πρώτης ὅρου κύβον (α^3)· β'. τὸ τρις τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ὅρου ($3\alpha^2$) πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον (β)· γ'. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς δευτέρας τετραγώνου ($3\alpha\beta^2$)· δ'. τὸν ἀπὸ τῆς δευτέρας κύβον (β^3).

97. Ταυτόν δὲ κρατεῖ κατὰ τῶν ἀριθμῶν· κυβίσωμεν γὰρ, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 25, ταυτόν εἰπεῖν, πολλαπλασιάσωμεν 25 ἐπὶ 25 εἰς εὐρεσιν τῷ ἀπ' αὐτῷ τετραγώνῳ, εἴτα δὲ τὸν 625 τετράγωνον ἐπὶ 25·

8000	8000
προκύψει ἔτι κύβος ἀπὸ 25 ὁ 15625· διέ-	6000
λωμεν ἐν νῦν δίχα τὸν 25 κατὰ τὰ διώνυμα	1500
ἔτι 20 + 5· φημί δὴ, ὡς εἰ λάβωμεν ἅ. τὸν	125
ἀπὸ 20 κύβον, εἴτ' ἐν 8000· β'. τὸν τρις γι-	15625

γόμενον ὑπὸ τῆ ἀπὸ 20 τετραγώνου, καὶ τῆ δευτέρου ὄρου 5, εἴτ' ἔν· 6000· γ'. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆ ἀπὸ 5 τετραγώνου καὶ τῆ πρώτου ὄρου 20, εἴτ' ἔν· 1500· δ'. τὸν ἀπὸ 5 κύβον, εἴτ' ἔν· 125, προσθέσει πασῶν τῶν δε τῶν ποσοτήτων ἀποληφόμεθα ἀκριδῶς τὸν προευρημένον κύβον 15625.

98. Κυβισμὸς βάσανος. Οἱ εὐρεθεῖς κύβος διηγήσῃ διὰ τῆς ποσότητος, ἢ ἐκκυβίσθη, ὅθεν ἀνάγκη προελθεῖν τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· τετὶ δὲ ἐπιδιηγήσῃ ἔτι διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅθεν ἀνάγκη προελθεῖν αὐτὴν τὴν διαιρέσαν ποσότητα· ἔτις ἔν· 15625, διαιρεθεῖς διὰ 25, δίδωσι τὸν ἀπ' αὐτῆς τῆ 25 τετράγωνον 625, ὃς διαιρεθεῖς ἔτι δι' 25 ἀποδίδωσιν αὐτὸν τὸν διαιρέτην 25.

99. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γνωστὸν τοίνυν ὄντος διὰ τῆ γενικῆς τύπε Μ, ἔστιν ὅπως παράγει πᾶν κυβισζόμενον διώνυμον, ἀφεξόμεθα τῆ ζητεῖν δύο ἐξῆς γινόμενα· ἵνα γὰρ ἰδιαιτέρον τὸ π + κ δυνάμει ἐπὶ κύβον ἄρωμεν, ληφόμεθα μόνον, ἔς δεδεικται ἐπαναγκῆς περιέχειν ὄρους, ἀμέλειτοι, α'. τὸν ἀπὸ τῆ πρώτου ὄρου π κύβον π³· β'. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆ ἀπὸ τῆ πρώτου ὄρου π τετράγωνου π², καὶ τῆ δευτέρου κ, εἴτ' ἔν· 3 π² κ· γ'. τὸ τρις ὑπὸ τῆ πρώτου, καὶ ὑπὸ τῆ ἀπὸ τῆ δευτέρου τετραγώνου γινόμενον 3 π κ²· δ'. τὸν ἀπὸ τῆ δευτέρου κύβον κ³.

100. ἵνα δὲ ἐκκυβίσθῃ τὸ τριώνυμον α + β + γ, ληφθὲν τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον α² + 2αβ + β² + 2αγ + 2βγ + γ², πεπολλαπλασιάσῃ ἐπὶ α + β + γ· ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὄρων εὐρεθήσεται α³ + 3α²β + 3αβ² + β³ + 3α²γ + 6αβγ + 3β²γ + 3αγ² + 3βγ² + γ³, Ρ, κύβος ὁ ἀπὸ τῆ α + β + γ τριωνύμου· ἐκὼν ἔν τῷ Ρ κύβῳ.

ὅτι τῷ ἀπὸ παντός τριωνύμῳ $\alpha + \beta + \gamma$ παρὰ τὰς ἐν τῷ διωνύμῳ $\alpha + \beta$ ἀπαιτημένους ὅρους, περι ὧν ἡδὴ εἰρήται, ἐνυπάρχουσιν ἔτι ἄ. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆ ἀπὸ τῆ $\alpha + \beta$ διωνύμῳ τετραγώνῳ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ἢ τῆ τρίτῃ ὀρθῇ γ, εἴτ' ἔν $3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma$. β'. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ $\alpha + \beta$ ἢ τῆ ἀπὸ γ τετραγώνῳ, εἴτ' ἔν $3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2$. γ'. ὁ ἀπὸ γ κύβος γ^3 .

101. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐκ τῆ τύπε Ρ συνάγεται, ὅτι ἐν τῷ κυβισμῷ πολυνύμῳ παντός $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ ἡκτ. ὁ μὲν πρῶτος ὅρος α συνεισάξει τὸν ἀφ' ἑαυτῆ κύβον α^3 , ἐν γένει δὲ ἕκαστος ἐπόμενος συνεισάξει τὸ ἀπὸ πάντων ἁματῶν ἡγησαμένων ὀρων τριπλῶν τετραγώνον πολλαπλασιασθέν ἐπὶ αὐτὸν. τῆτον τὸν ἐπόμενον σὺν τῷ τρις γινόμενῳ ὑπὸ τῶν δε τῶν ἡγησαμένων ὀρων καὶ τῆ ἀπὸ τῆ ἐπομένου τετραγώνῳ, σὺν τῷ ἀπὸ τῆδε τῆ ἐπομένου κύβῳ."

102. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἰ'να ἄρα ἐπὶ κύβον ὑψώσωμεν ἅπαν πολυνύμῳ, ληψόμεθα τὰς ὀρους, ὥς ἕκαστος τῶν τῆ πολυνύμῳ ὀρων συνεισενεγκεῖν ὀφείλει.

ΤΗΟΔΕΙΓΜΑ. Ἰ'ν' εὐρωμεν τὸν ἀπὸ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ κύβον, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος α συνεισενέγκαι ὀφείλει α^3 . ὁ δὲ β, $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. ὁ δὲ γ, ἄ. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ τετραγώνῳ, τῆ ἀπὸ τῆ $\alpha + \beta$ διωνύμῳ, ἢ αὐτῆ τῆ τρίτῃ γ ῥέσι, $3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma$. β'. τὸ τρις ὑπὸ $\alpha + \beta$ ἢ γ γινόμενον $3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2$. γ'. τὸν ἀπὸ γ κύβον γ^3 . ὁ δὲ τέταρτος δ, ἄ. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆ τετραγώνῳ τῆ ἀπὸ τῆ τριωνύμῳ $\alpha + \beta + \gamma$, ἢ τῆ δ, εἴτ' ἔν $3\alpha^2\delta + 6\alpha\beta\delta + 3\beta^2\delta + 6\alpha\gamma\delta + 6\beta\gamma\delta + 3\gamma^2\delta$. β'. τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ $\alpha + \beta + \gamma$ ἢ δ, εἴτ' ἔν $3\alpha\delta^2 + 3\beta\delta^2 + 3\gamma\delta^2$.

γδ². γ'. τὸν ἀπὸ δ κύβον δ³, ἢ ὕτως ἐξῆς, εἰ πλείους, ἢ τέσσαρας, τύχοι ἔχον ὅρους τὸ πολυώνυμον.

103. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γένει δὲ βυλομένοις πολυώνυμόντι ἐπὶ βαθμὸν τὸν τυχόντα ἐπάραι τῷ λαβεῖν δίχα πολλαπλασιασμῷ τῆς ἀπαιτουμένης ὁρῆς, γνωσόμεθα, ὅτι σύμβολον ἀπονεμῶμεν ἐκάσῳ τῶν τῷ βαθμῷ ὄρων ἐκ τῶνδε, ἢ εἰ μὲν πάντες οἱ τῆς ῥίζης ὅροι ὥσιν ὑπαρκτικοί, ἢ πάντες ἐπὶ οἱ τῷ βαθμῷ ὅροι ὑπαρκτικοί ἔσονται, ἢ εἴγε $+x+=+$. εἰ μὲν πάντες ἔχωσι τὸ —, οἱ τῷ βαθμῷ ὅροι ἀρτιαριθμοὶ μὲν εὐμοιρῶντος δείκτου, ὑπαρκτικοί ἔσονται πάντες, περισσάρημοι δὲ, λειπτικοί. ὕτως ἔν οἱ ἀπὸ τῷ — α — β δυωνύμου βαθμοὶ ἔσονται α. — α' — β'. β'. α² + 2αβ + β². γ — α³ — 3α²β — 3αβ² — β³. δ'. α⁴ + 4α³β + 6α²β² + 4αβ³ + β⁴ κτ. ῥᾶσα δὲ κατανοεῖται, ὅτι τοῦτο παρέπεται ἐκ τῷ γίνεσθαι — x — = +, ἢ — x + = —.

104. Ἀλλὰ γὰρ εἰ ἡ ῥίζα εὐμοιροῖν ἀναμίξῃ ὑπαρκτικῶν τε, ἢ λειπτικῶν ὄρων, ἅπαντες οἱ τῷ βαθμῷ ὅροι, οἷς ἐνυπάρχει ὁ λειπτικὸς μετ' ἀρτίου δείκτου, ἔσονται ὑπαρκτικοί. λειπτικοί δὲ, εἰ ὁ δείκτης περισσεύει. καταφαίνεται δὲ τῷτο ἐκ τῶν ἐξῆς ἀπὸ α — β βαθμῶν. α. α' + — β'. β'. + α² — 2αβ' + β². γ'. + α³ — 3α²β' + 3αβ² — β³, κτ. Ἐξαιρεῖται μὲντοι ἐντεῦθεν ὁ ὁρος βαθμῷ, ὃ ἐναπαντῶνται δύο ῥιζικοὶ λειπτικοὶ ὅροι μετὰ περισσῷ ἐκάτερος δείκτου. ἐκατέρῳ γὰρ λειπτικῷ ὄντος τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ἀναγκαίως ὑπαρκτικὸν ἔσαι. τῷ γὰρ ἀπὸ α — β — γ τετραγώνῳ α² — 2αβ + β² — 2αγ + 2βγ + γ², ὁ πέμπτος ὅρος, γινόμενος ὑπὸ — 2β ἢ — γ ἐστὶν ὑπαρκτικὸς + 2βγ.

105. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Σαφές δὲ, ὡς ἵνα πολυώ-

νυμόντι ἐπὶ τέταρτον ἀρθή βαθμὸν, ζητητέον τὸν ἀπ' αὐ.
τῆ κύβου, ὃν πολλαπλασιάσειον ἐπὶ τὴν αὐτὴν ῥιζικὴν πο.
σότητα· ἢ γυν ἐπιτομώτερον, τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγωνι.
σεόν τετράγωνον (83)· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν καθυ.
περτέρων βαθμῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἐν γένει δὲ σημαίνεται ἡ πύ.
σης ποσότητος ἐπὶ τὸν τυχόντα βαθμὸν ἑξαρχίς, γρα.
φομένης ἐπ' αὐτῆς ευθείας, ἥς πρὸς δεξιὰν ἐπιχαράσσε.
ται ὁ τε βαθμὲ δείκτης· ἔτις ἐν $\alpha + \beta$ τὸ τετράγωνον
ἐμφαίνει τὸ ἀπὸ $\alpha + \beta$ · εἰώθασι δὲ καὶ ἔτις αὐτὸ σημειῖν
 $(\alpha + \beta)^2$ · ἢ δ' ἑκαέσις $25^2 = 15625$, δηλοῖ, ὅτι ὁ α.
πὸ 25 κύβος ἰστέται τῷ 15625.

Μέθοδος γενικὴ τῷ εὐρίσκειν ἅπαντας τὰς βαθμὺς τῆς ἀπὸ παντὸς πολυνύμου.

106. Ἐώρασαν οἱ ἀπὸ $\alpha + \beta$ εὐρεθέντες κατὰ τὴν ἤδη
γενομένην θεωρίαν βαθμοί

$$Α' \quad 1\alpha^1 + 1\beta^1$$

$$Β' \quad 1\alpha^2 + 2\alpha^1\beta^1 + 1\beta^2$$

$$Γ' \quad 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta^1 + 3\alpha^1\beta^2 + \beta^3$$

$$Δ' \quad 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta^1 + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^1\beta^3 + \beta^4$$

ἐξέσαι ἐν παραθέσει τῶν διαφερόντων τῶν δε βαθμῶν ση.
μειῶσαι τὰ ἐξῆς.

107. α'. Βαθμὸς ἅπας δυωνύμου ποσὴ περιέχει τό.
σας ὅρους συν ἐνί, ὅσας περιέχει ὁ τέτυ δείκτης μονάδας· Ὁ
μὲν γὰρ πρῶτος ἀπὸ $\alpha + \beta$ περιέχει ὅρους δύο, ὁ δὲ δεύ.
τερος τρεῖς, ὁ δὲ τρίτος τέσσαρας κτ.

108. β'. Ὁ πρῶτος ὅρος α τῆς δυωνύμου ῥίζης μονά.

ζει ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν τῷ βαθμῷ ὄρων· ὁ δὲ δεύτερος β μονάζει ἐν τέλει· πάντες δὲ οἱ μεσολαβῆντες ὄροι εἰσὶ γινόμενα ὑπὸ α καὶ β.

109. γ'. Οἱ κατὰ διαδοχὴν δείκται τῷ α καὶ β χωρῶσι κατὰ νόμον ἀμετάτρεπτον· οἷτε συνεργοὶ ὡσαύτως, πλὴν ὅτι ὁ τέτων διαφέρει τῷ τῶν δεικτῶν νόμῳ.

110. Οἱ μὲν δείκται τῷ α χωρῶσι κατὰ τόνδε τὸν νόμον, ὁ πρῶτος δείκτης τῷ α ταυτίζεται τῷ τῷ βαθμῷ, ὅτι πάντες δὲ οἱ λοιποὶ μέχρι τῷ ἔχατῳ, ὅς ἐστι 1, ἐλαττύνεται αἰ μονάδι· οἱ δὲ τῷ β χωρῶσι τὴν ἐναντίαν· ὁ μὲν γάρ πρῶτος τῷ β δείκτης ἐστὶ 1, οἱ δὲ λοιποὶ πάντες αἰ μονάδι ἐπαύξονται ἐς γε τὸν ἔχατον, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῷ βαθμῷ δείκτη.

111. δ'. Περὶ δὲ τῷ τῶν συνεργῶν νόμῳ, ὅ, τε πρῶτος καὶ ἔχατος εἰσὶ 1· ὁ δὲ δεύτερος ὁ δείκτης ἐστὶ τῷ βαθμῷ· ὁ δὲ γε τρίτος τὸ πηλίκον ἐστὶ, τὸ προϊὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων δεικτῶν α διὰ τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων δεικτῶν τῷ β· ὁ τέταρτος δὲ, τὸ πηλίκον ἐστὶ τῆς διαιρέσεως τῷ ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων δεικτῶν τῷ α γινόμενῳ διὰ τῷ ὑπὸ τῶν πρώτων τριῶν τῷ β, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Τοιγαρὲν τέτων ἀπαξ ἐγνωσμένων τῶν δυοῖν νόμων, εὐχερῶς πᾶν εὐρεθήσεται ὁσιστὲν βαθμὸς ἀπὸ ποσότητος διωνύμου· κείσθω γὰρ εὐρεῖν τὸν πέμπτον ἀπὸ α + β βαθμὸν· ἐκὼν ἔτος περιέξει ἀναγκασίως ὅρου ἐξ (107), οἷτινες, τηρημένῳ πρώτων τῷ κατὰ τὴν δεικτῶν νόμῳ (110), ἔσονται $\alpha^1 + \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^4 + \beta^5$ · ἐξῆς ἐκτὼ περὶ τῶν συνεργῶν νόμῳ, ὁ μὲν πρῶτος καὶ ἔχατος ἔσονται 1 (111), ὁ δὲ τῷ δευτέρῳ ὄρου ἔσαι 5· ὁ δὲ τῷ τρίτῳ ἔσαι τὸ γινόμενον 5×4 ὑπὸ τῶν δύο πρώ-

των τῷ α δεικτῶν, διηρημένον διὰ τῷ 1×2 γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο πρώτων δεικτῶν τῷ β, ὃ ἐστὶ, συνεργὸς τῷ τρίτῳ ὅρῳ ἔσται ὁ 10· ὁ δὲ τῷ τετάρτῳ, ἔσται τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων δεικτῶν τῷ α, διαιρεθὲν διὰ τῷ γινο-

μένῳ ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τῷ β, εἴτ' ἔν $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$, ὅς

ἔσται ὡσαύτως 10· ὁ δὲ τῷ πέμπτῳ ἔσται $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$.

ὁ δὲ τῷ ἑκτῷ $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1$ ὁ ἄρα πέμπτος ἀπὸ α

+ β βαθμὸς ἔσται $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$.

112. Ἐκ τῶν δε μέντοι τῶν παρατηρήσεων ὁ Νεύτων εὗρατο ἐκθεσιν, ἡ τύπον ἐν γένει συμβολικόν, ἐν ᾧ πάνυ ἀπὸνως ἀναγνώητις ἂν πάντας ἐξῆς τὰς ὁρὰς παντὸς ἀπὸ διωνύμου ποσῶ βαθμῶ, ἢ ἀντὶς εἴποι ὅσον ἢ τὴν ἐξαγωγήν τῶν ξιζῶν, τετραγωνεῖς, κυβικῆς, τετάρτης κτ συμβολικῶν τε ἢ ἀριθμητικῶν, ἐξευμαρίζοντα· καλεῖται δὲ ὅτος ὁ τύπος διωνύμου τῷ Νεύτωνος.

113. Ἐξω μ δείκτης γενικὸς παντὸς ἀπὸ διωνύμου ποσῶ βαθμῶ· ἐξ ὧν ἔν ἀρτίως εἵπομεν πάντας ἐξῆς τὰς ὁρὰς τῷ βαθμῶ ἐμφαίνει ὁ τύπος ὅτος $\alpha\mu + \mu\alpha\mu^{-1}\beta^1$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1}{1 \times 2} \alpha\mu^{-2} \beta^2 + \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2}{1 \times 2 \times 3} \alpha\mu^{-3} \beta^3$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \alpha\mu^{-4} \beta^4$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \alpha\mu^{-5} \beta^5$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4 \times \mu - 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \alpha \mu - 6 \beta^6 \kappa \tau$$

Επεικὲς γὰρ ἐν τῷ τετραγωνισμῷ τῷ $\alpha + \beta$ ἀντικαταστάσας ἀντὶ μ τῷ 2 δείκτε τῷ δευτέρῳ βαθμῷ, ὁ

$$\gammaενικὸς τύπος παρέξει $\alpha^2 + 2\alpha^2 - 1 \beta^2 + \frac{2 \times 2 - 1}{1 \times 2} \alpha^2$$$

$$- 2 \beta^2 \cdot \text{ὅθεν ἐπεὶ ἐν τῷ ἐλάχιστῳ ὄρῳ} \alpha^2 - 2 \text{ ἐστὶν} \alpha^0 =$$

$$= 1 \text{ (59), καὶ } \frac{2 \times 2 - 1}{1 \times 2} = 1, \text{ ὅλος ὁ ἐλάχιστος ὅρος ἔσται}$$

$1 \times 1 \times \beta^2 = \beta^2$. οἱ δὲ τρεῖς ὄροι, οἱ διὰ τῷ γενικῷ εὑρημένοι τύπου, εἰσὶ τὸ ἀπὸ $\alpha + \beta$ τετραγώνων $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, ταύτων ὅπερ καὶ πρότερον ἄλλως εὑρηται.

Ζητηθῆτω δὲ διὰ τῷ γενικῷ τύπου καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ $\alpha + \beta$ βαθμός· εἰσαχθέντος ὅν 4 ἀντὶ μ τραπήσεται

$$\text{ὁ τύπος εἰς τόνδε} \alpha^4 + \alpha^4 - 1 \beta^2 + \frac{4 \times 4 - 1}{1 \times 2} \alpha^4 - 2 \beta^2$$

$$+ \frac{4 \times 4 - 1 \times 4 - 2}{1 \times 2 \times 3} \alpha^4 - 3 + \frac{4 \times 4 - 1 \times 4 - 2 \times 4 - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$\alpha^4 - 4 \beta^4, \text{ ὅς δι' ἀναγωγῆς γίνεται} \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4.$$

Εἰ δὲ ἐπὶ τῷ ἑκτῷ ὄρῳ τῷ γενικῷ τύπῳ ἐκθῇ $\mu = 4$, φανήσεται ἅπας ὁ ἀριθμητικὸς ὁ καταλήγων εἰς -4 τῷ κλάσματος, ὁ πολλαπλασιάζει τὸ $\alpha \mu - 5 \beta^5$, γινόμενος 0, καὶ δὴ καὶ ἡ $\alpha \mu - 5 \beta^5$ ἐξσθενεμένη· ἄρα τῷ τετάρτῳ βαθμῷ ὁ ἑκτος ὅρος εἰς μηδέν, ὁ ἐστὶν ὁ ἀπὸ $\alpha + \beta$ τέταρτος βαθμός καταλήγει εἰς τὸν πέμπτον τῷ τύπῳ ἄρον, ἔνθα τὸ β ἔχει δείκτην τὸν 4.

114. ΕὐΓένει δὲ ἅπαντα βαθμοὶ ἀπὸ $\alpha + \beta$ καταλήγειν δεῖ, ἔνθα τὸ β εὑρίσκεται ἔχον τὸν δείκτην τῷ βαθμῷ· ἐπεὶ δὲ ταῦτα καὶ ἐξ ὧν ἐφθίμεν εἰπόντες, ὅτι

τὸ μὲν ἀπὸ δυωνύμου τετράγωνον αἰεὶ ἔχει ὅρους τρεῖς, ὁ δὲ κύβος τέσσαρας κτ.

115. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Καίπερ ὁ ἐκτεθεὶς ἀνωτέρω γενικὸς τύπος ἐς τὸν ἕκτον ἀφικνεῖται μόνον βαθμὸν, ἀπονητὶ ἐν προαγαγεῖν αὐτὸν δυνάμεθα μέχρις ἅπαντος βαθμοῦ.

116. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἡνίκα δὲ διαφοραὶ συμβόλων ἐμφιλοχωρῶσι τῷ ῥιζικῷ πολυωνύμῳ, τίθεναι ἔχουμεν τὰ ἀνήκοντα ἐκάστῳ ὅρῳ σύμβολα, ἐξ ὧν παρατηρήσαμεν (103).

117. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Ἐς τετραώνυμον τὸ $\alpha + \xi + \pi + \rho$ δυνατόν ἐν τῆς μὲν τρεῖς ὅρους $\alpha + \xi + \pi$ ἀντὶ α ἐκλαβεῖν, τὸν δὲ τέταρτον ρ ἀντὶ β . Ἐμφανεῖ ἄρα ὅτι ἐν γένει ἅπαν πολυώνυμον τὸ δυωνύμου $\alpha + \beta$ καὶ δὴ ἡ ἄρτι ἐκδεδομένη μέθοδος, καὶ μὴν καὶ ὁ τῷ Νεύτωνος τύπος ἐφαρμοσθῆναι δύναται παντὶ εἶδει πολυωνύμου ποσότητος· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸ ἀπὸ τῷ τεθέντος τετραωνύμου τετράγωνον ἢ καὶ τῶν $\xi + \pi + \rho$ ὅρων ἀνθ' ἐνὸς ληφθέντων ἔσαι πρῶτον $\alpha^2 + 2\alpha(\xi + \pi + \rho) + (\xi + \pi + \rho)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + (\xi + \pi + \rho)^2$. β' (τῷ τριωνύμῳ διαιρεθέντος εἰς ξ καὶ $\pi + \rho$) $\alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + \xi^2 + 2\xi(\pi + \rho) + (\pi + \rho)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + \xi^2 + 2\xi\pi + 2\xi\rho + (\pi + \rho)^2$. γ'. (τῷ δυωνύμῳ εἰς τῆς δύο αὐτῷ ὅρους π, ρ διαιρεθέντος) $\alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + \xi^2 + 2\xi\pi + 2\xi\rho + \pi^2 + 2\pi\rho + \rho^2$. ὅπερ ἂν προκύψαι καὶ τῷ τετραωνύμῳ ἐφ' ἑαυτὸ πηλασσιασθέντος· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθείη ἂν καὶ ὁ κύβος καὶ ἅπας ἄλλος βαθμὸς ἀπὸ παντὸς πολυωνύμου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ριζῶν ἐξαγωγῆς.

118. Ποσότης, ἀφ' ἧς ὁ βαθμὸς γίνεται, ρίζα ἦκε. σε τῷ βαθμῷ ἐκείνῳ (78)· ρίζα μὲν τετραγωνική, ἐὰν ὁ βαθμὸς ᾖ τετράγωνον· κυβική δέ, ἣν ἡ κύβος, ἢ ἐξῆς ἔτῳς· ὁ ὅν 3 ἔσι ρίζα μὲν τετραγωνική τῷ 9, κυβική δὲ τῷ 27, τετάρτη δὲ τῷ 81· ὡσαύτως τὸ α ἔσι ρίζα τετραγωνική μὲν τῷ α², κυβική δὲ τῷ α³ κτ· ἐξαγωγὴ τοίνυν ρίζης ἔδεν ἀλλ' ἢ εὐρεσίς ἐσι ποσότητος, ἥτις ὑψωθείσα εἰς βαθμὸν ὁμώνυμον τῇ ζητημένῃ ρίζῃ ἀπέδωκε τὴν ποσότητα, ἀφ' ἧς ἐξαγεῖν τὴν ρίζαν πρόκειται· ἔτῳς ἐξαγαγεῖν ἀπὸ 16 τὴν τετράγωνον ρίζαν εὐρεῖν ἐσι τὸν 4 ἀριθμὸν, ὃς ὑψωθείς εἰς τετράγωνον ἐξήνεγκε τὸν 16.

119. Ἡ πάσης ρίζης ἐξαγωγὴ σημαίνεται τῷ $\sqrt{\quad}$, ὃ παρὰ τῷτο ριζικὸν σύμβολον ἦκεσεν, ἐφ' ὃ γράφεται ἀριθμὸς, τὸν βαθμὸν τῆς ρίζης ἐμφαίνων, ὃς καλεῖται ἐπίσημον *)· ἐπίσημον ὅν τῆς τετραγωνεῖς ρίζης ἔσι 2, τῆς δὲ κυβικῆς 3, ἢ ἔτῳς ἐξῆς· ἔτω $\sqrt[3]{64}$

*) Οὕτω καλέσασθαι μοι ἔδοξε τὸν ἐπὶ τῷ ριζικῷ συμβόλῳ τιθέμενον ἀριθμὸν, ἀντιδιαφέλλοντι αὐτὸν τῷ ἐπὶ τῶν βαθμῶν, ὃς δείκτης ἡμῖν ὠνόμασαι· ὅσον δὲ τετὶ ἐξευμαρίσει τὰς παντοίας τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων ἐκφράσεις, προῖσσι δῆλον γενήσεται.

τὴν κυβικὴν ἐμφαίνει ρίζαν τῆ 64· μηδενὸς δὲ ἐπ' αὐτῆς
τῷ ριζικῷ συμβόλῳ ἐπισήμῃ, ἐξαγωγή ἐννοεῖ-
ται τῆς τετραγωνικῆς ρίζης· $\sqrt[2]{25}$ ταυτὸν δηλοῖ τῷ
 $\sqrt[2]{25}$ ἢ $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[4]{25}$ ἐν γένει δηλοῖ τὰς 5, 4 ρίζας
τῆς α ποσότητος.

120. Βαθμὸς τέλειος μὲν ὀνομάζεται ἡ ποσό-
της, ἣτις παράγεται ἀκριβῶς ἀπὸ ποσότητος ἑτέρας
ὑψώσεως ἐπ' αὐτὸν τὸν βαθμὸν· 25 φέρ' εἰπεῖν ὑπάρ-
χει τετράγωνος τέλειος· ἀλλ' ὁ αὐτὸς 25 ὑπάρχει κύ-
βος ἀτελής, εἴγε ὕδεις ὑπάρχει ἀριθμὸς ὅτε ὁλοχερής,
ἥτε, ὡς ἐν ταῖς ἐξῆς φανήσεται, κλασματίας, ὅς ἂν κύ-
βισθεις δυνηθεῖν παραγαγεῖν τὸν 25.

121. Ἐντυχόντες ὃν βαθμῷ ἀτελεῖ, ἢ τὴν ρίζαν
ζηρώμεθα, ἀρκεσθισόμεθα μόνον σημεινάντες τὴν ἐξα-
γωγήν ὅτω, φέρε, $\sqrt[3]{25}$ · ἡ γὰρ ἐξαγαγόντες αὐτό-
θεν, δι' ἧς αὐτίκα ἀποδώσομεν μεθόδε, ρίζαν ὅσον ἄντις
βηλοῖτο ἐγγιζέσαν τῇ ἀληθεί, εἰς ὑπολογισμὸν ἀ-
κρίβειαν.

122. Ἐπειδὴ δὲ ὑψόμενα παντὸς μονωνύμου εἰς βα-
θμὸν, πρῶτον μὲν ἐπ' αὐτὴν αἶρεται ὁ συνεργός, εἴτα ὁ
ἐφ' ἐκάστῃ γραμμάτος δείκτης πολλαπλασιάζεται ἐ-
πὶ τὸν δείκτην τῷ βαθμῷ (82)· ἐπανάγκες τὴν ἀντίον ἐ-
ξαγαγεῖν μὲν τῷ συνεργῷ ρίζαν, διελεῖν δὲ τὸν
παντὸς γραμμάτος δείκτην διὰ τῷ τῆς ρίζης ἐπισημῇ τὴν
μονωνύμον ζηρωμένοις ρίζαν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἰ'ν' ἐξαγάγωμεν ὃν τὴν τετρα-
γωνικὴν ρίζαν τῆ 9α⁴β², πρῶτον λαμβάνομεν τὴν τῆ 9
τετραγωνικὴν ρίζαν, ἣτις ἐστὶ 3, εἴτα διαιροῦμεν διὰ 2

ἐπισήμῃ τετραγωνικῇ τῆς 4, 2 δείκτας, ὅθεν ἐξίασι πηλίκῃ 2, 1 εὐρίσκομεν ἔν ὧ 3α² β ρίζαν τετραγωνικὴν τῇ 9α⁴ β².

123. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τε γένεσις τῶν βαθμῶν, καὶ ἡ ἐξαγωγή τῶν ριζῶν, δύω ἔσσι ἀντικείμεναι πράξεις, ἑκατέρα εἰς βασανισμὸν ξυντελεῖ τῇ ἑτέρᾳ ἐπίτε συμβολικῶν καὶ ἀριθμητικῶν ποσοτήτων· εὐρεθείσης γὰρ ἀνωτέρω ρίζης τετραγωνικῆς 3α² β τῇ τετραγώνῃ 9α⁴ β², τετραγωνίσαντες αὐτὴς τὴν αὐτὴν ρίζαν, καὶ εὐρόντες τὸ αὐτὸ τετραγώνον 9α⁴ β², ἀσφαλῶς ἐξῆλθαι τὴν ρίζαν συνάγομεν· ἢ γὰρ τετραγωνίσαντες τὴν 3α² β καὶ εὐρόντες 9α⁴ β², ἐξάγοντες ἀπ' αὐτῇ ρίζαν καὶ ἀπολαμβάνοντες αὐτὴς 3α² β, γινώσκουμεν ὡς ἀσφαλῶς ἐτετραγωνίσθη.

Ἐτέρα ὑποδείγματα. Εἰς ἐξαγωγὴν τῆς τῇ α² τετραγωνικῆς ρίζης, ἐπεὶ ἡ ρίζα τῆς ἐπινοημένης εἰς συνεργὸν 1 ἔστι 1 (79) διαιρετέον τὸν 2 δείκτην τῇ α διὰ τῇ 2 ἐπισήμῃ, ὅθεν προκύπτει 1· ὧς ἔν ἡ τῇ α² τετραγωνικὴ ρίζα ἔστιν α' ἢ α.

Εἰς ἐξαγωγὴν τῆς τῇ 8α³ β³ κυβικῆς ρίζης α'. ἐξακτέον τὴν ρίζαν τῇ συνεργῷ, ἥτις ἔστι 2. β'. διαιρετέον τῆς δείκτας 6, 9 διὰ τῇ ἐπισήμῃ 3· ἔσσι ἔν ἡ ζητούμενη κυβικὴ ρίζα 2α³ β³.

124. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἡνίκ' ἂν δείκτης μὴ ἦ διὰ τῇ ἐπισήμῃ διαιρεσίμος, σημανθήσεται μόνον ἡ διαίρεσις· ἡ τοίνυν τετραγωνικὴ τῇ α³ ρίζα ἔσσι α^{3/2}· ἡ δὲ τῇ α κυβικὴ 1/3.

125. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἡνίκ' ἂν μὴ ἀκριδῶς ἐξάγῃται τῇ συνεργῷ ἡ ρίζα, ὑπογραφηθήσεται πᾶσα ἡ ποσότης τῇ ριζικῇ συμβόλῳ.

Ἐπειδὴ, ἐπὶ βαθμὺς ὑψέντες τὰ κλάσματα αἰ-

ρομεν τότε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν (86), τῆς ναντίον ἄρα, ἵν' ὑπεξαγάγωμεν κλάσματος τὴν τυχεύσαν ῥίζαν, λαμβάνομεν τέτε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τὰς ῥίζας· ὅτως ἔν ἵν' εὐρώμεν τὴν τετραγώνων ῥίζαν τοῦ $\frac{a^2}{\beta^2}$, ἐξαγάγομεν τὴν τῷ a^2 ῥίζαν ἣτις ἐστὶν a , εἴτα τὴν

τῷ β^2 , ἣτις ἐστὶ β , καὶ γράφομεν $\frac{a}{\beta}$ ῥίζαν τὴν ζητούμενην· ἵνα δὲ λάβωμεν τὴν τῷ $\frac{2}{27}$ κυβικὴν ῥίζαν, θηρώμεθα πρῶτον τὴν τῷ 8, ἣτις ἐστὶ 2, εἴτα τὴν τῷ 27 ἣτις ἐστὶ 3, καὶ ὅτως ἀπολαμβάνομεν $\frac{2}{3}$ κυβικὴν ῥίζαν τῷ $\frac{2}{27}$.

Περὶ ἐξαγωγῆς τῆς ἐν συμβολικοῖς πολυωνύμοις τετραγωνικῆς ῥίζης.

126. Ἐστω $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, A , ᾧ προτίθεται τὴν ῥίζαν ἐξαγαγεῖν· ἐπεὶ ἔν τὸ ἀπὸ μονώνυμου τετραγώνων ἐστὶ καὶ αὐτὸ μονώνυμον (82), ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν παράγει τὸ A , ἐξ ἀνάγκης ἔσαι πολυώνυμος· ἀλλὰ τῆς πολυωνύμου ταύτης ῥίζης τετραγωνιοδείσης, ὁ πρῶτος ὅρος εἰσήνεγκεν ἀκριβὲς τὸ ἀφ' ἑαυτῆς τετραγώνων (90)· ἡ ἄρα τετραγωνικὴ τῷ a^2 ῥίζα a ἔσαι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ῥίζης· ὁ δὲ δεύτερος εἰσήνεγκε τῷ τετραγώνῳ τὸ δις γινόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης ὅρου a καὶ τῆς δευτέρου σὺν τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρου τετραγώνῳ· ἐνορῶντες ἄρα τῷ A πολυωνύμῳ, $2ab + b^2$, συνάγομεν ὅτι b ἐστὶν ὁ δεύτερος ῥιζικός ὅρος· ὁ δὲ γε τρίτος εἰσήνεγκε τὸ δις γινόμενον

ὑπὸ τῶν δύο πρώτων καὶ τῷ τρίτῳ σὺν τῷ ἀπὸ τῷ τρίτῳ τετραγώνῳ· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ Α εἰς $2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$ συμπεραίνομεν ὅτι γ ἐστὶν ὁ τρίτος ὅρος· ἀλλὰ $\alpha + \beta + \gamma$ τετραγωνιοῦνται ἀποδίδωσι τὸ πολυώνυμον Α, ἀληθῶς ἄρα ἐστὶν αὕτη, ἣτις ἐζητεῖτο, ἡ ρίζα.

127. Περὶ δὲ τῶν προτακτέων μονώνυμου, ἢ πολυωνύμου ρίζης, συμβόλων, ἐξέσαι ἐκ τῶν προειρημένων ἐπενεγκαῖν τὰ ἐξῆς· α. ἅπας μονώνυμος, ἢ πολυώνυμος βαθμὸς, ἀρτιαριθμῷ εὐμοιρῶν δείκτε, ἀναγκαίως περιέχει ρίζας δύο· α² ἔχει ρίζας τετραγωνικάς $\pm \alpha$, καὶ $-\alpha$ (85)· ὡς δ' αὐτῶς τετραγωνικὴ ρίζα τῷ α² $\pm 2\alpha\beta + \beta^2$ εὐδὲν ἦττον ἐστὶν $\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$ · τῷ δὲ α² $- 2\alpha\beta + \beta^2$ ἦτε $\pm \alpha - \beta$ καὶ $-\alpha + \beta$ · ταυτὸν ἐστὶ ρητέον καὶ περὶ τῷ ἀπὸ δυωνύμου τετάρτῳ, ἔκτε κτ. βαθμῷ· ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν περισσάρθμῳ δείκτε βαθμῶν ταυτὸν ἐκρᾶται· κυβικὴ γὰρ, φέρε, ρίζα τῷ α³ εἰς μόνῃ ἢ $\pm \alpha$, ἐκέτι δὲ καὶ ἡ $-\alpha$.

