

ΣΕΙΡΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΤΟΜΟΣ ΕΚΤΟΣ.

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ,

ΥΠΟ

Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ,

ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΕΙΣ
ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μεταφρασθεῖσα ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ εἰς τὴν Νεοελλη-
νικὴν διάλεκτον ὑπὸ τοῦ

ΔΟΚΤΟΡΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΡΑΝΔΗΝΟΥ,
ΚΕΦΑΛΛΗΝΟΣ, .

Εφόρου τῆς Ἰονίου Ακαδημίας, Δεκάνου τῆς Φιλοσοφικῆς
Σχολῆς, καὶ Προφέσσορος τῆς Ὑψηλοτέρας
Μαθηματικῆς.

Κ Ε Ρ Κ Υ Ρ Α Ι .

1830.

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ.

Σ. Κ. Η ἐνταῦθα προτασσομένη εἰσαγωγή εἰς τὴν
Τριγωνομετρίαν, ἐρανίσθη ἀπὸ διαφόρους ὑπὸ τοῦ Με-
ταφραστοῦ.

Επειδή ἡ τριγωνομετρία εἶναι τὸ μέρος τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὸ ὑποῖον διὰ τῆς βοηθείας τοῦ ὑπολογισμοῦ προσδιορίζονται τὰ μέρη ἑνὸς τριγώνου, εἴτε εὐθυγράμμου, εἴτε σφαιρικοῦ, διὰ τῆς γνώσεως ἀποχρῶντος ἀριθμοῦ δεδομένων: τοῦτέστι γίνεται μία ἐφαρμογὴ τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν προσδιόρισιν μερῶν τῆς ἐκτάσεως· διὰ τοῦτο ἔκρινα εὐλογον νὰ δώσω μίαν γενικὴν ιδέαν τοῦ κλάδου τῆς Μαθηματικῆς γνωστοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα ἐφαρμογὴ τῆς Ἀλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ὡστε ἅς μὴ νομίσῃ τινὰς ὅτι ἡ τοιαύτη εἰσαγωγὴ δὲν ἔχει διόλου νὰ κάμῃ τίποτε μὲ τὴν τριγωνομετρίαν· διότι ἐπειδὴ, καθὼς εἶπα, εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, διὰ τῆς βοηθείας τοῦ ὑπολογισμοῦ, λύνονται τὰ προβλήματα ὅσα ἀναφέρονται εἰς τὴν προσδιόρισιν τῶν μερῶν ἑνὸς τριγώνου, εἶναι δηλαδὴ ἡ τριγωνομετρία μέρος τῆς λεγομένης ἐφαρμογῆς, πρέπει νὰ ἴδῃ τινὰς πῶς διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ λύεται ἓν Γεωμετρικὸν πρόβλημα, καὶ πῶς ἐξάθῃ δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ ὁ ὑπολογισμὸς εἰς τὰ ζητήματα τὰ ἀφορῶντα τὴν ἑκτασιν. Ἐκτὸς τούτου εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ταύτην θέλωμεν ἐξηγήσει μερικὰ πράγματα ἀπαραιτήτως ἀναγκαῖα διὰ τὴν κατὰληψιν πολλῶν μερῶν τῆς Τριγωνομετρίας.

Ι. Ἡ Ἀλγεβρα καὶ ἡ Γεωμετρία προσφέρουν κατὰ μέρος μεγάλα βοηθήματα διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Πρέπει λοιπὸν νὰ προῖδωμεν τὴν ὠφέλειαν ἣτις θέλει προκύψει ἀπὸ τὴν χρῆσιν ἐνταύτῳ τῶν δύο τούτων ἐπιστημῶν. Τὸ μέρος τοῦτο τῶν Μαθηματικῶν ὠνομάσθη ἐφαρμογὴ τῆς Ἀλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν,

ἡ Αναλυτικὴ Γεωμετρία (1). Ἀς ἐξετάσωμεν πῶς εἶναι δυνατόν νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ Ἀλγεβρα εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας.

2. Ἐπειδὴ αἱ γραμμαῖ, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ στερεὰ εἶναι ποσότητες συγκεκριμέναι καὶ τὰ γράμματα τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις εἰς τὴν Ἀλγεβραν σημειοῦν ποσότητας ἀφηρημένας, ἀνάγκη νὰ γνωστοποιήσωμεν τὰς συμφωνίας διὰ τῶν ὁποίων ὑποβάλλονται αἱ γεωμετρικαὶ ποσότητες εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὑπολογισμούς. Λαμβάνεται εὐθεῖα γραμμὴ ὡς μονὰς τοῦ μήκους, τὸ μέτρον, φερεῖται τότε ἐπειδὴ σημειώνει ἀριθμὸν ἀφηρημένον, α μέτρα ἐκφράζει τὸ μήκος μιᾶς εὐθείας, α τετραγωνικὰ μέτρα παριστάνει ἐπιφάνειαν ἰσοδύναμην μὲ α φορὰς ἐν τετραγωνικὸν μέτρον, καὶ α κυβικὰ μέτρα εἶναι στερεὸν τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος περιέχει α φορὰς ἐν κυβικὸν μέτρον. Συντομίας χάριν, ἐσυμφωνήθη νὰ ὑπονοῇται ἡ λέξις μονὰς ὥστε α ἡμπορεῖ νὰ σημειώνει ἢ γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν ἢ στερεόν. Οὕτως, ὅταν ἡ γραμμικὴ μονὰς ᾖ τὸ μέτρον καὶ λέγωμεν ὅτι μία γραμμὴ ἔστι ἰση μὲ 5, πρέπει νὰ ἐννοῶμεν ὅτι τὸ μήκος ταύτης τῆς γραμμῆς εἶναι 5 μέτρα· μία ἐπιφάνεια σημειωμένη διὰ 7, ἰσοδυναμεῖ μὲ 7 τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ ἐν στερεὸν ἴσον μὲ 8, ἰσοδυναμεῖ μὲ 8 κυβικὰ μέτρα. Ἐὰν συμφωνήσωμεν νὰ σημειώσωμεν τὴν ὡς μονάδα λαμβανομένην γραμμὴν διὰ λ, τότε ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου θέλει εἶναι τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος ὅστις ἔχει λ διὰ πλευράν.

(1) Ἡ ἔκφρασις, Ἐφαρμογὴ τῆς Ἀλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ τῆς Γεωμετρίας εἰς τὴν Ἀλγεβραν ἔοικε δώσει ἀκριβεστέραν ἰδέαν τοῦ κλάδου τούτου τῶν Μαθηματικῶν, διότι ἀμοιβαίως ἐφαρμόζεται ἡ Ἀλγεβρα εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ ἡ Γεωμετρία εἰς τὴν Ἀλγεβραν.

Τὸ μῆκος τῆς γραμμικῆς μονάδος εἶναι κατ' ἄρᾶσκειαν, ἀλλὰ πρέπει νὰ ᾔηται τὸ αὐτὸ δι' ὅλας τὰς ποσότητας τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν εἰς τὸν αὐτὸν ὑπολογισμόν.

3. Ο ἄριθμὸς τῶν ἀπλῶν παραγόντων ἑνὸς γινομένου συνιστᾷ τὸν βαθμὸν αὐτοῦ, (δὲν θεωροῦνται δὲ οἱ ἀριθμητικοὶ συντελεσταί). Οὕτως, α, 26, 3γ, κ.τ.λ, εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ· αβ, καὶ 3αβ, τοῦ

δευτέρου βαθμοῦ· αβγ, α καὶ 3αβ, τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ἀλλὰ, κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς Γεωμετρίας, ἡ γραμμὴ ἔχει μίαν διάστασιν, ἡ ἐπιφάνεια δύο διαστάσεις, τὸ στερεὸν τρεῖς διαστάσεις· ὥστε α, β, γ, σημαίνουν γραμμὰς, αβ μίαν ἐπιφάνειαν Ε, καὶ αβγ ἐκφράζει τὸν ὄγκον Ο, ἐνὸς στερεοῦ. (*) Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν Ἀλγεβρὰν λέγομεν ὅτι α εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, αβ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ αβγ τοῦ τρίτου· διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ὁ βαθμὸς μιᾶς ποσότητος μετρεῖ τὴν διάστασίν της· ὥστε αἱ ἐκφράσεις, βαθμὸς, διάστασις, εἶναι συνώνυμοι. Πρέπει ὁμῶς νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως διάστασις, γεωμετρικὴ τις ποσότης δὲν ἔχει περισσότερον ἀπὸ τρεῖς διαστάσεις, ἐν ᾧ ἀλγεβρικὴ ποσότης ἡμπορεῖ νὰ ᾔηται ἀνωτέρου βαθμοῦ τοῦ τρίτου.

Λέγεται ὁμογενὲς πολυώνυμον, τὸ πολυώνυμον τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, τοὔτεστι

(*) Πρέπει νὰ ὑπονοῇται, ὅτι ἐὰν αἱ πλευραὶ ἐνὸς ὀρθογωνίου ᾖναι α φοραῖς λ καὶ β φοραῖς λ' ἡ ἐπιφάνεια Ε ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον το ὁποῖον περιέχει αβ φοραῖς τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας· καὶ ὅτι τὸ στερεὸν Ο, ἰσοδυναμεῖ μὲ παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ προσεχεῖς κόψεις εἶναι α φοραῖς λ, β φοραῖς λ, γ φοραῖς λ'· τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο περιέχει αβγ φοραῖς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου.

τῆς αὐτῆς διασάσεως. Οὕτως $2\alpha\beta + \gamma^2 - \alpha^2$, εἰαι ὁμογενές πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἔχει δύο διασάσεις, καὶ μετρεῖ ἐπιφάνειαν.

4. Διὰ τῆς Γεωμετρίας ἐνίοτε ἀποδεικνύονται μερικαὶ προτάσεις τῆς Ἀλγεβρας, ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἡ Ἀλγεβρα ἔχει τὰ δύο ταῦτα καλὰ: τὸ νὰ κατασκευῇ ἀπλousέραν τὴν ἀπόδειξιν τῶν Γεωμετρικῶν θεωρημάτων, καὶ νὰ ἀνακαλύπτωνται δι' αὐτῆς αἱ ὠραιώτεραι κατασκευαί.

Ἰδοὺ παραδείγματα, ἱκανὰ νὰ δείξουν τὴν ὠφέλειαν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς Ἀλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Παράδειγμα 1.^{ον} Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ἀλγεβρικῶς ὅτι τὰ γινόμενα, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, εἶναι ἴσα, πρέπει διαδοχικῶς νὰ ὑποτεθῇ ὅτι α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, κλάσματα, καὶ ἀσύμμετροι ποσότητες. Διὰ τῆς Γεωμετρίας ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἀπλousέρα, διότι, ἐπειδὴ τὰ γινόμενα $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, μετροῦν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου, ἀναγκαιῶς εἶναι ἴσα. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται εἰς τρεῖς πραγματικὰς παραγόντας, διότι καθ' ὅποιανδήποτε τάξιν ἐκτελεσθῇ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων, α, β, γ , πάντοτε μετρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς προσεχεῖς κόψεις εἶναι α, β, γ . Τὸ ἐλάχιστον τῆς γεωμετρικῆς ἀποδείξεως εἶναι ὅτι δὲν ἐκτείνεται εἰς μεγαλύτερον ἀριθμὸν παραγόντων.

Παράδειγμα 2.^{ον} Γεωμετρικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ὄγκος κορμοῦ πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις ἰσοδυναμεῖ μὲ τρεῖς πυραμίδας τῶν ὁποίων τὸ κοινὸν ὕψος εἶναι τὸ τοῦ κορμοῦ, αἱ δὲ βάσεις, ἡ ἄνω βάση τοῦ κορμοῦ, ἡ κάτω βάση τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων

Εάσεων. Η Αλγεβρα αποδεικνύει ταύτην τὴν πρό-
 τασιν καὶ ἐνταύτῳ φανερόνει τὸν τρόπον τῆς ἀνακα-
 λήψεώς της. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ
 ὑπὸ ἐπιπέδου αβγδε παραλλήλου τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔΕ,
 ὁ κορμὸς αβγδε ΑΒΓΔΕ θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ
 τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε. Ἐὰν ἀπὸ τῆν
 κορυφὴν Σ κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἡ κά-
 θετος ΣΠ ἥτις συναπαντᾷ τὸ παραλλήλον ἐπίπεδον αβγδε
 εἰς τὴν σιγμὴν π, εἶναι γνωστὸν ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο
 πυραμίδων ἐκφράζονται διὰ $\frac{1}{3} ΠΣ \times ΑΒΓΔΕ$, $\frac{1}{3} Σπ \times$
 αβγδε· τὸ ἐπίπεδον ΣΑΠ τέμνει τὰς δύο ἐλάσεις ΑΒΓΔΕ,
 αβγδε, κατὰ δύο παραλλήλους ΑΠ, απ. Ἐὰν λοιπὸν ὁ
 ὄγκος τοῦ κορμοῦ σημειωθῇ διὰ χ, τὸ ὕψος τοῦ πΠ διὰ
 υ, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν βάσεων του, ΑΒΓΔΕ, αβγδε,

διὰ β^2 καὶ β'^2 , πρόκειται νὰ ἐκτιμηθῶσι τὰ ὕψη ΣΠ, Σπ.
 Γώρα αἱ γνωσταὶ ιδιότητες τῶν ὁμοίων πολυγώνων δίδουν,

$$\frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{ΑΒ^2}{αβ^2} = \frac{ΑΣ^2}{αΣ^2} = \frac{ΠΣ^2}{πΣ^2}.$$

$$\text{Λοιπὸν} \quad \frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{ΠΣ^2}{πΣ^2}, \quad \eta \quad \frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{ΠΣ + υ}{πΣ + υ}.$$

ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις δίδει,

$$\frac{ΠΣ^2}{\beta - \beta'} = \frac{υβ'}{\epsilon - \beta'}, \quad \frac{ΠΣ^2}{\beta - \beta'} = \frac{ΠΣ + υ}{\epsilon - \beta'} = \frac{υβ'}{\epsilon - \beta'}, \quad (1)$$

ἀλλὰ, $\chi = \frac{1}{3} ΠΣ \times ΑΒΓΔΕ - \frac{1}{3} πΣ \times αβγδε$.

Ἀντικαθίστοντες τὸς ἀλγεβρικοὺς τιμὰς τῶν ποσοτήτων,

(1) Ἡ ἀνάλογια, $\epsilon: \beta' :: ΠΣ: πΣ$, ἔχει κατ' εὐθείαν εἰς τὴν
 αὐτὴν ἐξοχότητα, διότι ἐπειδὴ $ΠΣ - πΣ$ ἰσοῦται μὲν υ, δίδει
 $\beta - \beta': υ :: \beta: ΠΣ :: \epsilon': πΣ$.

ΑΒΓΔΕ, αβγδε, καὶ διαιροῦντες ἔπειτα $\beta - \beta'$ διὰ $\beta - \beta'$,
εὐρίσκομεν,

$$\chi = \frac{1}{2}v(\beta^2 + \beta'^2 + \beta\beta')$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀναγνωσθεῖσα εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν, ἄγει εἰς τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν. σχ. α'.

Θέλουμεν ἰδεῖ (ἀρ. 21) ὅτι διὰ τῆς Ἀλγεβρας ἀνακαλύπτεται ἡ γεωμετρικὴ κατὰσκευὴ διὰ τὴν διαίρεσιν εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. καὶ παρομοίως ὅτι ἡ Ἀλγεβρα ἄγει ἀμέσως εἰς τὸν τύπον τὸν προσδιορίζοντα τὴν ἐπιφανείαν ἐνὸς τριγώνου διὰ λειτουργίας τῶν τριῶν πλευρῶν (ἔλεπε. ἀριθ. 22), ἐν ᾧ ἡ διὰ τῆς Γεωμετρίας ἀπόδειξις εἶναι πολλὰ συμπεπλεγμένη.

5. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν Ἀλγεβραν εἰς τὴν λύσιν τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων, παριστάνομεν τὰς γνωσὰς καὶ ἀγνώστους ποσότητας διὰ γραμμάτων· γράφομεν ἀλγεβρικῶς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος· αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις δίδουν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, καὶ ἡ κατασκευὴ τῶν πραγματικῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων ἄγει εἰς τὴν ζητούμενην λύσιν.

Τὰ Γεωμετρικὰ προβλήματα εἶναι ἢ προσδιωρισμένα ἢ ἀπροσδιόριστα. Ἐπειδὴ σκοπὸν δὲν ἔχομεν νὰ δώσωμεν τελείαν ἐφαρμογὴν πραγματείαν, διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα νὰ δεῖξωμεν πῶς ἡ Ἀλγεβρα ἐφαρμόζεται εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τὰ ὅποια ἄγουν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἀγνώστον· ἀλλὰ πρότερον ἅς ἴδωμεν πῶς κατασκευάζονται αἱ ἀλγεβρικαὶ ποσότητες.