128. Ἐν γένει ἄρα ἡ ρίζης ἀρτιαριθμῷ ἐμφαινόμενης ἐπιτήμῳ, πάντες οἱ ὅροι ἀδιαφόρως ἔσονται εἴτε ὑπερκατικοί, εἴτε λείποντες· βαθμῷ δὲ ἀπὸ δυωνύμου παραγομένῃ ρίζης, τὰ ὑπερκατικά τοῖς λειπτικοῖς ἀναμιξέχοντος σύμβολα, πρὸς τὸ δοκεῖν ὁ μὲν τῶν ὅρων τεθήσεται ὑπερκατικός, ὁ δὲ λειπτικός.

129. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφές ἄρα, ὅτι ἐξαγαγεῖν ἀληθῆ ρίζαν ἐκ ἑνὸς, τῷ βαθμῷ ἀτελῶς ἔχοντος, (120) ὅπερ γνωστὴσεται παρατηρηθέντων τῶν πολλαπλασιαζόντων, ἢ πολλαπλασιαζομένων ποσῶν, εἰ ἄρα δύναιντο ριζικοὶ ὅροι ὑποτεθῆναι, καὶ τῷ πολυωνύμῳ ἀνερευνημένῳ, εἰ ἄρα περιέχοι ἀληθῶς πάντα τὰ γινόμενα, αὐτὸ δεῖ ἀποδῆναι πάντας τὰς ριζικὰς ὁρμὰς. Ἐν γένει δὲ τῷ πολυω-

νῦμ ἀτελεῖς ὑπάρχοντος βαθμῆ, ἅλις ἔσαι, ὡς εἶδισαι, ἀπισσημαίνειν τὴν τῆς ρίζης ἐξαγωγὴν (117).

Ἐξαγωγὴ ρίζης τετραγώνου ἀριθμητικῆς.

130. Γράφοντες ὑπαλλήλως πάντα τὰ κατὰ τάξιν προκίπτοντα, ἃ περιέχει ὁ ἀπὸ 235 τετράγωνος, ἢ ὁ ἀπὸ $200 + 30 + 5$ (91) καὶ συναπτοντες αὐτὰ, εὐρίσκομεν τὸν 5525 τετράγωνον

	235 ²
Νῦν δὲ, καταχωριζέντων δεξιόθεν εἰς	4,00,00
πρὸς τὰ λαϊὰ εἰς κατατομὰς ἀνὰ δύνω, τῶν τε	1,20,00
κατὰ τὰ γινόμενα χαρακτηρίων, καὶ αὐτῶν	9,00
τῶ Δ τετραγώνου, ὡς ἐνταῦθ' ὁράται, τὸν	23,00
νῦν προσχόντες τῇ γενομένῃ συνάψει, συνα-	25
γαγεῖν ἔχομεν τὰ ἐφεξῆς	5,52,25.Δ

α'. 4 ὁ ἀπὸ τῶ 2 πρώτου ὅρου τετράγωνος περιέχεται ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς ἀριστερὰν κατατομῇ τῶ Δ τετραγώνου κατὰ τὸν μονάζοντα ἀριθμὸν 5

β'. Τὸ λείψανον 1 τῆς πρώτης τῶ Δ κατατομῆς σὺν τῇ δευτέρᾳ 52, ἢ 152, περιέχεισι τὸ δις γινόμενον ὑπὸ τῶ πρώτου ριζικῆ ὅρου 2, καὶ τῶ δευτέρου ριζικῆ ὅρου 3, εἴτ' ἐν 12, σὺν τῷ ἀπὸ τῶ δευτέρου ὅρου τετραγώνου 9, εἴτ' ἐν 129.

γ'. Ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τῶν πρώτων δύνω κατατομῶν, τῶ ἀπὸ τῶ πρώτου ριζικῆ ὅρου τετραγώνου σὺν τῷ δις ὑπὸ τῶ πρώτου καὶ τῶ δευτέρου γινόμενω, καὶ τῷ ἀπὸ τῶ δευτέρου τετραγώνου, εἴτ' ἐν ἀφαιρεθέντος τῶ 529 ἀριθμοῦ, τὸ 23 λείψανον συνάμα τῷ ἐν τῇ τρίτῃ κατατομῇ 25 περιέχει τὸ δις γινόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν πρώτων

ρίζικων ὄρων καὶ τῷ τρίτῳ 5 σὺν τῷ ἀπὸ τῷ τρίτῳ τῷδε τετραγώνῳ.

131. Ἐν γένει δὲ „ἐπὶ παντὸς ἀριθμητικῆς τετραγώνῳ τὸ κατάλοιπον τῶν προτέρων κατοτομῶν, ἀφ’ ὧν ἀφίρηται τὰ γινόμενα, τὰ σχετικῶς ἔχοντα πρὸς τὸς ἄρτι εὐρημένους ρίζικὸς ὄρους, εἰ δῆτι κατελείπεται, συνάμα τῇ καταγομένη κατομῇ, περιέχει αἰ τὸ δις γινόμενον ὑπὸ τῶν εὐρεθέντων πρὸ μικρῆς ρίζικων ὄρων, καὶ τῷ ρίζικῷ ὄρῳ, τῷ ἀντιστοιχῆντος τῷδε τῇ νεωστὶ καταχθείσῃ κατομῇ σὺν τῷ ἀπὸ τῷδε τῷ ὄρῳ τετραγώνῳ.“ Ἐντεῦθεν ἄρα ἐκπηγάξει ἡ ἐφεξῆς μέθοδος.

132. Ἐπ’ ἐξαγωγή τετραγωνεῖς ἀριθμητικῆς ρίζης, α. διέλε τὸς χαρακτῆρας τῷ ἀριθμῷ εἰς κόμματα ἀνά δύο, δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ προῖων.

β. Εἰσάγαγε τὴν ρίζαν τῷ μεγίστῳ τετραγώνῳ περιεχομένῳ ἐν τῷ πρώτῳ κατὰ τὰ λαϊὰ κόμματι, γράψας ὑπ’ αὐτὸ τὸ κατάλοιπον, εἴπερ εἴη.

γ. Κατάγαγε τὸς τῷ δευτέρῳ κόμματος χαρακτῆρας, καὶ διὰ τῷ διπλῷ τῆς ἄρτι εὐρημένης ρίζης διέλε τὸ κατάλοιπον, συνημμένον τῷ κατηγμένῳ κόμματι· διὰ δὲ τῷ εὐρεθέντος πηλίκῳ πολλαπλασίασον τὸ διπλὸν τῆς πρὸ μικρῆς ληφθείσης ρίζης, καὶ τῷ γινόμενῳ σύναψον τὸ ἀπὸ τῷ εὐρεθέντος τῷδε πηλίκῳ τετραγώνον· καὶ μὲν τὸ ἄθροισμα τῷδε τῷ γινόμενῳ καὶ τῷδε τῷ τετραγώνῳ μὴ ὑπερέχη τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, γράψον εἰς ρίζαν τὸ εὐρεθὲν πηλίκον· ἂν δ’ ὑπερέχη, ἐλάττω αἰ τὸ πηλίκον μονάδι, ἕς τ’ ἂν τὸ ἄθροισμα μὴ ὑπερκεῖται τέτων· ἀφελὼν εἴτα τῷ καταλοίπῳ καὶ τῷ καταχθέντος κόμματος τὸ μὴ ὑπερέχον τόδε ἄθροισμα, ὑπογράψον τὸ καινὸν λείψανον.

δ'. Κατάγαγε τὸ τρίτον κόμμα, ἢ διπλασιάσας τὸ ἄθροισμα τῶν δυεῖν εὐρημένων ριζῶν, πράττε ὡς ἢ ἐπὶ τῷ δευτέρῳ, ἢ ἐξῆς ὡσαύτως.

133. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ πρῶτος πρὸς ἄρισεράν χαρακτὴρ ἀριθμῆτινος, ὅς ὑποτίθεται ρίζα ἄλλῃ, παραβαλλόμενος πρὸς τὸν δεύτερον, ἐμφαίνει δεκάδας, οἱ δὲ δύο πρῶτοι, παραβαλλόμενοι πρὸς τὸν τρίτον κτ. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν ἐξαγωγῇ ἀπάσης ρίζης χρώμενοι γινομένῳπιν ὑπὸ τῆς πρὸ μικρῆς εὐρεθείσης ρίζης πρὸς εὐρεσιν τῷ ἐφεξῆς ριζικῷ χαρακτῆρος, ἀπονεμῆμεν αὐτῇ τὴν δεκάδων δύναμιν, ὑποτιθέντες κατὰ δεξιὰν τὸ ο

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Κεῖθω ἐξαγαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῷ 55225· α. ἐν ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ λαιὰ χωρῶν διέλε αὐτὸν εἰς κόμματα ἀνὰ χαρακτῆρας δύο ἕκαστον ὡς ἐνταῦθα καταφαίνεται.

β'. Ὁ μέγιστος τετράγωνος περιεχόμενος ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἄρισεράν κόμματι, τῷ 5, ἔστιν ὁ 4, ἢ τετραγωνικὴ ρίζα ἔστι 2· γράψον ἐν τὸν 2 ἐπὶ τῆς ρίζης, τὸν δ' ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον 4 ἄφελε τῷ 5· τὸ δὲ κατάλοιπον 1 ὑπόγραψον τῷ 4	$\begin{array}{r l} 5,52,25 & \\ \hline 4 & 233 \\ \hline 152 & \\ 129 & \\ 2325 & \\ 2325 & \\ \hline 0 & \end{array}$
--	---

γ'. Καταγαγὼν τὸ δεύτερον κόμμα γράψον πρὸς δεξιὰν τῷ καταλοίπῳ 1· γενήσεται ἐν 152· διπλασιάσας δὲ τὴν ἄρτι εὐρημένην ρίζαν 2 (ὑπομνηθεὶς πρῶτον, ὅτι 2 ἐμφαίνει 20 (133), ἢ τὸ διπλὸν ἐστὶ 40) διέλε διὰ 40 τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι, εἴτ' ἐν 152· τὸ δὲ 3 πηλίκον, πρὶν ἢ προῦθῃς ὡς δεύτερον μέρος τῆς ρίζης, βασάνισον ἔτω: πολλαπλασιάσας τὸ διπλὸν τῆς ἄρτι εὐρημένης ρίζης, εἴτ' ἐν 40 ἐπὶ 3· ὅθεν

προκύψει 120, ὃ πρόδες τὸν ἀπὸ 3 τετράγωνον 9· καὶ ἐπειπερ τὸ 129 ἄθροισμα ἔχ' ὑπερβαίνει τὸ τε καταλοίπε καὶ τὸ καταχθέντος κόμματος ἄθροισμα 152, τὸν μὲν 3 τίθει ὡς δεύτερον ὄρον τῆς ρίζης, τὸν δὲ 129 ἀφαιρεί τῷ 152, ὅθεν λειφθήσεται 23.

δ. Πρὸς δεξιάν τῷ καταλοίπῳ 23 γράφας τὸν τρίτον ὄρον, ἔξεις 2325· διπλασιάσας, δὲ τὴν εὐρημένην ρίζαν 23, εἴη ἐν 230 (133) διὰ 460 διέλε το κατὰλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, εἴτ' ἐν τὸν 2325· τὸ δὲ 5 πηλίκον βασάνισον αὐτῷς ἔτω: πολλαπλασιάσον 460 ἐπὶ 5, ὅθεν προκίψει 2300, ὃ σύναψον τὸν ἀπὸ 5 τετράγωνον 25· ἐπεὶ δὲ τὸ ἄθροισμα 2325 ἰσῆται ἀκριβῶς τῷ καταλοίπῳ σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, τίθει ὡς τρίτον τῆς ρίζης ὄρον τὸν 5· ἐπεὶ δὲ ἀφαιρέσει τοῦ 2325 ἀπὸ 2325 μηδὲν καταλείπεται, ἔστιν ἄρα ὁ 235 ρίζα τετραγωνικὴ ἐντελής τῷ 55225.

134. Βάσανας τῆς πράξεως. Τετραγωνίως γὰρ ὁ 235 ἀποδίδωσιν αὐτῷς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 55225.

135. Δειξίς τῆς μεθόδου· ἐπειδήπερ ἐν γένει τὸ κατὰλοιπον τῶν προτέρων κομμάτων, εἴτι καταλειφθὲν τύχοι, σὺν τῷ προσεχεῖ κόμματι, ἐπάνανγκες ἐφ' ἐκάστης πράξεως περιέχειν τὸ δις γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο προτέρων ριζικῶν ὄρων καὶ τῷ ζητημένῳ ὄρῳ σὺν τῷ ἀπὸ τῷδε τῷ ὄρῳ τετραγώνῳ (131), εἴαν διαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῷδε τῷ κόμματι καὶ τῷ καταλοίπῳ, εἴτι εἴη, διὰ τῷ διπλῷ τῶν προσευρημένων ριζῶν, ἀπολαβεῖν προσήκει πηλίκον, ὃ μήτε πλεονεκτοίη, μήτ' ἐλαττοίτο τῷ ζητημένῳ ριζικῷ ὄρῳ (Α'ριθ. 108)· ἕκαστος ἄρα τῶν κατὰ τὴν ἐκτεθείσαν μέθοδον φηρευομένων ριζικῶν ὄρων ἔτ' ἐλάττων,

ματισμῶ κήπη, 5184 τετραγωνικὰς ὀργυῖας περιέχοντος, ἐκάστη πλευρᾷ μῆκος ἀποδῆναι χρή ὀργυῖας 72· ἢ γὰρ πολλαπλασιασθεῖσων ὀργυῶν 72 μῆκος ἐπὶ 72 πλά-
τους τῶν τῷ ζητούμενῳ χωρίῳ, εὐραθῆσονται περιεχό-
μεναι 5184 ὀργυῖαι τετράγωνοι.

136. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν τὸ διπλὸν τῆς προευρη-
μένης ῥίζης μείζον ἢ τῷ καταλοίπῳ, εἰ εἴη, σὺν τῷ κα-
ταχθέντι κόμματι, τιθέσθω ὁ ῥίζα τῷ καταχθέντος ἀνι-
κάνῃ κόμματος· εἰ γὰρ μὴ εἴη ὁ ζητούμενος ῥιζικός ὅρος,
ἔσω ἄλλοστις, φέρ' εἰπεῖν, 1· δεῖ ἄρα τὸ κατάλοιπον
μετὰ τῷ καταχθέντος κόμματος περιέχειν τὸ δις γινόμε-
νον ὑπὸ τῆς προτέρας ῥίζης ἢ τῆς 1 σὺν τῷ ἀπὸ 1 τε-
τραγώνῳ (131)· ἔστιν ἄρα τὸ κατάλοιπον μετὰ τῷ κα-
ταχθέντος κόμματος μείζον, ἢ τὸ διπλὸν τῆς προευρη-
μένης ῥίζης, ὅπερ κατὰ τῆς ὑποθέσεως· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ
λόγον, ἀθετέον τῇ ῥίζῃ τοσαῦτα 0, ὅσα ὑπάρχει κόμ-
ματα τῆς μονάδος ἐλάττω· β'. εἰ τὸ ἔσχατον τῷ κατα-
χθέντος ἀριθμῷ κόμμα μὴ ἐξικαναίη, δείκνυσιν ὅτι ὁ ἔ-
σχατος ῥιζικός ὅρος ἔσαι 0.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ· Κείσθω γὰρ λαβεῖν τὴν τετρα-
γωνικὴν ῥίζαν τῷ 118810000· ἢ ἔν ῥίζᾳ τῷ μείζονος
τῶν· ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι περιεχομένων τετραγώνων
σεσημειωσθῶ ἰδίᾳ· ἐπεὶ δὲ τὸ διπλὸν τῆς ῥίζης 1, ἢ
10 (133), εἴτ' ἔν 20, ἐκ ἐμπεριέχεται τῷ 18,
γράφας ῥίζαν 0, κα. 1, 18, 81, 00, 00 |
τάγαγε τὸν 81· διὰ 1 | 10900
δὲ τῆς ἀρτι εὐρημένης 01881
ρίζης 10, ἢ 100, δι. 1881
πλασιασθείσης, ἢ γε. 00000
νομένης 200, δέλεε τὸν 1881· ἐπεὶ δὲ τὸ πηλίκον 9 βα.

αανιωδὲν εὐρίσκεται καλῶς ἔχον, ἀφαιρέσει δὲ καταλεί-
πεται ο, κατάγαγε ἐξῆς τὸ κόμμα οο, ὅπερ ἐπεὶ μὴδ'
ἅπαξ περιέχει τὴν εὐρεθῆσαν ρίζαν, γράψον προσεχῇ
ρίζαν ο, ὡσαύτως δὲ καὶ ἕτερον ο περὶ τῆ ἐφεξῆς κόμμα-
τος οο· ἡ ἄρα ὅλική ρίζα τῆ 118810000 ἔστι 10900.

**Περὶ τῆς ἐν συμβολικοῖς πολυωνύμοις ἐ-
ξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης.**

137. Ἀνακαλεσάμενοις τὰ ἀλληλεχῇ γινόμενα ενα, καὶ
περιέχει ἅπας ὅρος κυβιζόμενον πολυώνυμον, εὐχερὲς ἔσται
κατανοῆσαί τε καὶ εἰς τρᾶξιν ἀγαγεῖν τὴν ἐφεξῆς θεωρίαν.

Ἐξω γὰρ $α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3 + 3α^2γ + 6αβγ + 3β^2γ + 3αγ^2 + 3βγ^2 + γ^3$, Ρ, ἐ πρόκειται
τὴν κυβικὴν ρίζαν λαβεῖν· ὁρῶντες ἔν ἐν ἀρχῇ $α^3$ τὸν ἀπὸ
α κίβον, ὑποθέσθαι δυνάμεθα ὅτι α ἔστιν ὁ πρῶτος ριζικός
ὅρος.

Ὁ δὲ δεύτερος ὅρος παρέχει τὸ ὑπὸ $3α^2$ καὶ τῆ δευτέ-
ρου ὅρου γινόμενον (100)· ὁρῶντες τοίνυν $3α^2β$, ἐκ τούτου
συνάγομεν ὅτι β δύναται εἶναι ὁ δεύτερος ριζικός ὅρος ὅς-
τις παρέχει ὅλικῶς $3α^2β + 3αβ^2 + β^3$ (αὐτ.)· εἰς εὐρε-
σιν δὲ τῆ τρίτης ριζικῆς ὁρου σκεπτέον ἔτιω: ὁ τρίτος ὅρος
παρέχει τὸ ὑπὸ $3α^2$ καὶ τῆ τρίτης αὐτῆ γινόμενον· ἐκ πρώ-
της ἄρα ἐποπτείας τῆ $3α^2γ$ συνάγεται ὅτι γ ἔστιν ὁ τρί-
τος ὅρος· ἀλλὰ γὰρ παρέξει ἕτος α' τὸ τρις τετραγώ-
νον τὸ ἀπὸ τῆ προλαβόντος δυνάμεως $α + β$, ἐπαχθὲν ἐπὶ
τὸν τρίτον ὅρον, ἢ $3α^2γ + 6αβγ + 3β^2γ$ · β'. τὸ τρις
γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο προτέρων ὁρων, καὶ τῆ ἀπὸ τῆ
τρίτης τετραγώνου, εἴτ' ἐν $3αγ^2 + 3βγ^2$ · γ'. τελευ-

ταῖον τὸν ἀπὸ τῆ τρίτης κύβου γ³. ὕτως ἄρα κυβική ρίζα
τῆ προτεθέντος πολυωνύμου P ἔστιν α+β+γ· κυβισθέντος
γὰρ τούτου, εὐρεθήσεται αὐτὸς ὁ P κύβος

ἐν ἀριθμοῖς.

138. Οὐκ ἄξυντελές ἔσαι ἔχειν αἰετὶ πρὸ ὀφθαλμῶν τὸν
ἐξῆς πίνακα, περιέχοντα τὰς ἀπὸ τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν κύβους
ρίζαι 1 2 3 4 5 6 7 8 9
κύβοι 1 8 27 64, 125, 216, 343, 512, 729

Διαιρεθέντων ἕνεις κόμματα ἀνὰ τρεῖς χαρακτηήρας
περιέχοντα δεξιόθεν ἐπ' ἀριστερὰ τῶν ἀλληλεχῶν γινόμε-
νων, ἃ περιέχειν ἀνάγκη τὸν ἀπὸ 729, ἢ 700 + 20
+ 5 κύβου, ὡσαύτως δὲ καὶ αὐτὴ τῆ κύβου Γ, καθ' ὃν
ἐνταῦθα ὁράται τρόπος,

139. Εἴξεται ἐπιπαρατηρεῖν	343, 000, 000
τῶδε τῷ ἀριθμῷ, ὡς καὶ ἐπὶ παντὶ	29, 400, 000
ἐτέρῳ, ὅτι ὁ ἀπὸ τῆ πρώτης ριζικῆ	840, 000
ὅρου κύβος περιέχεται ἐν τῷ πρὸς ἀ-	8, 000
ριστερὰν πρώτῳ κόμματι τῆ Γ κύβου·	7, 776, 000
καὶ ἐν γένει, εἴτι λειφθεὶς μετὰ τὴν	54, 000
ἀφαιρέσιν ἀπὸ τῶν προτέρων κομμά-	125
των, τῶν πρὸς αὐτὰ ἀπονεμομένων	381, 078, 125 Γ

προκυπτόντων, τετὶ τὸ κατάλοιπον μετὰ τῆ νεωστὶ κατα-
γομένε κόμματος, περιέχει, α. τὸ τρεῖς γινόμενον ἐκ τῆ
τετραγώνου, τῆ ἀφ' ὅλης τῆς προενημεμένης ρίζης, καὶ τῆ ἐφε-
ξῆς ὅρου· β. τὸ τρεῖς γινόμενον ὑφ' ὅλης τῆς προενημέ-
νης ρίζης, καὶ τῆ τετραγώνου τῆ ἀπὸ τῆ ἐφεξῆς ριζικῆ ὅ-
ρου· γ. τὸν ἀπὸ τῆ ἐφεξῆς ριζικῆ ὅρου κύβου· ἐντεῦθεν
ἄρα ἀποισόμεθα τὴν ἐξῆς μέθοδον.

140. Ἰν' ἐξαχθῇ ἀριθμὸς ἢ κατ' αὐτὸν κυβικὴ ρίζα, α. διηρήσθω ὁ ἀριθμὸς ἐκδεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ προῖϋσιν εἰς κόμματα, τρεῖς ἕκαστον περιέχοντα χαρακτῆρας· β'. ἐξήχθω ἡ κυβικὴ ρίζα τῷ μείζονος τῶν ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἀριστερὰν κόμματι περιεχομένων κύβων, καὶ ἀφηρήσθω τῷδε τῷ κόμματι ὁ τῆς ρίζης τῆςδε κύβος· γ'. ἐν γένει δὲ, τῷ καταλοιπῷ, εἴπερ εἴητι, συνάμα τῷ καταγομένῳ, διαιρεθέντος διὰ τῷ τριπλῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς προεϋρημένης ρίζης, εἰλήφθω τὸ τρις ὑπὸ τῷδε τῷ τετραγώνῳ, καὶ τῷ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντος πηλίκου γινόμενον, ὧς συνήφθω τὸ τρις ὑφ' ὅλης τῆς προεϋρημένης ρίζης, καὶ τῷ ἀπὸ τῷ πηλίκου τετραγώνῳ γινόμενον σὺν τῷ ἀπὸ τῆς πηλίκου κύβου· καὶ εἰ μὲν τὸ ἄθροισμα τόδε μὴ ὑπερέχη τῷ καταλοιπῷ σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι, γεγράψθω ρίζα τὸ πηλίκον· ὑπερέχοντος δὲ, ἡλαττώσθω τὸ πηλίκον μονάδι, ἐστ' ἂν μὴ ἡ μείζων τῷ δικαίῳ τὸ ἄθροισμα.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Κεῖσθω εὐρεῖν τὴν κυβικὴν ρίζαν τῷ ἀριθμῷ 381078125 α. ἐν δέλε τὸν ἀριθμὸν, ὡς ἐνταυῷ ὁράται· β'. εἰπεὶ ὁ μείζων τῶν τῷ πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ ἐμπεριεχομένων κόμματι κύβων ἐκ τῷ προεκτεθέντος τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν πίνακος ἐστὶ 343, γράψον ἰδίᾳ τὴν ρίζαν αὐτῷ 7, τὸν δὲ 343 κύβον ἀφελὼν τῷ 381, ὑπόγραφον αὐτῷ τὸ κατάλοιπον

38· γ'. πρὸς δεξιὰν τῷ καταλοιπῷ γράψας τὸ δεύτερον κόμμα 078, διὰ τῷ τριπλῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς προεϋρημένης ρίζης 7, εἴτ' ἐν 70, ὅ ἐστι διὰ 14700 δέλε τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμ-

$$\begin{array}{r}
 381,078,125 \mid \\
 \hline
 343 \qquad \qquad \mid 725 \\
 38078 \\
 30248 \\
 7830125 \\
 7830125 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

ματι, εἴτ' ἔν 38078· τὸ δ' ἐντεῦθεν πηλίκον, εἰ ἀληθὴς εἴη ῥίζα, βασάνισον τοιῷδε λόγῳ· α'. πολλαπλασίασον ἐπὶ 2 πηλίκον τὸν τριπλὲν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τῆς πρὸ μικρῆς εὐρημένης ῥίζης, εἴτ' ἔν τὸν 14700, ὅθεν προκύψει 29400· β'. τῷ δε τῷ γινόμενῳ πρόωδες τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆς ῥίζης 7, εἴτ' ἔν 70, καὶ τῷ ἀπὸ 2 τετραγώνῳ 4 σὺν τῷ ἀπὸ 2 κύβῳ 8· καὶ ἐπεὶ τὸ ἄθροισμα 30248 ἐχ' ὑπερέχει τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι, 2 εἰσὶν ἡ ἀληθὴς ῥίζα, ἣν γράψον ἐν τῷ οἰκείῳ αὐτῆς χώρῳ.

Τῷ τρίτῳ καταχθέντος κόμματος πρὸς δεξιὰν τῆς καταλοίπου 7830, λαβὲ τὸν ἀπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης, εἴτ' ἔν 720, τετράγωνον, ὅς ἐστι 518400, δι' 8 τριπλασιασθέντος καὶ γενομένου 1555200 διέλε τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, εἴτ' ἔν τὸν 7830125, τὸ δὲ πηλίκον 5 βασάνισον ὡσαύτως· πολλαπλασίασον τὸν τρις συνεσῶτα ἀφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης τετράγωνον, εἴτ' ἔν 1555200 ἐπὶ 5· τῷ δ' ἐντεῦθεν προκύπτουντι 7776000 πρόωδες τὸ τρις γινόμενον ὑφ' ὅλης τῆς προευρημένης ῥίζης καὶ τῷ ἀπὸ 5 τετραγώνῳ 25, εἴτ' ἔν 54000 σὺν τῷ ἀπὸ 5 κύβῳ 125· καὶ ἐπεὶ τὸ ἀποτελέμενον ἄθροισμα 7830125 ἰσῆται ἀκριβῶς τῷ καταλοίπῳ μετὰ τῷ καταχθέντι κόμματι, εἰς ἄρα ἀληθὴς μὲν τελευταία ῥίζα 5· ἐστὶ δὲ ἀκριβῶς 725 ἡ ὅλη κυβική ῥίζα τῆς 381078125.

141. Δεῖξίς τῆς μεθόδου. Εἰσίδεται γὰρ καὶ αὕτη τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς καὶ ἡ ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης (135) ὅτι ἕκαστος ῥιζικός χαρακτήρ, ἔτε μείζων, ἢ ἐλάσσων, ἢ ὅσον ἀπόχρη διὰ τῆς δε τῆς μεθόδου λαμβάνεται.

Βάσανος τῆς πράξεως· Κυβιοθεῖς γὰρ ὁ 725 ἀποδῆναι ὀφείλει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 381078125, ἔ τὴν κυβικὴν ἐθηρασάμεθα ρίζαν.

142. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡνίκ' ἂν τὸ κατάλοιπον, εἴτι εἴη, σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι ἔλαττον ἢ τῷ τριπλῷ τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἄρτι εὑρημένης ρίζης, τιθέσθω ὁ ρίζα, ὡσαύτως καὶ ὑπὲρ ἐκάστῃ μὴ ἀποχρῶντος κόμματος.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τὸ ἐξαγαγεῖν τῷ 3377000· 125 τὴν κυβικὴν ρίζαν· α'. ὁ μείζων τῶν ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι 3 περιεχομένων κύβων ἔστι 1, ἔ τὴν κυβικὴν ρίζαν γράψον ἰδίᾳ (30)· ἀφαιρέσει τῷ κύβῳ 1 ἀπὸ 3 κατὰλείπεται 2· β'. τὸ προσεχὲς κόμμα, συναφθὲν τὸ 2 κατὰλείπῳ, ἀποτελεῖ 2377, ὃν διέλε διὰ τῷ ἀπὸ 1 ἢ 10 τριπλῷ τετραγώνῳ 300, τὸ δ' 7 πηλίκον βασανίσαν ὡς πρότερον· πολλαπλασιάσας γὰρ 300 ἐπὶ 7· τῷ δὲ προκύπτοντι 2100 συναψον τὸ τρις γινόμενον ὑπὸ τῆς προευρημένης ρίζης 10, καὶ τῷ ἀπὸ 7 τετραγώνῳ 49, εἴτ' ἂν τὸν 1470 σὺν τῷ ἀπὸ 7 κύβῳ, καὶ ἐπεὶ τὸ ἀποτελέμενον ἄθροισμα ὑπερέχει τῷ 2377, 7 ἐστὶ ρίζα μείζων τῷ δικαίῳ· βασανίσας δὲ τὸν 6 εὐρήσεις καὶ αὐτὸν ὡσαύτως τῷ δικαίῳ μείζονα· βασανίσαν ἐξῆς τὸν 5· 300 ὁ ἀπὸ τῆς προευρημένης ρίζης τριπλῷ τετραγώνῳ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5, παρέχεται 1500· 30 δὲ τὸ τριπλῷ ταύτης τῆς ρίζης πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀπὸ 5 τετραγώνῳ 25, ἀποδίδωσιν 750· συναφθέντος δὲ τοῖς δυσὶ τοῖς δὲ ἀριθμοῖς τῷ ἀπὸ 5 κύβῳ 125, τὸ μὲν ἀποτε-

$$\begin{array}{r|l}
 3,377,000,125 & \\
 \hline
 1 & 1500 \\
 2377 & \\
 2377 & \\
 \hline
 2000125 &
 \end{array}$$

λόμενον ἄθροισμα ἔσιν οἷον ἀφαιρεῖται· 5 δὲ ἐσὶν ἡ ἀληθὴς ῥίζα· ἀφαιρεθέντος ἔν τῷ 2375 ἀπὸ 2377, καταλείπεται 2.

Τῷ τρίτῳ δὲ καταχθέντος κόμματος, τετραγωνίσας τὴν εὐρημένην ῥίζαν 15, ἢ 150 (133), ἔξεις 22500· τριπλασιάσας δὲ τὸν δε τὸν τετράγωνον, ἀπολήψῃ 67500, ἢ μείζονος ὄντος, ἢ τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, θές ῥίζαν 0 (142).

Καταχθέντος δ' ἔτι καὶ τῷ προσεχῶς κόμματος, λαβὲ τὸν ἀπὸ 150, εἴτ' ἔν 1500 (133) τετράγωνον 2250000· τὸ δὲ τριπλῆν τῷ δε τῷ τετραγώνῳ, ὃ ἐσὶν 6750000, ἐπεὶ καὶ τῷτο ὑπερέχει τὸ κατάλοιπον σὺν τοῖς καταχθεῖσι κόμμασι, γράψον καινὴν ῥίζαν 0· καὶ ἔτιωσ εὐρεθήσεται ἡ ἐγγύς τῆς ἀληθοῦς ἐν ὀλοχερέσιν ἀριθμοῖς ῥίζα τῷ προσθεθέντος ἀριθμῷ ἢ 1500, καταλειπομένη τοῦ 2000125.

143. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' πόταν ἦτι κατάλοιπον ἐν τῇ ἐξαγωγῇ ῥίζης τετραγωνικῆς, κυβικῆς κτ, βασιανθῆσεται ἡ προᾶξις ἔτω, α'. ὑψέωω ἡ εὐρεθεῖσα ῥίζα εἰς τὸν συνώνυμον αὐτῇ βαθμὸν, ὥτ' ἔκ καταλοιπὸν προσθεθέντος, ἐπύναγκες εὐρεθῆναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ ἡ ῥίζα ἐξήνεκται· ὃ δεικνύσι τὴν εὐρεθεῖσαν ῥίζαν ἔσαν τὴν ἐν ὀλοχερέσιν ἀριθμοῖς τῇ ἀληθεὶ ἐγγίζουσαν· β'. διὰ τὸ κατάλοιπον μέντοι ἔσιν αὕτη τῆς ἀπαιτιμένης ἐλάσσων· ἵν' ἄρα γνωστῇ, εἰ ἡ εὐρεθεῖσα ῥίζα μὴ εἴη ἐλάττω τῆς ζηταμένης μεγεθυνέωω μονάδι, καὶ ἔτιωσ ὑψέωω εἰς τὸν, περὶ ἢ ζητεῖται, βαθμὸν· ὃ δ' ἐντεῦθεν προκύπτων ἀριθμὸς, δίχα τῷ λειψάνῳ, ὑπερέξει τῷ, ἢ ἐξήνεται ἡ ῥίζα.

Αὐτίκα δὴ ἐπὶ τῷ φθάσαντος ὑποδείγματος, ἡ εὐρεθεῖσα ῥίζα 1500 κυβισθεῖσα ἀποδίδωσι 3375000000, ἢ συναφθέντος τῷ καταλοιπῷ 2000125, ἐπεὶ τὸ ἄθροι-

σμα 3377000125 ἰσῆται τῷ, ἢ ἡ ρίζα ἐξήνεκται, ἀριθμῷ, ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ἡ εὐρεθεῖσα ρίζα 1500 ἔκ ἐστι μείζων τῆς ἀπαιτουμένης ἐν ὀλοχερέσιν· εἰδέτις εἴποι, ὅτι εἴη ἐλάσσων, ἕως ἀληθείας ἡ 1501· ἐπεὶ δὲ ὁ ἐκ ταύτης κύβος 3381754501 ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν 3377000125, ἢ εἰληπται ἡ ρίζα· ἔστιν ἄρα 1501 ρίζα μείζων, ἢ ὅση ἀπαιτεῖται· ἡ ἄρα 1500 ἔκ ἐστιν ἡ μαρτημένη.

Περὶ τῆς διὰ προσεγγίσεως τῶν ριζῶν ἐξαγωγῆς.

144. Καίτοι μὴ εἶδόν, ὡς παρακατιῦσι δειχθήσεται, βαθμῇ ἀτελεῖς τὴν ἀληθεῖ εὐρεῖν ρίζαν, δυνάμεθα μέντοι μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐτῆς ἐγγύον γίνεσθαι ἐπ' ἀπειρον, κατὰ τὸνδε τὸν τρόπον.

Α'. Εἰξαχθείσης ἐν ὀλοχερέσιν ἀριθμοῖς κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἡμῖν μέθοδον τῆς μείζονος δυνατῆς ρίζης, συνήρθωσαν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆ μετὰ τὴν τελευταίαν πρᾶξιν καταλοίπων πλείω κομμάτια, ἕκαστον περιέχοντα τοσαῦτα 0, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ ἐπίσημον τῆς ἐξαγομένης ρίζης, ὃ ἐστὶ, περιέχον μὲν δύο 0, εἰ ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, τρία δὲ, εἴπερ ἡ κυβικὴ, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως περὶ τῆς τετάρτης, πέμπτης καὶ ρίζης, περὶ ὧν ὕψερων.

Β. Εἰξαγέσθω συνεχῶς ἡ ρίζα ἐκ τῆ καινῆ τῆδε ἀριθμῷ τῆ συγχειμένῃ ἐκ τῆ καταλοίπων καὶ τῶν κομμάτων τῶν περιεχόντων τὰ 0, ὡς εἰ καὶ ἦν ὀλοχερής· διακεκρίσθωσαν μόνον δι' ὑποδιαστολῆς οἱ προευρεθέντες τῶν αὐτίκα εὐρεθησομένων ριζικῶν χαρακτήρων· Τοιγαρὲν τοσοῦδε δε-

καδικοί χαρακτήρες τῇ ρίζῃ προσεπιτεθήσονται (Α'ριθ. 222),
ὅσα κόμματα μηδενικῶν συναφθήσονται τῷ λειψάνῳ.

Υ' πόδειγμα ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Ι'ν' ἑξαχθῇ διὰ προσεγγίσεως ἡ τῷ 535 τετραγωνικὴ ρίζα· α'. ἐξήχθω ἡ τετραγωνικὴ αὐτῇ ρίζα ἐν ὀλοχερέσιν, ἥτις εὐρεθήσεται 23 μετὰ καταλοίπῳ 6.

Β'. Τιθέτω, ὅσα πότ' ἂν ἡ βυλομένοις κόμματα μηδενικῶν, πέντε, φέρε, ἀνὰ δύο περιέχοντα ἕκαστον, κατὰ δεξιὰν τῷ καταλοίπῳ, γενήσεται ἔν 6,00,00,00, 00,00, ἣ ἐπανειλήθω ἡ τῆς ρίζης ἐξαγωγή, ὡς εἶπερ ἡνὸ καίνος ἔτος ἀριθμὸς μέρος κατάλοιπον τῷ προτεθέντος· ἔκην διπλασιασθεῖσα ὅλη ἡ προεuryμένη ρίζα ἔσεται 460 (133)· τῷ δὲ καταλοίπῳ 6 συναφθέντος τῷ ἐγγύς καινῷ κόμματι 00, διαιρεθεὶς 600 διὰ 460 δίδωσι 1, ἡ γεγράφθω ἐν δεξιᾷ τῆς ὀλοχερῆς ρίζης 23 διακριθείσης πρότερον δι' ὑποδιαστολῆς, ὡς ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν. $460 \times 1 = 460$, ὧ ἀναφθέντος τῷ ἀπὸ 1 τετραγώνῳ 1, γίνεται 461· ἀφαιρέσει δὲ λείπεται 139, ἣ πρὸς δεξιὰν ἐπισυναφθέντος τῷ ἐγγύς κόμματος 00, ἔσαι 13600.