Κατασκευὴ τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων.

6. Αἱ λύσεις τῶν περισσοτέρων γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας. Ἀλλ' ὅταν κάμῃ γραμμὴ δὲν ὑποτεθῇ ἴση μὲ τὴν μονάδα, κάθε ἀναλογία ἄγει εἰς μίαν ὁμογενῆ ἐξίσωσιν· αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις πρέπει λοιπὸν νὰ ᾔναι ὁμογενεῖς δηλαδή μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομασῶν, ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ. Ἐπομένως, διὰ νὰ ἐκφράζῃ ἐν κλάσμα γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, ἢ σκερὸν, πρέπει τὰ διαστάσεις τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ κατὰ μίαν, ἢ κατὰ δύο, ἢ κατὰ τρεῖς μονάδας.

Οὕτως, ἐὰν, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, σημειώσῃ γραμμάς, $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}$ εἶναι γραμμὴ, διότι τελέντος $\chi = \alpha\beta\gamma$, ἐξάγεται $\epsilon\delta\chi = \alpha\beta\gamma$, καὶ ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις πρέπει νὰ ᾔναι ὁμογενής, χ εἶναι μιᾶς διαστάσεως.

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\epsilon\zeta}$ ἔχει δύο διαστάσεις καὶ παρίστανει ἐπιφάνειαν· $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\epsilon\zeta}$ προσδιορίζει σκερὸν.

Ὅταν δὲ γραμμὴ τις ληφθῇ ὡς μονάς, καὶ ἀντὶ ταύτης ἀντικατασταθῇ x , οἱ τύποι δὲν εἶναι πλέον ὁμογενεῖς καὶ διὰ νὰ τοὺς κατασκευάσωμεν, καταστρίνομεν πρῶτον αὐτοὺς ὁμογενεῖς πολλαπλασιάζοντες δι' ἀρμοδίον δύναμειν τῆς γραμμῆς λειλημμένης ὡς μονάδος. Ἀς ἐμυλῆσωμεν κατὰ πρῶτον περὶ τῶν ὁμογενῶν τύπων.

Κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου

βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

7. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, πάντοτε δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφήν

$\chi = \alpha$, καὶ ἐν ᾧ χ σημειώνει γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν ἢ ὄγκον, α ἢμπορεῖ νὰ ᾔναι μονώνυμον, ἢ πολυνύμον ἀκέραιον ἢ κλασματικόν· ὅς ἐξετάσωμεν τὰς διαφόρους ταύτας περιστάσεις.

χ σημειώνει ἄγνωστον γραμμὴν.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν $\chi = \epsilon$, λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην κατὰ τὸ μῆκος μὲ β φοραῖς τὴν μονάδα λ' ἢ εὐθεῖα αὕτη ἐκφράζει τὴν ἄγνωστον χ .

Τὴν ἔκφρασιν, $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ κατασκευάζομεν ζητοῦντες τετάρτην γεωμετρικῶς ἀνάλογον τῶν τριῶν γνωστῶν γραμμῶν, γ, α, β · δηλαδή, ἀφ' οὗ ἄζωμεν δύο ἀπρὸςδιορίζουσας εὐθείας, ΟΔ, ΟΕ, ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν, λαμβάνομεν τὰ μέρη ΟΓ, ΟΑ, ΟΒ ἀμοιβαίως ἴσα με τὴν μονάδα λ, γ φοραῖς καὶ β φοραῖς ἐπαναληφθεῖσαν· ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ καὶ τὴν ΑΧ παράλληλον τῇ ΓΒ· ΟΧ θέλει εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ , διότι. (σχ. 6')

$ΟΓ : ΟΑ :: ΟΒ : ΟΧ$, ἢ $\gamma : \alpha :: \epsilon : ΟΧ = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

Εὰν ἡ τιμὴ τῆς χ ᾔητον $\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma}$, κατὰ πρῶτον ἠθέλαμεν κατασκευάσει γραμμὴν τινὰ, κ , ἴσην μὲ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἔπειτα ἠθέλαμεν προσδιορίσει τὴν γραμμὴν $\kappa\delta$. Ὡσαύτως ἠθέλαμεν κατασκευάσει, $\frac{\alpha\beta\delta\zeta}{\gamma\eta\theta}$, $\frac{\alpha\beta\delta\zeta\eta}{\gamma\eta\kappa}$, ζητοῦντες διαδοχικῶς τετάρτας γεωμετρικὰς ἀναλόγους τριῶν γνωστῶν γραμμῶν

8. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γραμμὴν $\chi = \alpha - \beta$, ἄγομεν εὐθεῖαν τινὰ MN (σχ. 7')· ἀναχωροῦντες ἀπὸ ὁποιανδήποτε σιγμῆν Ο, ταύτης τῆς εὐθείας, λαμβάνομεν $ΟΑ = \alpha$ καὶ $ΑΒ = \beta$ · ἡ εὐθεῖα ΟΒ θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς χ · διότι

$$ΟΒ = ΟΑ - ΑΒ = \alpha - \beta.$$

Σημείωσις. Όταν β ἦναι μικρότερον τοῦ α , ἡ σιγμὴ B πίπτει δεξιόθεν τῆς ἀρχῆς, O , καὶ ἡ τιμὴ τῆς χ εἶναι θετική. Όταν δὲ β εἶναι ἴσον μὲ α , ἡ σιγμὴ B πίπτει εἰς O καὶ ἡ OB θέλει εἶναι μηδέν καὶ τῷ ὄντι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς χ εἶναι μηδέν. Όταν β ὑπερβαίνει α , ἡ σιγμὴ B πίπτει εἰς B' , (1), ἀριστερόθεν τῆς ἀρχῆς O · ἡ κατασκευὴ λοιπὸν δίδει διὰ χ γραμμὴν τινὰ OB' , κατ' εὐθεῖαν ἀντίθετον τῇ OB , καὶ ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τῆς χ εἶναι ἀρνητικὴ, ἐν ᾧ OA ἦτον ἡ ἔκφρασις τῆς θετικῆς τιμῆς τῆς χ . Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι καθὼς ἡ τιμὴ τῆς γραμμῆς, χ , εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ, ἡ αὐτὴ κατασκευὴ δίδει διὰ χ εὐθεῖαν τινὰ πίπτουσαν δεξιόθεν ἢ ἀριστερόθεν τῆς ἀρχῆς O . Ὡς τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ δεικνύουσιν ὅτι εὐθεῖαι λαμβάνουσι θέσεις ἀντιθέτους. Ἡ σημείωσις αὕτη εἶναι ἀξία προσοχῆς. Όταν λέγεται ὅτι γραμμὴ τις εἶναι ἀρνητικὴ, πρέπει νὰ ὑπονοῇται ὅτι ἡ τιμὴ ταύτης τῆς γραμμῆς ἔχει πρὸ αὐτῆς τὸ σμεῖον $-$ · τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι τὸ μῆκος ταύτης τῆς γραμμῆς πρέπει νὰ φερθῇ, εἰς ἀντίθετον ἔννοιαν ἀπὸ ἐκείνην εἰς τὴν ὁποῖαν λαμβάνονται αἱ θετικαὶ γραμμαί. (2)

Διὰ τὴν κατασκευασωμένην, $\chi = \beta - \alpha$, λαμβάνομεν (σχ. γ'), $OB = \beta$, $BA = \alpha$, $AG = \gamma$, $GD = \delta$,

(1) Τότε, $OA = \alpha$, $AB' = \beta$, καὶ τὸ μῆκος τῆς OB' εἶναι $\beta - \alpha$.

(2) Όταν λοιπὸν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν θὰ εἰσαῶμεν ἀντὶ τῶν γεωμετρικῶν ποσοτήτων τὰς ἀλγεβρικός τιμὰς των, πρέπει νὰ παρηγήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν θέσιν τῶν γεωμετρικῶν τούτων ποσοτήτων ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν ἐκ τῆς ὁποίας ἐκτιμῶνται· καὶ ὅταν ἐξ αὐτῶν ἄλλαι μὲν εὐρίσκωνται εἰς μίαν θέσιν ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν, ἄλλαι δὲ εἰς ἀντίθετον, τότε αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν δευτέρων πρέπει νὰ γραφθῶσιν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν μὲ ἐναντίον σημεῖον ἀπὸ ἐκεῖνο μὲ τὸ ὁποῖον ἐγράφησαν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν πρώτων· δηλαδὴ ἐὰν δεθῇ εἰς τὰς πρώτας τὸ $+$ ἢ δὲν δεθῇ εἰς αὐτάς κατ' ἐν σημεῖον πρέπει εἰς τὰς δευτέρας νὰ δεθῇ τὸ σημεῖον $-$. Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι πολλὰ ἀναγκασία εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

Τὸ μῆκος $ΟΔ$, θέλει εἶναι ἡ ἐκφρασεὶς τῆς $χ$, διότι

$$ΟΔ = ΘΒ + ΒΛ - ΑΓ - ΓΔ = β + α - γ - δ.$$

Καθὼς, $β + α - γ - δ$, εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν ἢ ἀρνητικὸν, ἡ σιγμὴ $Δ$ πίπτει δεξιόθεν τῆς σιγμῆς $Ο$, ἢ εἰς $Ο$, ἢ ἀριστερόθεν τῆς σιγμῆς $Ο$.

9. Ἡ περίσασις καθ' ἣν $χ$ ἐκφράζεται διὰ κλάσματος οἱ δύο ὅροι τοῦ ὑπολοίπου εἶναι πολυώνυμα, ἄγεται εἰς τὴν προλαβοῦσαν, μετὰ τὴν μεταμόρφωσιν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ εἰς μονώνυμα. Ἐστω,

$$χ = \frac{\overset{3}{α} \overset{2}{β} - \overset{2}{α} \overset{2}{γ}}{\overset{3}{3} \quad \overset{3}{3}}$$

$$α - γ$$

Ἀφ' οὗ θέσωμεν τὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις,

$$\overset{2}{α} \overset{2}{γ} = \overset{3}{α} \overset{3}{λ'}, \quad \overset{3}{γ} = \overset{3}{α} \overset{2}{μ}, \quad \overset{3}{λ'} = \overset{α}{γγ}, \quad \overset{αα}{μ} = \overset{γγ}{γγ},$$

προσδιορίζομεν τὰς γραμμάς, $λ'$, $μ$, καὶ ἡ τιμὴ τῆς $χ$ ἄγεται εἰς

$$χ = \frac{\overset{3}{(β - λ')}}{\overset{2}{α}} α = \frac{(β - λ')}{α} α.$$

$(α - μ)$ καὶ $(β - λ')$, εἶναι δύο γραμμαὶ $ν$, π' εἰς τρόπον ὥστε τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κλάσματος, $\frac{απ}{ν}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι μονώνυμα.

Ἡθέλαμεν φράσει εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς $χ$, κάμνοντες,

$$\overset{3}{αβ} = \overset{3}{δδ}, \quad \overset{3}{αγ} = \overset{2}{εδ}, \quad \overset{3}{α} = \overset{2}{ζδ}, \quad \overset{3}{γ} = \overset{2}{ηβ},$$

διότι ἐπειδὴ διὰ τούτων τῶν ἐξισώσεων προσδιορίζονται αἱ

$$\text{γραμμαὶ, } \overset{3}{δ}, \overset{2}{ε}, \overset{2}{ζ}, \overset{2}{η}, \text{ ἡθέλαμεν ἔχει, } χ = \frac{(δ - ε)β}{(ζ - η)β} = \frac{(δ - ε)}{(ζ - η)}$$

καὶ χ ἤθελεν εἶναι μία τετάρτη γεωμετρικῶς ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωστῶν γραμμῶν, ζ — η , δ — ϵ , β . ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη κατασκευὴ εἶναι πλέον μακρυνὴ τῆς προηγουμένης, βλέπομεν ὅτι ἡ ἐκλογὴ τοῦ εἰσαγομένου γράμματος ὡς κοινοῦ παράγοντος, δύναται νὰ ἔγῃ ἐπὶ ῥόοιαν ἐπάνω εἰς τὴν ἀπλότητα τῆς κατασκευῆς.

10. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἶναι γενικὴ· πλὴν ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν συντομωτέρας κατασκευάς. Παραδείγματα χάριν, τὴν γραμμὴν, α — β ἤθελαμεν προσδιορίσει ζητοῦντες τετάρτην ἀνάλογον τῶν τριῶν γνωστῶν γραμμῶν, γ , $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$.

11. Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ στερεά. Οὕτως, εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi = \alpha\beta$, ἡ ἄγνωστος ἐπιφάνεια χ , ἐκφράζεται δι' ὀρθογωνίου, τοῦ οὐοίου αἱ διαστάσεις εἶναι α πορὰς λ καὶ β πορὰς λ .

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἐπιφανείας $\chi = \frac{\alpha\beta}{\lambda}$, ἀρκεῖ ἡ προσδιορίσις μιᾶς γραμμῆς $\epsilon = \frac{\gamma\delta}{\lambda}$ καὶ θέλει εἶναι $\chi = \alpha\epsilon$.

Ἐὰν $\chi = \alpha\beta\gamma$, ἡ ἄγνωστος χ θέλει ἔχει ἔκφρασιν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ οὐοίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι α πορὰς λ , β πορὰς λ , καὶ γ πορὰς λ .

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ στερεοῦ, $\chi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\lambda}$, προσδιορίζεται γραμμὴ τις $\gamma = \frac{\delta\epsilon\zeta}{\lambda}$ καὶ τοῦτο δίδει, $\chi = \alpha\beta\gamma$.

Ὅταν οἱ δύο ὅροι τοῦ ἐκφράζοντος τὴν ἄγνωστον χ κλάσματα, ᾗται πολυώνυμα, μεταμορφόνομεν αὐτὰ εἰς μονώνυμα ὡς εἵπομεν, (ἀρ. 9).

12. Όταν ἡ ἐξίσωσις δέν ᾔναι ὁμογενής, κατὰ πρῶτον τὴν ἀποκαθιστῶμεν ὁμογενή, πολλαπλασιάζοντες δὲ ἁρμοδίων δυνάμεων τῆς γραμμῆς λ, ὡς μονάδος εἰλημμένης. Οὕτως

ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi = \frac{a}{\gamma - \delta} - \beta$, ἡ ἄγνωστος χ σημεῖονει

ἐπιφάνειαν καὶ α, β, γ, δ, γραμμᾶς· ὁ τύπος κατασταίνεται ὁμογενής, ὅταν τεθῇ

$$\chi = \frac{\frac{a}{\gamma - \delta} - \beta}{\lambda}.$$

Ἀς ἐφαρμόσωμεν τὴν γενικὴν ταύτην θεωρίαν εἰς παραδείγματα.

13. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Νὰ διαιρέσωμεν εὐθεΐαν δεδομένην, $OM = a$, (σγ. 6', εἰς δύο μέρη, OF , FM , τὰ ὅποια νὰ ἔχουν λόγον μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν γραμμῶν. μ , ν . Ἐσῶ $OF = \chi$ θέλομεν εἶχε $FM = a - \chi$ ἡ ἀναλογία

$$OF : FM :: \mu : \nu, \text{ δίδει } \chi = \frac{a\mu}{\mu + \nu}.$$

Ἡ ἄγνωστος χ εἶναι λοιπὸν μία τετάρτη γεωμετρικῶς ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωστῶν γραμμῶν, $\mu + \nu$, μ καὶ a . Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν χ, ἄγομεν ὅποιονδήποτε εὐθεΐαν OD λαμβάνομεν, $OB = \mu$, $BN = \nu$ ἄγομεν ὁμοίως τὴν NM ἡ παράλληλος BG τῇ NM προσδιορίζει τὴν ζητούμενην σημειὴν Γ · διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα, OMN , OGB , δίδουν

$$ON : OM :: OB : OF, \text{ ἢ } \mu + \nu : a :: \mu : OF \text{ ἢ}$$

$$OF = \chi = \frac{a\mu}{\mu + \nu}.$$

14. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένων δύο^ο σιγμῶν B καὶ A ἀπροσδιορίστου εὐθείας EZ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εἰς ταύτην τὴν εὐθεΐαν μία κάθετος, ὥςτε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διασημάτων ὁποιασδήποτε σιγμῆς ταύτης τῆς καθεύτου ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας σιγμᾶς A καὶ B νὰ ᾔηται ἴση μὲ δεδομένον τετράγωνον, δ. (σχ. ε')

Ἐπειδὴ ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος δὲν φανερόναι ἀπὸ ποίαν θέσιν σχετικῶς πρὸς τὴν σιγμὴν A, ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὴν ἀπροσδιόριστον εὐθεΐαν, ὑποθέτομεν ὅτι πίπτει δεξιόθεν ταύτης τῆς σιγμῆς· ὁ ὑπολογισμὸς θέλει δεῖξει ἐὰν ἡ ὑπόθεσις αὕτη ᾔηται ἀκριβὴς καὶ ἐὰν τὸ πρόβλημα ᾔηται δυνατόν. Ἐςω, HΘ ἡ ζητούμενη κάθετος· πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ποῦς X ταύτης τῆς καθεύτου,

ὥςτε δι' ὁποιανδήποτε σιγμὴν αὐτῆς Γ, ἡ σχέσις $\overline{GB} - \overline{GA} = \delta$ νὰ πληροῦται.