Δι' ὅλης τῆς ἄρτι εὐρημένης ρίζης, διπλασιασμῷ γενομένης 4620, διηρήθω ὁ 13900 ἀριθμὸς, τὸ δὲ πηλίκον 3 βασανισθέν γραφένῳ ἐν τῇ ρίζῃ δεύτερον δεκαδικόν.

Ἐ'παναλαμβανομένης δὲ ὡσαύτως τῆς πράξεως καὶ πὶ τῶν ἐξῆς τριῶν κομμάτων, εὐρεθήσεται ρίζα τῷ 535 τῇ ἀληθεὶ προσεγγίζουσα ἡ 23, 13006· ἔσι μὲν ἔν αὕτῃ

τῆς ἀληθῆς ἐλάττων, ἅτε δὴ λειψάνε τινὸς ἐγκατα-
λειπομένη· ἡ μὲντοι ποσότης, ἥπερ ἡ 2313006 ἐλατ-
τῆται τῆς ἀληθῆς ρίζης, εἰς ἐλάττων ἢ δεκακισμυριο-
σημόριον τῆς μονάδος· εἰ γὰρ ἦν ἡ διαφορά τρεῖς, ἐ-
πεὶ ὁ ἔσχατος δεκαδικὸς ὅρος 6 τὸν τῶν δεκακισμυριοσημο-
ρίων ἐπέχει χώρον, τεθέντος 7 ἀντὶ 6, καὶ διεκπεραν-
θείσης ἀπάσης τῆς πράξεως, φανήσεται ὁ 7 μείζων εἰλημ-
μένος τῷ ἀπαιτούμενῳ.

535	6, 00, 00, 00, 00, 00
600	23, 13006
461	
13900	
13869	
31000000	
27756036	
3243964	

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅσοναφθέντος ἐπὶ ἐνὸς κόμματος
ο τῷ εὐρεθέντι καταλοίπῳ, καὶ τῆς ἐξαγωγῆς ἐπανει-
λημμένης, εὐρεθήσεται ρίζα τῆς ἀληθῆς μιλλιονισημορίῳ
διαφέρουσα· ἑτέρῳ δὲ ἐπιπροστεθέντος διαίσει δεκακισμιλ-
λονισημορίῳ, καὶ ὕτως ἐξῆς ἐπ' ἄπειρον.

**Τ' πόδειγμα ἐπὶ τῆς κυβι-
κῆς ρίζης.**

Ἐς ὡ ἐξαγαγεῖν τὴν κυβικὴν ρίζαν τῷ 1953227.

145. Α'. Εἰλήχθω τῷδε τῷ ἀριθμῷ ἡ κατ' αὐτὸν
κυβικὴ ρίζα ἐν ὀλοχερέσιν, ἣτις ἔσται 125· β'. συνήθῳ

τῷ καταλοίπῳ 102, τρία, φέρε, κόμματα ἕκασον ἀνὰ ο
τρία· ἔσαι ἔν 102,000,000,000· ἐπεὶ δὲ ὁ ἀπὸ τῆς
εὐρημένης 125 ῥίζης τετράγωνος 1250 (133), τριπλα-
σιασμῷ γινόμενος 4687500, ὑπερέχει τῷ λειψάνῳ συνημ-
μένῳ τῷ πρώτῳ τῶν ο κόμματι, γεγράφθω ο τῇ ῥίζῃ
ὡς πρῶτον δεκαδικόν.

Ο' ἀπὸ τῆς προευρημένης ῥίζης 12500 (133) τρι-
πλῆς τετράγωνος 468750000 ὑπερέχει τῷ καταλοίπῳ
συνάμα τοῖς δυσὶ κόμμασι τῶν μηδενικῶν· ἔκῃν γραφέ-
θω ἔτι κ' ἕτερον ο ὡς δεκαδικόν δεύτερον.

Ο' τριπλῆς ἤδη ἀπὸ 125000 τετράγωνος 46875-
000000 ἐλαττέται τῷ μετὰ τριῶν κομμάτων λειψάνῳ·
διηρήθω ἔν ἔτος δι' ἐκείνῳ τῷ ἀριθμῷ· τὸ δὲ πηλίκον
2 δοκιμασθέν γεγράφθω τῇ ῥίζῃ ὡς τρίτον δεκατη-
μόριον.

Εἰληπται ἄρα 125,002 κυβικὴ ῥίζα τῷ 1953227
τῆς ἀληθῆς ἐγγύς ἔχουσα· συναχθήσεται δὲ, ὡς καὶ
τῆς τετραγωνεῖς, ὅτι κ' αὕτη τῆς ἀληθῆς ἢ διενήνοχεν
ἀλλ' ἢ χιλιοσημορίῳ τῆς μονάδος.

140. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δεῖσαν δὲ δι' ἀκρίβειαν πλείω
λαβεῖν ῥίζαν ἐγγυτέραν τῇ ἀληθεῖ, ἢ τὴν εὐρεθείσαν,
προσθιέτωσαν τῷ καταλοίπῳ καινὰ μηδενικῶν κόμ-
ματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Τύποι παντοῖοι βαθμῶν καὶ ριζῶν, εἵθε καὶ
περὶ ἐξαγωγῆς ριζῶν, ἐκτελεσμένης διὰ τῆς
Νευτωνεῖα δυωνύμου τύπου.

147. Ἐκ τῶν μέχρι τῆδε εἰρημένων περὶ βαθμῶν
καὶ τῆς τῶν κατ' αὐτὰς ριζῶν ἐξαγωγῆς καταμαθεῖν δύνα-

μεθα, ὅτι ποτὲ σημαίνουσιν οἱ τύποι $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\bar{a}^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\sqrt[\nu]{a^{\frac{\mu}{\nu}}}$, κτ.
ὡς τὰς δυνάμεις γνωσόμεθα ἀναχθέντος ἐκάστη ἐπὶ $a^{\frac{\mu}{\nu}}$

148. Ἄ. οὖν $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ τρέπεται εἰς $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, εἰς ὑψωθῇ εἰς
τὸν βαθμὸν ν . ἔτω γὰρ (82) $a^{\frac{\mu}{\nu}} \times \nu = a^{\frac{\mu\nu}{\nu}} = a^{\mu}$. ἢ.

κῆν $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐστὶν ὁ ἀπὸ $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ βαθμὸς ν . τὸναντίον δὲ ἡ $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐστὶ

ρίζα ν τῆς βαθμῆς $a^{\frac{\mu}{\nu}}$. εἴτ' ἔν $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\frac{\mu}{\nu}}}$. ἐν γένει ἄρα
ὑποσώτης πᾶσα, κλασματικὸν δείκτην ἔχουσα, ἴσα δύναται
ὑποσώτητι, ριζικῷ σημείῳ καθυπαγομένη, ἥς ἐπίσημον
ἡμὲν ἐστὶν ὁ τῆς κλάσματος παρνομασῆς, δείκτης δὲ ὁ ἄ.
ὑριθμητῆς· τοιγαρὶν ἔσαι $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, καὶ $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$,
 $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$ κτ.

149. β'. Ἰ'να $\bar{a}^{\frac{\mu}{\nu}}$ τραπῇ εἰς $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἀνάγκη τὴν $\bar{a}^{\frac{\mu}{\nu}}$
πολλαπλασιάσαι ἐπὶ $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ γὰρ ἔτω (40) $\bar{a}^{\frac{\mu}{\nu}} \times a^{\frac{\mu}{\nu}} =$

$\bar{a}^{\mu+2\mu} = a^{\mu}$. ἔσιν ἔν τὸ a^{μ} γινόμενον ἐκ τῶ $\bar{a}^{\mu}$ καὶ $a^{2\mu}$. ἔπει δὲ τῶ γινόμενον διαιρεθέντος διὰ θατέρου τῶν ποιητῶν προκύπτει ὁ ἕτερος ἄρα $\frac{a^{\mu}}{a^{2\mu}} = \bar{a}^{\mu}$ ἔπει δὲ

$$\frac{a^{\mu}}{a^{2\mu}} = \frac{1}{a^{\mu}} \quad (\text{ὅ γὰρ τῶ } \frac{a^{\mu}}{a^{2\mu}} \text{ διαιρεθέντος διὰ κοινῆ διαι.}$$

ρέτε τῶ a^{μ} ἐκ μὲν τῶ ἀριθμητῶ ἀποφέρεται μονάς, ἐκ δὲ τῶ παρονομαστῶ a^{μ} (142)), ἄρα $\frac{1}{a^{\mu}} = \bar{a}^{\mu}$ δῆλον ἄρα ἐν

γένει ὅτι „ποσότης πᾶσα λειπτικὸν δείκτην ἔχουσα ἴσα δύναται κλάσματι, ὃ ἀριθμητὴς μὲν ἢ μονάς, παρονομαστὴς δὲ ἢ αὐτὴ ποσότης τὸν αὐτὸν μὲν δείκτην, ἀλλ' ὑπαρκτικὸν ἔχουσα· ἔτιω $\bar{a}^2 = \frac{1}{a^2}$, $\bar{a}^3 = \frac{1}{a^3}$, $a\beta^{-1} =$

$$= a \times \frac{1}{\beta} = \frac{a}{\beta}.$$

150. γ'. Σαφὲς ἄρα ἐκ τῶν (147, 148) ὅτι

$$\frac{\mu}{a^{\mu}} = \frac{1}{\frac{\mu}{a^{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

151. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰς τέτων δῆλον, ὅτι τύποι ριζικοὶ ἐν σχήματι βαθμῶν παρασταθῆναι δύνανται· ἐξέσαι ἔν ἐντεῦθεν καὶ τὴν παντὸς δυναμὴ ποσότητος ρίζαν ἡντιναῶν θεωρούμενοις διὰ τῶ Νευτωνεῖα τύπου ἐν ἐπιτεύξει αὐτῆς γενέσθαι· πρὸς πλείω δὲ εὐμάρειαν ἐπεξεργασέον ἐς τὸν τύπον ἐπὶ τὸ τελειότερον.

152. Κεῖθω ἔν αὐθις ὁ τύπος· $a^{\mu} + \mu a^{\mu-1}\beta +$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu \times \mu - 1}{1 \times 2} a^{\mu-2} \beta^2 + \frac{\mu \times \mu - 1 + \mu - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{\mu-3} \beta^3 + \\ & \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{\mu-4} \beta^4 \\ & + \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a^{\mu-5} \beta^5 \\ & + \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4 \times \mu - 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} a^{\mu-6} \beta^6 \text{ κτ.} \end{aligned}$$

ἐπειδὴ δὲ $a^{\mu-1} = \frac{a^\mu}{a}$, καὶ $a^{\mu-2} = \frac{a^\mu}{a^2}$ (55), τινέν-

τες τὸ ἴσον ἀντὶ ἴσου ἐν τῷ ἐκτεθέντι τύπῳ, ἔξομεν $a^\mu +$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu a^\mu \beta}{a} + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} \frac{a^\mu \beta^2}{a^2} + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^\mu \beta^3}{a^3} \\ & + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{a^\mu \beta^4}{a^4} + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{a^\mu \beta^5}{a^5} \\ & + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \cdot \mu - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{a^\mu \beta^6}{a^6} \text{ κτ.} \end{aligned}$$

τάς ἐν τῷ τύπῳ ἅπασιν τοῖς ὅροις μετὰ τὸν πρῶτον ὑ-

πάρχει $\frac{a}{\beta}$. ἐν μὲν γὰρ τῷ δευτέρῳ ἔστιν $\frac{a}{\beta}$, ἐν δὲ τῷ

τρίτῳ $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{a^2}{\beta^2}$. ἐν δὲ τῷ τετάρτῳ $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{a}{\beta} \cdot \frac{a}{\beta}$

$= \frac{a^3}{\beta^3}$ κτ. εἰς τὴν κληθεῖς $\frac{a}{\beta} = \Xi$, ὁ τύπος τρέφεται εἰς

$$\begin{aligned} & \text{τὸν } a^\mu + \frac{\mu a^\mu}{1} \Xi + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} a^\mu \Xi^2 + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & a^\mu \Xi^3 + \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^\mu \Xi^4 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \alpha^{\mu} \Xi^5$$

$$\frac{\mu \cdot \mu - 1 \cdot \mu - 2 \cdot \mu - 3 \cdot \mu - 4 \cdot \mu - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \alpha^{\mu} \Xi^6 \quad \kappa\tau.$$

ἐν τῷ ἔν τῷ τύπῳ ὁ α'. ὅρος ἐμπεριέχεται τῷ β'. ὁ δὲ β' τῷ γ' κτ. ὁ γὰρ β' γίνεται ὑπὸ τῆ α' α^μ καὶ τῆ $\frac{\mu}{1} \Xi$.

ὁ δὲ γ'. ἐκ τῆ β'. $\frac{\mu \alpha^{\mu} \Xi}{1}$ καὶ τῆ $\frac{\mu - 1 \Xi}{2}$. ὁ δὲ τέταρτος

ἐκ τῆ γ' καὶ τῆ $\frac{\mu - 2 \Xi}{3}$ κτ., ὡς παντὶ τῷ καὶ μικρὸν ἐ-

πισήσαντι τὴν διάνοιαν δῆλον· ἐὰν ἔν ῥηθῇ ὁ μὲν α'. ὅρος Α, ὁ δὲ β'. Β, ὁ δὲ γ'. Γ, ὁ δὲ δ'. Δ, ὁ δὲ ε'. Ε, ὁ δὲ ς'. ς. κτ., ἔσαι μὲν ὁ α'. ὅρος α^μ = Α· ὁ δὲ β'. ὁ ὑ-

πὸ τῆ πρώτης καὶ τῆ $\frac{\mu \Xi}{1}$ γινόμενος = $\frac{\mu \alpha^{\mu} \Xi}{1} = Β$ · ὁ δὲ

γ'. ὁ ὑπὸ τῆ β'. καὶ τῆ $\frac{\mu - 1 \Xi}{2}$ γινόμενος = $\frac{\mu - 1 \Xi Β}{2}$

= Γ· ὁ δὲ δ' = $\frac{\mu - 2 \Gamma \Xi}{3} = \Delta$ · ὁ δὲ ε' = $\frac{\mu - 3 \Delta \Xi}{4}$

= Ε· ὁ δὲ ς' = $\frac{\mu - 4 Ε \Xi}{5} = \varsigma$ κτ. ὁ δὲ τύπος γενή-

σεται α^μ + $\frac{\mu \alpha^{\mu} \Xi}{1}$ + $\frac{\mu - 1 \beta \Xi}{2}$ + $\frac{\mu - 2 \Gamma \Xi}{3}$ + $\frac{\mu - 3 \Delta \Xi}{4}$

+ $\frac{\mu - 4 Ε \Xi}{5}$ + $\frac{\mu - 5 \varsigma \Xi}{6}$ κτ. ἐν ᾧ ὑπομνησέον ὅτι

$\Xi = \frac{\beta}{\alpha}$, ἡ ὅτι τὰ μεγάλα γράμματα Α, Β, Γ κτ.

ἐμφαίνουσιν αἱ τὴν δύναμιν τῆ ἡγησαμένης ὄρα· τῷτον τὸν τύπον ὅς ἂν ἀκριβῶς τῇ διανοίᾳ ἐντυπώσαιο ἐν πολλοῖς ἐπιγνώσεται τὸ χρήσιμον αὐτῇ· ὑψώσει τε δι' αὐτῆ ποσὰ εἰς βαθμοὺς, ὡς ἡ διὰ τῆ ἀνεπεξεργάστως προεκτεθέντος (133)· ἡ ἀπὸ ποσῶν δοθέντων ῥίζας ἐξάξεται, ὡς ἐπὶ τῆ ἐξῆς ὑποδείγματος δῆλον ἔσαι.

153. Ἐξω ἔν ἐξαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆ ἀριθμῷ 2, εἴτ' ἔν εὐρεῖν τὴν δύναμιν τῆ $\sqrt{2}$ · ἡ δὴ διη-
ρήθω ὁ 2 εἰς 1 + 1· ἔκ' ἔσαι $\sqrt{1+1} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$
(149)· ἐν ταύτῃ τοίνυν τῇ περιπτώσει ἔσαι $\mu = \frac{1}{2}$ ἡ $\Xi =$
 $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$ · ὁ δὲ τύπος ὧδε μερικευθήσεται.

$$+ \alpha^{\mu} = 1^{\frac{1}{2}} = + 1 = A$$

$$+ \frac{\mu}{1} = A\Xi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} = B$$

$$+ \frac{\mu - 1 B\Xi}{2} = - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = - \frac{1}{8} = \Gamma$$

$$+ \frac{\mu - 2 \Gamma\Xi}{3} = - \frac{1}{2} \cdot - \frac{1}{8} \cdot 1 = + \frac{1}{16} = \Delta$$

$$+ \frac{\mu - 3 \Delta\Xi}{4} = - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 1 = - \frac{1}{128} = E$$

$$+ \frac{\mu - 4 E\Xi}{5} = - \frac{1}{16} \cdot - \frac{1}{128} \cdot 1 = \frac{1}{2048} = \varsigma$$

$$+ \frac{\mu - 5 \varsigma\Xi}{6} = - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2048} \cdot 1 = - \frac{1}{8192} = Z. \kappa\tau.$$

ὥς ἐῖ $\sqrt[2]{2}$ εἴη ἂν $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{2048}$ κτ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι τῷ τύπῳ προαγα-
μένῳ περαιτέρω, δυνατόν ἀπείρους ἐστὶ προσεγγεῖν ὅρους
ἀμφοτέρων τὸν μὲν ὑπάρχοντα, τὸν δὲ λείποντα· εἰν ὅν
χωρὶς συναφθῶσιν οἱ ὑπαρκτικοὶ τῶν ὅρων, εἴτα οἱ λει-
πτικοί, καὶ ἔτσι ἐκείνων ἀφαιρεθῶσι, προκύψει $1 + \frac{1}{2^{15}}$
 $=$ περίπου 1,405, ρίζα τετραγωνικὴ τῷ 2 τῆς ἀληθούς
ἅλως ἔσα ἐγγύς.

154. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰκανὰ δὲ ταῦτα περὶ τύπου τῷ
τύπῳ τοῖς γε πρωτοπείροις· ἐκ τούτων δὲ καὶ ὅπως δι' αὐτῶν
ρίζαι καθυπερτέρων βαθμῶν ἐξαχθῆναι δύνανται, καὶ ἐπὶ
βαθμῶς λειπτικῆς ποσὰ δοθέντα ἐξαίρονται, ὡς $(\alpha + \beta) -$

$$= \frac{1}{(\alpha + \beta)^2}, \text{ καὶ λειπτικῶν βαθμῶν αἱ ρίζαι θηρεύ-}$$

$$\text{ονται, οἷον } (\alpha + \beta)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta)^3}} \quad (150), \text{ δυ-}$$

νατὸν ἐκμαθεῖν· περὶ μέντοι τῆς καθυπερτέρων βαθμῶν
ρίζων ἐξαγωγῆς, καὶ τῆς ὡς οἶόν τε ταῖς ἀληθεσί προσ-
εγγίσεως ἀποδώσωμεν μέθοδον γενικωτέραν μετὰ τὸ
περὶ λογαρίθμων διαλαβεῖν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Λογισμὸς τῶν βαθμῶν διὰ τῶν κατ'
αὐτὰς δεικτῶν.

155. Ἐπὶ παντὸς μονωνύμου ὁ τῶν δεικτῶν κανὼν

ἐστὶν ὅτος: ἐπὶ βαθμῶν σχηματισμῷ πολλαπλασιασέον τὸν δείκτην τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸν δείκτην τοῦ βαθμῆ (82): ἐπὶ ρίζων ἐξαγωγῇ διαιρετέον τὸν δείκτην διὰ τῆ ἐπισήμης (122): ἐπὶ πολλαπλασιασμῷ μονωνύμου διὰ μονωνύμου, ληπτέον τὸ ἄθροισμα τῶν δεικτῶν τῶν αὐ. τῶν γραμμάτων (40): ἐπὶ δὲ διαιρέσει ληπτέον τὴν μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰν (55). ἐντεῦθεν ἄρα ὑποσυνάψωμεν τὰ ἐφεξῆς.

156. Α'. Ο' παντὸς ποσὲ δείκτης δύναται εἶναι = 0, ἢ ἀριθμὸς ὁσιστὴν ὑπαρκτικός, ἢ λειπτικός, ὀλοχρεῖς ἢ κλασματώδης· κληθέντος ἔν πρὸς τὸ δοκῆν μ μὲν δείκ. π παντὸς, ν δὲ ἐπισήμης παντὸς, ἀμφοῖν ὀλοχρεῶν τε καὶ

$$\text{ὑπαρκτικῶν, ἔξομεν } \frac{a^{\mu}}{a^{\mu}} = a^0 \quad (59) \quad \frac{a^{2\mu}}{a^{\mu}} = a^{2\mu - \mu} =$$

$$a^{\mu}. \quad \frac{a^{\mu}}{a^{3\mu}} = a^{\mu - 3\mu} = a^{-2\mu}. \quad \sqrt{a^{\mu}} = a^{\frac{\mu}{2}} \quad (122) \text{ κτ.}$$

157. Β'. Ἐντεῦθεν ἄρα εὐμαρῶς γινώσκωμεν, ὅπως ἐν ἄλλῳ τύπῳ μεταποιητέον εἶναι τὸν παντὸς βαθμῆ δείκτην. ἀναχθήσεται γὰρ a^0 εἰς τὸν τύπον a^{μ} , πολλαπλασιαζομένης a^0 ἐπὶ a^{μ} , εἴγε $a^0 \times a^{\mu} = a^0 + \mu = a^{\mu}$ τὸ δὲ

$$a^{\mu} \text{ γενήσεται } a^{-\mu}, \text{ διαιρεθὲν διὰ } a^{2\mu}. \text{ καὶ γὰρ } \frac{a^{\mu}}{a^{2\mu}} =$$

$$a^{\mu - 2\mu} = a^{-\mu}. \text{ τὸναντίον δὲ τὸ } a^{-\mu} \text{ τραπήσεται εἰς}$$

$$a^{\mu} \text{ διὰ } a^{-\mu} \times a^{2\mu} = a^{-\mu + 2\mu} = a^{\mu} \quad (155). \text{ τραπή-$$

$$\text{σεται δὲ } a^{\mu} \text{ ἐπὶ τὸν τύπον } a^{\frac{\mu\nu}{\pi}}, \text{ εἰάν } a^{\mu} \text{ ὑψωθῇ εἰς}$$

βαθμὸν $\frac{\nu}{\pi}$ (82). τέναντίον δὲ $\sqrt[\frac{\nu}{\pi}]{\frac{\mu\nu}{\pi}} = a^{\mu}$ (122).

158. Οὐκ ἔν ἵνα μὲν ἀφανισθῇ τὸ ῥιζικὸν σύμβολον,

διαιρετέον τὸν δείκτην διὰ τῆ ἐπισήμου· $\sqrt[\frac{\mu}{\nu}]{a^{\mu}} = a$ ἵνα
δ' αὖ προτεθῇ τῇ ποσὶ τὸ ῥιζικὸν σύμβολον, πολλαπλα-

σέον τὸν δείκτην ἐπὶ τὸ ἐπίσημον $a^{\mu} = \sqrt[\frac{\nu}{\mu}]{a^{\mu\nu}}$

159. Γ'. Εἴξεαι ὑπαρκτικὸν δείκτην ἀντὶ λειπτι-
κῆ ἐκλαβεῖν, καὶ τὰνάπαλιν, μηδισιῦν τῆς κατὰ τὸν
βαθμὸν δυνάμεως μεταποιημένης· καὶ γὰρ ἀντὶ a^{-3} εἴξε-
σαι λαβεῖν $\frac{1}{a^3}$, ἐπεὶπερ $\frac{1}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = a^{0-3} = a^{-3}$ (55).

ἄρα „πᾶσα ποσότης, λειπτικὸν δείκτην ἔχουσα, ὕδεν ἑ-
τερόν ἐσιν, εἰμὴ ἡ μονὰς διηρημένη διὰ τῆς αὐτῆς πο-
σότητος τὸν αὐτὸν δείκτην ὑπάρχοντα ἐχέσης“ (149).

160. Δ'. „Πᾶσα ποσότης ὑπαρκτικὸν μὲν ἔχου-
σα δείκτην, εἰάν ὑφωθῇ εἰς βαθμὸν λειπτικὸν, ἀποσθί-
σεται κλάσμα τῆς μονάδος ἑλασσον, λειπτικὸν δὲ

ἡδολοχερής· καὶ γὰρ $\sqrt[\mu]{a^{-\nu}} = a^{-\frac{\nu}{\mu}}$ (82) = $\frac{1}{a^{\frac{\nu}{\mu}}}$

(159) καὶ αὖ $\sqrt[\mu]{a^{-\nu}} = a^{-\mu \times \frac{\nu}{\mu}} = a^{-\mu\nu}$ περὶ δὲ
τῶν ταιῶνδε διαφορῶν τύπων ἄλλis εἴρηται καὶν (148 κτ.).

161. Ε'. Η' πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν διαφορῶν
βαθμῶν διουχερείας ἀπάσης ἐξήρηνται· ἔσω γὰρ προσθεῖ-
ναι $2a^2$ τῷ $3a^2$ · ἔσαι ἔν ἄθροισμα $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$, καὶ $3a^2$
 χ^3 τῷ $5a^2 \chi^3$ · ἔσαι ἔν $3a^2 \chi^3 + 5a^2 \chi^3 = 8a^2 + 2\chi^3$ · καὶ

$+ 4\chi^2 \nu^2 \tau\omega - 2\chi^3 \nu^2 \cdot$ ἐκὼν ἔσαι $4\chi^3 \nu^2 - 2\chi^3 \nu^2 = 2\chi^3 \nu^2$. τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν $\alpha^{-3}\mu$ καὶ α^{μ} ἔσαι $\alpha^{-3}\mu + \alpha^{\mu} (31)$. τὸ δὲ τῶν $\chi^{\nu} \alpha^{\mu}$, ν^{ρ} ἔσαι $\chi^{\nu} \alpha^{\mu} + \nu^{\rho}$. ἔσω ἀφελεῖν ἀπὸ $4\alpha^2$ τὸ $2\alpha^2$. ἔσαι ἐν ἡ διαφορὰ $4\alpha^2 - 2\alpha^2 = 2\alpha^2$. ἡ δὲ τῶν $4\alpha \chi^{\mu}$, $\alpha^{\nu} \chi^{\mu}$ διαφορὰ ἔσαι $4\alpha^{\nu} \chi^{\mu} - \alpha^{\nu} \chi^{\mu} = 3\alpha^{\nu} \chi^{\mu}$. ὡσαύτως τῷ χ^3 καὶ ν^3 διαφορὰ ἔσαι $\chi^3 - \nu^3$, καὶ ἡ τῷ χ^{ν} πρὸς τὸ $\nu^{\mu} + \rho$, ἔσαι $\chi^{\nu} - \nu^{\mu} + (32)$.

162. ε'. Εἰν δὲ τῷ πολλαπλασιάζειν αὐτὲς, εἰ μὲν ὅ, τε πολλαπλασιασέος καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς τὰ αὐτὰ ἔχωσι γράμματα, συναπτέον αὐτῶν τὴς δείκτας· ἔτως $\alpha^2 \times \alpha^3 = \alpha^2 + 3 = \alpha^5 (11)$ καὶ $\chi^2 \nu^2 \times \chi^3 \nu^3 = \chi^2 + 3 \nu^2 + 3 = \chi^5 \nu^5$. καὶ $\alpha^{\pi} \times \alpha^{\rho} = \alpha^{\pi} + \rho$ καὶ $\nu^{\rho} \chi^{\nu} \times \nu^{\sigma} \chi^{\tau} = \nu^{\rho} + \sigma \chi^{\nu} + \tau$. ἔτι δὲ $\alpha^{-1} \times \alpha^2 = \frac{1}{\alpha} \times \alpha^2$

$$(159) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\alpha^2}{1} = \alpha^1 \text{ καὶ } \alpha^{-1} \times \alpha^3 = 1, \text{ καὶ } \alpha^{\nu} \times$$

$$\alpha^{-\mu} = \alpha^{\nu} \times \frac{1}{\alpha^{\mu}} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} \text{ κτ. εἰ δὲ διαφορὰ, γραπτέον}$$

κατὰ συνέχειαν τὴς βαθμὸς μηδενὸς μεσολαβήντος συμ-
βόλῃ (11). ἔτως $\alpha^2 \times \beta^2 = \alpha^2 \beta^2$, καὶ $\alpha^{\mu} = \gamma^{\nu} \times \alpha^{\mu} \gamma^{\nu}$,
καὶ $\alpha \beta \gamma^{\nu-1} \times \kappa^{\pi} + \rho = \alpha \beta \gamma^{\nu-1} \kappa^{\pi} + \rho$ κτ.

163. Ζ'. Διαιρύντας δ' αὐτὲς, εἰ μὲν τὰ αὐτὰ ἔχωσι γράμματα, ἀφαιρετέον τὸν δείκτῃν τῷ διαιρύντος ἀπὸ τῷ τῷ διαιρεμένῃ (55). ἐκὼν $\alpha^4 : \alpha^2 = \alpha^4 - 2 = \alpha^2$ καὶ $\alpha^{\mu} :$

$$\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \text{ καὶ } \alpha^{-4} : \alpha^4 = \frac{1}{\alpha^4} : \frac{\alpha^4}{1} = \frac{1}{\alpha^4} \times \frac{1}{\alpha^4} =$$

$$\frac{1}{\alpha^8}, \text{ καὶ } \alpha^{-\mu} : \alpha^{\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} : \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} \times \frac{\alpha^{\mu}}{1} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = 1.$$

ἐὰν δὲ διάφορα ἔχωσι γράμματα, παρίστανται ἥτοι ἐν
 οὐράτι κλάσματος, ἢ τῷ διαιρετέῳ πρῶτον γραφέντος,
 εἰς' ἐξῆς τῷ συμβόλῳ (:) μετὰ ταῦτα τίθεται κατ'
 ἀκολουθίαν ὁ διαιρετής· οἷον διαιρῶντες α' διὰ β' γράφο-

μεν ἥτοι $\frac{\alpha'}{\beta'}$ ἢ α' : β' · ὡσαύτως α'—γ : δμ—κ καὶ

$\frac{\alpha\gamma}{\delta\mu-\kappa}$ ἑκάτερον ἐμφαίνει τὴν τῷ α'—γ διὰ δμ—κ διαί-

ρεσιν.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τέτων δῆλον ὅτι ὅπως τὰς
 τῶν κλασματικῶν βαθμῶν πράξεις μετελευσόμεθα, εἴτ'
 ἐν τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν πολλαπλασιασμόν
 καὶ τὴν διάφασιν· σημειωτέον μόνον, ὡς ἐν τῷ πολλα-
 πλασιασμῷ, καὶ ἐν τῇ διαιρέσει, ἐνθα προθέσεως τῆς
 τῶν δεικτῶν, καὶ ἀφαιρέσεως χρῆζομεν, ἀναγκαῖον τὴς
 τῶν βαθμῶν κλασματικῆς δείκτας ἐπὶ κοινὸν ἀνάγειν ὄνομα,
 εἰθ' ἔτω τὰ τῆς πράξεως περαινέιν· ἔκων τὸ μὲν ἄθροισ-

μα τῶν $\kappa \frac{\nu}{\mu}$, $\alpha \frac{\kappa}{\lambda}$ ἔσαι $\alpha \frac{\nu}{\mu} + \alpha \frac{\kappa}{\lambda}$, ἢ δ' αὐτῶν δια-

φορὰ $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} - \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$. τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον $\alpha^{\frac{\nu}{\mu} + \frac{\kappa}{\lambda}}$

$= \alpha \frac{\nu\lambda + \kappa\lambda}{\mu\lambda}$ · τὸ δὲ προκύπτον πηλίκον διαιρέσει τῆς ἐτέ-

ρας διὰ τῆς ἐτέρας, $\alpha \frac{\nu\lambda - \kappa\lambda}{\mu\lambda}$ κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Λογισμὸς τῶν ῥιζικῶν.

165. Αἱ ποσότητες, ὧν προκεχάραται τὸ σύμβολον $\sqrt{}$, ῥιζικαὶ ὀνομάζονται· καὶ τὸ μὲν ἐπὶ τέττε τῶ συμβόλῳ ποσὸν ἐπίσημον ἀκεί, τὸ δ' ἐξ ἀριστερῶν καὶ τῶ $\sqrt{}$, συνεργός, τὸ δ' ἐν τοῖς δεξιῶς, ποσὸν ὑπόρριζον.

Ποσότης πᾶσα, ὁλοχρεῇ μὲν ἐπιγεγραμμένη δείκτην, αἶ ἐς βαθμὸς, κλασματώδης δέ, αἶπερ ὑπάρχει ῥιζικὴν, ἢ ἐπίσημον μὲν ὁ τῶ κλάσματος παρονομαζῆς, ὑπόρριζος δὲ αὐτὴ ἢ ποσότης εἰς βαθμὸν ὑψυμένη ἐμφαινόμενον ὑπὸ τῶ κατὰ τὸ κλάσμα ἀριθμητῶ· ἔως α' εἰς

ὁ κύβος τῶ α' α' $\sqrt[3]{}$ εἰς $\sqrt[3]{}/a^2$ (122)· ἐπεὶ τοῖνυν τάναντία ἀποτελεῖ τῶ ἐπισήμῳ ὁ δείκτης, ἐκ τέττε ἄρα, ἢ μὲν τὴν ἐπίσημον ἢ ὁλοχρεῆς, ἢ ἐκτιθεμένη ποσότης εἶναι ῥίζα, βαθμὸς δέ, εἰς τὴν ἐναντίον ὑπάρχει κλασματώδης· καὶ

τοῖνυν $\sqrt[3]{}/a$ δηλοῖ τὴν πέμπτην τοῦ α' ῥίζαν $\sqrt[3]{}/a$ ἐμφαίνει τὸν πέμπτον τῶ α' βαθμὸν, εἴτ' ἐν α'· τῶ ὄντι γὰρ

$\sqrt[3]{}/a$ ἰσῆται τῶ α', ἢ ὁ δείκτης 1 ὀφείλει διαιρεθῆναι διὰ $\frac{1}{3}$ (122) = $a^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}$ (205) = α'.

166. Μετασχηματισμὸς καλεῖται διάφορός τις μεταποίησις ἐπὶ τῶν ῥιζικῶν κατὰ χρεῖαν γινωμένη

δύχατινός τροπῆς τῆς κατ' αὐτὰ δυνάμεως· τοιοῖς δὲ χρη-
σόμεθα ἔχομένως.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Χρησόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς τῷ ν εἰς
δήλωσιν παντός δείκτη τε καὶ ἐπισήμου παντός βαθμῆ καὶ
ρίζης.

167. Ἰνὰ πᾶν ριζικὸν τὸ $\beta \sqrt[\nu]{\gamma}$ τῷ πρὸ αὐτοῦ συ-
νεργῶ β ἀπαλλάξωμεν, ἀρτέον εἰς τὸν ν βαθμὸν τὸ β ,
 β^ν , καὶ τακτέον αὐτὸ ὑπὸ τὸ ριζικὸν σύμβολον ἔτω
 $\sqrt[\nu]{\beta^\nu \gamma}$. καὶ γὰρ $\beta \sqrt[\nu]{\gamma} = \beta \times \sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\nu]{\beta^\nu} \times \sqrt[\nu]{\gamma}$,
(158), $= \sqrt[\nu]{\beta^\nu \gamma}$. τὴν ἀντίον ἄρα, ἵνα πρὸ τῶν δε-
ξιῶν τῷ συμβόλῳ τάξωμεν ἅπαν ποσὸν α , ὁ μετὰ τινος
ἄλλου ποσῷ συνίστησιν ὑπόρριζον γινόμενον, ὡς ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\alpha \beta}$,
ἐξακτέον τῷ α τὴν ν ρίζαν, ποιῶντας $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, καὶ ταύτην τῷ
ριζικῷ προτακτέον συμβόλῳ ἔτως $\alpha^{\frac{1}{\nu}} \sqrt[\nu]{\beta}$

168. Ἰνὰ ἅπαν ἐπίσημον μεταποιήσωμεν τὸ ν φέρε
ἐπὶ τῷ $\sqrt[\nu]{\beta \gamma}$, πολλαπλασιασέον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν ν
τότε ἐπίσημον, καὶ τὸν δείκτην ἔτω $\sqrt[\nu\pi]{\beta^1 \times \pi \gamma^1 \times \pi} =$
 $\sqrt[\nu\pi]{\beta^\pi \gamma^\pi}$. εὐδὴλον γὰρ ὅτι $\sqrt[\nu\pi]{\beta^\pi \gamma^\pi} = \beta^{\frac{\pi}{\nu\pi}} \gamma^{\frac{\pi}{\nu\pi}} = \beta^{\frac{1}{\nu}}$
 $\gamma^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\beta \gamma}$ (167). ἵνα δὲ μεταποιήσωμεν τὸ τῷ $\frac{\beta}{\gamma}$
 $\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\gamma}}$ ἐπίσημον ν , γραπτέον $\frac{\beta}{\gamma} \sqrt[\nu\pi]{\frac{\delta \pi}{\pi}}$. ἰν' ἄρα ἐπὶ τὸ
αὐτὸ ἐπίσημον δίδωται ριζικὰ τὰ $\alpha \sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\gamma}}$ ἀγά-

γῶμεν, πολλαπλασιασέον τὸ ἐπίσημον τῆ δευτέρου π ἐπὶ τὸ τῆ πρώτου ν, ὡσαύτως καὶ τὸν δείκτην τῆ δευτέρου ὑ.