Τὰ τρίγωνα, ΓXB, ΓXA δίδουν,

$$\overline{GX} = \overline{GB} - \overline{XB} = \overline{GA} - \overline{XA} \cdot \text{ὅθεν}$$

$$(1) \dots \overline{GB} - \overline{GA} = \overline{XB} - \overline{XA}$$

Τώρα ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους ταύτης τῆς τελευ-

ταίας ἐξισώσεως δηλαδή $\overline{GB} - \overline{GA}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τῆς σιγμῆς Γ ἐπὶ τῆς καθεύτου HΘ· διότι, διὰ κάθε ἄλλην σιγμὴν Δ ταύτης τῆς καθεύτου ἠθέλαμεν ἔχει

$\overline{DB} - \overline{DA} = \overline{XB} - \overline{XA}$, ὅθεν $\overline{GB} - \overline{GA} = \overline{DB} - \overline{DA}$ · λοιπὸν καὶ τὸ δεύτερον ἔχει τὴν ἰδίαν τιμὴν· ἐπομένως ὁ σάκις ὑψωθῇ μία κάθετος ἐπὶ μιᾷ εὐθείας, πάντοτε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διασημάτων,

ἐποικας δ' ἡ ποτε σιγμῆς τῆς καθέτου ἀπὸ δύο δεδομένας σιγμᾶς εἶναι σταθερὰ ποσότης· ἀλλὰ καὶ ἡ σιγμὴ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας ἐκ τῆς ὁποίας ὑψύ-
νεται ἡ κάθετος εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου· λοιπὸν ἡ
διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διαστημάτων ταύτης τῆς
σιγμῆς ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο δεδομένας Β καὶ Α, εἶναι ἡ
αὐτὴ ὡς ἀνωτέρω· καὶ ἐπειδὴ τὴν ἐκαλέσαμεν δ· διὰ
τοῦτο

$$(2) \quad XB - XA = \delta.$$

Τούτου τεθέντος, ἔσωσαν

$$AB = \alpha \text{ καὶ } AX = \chi \cdot \text{ὅθεν } BX = \alpha - \chi.$$

ἡ σχέσις (2) δίδει

$$(2) \quad (\alpha - \chi)^2 - \chi^2 = \delta^2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 - \chi^2 = \delta^2$$

$$\text{ἢ } 2\alpha\chi = \alpha^2 - \delta^2 \cdot \text{ὅθεν } \chi = \frac{\alpha^2 - \delta^2}{2\alpha} = \frac{(\alpha + \delta)(\alpha - \delta)}{2\alpha} \quad (3)$$

Τώρα καθὼς ἡ τιμὴ τῆς χ , εἶναι θετικὴ ἢ ἴση μὲ τὸ
μηδέν, ἢ ἀρνητικὴ, ὁ ποῦς τῆς καθέτου, πίπτει δεξιόθεν
τῆς Α, (ὡς ὑπεθέσαμεν), ἢ ἐπὶ τῆς Α, ἢ ἀριστερόθεν τῆς
Α. Τῶ ὄντι.

1.ᾠ Όταν χ ᾔηται θετικόν, δ εἶναι μικρότερον τοῦ
α· λοιπὸν

$$\delta < \alpha, \quad \Gamma B - \Gamma A < AB, \quad \Gamma B < \Gamma A + AB$$

Απὸ τὴν τελευταίαν ἀνισότητα συνάγομεν ὅτι ἡ γωνία
ΓΑΒ πρέτει νὰ ᾔηται ὀξεῖα. Ο ποῦς λοιπὸν τῆς ζητουμένης
καθέτου δηλαδὴ Χ εὐρίσκεται δεξιόθεν τῆς Α, καὶ ἀπέχει ἀπ'
αὐτὴν ὅσον ἐκφράζει ἡ τιμὴ τῆς χ , δηλαδὴ $\frac{(\alpha + \delta)(\alpha - \delta)}{2\alpha}$

ἥτις εἶναι ἴση μὲ μίαν τετάρτην γεωμετρικῶς ἀνάλογον ΑΧ

τῶν τριῶν γνωστῶν γραμμῶν, 2α , $\alpha + \delta$, $\alpha - \delta$ προσέτι
εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{2} AB$ · διότι $AX = \frac{\alpha - \delta}{2} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{\delta}{2}$.

2.^{ον} Όταν ἡ τιμὴ τῆς χ ᾖ μηδέν, τότε ἔχομεν

$$\delta = \alpha, \Gamma B - \Gamma A = AB, \Gamma B = \Gamma A + AB.$$

ἡ γωνία λοιπὸν ΓAB εἶναι ὀρθή· ὁ ποῦς λοιπὸν τῆς ζη-
τουμένης καθέτου πίπτει εἰς A .

3.^{ον} Όταν, τέλος, ἡ τιμὴ τῆς χ ᾖ ἀρνητικὴ, ἔχομεν

$$(4) \chi = -\frac{(\delta + \alpha)(\delta - \alpha)}{2\alpha}$$

$$\delta > \alpha, \Gamma B - \Gamma A > AB, \Gamma B > \Gamma A + AB.$$

ἡ γωνία λοιπὸν ΓAB , πρέπει νὰ ᾖ ἀμβλεῖα· ὁ ποῦς
ἄρα τῆς ζητουμένης καθέτου πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου,
δηλαδὴ κατὰ τὰ ἀριστερὰ τῆς A . Ἐὰν αὕτη ἡ κάθετος
ᾖναι ἡ ΘH , θέλομεν ἔχει

$$AX' = \frac{(\delta + \alpha)(\delta - \alpha)}{2\alpha}, \Gamma' B - \Gamma' A = \delta.$$

εἰς τρόπον ὥστε AX' , θέλει εἶναι τετάρτη γεωμετρικῶς
ἀνάλογος, τῶν τριῶν γνωστῶν γραμμῶν, 2α , $\delta + \alpha$,
 $\delta - \alpha$, (*)

(*)· Ἀνάμεσθι προσέτι νὰ βεβαιώσωμεν τοῦτο, διότι σημειό-
νουντες AX' διὰ χ , ἔχομεν $BX' = \alpha + \chi$, καὶ ἡ συνθήκη,

$$BX' - AX' = \delta, \text{ δίδει } \chi = \frac{(\delta + \alpha)(\delta - \alpha)}{2\alpha}.$$

Καὶ καθὼς αὕτη ἡ τιμὴ τῆς χ , εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν ἢ ἀρνητικὴ,
ἡ κάθετος πίπτει ἀριστερὰς τῆς A , ὡς ὑπετέθη, ἢ εἰς A , ἢ δεξιόθεν
τῆς A . Ἡ ἀντίστροφος εἶναι ἀληθής.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ζητουμένην κάθετον, πρέπει πάν-
τοτε νὰ προσδιορίσωμεν μίαν τετάρτην γεωμετρικῶς ἀνάλογον τριῶν
γνωστῶν γραμμῶν. Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν
ἀπλοῦς ἐραν, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς BK μέρος τὸ $BK' = \delta$ ἄγομεν

Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι εἰς ση-
μειώσωμεν διὰ χ , τὸ διάστημα τῆς σιγμῆς A ἀπὸ τὸν
πόδα τῆς ζητουμένης καθέτου, μετροῦντες τὸ διάστημα
τοῦτο δεξιόθεν τῆς ἀρχῆς A · καθὼς ὁ ποῦς τῆς καθέτου
πέσῃ εἰς τὴν σημειωμένην θέσιν, (δεξιόθεν τῆς A), ἢ εἰς
 A , ἢ ἀρισερόθεν τῆς A , ἡ τιμὴ (3) τῆς χ , θέλει εἶναι
θετικὴ ἢ μηδὲν ἢ ἀρνητικὴ.

Εἰς λάβωμεν BX δι' ἄγνωστον, εὐρίσκωμεν

$$BX = \frac{a + \delta}{2a}$$

Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι πάντοτε θετικὴ καὶ τῷ ὄντι,
—² —²

$GB - GA$ ἐπειδὴ πρέπει νὰ ᾖ ἀριθμὸς θετικὸς, δ , ἡ
πλαγία GB εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλαγίας GA · τοῦτο δὲ
ἀπαιτεῖ νὰ πίπτῃ ἡ κάθετος ἀρισερόθεν τῆς σιγμῆς B .
Καθὼς δ , εἶναι μικρότερον, ἢ ἴσον ἢ μεγαλήτερον τῆς a ,
ἡ τιμὴ τῆς BX εἶναι μικροτέρα τῆς a , ἢ ἴση ἢ μεγαλη-
τέρα· ὥστε ὁ ποῦς τῆς ζητουμένης καθέτου πίπτει, μεταξύ
 B καὶ A , ἢ εἰς A , ἢ ἀρισερόθεν τῆς A . Ἡ ἀντίστροφος
ᾖ ἀληθής. Τοῦτο δὲ συμφωνεῖ μὲ τὴν διάλυσιν τῆς
τιμῆς (3).

Γέλως, ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ποῦς τῆς καθέτου πίπτει
δεξιόθεν τῆς B εἰς X'' , καὶ σημειωθῇ BX'' διὰ χ , ἡ συνθήκη

$$BX'' - AX'' = \delta, \text{ δίδει } \chi = -\frac{(a + \delta)}{2a}.$$

μὴν κάθετον τὴν $K'N$, ἐπὶ τὴν BE , καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $K'N$,
ἐπιανδύομεν σιγμὴν N , τιαύτην ὁμοῦ, ὥστε τὰ τοῖχα BN , $K'N$, $γρ$ -
αφόμενα νὰ τέμνονται εἰς σιγμὴν τινὰ Γ' ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τὴν
σιγμὴν Γ ἐπὶ τῆς BE θέλει εἶναι τὴν ζητουμένην ιδιότητα· διότι,
δι' ἐπιανδύομεν σιγμὴν A αὐτῆς, θέλει εἶναι:

$$AB - \Delta A = GB - GA = BN - K'N = BK' = \delta.$$

Ἡ ἀρνητικὴ αὕτη τιμὴ τῆς χ ἐκφράζει ὅτι ὁ ποῦς τῆς καθέτου πίπτει εἰς ἐναντίαν θέσιν ἀπὸ τὴν ὑποτεθεῖσαν, δηλαδὴ εἰς Α, ἀριστερόθεν τῆς Β.

15. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω διάλυσιν ἔπεται, ὅτι ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς ἀγνώστου, ἐκφράζει ὅτι ἡ παριζανομένη ἀπὸ τὴν ἀγνώστον ταύτην γραμμὴ, πίπτει εἰς τὴν μερικὴν θέσιν ἣτις ἀπεδόθη εἰς αὐτὴν ὅταν ἐτίθετο τὸ πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾧ ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ταύτης τῆς ἀγνώστου, δεικνύει ὅτι πρέπει νὰ φερθῇ εἰς ἐναντίαν θέσιν ἀπὸ τὴν εἰς αὐτὴν ἀποδοθεῖσαν. Ἡ συνέπεια αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὴν σημείωσιν τοῦ ἀριθ. 8.

Κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἀγνώστον.

16. Θέλοντες νὰ λύσωμεν γεωμετρικόν τι πρόβλημα διὰ τῆς Ἀλγεβρας, καὶ σημειόνοντες διὰ χ ἀγνώστον τινα γραμμὴν, καὶ διὰ α, β, π θετικὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι νὰ ἐκφράζουν γνωστὰς γραμμάς, δυνατόν νὰ καταστήσωμεν εἰς ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μιᾶς τῶν μορφῶν,

$$\chi^2 \pm 2\pi\chi \pm \alpha\beta = 0$$

πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ρίζας τούτων τῶν ἐξισώσεων.

17. Διὰ νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὴν ἀπλουτέραν περίστασιν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\chi^2 = \alpha\beta, (*)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀγνώστος χ εἶναι μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β , τὴν κατασκευάζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ

(*) Ἡθέλωμεν φθάσει εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, ἐὰν ἐζητούσαμεν τὴν πλευρὰν, χ , τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ ὀρθογώνιον $\alpha\beta$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ α καὶ β εἶναι δεδομένα.

ἀπροσδιορίζου εὐθείας τὰ μέρη $\Delta A = \alpha$, $\Delta B = \beta$, (σγ. 5').
 ἔπειτα ἐπὶ τῆς AB ὡς διαμέτρου, γράφοντες τὴν ἡμιπε-
 ριφέρειαν AMB , καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Δ ὑψώνοντες μίαν
 κάθετον ΔM · ἡ τιμὴ τῆς χ θέλει εἶναι ἡ ΔM · διότι,
 εἰ ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ MA , MB , αἱ γωνίαι, $\angle \Delta M$,
 $\angle AMB$, θέλουσιν εἶναι ὀρθαί· θέλομεν ἔχει λοιπὸν,

$$M\Delta = \Delta A \times \Delta B = \alpha\beta = \chi^2 \text{ ὅθεν } \chi = M\Delta.$$

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\chi = \alpha$, κατασκευά-
 ζονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Οὕτως, διὰ νὰ προσδιο-
 ρίσωμεν τὴν γραμμὴν χ , εἰς τὴν ὁμογενῇ ἐξίσωσιν,

$$\chi = \frac{\alpha + \gamma\delta}{\alpha - \delta},$$

ἄγομεν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὴν μορφήν $\chi = \alpha\beta$,
 κάμνοντες

$$\gamma\delta = \alpha\tau, \quad \delta = \alpha\mu \text{ ὅθεν } \chi = \frac{\alpha + \alpha\tau}{\alpha - \alpha\mu} = \alpha \frac{(1 + \tau)}{(1 - \mu)}$$

$$= \frac{\alpha(1 + \tau)}{1 - \mu} = \alpha \times \frac{\alpha(1 + \tau)}{1 - \mu}$$

Τώρα $\frac{\alpha(1 + \tau)}{1 - \mu}$ ἐκφράζει μίαν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν
 ὁποίαν καλῶς β' καὶ τότε $\chi = \alpha\beta$ · ἐξισώσεις ὅπου ἡξεύρο-
 μεν νὰ κατασκευάσωμεν· αἱ γραμμαὶ τ , μ , β' εἶναι εὐκό-
 λοκατασκευάσιμοι.

18. Ἐν γένει, ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\chi = \frac{\pi}{x}$ (*) ᾖ ὁμο-

(*) Τὰ γράμματα π , x , συμμετρῶν μονώνυμα, ἢ πολυώνυμα ὁμογενῆ.

γενής, διὰ νὰ παριστάνῃ ἡ ἄγνωστος χ μίαν γραμμὴν; ἡ μίαν ἐπιφάνειαν ἢ ἓν σκελετὸν, πρέπει ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμοῦ νὰ ὑπερβαίῃ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ, κατὰ δύο ἢ τέσσαρας, ἢ ἕξ μονάδας. Φερ' εἰπεῖν, ἐπειδὴ μία ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις, εἰς χ σημειώσῃ μίαν ἐπιφάνειαν, δυνάμεθα νὰ τὴν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γινο-

μένου $\alpha\beta$ · ἡ ἐξίσωσις, $\chi\chi = \pi$, ἄγεται τότε εἰς $\alpha\beta = \pi$ · τῶρα ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις διὰ νὰ ᾔῃ ὁμογενής, πρέπει π νὰ περιέχῃ τέσσαρας παράγοντας περισσότερον παρὰ χ .