πορρίζου· καὶ τὰν ἀπαλιν· ἀντὶ ἔχει $\sqrt[\pi]{\frac{\delta}{\zeta}}$ γραπτέον $\sqrt[\pi]{\frac{\delta^{\pi \nu}}{\zeta^{\pi \nu}}}$
 $= \sqrt[\pi]{\frac{\delta^{\nu}}{\zeta^{\nu}}}$ · ἀντὶ δὲ αἱ $\sqrt[\nu]{\beta}$, γραπτέον αἱ $\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}}$ · ἡ δ' ἕκασ-
 τέρου τῶν ῥιζικῶν δυνάμεις τῆτον τὸν τρόπον ἐμεταποιηθήσε-
 ται· πολλαπλασιαζομένων γὰρ τῆ δείκτη καὶ τῆ ἐπισήμου
 ἐπὶ τὸ αὐτὸ πρῶτον, διὰ δύο ἐναντίων πράξεων, τὸ πρῶ-
 τόν ἐπὶ τῆς αὐτῆς διατηρεῖται δυνάμεως (123).

169. Ἐντεῦθεν ἄρα, ἐφ' ᾧ πλεῖον ῥιζικὰ τῆ αὐτῆς
 ἐπισήμου ποιήσωμεν τὰ $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\pi]{\alpha}$, $\sqrt[\delta]{\alpha}$, πολλαπλα-
 σιασέον ἕκαστον ἐπίσημον ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄλ-
 λων ἐπισήμων, καὶ τὸ ὑπόρριζον ἀρτέον εἰς βᾶλμὸν, ὃ
 δείκτης ἂν εἴη τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἔσονται ἄρα ἕτω

$$\sqrt[\nu \pi \delta]{\alpha^{\pi \delta}}, \sqrt[\nu \pi \delta]{\beta^{\pi \delta}}, \sqrt[\nu \pi \delta]{\delta^{\pi \delta}}$$

170. Ἴνα πρῶτον τι τὸ μ ὑπόρριζον ποιήσωμεν τῷ

$\sqrt[\nu]{\beta}$, πολλαπλασέον μὲν διὰ μ^ν τὸ ὑπόρριζον β, διαι-
 ρετέον δὲ διὰ μ τὸν τῆ ῥιζικῆς συνεργόν· γενήσεται τοί-
 νυν ἕτω

$$\frac{1}{\mu} \sqrt[\nu]{\beta \mu^{\nu}} \cdot \text{ἐστὶ γὰρ } \frac{1}{\mu} \sqrt[\nu]{\beta \mu^{\nu}} = \frac{1}{\mu} \times \sqrt[\nu]{\beta \mu^{\nu}}$$

$$\sqrt[\nu]{\beta \mu^{\nu}} = \frac{\beta^{\frac{1}{\nu}} \mu^{\frac{\nu}{\nu}}}{\mu} \quad (165) = \frac{\beta^{\frac{1}{\nu}} \mu}{\mu} = \beta^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\beta}$$

κατὰ τοίνυν τὴν χρείαν οἷδε οἱ μεταχρηματισμοὶ γενήσονται
 ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς πράξεων κατὰ τὸν δὲ τὸν τρόπον.

171. Ἡ τε πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαιρέσις τῶν ῥιζικῶν

ἀπολύτως, ὡς εἶθις, ἐκτελῶνται· ἔτω τὸ ἄθροισμα
 τῶ $\alpha \sqrt{\beta}$ καὶ $\sqrt{\gamma}$ ἔσιν $\alpha \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$, ἡ δὲ τῶ
 $\sqrt{\alpha}$ πρὸς $\sqrt{\beta}$ διαφορὰ ἔστι $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$. εἰδὲ ἀπαντῶ-
 εν ριζικὰ τὸ αὐτότε ἐπίσημον καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόρριζον ἔχον-
 τα, ἀνακτέον τὴν ὅρην ὡς ὁμοίους, καθάπερ ἄλλοι κε-
 κανύνισαι· ἔχοντες φέρε $2 \sqrt{\beta} + 4 \sqrt{\beta}$ γράφομεν $+ 6$
 $\sqrt{\beta}$. ἐν γένει δὲ ἔχοντες $\alpha \sqrt{\beta} + \gamma \sqrt{\beta}$, δυνάμε-
 θα γράφειν $\alpha + \gamma \sqrt{\beta}$. ὅπερ καθ' ἑαυτὸ εὐδὴλον.

172. Ἰνα ριζικὸν ἅπαν τὸ $\sqrt{\alpha}$ εἴῃ ὁλοχερὲς τὸ
 μ πολλαπλασιάσωμεν, ἡ καὶ τέναντίον, πολλαπλασια-
 ζέον ἐπὶ τὸ ὁλοχερὲς μ τὸν τῶ ριζικῷ συνεργόν· $= \mu \times 1$
 $\sqrt{\alpha} = \mu \sqrt{\alpha}$. ἐπὶ δὲ πολλαπλασιασμῷ ριζικῷ ἐπὶ ριζι-
 κῷ, ἀνακτέον ταῦτα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον (168) καὶ
 πολλαπλασιαζέον θάτερον μὲν τὸν συνεργὸν ἐπὶ τὸν θά-
 τερον, θάτερον δὲ ὑπόρριζον ἐπὶ θάτερον· ἔτως ἐν 2
 $\sqrt[3]{\beta^3} \times 3 \sqrt[3]{\beta^3} = 2 \times 3 \sqrt[3]{\beta^3 \times \beta^3} = 6 \sqrt[3]{\beta^6} =$
 $6\beta^2$. καὶ γὰρ $1 \sqrt[3]{\beta^3} = \beta$. ἄρα $2 \sqrt[3]{\beta^3} = 2\beta$, καὶ 3
 $\sqrt[3]{\beta^3} = 3\beta$. ἄρα $2 \sqrt[3]{\beta^3} \times 3 \sqrt[3]{\beta^3} = 2\beta \times 3\beta =$
 $6\beta^2$.

173. Ἐπὶ δὲ διαιρέσει τῶν ριζικῶν, τῶ πολλαπλα-
 σιασμῷ τὴν ἐναντίαν τῇ διαιρέσει βαίνοντος, ἀναχθέντα,
 εἰ δέοι, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον διαιρετέον ἐνταῦθα διὰ
 θάτερον θάτερον, τὰ ἐκεῖθι πολλαπλασιασθέντα· ἔτως

ἔν τὸ πηλίκον τῷ $\sqrt[n]{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ τῷ ὁλοκληρῷ μ ,
 ἔσαι $= \frac{\tau}{\mu} \sqrt[n]{\beta}$. τὸ δὲ πηλίκον τῷ $\alpha \sqrt[n]{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ
 $\mu \sqrt[n]{\delta}$, ἔσαι $= \frac{\alpha}{\mu} \sqrt[n]{\frac{\beta}{\delta}}$.

174. Ἰνα πᾶν ρίζικόν τὸ $\alpha \sqrt[n]{\beta}^{\pi}$ ἐπὶ πάντα βα-
 θμὸν τὸν μ ὑψώσωμεν, πολλαπλασιασέον ἐπὶ τὸν τῷ βα-
 θμῷ δείκτην μ τὸν τῷ κατὰ τὸν ρίζικὸν συνεργῶ α δει-
 κτην, καὶ τὸν τῆς ὑπορρίζε ποσότητος, ἔτως, $\alpha^{\mu} \times \mu$
 $\sqrt[n]{\beta}^{\pi\mu} = \alpha^{\mu} \sqrt[n]{\beta}^{\pi\mu}$. εὐδὴλον γὰρ, ὅτι, φέρε, ὁ τῷ α
 $\sqrt[n]{\beta}^{\pi}$ κύβος ἐστὶν $= \alpha \sqrt[n]{\beta}^{\pi} \times \alpha \sqrt[n]{\beta}^{\pi} \times \alpha \sqrt[n]{\beta}^{\pi} =$
 $\alpha^3 \sqrt[n]{\beta}^{3\pi}$ (172). τὸναντίον ἄρα πρὸς ἐξαγωγήν α.
 πάσης ρίζης τῆς n ἀπὸ ρίζικῆ τῷ $\alpha \sqrt[n]{\beta}$ διαιρετέον διὰ n
 τὸν τε τῷ α συνεργῶ καὶ τὸν τῷ β , ὑπορρίζε ποσῶ, τὲς
 δείκτας, ἔτως, $\alpha^{\frac{\tau}{n}} \sqrt[n]{\beta^{\frac{\tau}{n}}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ποσῶν ἐπιπλάσων, ἣ κατ' ἐ-
 πίνοιαν.

175. Ἐστω $\sqrt{-a^2}$. αὕτη ἐν ἡ ρίζα προφανῶς ἐκ-
 ἔστιν ἔτε $+$ α , ἔτε $- \alpha$. καὶ γὰρ $\alpha \times \alpha = a^2$, καὶ $- \alpha$

$x - a = a^2$. ἄρα $\sqrt{-a^2}$ ἔστι ρίζα κατ' ἐπίνοιαν, ἢ ποσὸν ἐπίπλαστον· ἐν γένει δὲ ἡ παντὸς λειπτικῆ ποσὴ ρίζα, ἀρτιαριθμὸς εὐμοιρῶσα ἐπισήμῃ, ἔστι ποσὸν ἐπίπλαστον (84). νοητέον δὲ ταῦτόν κατὰ πάσης ρίζης, ἥς τὸ μὲν ἐπίσημον ἔστιν ἄρτιον, ἡ δὲ ποσότης λειπτικῆ, ὅ

δ' ἐπ' αὐτῆς δείκνυται ὅστις ἐν· ἔτω $\sqrt{-a}$, ἢ $\sqrt{-a^4}$ κατ. εἰς ποσότητες κατ' ἐπίνοιαν· πολλή τις ἔν ἑναι. ὧτος ἡ διαφορὰ τῆς λειπτικῆς ποσότητος, τῆς τε ἀνυπάρκτες καὶ τῆς ἀρρήτε, περὶ ἥς ὕστερον· ἡ μὲν γὰρ λειπτικὴ ποσότης $-a^2$ προδήλως ἐστὶν ἔχουσα δυνατῶς· ἔσω γὰρ $a=2$, $-a^2$ ἔσται -4 , κατὰ τὰς ἀληθῆς τῆ πρὸς τῷ μηδέν ἔχειν καὶ 4 ὀφείλωντος· τῆς δ' ἀρρήτε ποσότητος ἐπ' ἀπειρον τῇ δυνάμει προσπελάζειν δυνάμεθα, ἐξευρίσκοντες τῇ τῷ λογισμῷ ἀκριβεῖα ἰκαίωτάτα αὐτῆς μέρη (144). τὰ γάρτοι ἐπίπλαστα ποσά, οἷον τὸ $\sqrt{-a^4}$, ἀδυνατᾷ εἰς πάντα, καὶ γέλωτ' αὐτὶς ὀφλήσειεν, εἰ διὰ προσεγγίσεως τὴν τοιαύτη ποσὴν δυνάμιν ἀποπειρώτο ἐκτιμῆσαι· ἐκ τῶν τοιαύτων μέντοι ἀνυπαρκτέων ποσῶν διὰ τῶν τῷ λογισμῷ πράξεων πραγματικὰ ποσά, τετοιοῦ δὲ τὸ θαυμάσιον, ἀναφύονται, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς ὀφόμεθα.

176. Αἰεὶ τοίνυν δυνάμεθα ζητεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ποσοτήτων $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$, καὶ τὴν μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰν, καὶ ἔτι τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, καὶ μὴν καὶ τὸ διαιρέσει δι' ἀλλήλων προῖον πηλίκον· ἰδωμεν ἔν καὶ ἐπ' αὐτῶν τὰς τελεμένας τέσσαρας ταύτας πράξεις.

177. Ἐξω ἔν συνάψαι τὰς $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-\gamma}$, $-\sqrt{-\delta}$. ἕκαστὸν τῶν συμβόλων αὐτοῖς τῶν τῆς συνάψεως προταττομένων ὑδενὶ σὺν ἔργῳ συνάπτονται·

ἔστι δὴ τὸ τῶν προτεθεισῶν ἄθροισμα ἔσται $\sqrt{-a} + \sqrt{-\beta}$,
 $+ \sqrt{-\gamma} - \sqrt{-\delta}$. ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $-\sqrt{-\epsilon}$,
 $3\sqrt{-\beta^2}$, $\gamma\sqrt{-\pi^4}$, ἔσται $\gamma\sqrt{-\pi^4} + 3\sqrt{-\beta^2} -$
 $\sqrt{-\epsilon}$. ἡ δέ γε μεταξὺ δυεῖν ἐπιπλάσεων ποσότητων δια-
 φορά, φέρε τῆς $\sqrt{-a}$, ἔστι $\sqrt{-\gamma}$. ἔσται $\sqrt{-a} - \sqrt{-\gamma}$
 κτ. (31, 32).

178. Εἰς τὸν αὐτῶν πολλαπλασιασμὸν, ἐπεὶ $\sqrt{a}$
 $\times \sqrt{a} = a$ (172), δῆλον ὅτι, ῥιζικὸν ποσὸν ἐπὶ ῥιζι-
 κὸν ὁμοβάθμιον πολλαπλασιάζοντες, τὴν ὑπόρριζον ἀποφε-
 ρόμεθα ποσότητα μεθ' ἧς εἶχε συμβόλου ὑποκειμένη τῷ ῥι-
 ζικῷ. ἔκῃν ἔστι $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$. ἐπεὶ δὲ ἔστι πρὸ
 τῆς ῥιζικῆς τίθεται σύμβολον τὸ +, ἢ τὸ -, ταύτηται
 ἔσται ποσότης ἡ μὲν $-\sqrt{-a}$ ἄλλη δὲ τυχὸν $+\sqrt{-a}$.
 ἐπεὶ δὲ πρὸ τῆς ῥιζικῆς συνεργὸς προτίθεται, ὡς $a\sqrt{-\gamma}$,
 ἀπόντος τέττε νοητέον ἐς τὴν μονάδα. Ταῦτ' ἄρα $\sqrt{-a} =$
 $1\sqrt{-a}$, ἔστι $-\sqrt{-a} = -1\sqrt{-a}$. εἰν ἔν προκείμεναι
 πολλαπλασιάσαι $+1\sqrt{-a}$ ἐπὶ $+1\sqrt{-a}$, ἔσται κκ.
 τὰ τὴς ἀποδοθέντας κανόνος $+1\sqrt{-a} \times +1\sqrt{-a} =$
 $+1 \times -a = -a$ (37), ἔστι $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} =$
 $-1\sqrt{-a} \times -1\sqrt{-a} = +1 \times -a = -a$.
 $\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a} = -1\sqrt{-a} \times +1\sqrt{-a} =$
 $-1 \times -a = a$. δῆλον ἄρα ὡς ἐξ ἐπιπλάσεων
 ποσότητων πολλαπλασιασμῷ παραχθείη ἂν ποσότης λο-
 γικὴ ἔστι πραγματικὴ.

179. Εἰν δὲ ποσότητων ἐπιπλάσεων αἱ ὑπόρριζοι
 μὴ ταυτίζονται ὡς $\sqrt{-a}$, ἔστι $\sqrt{-\beta}$, τὰ γινόμενα πορι-
 σθήσονται κατὰ τὰ ἐξῆς ὑποδείγματα. ἔσω πολλα-
 πλασιάσαι

$$\begin{array}{r} a\sqrt{-a} \qquad \qquad \qquad \text{ἐπὶ} \\ -\sqrt{-\beta} \\ \hline -a.\sqrt{-a} \times \sqrt{-\beta} \end{array}$$

ἐκῃν γενήσεται

ἐκ δὲ $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta}$ ἔσαι $\sqrt{-\beta\beta}$ · ἐπεὶ γὰρ $\sqrt{\beta} = \beta^{\frac{1}{2}}$
 (124) ἄρα $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{-\beta} \times \beta^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}} \sqrt{-\beta}$, καὶ
 τὸ συνεργεῖ τετραγωνιοθέντος ($\beta^{\frac{1}{2}} \times \beta^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \beta^1$
 $= \beta$), καὶ πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν ὑπόρριζον (167)
 ἔσαι $\sqrt{-\beta\beta}$

Τ' ποδείγματα πολλαπλασιασμῶ

ἔσω πολλαπλασιάσαι τὴν δυνάμιν ποσότηται $\sqrt{-3} + \sqrt{-2}$
 ἐπὶ τὴν μονώνυμον $+\sqrt{-3}$ $\sqrt{-3} + \sqrt{-2}$
 $+\sqrt{-3}$

γινόμενον $-3 - \sqrt{-2}$ ὅτι
 δὲ $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = -\sqrt{6}$ δείκνυται ῥᾶ· ἔστι γὰρ
 $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$ (ὡς δὴλον ἐκ τῶ ἀνωτέρω ὑ-
 ποδείγματος, ἐνθα ἐγένετο $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{-\beta\beta}$)
 καὶ $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$ · ἐκέν $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} =$
 $\sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$
 $\times \sqrt{-1} = \sqrt{6} \times -1 = -1\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

Ἔτερον Τ' ποδείγμα $3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3}$
 $3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2}$

$-45 - 6\sqrt{15}$
 $+ 6\sqrt{10} + 4\sqrt{6}$

$-45 - 6\sqrt{15} + 6\sqrt{10} + 4\sqrt{6}$
 ἔστι γὰρ $3\sqrt{-5} \times 3\sqrt{-5} = 9 \times -5 = -45$,
 καὶ $3\sqrt{-5} \times 2\sqrt{-3} = 3\sqrt{5} \times \sqrt{-1} \times 2\sqrt{3} \times$
 $\sqrt{-1} = 3 \times 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 6$
 $\sqrt{15} \times -1 = -6\sqrt{15}$ · καὶ $-2\sqrt{-2} \times 3$
 $\sqrt{-5} = -2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \times 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = -2 \cdot$

$$6 + 3\sqrt{-5} - 5 - \sqrt{-2} + \sqrt{10}$$

180. Η' διέ τῶν ἐπιπλάττων ποσσὶν διαιρέτης ἕταως
ἐκπλάττειται ἐνὶ φέρει πρηνέστα διαιρέσει $\sqrt{-2}$ διὰ
 $\sqrt{-3}$, πηλίκον ἔσται $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$. ἐνὶ διέ τὴν λογιήσῃ γ

διὰ τῆς ἐπιπλάττων $\sqrt{-3}$, ἔσται $\frac{\gamma}{\sqrt{-3}}$. ἐκ διέ τῆς διαι.

ρῆσεως ($\alpha\sqrt{-3}$) : ($\beta\sqrt{-3}$) ἀπαιτούμεθα $\frac{\alpha\sqrt{-3}}{\beta\sqrt{-3}} = \frac{\alpha}{\beta}$

ἐκ διέ ($-\beta$) : ($\sqrt{-3}$) ἔσται $\frac{-\beta}{\sqrt{-3}} = \sqrt{-3}$. χ' γὰρ

$-\beta$ εἰσι τετραγώνων, ἢ ῥίζιαι $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-3}$, εἴγε
 $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3} = -\beta$. ἡμεῖς $\frac{-\beta}{\sqrt{-3}} = \frac{\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3}}{\sqrt{-3}}$

$$3. \sqrt{2}. \sqrt{5} \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -6 \sqrt{10} \times -1 \\ = +6 \sqrt{10}. \text{ ὡσαύτως δε καὶ } -3 \sqrt{-2} \times +3 \\ \sqrt{-2} = 4 \sqrt{6}.$$

ἔτερον $\sqrt{\alpha} - 2 \sqrt{-\beta}$

$$\sqrt{\gamma} + 3 \sqrt{-\beta}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha\gamma} - 2 \sqrt{-\beta} \cdot \sqrt{\gamma} + 3 \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} + 6\beta}{}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha\gamma} - 2 \sqrt{-\beta} \cdot \sqrt{\gamma} + 3 \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} + 6\beta}{}$$

$$\alpha\lambda\mu \quad 2 + \sqrt{-5}$$

$$3 - \sqrt{-2}$$

$$6 + 3 \sqrt{-5}$$

$$-2 \sqrt{-2} + \sqrt{10}$$

$$= \sqrt{-\beta} \cdot \text{ὡσαύτως } (\sqrt{-\beta}) : -\beta = \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\beta} \cdot \sqrt{-\beta}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \cdot \text{ὅ } (\alpha \sqrt{-\beta\beta}) : (-\beta\beta) = \frac{\alpha \sqrt{-\beta\beta}}{-\beta\beta} =$$

$$\frac{\alpha \sqrt{-\beta\beta}}{\sqrt{-\beta\beta} \cdot \sqrt{-\beta\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-\beta\beta}} \cdot \text{ὅ ἔτι } + \sqrt{-3} : -$$

$$\sqrt{-3} = \frac{+ \sqrt{-3}}{- \sqrt{-3}} = \frac{+ 1 \sqrt{-3}}{- 1 \sqrt{-3}} = \frac{+ 1}{- 1} = - 1 \text{ ἀλλ'}$$

$$\text{ἔτι ἔσιν } \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{4} = 2 \cdot \text{ὅ } \frac{- \sqrt{-4}}{\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{- \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = - \sqrt{4} = - 2, \text{ ὅ } \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}} =$$

$$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \text{ὅ ἔστιν}$$

ὅ, ὡς χρήσιμον πάνυ τοῖς πρωτοπείροις τὸ ἔτως ἀναλύ-
ειν τὰ ποσά· ἐνκατάληπτα γὰρ ἔτω καθίστανται τὰ
ἄλλως παράδοξα δοκῶντα γινόμενά τε ὅ πηλίκα ἔντε
τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῇ διαιρέσει.

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ὁ ρ ι σ μ ο ς .

181. **Λ**όγος, ἢ σχέσις, ἔστι τρόπος ποιοῦς, καθ' ὃν ποσότης πρὸς ποσότητα θεωρεῖται· εἰ μὲν ἔν δυοῖν ποσῶν παραβαλλομένων θάτερον ὡς μείζον ἢ ἔλασσον θάτερον θεωρηθεῖη, ὁ λόγος ἀκρεῖς Ἀριθμητικός· εἰ δὲ θάτερον ὡς ἄπαξ ἢ πλεονάκις περιεκτικὸν θάτερον ὀλοχερῶς ἢ ἐν μέρει ἐκληφθῇ, ὁ λόγος Γεωμετρικός ὀνομάζεται.

182. Λόγος μὲν ἔν ἀριθμητικός ἐστίν ἢ ὑπεροχή, ἢ ἡ διαφορά, ἢ ποσὸν ποσῷ διαφέρει, πρὸς αὐτὸ παραβαλλόμενον· ἀφαιρέσει ἄρα γινώσκεται.

183. Γεωμετρικός δὲ ἐστὶ τὸ πηλίκον, ὃ ἐμφαίνει ὁσάκις θάτερον θάτερῳ ποσῷ ἐμπεριέχεται· διαιρέσει ἄρα γινώσκεται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὁ τῷ 10 πρὸς 2 ἀριθμητικός λόγος ἐστίν 8, εἴγε $10 - 2 = 8$ · ὁ δὲ τῷ 10 πρὸς 2 γεω-

μετρικός ἐστὶ 5, ἐκληφθέντος ὡς διαιρετέου τῷ 10, εἶγε $\frac{10}{2} = 5$. ἄλλ' ὁ τῷ 2 πρὸς 10, ἐκλαμβανομένη ἤδη τῷ 2 διαιρετέου, ἐστὶ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

184. Παντὶ ἄρα λόγῳ δυεῖν ποσοτήτων δεῖ, αἱ καλεώμεναι ὅροι τῷ λόγῳ· καὶ ὁ μὲν πρῶτος καλεῖται ἡ γέμενος, ὁ δὲ δεύτερος ἐπόμενος· ἐν ἑν τῷ τῷ 10 πρὸς 2 λόγῳ, 10 μὲν ἐστὶν ἡ γέμενος, 2 δὲ ὁ ἐπόμενος.

Ἄπας ἀριθμητικὸς λόγος, οἷος ὁ τῷ 10 πρὸς 2, ὅπως ἐκτιθεσθαι ἐκράτησε: 10·2· ὁ δὲ γεωμετρικός, 10:2. ἐφ' ἐκατέρῃ δὲ ἀπαγγέλλεται: 10 πρὸς 2.

185. Ὅταν τέσσαρα ποσὰ ὅπως ἐκκέωνται, ὥσε τὸν τῷ πρῶτῃ πρὸς τὸ δεύτερον λόγον τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ τῷ τρίτῃ πρὸς τὸ τέταρτον, ταῦτα τὰ τέσσαρα ποσὰ ἐν ἀναλογίᾳ εἶναι λέγεται.

186. Ἀναλογία ἄρα ἐστὶν ἡ δυοῖν λόγων ἰσότης.

187. Ὡς περ ἄρα δύο εἶδη λόγων εἰσὶν, ὅπως καὶ δύο εἶδη ἀναλογιῶν, ἀμέλειτοι Ἀριθμητικὴ ἀναλογία καὶ Γεωμετρικὴ.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ. Οἱ τέσσαρες ἑν ἀριθμοὶ 2, 5, 4, 7 παρισώσιν ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν, εἶγε ἥτις διαφορὰ, εἴτ' ἑν λόγος ἀριθμητικός, ἐστὶ τῶν δύο προτέρων, ἡ αὐτὴ ἐστὶ καὶ τῶν δύο ὑσέρων· καὶ γὰρ $5 - 2 = 3$, καὶ $7 - 4 = 3$. ἀλλὰ γὰρ 2, 6, 5, 15 ἐμφαίνουσιν ἀναλογίαν γεωμετρικὴν, εἶγε τὸ πηλίκον, ἡ ὁ γεωμετρικός λόγος, ὁ ἐν τοῖς δυοῖν προτέροις, ὁ αὐτός ἐστὶ καὶ τοῖς δυοῖν ὑσέροις· 6 γὰρ διαιρεθεὶς διὰ 2 δίδωσι 3, 15 δὲ διαιρεθεὶς διὰ 5 ὡσαύτως παρέχει 3.

Γράφουσι δὲ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν ὅπως 2·5:4·7, ἐφ' ἧς ἀναγινώσκεται: 2 πρὸς 5 ἐστὶν

ὡς 4 πρὸς 7· τὴν δὲ γεωμετρικὴν, οἷα ἐσὶν ἡ 2, 6, 5, 15, ἔτω, 2 : 6 :: 5 : 15, ἣν ἀναγινώσκουμεν ὡσαύτως : 2 πρὸς 6 ὡς 5 πρὸς 15.

188. Πᾶσα ἄρα ἀναλογία τέσσαρς ποσότητας, εἴτ' ἐν ὅρεσ περιέχει· ἢ ὁ μὲν πρῶτος ἢ ἔσχατος τῆς ἀναλογίας ὀνομάζονται ἄκροι, ὁ δὲ δεύτερος ἢ τρίτος, μέσοι· ἐν ἑν τῇ 2 : 6 :: 5 : 15 ἀναλογία 2 ἢ 15 εἰσὶν ἄκροι, 6 δὲ ἢ 5 μέσοι.

189. Ἡ ἀναλογία καλεῖται μὲν ὀρθή, ὅταν, ἐν λόγον ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ὅρον, τὸν αὐτὸν ἔχη ἢ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον· Ἀντίθετος δὲ, ἢ Ἀντίστροφος, ἢ ἐν Ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἶναι τέσσαρα ποσὰ λέγονται, ὅταν, ὃν λόγον ἔχει ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχη ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον· 2 : 6 :: 5 : 15 εἰσὶν ἐν ὀρθῇ ἀναλογία· τὸ γὰρ διαιρέσει τῷ δευτέρῳ διὰ τῷ πρώτῳ προῖον πηλίκον τὸ αὐτὸν ἐστὶ τῷ διαιρέσει τῷ τετάρτῳ διὰ τῷ τρίτῳ· ἀλλὰ 2 : 6 :: 15 : 5 εἰσὶν ἐν ἀναλογία ἀντιθέτῳ· εἴγε, τῷ δευτέρῳ διὰ τῷ πρώτῳ διαιρηθέντος, ἀνάγκη τὸ αὐτὸ φηρωμένοις πηλίκον διελεῖν ἢ τὸν τέταρτον διὰ τῷ τρίτῳ, ἀλλὰ τὸν τρίτον διὰ τῷ τετάρτῳ· μεταποιηθήσεται ἄρα ἡ ἀναλογία εἰς ὀρθὴν, ἢ εἰς ἀντίστροφον, ἐνὸς μόνου μέσου τὸν ἐνὸς ἄκρου ἐπιχρόντος χώρον.

190. Ὅταν τέσσαρα ποσὰ παριζῶσιν ἀναλογίαν ὀρθὴν, οἱ δύο πρότεροι ὅροι ὀρθὸν λόγον ἔχουν πρὸς τοὺς δύο ὑσέρες λέγονται· ὅταν δὲ ἀντίστροφον, οἱ πρότεροι δύο πρὸς τοὺς ὑσέρες ἀντίστροφον λόγον, ἢ ἀντιπεπονθότα ἔχουν λέγονται.

191. Ὅταν ἐπίτινος ἀναλογίας ὁ ἐπόμενος τῷ πρώτῳ λόγῳ γίνηται τῷ δευτέρῳ ἡγέμενος, ὥσπερ ἐν τῇ δὲ τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, 2 : 6 : 6 : 18, ἢ ἀναλογία

ἔκκει συνεχῆς. ὁ δ' ἐπανελημμένος ὅρος, ὡς ὁ 6, μέσος ἀνάλογος, ὃν ἅπαξ εἰώθασι γράφειν ἔτω $\div 2 : 6 : 12$. τὴν δὲ συνεχῆ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν οἶον $2 \cdot 4 : 4 \cdot 6$, ἔτω $\div 2 \cdot 4 \cdot 6$.

192. Στίχος τις ὄρων ἐν συνεχεῖ ὄντων ἀναλογία ὀνομάζεται Πρόοδος· ἔτως ἐν $\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ κτ ἐσι πρόοδος ἀριθμητικὴ, εἶγε πάντες οἱ ὅροι τῷδε τῷ 51. χε τὴν αὐτὴν ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους διαφορὰν, εἴτ' ἐν 2, ἐπαναλαμβάνεσθαι δύνανται παρὰ τὸν πρῶτον καὶ ὕστατον· ἀναγινώσκεται δὲ ἡ ἔκθεσις $\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ κτ ἔτως· 1 πρὸς 3, ὡς 3 πρὸς 5, ὡς 5 πρὸς 7, ὡς 7 πρὸς 9 κτ. ὁ δὲ στίχος $\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81$ κτ. ἐσι πρόοδος γεωμετρικὴ· ἕκαστος γὰρ τῶνδε τῶν ὄρων διαιρούμενος διὰ τῷ προτέρῳ, καὶ τὸ αὐτὸ προϊόντων πηλίκον, ἐπαναλαμβάνεσθαι δύναται παρὰ τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον· ἀναγινώσκεται δὲ καὶ αὕτη ὡσαύτως· 1 πρὸς 3, ὡς 3 πρὸς 9, ὡς 9 πρὸς 27, ὡς 27 πρὸς 81 κτ.

193. Ὅταν προύδῃ οἱ ὅροι προϊόντες μεγεθύνωνται, ἡ πρόοδος καλεῖται αὐξουσα· ὅταν δ' ἐλαττῶνται, μειωμένη· πρόοδος ἐν αὐξουσα ἐσὶν ἡ $\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81$ κτ, μειωμένη δὲ $\div 81 : 27 : 9 : 3 : 1$ κτ.

Πᾶσα ἄρα αὐξουσα πρόοδος ἀποκαθίσταται μειωμένη καὶ ἐξ ἐναντίας τῆς τῶν ὄρων τάξεως ἀντιστροφείσης.

194. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Εἰπέπερ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐν πλείονι χρήσει γίνεται τοῖς Μαθηματικοῖς· διὰ ταῦτα, ὅταν ἀπλῶς λέγεται λόγος, ἀναλογία, λόγον τε καὶ ἀναλογίαν τὰ γεωμετρικὰ ἐννοῶμεν· ἀναλογίαν δὲ ἀπλῶς λέγοντες τὴν ὀρθὴν αἰεὶ ἐκλαμβάνομεν.

195. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἡ τῶν ἀναλογικῶν πραγματεία τῶν, ὧν προβάλλονται οἱ Μαθηματικοί, τὸ λυσιτελέ-

σατον ὑπάρχει· ἡ γὰρ ἔπὶ τῶν ἄλλων μερῶν τῆς ἐπισή-
μης ταύτης μεταφέρεται, ἡ μάλιστα ἐπὶ τῶν φυσικῶν ἐπ-
εκτείνεται γνώσεων· ἡ πάντα δὲ τὰ ὄντα ἐκ τῆς ἀνα-
λογίας τό, τε καλὸν ἡ τὸ τέλειον ἐπλήτησαν. ἐπάναγ-
κες ἄρα ἰδιαιτέραν τινὰ καταβαλέωμαι σπευδὴν εἰς τὴν ταύ-
της ἐκθεσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν ἀριθ- μητικῶν.

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Παντὸς ἀριθμητικῆ λόγου ὁ
ἐπόμενος ὅρος ἴσος ἐστὶ τῷ ἡγυμένῳ συν, ἡ πλὴν τῆς
διαφορᾶς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐστὶ γὰρ ἦτοι μείζων ἡ ἐλάσσων τῆ ἡ-
γυμένου· ἡ εἰ μὲν ἐκεῖνο, συναφθέντος τῷ ἡγυμένῳ τῆ,
ὧ διενήνοχεν αὐτῇ ὁ ἐπόμενος, γενήσονται οἱ ὅροι ἰσάλλ-
ηλοι· ἔσιν ἄρα ὁ ἐπόμενος ἴσος τῷ ἡγυμένῳ συν τῇ δια-
φορᾷ· εἰ δὲ τῆτο, ἀποχωρισθέντος ἐκ τῆ ἡγυμένου τῆ, ὧ
ὑπερεῖχε τῆ ἐπομένου, ἔσονται αὖθις οἱ ὅροι ἰσάλληλοι·
ἰσῆται ἄρα ὁ ἐπόμενος τῷ ἡγυμένῳ πλὴν τῆς διαφορᾶς·
ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ρᾶσα δὲ τῆτο καταφαίνεται ἐν ἀριθμοῖς· τῆ μὲν
γὰρ ἀριθμητικῆ λόγου 2 . 5, ὁ ἐπόμενος 5 ἐστὶν ἴσος τῷ
ἡγυμένῳ 2 συν τῇ διαφορᾷ 3· τῆ δὲ 5· 2 ὁ ἐπόμενος 2
ἐστὶν ἴσος τῷ 5 πλὴν τῆς διαφορᾶς 3.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Τῶν ἀριθμητικῶν ὀντιναῦν
λόγον συμπληρῶν δύο ποσοτήτων, ἡ πρώτη αἰεὶ διὰ
τῆ α γραμμᾶτος παρίσταται δύναται· ἡ δ' αὐτῶν διαφο-

ρὰ διὰ τῆ δ· εἰ μὲν ὅν ὁ δεύτερος ὅρος μείζων εἴη τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ἴσεται τῷ πρώτῳ α σὺν τῇ διαφορᾷ δ, αἰ παρασθῆναι δυνήσεται διὰ α + δ· εἰδ' ἐλάττων, ἐπειδὴ τηνικαῦτα ἰσοδυναμεῖ τῷ πρώτῳ α πλὴν τῆς διαφορᾶς δ, παρασθῆσεται αἰ διὰ α — δ.

Ἐντεῦθεν ἄρα ἅπας λόγος ἀριθμητικὸς, αὐξων μὲν δηλωθήσεται διὰ α· α + δ· μειύμενος δὲ, διὰ α· α — δ· κοινῇ δὲ ἐκείνους τε ἢ ἕτος σημανθήσεται διὰ α· α ± δ, ὃν ἀναγνώσειον: α σὺν ἢ πλὴν δ.

Ἐπὶ γὰρ φέρε τῆ 2· 5 ἀριθμητικῷ λόγῳ, κληθέντος τῆ ἡγεμένῃ α = 2, τῆς δὲ διαφορᾶς δ = 3, ὁ ἐπόμενος 5 ἐμφανθήσεται διὰ 2 + 3 = α + δ, ὁ δὲ σύμπασις λόγος 2· 5 διὰ α· α + δ. ἐπὶ δὲ τῆ μειεμένῃ 5· 2, κληθέντος τῆ α ἡγεμένῃ 5, τῆς δὲ δ διαφορᾶς 3, ὁ ἐπόμενος 2 ἔσαι 5 — 3, α — δ, ὁ πᾶσις λόγος α· α — δ.

198. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ὄταν παραβάλλωνται δύο ἀριθμητικοὶ ὅροι, σημαθέντος τῆ πρώτου διὰ α· ± δ, εἴπερ εἴεν ἴσοι οἱ λόγοι, κληθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διαφορὰ δ (8)· κληθέντος ἄρα πρὸς τὸ δοκοῦν τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον λόγον ἡγεμένῃ γ, διατυπωθήσεται ὁ δεύτερος ἕτω γ· γ ± δ· εἰ δ' ἄνισοι εἴεν οἱ παραβαλλόμενοι λόγοι, ἡ διαφορὰ ἐκτεθήσεται δι' ἄλλῃ γραμμάτος φέρειπὲν τῆ ζ· ἢ δ' ἅπαντα ἐκθεσις τῆ δευτέρου λόγου ἔσαι γ· γ ± ζ.

199. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Πᾶσα ἀναλογία ἀριθμητικὴ παρασθῆναι δύναται διὰ τῆ τύπου α· α ± δ: γ· γ ± δ, ὅς ἀναγινώσκεται: α πρὸς α σὺν ἢ πλὴν δ, ὡς γ πρὸς γ σὺν ἢ πλὴν δ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἐκδύω

συγκροτεῖται ἀριθμητικῶν ἴσων λόγων (187), ὧν ὁ μὲν πρῶτος αἰεὶ παρίστανται δύναται διὰ $\alpha \cdot \alpha + \delta$ ὁ δὲ δευτέρως διὰ $\gamma \cdot \gamma + \delta$ (198) Ο.Ε.Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐξω ἀριθμητικὴ ἀναλογία $2 \cdot 6 : 5 \cdot 9$ ὁ μὲν ἔν πρῶτος λόγος $2 \cdot 6$ δυνήσεται αἰεὶ παρασταθῆναι διὰ $\alpha \cdot \alpha + \delta$ ὁ δὲ δευτέρως $5 \cdot 9$ διὰ $\gamma \cdot \gamma + \delta$ τῆς δὲ $6 : 2 : 9 : 5$ ὁ μὲν πρῶτος, διὰ $\alpha \cdot \alpha - \delta$, ὁ δὲ, διὰ $\gamma \cdot \gamma - \delta$ (198).