19. Διὰ νὰ καταστήσωμεν ἀπλουστέρα τὴν κατασκευὴν τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, $\chi^2 \pm 2\pi\chi \pm \alpha\beta = 0$ κάμνομεν $\alpha\beta = \kappa$, καὶ προσδιορίζομεν τὴν γραμμὴν κ ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· ζητοῦντες δηλαδὴ μίαν μέσσην ἀνάλογον μεταξὺ α καὶ β . Ἡ γενικὴ λοιπὸν ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δυνατόν νὰ ἔχῃ μίαν ἀπὸ τὰς τέσσαρας μορφάς.

$$(1) \dots \chi^2 - 2\pi\chi + \kappa^2 = 0, (2) \dots \chi^2 - 2\pi\chi - \kappa^2 = 0$$

$$(3) \dots \chi^2 + 2\pi\chi + \kappa^2 = 0, (4) \dots \chi^2 + 2\pi\chi - \kappa^2 = 0$$

Αἱ ἐξισώσεις, (3), (4), συνάγονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1), (2) τρεπομένου χ εἰς $-\chi$ · ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων, (1) καὶ (2)· διότι λαμβάνοντες τὰς ρίζας τούτων μὲ σημεῖα ἐναντία θέλομεν ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων, (3), (4). Τούτου τεθέντος.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (1), σημειόνομεν αὐτὰς διὰ χ' καὶ χ'' , καὶ θέλομεν ἔχει·

$$\chi' = \pi + \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)}, \chi'' = \pi - \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)}.$$

Τώρα, $\sqrt{(\pi - \kappa)}$, είναι μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι π , καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ κ . Εὐρίσκομεν λοιπὸν τὴν τιμὴν τοῦτου τοῦ ῥιζικοῦ, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας AB , (σχ. 5'), ἐν μέρος $AB = \pi$ ἔπειτα γράφοντες ἐπὶ τῆς AB , ὡς διαμέτρου, τὴν ἡμιπεριφέρειαν AMB , καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς A ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα κ , τόξον κύκλου τὸ ὁποῖον τέμνει ταύτην τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς M ἐπιζευγνύοντες δὲ τὰς χορδὰς MA , MB , ἐπειδὴ ἡ γωνία AMB εἶναι ὀρθή, ἔχομεν

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{(\pi - \kappa)^2}.$$

Εἰάν λοιπὸν γράψωμεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν, $X''MX$, ἐκ τῆς σιγμῆς B ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα BM , αἱ εὐθεῖαι AX' , AX'' , θέλουσι εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς εξισώσεως (1)· διότι,

$$BX' = BX'' = BM = \sqrt{(\pi - \kappa)^2},$$

$$AX' = AB + BX' = \pi + \sqrt{(\pi - \kappa)^2} = \chi',$$

$$AX'' = AB - BX'' = \pi - \sqrt{(\pi - \kappa)^2} = \chi''$$

Ὅταν π ᾖναι μεγαλῆτερον ἀπὸ κ , τότε αἱ δύο ῥίζαι χ' καὶ χ'' εἶναι πραγματικαὶ καὶ θετικαί, καὶ δυνάμεθα νὰ τὰς κατασκευάσωμεν· διότι ἐπειδὴ ἡ διάμετρος, $AB = \pi$, εἶναι μεγαλῆτέρα τῆς χορδῆς $AM = \kappa$, τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τῆς σιγμῆς A ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα κ , ἐξ ἀνάγκης τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν AMB .

Ὅταν $\pi = \kappa$, αἱ δύο ῥίζαι, χ' , χ'' , εἶναι ἴσαι μὲ π . Τοῦτο δεικνύει καὶ ἡ κατασκευὴ· τῷ ὄντι, ὅταν ἡ χορδὴ AM γένῃ ἴση μὲ τὴν διάμετρον AB , τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τῆς σιγμῆς A , ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα κ , ἅπτε-

ται τῆς ἡμιπεριφερείας AMB , εἰς τὴν σιγμὴν B' καὶ τότε ἡ ἀκτὶς BM τῆς ἡμιπεριφερείας $X'MX'$, γίνεται μηδέν, ἡ ἡμιπεριφέρεια αὕτη καταντᾷ εἰς τὴν σιγμὴν B' ἐπομένως αἱ δύο σιγμαὶ X' καὶ X'' πίπτουν εἰς B , καὶ

$$AX' = AX'' = AB = \pi.$$

Οταν, π ᾗναι μικρότερον τοῦ κ αἱ δύο ρίζαι χ' καὶ χ'' εἶναι κατ' ἐπίνοιαν, καὶ ἡ κατασκευὴ δεικνύει τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος· διότι τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τῆς σιγμῆς A ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα κ , δὲν συναπᾶντᾷ πλέον τὴν ἡμιπεριφέρειαν AMB · τοῦτο ἀκόμη φανερόν ἐστι εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος AB εἶναι ἴση μὲ π , δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ κ , μεγαλητέρα ταύτης τῆς διαμέτρου.

Τέλος ὅταν $\kappa = 0$, αἱ σιγμαὶ M , X'' πίπτουν εἰς A · καὶ αἱ δύο ρίζαι AX'' καὶ AX' γίνονται ἡ μὲν ἴση μὲ τὸ μηδέν, ἡ δὲ ἴση μὲ 2π · καὶ τῷ ὄντι ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (1) ἄγεται εἰς $\chi(\chi - 2\pi) = 0$ αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ , εἶναι, 0 καὶ 2π .

Παράδειγμα. Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον γνωρίζοντες τὴν περίμετρον 4π καὶ

τὴν ἐπιφανείαν του κ . Εἰν καλέσωμεν χ καὶ ψ τὰς δύο προσεγγεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ περίμετρος του θέλει εἶναι $2\chi + 2\psi$ καὶ ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως ἰσοῦται μὲ 4π , διὰ τοῦτο $2\chi + 2\psi = 4\pi$ ὅθεν $\psi = 2\pi - \chi$ · εἰν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὴν μίαν πλευρὰν, ἀφαιροῦντες αὐτὴν ἀπὸ 2π , θελομεν ἔχει τὴν ἄλλην· ἀκολουθῶς εἰν καλέσωμεν τὴν μίαν χ , ἡ ἄλλη θέλει εἶναι $2\pi - \chi$ · ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν χ , καὶ $2\pi - \chi$, ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος

ἐκφράζεται διὰ κ · διὰ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi(2\pi - \chi) = \kappa \quad \text{ὅθεν, (1) . . . } \chi - 2\pi\chi + \kappa = 0$$

αἱ δύο ρίζαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως εἶναι αἱ δύο προ-
σεχεῖς πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι λύοντες
αὐτὴν εὐρίσκομεν $\chi = \pi \pm \sqrt{(\pi - \kappa)}$ · λαμβάνοντες διὰ
τὴν μίαν πλευρὰν τὴν τιμὴν $\pi + \sqrt{(\pi - \kappa)}$ · ἡ ἄλλη θέλει
εἶναι $2\pi - \pi - \sqrt{(\pi - \kappa)} = \pi - \sqrt{(\pi - \kappa)}$ ἥτις εἶναι ἡ δευ-
τέρη ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1).

Ας διαλύσωμεν τούτους τοὺς τύπους. Οταν ἡ ὑπόρριζος
 $\pi - \kappa$ ᾖ θετικὴ, τότε αἱ δύο πλευ-
ραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, εἶναι πραγματικαί, θε-
τικαὶ καὶ ἄνισοι· διότι ἡ φύσις τοῦ ζητήματος ἀπαιτεῖ,
να ᾖ αἱ ποσότητες π καὶ κ πραγματικαὶ καὶ θετικαί·
κατασκευάζομεν δὲ εἰς γραμμὰς ταύτας τὰς τιμὰς, ὡς
εἴπομεν ἂνωτέρω. Οταν δὲ $\pi - \kappa$ ᾖ μηδὲν, αἱ πλευραὶ
τοῦ ὀρθογωνίου γίνονται ἴσαι μὲ π , καὶ τὸ ζητούμενον
ὀρθογώνιον εἶναι ἓν τετράγωνον, ἡ πλευρὰ τοῦ ὁποίου
εἶναι ἴση μὲ π . Οταν δὲ $\pi - \kappa$ εἶναι ἀρνητικὸν, αἱ δύο
πλευραὶ γίνονται κατ' ἐπίνοιαν, καὶ τὸ πρόβλημα κατα-
στάνεται ἀδύνατον.