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐφ' ἀπάσης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἀθροισμα ἴσον ἐστὶ τῶν μέσων· καὶ γὰρ πᾶσα ἀριθμητικὴ ἀναλογία παρίστανται ἔχει διὰ τῆς τύπης $\alpha \cdot \alpha + \delta : \gamma \cdot \gamma + \delta$ (199), ἥς πρῶτον μὲν ἄκρον ἐστὶν α , ἔχατον δὲ $\gamma + \delta$, καὶ πρῶτον μὲν μέσῳ $\alpha + \delta$, δεύτερον δὲ γ . ἀλλὰ τὸ $\alpha + \gamma + \delta$ ἀθροισμα τῶν ἄκρων ἐστὶν ἴσον τῶ $\alpha + \delta + \gamma$ ἀθροίσματι τῶν μέσων· ἐκότερον γὰρ (51) σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν ὑπαρκτικῶν τε καὶ λειπτικῶν ποσοτήτων (21). ἐν γένει ἄρα ἐφ' ἀπάσης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἴσεται τῶ τῶν μέσων ἀθροίσματι. Ο.Ε.Δ.

Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. Ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας $3 \cdot 5 : 10 : 12$ τὸ τῶν ἄκρων ἀθροισμα $3 + 12 = 15$, ἴσον ἐστὶ τῶ τῶν μέσων $5 + 10 = 15$.

201. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐάν, ὡς ποιεῖν εἰώθαμεν, μετὰ τὴν διὰ συμβολικῆς λογισμῆς γενικὴν δεῖξιν, ἐμπεδῶμεν τὸ θεώρημα διὰ μερικωτέρων ἀριθμῶν, ἡκιστα παρὰ τῆς τῆς δεξιῶς ἰσὺν ἐπικρατούμεν· ἐπαιωρητοτέρων μὲν ἐν τοῖς τῶν πρωτοπείρων ὀφθαλμοῖς παριστῶμεν

τὴν γενικὴν ἀλήθειαν, μερικωτέrais ἐφαρμοζομένην περι-
πτώσεσι.

202. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐπὶ πάσης ἀριθμητικῆς συνεχῆς
ἀναλογίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ μέσῳ δις
εἰλημμένῳ· ἐπεικῶς γὰρ ὁ μέσος ἀνάλογος, τὸν χῶρον
πληρῶν τῶν δύο μέσων, ἅπαξ γράφεται (191)· ἄρα τὸ
ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ διπλῷ τῷ μέσῳ.

Ἐπὶ τῆς ἐν ἀριθμοῖς συνεχῆς ἀναλογίας :· 5. 10.
15 τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων $5 + 15$ ἐστὶ διπλὸν τῷ μέσῳ ἀ-
ναλόγῳ 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς Α' ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν Μεθόδου.

203. Μέθοδος τῶν τριῶν ἐν γένει καλεῖται ὁ τρό-
πος τῆς, τριῶν ἀναλογίας ὄρων δοθέντων, εὑρεῖν τὸν τέ-
ταρτον (188)· ἐντεῦθεν ἄρα, ὥσπερ ἀναλογίων εἶδη πε-
φύκασι δύο, ἔτω καὶ ἡ τῶν τριῶν μέθοδος δισσήτης ὡς
πάρχει, ἡ μὲν ἀριθμητικὴ, γεωμετρικὴ δὲ ἡ ἑτέρα.

204. Μέθοδος ἐν τῶν τριῶν ἀριθμητικὴ μὲν ἐστὶν ὁ
τρόπος, καθ' ὃν, τριῶν ποσοτήτων δεδομένων, τετάρτη ἐξ
αὐτῶν εὑρίσκεται, τοσούτῳ τῆς τρίτης διαφέρεισα, ὅσῳ ἡ
δευτέρα τῆς πρώτης (182, 186)· γεωμετρικὴ δὲ ἐστὶν
ὁ τρόπος, δι' ἧς, τριῶν δοθεισῶν ποσοτήτων, τετάρτη ἐξ αὐ-
τῶν εὑρίσκεται, περιέχεσα τοσάκις τὴν τρίτην, ὅσάκις
τὴν δευτέραν ἡ πρώτη (245).

205. Οὐκ ἐν τῆς τῶν τριῶν Γεωμετρικῆς Μεθόδου
εὐλείονα χρῆσιν παρεχόμενης τῷ κοινῶν βίῳ, δεῖν ἡγη-
σάμεν περὶ τούτης καὶ πρὸ τῆς συμβολικῆς λογισμῆς διαλα-

βειν (245, καὶ ἐν τοῖς ἐφεξῆς), ὡς ἂν καὶ οἱ τέτοι
ἄπειροι, μὴτε μὴν πειραθῆναι αὐτοῦ ἐφιέμενοι (εἰς
γὰρ συχνοί, οἱ εἶτε τῷ χρήματι ἐπαυδιάζοντες εἶτε ὑπ'
ἄλλων τύτῃ ἀπειργόμενοι) τὴν ταύτης χρήσιν εἰδέναι
ἔχουσιν.

206. Τ' πὲρ ἐν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν Μεθ' ὧν
ἀ. ἐκτίθει διαὰ χ (5) τὸν τέταρτον ζητούμενον ὄρον, δια-
τάξας αὐτὸν μετὰ τῶν τριῶν δοθέντων ἐν ἀναλογίας
χρήματι.

207. β'. Ἐὰν μέν τις τῶν ἄκρων ζητῆται, συνα-
ψας τὰς μέσους, ἀφαίρει ἀπὸ τῆ αὐτῶν ἀθροίσματος τὸν
δοθέντων τῶν ἄκρων· εἰ δέ τις μέσος, ἀπὸ τῆ τῶν ἄ-
κρων ἀθροίσματος ἀφαίρει τὸν γνωστὸν μέσον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν τῶν
3, 7, 11, ἵν' εὐρεθῇ τέταρτος ὄρος, διενηνοχῶς τῇ 11,
ὥσφ τῇ 3 ὁ 7· ἀ. γεγράφθω 3. 7 : 11. χ· β'. συνα-
φθέντων τῶν μέσων 7 καὶ 11, ἀπὸ τῆ αὐτῶν ἀθροίσματος
18 ἀφηρήθω ὁ γνωστὸς ἄκρος 3· τὸ δὲ κατάλοιπον
15 ἔσαι τῶν ὄρων ὁ ζητούμενος τέταρτος· εἰσαχθέντος ἔν
15 ἀντὶ χ, ἀποληφθήσεται ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία 3.
7 : 11. 15 (187).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἰνὰ δὲ εὐρεθῇ ὄρος, ὅς ἂν εἴη
μέσος τῶν δοθέντων ὄρων 4, 20, 46· ἀ. γεγράφθω 4.
20 : χ. 46· β'. συναφθέντων τῶν ἄκρων 4 καὶ 46, ἀπὸ
τῆ αὐτῶν ἀθροίσματος 50 ἀφελὲ τὸν γνωστὸν μέσον 20·
τὸ δὲ 30 κατάλοιπον ἔσαι ὁ ζητούμενος μέσος· ἡ δὲ ἀ-
ριθμητικὴ ἀναλογία ἔσαι 4. 20 : 30. 46 (187).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐφ' ἀπάσης γὰρ ἀριθμητικῆς ἀναλογί-
ας τὸ τῶν ἄκρων ἀθροισμα ἐξισθῆται τῷ τῶν μέσων· εἰ
ἐν τοῦδε τοῦ ἀθροίσματος ἄτερος τῶν ἄκρων ἀφαιρεθῇ,

λειφθήσεται πάντως ὁ ἕτερος· εἰ δέ τις μέσος, λειφθήσεται ἄτερος τῶν μέσων.

208. Εἰ δὲ πρόκειται συνεχῇ σχηματίζει ἀναλογίαν (191) τῶν δύο δοθέντων ἁκρων, συνάψας ταῦτα, τὸ ἥμισυ τῷ ἀθροίσματος ἕξεις μέσον ἀνάλογον· θατέρου δὲ τῶν ἁκρων καὶ τῷ μέσῳ ἀνάλογον δοθέντων, ἀπὸ τῷ μέσῳ διπλασιασθέντος ἀφελὼν τὸν δεδομένον ἁκρον, ἀπολήψῃ τὸν ζητούμενον ὅρον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Δοθέντων $\div 3 \cdot \chi \cdot 9$, συνάψαντι 3 καὶ 9, τὸ τῷ ἀθροίσματος 12 ἥμισυ, εἴτ' ἐν 6, ἔσαι ὁ μέσος ἀνάλογος· ἐκέν $\div 3 \cdot 6 \cdot 9$.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Εἰπὶ $\div 5 \cdot 20 \cdot \chi$ διπλασιασθέντος τῷ 20, καὶ ἀπὸ 40 ἀφαιρεθέντος τῷ 5, τὸ κατὰλοιπον 35 ἔσαι ὁ ζητούμενος ἁκρος ὅρος τῆς συνεχῆς ἀναλογίας $\div 5 \cdot 20 \cdot 35$ (191).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπισηρίζεται ἡ μέθοδος τοῖς προαποδειγμένοις, ὅτι πάσης συνεχῆς ἀναλογίας ἀριθμητικῆς τὸ τῶν ἁκρων ἀθροισμα ἰσῆται τῷ διπλῷ μέσῳ (202).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Προόδου Ἀριθμητικῆς.

209. Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος, εἴτε αὐξουσα ἐστὶν (193), ἥτις προάγεσθαι ἐπ' ἄπειρον ἔχει, οἷα ἐστὶν ἡδε ἡ φυσικὴ τῶν ἀριθμῶν σειρά $\div 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ κτ. ἡ γὰρ $\div 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14$ κτ. εἴτε μειωμένη, ἥτις ἐν μὲν ὑπαρκτικοῖς ποσοῖς καταλήγει εἰς 0, ἐν δὲ λείπεσιν ἐπεκτείνεται ἐς ἄπειρον, οἷα ἐστὶν ἡ $\div 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$.

— 1. — 2. — 3. — κτ., ἢ γυν ~~α~~ — 7. 4. 1. — 2.
— 5. — 8. — κτ.

210. Θεώρημα σοιχειῶδες· Πᾶσα πρόοδος ἀριθμητικὴ ἐκτεθῆναι ἔχει διὰ τῷ τύπῳ :— $\alpha. \alpha + \delta. \alpha + 2\delta. \alpha + 3\delta. \alpha + 4\delta$ κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα πρόοδος ἀριθμητικὴ ὑδὲν ἐσιν ἑτεροῦ, ὅτι μὴ εἶχας ὅρων, ὧν ὁ πρῶτος διαφέρει τῷ δευτέρῳ, ὅσῳ ὁ δεύτερος τῷ τρίτῳ, ὁ δὲ τρίτος τῷ τετάρτῳ κτ. (192)· κληθέντος ἄρα τῷ μὲν πρώτῳ ὄρε α , τῆς δὲ διαφορᾶς δ, ὁ δεύτερος ὅρος προοδου, αὐξέσης μὲν, ἐσιν ἴσος τῷ πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, ἢ τῇ ὑπεροχῇ, ἢ ἐκεῖνος ὑπερέχει· ἐσιν ἄρα ὁ δεύτερος $\alpha + \delta$ (196)· ὁ δὲ δευτέρος ἰσῆται τῷ τρίτῳ σὺν τῇ αὐτῇ διαφορᾷ δ. ἐσιν ἄρα $\alpha + \delta + \delta = \alpha + 2\delta$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ τέταρτος ἐσιν $\alpha + 2\delta + \delta = \alpha + 3\delta$ καὶ ἑξῆς ὡσαύτως.

Μεινμένης δὲ, ὁ δεύτερος ὅρος ἐσιν ἴσος τῷ πρώτῳ πλην τῆς διαφορᾶς (196), ἢ $\alpha - \delta$ · ὁ δὲ τρίτος ἴσος τῷ δευτέρῳ πλην τῆς διαφορᾶς, εἴτ' ἐν $\alpha - \delta - \delta$, ἢ $\alpha - 2\delta$, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

Πᾶσα ἄρα πρόοδος ἀριθμητικὴ, αὐξήσα μὲν παρασθῆσεται διὰ : $\alpha. \alpha + \delta. \alpha + 2\delta. \alpha + 3\delta.$ κτ. μεινμένη δὲ, διὰ : $\alpha. \alpha - \delta. \alpha - 2\delta. \alpha - 3\delta.$ κτ. κοινὸς δ' ἐκατέρως τῶν ἀριθμητικῶν προόδων τύπος εἶναι ÷ $\alpha. \alpha + \delta. \alpha + 2\delta. \alpha + 3\delta. \alpha + 4\delta$ κτ. Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῆς αὐξέσης ἀριθμητικῆς προοδου ÷ 2. 5. 8. 11. 14, ὁ δεύτερος ὅρος 5 ἰσῆται τῷ πρώτῳ 2 σὺν τῇ διαφορᾷ 3· ὁ δὲ τρίτος 8 ἰσῆται τῷ πρώτῳ 2 σὺν τῇ δις εἰλημμένῃ διαφορᾷ 3· ὁ δὲ τέταρτος 11 τῷ πρώτῳ σὺν τῇ τριτῇ διαφορᾷ 3, καὶ ἑξῆς ὡς

αὐτως· τῷ ἄρα πρώτῳ ὄρει 2 κληθέντος α, ὃ δὲ τῆς 3 διαφορᾶς, ὃ μὲν δεύτερος ὅρος 5 ἔσται $\alpha + \delta$, ὃ δὲ τρίτος 8, $\alpha + 2\delta$, ὃ δὲ τέταρτος 11, $\alpha + 3\delta$ κτ., ἐπὶ δὲ τῆς μεινμένης $\div 14 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2$, $11 = 14 - 3$, ἢ $\alpha - \delta$, $8 = 14 - 3 - 3$, ἢ $\alpha - 2\delta$, $5 = 14 - 3 - 3 - 3$, ἢ $\alpha - 3\delta$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

211. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'. Α' πάσης ἀριθμητικῆς προόδου τὸ κεφάλαιον τῶν ὄρων, οἱ ἴσον ἀπέχουσι τῶν ἄκρων, ποσὸν εἰς μόνιμον· ἰσῆται γὰρ τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων, ἢ τῷ ἑτέρῳ δύο, οἱ καὶ αὐτοὶ ἴσον ἀπέχουσι τῶν ἄκρων, ἢ τέλος τῷ μέσῳ δις εἰλημμένῳ, εἰ τύχοι ὁ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὄρων ἀριθμὸς ὢν περιττός· ἔτω τῆς ἐξ ἑπτὰ συνεχώσεως προόδου ὄρων τὸ ἀθροισμα τῷ τρίτῳ καὶ τῷ πέμπτῳ, εἴτ' ἐν $\alpha + 2\delta + \alpha + 4\delta$, ταῦτέστι $2\alpha + 6\delta$, ἰσῆται τῷ τῶν ἄκρων, οἵτινές εἰσιν α καὶ $\alpha + 6\delta$, εἴτ' ἐν $2\alpha + 6\delta$ · τὸ δὲ τῷ δευτέρῳ καὶ ἑκτῷ ὡσαύτως ὑπάρχει $2\alpha + 6\delta$ · καὶ ὁ μέσος δὲ ὅρος $\alpha + 3\delta$ δις εἰλημμένος γίνεται $2\alpha + 6\delta$

Ἐκκείῳ ἢ αὐτῇ πρόοδος ἐν ἀριθμοῖς $\div 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20$. τὸ ἀθροισμα τοίνυν τὸ τρίτον καὶ τὸ πέμπτον εἰς $8 + 14 = 22$, ὃ ἰσῆται τῷ τῶν ἄκρων· καὶ γὰρ $2 + 20 = 22$ · καὶ τῷ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ ἑκτῷ, $5 + 17 = 22$, καὶ τῷ δις εἰλημμένῳ μέσῳ $11 + 11 = 22$

212. ΠΟΡΙΣΜΑ. Β'. Ἐκαστος ὅρος προόδου ἀριθμητικῆς, αἰξέσεως μὲν, εἰς ἴσος τῷ πρώτῳ σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς, καὶ τῷ τῶν ἡγησαμένων αὐτῷ ὄρων ἀριθμῷ, μεινμένης δὲ, ἴσος τῷ πρώτῳ πλην τῷ αὐτῷ παραγομένῳ· ἐπὶ γὰρ τῇ γενικῇ τύπῃ $\div \alpha \cdot \alpha + \delta \cdot \alpha + 2\delta \cdot \alpha + 3\delta \cdot \alpha + 4\delta$ κτ., ὁ μὲν τρίτος ὅρος $\alpha + 2\delta$

ἴσος ἐστὶ τῷ πρώτῳ α σὺν ἡ πλὴν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς χ τῷ 2, ὅτι δύο αὐτῷ ἡγήσαντο ὅροι· ὁ δὲ τέταρτος $\alpha + 3\delta$ ἐστὶν ἴσος τῷ πρώτῳ α σὺν ἡ πλὴν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ δ χ 3 διὰ τὰς τρεῖς προηγούμενες ὁ-
ρες κτ.

Ἐπὶ δὲ $\div 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14$ · ὁ πέμπτος, φέρ' εἰ-
πεῖν, ὅρος 14 ἴσος ἐστὶ τῷ πρώτῳ 2 σὺν τῷ παραγομένῳ
ὑπὸ τῆς 3 διαφορᾶς χ τῷ 4 ἀριθμῷ τῶν προηγηθέντων
ὁρων.

213. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἀπάσης ἀριθμητικῆς προόδου ἡ
μεταξὺ τῷ πρώτῳ χ τῷ ἐσχάτῳ τῶν ὁρων διαφορὰ ἴση
ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κοινῆς διαφορᾶς χ τῷ ἀριθμῷ,
τῶν ὁρων ὅλης τῆς προόδου, μειωθέντος μονάδι· ἔτις ἐπὶ
τῆς προεκτεθείσης προόδου ἡ μεταξὺ α χ $\alpha + 7\delta$ διαφορὰ
ἐστὶν $+ 7\delta$

214. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἰν' ἐμπαράβυσωμεν μεταξὺ
δύο ὁρων ἀριθμὸν δεδομένον ὁρων, ὑφ' ὧν μετὰ τῶν προ-
τέρων πρόοδος ἂν συσαίῃ ἀριθμητικῇ, διαιρήσομεν τὴν
μεταξὺ τῶν δύο ὁρων διαφορὰν διὰ τῷ αἰτηθέντος ἀριθμοῦ
τῶν ὁρων, ἡυξημένῳ μονάδι.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐ"σω ἐμπαράβυσσαι πέντε ὅρους ἀ-
ριθμητικῶς ἀναλόγους μεταξὺ 8, χ 32, ταῦτόν εἰπεῖν,
πρόοδον ἀριθμητικὴν ἐξ ὁρων ἑπτὰ συγκροτῆσαι, ὧν
πρώτος μὲν εἴη 8, πύματος δὲ 32· α'. λαμβάνομεν τὴν
μεταξὺ 8 χ 32 διαφορὰν, ἥτις ἐστὶν 24· β'. διαιρῶμεν
ταύτην τὴν 24 διαφορὰν διὰ 5 σὺν 1, εἴτ' ἐν διὰ 6, α.
τε πέντε αἰτηθέντων ἀναλόγων ὁρων· τὸ ἐν πλησίον 4
συνάπτοντες τῷ πρώτῳ ὁρῳ 8, ἀπολαμβάνομεν 12 δεύτε-
ρον ὅρον τῆς σχηματισθεμένης ἀριθμητικῆς προόδου· τρί-

τον δὲ τὸν 16, ἐξῆς ἔτις· ἐντεῦθεν ἄρα συσπαθήσεται ἡ ζητηθεῖσα ἀριθμητικὴ πρόοδος ἐπὶ τὰ εὐμοιρῶσα τῶν ὄρων $\div 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32$. σαφὲς γὰρ πάντως, ὡς ἔτω ποιῶντες ἕκαστον ὄρον ἔξομεν ἐξισόμενον τῷ πρώτῳ σὺν τῇ διαφορᾷ, πολλαπλασιασθεῖση ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγηθέντων ὄρων.

215. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Γνωθέντος τῆ πρώτης ὄρου καὶ τῆς ἐπικρατέσης ἐν τινὶ ἀριθμητικῇ προόδῳ διαφορᾶς, ἅπας ὄρος εὐρεθήσεται, συναφθέντος τῷ πρώτῳ ὄρῳ τῆ παραγομένῃ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς καὶ τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων τῶν τῆ ζητούμενῃ ἡγεμένων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐργάτη τινὶ ἐπήγγελται μισθός, τῆς μὲν πρώτης ἡμέρας ὀβολοὶ 2, τῆς δὲ δευτέρας 5, καὶ ἐξῆς κατὰ τὴν τάξιν τῆςδε τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\div 2. 5. 8$ κτ. πόσον ἄρα λήφεται μισθὸν ἐντῇ εἰκοστῇ πέμπτῃ ἡμέρᾳ;

Ἡ ὀβολὸς δύο σὺν τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῆς 3 διαφορᾶς, τῆς ἐπικρατέσης ἐν τῇ προτεθείσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ, καὶ τῷ 24· πρὸ γὰρ τῆς εἰκοστῆς πέμπτῃς ἡμέρας 24 προηγήθησαν· λήφεται ἄρα ὀβολὸς 74.

216 ΠΟΡΙΣΜΑ ς'. Τὸναντίον δὲ, ἢν ὀριοθῇ ὁ χώρος ὄρετινός, καὶ ἡ δύναμις δεδοταί, ἐν ἀριθμητικῇ τινὶ προόδῳ, ἀφηρηθῶ μὲν τῷδε τῷ ὄρῳ ὁ πρῶτος τῆς προόδου ὄρος, διηρηθῶ δὲ τὸ κατάλοιπον διὰ τῆς ἐπικρατέσης ἐν τῇ προόδῳ διαφορᾶς· τὸ δὲ πηλίκον, ἡξυμένον μονάδι, ἐμφανεῖ τὸν χώρον τῆ προτεθέντος ὄρου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Στρατιῶται τετάχεται ἀγὰ πλείους σειρὰς ἐν τριγώνῳ σχήματι· ὁ δὲ τῶν στρατιωτῶν ἑκάστης σειρᾶς ἀριθμὸς χωρεῖ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τὴνδε πρό-

οδον $\div 1 \cdot 4 \cdot 7$ κτ. πόση ἂρ' ἔσιν ἡ σειρά, ἐνθ' εἰσι ἑρα. τιῶται 91;

Ἀφ' ἐλε τοίνυν τὸν πρῶτον ὄρον 1 ἀπὸ 91· τὸ δὲ κατάλοιπον 90 διέλε διὰ τῆς διαφορᾶς 3· τὸ δὲ πηλίκον 30, μονάδι αὐξηθὲν, δείξει ὅτι ἡ ζητεμένη σειρά ἔσται τριακοσὴ πρώτη.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ'. Τὸ σύμπαν ἄθροισμα ἀπάσης ἀριθμητικῆς προόδου ἴσον ἐστὶ τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῷ ἡμιχθροίσματος τῶν ἄκρων, καὶ τῷ τῶν ὄρων ἀριθμῷ· συνάψαντες γὰρ τὸν γενικὸν τύπον $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d$, ἔχομεν $5a + 10d$. ἐὰν ἄρα α'. ληθῇ τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα, ὃ ἐστὶ $2a + 4d$, καὶ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 ἀριθμὸν τῶν ὄρων, προκύψει $10a + 20d$. ἐὰν β'. ληθῇ τὸ ἡμισυ τῆς τε γινομένης, εὐρεθήσεται ὡς αὐτως $5a + 10d$ ἴσον τῷ ὅλκῳ ἄθροισματι τῆς ἐκπέντα ὄρων συγκεκροτημένης τῆς δὲ ἀριθμητικῆς προόδου.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$ τὸ πάντων τῶν ὄρων ἄθροισμα ἔστιν 100· ἀλλ' εὐρήσομεν γὰρ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 100, πολλαπλασιάσαντες τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα $1 + 19$, εἴτ' ἔν τὸν 20 ἐπὶ 10 ἀριθμὸν τῶν τῆς προόδου ὄρων· τὸν δὲ προκύπτοντα 200 διελόντες διὰ 2, ὃ ἐστὶ λαβόντες τῷ 200 τὸ ἡμισυ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὡνήσάτο τις 20 πρόβατα, συνθέμενος ὑπὲρ μὲν τῷ πρώτῳ καταβαλεῖν ὀβολὸς 2, ὑπὲρ δὲ τῷ δευτέρῳ 18, καὶ ἑξῆς ὁμοίως κατὰ πρόοδον ἀριθμητικὴν· πόση ἂρ' ἔσται ἡ πάντων τῶν 20 προβάτων τιμή;

α'. εὐρεθήτω κατὰ τὴν προεκτεθείσαν μέθοδον (215) ἡ τῷ εἰκοτῷ προβάτῳ τιμή, ἥτις ἐστὶ 2 σὺν τῷ γινομένῳ

ἐπὶ 16, καὶ 19, εἴτ' ἐν 306· ἰδὲ δὴ ὁ ἔχρατος τῆς προόδου ὅρος· ἐπεὶ δὲ ὁ πρῶτος ἐστὶ 2, τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἄκρων ἐστὶ 308, ὃ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων, ταῦτόν εἴπειν ἐπὶ 20, παράγει 6160, ὅστις τὸ ἥμισυ, εἴτ' ἐν 3080 ἐμφαίνει τὴν ὀλικὴν τιμὴν τῶν 20 προβάτων (217).

218. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀπάση ἀριθμητικῇ προόδῳ τέταρτα ταῦτα ἀναγκαίως ἐνυπάρχουσιν· ὁ πρῶτος ὅρος α, ὁ ἔχρατος ω, ἡ κοινὴ τῶν ὅρων διαφορὰ δ, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων ν· τέτων ἔν εἰς τρία τινὰ δοθῶσι, τὸ τέταρτον πάντως εὐρεθήσεται· ἀλλὰ γὰρ εἰς τῆτο προληπτέον τὸ ἐφεξῆς Ἀξιῶμα.

219. ΑΞΙΩΜΑ. Ἐὰν ποσότης ποσότητι ἴση ἢ προσεθῇ δὲ ἑκατέρω τὸ αὐτὸ ποσόν, ἢ ἀφαιρεθῇ ἑκατέρω τὸ αὐτὸ, ἢ πολλαπλασιασθῇ ἑκατέρω ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσόν, ἢ διὰ τῆ αὐτῆς ἑκατέρω διαιρεθῇ, τὰ ὅλα, ἢ τὰ κατάλοιπα, ἢ τὰ γινόμενα, ἢ τὰ πηλίκια, ἴσα ἔσονται.

220. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τέτων τὸ μὲν πρῶτον καὶ δεύτερον ταῦτά εἰσι τοῖς ἐκτεθείσιν ἀξιῶμασι (Ἀριθμ. 13, 14)· τὸ δὲ τρίτον καὶ τέταρτον καὶ αὐτὰ μὲν προφανῆ, εἰς δὲ πλείω σαφύνειαν κειθῶσαν ὑποδείγματα ἀριθμητικὰ· εἰς γὰρ ἢ $5 = 5$, δῆλον ὅτι ἔσαι καὶ $3 \times 5 = 3 \times 5$, εἴτ' ἐν $15 = 15$ · ὡσαύτως εἴπερ εἴη $6 = 6$, ἔσαι καὶ $\frac{6}{2} = \frac{6}{2}$, εἴτ' ἐν $3 = 3$ · ἐπισήσασι δὲ τὸν νῦν δῆλον ὅτι τὸ μὲν ἐστὶ ταῦτόν τῳ (Ἀριθ. 13) τὸ δὲ, τῷ (Ἀριθμ. 14).

221. Α'. Ἐποτεθήτω πᾶσα ἡ πρόοδος αὐξουσα (εἰς γὰρ ἢ μειυμένη τῷ ω ἀντὶ α ληφθέντος γενήσεται αὐξουσα) καὶ τὰ εἰρημένα ἐν (214) ἐκτεθείθωσαν συμβολικῶς εἴτ' ἐν $\omega - \alpha = \delta \nu - \delta$ · καὶ ἐπεὶ $\omega - \alpha$ ἴσον ἐστὶ τῳ δν

—δ, ἄρα (219) $\omega - \alpha + \alpha = \delta\nu - \delta + \alpha$. εἴτ' ἔν $\omega = \delta\nu - \delta + \alpha$. καὶ ἐὰν ἀπὸ τούτων τὸ αὐτὸ α ἀφαιρεθῇ τὰ λοιπὰ αὐθις ἴσα ἔσονται. ἄρα $\omega - \alpha = \delta\nu - \delta + \alpha - \alpha$, εἴτ' ἔν $\omega - \alpha = \delta\nu - \delta$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\delta\nu - \delta$ γι-

νομενὸν ἐστὶ ἐκ τῆς $\nu - 1$ καὶ δ (καὶ γὰρ $\nu - 1 \cdot \delta = \delta\nu - \delta$, ὡς δῆλον). ἐὰν ἄρα τό, τε $\omega - \alpha$, καὶ $\delta\nu - \delta$ διαιρε-

θῇ διὰ $\nu - 1$, ἔσαι $\frac{\omega - \alpha}{\nu - 1} = \delta$ (219). ἐὰν ἄρα δοθῶ.

σιν ὁ ἔχματος ὅρος ω , καὶ ὁ πρῶτος α , καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὄ-

ρων ν , ἔσαι ἡ διαφορὰ $\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}$. ἔσω $\alpha = 5$, καὶ $\omega =$

97, καὶ $\nu = 19$. ἄρα ἔσαι $\delta = \frac{97 - 5}{19 - 1} = \frac{92}{18} = 5\frac{1}{9}$. ἡ

ἡ δὲ πρόοδος ἔσαι $\div 5 \cdot 10\frac{1}{9} \cdot 15\frac{2}{9} \cdot 20\frac{1}{9} \cdot 25\frac{4}{9} \cdot 30\frac{5}{9}$ κτ. μέχρι τῶν 97.

Β'. Εἰλήφθω ὁ αὐτὸς συμβολικὸς τύπος $\omega - \alpha = \delta\nu - \delta$ (214). ἐὰν ἔν τοῖς ἴσοις προσεθῇ τὸ αὐτὸ α , ἔσαι $\omega - \alpha + \alpha = \delta\nu - \delta + \alpha$. εἴτ' ἔν $\omega = \delta\nu - \delta + \alpha$, ἡ $\alpha + \delta\nu - \delta = \omega$. ἐὰν δ' ἀπ' αὐτῶν τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ τὸ αὐτὸ $\delta\nu - \delta$, ἔσαι $\alpha + \delta\nu - \delta - \delta\nu + \delta = \omega - \delta\nu + \delta$, εἴτ' ἔν $\alpha = \omega - \delta\nu + \delta$. ἐὰν δ' ἐκατέρῳ προσεθῇ $\delta\nu$, ἔσαι $\alpha + \delta\nu = \omega - \delta\nu + \delta + \delta\nu$, ἡ $\alpha + \delta\nu = \omega + \delta$. ἐὰν δ' ἀφ' ἐκατέρου ἀφαιρεθῇ τὸ αὐτὸ α , ἔσαι $\alpha - \alpha + \delta\nu$, ἡ $\delta\nu = \omega - \alpha + \delta$. ἐὰν δὲ ἐκάτερον ποσὶν διαιρεθῇ διὰ δ ἔσαι ν

$= \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$. ἔσωσαν ἔν δεδομένα ὁ ἔχματος ὅρος ω ,

καὶ ὁ πρῶτος α , καὶ ἡ διαφορὰ δ . καὶ ζητηθῇτω ὁ ἀριθμὸς

τῶν ὄρων ν . τῆσιν ἐμφανεῖ ὁ τύπος $\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$. ἔ.

$$\text{εἰς } \alpha = 2 \text{ ἢ } \omega = 10, \text{ ἢ } \delta = 2 \cdot \text{ ἔκῃς ἔσται } \nu = \frac{10 - 2}{2}$$

$+ 1 = \frac{8}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$ · ὁ τοίνυν ἀριθμὸς τῶν ὄρων ἔσται 5· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει $\div 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$.

Γ. Ἐὰν δὲ, δοθέντων τῶν α , ν , δ , ζητῆται ὁ ω · τέτον δηλώσει ὁ προεκτεθείς τύπος $\omega = \delta \nu - \delta + \alpha$ · ἔσω $\alpha = 2$, $\delta = 3$, $\nu = 12$ · ἄρα ἔσται $\omega = 3 \times 12 - 3 + 2 = 36 - 3 + 2 = 35$ · ἡ δὲ γε πρόοδος χωρήσει ἔτω $\div 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 23 \cdot 26 \cdot 29 \cdot 32 \cdot 35$.

Δ. Ἐὰν δὲ, δοθέντων τῶν ω , δ , ν , ζητῆται ὁ α · εἰ λήθω αὐτῶν ὁ τύπος $\omega - \alpha = \delta \nu - \delta$, ἢ ἑκατέρω τῶν ἰσῶν προσεθέντος τῷ αὐτῷ α , ἔσται $\omega - \alpha + \alpha = \delta \nu - \delta + \alpha =$ εἴτ' ἔν $\omega = \delta \nu - \delta + \alpha$ · εἰ δὲ τῶν ἑκατέρω ἀφαιρέθῃ τὸ $\delta \nu - \delta$ ἔσται $\omega - \delta \nu + \delta = \delta \nu - \delta + \alpha - \delta \nu + \delta$ · εἴτ' ἔν $\omega - \delta \nu + \delta = \alpha$, καὶ δὴ $\alpha = \omega - \delta \nu + \delta$ · ἔσω $\omega = 12$, $\delta = 2$, $\nu = 11$ · ἔσται ἄρα $\alpha = 12 - 22 + 2 = -8$ · ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει $\div -8 \cdot -6 \cdot -4 \cdot -2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$

Ἐκκείσθωσαν δ' ἐξῆς οἱ τέσσαρες εὐρεθέντες τύποι εἰς μνήμης ἐπιθήκημα.

δοθέντων

εὐρεῖν

ω, α, ν

$$\delta = \frac{\omega - \alpha}{\nu - 1}$$

ω, α, δ

$$\nu = \frac{\omega - \alpha}{\delta} + 1$$

α, ν, δ

$$\omega = \delta \nu - \delta + \alpha$$

ω, δ, ν

$$\alpha = \omega - \delta \nu + \delta$$

Ἐὰν δὲ κληθῇ τὸ ἀπάσης ἀριθμητικῆς πρόοδος ἄθροισμα.

σμη κ, ὁ γενικός αὐτῷ τύπος ἐκ τῶν εἰρημένων (217)

ἔσαι $\kappa = \frac{\text{αν} + \omega\nu}{2}$ · εἰς ἅρα τὰ τέσσαρα α, ω, δ, ν

γνωσά ὡσι, γνωθήσεται πάντως ἐν τῷ κεφάλαιον διὰ τῆς
δε τῆς τύπης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ λόγων γεωμετρικῶν.

222. Μέρη ὅμοια δεῖν ὅλων ποσοτήτων κα-
λεῖνται, ἃ ἰσάκεις ληφθέντα παραγαγεῖν δύνανται ἕκαστα
τὸ ἑαυτῷ ὅλον, οἷα εἰσι τὰ πέμπτα, ἢ τὰ ἕκτα μέρη
δεῖν ὅλων κτ' 5 ἢ 10, φέρ' εἰπεῖν, εἰσι μέρη ὅμοια
τῷ 20 ἢ 40, ὡς αὐτῶν ὄντα τεταρτημόρια· ἢ γὰρ τε-
τράκεις μὲν ὁ 5 ποιεῖ 20, τετράκεις δὲ ὁ 10 ποιεῖ 40.

223. Ὁ γεωμετρικὸς λόγος (183), καλεῖται μὲν
διπλάσιος, ὅταν ὁ ἡγούμενος διπλῆς ἢ τῷ ἐπομένῳ· τρι-
πλάσιος δὲ, ὅταν τριπλῆς κτ' ὑποδιπλάσιος δ'
αὐ, ἐπειδὴν ὁ ἡγούμενος τὸ ἡμισυ ὑπάρχη τῷ ἐπομένῳ,
ὑποτριπλάσιος δ', ὅταν τὸ τρίτον κτ'. ὣτως ἐν 12 : 4
ἔστι λόγος τριπλάσιος, 4 : 12 δὲ ὑποτριπλάσιος.

224. Ὅταν τινὸς λόγος ἀνισὸς ἢ τῷ ἐπομένῳ ὁ ἡ-
γούμενος, δύο εὐρίσκονται διάφορα πηλίκα ἢ δύο λόγοι
διάφοροι (183)· ἦτοι γὰρ ὁ ἐπόμενος διὰ τῆς ἡγεμένης,
ἢ ἕτος δι' ἐκείνης διαιρεῖσθαι δύναται· πρὸς μέντοι εὐμά-
ρειαν πλείονα ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἀεὶ ἐκδεξόμεθα τὸν λόγον
τὸν διαιρέσει τῷ ἐπομένῳ διὰ τῆς ἡγεμένης προκύπτοντα·
ἢ, ὁ δὴ ταῦτον, ὑποθητόμεθα διαιρετέον μὲν τὸν ἐπόμε-
νον, διαιρέτην δὲ τὸν ἡγούμενον.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐξω λόγος ὁ $2:6$ · ἐξέσται ἐν τὸνδε παραστήσασθαι ἔτω $\frac{2}{3}$ · καὶ γὰρ ὁ $2:6$ λόγος ἔστι δὲν ἄλλ' ἢ τὸ πηλίκον ἐστὶ τῷ ἐπομένῳ ὁ διαιρεθέντος διὰ τῷ ἡγούμενῳ 2 · ὅπερ αἰεὶ ἐξέσται ἐμφάναι διὰ $\frac{2}{3}$.

226. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι ἅπας πλασματικός τύπος, οἷος ὁ $\frac{2}{3}$ δύναται ἐπίσης ἐκληφθῆναι, ἢτοι ὡς σεσημειωμένον πηλίκον, ἢ ὡς κλάσμα ἢ ὡς λόγος· Πᾶν ἄρα, ὁ ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἤδη δέδεικται, καὶ ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐκληπτέον λόγων· καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν τὸ δειχθιστόμενον ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν λόγων, καινή τις ἔσται βάσανος τῶν ἐν τοῖς κλάσμασι προαποδείγμένων.

227. Θεώρημα σοιχειῶδες· Παντὸς λόγου ὁ ἐπόμενος ἰσθῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῷ ἡγούμενῳ καὶ τοῦ πηλίκου

ΔΕΙΞΙΣ. Ἄπας γὰρ διαιρετέος ἰσθῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῷ διαιρέτῃ καὶ τῷ πηλίκῳ· ἀλλὰ μὴν παντὸς λόγου ὁ μὲν ἐπόμενος ἐστὶ διαιρετέος, ὁ δ' ἡγούμενος διαιρετῆς (224). ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Τῷ $2:6$ λόγῳ ὁ ἐπόμενος 6 ἰσθῆται τῷ παραγομένῳ ὑπὸ τῷ ἡγούμενῳ 2 , καὶ τῷ πηλίκῳ 3 .

Ἐπὶ δὲ τῷ $6:2$, θεωρημένῳ αἰεὶ τῷ ἐπομένῳ ὡς διαιρετέῳ, ὁ 2 ἐπόμενος ἰσθῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῷ ἡγούμενῳ καὶ τῷ πηλίκῳ $\frac{2}{3}$ · ἐπεὶ $6 \times \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 2$.

228. Ἄπας λόγος ἐκτίθεσθαι δύναται διὰ τῷ τύπῳ $\alpha:\alpha\pi$ · ὁ μὲν γὰρ ἡγούμενος αἰεὶ παρίσασθαι δύναται διὰ α , τὸ δὲ πηλίκον διὰ π , ἐπεὶ δὲ ὁ ἐπόμενος ἰσθῆται αἰεὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῷ ἡγούμενῳ καὶ τῷ πηλίκῳ (227)· ἐκδηλωθήσεται ἄρα διὰ $\alpha \times \pi$, ἢ $\alpha\pi$.

Ἐπὶ $2:6$, εἰάν ἐκτεθῇ διὰ α , τὸ δὲ 3 πηλίκον δια

π , ἡ ἔσεται $= 2 \times 3$, $\alpha \times \pi$ ἢ $\alpha \pi$. ἄρα $2:6$ γενήσεται $\alpha:\alpha\pi$.

Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὸ δοκὺν ἔξει παραστήσασθαι τὸν ἡγούμενον καὶ διὰ δ , ἢ ζ κτ, πᾶς ἄρα λόγος ἀδιαφόρως δύναται ἐκτεθῆναι καὶ διὰ $\delta:\delta\kappa$, $\zeta:\zeta\kappa$ κτ.

229. ΠΟΡΙΣΜΑ Ἐὰν δύο ὁμοῦ παραβληθῶσιν ὅροι, εἴτε εἰσὶν ἴσοι, καὶ τὰ πηλίκα αὐτῶν ὡσαύτως ἴσα, ὅτε ἄμφω διὰ τῶ αὐτῶ ἐκδηλῶνται γραμματος, τῶ κ φέρε, εἴτε εἰσὶν ἄνισοι, καὶ δὴ ἄνισα καὶ τὰ αὐτῶν πηλίκα, ὅτε δεῖ διὰ δυοῖν διαφόρων γραμμάτων ταῦτα ἐκθεῖσθαι, τὸ μὲν φέρε διὰ κ , θάτερον δὲ διὰ π .

Βυλομένοις ὅν ἴσως δύο ἐκθεῖσθαι λόγους $2:6$, $4:12$ (183) παραστήσεται ὁ μὲν $2:6$ διὰ $\alpha:\alpha\kappa$, ὁ δὲ $4:12$, διὰ τὴν τῶ πηλίκου ἰσότητα, διὰ $\delta:\delta\kappa$. ἀλλὰ γὰρ εἰς ἐκθεσιν τῶν ἀνίσων λόγων $5:10$, $3:9$, ἐπεὶ περ τὰ κατ' αὐτὺς πηλίκα εἰσὶν ἄνισα ὁ μὲν ἐκτεθήσεται διὰ $\alpha:\alpha\kappa$, ὁ δὲ διὰ $\delta:\delta\pi$.

230. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τὸ ὑπὸ δύο λόγων γινόμενον ἀπολαμβάνεται, πολλαπλασιαζομένων ἐπ' ἀλλήλης τῶν δύο ἐπομένων, ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν δύο ἡγούμενων, καὶ σημαινομένης τῆς τῶ πρώτου διὰ τῶ δευτέρου γινόμενης διαιρέσεως.

ΔΕΙΞΙΣ. Κειμένων δύο λόγων τῶν $\alpha:\alpha\kappa$, $\delta:\delta\pi$, ἢ $\frac{\alpha\kappa}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$ (225) πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλης οἱ ἐπόμενοι $\alpha\kappa$, $\delta\pi$. ὅθεν ἔσαι $\alpha\kappa\delta\pi$. ἐξῆς δὲ οἱ δύο ἡγούμενοι α , δ . ὅθεν ἔσαι $\alpha\delta$, καὶ σημανθήτω ἢ τῶ πρώτου διὰ τῶ δευτέρου διαίρεσις ἔτως $\frac{\alpha\kappa\delta\pi}{\alpha\delta}$, ὃ δὲ ἀναγω-

γῆς ἐσι κπ· φημί δὴ τὸ ὑπὸ τῶν δύο $\frac{ακ}{α}$, $\frac{δπ}{δ}$ λόγων

γινόμενον εἶναι ἀληθῶς κπ· ὁ γὰρ $\frac{ακ}{α}$ λόγος τὸ πηλί-

κον ὑπάρχει κ, ὁ δὲ $\frac{δπ}{δ}$ τὸ πηλίκον π· πολλαπλα-

σιάζειν ἄρα $\frac{ακ}{α}$ ἐπὶ $\frac{δπ}{δ}$ ταυτόν ἐσι· πολλαπλασιάζειν κ

ἐπὶ π· ὅθεν γίνεται κπ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πολλαπλασιάζοντες, 2 : 6 διὰ 4 : 8, ἢ $\frac{2}{3}$ διὰ $\frac{4}{3}$ ἐ-
πάγομεν τὸν 6 ἐπὶ 8, εἴτα τὸν 2 ἐπὶ 4, γράφοντες $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$
= 6 γινόμενον ὑπὸ 2 : 6, 4 : 8.

231. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ δύο τύποι $\frac{ακ}{α}$ καὶ $\frac{δπ}{δ}$ πα-

ρισῶσιν ἔχ' ἥττον δύο λόγους, ἢ δύο σεσημειωμένα πη-
λίκα, ἢ δύο κλάσματα (226)· ὅταν ἄρα προκේται
πολλαπλασιάζειν δύο σεσημειωμένα πηλίκα θάτερον ἐπὶ
θάτερον, ἢ δύο κλάσματα, ἀριθμητικὰ ἢ συμβολικὰ,
πολλαπλασιασθήτω τὸ ὑπὲρ τῆς ἐτέρας γραμμῆς διὰ τῆ
ὑπὲρ τῆς ἐτέρας, εἴτα τὸ ὑπὸ τὴν ἐτέραν γραμμὴν διὰ
τῆ ὑπὸ τὴν ἐτέραν.

232. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ. Εἰς παντὸς λόγου ἐκάτερος
τῶν ὄρων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν πολλαπλασιασθῇ, ἢ τῆ λό-
γου δύναμις ἀμεταποίητος ἔσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰς τῆ α : ακ λόγου, ἢ $\frac{ακ}{α}$ πολλαπλα-

σιασθῇ ὅ, τε α καὶ ακ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν π, φημί ὅτι τὸ

ἀποτελέμενον $\frac{ακπ}{απ}$ ἐσι τὸ αὐτὸ τῷ $\frac{ακ}{α}$ λόγῳ· ἐσι γὰρ ὁ $\frac{ακ}{α}$

λόγος κ (55, 183), ἀλλὰ κ ἔστιν ὡσαύτως καὶ
 $\delta \frac{\alpha\kappa\pi}{\kappa\pi}$ λόγος. Ο. Ε. Δ.

Πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ 4 ἑκατέρω τῶν ὄρων τῷ
 λόγῳ 2:6, ἢ $\frac{2}{3}$, ὁ λόγος $\frac{2}{3}$ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ $\frac{2}{3}$ · ἐτεῖ
 $\frac{2}{3} = 3$, καὶ $\frac{2}{3} = 3$.

233. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐὰν διὰ τῷ αὐτῷ ποσῷ π
 ἑκάτερος τῶν ὄρων τῷ α : $\alpha\kappa$ λόγῳ διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον
 $\frac{\alpha}{\pi}$: $\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ τὸν αὐτὸν ἐμφανεῖ λόγον,

ΔΕΙΞΙΣ· Πολλαπλασιασθέντων τῶν $\frac{\alpha}{\pi}$, $\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ διὰ

π , ἔσται $\frac{\alpha\pi}{\pi}$, καὶ $\frac{\alpha\kappa\pi}{\pi}$, ἅπερ ἀναγωγῇ γίνεσθαι α , $\alpha\kappa$
 ἀλλαμὴν τῷδε τῷ διὰ π πολλαπλασιασμῷ ἐδόλως μετα-
 πεποιήται ὁ $\frac{\alpha}{\pi}$: $\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ λόγος (232)· ἄρα πρὶν ἢ πολλα-
 πλασιασθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\pi}$: $\frac{\alpha\kappa}{\pi}$ ὁ αὐτὸς ἦν τῷ α : $\alpha\kappa$ · ἄ-
 ρα τῷτε α καὶ $\alpha\kappa$ διὰ π διαιρεθέντων ὁ λόγος ἦκιστα μετα-
 τέτραπται. Ο. Ε. Δ.

234. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὰ ἄρα ὅμοια μέρη δυοῖν ὄλων,
 τὰ αὐτῶν φέρ' εἰπεῖν τέταρτα $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha\kappa}{4}$ εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ
 λόγῳ, ἐν ᾧ καὶ τὰ ὅλα· καὶ γὰρ ὁ $\frac{\alpha}{4}$: $\frac{\alpha\kappa}{4}$ λόγος ὁ με-
 ταξὺ τῶν τεταρτημορίων ἔστιν ὁ αὐτὸς λόγος α : $\alpha\kappa$, ὅς
 ἐστὶ μεταξὺ τῶν ὄλων, καὶ οἱ ὅροι α καὶ $\alpha\kappa$ διὰ τῆς αὐτῆς 4
 ποσότητος διήρηνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογίας γεωμετρικῆς.

235. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Πᾶσα γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐκτεθῆναι δύναται διὰ τῷ τύπῳ $\alpha : \alpha\kappa :: \delta : \delta\kappa$.

ΔΕΙΞΙΣ. Τῶν ἁπασαν γεωμετρικῶν ἀναλογίαν παρισυνόντων δύο λόγων ὁ μὲν πρῶτος αἰεὶ ἐκτεθῆναι ἔχει διὰ $\alpha : \alpha\kappa$, ὁ δὲ, ὡς τῷ πρώτῳ ἴσος (ἄλλως γὰρ ἔκ ἂν συζαίη ἀναλογία (185)) διὰ $\delta : \delta\kappa$ (229). ὅλος ἄρα ὁ τύπος ἔσαι $\alpha : \alpha\kappa :: \delta : \delta\kappa$. Ο. Ε. Δ.

236. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἰνα παραβληθῶσιν ἀλλήλαις δύο διαφέρουσαι ἀναλογίαι, ἐκτεθήσεται ἡ μὲν πρώτη διὰ $\alpha : \alpha\kappa :: \delta : \delta\kappa$ κληθέντος δ' εἴτα π φέρε τῷ ἴσῳ πηλίκῳ, τῷ ἐπικρατέντος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ, εἰ τῷ ἡ γυμμένῳ ὅρῳ τῷ πρώτῳ λόγῳ τῆς δευτέρας τῆς δὲ ἀναλογίας, καὶ ἡ τῷ κατὰ τὸν δεύτερον ταύτης λόγον ἡγυμμένῳ, προκύψει ὁ καινὸς τύπος $\epsilon : \epsilon\pi :: \eta : \eta\pi$, ἐμφαινὼν τὴν δευτέραν ἀναλογίαν (227, 229)

Τῶν δύο ἀναλογιῶν $2 : 6 :: 4 : 12$ καὶ $1 : 5 :: 4 : 20$, ἡ μὲν πρώτη δύναται ἐκτεθῆναι διὰ $\alpha : \alpha\kappa :: \delta : \delta\kappa$, ἡ δὲ δευτέρα διὰ $\epsilon : \epsilon\pi :: \eta : \eta\pi$.

237. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Πᾶσα γεωμετρικὴ συνεχὴς ἀναλογία αὐξουσα καὶ μειωμένη (193) δύναται παραστῆναι διὰ τῷ τύπῳ $\alpha : \alpha\kappa : \alpha\kappa^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ συνεχὴς ἀναλογία περιέχει ὅρας τρεῖς, ὧν ὁ δεύτερος διαιρεθεὶς διὰ τῷ πρώτῳ τὸ αὐτὸ πηλίκον δίδωσιν, ὃ καὶ ὁ τρίτος διαιρεθεὶς διὰ τῷ δευτέρῳ (187, 191). κληθέντος ἄρα α μὲν τῷ

πρώτε ὄρε, κ δὲ τῆ πηλίκου, ὁ δεύτερος ὡς διαιρετέος
 ἰσωθήσεται τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῆ πρώτε α ὡς διαιρέτε, κ
 τῆ κ πηλίκου, εἴτ' ἐν τῷ ακ· ὁ δὲ τρίτος ὡς διαιρετέος
 ἰσωθήσεται τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῆ δευτέρου ὡς διαιρέτε κ
 τῆ κ πηλίκου, εἴτ' ἐν τῷ ακ². Ο.Ε.Δ.

Ε'πὶ τῆς συνεχῆς ἀναλογίας $\div 2 : 8 : 32$ ἐκτεθέν-
 τος τῆ 2 διὰ α, τῆς ἐπικρατέντος πηλίκου 4 διὰ κ, ὁ
 μὲν 8 τεύθεται διὰ 2×4 , ἢ $\alpha \times \kappa$, ἢ ακ, ὁ δὲ
 32 διὰ 8×4 , ἢ $\alpha \kappa \times \kappa$, ακ²

238. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ε'φ' ἀπάσης γεωμετρικῆς
 ἀναλογίας τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ γι-
 νομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ ἀναλογία παρα-
 σαβῆναι δύναται διὰ τῆ τύπε $\alpha : \alpha\kappa :: \delta : \delta\kappa$ (235)· ἐνθα
 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων α κ δκ γινόμενον αδκ, προφανῶς
 ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ακ κ'δ γινόμενῳ ακδ Ο.Ε.Δ.

Ε'πὶ τῆς ἐν ἀριθμοῖς γεωμετρικῆς ἀναλογίας $2 : 8$
 $:: 5 : 20$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων 2 κ 20 γινόμενον ἐστὶν 2×20
 $= 40$, τὸδ' ὑπὸ τῶν μέσων $8 \times 5 = 40$

239. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Τὴναντίον δὲ τέσσαρες ὁ-
 ροὶ ἀναλογίαν συνισῶσιν, ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινό-
 μενον ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ ὡς, ἐὰν ἐπὶ α, β, γ, δ τὸ
 ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον αδ ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων
 βγ, οἱ τέσσαρες ὁροὶ ἀναλογίαν συνισῶσιν, ἔσαι δηλο-
 νότι $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ (187).

α. Πολλαπλασιάζω α κ β διὰ γ· ὅθεν $\alpha\gamma : \beta\gamma ::$
 $\alpha : \beta$ (232).

β. Πολλαπλασιάζω γ κ δ διὰ α· ὅθεν $\alpha\gamma : \alpha\delta ::$
 $\gamma : \delta$ (232).

γ'. Εἰπέερ, ἐξ ὑποθέσεως, $\alpha\delta = \beta\gamma$, δύναμαι ἐπὶ τῆς δευτέρας τῶν πρὸς τεθεισῶν ἀναλογιῶν ἀντὶ $\alpha\delta$ ἀντικαταστήσαι $\beta\gamma$. ἡ δ' ἀναλογία γενήσεται $\alpha\gamma : \beta\gamma :: \gamma : \delta$.

δ'. Ἐνταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ διαιρῶ $\alpha\gamma$ καὶ $\beta\gamma$ διὰ γ (233), ἀποκατασταθήσεται ἐν ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$
Ο. Ε. Δ.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εἰς ἅρα πληροφορίαν, ὅτι τέσσαράτινα ποσὰ ἀνάλογά εἰσι, ἀποχρήσει ἰδεῖν, εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐξισῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ.

241. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐκδυσὶν ἰσαλλήλων παραγομένων αἰ ἀναλογίαν συστήσαι δυνάμεθα, Πατέρες μὲν τὲς δύο ποιητὰς ἄκρως ποιούμενοι, Πατέρες δὲ, μέσους ὕ-
τως, εἴπερ εἴη $\alpha\delta = \beta\gamma$, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$. Ἐὰν δ' ἐν ἀριθμοῖς ἡ $2 \times 10 = 4 \times 5$, ἐκ τούτων ἀπολαβεῖν ἔχομεν $2 : 4 :: 5 : 10$. ἐντεῦθεν γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων 2×10 ποριθήσεται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων 4×5 .

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνισάντες, ὁκταχῶς μετατεθέντες, δύνανται καὶ ὕτω τὴν ἀναλογίαν μὴ λυμῆνασθαι. ἀπάσης γὰρ ἀναλογίας διὰ $\alpha : \alpha\pi :: \delta : \delta\pi$ παρισταμένης, ἔξεσαι διαθεῖναι τὰς ὁρες α. ὡς ἔχουσιν $\alpha : \alpha\pi :: \delta : \delta\pi$

β'. μεταλλαγῇ τῶν μέσων Πα-

τέρε ἀντὶ Πατέρε

$\alpha : \delta : \alpha\pi : \delta\pi$, ἥτις

ἐναλλάξ ἀναλογία καλεῖται

γ'. μεταλλαγῇ τῶν ἡγεμένων,

$\alpha\pi : \alpha :: \delta\pi : \delta$

δ'. τῶν ἐπομένων συνισάντων τὸν πρῶτον λόγον, τῶν δὲ ἡγεμέ-

νων τὸν δεύτερον

$\alpha\pi : \delta\pi :: \alpha : \delta$

ε. τιθεμένῃ πρώτῃ τῷ δπ.

δπ : δ :: απ : α

ς. τῷ αὐτῷ τιθεμένῃ πρώτῃ:

δπ : απ :: δ : α

ζ. τιθεμένῃ τῷ δ πρώτῃ

δ : δπ :: α : απ

ή. τιθεμένῃ τῷ αὐτῷ

δ : α :: δπ : απ

Ἐπὶ πασῶν γὰρ τῶνδε τῶν διαθέσεων ἰσθῆται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ (240).

Ἐπὶ τῆς ἀναλογίας α : 4 :: 3 : 6 μετατιθέντες ἕκαστον ἀλληλοδιαδόχως τῶν τεσσάρων τῆς ἀναλογίας ὄρων α, 4, 3, 6, ἔχομεν α. 2 : 4 :: 3 : 6, β. α : 3 :: 4 : 6, γ. 4 : 2 :: 6 : 3, δ. 4 : 6 :: 2 : 3, ε. 3 : 6 :: 2 : 4, ς. 3 : 2 :: 6 : 4, ζ. 6 : 3 :: 4 : 2, ή. 6 : 4 :: 3 : 2· ἐφ' ἐκάστης γὰρ διαφερέσης διαθέσεως ἐξισθῆται τὸ ὑπὸ τῶν μέσων τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένῳ.

243. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δυνησόμεθα ἔτι ἐπὶ τῆς ἀναλογίας α : απ :: δ : δπ ποιῆσαι τὰς ἐφεξῆς μεταβολὰς, μηδὲν ὑφισταμένων τῶν ὄρων, ὥστε τῷ ἀνάλογον εἶναι ἐξισωθῆαι.

244. α. Δυνάμεθα γὰρ τὰς ἐπομένους τοῖς ἡγεμένοις συνάψαι, ἢ καὶ τὰνάπαλιν· α + απ : απ :: δ + δπ : δπ

ἢ α : απ + α :: δ : δπ + δ

ἢ απ + α : α :: δπ + δ : δ κτ,

αὕτη δὲ ἡ μεταλλαγή Σύνθεσις λόγου ὀνομάζεται· ἐπεὶ δὲ ἐπὶ πασῶν τῶν διαφορῶν τῶνδε διαθέσεων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἰσθῆται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων παραγομένῳ, ἄρα τῆς ἀναλογίας οἱ ὄροι ἐκ ἐκπίπτουσι.

245. β. Δυνάμεθα τὰνάπαλιν ἀφελεῖν τὰς ἐπομένους τῶν ἡγεμένων, ἢ καὶ ἀντιστρόφως.

α — απ : απ :: δ — δπ : δπ

α : απ — α :: δ : δπ — δ

απ — α : α ; δπ — δ : δ

καλι
ἄκρω
σκετ

μεθα
ἐπομ

ἀεὶ γ
σων

σην

λογ
μέστ

ωται

ἐπὶ

(39

(78

τῶν

ἀπὸ

τεῦθ

εἰσι

καὶ

καλεῖται δὲ τῆτο λόγος *Διαίρεσις*· τὸ δ' ὑπὸ τῶν ἄκρων καὶ τῶν μέσων γινόμενον ἴσων ἐνρίσκειται.

246. γ'. Διὰ τῆς αὐτῆς ποσῆς κ πολλῶν καταστάσασθαι διυμένειαι, ἥται μόνος τὸς ἡγυμένους, ἢ τὸς τε ἡγυμένους καὶ ἐπημένους διὡ λόγων, ἢ μόνος τὸς ἐπὶς λόγος ὁρῶς ἔτων;

ακ : απ :: δικ : διπ

ἢ α : απκ :: δι : διπκ

ἢ ακ : απκ :: δικ : διπκ

ἢ ακ : απκ :: δι : διπ

ἢ α : απ :: δικ : διπκ

αὖτε γὰρ ἐξισωθήσεται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ποσινύπτωντι.

247. δ'. Καὶ διαμερεῖν δὲ διυηγήμεναι ἀσώτως ἐκείνην τῶν ποσικτεθείσων τῶν ἐξέων (233).

248. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ἐν ἀπώσῃ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσων ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πῶσα γὰρ συνεχὴς ἀναλογία παρῆναι· ἀπαι διύπασται διὰ τῆς τύπης $\frac{α:απ:απ^2}{(237)}$ · ἀλλ' ἐπὶ τοῦδε τοῦ τύπου τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ποσινύπτων $α^2 π^4$ (39, 40) ἴσων ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ απ × απ, ἢ $α^2 π^4$ (78) τῷ ἀπὸ τῆς μέσης ἀναλόγως απ · Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ τῆς συνεχῆς ἀναλογίης $\frac{α:απ:απ^2}{2:6:18}$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον 2 × 18 ἴσων ἐστὶ τῷ 6 × 6, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης ἀναλόγως τετραγώνῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰ δευτέρηματα Γ'. Δ'. Ε'. καὶ τὰ ἐντέλευτα ποσινύπνται ποσινύπματα μεγίστην ἔχονσι *Χρηστῶν*· εἰσι γὰρ τὰ εἰρηχεῖα τῶν παλαιῶν γεωμετρικῶν διειξέων, καὶ μὴν καὶ τῶν ἀριθμητικῶν ποσέξέων, τώτε μάλα εὐκύν-

τελῆντα τῷ κοινωνικῷ βίῳ· τῷτε γὰρ Γεωμέτρῳ καὶ τῷ Ἀριθμητικῷ ἢ πᾶσα τέχνη ἐν τούτῳ μάλιστα κεῖται, ἐπίστασθαι ἀμέλει χρῆσθαι ταῖς διαφοραῖς ταῖςδε ιδιότησιν πρὸς ἀκάρτισιν τῶν δεξιῶν, ἢ γυνὴ πρὸς τὸ ἀπευθύνασθαι εἰς τὰς τῷ λογισμῷ ἐργασίας· σαφέστερον δὲ τὸ πρᾶγμα κατασαθῆσεται διὰ τῶν δε.

249. Αὐτίκα γὰρ θώμεν, ὅτι ποσότητες τέσσαρες, ἀριθμοὶ, φέρ' εἰπεῖν, ἢ γραμμαί, ἃ αἰεὶ καλεῖν δυνάμεθα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ἀνάλογόν εἰσι, συνισῶντα τὴν ἀναλογίαν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$. Μ.

250. α'. Συναγαγεῖν δυνάμεθα, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (238).

$$\beta'. \text{Ὅτι } \alpha = \frac{\beta\gamma}{\delta}, \text{ καὶ } \delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \text{ καὶ } \beta = \frac{\alpha\delta}{\gamma} \text{ } \gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta}$$

(Ἀριθ. 108).

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῆς Μ ἀναλογίας, ἔστω $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 6$, καὶ $\gamma = 3$, καὶ $\delta = 9$. ἔκ᾽ ἐν ἡ Μ ἀναλογία γενήσεται $2:6::3:9$. ἐντεῦθεν συναγεται

$$\alpha'. \text{ὅτι } 2 \times 9 = 6 \times 3. \beta'. \text{ὅτι } 2 = \frac{6 \times 3}{9}. \gamma'. 9 =$$

$$\frac{6 \times 3}{2}. \delta'. 6 = \frac{2 \times 9}{3}. \epsilon'. 3 = \frac{2 \times 9}{6}.$$

251. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἄρα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀναλόγων ὄρων, εἰάν οἱ τρεῖς ἐγνωσμένοι ὡσι, ῥᾶστα καὶ ἡ τέταρτη δύναμις γνωσθήσεται.

252. γ'. Ἐπὶ ταύτῃ δὲ τῇ ἀρχῇ καὶ ἡ τῶν τριῶν γεωμετρικῇ μέθοδος ἐρεῖδεται, ἡ τῷσαύτην ἔχουσα ἐν τῷ κοινωνικῷ βίῳ τὴν χρῆσιν. Τεσσάρων γὰρ ἀριθμῶν, εἰς ἡδὴ ἐμφαίνω διὰ τῶν γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, α-

νάλογον ὄντων πρὸς ἀλλήλους $\alpha:\beta::\gamma:\delta$, τὰς τρεῖς μὲν γινώσκω, ἀγνοῶ δὲ τὸν τέταρτον· εἰ μὲν ἔν ὅτος εἴη ὁ δ , πολλαπλασιάζω ἐπὶ γ τὸ β , τὸ δὲ γινόμενον διαιρῶ διὰ α · ἔκβην τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος τέταρτος· εἰ δ' ὁ α , πολλαπλασιάζω β ἐπὶ γ , διαιρῶν διὰ δ τὸ γινόμενον· εἰ δ' ὁ β , τὸ ὑπὸ α καὶ δ προκύπτει διαιρῶ διὰ γ · εἰ δὲ τέλος ἀγνοοῖτο ὁ γ , διαιρῶ διὰ β τὸ ὑπὸ α καὶ δ παραγόμενον.

253. δ'. Γινώσκεται, ὅτι καὶ τρεῖς ποσότητες α , β , γ συγκροτῶσι τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν $\alpha:\beta:\gamma$ (P)· ἂν ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι (248) $\alpha\gamma = \beta^2$, ὅθεν $\alpha = \frac{\beta^2}{\gamma}$, καὶ $\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}$, καὶ $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$.

254. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς συνεχῆς ἀναλογίας P γινώσκηται τὰ α καὶ β , βυλῶμεθα δὲ εὑρεῖν τὸ γ , τετραγwynίζον μὲν τὸ β , τὸ δὲ β^2 τετράγωνον διαιρετέον διὰ α · τὸ δὲ πηλίκον δώσει τὸ γ · εἰ μὲν δὲ γινώσκωμεν τὸ β καὶ γ , τὸ β^2 τετράγωνον διελόντες διὰ γ , ἔξομεν τὸ α · εἰ μὲν τέλος γινώσκωμεν α καὶ γ , τὴν ὑπὸ αὐτῶν γινομένην $\alpha\gamma$ ἔξαγαγόντες τὴν ῥίζαν τὴν τετραγwynεῖον ἀποληψόμεθα τὸ β .

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐὰν ᾖ $2:6:\chi$ · τὴν ἀπὸ 6 τετραγwynν 36 διὰ 2 διαιρεθέντος, προκύψει $18 = \chi$ · εἰ μὲν δ' ᾖ $\chi:6:18$, τὸν αὐτὸν 36 τετράγωνον διὰ 18 διελόντες ἔξομεν $2 = \chi$ · τέλος δὲ εἰ μὲν ᾖ $2:\chi:18$, τὴν ὑπὸ 2 καὶ 18 γινομένην 36 ἔξαγαγόντες τὴν τετραγwynνικὴν ῥίζαν ἀποληψόμεθα 6 μέσον ἀνάλογον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ταῦτα διττὰ εἶδη τῆς τῶν τριῶν μεθόδου τὰ ἄρτι δεδειγμένα (252, 254) ἐκτελεῖνται

ἔχ' ὅπως ἐν ἀριθμοῖς καὶ στοιχείοις, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐν γραμμαῖς κτ.

255. ε'. Εἰ ἂν τέτταρα ἐκτεθειμένα ποσὰ, τέσσαρες, φέρ' εἶπεν, γραμμαί, συνῶσιν ἀναλογίαν $\alpha:\beta::\gamma:\delta$. ἐκ δὲ ταύτης τῆς τῶν ὄρων διαθέσεως μὴ ἔπεται εὐθέως ἡ ζητούμενη δειξίς, ληπτέον μίαν τινὰ τῶν ἐτέρων ἐπὶ τὰ δυνατῶν διαθέσεων, ἢ ἂν ἄγοι ἐπὶ τὸ σκοπούμενον (242) φέρ' εἶπεν τὴν $\alpha:\gamma::\beta:\delta$.

256. ς'. Εἰ ἂν μὴ ἐξῇ διὰ τῶν τεσσάρων τῆς ἀναλογίας ὄρων $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ συμπληρῶσαι τὴν προκειμένην δειξίν, ποιῶμεν ἐπὶ τῶν δε τῶν τεσσάρων ὄρων ἐκ τῶν διαφορῶν ἐναλλαγῶν, μηδόλως τῆς ἀναλογίας ἐξισαμένων (244 κτ.) τῶν ὄρων, τὴν δυνατῶς ἔχασαν ἀγαγεῖν ἡμᾶς ἐπὶ τὸ σκοπούμενον τέλος.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. Πολλαπλασιαζομένε λόγε τινός, ἢ πηλίκου σεσημειωμένε, ἢ κλάσματος, οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπὶ ὁλοχερές ποσὸν τὸ π, πολλαπλασιασθήσεται τὸ ὑπὲρ τῆς γραμμῆς ποσὸν α ἐπὶ τὸ ὁλοχερές π, τὸ δὲ ζητούμενον προκύπτει ἔσται $\frac{\alpha\pi}{\beta}$

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀπὸς πολλαπλασιασμοῦ ἐστὶν ἀσφαλές, εἰ τὸ παραγόμενον ἢ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὡς ὁ πολλαπλασιασθὴς πρὸς τὴν μονάδα· ἀλλ' αὖ τὸ παραγόμενον $\frac{\alpha\pi}{\beta}$ ἐστὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον $\frac{\alpha}{\beta}$ ὡς ὁ π

πολλαπλασιασθὴς πρὸς τὴν 1, εἴγε $\frac{\alpha\pi}{\beta}:\frac{\alpha}{\beta}::\pi:1$ ὁδὴν ἐστὶν ἀλλ' ἢ $\alpha\pi:\alpha::\pi:1$ (240), ἔνθα διήρηται οἱ δύο

ὅροι $απ : α$ διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος $β$, μηδεμιᾶς γινωμένης ἀλλοιώσεως (233). ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Εἰν ἀριθμοῖς. Κεῖθω πολλαπλασιάσαι τὸ $\frac{3}{4}$, ὅπερ ἐπίσης ἐστὶ καὶ λόγος, καὶ πηλίκον σεσημειωμένον, καὶ κλάσμα, ἐπὶ τὸν ὀλοχρεῖν 5· εἰάν ἔν πολλαπλασιασθῇ τὸ ὑπὲρ τῆς γραμμῆς 3 ἐπὶ τὸ ὀλοχρεὲς 5, καὶ γραφῇ $\frac{3 \times 5}{4}$, ἢ $\frac{15}{4}$, παριωθήσεται προκύπτων ἀκριβές· ἐστὶ γὰρ

ἐν τέτοις ἡ ἐξῆς ἀναλογία: τὸ προκύπτων $\frac{15}{4}$ ἐστὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον $\frac{3}{4}$ ὡς ὁ πολλαπλασιαστής 5 πρὸς τὴν 1, εἴγε $\frac{15}{4} : \frac{3}{4} :: 5 : 1$ ἔδεν ἐσιν ὅτι μὴ ἡ ἀναλογία $15 : 3 :: 5 : 1$ διηρημένη τὸν πρῶτον λόγον διὰ 4, ὅπερ ἤμισα λυμαίνεται τὴν ἀναλογίαν (240).

258. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Δύω σεσημειωμένα πηλικά τὰ $\frac{αω}{β}$, $\frac{α}{β}$, ὧν διαιρέτης μὲν κοινὸς ὁ $β$, διαιρετέοι δὲ διάφοροι οἱ $απ$, $α$, πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ αὐτῶν διαιρετέοι $αω$, $α$

ΔΕΙΞΙΣ. Παριωθήσεται γὰρ ἐπιεικῶς ἡ ἀναλογία $\frac{αω}{β} : \frac{α}{β} :: αω : α$ (240, 257) Ο. Ε. Δ.

Εἰπὶ τῶν $\frac{20}{4}$, $\frac{5}{4}$, ἐστὶ $\frac{20}{4} : \frac{5}{4} :: 20 : 5$ (αὐτόμ.).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰάν ἄρα διαιρέσεις δύο, ἔχουσαι τὸν αὐτὸν διαιρέτην, κοινῇ πλετώσι καὶ τῷ διαιρετέῳ, τὰ πηλικά ἰσάλληλα ἔσονται.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. Τναντίον δὲ εἰάν δύο πηλικά, τὸν αὐτὸν ἔχοντα διαιρετέον, μὴ ἔχωσι καὶ διαιρέτην τὸν αὐτὸν, οἷα τὰ $\frac{β}{αω}$, $\frac{β}{α}$, ἐν λόγῳ ἀντιθέ-

τῶ ἔσονται τῶν διαιρετῶν· προκύψει γὰρ ἐντεῦθεν ἡ ἀνα-

λογία $\frac{\beta}{\alpha\pi} : \frac{\beta}{\alpha} :: \alpha : \alpha\pi$ (240,) ἐν ἣ ὁ διαιρετὴς τῷ

πρώτῳ ὄρει $\alpha\pi$ τέταρτος ἐγένετο ὄρος, ὁ δὲ τῷ δευτέρῳ ὄρει διαιρετὴς α ἐγένετο τρίτος, ὅπερ δίδωσι τάξιν ἀν. τῆσταν. Ο. Ε. Δ.

Ε'πὶ $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{4}$ ἔσται ἡ ἀναλογία $\frac{1}{20} : \frac{1}{4} :: 4 : 20$ (240).

260. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'. Συμβάν δὲ ἐπὶ δύο διαιρέσεων τὴν διαιρετέον εἶναι ἀντιπεπονητότως, ὥσπερ οἱ διαιρέται, τὰ πηλίκα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετέων τετράγωνα, ἢ ἀντιστρόφως ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'πὶ τῶν $\frac{\alpha}{\beta\pi}$, $\frac{\beta}{\alpha\pi}$, ἔνθα οἱ διαιρετέοι

α , β ἀντιστρόφως εἰσὶν, ἢ ὡς οἱ διαιρέται $\beta\pi$, $\alpha\pi$, εἴγε ἔσιν ἀληθῶς $\alpha : 3 :: \alpha\pi : \beta\pi$, τὰ δύο πηλίκα $\frac{\alpha}{\beta\pi}$,

$\frac{\beta}{\alpha\pi}$ παρέχουσι τὴν ἀντιλογίαν $\frac{\alpha}{\beta\pi} : \frac{\beta}{\alpha\pi} :: \alpha^2 : \beta^2$, εἴγε

τὸ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενον $\frac{\alpha^2\beta}{\pi\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\pi}$ ἰσῆται τῷ ὑπὸ τῶν

ἄκρων $\frac{\alpha\beta^2}{\beta\pi} = \frac{\alpha\beta}{\pi}$. οἱ αὐτοὶ δὲ δίδωσι καὶ τὴν ἀναλογίαν

$\frac{\alpha}{\beta\pi} : \frac{\beta}{\alpha\pi} :: \alpha^2 : \beta^2$ (240). ἀλλὰ μὲν ἡ μὲν πρῶ-

τη δείκνυσιν, ὅτι τὰ πηλίκα $\frac{\alpha}{\beta\pi}$, $\frac{\beta}{\alpha\pi}$ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα,

ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετέων τετράγωνα α^2 , β^2 , ἡ δὲ,

ὡς εἰσὶν ἀντιστρόφως ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετῶν τετράγωνα $\beta^2 \omega^2$, $\alpha^2 \omega^2$ · (189) · ἐν γένει ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

Εἰν ἀριθμοί 5. Εἰπὶ τῶν δύο πηλίκων $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$ ἐν οἷς οἱ διαιρετέοι εἰσὶν ἐν ἀντιπεπονητότι λόγῳ τῶν διαιρετῶν εἴτ' ἔν 2:6::4:12 (240) ἔστιν ἡ ἀναλογία $\frac{1}{2}$: $\frac{5}{4}$::4:36, ἐφ' ἧς τὸ πρῶτον πηλίκον λόγον ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆ πρώτης διαιρετέου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ δευτέρας (240).

Εἰπὶ τῶν αὐτῶν δὲ $\frac{1}{2}$: $\frac{5}{4}$::16:144 (240), ἐφ' ἧς ἀναγινώσκωμεν, τὸ πρῶτον πηλίκον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆ διαιρετέου τῆ δευτέρας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ πρώτης.

261. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἰπεὶ δύο κλάσματα δύο πηλικά ὑπάρχει σεσημειωμένα, ὧν διαιρετέα μὲν εἰσὶν οἱ ἀριθμηταί, διαιρέται δὲ οἱ παρονομασαί· δυνατόν ἄρα ἐκ τῶν προσκετεθέντων τριῶν θεωρημάτων τὰ ἐξῆς ἐπαγαγεῖν.

α. Δύο κλάσματα, τὸν αὐτὸν ἔχοντα παρονομασὴν, ἔσονται πρὸς ἄλληλα, ὡς περ οἱ αὐτῶν ἀριθμηταί. β'. τὸν αὐτὸν δὲ ἔχοντα ἀριθμητήν, ἔσονται ἀντιστρόφως ὡς οἱ παρονομασαί. γ'. ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμηταί τῶν δύο κλασμάτων ἀντιπεπονητότως ὦσιν, ὡς οἱ παρονομασαί, τὰ κλάσματα ταῦτα ἔσονται, ἥτοι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμητῶν τετράγωνα, ἢ ἀντιστρόφως ὥσπερ τὰ ἀπὸ τῶν παρονομασῶν.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι'. Εἰὰν πλειόνων ἀναλογιῶν πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν, ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τῆ πρώτου, ὁ δὲ δεύτερος διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ἐξῆς ἕτω, τὰ προκίπτοντα, ἢ τὰ πηλικά, καὶ ταῦτα ἀνάλογον ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Δεινὸν ὁποιωνῶν ἀναλογιῶν ἡ μὲν ἂν πα-

ρασαίη διὰ α : απ :: δ : δπ, ἢ δὲ διὰ ε : εκ :: η : ηκ (236).
 ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀπὸ ε, απ ἐπὶ εκ κτ., τὰ
 παραγόμενα αε, απεκ, κτ. ἀνάλογον καὶ αὐτὰ ἔσονται.
 ἐπεὶ περ ἐν αε : απεκ :: δη : δπηκ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων
 γινόμενον ἴσται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ· β'. εἰν
 διαιρεθῶσιν α διὰ ε καὶ απ διὰ εκ κτ., τὰ πηλίκα $\frac{\alpha}{\epsilon}$,

$\frac{\alpha\pi}{\epsilon\kappa}$ κτ. ἔσονται καὶ ταῦτα ἀνάλογον· ἐπὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\epsilon} : \frac{\alpha\pi}{\epsilon\kappa} ::$

$\frac{\delta}{\eta} : \frac{\delta\pi}{\eta\kappa}$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.

Εἰν ἀριθμοῖς· Εἰν πολλαπλασιασθῶσι, καθ'
 ἣν σεσημειῶνται τάξιν, αἱ δύο ἀναλογίαι 4 : 20 :: 2 :
 10, καὶ 2 : 10 :: 1 : 5, τὰ παραγόμενα 8, 200, 2,
 50 παρέξῃσι τὴν ἀναλογίαν 8 : 200 :: 2 : 50 (240).
 εἰν δὲ διαιρεθῶσι, τὰ πηλίκα 2, 2, 2, 2 σημήσῃσι
 τὴν ἀναλογίαν 2 : 2 :: 2 : 2 (αὐτόθι).

263. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ. Εἰν τέσσαρα ποσὰ ἀνά-
 λογον ὦσι, καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν ὅμοιοι βαθμοὶ, ἢ αἱ αὐτῶν ῥί-
 ζαι ἀνάλογον ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴσω ἀνάλογον τέσσαρά τινα ποσὰ τὰ α :
 απ :: δ : δπ, φημὶ δὲ ἂν ὡς καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν ὅμοιοι βαθμοὶ, οἱ
 κύβοι, φέρε, ἀνάλογον ἔσονται· ἐστὶ γὰρ α³ : α³π³ ::
 δ³ : δ³π³ (240, 82). β'. καὶ αἱ ὁποιαδήποτεν αὐτῶν
 ὅμοιαι ῥίζαι, αἱ τέταρται φέρ' εἰπεῖν, ἀνάλογον ἔσονται·
 εἴγε α^{1/4} : α^{1/4}π^{1/4} :: δ^{1/4} : δ^{1/4}π^{1/4} (124, 240) Ο. Ε. Δ.

Εἰν ἀριθμοῖς. Εἰν τῆς 1 : 2 :: 4 : 8 ἀναλογίας ἑ-
 κκτος ὅρος κυβωθῇ, καὶ οἱ κύβοι ἔσονται ἀνάλογον, 1 : 8 ::
 64 : 512 (240). εἰν δὲ ἑκάστῃ ὅρῃ τῆς ἀναλογίας 4 :

36 :: 9 : 81 ἡ τετραγωνικὴ ἑξαχθὴ ρίζα, ἔσαι ἡ ἀναλογία 2 : 6 :: 3 : 9.

264. ΣΧΟΛΙΟΝ. Αἱ ρίζαι ἕκ ἐστὶν ἀνάλογον τοῖς ἀπ' αὐτῶν βαθμοῖς, ὡς μᾶλλον ἐν τοῖς ἐφεξῆς φανήσεται· ἔ γὰρ δυνατόν εἶπεν ὡς α πρὸς β λόγον ἔχει ὃν α^2 πρὸς β^2 . ἐπὶ γὰρ τῶν α, β, α^2 , β^2 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $\alpha\beta^2$ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων $\beta\alpha^2$ προφανῶς ἔστιν ἴσον· ἡ δὲ μὲν, φέρε, 1 πρὸς 2 λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ 1 τετράγωνον, ὃ ἔξ αὐτὸ ἔστιν 1, πρὸς τὸ ἀπὸ 2 τετράγωνον 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ προόδου γεωμετρικῆς.

265. Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος, οἷα ἡ $\frac{1}{2} \cdot 4$. 6. 8 δύναται προδήλως καὶ οὕτως ἄρξασθαι, ὥτως $\frac{1}{2} \cdot 0$. 2. 4. 6. 8. ἀντίκα γὰρ δῆλον, ὅτι 2 ὑπερέχει τῷ 0, ὅσῳ ὁ 4 τῷ 2· ἡ γέμνη γεωμετρικὴ ἔ δύναται ἔχειν ο κυρίως εἰλημμένον ὡς ἓνα τῶν αὐτῆς ὅρων· αὕτη γὰρ εἰς χος ἔστιν ὅρων, ὧν ἄτερος τὸν ἕτερον ὀλοχερῶς, ἢ ἐν μέρει, περιέχει· ἀλλὰ μὲν ο κυρίως εἰλημμένον ἢ δὲν ἀλλ' ἐλλειψις τῷ ὄντος ὑπάρχον, ἔ δύναται περιέχειν ὃν, ἄρα ἡ δὲ ὅρος προόδου γεωμετρικῆς ὑπάρχειν δύναται.

266. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἢ τοι αὖξαι ἐπ' ἄπειρον, οἷα ἡ $\frac{1}{2} :: 1 : 5 : 25 : 125$ κτ. ἢ γῆν ἐπ' ἄπειρον μειῖται, οἷα ἡ $\frac{1}{2} :: 8 : 2 : \frac{1}{2} : \frac{1}{8} : \frac{1}{27}$ κτ.

267. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀπάσης γεωμετρικῆς προόδου τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῶν ὅρων, οἱ τῶν ἄκρων ἴσον ἀπέχουσιν, ἢ γῆν τῷ ἄ-

πὸ τῆ μέσῃ ὄρη τετραγώνῳ, εἰάν ὁ τῶν ὄρων ἀριθμὸς ἦ περιττός· ἐπὶ γὰρ τῆς προεκτεθείσης προόδου $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4 : ap^5$ κτ. φανερόν ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων $a \times ap^5 = a^2 p^5$, καὶ τὸ ὑπὸ τῆ δευτέρῃ καὶ τῆ παραλήγοντος $ap \times ap^4 = a^2 p^5$, καὶ τὸ ὑπὸ τῆ τρίτῃ καὶ τῆ προπαραλήγοντος $ap^2 \times ap^3 = a^2 p^5$, καὶ τὸ ἀπὸ τῆ μέσῃ ap^3 τετράγωνον $a^2 p^5$ πάντα ἰσάλληλά εἰσιν Ο. Ε. Δ.

268. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος, καὶ αὐξουσα καὶ μειωμένη, παρασταθῆναι ἂν ἔχῃ διὰ τῆ τύπου $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$ κτ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ πρόοδος ἢ δὲν ἐστὶν ἀλλ' ἢ ἀναλογία συνεχῆς ἐκ πλειόνων, ἢ τριῶν, συγκεκροτημένη ὄρων (192)· πᾶσα δὲ γεωμετρικὴ ἀναλογία συνεχῆς παρίσταται διὰ τῆ τύπου $\div a : ap : ap^2$ (237)· δηλὸν ἄρα τὸ ζητούμενον.

269. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Α' πάσης γεωμετρικῆς προόδου ἑκάστος ὅρος ἰσῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ πρώτῃ ὄρη καὶ τῆ πηλίκῃ, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν ἐκδηλούμενον διὰ τῆ ἀριθμῷ τῶν ἡγεμένων ὄρων· ἐπὶ γὰρ τοῦ γενικῆς τύπου $\div a : ap : ap^2 : ap^3 : ap^4$ κτ. ὁ πέμπτος ὅρος ap^4 , φέρεται, ἐξισῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ πρώτῃ ὄρη a καὶ τῆ πηλίκῃ, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν τέταρτον, εἴγε τέσσαρες ὅροι τῆ πέμπτῃ ἡγῶνται· ὁ δὲ γενικὸς τυτὴν τύπος δηλωθεὶς ἂν ἔτω $\mu = ap^{n-1}$, ἐν ᾧ τὸ μὲν μ τὸν ζητούμενον ἐμφαίνει ὅρον· τὸ δὲ n τὸν χῶρον, ἐν ᾧ κεῖται.

Ἐπὶ $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ ὁ πέμπτος ὅρος 32 ἰσῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ πρώτῃ 2 καὶ τῆ πηλίκῃ 2, τοῦ ἐν τεταρτῇ τῇ προόδῳ κρατῦντος, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν τέταρτον, εἴτε ἐν τῇ 16. καὶ γὰρ $16 \times 2 = 32$.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐν ἀπάσῃ γεωμετρικῇ προοδῷ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ὁ δ' αὐτὸς πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὃν ὁ ἀπὸ τῆς πρώτης κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἢ γὰρ ἐπὶ τῆς τύπῃ $\therefore \alpha : \alpha\pi : \alpha\omega^2 : \alpha\omega^3$, ὁ πρῶτος ὅρος α πρὸς τὸν τρίτον $\alpha\omega^2$ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τετραγώνου α^2 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας $\alpha^2\omega^2$, εἴγε ἔστιν $\alpha : \alpha\omega^2 :: \alpha^2 : \alpha^2\omega^2$ (240)· ὁ δ' αὐτὸς πρῶτος α πρὸς τὸν τέταρτον $\alpha\omega^3$, ὡς ὁ τῆς πρώτης κύβου α^3 πρὸς τὸν τῆς δευτέρας $\alpha^3\omega^3$, ἐπεὶ $\alpha : \alpha\omega^3 :: \alpha^3 : \alpha^3\omega^3$ (αὐτόθ.)· ἢ ἐν γένει, ἢ ἐν ἀπάσῃ γεωμετρικῇ προοδῷ ὁ πρῶτος ὅρος λόγον ἔχει πρὸς ἕτερόν τινα ὅρον εἰλημμένον κατὰ τὸ δοκῆν, ὃν ἔχει ὁ αὐτὸς πρῶτος ὅρος ὑψωθείς εἰς βαθμὸν, ἐμφαινόμενον τῷ ἀριθμῷ τῶν ὁρῶν, τῶν ἡγυμένων τῆς προκειμένης ὁρῆς, πρὸς τὸν δεύτερον ὅρον, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἡρμένον βαθμὸν.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐν ἀπάσῃ γεωμετρικῇ προοδῷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγυμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων λόγον ἔχει, ὃν εἰς τῶν ἡγυμένων πρὸς τῶν ἐαυτῷ ἐπόμενον· ἢ γὰρ ἐφ' ἀπάσης προοδῆ πάντες οἱ ὅροι πλην τῆς ἐσχάτης εἰσὶν ἡγυμένοι, ἢ πάντες παρὰ τὸν πρῶτον εἰσὶν ἐπόμενοι· τέτε τεθέντος φημι, ὡς ἐπὶ τῆς τύπῃ $\therefore \alpha : \alpha\omega : \alpha\omega^2 : \alpha\omega^3 : \alpha\omega^4$, τὸ πάντων τῶν ἡγυμένων ἄθροισμα $\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3$ πρὸς τὸ πάντων τῶν ἐπομένων ἄθροισμα $\alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 + \alpha\omega^4$ λόγον ἔχει, ὃν εἰς ἡγυμένος, ὁ α φέρε, πρὸς τὴν ἐαυτῷ ἐπόμενον $\alpha\omega$, εἴτ' ἐν $\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 : \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 + \alpha\omega^4 :: \alpha : \alpha\omega$ · ἔστι γὰρ, ὡς δῆλον, τὸ ὑπὸ τῶν ἁκρῶν γινόμενον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.

272. Ἐπὶ $\therefore 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ τὸ τῶν ἡγυμένων ἄθροισμα

σμα $2 + 4 + 8 + 16$, εἴτ' ἐν 30 πρὸς τὸ τῶν ἐπομένων $4 + 8 + 16 + 32$, εἴτ' ἐν 60, ὡς εἰς τῶν ἡγεμένων ὁ 2 πρὸς τὸν αὐτῷ ἐπόμενον 4· καὶ γὰρ $30 : 60 :: 2 : 4$ (240).

273. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἀπάσης γεωμετρικῆς προοδου ὁ δευτέρως ὅρος πλὴν τῆ πρώτης λόγον ἔχει πρὸς τὸν πρῶτον, ὃν ἔχει ὁ ἔχαιτος πλὴν τῆ πρώτης πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἡγεμένων τῆ ἐσχάτης· ἐπὶ γὰρ τῆ τύπου $\therefore a : a\omega : a\omega^2 : a\omega^3 : a\omega^4$ φημι ὅτι $a\omega - a$ πρὸς a λόγον ἔχει, ὃν ὁ $a\omega^4 - a$ πρὸς τὸ πάντων τῶν τῆ ἐσχάτης ἡγεμένων ὅρων ἄθροισμα $a + a\omega + a\omega^2 + a\omega^3$, τετέστιν $a\omega - a : a :: a\omega^4 - a : a + a\omega + a\omega^2 + a\omega^3$ (P), καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $a^2\omega + a^2\omega^2 + a^2\omega^3 + a^2\omega^4 - a^2 - a^2\omega - a^2\omega^2 - a^2\omega^3 = a^2 + a^2\omega^4$ ἴσον ἐστὶ τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῶν μέσων $a, a\omega^4 - a$.

274. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Προοδου γεωμετρικῆς ἀπάσης καὶ αἱ διαφοραὶ τῶν ἀλληλοδιαδόχων ὅρων πρόοδον συγκροτῶσι γεωμετρικὴν· εἰ γὰρ ἡ $\therefore a : a\omega : a\omega^2 : a\omega^3 : a\omega^4$ κτ. ἔσται καὶ $\therefore a\omega - a : a\omega^2 - a\omega : a\omega^3 - a\omega^2 : a\omega^4 - a\omega^3$ · τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων ἰσῆται τῷ γινόμενῳ ὑπὸ τῶν μέσων (269).

275. ΠΟΡΙΣΜΑ Σ'. Ἐν ἀπάσῃ γεωμετρικῇ προοδῷ τὸ ὑπὸ τῶν δύο ἄκρων γινόμενον ἰσῆται τῷ γινόμενῳ ὑπὸ δύο ὅρων, οἵτινες ἐπίσης τῶν ἄκρων ἀπέχουσιν· ἐπὶ γὰρ τῆ γενικῆς τύπου $\therefore a : a\omega : a\omega^2 : a\omega^3 : a\omega^4$ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆ δευτέρου ὁρος $a\omega$, καὶ τῆ τετάρτης $a\omega^3$ ἰσῆται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων $a, a\omega^4$ γινόμενῳ $a^2\omega^4$ · εἰδ', ὡς ἐνταῦθα, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς εἴη περιττός, τὸ ἀπὸ τῆ μέσης $a\omega^2$ τετράγωνον $a^2\omega^4$ ἰσῆται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενῳ.

Ε'πι $\ddot{\vdots} 2:4:8:16:32$ εἰν $4 \times 16 = 2 \times 32$, καὶ $8 \times 8 = 2 \times 32$.

276. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Στίχος ἅπας ὄρων, διὰ τῷ αὐτῷ γράμματος ἐκτεθειμένων, ὧν οἱ δείκται συνισῶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν, πρόοδον παρισῶ γεωμετρικὴν.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημι δὴ, ὡς οἱ ὅροι τῷ εἶχε $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ κτ. διὰ τῷ αὐτῷ α γράμματος ἐκτιθέμενοι, καὶ δείκτας ἔχοντες ἀριθμητικὴν σχηματίζοντας πρόοδον τὴν $\ddot{\vdots} 1.2.3.4$ (192) συνισῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον τὴν $\ddot{\vdots} \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4$. ἕκαστος γὰρ ὅρος (192), διὰ τῷ πρὸ αὐτῷ διαιρεθείς, δίδωσιν αἰ πηλίκον τὸ α .

277. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ κατὰ συνέχειαν βαθμοὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἢ αἰ κληθεῖν ἂν α , εἴτ' ἐν $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ κτ. γεωμετρικὴν παρισῶσι πρόοδον· πᾶσαι γὰρ αὗται (276) διὰ τῷ αὐτῷ γράμματος ἐκτιθέμεναι δείκτας ἔχουσιν ἀριθμητικὴν συγκροτῆντας πρόοδον.

Οὕτως οἱ κατὰ τὸ συνεχές βαθμοὶ τῷ 3 συνισῶσι πρόοδον γεωμετρικὴν τὴν $\ddot{\vdots} 3:9:27:81:243$ κτ.

278. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Εἴαν στίχος ποσότητος τῆς α πολλαπλασιασισαυδῇ τὸν μὲν πρῶτον ὅρον ἅπαξ διὰ ω , τὸν δὲ δεύτερον δις διὰ τῷ αὐτῷ ω , καὶ ἑξῆς ἕτω, τὰ παρὰ γόμενα κατὰ διαδοχὴν $\alpha\omega^1, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4$ κτ. συστήσουσι γεωμετρικὴν πρόοδον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκαστος γὰρ ὅρος, διὰ τῷ πρὸ αὐτῷ διαιρεθείς, παρέχεται αἰ τὴν αὐτὴν ποσότητα ω .

Προβλήματα τινὰ ἐπὶ τῶν γεωμέ-
τρικῶν προόδων.

Π ρ ό β λ η μ α Α.

279. Δοθέντων τέτε πρώτῃ ὄρη εἰς τὴν πηλίκου τῆς
προόδου ὀντιναῦν ὄρον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Οἱ τύποι εἰς $\mu = \alpha\pi^{\pi-1}$ (269)· ἐκὼν ἐ-
ὰν ζητῆται ὁ ἐνδέκατος ὄρος προόδου, ἥς ὁ μὲν πρώτος
ὄρος εἰς 1, τὸ δὲ πηλίκον 4· ἔσται $\alpha = 1$, εἰς $\pi = 4$, εἰς
 $\nu = 11$ · καὶ δὴ φανερόν ὅτι $\mu = 1 \times 4^{10} = 4^{10} =$
1048576.

Π ρ ό β λ η μ α Β

280. Δοθέντων τῇ πρώτῃ ὄρη α , εἰς τὴν ἐσχάτῃ ω ,
εἰς τὴν πηλίκου π , προόδου γεωμετρικῆς, εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον κ .

ΛΥΣΙΣ. Ἀπάσης προόδου γεωμετρικῆς πάντες μὲν οἱ
ὄροι πλην τῇ ἐσχάτῃ εἰσὶν ἡγούμενοι, πάντες δὲ παρὰ
τὸν πρώτον εἰσὶν ἐπόμενοι· ἐκὼν τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν
ἡγυμένων εἰς $\kappa - \omega$ · τὸ δὲ κεφάλαιον πάντων τῶν ἐ-
πομένων εἰς $\kappa - \alpha$ · ἔστι δὲ $\kappa - \omega : \kappa - \alpha :: \alpha : \alpha\pi$
(271)· ἄρα $\alpha\pi\kappa - \alpha\pi\omega = \kappa\kappa - \alpha\alpha$ (240), ταυτὸν
εἰπεῖν (διαίρεσει τῶν ἴσων διὰ τῇ αὐτῇ α (219)) $\pi\kappa -$
 $\pi\omega = \kappa - \alpha$ · προθέσει δὲ ἐκατέρωθεν τῇ αὐτῇ ποσὶ $\pi\omega$,
 $\pi\kappa - \pi\omega + \pi\omega = \kappa - \alpha + \pi\omega$, εἴτ' ἔν $\pi\kappa = \kappa - \alpha +$
 $\pi\omega$ · ἀφαιρέσει δὲ ἐκατέρωθεν τῇ αὐτῇ ποσὶ κ , $\pi\kappa -$
 $\kappa = \kappa - \kappa + \pi\omega - \alpha$, εἴτ' ἔν $\pi\kappa - \kappa = \pi\omega - \alpha$. διαι-
ρέσει δὲ ἐκατέρω μέρους διὰ $\pi - 1$ (ἐπεὶ $\pi\kappa - \kappa =$
 $\frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1} \times (\pi - 1)$) ἔσται $\kappa = \frac{\pi\omega - \alpha}{\pi - 1}$, τύπος ὁ ζητούμενος.

Πρόβλημα Γ.

281. Δοθέντων τῷ πρώτῳ ὄρει α , καὶ τῷ τῶν ὄρων ἀριθμῷ ν , καὶ τῷ πηλίκῳ π εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον κ .

Λέγω δὴ ὅτι ἔσται τύπος $\kappa = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$, ἢ $\kappa = \alpha$

$\frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}$. Δείξῃς· ὁ ἑχάτος τῆς προόδου ὄρος ἐστὶν $\alpha\omega^{\nu-1}$.

(269)· ἔστιν ἔν (280, 271) $\kappa - \alpha\omega^{\nu-1} : \kappa - \alpha :: \alpha : \alpha\omega$
 $\epsilon\kappa\epsilon\nu \kappa\alpha\pi - \alpha\alpha\pi = \kappa\alpha - \alpha\alpha$ · διαίρῃσιν δὲ ἑκατέρω
 τῶν ἴσων διὰ α , $\kappa\pi - \alpha\pi = \kappa - \alpha$ · προθέσει ἑκατέ-
 ρω τῶν ἴσων τοῦ αὐτοῦ ποσὺ $\alpha\omega^\nu$, $\kappa\omega - \alpha\omega^\nu + \alpha\omega^\nu = \kappa$
 $- \alpha + \alpha\omega^\nu$, εἴτ' ἔν $\kappa\omega = \kappa - \alpha + \alpha\omega^\nu$, ἀφαιρέσει
 δὲ ἑκατέρωθεν τῷ αὐτῷ ποσῷ κ , $\kappa\pi - \kappa = \alpha\omega^\nu - \alpha$
 διαίρῃσιν δὲ διὰ $\omega - 1$ (ὡς καὶ ἐπὶ τῷ ἀνωτέρῳ προβλήμα-
 τος) $\kappa = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$ ὁ ζητούμενος τύπος.

Ἐῴω $\alpha = 2$, καὶ $\nu = 3$, καὶ $\pi = 4$, ἔσται ἔν $\kappa =$
 $\frac{2 \times 4^3 - 2}{4 - 1} = \frac{126}{3} = 42$ · ἢ δὲ πρόοδος χωρήσει ἔτω
 $2 : 8 : 32$ · ἔνθα πάντως $2 + 8 + 32 = 42$.

Πρόβλημα Δ.

282. Δοθέντων τῷ πηλίκῳ π , καὶ τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων καὶ τῷ κεφαλαίῳ κ , ἓνα ἑκάστον ὄρον τῆς προόδου εὑρεῖν.

ΛΤΣΙΣ. Ἐν τῇ δεῖξει τῷ ἀνωτέρῳ προβλήματος ἔστι
 $\kappa\omega - \alpha\omega^\nu = \kappa - \alpha$ · προσθέσει ἑκατέρωσιν τῷ αὐτῷ $\alpha\omega^\nu$,
 $\kappa\omega = \kappa - \alpha + \alpha\omega^\nu$ · ἀφαιρέσει δὲ τῷ αὐτῷ κ , $\kappa\omega - \kappa$
 $= \kappa - \kappa + \alpha\omega^\nu - \alpha$, εἴτ' ἔν $\kappa\pi - \kappa = \alpha\omega^\nu - \alpha$, τὸτ'
 ἐστὶν $\alpha\omega^\nu - \alpha = \kappa\omega - \kappa$ · διαίρῃσιν δὲ τέως διὰ $\omega^\nu - 1$

προκίψει ὁ τύπος $\alpha = \frac{\omega^v - \kappa}{\omega^v - 1}$, τὸν πρῶτον ἐκδηλῶν τῆς προόδου ὅρον· τῆτις ἔν γινωσκέντος ἅπαξ, ἐπεὶ γνωσόν ἐστι καὶ τὸ τῆς προόδου πηλίκον, πάντες ἐξῆς οἱ ὅροι γνωσθήσονται (227).

Π ρ ὁ β λ η μ α Β'.

283. Τῷ τῶν ὁρῶν ἀριθμῷ ν , καὶ τῷ πρώτῳ ὁρῷ α , καὶ τῷ ἐσχάτῳ ω , δοθέντων, εὑρεῖν τῆς προόδου τὸ πηλίκον π .

ΛΤΣΙΣ· $\omega = \alpha \omega^{\nu-1}$ (269)· διαιρέσει δὲ ἑκατέρω τῶν ἴσων διὰ α , $\frac{\omega}{\alpha} = \omega^{\nu-1}$ · ἐξαγωγῇ τέως ἑκατέρωθεν τῆς $\nu-1$ ρίζης, ἔσται $\sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \omega$, ἢ $\omega = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}}$ · ἔ-

στω $\nu = 3$, καὶ $\alpha = 2$, καὶ $\omega = 32$, ἔσται $\omega = \sqrt[3-1]{\frac{32}{2}}$
 $= \sqrt[2]{16} = 4$.

284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ'. Δοθέντων προόδου τῷ πρώτῳ ὁρῷ α , καὶ τῷ ἐσχάτῳ ω , καὶ τῷ πηλίκῳ π , εὑρεῖν τὸν τῶν ὁρῶν ἀριθμὸν ν

ΛΤΣΙΣ. Ὁ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ προβλήματι τύπος $\frac{\omega}{\alpha} =$

$\omega^{\nu-1}$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ω , γίνεται $\frac{\omega \omega}{\alpha} = \omega^{\nu}$ · ἐξ ἔδηλον, ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῷ ἐσχάτῳ ὁρῷ ω καὶ τῷ πηλίκῳ π , διαιρέμενον διὰ τῷ πρώτῳ ὁρῷ α , ἐξίσταται τῷ πηλίκῳ π ὑψωθέντι εἰς βαθμὸν, ὃ δείκτης ἐστὶν ὁ τῶν ὁρῶν ἀριθμὸς ὃ ζητούμενος· ἔστω ἔν $\alpha = 5$, καὶ $\omega = 3$, καὶ $\omega =$

$$3645 \cdot \epsilon\kappa\epsilon\nu \frac{\omega\omega}{\alpha} = \frac{3645 \times 3}{5} = 2187 \cdot \epsilon\chi\alpha\rho\theta\eta\tau\omega \delta\eta$$

τὸ τῆς προόδου πηλίκον 3 ἐφεξῆς εἰς τρίτον, τέταρτον, κτ. βαθμὸν, ἔστ' ἂν γένηται $= 2187 \cdot$ εἰσι δὲ οἱ ἀπ' αὐτῆς κατὰ τὸ συνεχὲς βαθμοί, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187· καὶ ἐπεὶ 2187 βαθμὸς ἑβδομὸς ἐστὶ τῆς 3, ὁ ζητούμενος τῶν ὄρων ἀριθμὸς ἔσται 7· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ἔτω $\div 5:15:45:135:405:1215:3645$.

Π ρ ο β λ η μ α Ζ'.

285. Δύω μεταξὺ δοθέντων ὄρων ὅσους δῆποτε μέσους ἀναλόγους εὑρεῖν κατὰ πρόοδον.

ΛΥΣΙΣ. Ἄ. Μεταξὺ τῆς α καὶ β κείτω εὑρεῖν μέσον ἀνάλογον ἓνα· ἐκὼν ἔσται $\div \alpha:\gamma:\beta$, καὶ $\alpha\beta = \gamma\gamma$ (248). καὶ ὁ γινώσκων $= \sqrt{\alpha\beta}$. β'. μεταξὺ τῶν α, β κείτω εὑρεῖν δύο μέσους ἀναλόγους· ἐκὼν ἔσται $\div \alpha:\gamma:\chi:\beta$ · καὶ ἐπεὶ $\alpha:\beta::\alpha^3:\gamma^3$ (270)· ἄρα $\alpha\gamma^3 = \alpha^3\beta$ · διαιρέσει ἑκατέρω τῶν ἴσων διὰ α, $\gamma^3 = \alpha^2\beta$, καὶ ἑκατέρωθεν ἐξαγωγῇ τῆς κυβικῆς ῥίζης $\gamma = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}$ · γνωσῶν ἂν ὄντων τῆς πρώτης, καὶ τῆς δευτέρας, ὁ τρίτος ἐνχερῶς εὑρεθήσεται· ἐπεὶ γὰρ $\alpha:\sqrt[3]{\alpha\alpha\beta}::\chi:\beta$ · κυβισθέντων ἀπάντων τῶν ὄρων, ἔσται $\alpha^3:\alpha\alpha\beta::\chi^3:\beta^3$ · ἐκὼν $\chi^3 = \frac{\alpha^3\beta^3}{\alpha\alpha\beta} = \alpha\beta^2$ · ἐξαγωγῇ ἑκατέρωθεν τῆς κυβικῆς ῥίζης,

$$\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}$$

γ'. Ἐν γένει ἢν προκείμεται μεταξὺ τῶν α, β ὅσους δῆποτε μέσους ἀναλόγους εὑρεῖν, ἀορίστως φέρε ν ὄρους, ἔσται ὁ χώρος, καθ' ὃν τὸ β τῆς α ἀπέχει $n+1$ · ἐκὼν ἔσται

$$(270) \alpha : \beta :: \alpha^{n+1} : \gamma^{n+1} \text{ διὸ } \gamma^{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}\beta}{\alpha} \quad (\text{ἤτοι}$$

$\alpha^n \beta)$. ἐξαγωγῇ δὲ τῆς $n+1$ ρίζης $\gamma = \sqrt[n+1]{\alpha^n \beta}$, πρῶτος ὅρος τῶν ζητούμενων μέσων· ὁ δὲ δεύτερος εὐρεθήσεται ὡσαύτως· ἐστὶ γὰρ $\alpha : \beta :: \gamma^{n+1} : \chi^{n+1}$ (270)· εἰ.

λήφθω ἐν ἀντὶ τῆ τρίτῃ ὅρου γ^{n+1} ὁ εὐρεθεὶς τύπος $\sqrt[n+1]{\alpha^n \beta}$, ὑψωμένος εἰς τὸν $n+1$ βαθμὸν, εἴτ' ἐν $\alpha^n \beta$ · καὶ δὴ ἔσται $\alpha : \beta :: \alpha^n \beta : \chi^{n+1}$ · ἄρα $\chi^{n+1} \alpha = \alpha^n \beta^2$, καὶ $\chi^{n+1} = \frac{\alpha^n \beta^2}{\alpha}$ · ἐπεὶ δὲ $\frac{\alpha^n \beta^2}{\alpha} = \alpha^{n-1} \beta^2$ (52) ἄρα $\chi^{n+1} =$

$\alpha^{n-1} \beta^2$ · καὶ ἐξαχθείσης τῆς $n+1$ ρίζης ἐκατέρωθεν, ἔσται

$\chi = \sqrt[n+1]{\alpha^{n-1} \beta^2}$ · ὁ δὲ τρίτος ὡσαύτως εὐρεθήσεται

$\sqrt[n+1]{\alpha^{n-2} \beta^3}$, ὁ δὲ τέταρτος $\sqrt[n+1]{\alpha^{n-3} \beta^4}$ κτ. μέχρις ἂν ὁ τῆς β δείκτης γένηται $= n+1$, ὁπότε καὶ ὁ δείκτης τῆ

α γίνεται $= 0$, καὶ ὁ ὅρος $\sqrt[n+1]{\alpha^0 \beta^{n+1}} = \beta$. Ἐάν τοίνυν μεταξὺ τῶν α, β τρεῖς μέσοι ἀνάλογοι ζητῶνται κατὰ συν.

εσχῇ ἀναλογίαν, ἔσονται $\div \alpha : \sqrt[n+1]{\alpha^n \beta} : \sqrt[n+1]{\alpha^{n-1} \beta^2} :$

$\sqrt[n+1]{\alpha^{n-2} \beta^3} : \beta$ · εἴτ' ἐν οἷς μεταξὺ τρεῖς ὅροι τύποι ἔσονται τῶν ζητούμενων τριῶν ὁρῶν· ῥηθήτωσαν γὰρ ἔτσι $\lambda,$

ν, χ · ἐπεὶ ἐν οἷς ὅροι $\alpha, \lambda, \nu, \chi, \beta$ ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ ὑποτίθενται, τετέστιν $\div \alpha : \lambda : \nu : \chi : \beta$, ἔστιν

$\alpha : \beta :: \alpha^4 : \lambda^4$ (270)· ἄρα $\alpha \lambda^4 = \alpha^4 \beta$ · διαιρουμένῳ

δὲ ἐκάστῳ ἴσῃ διὰ α , ἔσται $\lambda^4 = \frac{\alpha^4 \beta}{\alpha} = \alpha^3 \beta$ · ἐξαχθεί.

σης δ' ἐκατέρωθεν τῆς τετάρτης ρίζης, $\lambda = \sqrt[4]{\alpha^3 \beta}$. ἔ.
 σι δὲ $\nu + 1 = 4$ ἐπὶ τῷ παρόντος, καὶ $\nu = 3$. ἄρα $\lambda =$
 $\sqrt[3+1]{\alpha^3 \beta}$.

Ἐν ἐν τῇ ἐκτεθείσῃ προόδῳ ἀντὶ λ τεθείσης τῆς δυ-
 νάμεως αὐτῆς, ἔσαι $\div \alpha : \sqrt[4]{\alpha^3 \beta} : \psi$. ἄρα $\div \alpha^4 : \alpha^3 \beta :$
 ψ^4 . ἄρα $\alpha^4 \psi^4 = \alpha^3 \beta^2$. ἄρα $\psi^4 = \frac{\alpha^3 \beta^2}{\alpha^4} = \alpha^2 \beta^2$.

ἄρα $\psi = \sqrt[4]{\alpha^2 \beta^2}$. ἄρα $\psi = \sqrt[3+1]{\alpha^{\nu-1} \beta^2}$, τὴν αὐτὴν ἀ-
 μέλει χωρῆσιν ἔφορον τῷ συλλογίζεσθαι, ἣν καὶ ἀνωτέρω.

Ἐὰν ἐν τῇ προτεθείσῃ προόδῳ $\div \alpha : \lambda : \psi : \chi$, ἀν-
 τὶ λ, ψ τεθῶσιν αἱ αὐτῶν εὐρεθεῖσαι δυνάμεις, ἔσαι $\div$
 $\alpha : \sqrt[4]{\alpha^3 \beta} : \sqrt[4]{\alpha^2 \beta^2} : \chi$. ἄρα $\div \alpha^4 : \alpha^3 \beta : \alpha^2 \beta^2 :$
 χ^4 . ἄρα $\alpha^4 \chi^4 = \alpha^2 \beta^3$. ἄρα $\chi^4 = \frac{\alpha^2 \beta^3}{\alpha^4} = \alpha^2$

β^3 . ἄρα $\chi = \sqrt[4]{\alpha^2 \beta^3}$. ἄρα $\chi = \sqrt[3+1]{\alpha^{\nu-2} \beta^3}$. ἄρα οἱ
 τρεῖς τύποι $\sqrt[3+1]{\alpha \nu \beta}$, $\sqrt[3+1]{\alpha^{\nu-1} \beta^2}$, $\sqrt[3+1]{\alpha^{\nu-2} \beta^3}$ ἐν γένει ἐκ-
 δηλῶσι τὰς τρεῖς ζητεμένους μέσους ἀναλόγους ὄρες.

Ἐῶς δὴ $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 32$. ἐκέν ἔσαι $\lambda =$
 $\sqrt[4]{8 \cdot 32} = \sqrt[4]{256} = 4$, καὶ $\psi = \sqrt[3+1]{\alpha^{\nu-1} \beta^2} = \sqrt[4]{4 \cdot 1024}$
 $\sqrt[4]{4096} = 8$, καὶ $\chi = \sqrt[3+1]{\alpha^{\nu-2} \beta^3} = \sqrt[4]{2 \cdot 32768} =$
 $\sqrt[4]{65536} = 16$. ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ἔτω $\div 2 : 4 :$
 $8 : 16 : 32$. αἱ δὲ τέταρται ρίζαι ἐξαχθήσονται, λαμ-
 βανομένων πρώτον τῶν κατὰ τὰς ὑποκειμένους ἀριθμὸς τε-

τραγωνικῶν ῥιζῶν, καὶ τέτων ἐξαγομένων αὐθις τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν. ἔγὰρ $\sqrt[4]{a^4} = a^{\frac{4}{4}} = a$. ἄλλὰ δὴ εἰν πρῶτον γένηται $a^{\frac{4}{2}} = a^2$, ἔξ αὐθις $a^{\frac{2}{2}} = a$, τὸ αὐτὸ ὡς δῆλον γενήσεται (122).

Π ρ ό β λ η μ α · Η'.

286. Μεταξὺ δύο ὠντινωνῶν ὄρων γεωμετρικῆς προόδου, ἐμπαράβυσται μέσες ἀναλόγες, ὅσες ὁ μ ἀριθμὸς ἐμφαίνει.

ΛΤΣΙΣ. Ἐστω γεωμετρικὴ πρόοδος ἡ :: $απ^0$: $απ^1$: $απ^2$: $απ^3$ κ.

α. Οὖν ζητηθήτωσαν μ ὄροι, ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι, μεταξὺ δύο τινῶν δεικτῶν τῆς προόδου· οἵτινες ἔσονται δείκται τῶν μέσων γεωμετρικῶς ἀναλόγων ὄρων, οἱ μεταξὺ ἐμπαράβυσθαι τῶν εἰρημένων ὄρων (276). ἔστω ἐν ἐμπαράβυσται τρεῖς ὄρες μεταξὺ $απ^0$, $απ^1$ · ἔδὴ εὐρεθήτωσαν μεταξὺ 0, ἔξ 1 τρεῖς ὄροι ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι· ἐπεὶ ἐν ἡ μεταξὺ 0 ἔξ 1 διαφορά ἐσιν = 1· ἂν. τη διαιρεθείσα διὰ $μ + 1 = 3 + 1 = 4$ (214) παρέξει τὸν πρῶτον τῶν ζητεμένων ὄρων· ἔκέν $\frac{1}{4}$ ὁ πρῶτος, ἔξ δὴ $\frac{2}{4}$ ὁ δεύτερος, $\frac{3}{4}$ ὁ τρίτος· ἔστω δὲ ἐμπαράβυσται τρεῖς ἄλλες μεταξὺ $απ^1$ ἔξ $απ^2$ · ἔκέν δείκτης τῆ πρώτου τῶν ζητεμένων ἔσαι $1\frac{1}{4}$, τῆ δὲ δευτέρου $1\frac{2}{4}$, τῆ δὲ τρίτου $1\frac{3}{4}$ · ἔκέν ἡ πρόοδος :: $απ^0$: $απ^1$: $απ^2$ ἐμπαράβυσθαι τῆ. τον τὸν τρόπον, γενήσεται :: $απ^0$: $απ^{\frac{1}{4}}$: $απ^{\frac{2}{4}}$: $απ^{\frac{3}{4}}$: $απ^1$: $απ^{\frac{5}{4}}$: $απ^{\frac{6}{4}}$: $απ^{\frac{7}{4}}$: $απ^2$ κτ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ λόγων συνθέτων.

287. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς εὐχερῇ κατάληψιν τῶν ῥηθητομένων, ἀναπολητέον αἰ κατὰ νῦν, ὅτι λόγος ἔδεν εἶναι ἄλλ' ἢ πηλίκοντι.

Λόγος ἐπὶ λόγον πολλαπλασιαζόμενος, τὸ προκύπτον, ὅπερ ἀληθῶς ἔδεν ἕτερόν εἶναι, ἢ καινὸν πηλίκον σεσημειωμένον, καλεῖται λόγος σύνθετος.

288. Προκειμένων ἔ τῷ λόγῳ, ἢ τῷ σεσημειωμένῳ πηλίκῳ τῷ $\frac{\alpha\omega}{\alpha}$, ἢ θάτερος λόγῳ, ἢ ἑτέρῳ σεσημειω-

μένῳ πηλίκῳ τῷ $\frac{\delta\omega}{\delta}$, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕτερον ἐπὶ τὸν ἕτερον (231), τὸ προκύπτον ἢ ὁ καινὸς λόγος, εἴτ' ἔν τῷ ἐντεῦθεν προῖον καινὸν σεσημειωμένον πηλίκον $\frac{\alpha\delta\omega}{\alpha\delta}$ (287) καλεῖται λόγος σύνθετος· οἱ δὲ,

ἵφ' ὧν παράγεται, λόγοι $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$ καλεῖνται λόγοι ἀπλοὶ ἢ συνθετικοί.

289. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶς λόγος σύνθετος καινὸν εἶσι σεσημειωμένον πηλίκον, ὃ πρόεισιν ἐκ δύο ἑτέρων σεσημειωμένων πηλίκων, πολλαπλασιαζόμενων θάτερος ἐπὶ θάτερον.

290. Ὅταν δύο λόγοι ἴσοι, ἢ δύο πηλίκῳ ἴσα, πολλαπλασιάζωνται, τὸ παραγόμενον, ἢ ὁ λόγος, εἴτ'

ἔν τὸ νέον σεσημειωμένον πηλίκον, καλεῖται λόγος διπλασίων.

$\frac{απ}{α}$ καὶ $\frac{δπ}{δ}$ εἰσὶ δύο ἴσοι λόγοι, δύο ἴσα πηλικά· εἰ.

γε $\frac{απ}{α}$ καὶ $\frac{δπ}{δ}$ τὸ αὐτό εἰσι πηλίκον π· τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἢ τὸ καινὸν πηλίκον, τὸ ἐκ τῶν δε τῶν ἴσων λόγων προερχόμενον, $\frac{αδπ^2}{αδ}$, ἐστὶ λόγος σύνθετος, ὅστις νυνὶ καλεῖται διπλασίων.

$\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{4}$ δύο ἰσαλλήλων ὄντων λόγων· ἑκάτερος γὰρ ἴσος τῷ 3· τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον καλεῖται λόγος διπλασίων.

Οἱ τρεῖς ἔτσι λόγοι $\frac{απ}{α}$, $\frac{δπ}{δ}$, $\frac{ζπ}{ζ}$ εἰσὶν ἴσοι ἕκα.

ςος γὰρ τέτων ἴσος ἐστὶ τῷ π· ἐντεῦθεν ὁ ἐξ αὐτῶν σύνθετος λόγος, τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, τὸ καινὸν σεσημειωμένον πηλίκον, $\frac{αδζπ^3}{αδζ}$, καλεῖται λόγος τριπλασίων.

Τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τεσσάρων λόγων ἰσαλλήλων ὀνομάζεται λόγος τετραπλασίων, καὶ ἐξῆς ἔτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Διπλῆ ἄρα καὶ τετραπλῆ κτ. πρὸς διπλασίονα, τριπλασίονα κτ. λόγον πολῦτι καὶ πραγματικόν ἐστὶ τὸ διάφορον· ὁ μὲν γὰρ διπλῆς, καὶ τριπλῆς κτ. ἐκ παραγεται ὑφ' ἑτέρων, ἀλλ' ἔστιν εἰς ἀπλῆς λόγος, καὶ ὁ ἡγούμενος διπλῆς, τριπλῆς κτ. ὑπάρχει τῇ ἐπομένῃ· ὁ γεμὴν διπλασίων, τριπλασίων κτ. παραγόμενόν ἐστιν ὑπὸ δύο, τριῶν κτ. ἰσαλλήλων λόγων.

291. Θεώρημα σοιχειῶδες· Τὰ παραγόμενα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέντῳ ἐκ τῶν παραγόντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοῦτ' ὁ Θεώρημα, ἀκαμφηρίζως τὸ ξυντελέσσεται καὶ χρησιμώτατον ὑπάρχον ἅπασιν τοῖς ἐφεξῆς μέρεσι τῆς τε μαθηματικῆς καὶ φυσικῆς, ὁδεμίαν καθαρᾶν τε καὶ εὐληπτοῦ τὸ κατ' ἀρχὰς παρίσχησιν ἰδεάν τοῖς πρωτοπέροις· πειρασόμεθα ἄλλ' ἐν τήν τε ἔννοιαν αὐτῆς ἀναπτύξασθαι, καὶ δὴ καὶ τὰ ἐκ τέττε ὑποσυνάψασθαι πορίσματα, ἅπερ θαυμασίως συμβαλεῖ τοῖς μετιέσι τὸ ἐν χερσὶ συγγραμμά.

ΔΕΙΞΙΣ καὶ ἀνάπτυξις τῷ Θεωρήματος

α. ἅπαν παραγόμενον δύο ἔχει παράγοντας, τὸν πολλαπλασιασέον καὶ τὸν πολλαπλασιασῆν

292. β'. ζητεῖται δὲ, πρὸς ἀλλήλα παραβάλλοντας δύο παραγόμενα, ὀρίσασθαι τὴν σχέσιν, ἢ τὸν μεταξὺ αὐτῶν λόγον, καὶ ἰδεῖν ἐκ τῆ ἀκολουθείας, ὅ,τι ἂν εἴη τὸ πηλίκον, εἰ ταῦτα τὰ παραγόμενα διαιρεθῇ διὰ θατέρου θατέρου, καὶ ὅ,τι σύμμερον μέρος ἂν εἴη θατέρου παραγόμενον θατέρου· ζητεῖται ἄρα παραβαλεῖν ἕτω δύο παραγόμενα ὁμογενῆ, ἢ τῆς αὐτῆς φύσεως· κυρίως γὰρ εἰπεῖν δύο μόνον τῆς αὐτῆς φύσεως ποσότητες δύνανται πρὸς ἀλλήλας παραβαλλόμεναι ἢ ἑτέρα τέτων τῆς ἑτέρας μέρους ὀνομασθῆναι πηλίκον· εἵπωμεν τοίνυν περὶ δύο ὁμοειδῶν παραγομένων, χρόνος, φέρ' εἰπεῖν, διαστήματος, κινήσεως κτ., καὶ πρὶν ἢ καθολικεῦσαι τὸ ζήτημα, λάβωμεν δύο μερικώτερα παραγόμενα ὑπὸ δύο μόνων παραγόντων.

Γινώσκωμεν, φέρε, ὅτι ἡ παντὸς χωρὶς ἐπιφάνεια ἐξίσταται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ μήκους, καὶ τῆ πλάτους· ἐκὼν λάβωμεν δύο διάφορα χωρία, καλέσαντες αὐτὰ Α καὶ Β'.

Τοιγαρὲν ἡ μὲν $t\bar{u}$ A ἀπιφάνεια, ἡ τὸ ἐμβαδὸν, ἔ-
 σιν ἴσον τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ κατ' αὐτὸ μήκους καὶ πλάτους·
 τὸ δὲ τῆ B ὡσαύτως ἴσον τῷ ὑπὸ τῆ οἰκείᾳ μήκους καὶ πλά-
 τος παραγομένῳ· τίς ἄρα ἔσαι ὁ μεταξὺ τούτων τῶν γι-
 νομένων, εἴτ' ἐν τῶν χωρίων λόγος; ἢ ἔσαι τὸ πηλίκον
 τῆ μείζονος, διαιρεθέντος διὰ τῆ ἐλάσσονος!

Θῶμεν ἔν ὅτι τὸ A ἐστὶ μείζον τῆ B· τοιγαρὲν ὑπο-
 τιθεμένῳ ἴσῃ ἀμφοῖν τῆ πλάτους, δῆλον, ὅτι τὸ τῆ A μῆ-
 κος περιέχει πλεόν ἢ ἅπαξ τὸ τῆ B, καὶ δὴ τὸ παραγό-
 μενον, τὸ σημαίνον τὴν τῆ A ἐπιφάνειαν, ἔστι πλεόν ἢ ἅπαξ
 περιεκτικὸν τῆ παραγομένης τῆ σημαίνοντος τὴν τῆ B ἐπι-
 φάνειαν· τάντων δὲ κρατεῖν ἀνάγκη καὶ ἐπὶ τῆ πλάτους,
 ὑποτιθεμένῳ ἀμφοῖν ἴσῃ τῆ μήκους· ἐκὼν εὐχερῶς κατανοεῖ-
 ται, ὅτι ἡ τῆ μήκους τῆ χωρίου A πρὸς τὸ τῆ B ὁθέσις,
 καὶ ἡ τῆ κατὰ τὸ A πλάτους πρὸς τὸ κατὰ τὸ B, ἀμφοτέ-
 ραι συντελεῖσι πρὸς αὐξήσιν τῆ ἀριθμῆ, τῆ ἐμφαίνοντος πο-
 σάκις τὸ A περιεκτικὸν ἐστὶ τῆ B, ἢ τὸ πηλίκον τῆ A
 διαιρεθέντος διὰ B.

Εἴφ' ὃ ἐν ὁρισόμεθα τὸ πηλίκον ταῦτ', ἢ τὴν μεταξὺ
 τῶν δύο γινομένων ὁθέσιν, εἴτ' ἐν τὴν μεταξὺ τῶν δύο
 χωρίων, λαμβάνομεν ὠρισμένοντι ποσὸν ἐκ τῶν δύο μη-
 κῶν τε καὶ πλατῶν αὐτῶν· Θῶμεν ἔν ὡς τὸ τῆ A μήκους
 $\epsilon\sigma\iota\nu = 20$ ὀργυαῖς, τὸ δὲ τῆ B $= 4$ · καὶ τῆ μὲν τὸ πλά-
 τος $= 16$, τῆ δὲ B $= 2$ ὀργυαῖς·

Τοιγαρὲν τὸ A χωρίον ἔσεται τῷ μὲν μήκει πεντα-
 πλάσιον, τῷ δὲ πλάτει ὀκταπλάσιον τῆ B χωρίου· τίς ἄ-
 ρα ἔσαι ἡ τῆ παραγομένης τῆ ἐμφαίνοντος τὸ A πρὸς τὸ
 ἐκδηλῶν τὸ B ὁθέσις; ἢ ποσημόριον τῆ A ἔσαι τὸ χω-
 ρίον B;

293. Εἵκεν ἔν κατ' ἀρχάς, ὅτι δυνατόν τὴν ὁθέσιν

τὴν δεορίσασθαι, τὴν μεταξύ δύο χωρίων, συνάψαντες τὴν τῶν μηκῶν τῇ τῶν πλατῶν σχέσει· ἐπεὶ γὰρ τὸ Α πενταπλάσιον μὲν ἐστὶ κατὰ μῆκος, ὀκταπλάσιον δὲ κατὰ πλάτος τῷ χωρίῳ, εἰκοσινᾶρα τρεῖς δεκαπλάσιον εἶναι ὅλον τὸ Α ὅλε τῷ Β.

294. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἐκτεθὲν θεώρημα βέλεται τὸ Α τεσσαρακονταπλάσιον τῷ Β. ἄρα λέγοντες, ὅτι τὰ παραγόμενα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν παραγόντων, ἐννοῶμεν τὰδε: δύο παραγομένων, δύο ἐχόντων ἐκάστῳ παρᾶγοντας, τὸν μὲν πολλαπλασιασέον, τὸν δὲ πολλαπλασιασῆν, εἰς τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον τῶν δύο πολλαπλασιασέων, εἴτε τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον, τῶν πολλαπλασιασῶν, καὶ πολλαπλασιάσωμεν ταῦτα θάτερον ἐπὶ θάτερον, τὸ παραγόμενον ὑπὸ αὐτῶν εἶναι τὸ πηλίκον, τὸ μεταξύ τῶν δύο γινομένων ἐπικρατέν.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῶν δύο χωρίων Α, Β λάβωμεν τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον, τῶν δύο πολλαπλασιασέων, εἴτ' ἐν τῶν μηκῶν, ὅπερ ἐστὶ $\frac{2}{1}$, εἴτε τὸν λόγον, εἴτ' ἐν τὸ πηλίκον τῶν δύο πολλαπλασιασῶν, τῆτέστι τῶν πλατῶν, ὃ ἐστὶ $\frac{1}{2}$, καὶ ταῦτα θάτερον ἐπὶ θάτερον πολλαπλασιάσωμεν, ὁ σύνθετος λόγος, ἢ τὸ παραγόμενον, ἢ τὸ καινόν, πηλίκον εἶναι $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 40$.

Οὐκ ἐν τῷ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι τὸ παραγόμενον, ὃ ἐξεικονίζει τὴν τῷ Α χωρίῳ ἐπιφάνειαν, περιέχει τὸ γινόμενον, τὸ ἐξεικονίζον τὴν τῷ Β ἐπιφάνειαν, καὶ ἔτι τρισκαίδεκάκις, ἀλλὰ τεσσαρακοντάκις· σκοπήσωμεν ἐν τῷ ἐντεῦθεν.

Οὐδεὶς ἐστίν, ὃς ἀμφιγνοεῖ, ἄλλως τε καὶ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀκριβῶς δειχθήσεται, τὴν δύοιν χωρίων ἐπιφά-

νειαν μὴ ἔχει παρεμφαίνεσθαι ὑπὸ τῷ γινομένῳ ἐκ τῶν κατ' αὐτὰ μηκῶν τε καὶ πλατῶν (153).

Οὕτως ἔν ἡ τῷ Α χωρὶς ἐπιφάνεια δηλωθήσεται τῷ εἰκοσάκις 16, εἴτ' ἔν περιέξει ὀργυιᾶς τετραγωνικάς 320· ἡ δὲ τῷ Β σημανθήσεται τῷ τετράκις 2, ὃ ἐστὶ περιέξει ὀργυιᾶς τετραγωνείας 8· ἀλλὰ α. 320 περιέχει τεσσαρακοντάκις τὸν 8, ἄρα τὸ Α τεσσαρακονταπλάσιόν ἐστὶ τῷ Β. β'. εὗρομεν τὸν σύνθετον λόγον, ἢ τὸ προκύπτων, εἴτ' ἔν τὸ σεσημειωμένον πηλίκον, παρηγμένον ὑπὸ τῶν ἀπλῶν λόγων τῷ μὲν τῶν μηκῶν, τῷ δὲ τῶν πλατῶν, ὅτι ἦν $\frac{320}{8}$. νῦν δὲ πάλιν εὕρισκόμεν τὸ ἐπικρατὲν πηλίκον μεταξὺ τῶν δύο παραγομένων, ἃ ἐμφαίνουσι τὰ δύο χωρία Α, Β, ὑπάρχον $\frac{320}{8}$. τὸ μὲν γὰρ πρῶτον γινόμενον ἐστὶ 320, τὸ δὲ δεύτερον 8· ὁ λόγος ἄρα ὁ μεταξὺ τῶν δε τῶν δύο γινομένων ἐστὶ σύνθετος ἐκ τῷ ἀπλῷ λόγῳ τῶν μηκῶν, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀπλὸν λόγον τῶν πλατῶν· ὅπερ ἔδει ἀναπτύξαντας δεῖξαι ἐπὶ δύο παραγομένων ἑκατέρῃ ὑπὸ δυοῖν παραγόντων.

295. Δεικτέον δὲ τὸ προτεθὲν σιχηιωδὲς θεώρημα γενικιώτερόν τε καὶ ἀκριβέστερον.

Δύο ὠντινωνδήποτε παραγομένων οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες, εἴτ' ἔν οἱ δύο πολλαπλασιαστέοι, δύνανται αἰε καλεῖσθαι Μ, μ, οἱ δὲ δύο δεύτεροι, εἴτ' ἔν οἱ πολλαπλασιασαί, Ν, ν· ὃ ἔν ἀπλῶς λόγος ὁ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιασέων σχηματιζόμενος αἰε παρασαίη ἂν διὰ $\frac{Μ}{μ}$. ὁ δ' ὑπὸ τῶν πολλαπλασιασῶν, διὰ $\frac{Ν}{ν}$. καὶ τὸ μὲν πρῶτον γινόμενον ἔσται $Μ \times Ν = ΜΝ$, τὸ δὲ δεύτερον $μ \times ν = μν$ · ὁ δὲ λόγος, ἢ τὸ σεσημειωμένον πηλί-

κον, τὸ μεταξὺ τῶν δε τῶν γινομένων, ἐκτεθήσεται αἶ διὰ $\frac{MN}{\mu\nu}$. Τὸ ἄρα παραγόμενον ὑπὸ τῶν δύο προτέρων λόγων

ἐρχηματισμένων τε μὲν ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαστέων, δεύτερον δὲ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιασῶν, εἴτ' ἔν ὑπὸ τῶν ἀντιστοιχούντων ποιητῶν, $\frac{M}{\mu} \times \frac{N}{\nu}$ ἔσιν ὁ αὐτὸς λόγος, ὅς

ἐστὶ μεταξὺ τῶν δύο παραγομένων. Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

296. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ μὲν τῶν προδεδειγμένων ὑπεθέμεθα δύο γινόμενα ἕκασον ὑπὸ παραγόντων δύο. ῥᾶσα μὲν τοι τὰ αὐτὰ καὶ κατανοηθήσεται καὶ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ παραγομένων ὑπὸ τριῶν, ἢ καὶ ὅσων ἀντις βέλῃται παραγόντων.

Διοῦν φέρε κιβωτίων, ὧν τὸ μὲν καλεῖται Γ, τὸ δὲ Δ, τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 8 πόδας μήκους, καὶ 6 πλάτους, καὶ 4 ὕψους, τὸ δὲ δεύτερον, 4 μήκους, καὶ 2 πλάτους καὶ 1 ὕψους. Τὸ ἄρα Γ ἔστι τῷ μήκει μὲν διπλάσιον, τῷ πλάτει δὲ τριπλάσιον, τῷ δὲ βάθει τετραπλάσιον τῷ Δ.

Φημι δὴ ὅτι τὸ Γ κιβώτιον ἐκ ἔστιν ἐννεαπλάσιον τῷ Δ, ὥσπερ ἐν ἀρχῇ φαίνεται συνάψει τῶν χέσεων, ἀλλὰ $2 \times 3 \times 4$, εἴτ' ἔν εἰκοσιτεσσαραπλάσιον, ὃ ἔστι περιέχει ὕλην εἰκοσιτεσσαραπλήν, ἥς περιέχει τὸ Δ.

Ὁ μὲν γὰρ ἀπλῆς λόγος τῶν μηκῶν ἔστιν $\frac{3}{4}$, ὃ δὲ τῶν πλατῶν $\frac{6}{2}$, ὃ δὴ τῶν βαθέων $\frac{4}{1}$. ὃ δ' ἐξ αὐτῶν σύνθετος ἔστι $\frac{3}{4} \times \frac{6}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{1} = 12$. Τὸ ἄρα Γ κιβώτιον εἰκοσιτεσσαραπλάσιόν ἐστι τῷ Δ.

297. Ἀνιχνεύσωμεν δὲ τὴν ἀναγκαίαν τετὰρ δεῖξαι ὅτως· δειχθήσεται γὰρ ἐν τῇ Γεωμετρίας, ὡς εἰς εὐρεσιν τῆς περιοχῆς, ἢ σερεότητος τῶν δύο τετῶν κιβωτίων.

πολλὰ πλεονάζειν χρητὸ μὲν μήκος ἐπὶ τὸ πλάτος τὸ ὁ
ὑπὸ τέττων γινώμενον ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ ἄρα Γ κείνῳ πε-
ριέξει $4 \times 6 \times 4 = 192$ πόδας κεικίμεις (154)· τὸ δὲ Δ
 $4 \times 2 \times 1 = 8$ · ἐκεῖν δ. 192 περιέχει τετραδάκισ ἐκκοσά-
κισ τὸν 8· β. ὁ λόγος, ἡ τὸ πηλίκον $\frac{1}{8}$, ὅς ἐστι με-
ταξὺ 192 καὶ 8 ἔστιν ὁ αὐτὸς σύμβετος λόγος, ὅς ἀποστει-
λεται ὑπὸ τῶν τριῶν πηλίκων, ἡ λόγων ἀπλῶν τῶν
συνεστηκότων ὑπὸ τῶν μνημῶν, πλάτων, καὶ βυθίων· τὰ
ἄρα γινώμενα, ἃ ἀναπαύσσει τὴν τετραχὴν, ἡ τὴν δεκτι-
κότητα τῶν ὀρίων κείνων Γ καὶ Δ, εἰσὶν ἐν λόγῳ σωθί-
τῳ ἐκ τῶν μνημῶν, πλάτων, καὶ βυθίων, ἡ τῶν τριῶν
ἀντιστοιχούντων ποιητῶν· ἀληθεύει ἄρα τὸ νεώτερον καὶ ἐπὶ
θύω ὑπὸ τριῶν ποιητῶν παρρηγομένον.

Δείξῃς γυναικὴ ἐπὶ θύῳ παρρηγομένων ἐκ τριῶν ποι-
ητῶν.

298. Ἐξω γὰρ θύῳ γινώμενα ΜΝΠ, μνη· πη-
λίκον ἐν ἡ λόγος μεταξὺ τέττων τῶν γινωμένων ἐστὶ $\frac{MNΠ}{μνη}$.

οἱ δὲ τετρεῖς ἀπλοὶ λόγοι οἱ ὑπὸ τῶν τριῶν ἀντισίχων ποι-
ητῶν συνεκόμενοι, εἰσὶ $\frac{M}{μ}$, $\frac{N}{ν}$, $\frac{Π}{π}$ · ὁ δὲ σύμβετος
λόγος, τὸ προκύπτων, ἡ τὸ κοινὸν πηλίκον, τὸ ἐκ τέττων
ἀποστειλόμενον, ἐστὶ $\frac{M}{μ} \times \frac{N}{ν} \times \frac{Π}{π} = \frac{MNΠ}{μνη}$, ὅπερ ἐστὶ·

ὁ αὐτὸς λόγος, ὅς ἐν ἀρχῇ εὐρηταί μεταξὺ τῶν θύῳ γι-
νωμένων ΜΝΠ, μνη· ἐκεῖν γ' μεταξὺ τέττων τῶν γινωμέ-
νον λόγος συνήκειται ἐκ τῶν κατὰ τὸς αὐτῶν ποιητὰς λόγων,
ἀλλ' ἐφ' ὧτωνων θύῳ γινωμένων ὑπὸ τριῶν παρρηγόντων,
δυνητὸν αὖ τὴν μὲν τῶν πρώτων παρρηγόντων συζυγίαν

δηλῶσαι διὰ M , μ , τὴν δὲ διὰ N , ν , τὴν δὲ τρίτην διὰ Π , π . ἐν γένει ἄρα ὁ λόγος, ὁ μεταξὺ δύο ὀντιωνῶν γινομένων ὑπὸ τριῶν ποιητῶν, σύγκειται ἐκ τῶν λόγων τῶν κατ' αὐτὰ ποιητῶν, ἢ ὁ ταυτὸν, τὰ γινόμενα ταῦτα εἶσιν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς ποιητῶν.

299. Παρὰ γεμὴν ταῦτα πρόδηλον, ὅτι ἡ δεῖξις, ἢ ἐπὶ δύο γινομένων ὑπὸ δύο, ἢ τριῶν ποιητῶν, ἐφαρμοσθῆναι δύναται καὶ ἐπὶ τῶν γινομένων ὑφ' ὧν ἅντις βέληται παραγόντων· ἐν γένει ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

300. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἰνα τοίνυν ὁ μεταξὺ δύο γινομένων λόγος ὀριοθῇ, ἔ συναπτέον, ἀλλὰ πολλαπλασιασέον τὸς μεταξὺ τῶν ἐν αὐτοῖς ποιητῶν λόγους.

301. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν ἐπὶ τῷ συνθέτῳ λόγῳ $\frac{MN}{\mu\nu}$, ὑποτεθῇ $M = \mu$, καὶ $N = \nu$, γενήσεται ὁ λόγος $\frac{MN}{MN} = 1$, ὅπερ δηλοῖ, ὡς τὰ δύο γινόμενα MN , $\mu\nu$, ἐξισῶνται ἀλλήλοις· τὰ γινόμενα ἄρα, ὧν ἰσάλληλοι οἶτε πολλαπλασέοι, καὶ οἱ πολλαπλασιασαὶ, ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

302. Τέναντίον δὲ, ἐὰν δύο γινομένων ἰσαλλήλων ἢ ἑτέρα τῶν ρίζων ἰσῶται τῇ ἐν ἑατέρῳ, ἀνάγκη εἶναι ἴσην καὶ τὴν ἑτέραν τῇ ἐν τῷ ἑτέρῳ· ἐκ γὰρ $MN = \mu\nu$ προεῖσιν ἡ ἀναλογία $M : \mu :: \nu : N$ (241). ἀλλὰ $M = \mu$, ἄρα καὶ $\nu = N$.

303. Ἐὰν ἐπὶ τῷ συνθέτῳ λόγῳ $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ M μείζον, φέρ' εἰπεῖν, τῷ μ · τὸ δὲ N ἀναλόγως ἔλασσον τῷ ν , ὡς εἶναι $M : \mu :: \nu : N$, τὰ παραγόμενα ἔ-

σονται ἴσα, εἴγε (241) $MN = \mu\nu$ ὅεσι, τὰ γινόμενα ἔσονται ἰσάλληλα, ὅταν οἱ πολλαπλασιασμοὶ ὧσιν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονημένοι τῶν πολλαπλασιασῶν.

304. Ἐπίσης δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅταν δύο γινόμενα ὑπ' ἀνίσων παραγόντων ὧσιν ἰσάλληλα, ὅτι οἱ πολλαπλασιασμοὶ εἰσὶν ἀντιπεπονημένοι ὡς οἱ πολλαπλασιασμοί· ἐκ γὰρ $MN = \mu\nu$ προέρχεται $M : \mu :: \nu : N$ (241).

305. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οὐδὲν ἥττον δυνάμεθα δύο τιῶν προκυπτόντων, ἰσχυμένων ἀλλήλοις, συναγαγεῖν ἐν γενεῇ, ὅτι οἱ πολλαπλασιασμοὶ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἀντιστρόφως ἢ ὡς οἱ πολλαπλασιασμοί· ἐστὶ γὰρ $MN = \mu\nu$ ὅθεν αἰετῇ ἐπεται ἡ ἀναλογία $M : \mu :: \nu : N$ · ἀλλ' ἐπὶ γὰρ τῆς πρώτης περιπτώσεως, ἐνθα οἱ πολλαπλασιασμοὶ καὶ οἱ πολλαπλασιασμοὶ εἰσὶν ἰσάλληλοι, εἴγε $M = \mu$, καὶ $N = \nu$, ἐξέσαι ἀδιαφόρως γράφαι ἢ $M : \mu :: \nu : N$ ἢ $M : \mu :: N : \nu$, καὶ ἐκ τῆς ἀκολουθεῖ ἀναγνῶναι, ἥτοι ὡς οἱ πολλαπλασιασμοὶ εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ, ἢ ἐν λόγῳ ὀρθῷ τῶν πολλαπλασιασῶν.

306. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐὰν ἐν τῷ συνθέτῳ λόγῳ $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποθεθῇ $M = \mu$, γενήσεται $\frac{MN}{\mu\nu}$ · ὅθεν προκύψει ἡ ἀναλογία $MN : \mu\nu :: N : \nu$ (240), ὅπερ ἐμφαίνει, ὡς δύο γινόμενα, οἷς κοινὸς ὁ πολλαπλασιασμός M , εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα, ὡς οἱ πολλαπλασιασμοί, N , ν · ὡσαύτως ἐὰν ὑποθεθῇ $N = \nu$, ὁ μὲν λόγος γενήσεται $\frac{MN}{\mu N}$, ἡ δὲ ἀναλογία $MN : \mu N :: M : \mu$ (240), εἴτ' ἐν, δύο παραγόμενα MN , μN κοινὸν ἔχοντα τὸν πολλαπλασιασμὸν N , πρὸς ἀλλήλα εἰσὶν, ὡς οἱ αὐτῶν πολλαπλασιασμοί.

307. Εἴςαι ἄρα ἐν γένει εἶπεῖν α'. ὡς ἦνίκα δύο γινόμενα ἓνα κοινὸν ἔχωσι ποιητὴν, εἰςὶ πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ δύο ἰδιάζοντες ποιηταί· β'. ὅτε δύο γινόμενα κοινὸν ἓνα ἔχωσι ποιητὴν, καὶ εἰςὶ δύο ὅροι ἀναλογίας τινὸς, δυνατόν, μὴ αἰρομένης τῆς ἀναλογίας, διελόντας αὐτὰς διὰ τῆ κοινῆ ποιητῆ, κατὰ χώραν εἶσαι τὰς ἐτέρας ποιητὰς (233)· ἐπὶ γὰρ $MN:Μν::Ν:ν$ διαιρεμένων τῶν δύο προτέρων ὅρων διὰ M , ἔσαι $N:ν::Ν:ν$ (240).

308. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Εἴαν ἐπὶ τῇ συνθέτῃ λόγῳ $\frac{MN}{μν}$ ὑποθεθῇ $M = N$, καὶ $μ = ν$, ὁ σύνθετος λόγος α'.

ποκατασταθήσεται $\frac{MM}{μμ}$ · τοιγαρὲν α'. ὁ λόγος $\frac{MM}{μμ}$ προ-

δήλως σύγκειται ἐκ τῶν δύο ἀπλῶν, καὶ ἰσαλλήλων λό-

γων $\frac{M}{μ}, \frac{M}{μ}$, εἴγε $\frac{M}{μ} \times \frac{M}{μ} = \frac{MM}{μμ}$. β'. ἐπεὶ πᾶν

τετράγωνον παρασταθῆναι δύναται διὰ MM , καὶ πᾶν ἑτερον τετράγωνον διὰ $μμ$ · ὁ λόγος ἄρα ὁ μεταξὺ δύο ὧν τινῶν τετραγώνων δύναται παρασταθῆναι διὰ τῇ σεση-

μειωμένῃ πηλίκῃ $\frac{MM}{μμ}$ · ὁ ἄρα λόγος, ὁ μεταξὺ δύο ὧν

τινωνδὴποτε τετραγώνων, ἔστι σύνθετος ἐκ τῶν δύο ἴσων λόγων τῶν συνισταμένων ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ριζῶν, καὶ διὰ ἔστι διπλασίων λόγος τῶν κατ' αὐτὰ ριζῶν (290)· ἐντεῦθεν ἔν ρηθήσεται ὅτι τετράγωνα δύο εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν κατ' αὐτὰ ριζῶν.

309. Εἴαν ἐπὶ τῇ διπλασίονος λόγῳ $\frac{MM}{μμ}$ ὑποθεθῇ

$M = 4\mu$, ὁ λόγος γενήσεται $\frac{16\mu\mu}{\mu\mu}$, ὅθεν προκύψει ἡ

ἀναλογία: τὸ μείζον τετράγωνον $16\mu\mu$ πρὸς τὸ ἔλαττον $\mu\mu$ λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πηλίκον τῷ ἀπὸ M τετραγώνῳ, διαιρεθέντος διὰ τῷ ἀπὸ μ , πρὸς 1 , εἴτ' ἔν $16\mu\mu : \mu\mu :: 16 : 1$ (240). καὶ ἐπειδὴ $16\mu\mu$ ἔστιν ἴσον τῷ MM , ἄρα $MM : \mu\mu :: 16 : 1$. καὶ ἐν γένει „δυσὶν τετραγώνων ἀπὸ ῥιζῶν ἀνίσων γινομένων τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλάσσον λόγον ἔξει, ὃν ἔχει τὸ πηλίκον τὸ διαιρέσει τῆς μείζονος ῥιζῆς διὰ τῆς ἐλάσσονος προῖόν, τετραγωνισθέν, πρὸς τὴν μονάδα.“

310. Ἐὰν ἄρα ποσότης τις διπλασία ἢ τινὸς ἐτέρας, ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῷ πηλίκῳ, ὃ ἐστὶ 2 , τετράγωνον ἔστιν $= 4$, τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος ποσότητος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος λόγον ἔξει, ὃν 4 πρὸς 1 , τετάρτῳ τετραπλάσιον ἔσαι τῷδε τῷ τετραγώνῳ.

311. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐὰν ἐπὶ τῷ συνθέτῳ λόγῳ

$\frac{MNP}{\mu\nu\pi}$ ἵποτεθῇ $M = N = \Pi$, καὶ $\mu = \nu = \pi$, γενή-

σεται $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$ συγκείμενος ἐπιδήλως ἐκ τῶν τριῶν λόγων

$\frac{M}{\mu}, \frac{M}{\mu}, \frac{M}{\mu}$, εἴγε $\frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} = \frac{MMM}{\mu\mu\mu}$. καὶ δὴ ἔτος ἔσται λόγος τριπλασίων.

Ἐπεὶ δὲ δύο οἵτινεσὲν κύβοι αἰεὶ παρασαθῆναι δύναται, ὁ μὲν διὰ MMM , ἄτερος δὲ διὰ $\mu\mu\mu$, ὁ λόγος, ἡ τὸ πηλίκον, τὸ μεταξὺ δύο τινῶν κύβων ἐπικρατῆν, πα-

ρασαθεῖν ἂν διὰ $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$. ἄρα „ὁ μεταξὺ δύο ὠντινωγῶν

ἡ κύβων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ἰσαλλήλων λόγων
 ἡ τῶν συνισαμένων ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰς ῥιζῶν, ἧτοι ἔστι τρι-
 ἡ πλάσιον τῶν κατ' αὐτὰς ῥιζῶν· ἢ, ὅπερ ταυτὸν, δύο
 ἡ κύβων πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν κατ'
 αὐτὰς ῥιζῶν. “

312. Ἐὰν ἐν τῷ τριπλασίονι λόγῳ $\frac{MMM}{μμμ}$ ὑπο-

τεθῇ $M = 5μ$, γενήσεται ὁ λόγος $\frac{125μμμ}{μμμ}$. ὅθεν ἡ ἀ-

ναλογία $125μμμ : μμμ :: 125 : 1$. ἡκὺν ἡ δύο κύβων
 ἡ ἔξ ἀνίσων ῥιζῶν γινομένων MMM , $μμμ$ ὁ μείζων πρὸς
 ἡ τὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ὃν ὁ κύβος ὁ ἀπὸ τῆς πηλί-
 ἡ καὶ τῆς διαιρέσει τῆς μείζονος ῥίζης διὰ τῆς ἐλάσσονος
 ἡ προερχομένου πρὸς τὴν 1. “

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α΄ ΤΟΜΟΥ.