• Σημείωσις. Οταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi(2\pi - \chi) = \kappa$, π
ᾖ γινώσκον καὶ κ ἄγνωστον, τότε μένει εἰς τὴν ἐξουσίαν
μας νὰ δώσωμεν τιμὰς εἰς τὴν χ · καὶ οὕτω συνάγομεν
πλῆθος ὀρθογωνίων τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον
ἢ· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τύπου $\chi = \pi \pm \sqrt{(\pi - \kappa)}$, συνάγομεν
ὅτι ἡ μεγαλύτερα τιμὴ τοῦ χ εἶναι π · εἰς τὴν ὁποίαν
τιμὴν ἀντικεῖται ἡ τιμὴ τῆς $\chi = \pi$ · διὰ τοῦτο πορίζο-
μεθα ὅτι ἀπὸ ὅλων τὰ ὀρθογώνια τῆς αὐτῆς πε-

ριμέτρου, τὸ μέγιστον, δηλαδὴ, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπι-
 φάνεια εἶναι ἡ μεγαλητέρα, εἶναι τὸ τετράγω-
 νον. Οταν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2(2\pi - \chi) = \kappa$, π εἶναι
 ἄγνωστον καὶ κ γνωστὸν, τότε δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τιμὰς
 εἰς π καὶ νὰ εὕρωμεν τιμὰς διὰ χ · οὕτω συνάγομεν πλῆθος
 ὀρθογωνίων τῆς ἰδίας ἐπιφανείας κ · πλὴν ἐπειδὴ ἐκ τοῦ
 τύπου $\chi = \pi \pm \sqrt{(\pi^2 - \kappa)}$ συμπεραίνομεν ὅτι π δὲν ἡμ-
 πορεῖ νὰ λάβῃ μίαν τιμὴν μικροτέραν τοῦ κ , καὶ ἐπομέ-
 νως ἡ μικρότερα τιμὴ τοῦ π εἶναι κ · διὰ τοῦτο πορίζο-
 μεθα ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ὀρθογώνια τῆς ἰδίας ἐπι-
 φανείας, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μικροτέραν
 περίμετρον εἶναι τὸ τετράγωνον· διότι ἡ περίμε-
 τρος τοῦ τετραγώνου τῆς ἰδίας ἐπιφανείας ἦναι 4κ , καὶ
 4κ εἶναι ἡ μικρότερα τιμὴ τοῦ γινομένου 4π .

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ρίζας, χ' , χ'' τῆς ἐξίσω-
 σεως (α) λύομεν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν· καὶ εὐρίσκομεν

$\chi' = \pi + \sqrt{(\pi^2 - \kappa)}$, $\chi'' = -(\sqrt{(\pi^2 - \kappa)} - \pi)$.
 ἡ ρίζα χ' εἶναι θετική· ἡ δὲ ρίζα χ'' ἀρνητική· ἡ ἀπόλυτος
 τιμὴ τῆς χ'' εἶναι $\sqrt{(\pi^2 - \kappa)} - \pi$. Πρόκειται λοιπὸν νὰ
 εὕρωμεν τὰ μήκη τῶν δύο γραμμῶν,

$$\sqrt{(\pi^2 - \kappa)} + \pi, \sqrt{(\pi^2 - \kappa)} - \pi$$

Ἐπειδὴ τὸ ριζικὸν ἐκφράζει τὴν ὑποτείνουσαν ἐνὸς ὀρ-
 θογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γω-
 νίας εἶναι π καὶ κ , διὰ τοῦτο ἄγομεν πρὸς ὀρθὰς δύο
 εὐθείας, ΔΖ, ΑΕ, (σχ. ζ')· λαμβάνομεν ΑΓ = π, ΑΒ = κ ·
 ἐπιζευγνύομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ὡς

ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ, γράφομεν τὴν ἡμιπερι-
φέρεαν Χ'ΒΧ". αἱ εὐθεῖαι ΑΧ', ΑΧ" εἶναι αἱ ἀπόλυτοι
τιμαὶ τῶν ῥιζῶν χ', χ"· διότι,

$$\Gamma\chi' = \Gamma\chi'' = \Gamma\beta = \sqrt{(\pi^2 + \kappa^2)},$$

$$\Lambda\chi' = \Lambda\Gamma + \Gamma\chi' = \pi + \sqrt{(\pi^2 + \kappa^2)} = \chi'$$

$$\Lambda\chi'' = \Gamma\chi'' - \Gamma\Lambda = \sqrt{(\pi^2 + \kappa^2)} - \pi = -\chi''$$

Σημείωσις. Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ δεικνύει τὴν ἀν-
τίθεσιν τῶν σημείων τῶν δύο ῥιζῶν χ', χ"· διότι αἱ δύο
εὐθεῖαι ΑΧ', ΑΧ" αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς τιμὰς τῶν
ῥιζῶν χ', χ" πίπτουν εἰς θέσιν ἀντίθετον ὡς πρὸς τὴν
κοινὴν ἀρχήν των Α. Τοῦτο δὲ συμφωνεῖ μὲ τὰς ση-
μειώσεις τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 15.

20. Ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν, (ἀρ. 16. 19),
διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευ-
τέρου βαθμοῦ, εἶναι ἡ πλέον φυσικὴ· πλὴν ἐνίοτε εἶναι
δυνατὸν νὰ εὐρεθῶσιν ὠραιότεραι κατασκευαί. Ἰδοὺ πα-
ραδείγματα.

1.^{ον} Παράδειγμα. Νὰ προσδιορίσωμεν τε-
τράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν
δεδομένων τετραγώνων. Ἀς σημειώσωμεν διὰ
α, β, γ, τὰς πλευρὰς τῶν δεδομένων τετραγώνων, καὶ
διὰ χ τὴν ἄγνωστον πλευρὰν τοῦ ζητουμένου· θέλομεν ἔχει

$$\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{ὅθεν} \quad \chi = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.$$

Τώρα διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ταύτην τὴν τιμὴν τῆς
ἄγνωστου ἡμικορούσαμεν νὰ θέσωμεν β=ατ, γ=αμ· διότι
διὰ τῶν ὑποθέσεων τούτων ἡ τιμὴ τῆς ἄγνωστου ἤθελε
τρεφθῆ εἰς $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\tau + \alpha\mu)} = \sqrt{\alpha(\alpha + \tau + \mu)}$ · ἔκφρασις
τὴν ὁποίαν ἠθέλαμεν κατασκευάσει ζητοῦντες μίαν μέσων

γεωμετρικῶς ἀνάλογον μεταξὺ α καὶ α + τ + μ· πλὴν φθάνομεν ἀπλούστερον εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαχόμενον, ἄγοντες δύο εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ πρὸς ὀρθὰς, καὶ λαμβάνοντες τὴν μὲν ΟΑ = α, τὴν δὲ ΟΒ = β, (σχ. η')· ἔπειτα ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ΟΒ, ἄγοντες μίαν κάθετον ΒΧ = γ. Ἡ εὐθεῖα ΟΧ θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς χ δηλαδή ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου· διότι

$$\overset{-2}{\text{ΟΒ}} = \overset{2}{\alpha} + \overset{2}{\beta}, \quad \overset{-2}{\text{ΟΧ}} = \overset{-2}{\text{ΟΒ}} + \overset{-2}{\text{ΒΧ}} = \overset{2}{\alpha} + \overset{2}{\beta} + \overset{2}{\gamma}.$$

2.^{ον} Παράδειγμα. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις,

$$\overset{2}{\psi} = \overset{2}{\alpha} + \overset{2}{\beta} + \overset{2}{\gamma} - \overset{2}{\mu} - \overset{2}{\nu} - \overset{2}{\pi}.$$

Διὰ τὰ προσδιορίζομεν τὴν ἄγνωστον ψ κάμνομεν

$$\overset{2}{\alpha} + \overset{2}{\beta} + \overset{2}{\gamma} = \overset{2}{\chi}, \quad \overset{2}{\mu} + \overset{2}{\nu} + \overset{2}{\pi} = \overset{2}{\omega} \cdot \text{ὅθεν } \overset{2}{\psi} = \sqrt{(\overset{2}{\chi} - \overset{2}{\omega})}.$$

Κατὰ πρῶτον κατασκευάζομεν τὰς γραμμὰς χ, ω, ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα: δηλαδή τὴν γραμμὴν χ, ζητοῦντες τὴν πλευρὰν ἐνὸς τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ τὸ

ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $\overset{2}{\alpha}, \overset{2}{\beta}, \overset{2}{\gamma}$ καὶ τὴν γραμμὴν ω, ζητοῦντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου

μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $\overset{2}{\mu}, \overset{2}{\nu}, \overset{2}{\pi}$. Τούτου τεθέντος, γράφομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς ΟΧ = χ, ὡς διαμέτρου τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ· ἐκ τῆς σιγμῆς Χ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ω, γράφομεν τόξον κύκλου τὸ ὅποιον τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ εἰς σιγμὴν τινὰ Ψ. Ἡ χορδὴ, ΟΨ, θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς ἀγνώστου ψ, διότι

$$\overset{-2}{\text{ΟΨ}} = \overset{-2}{\text{ΟΧ}} - \overset{-2}{\text{ΧΨ}} = \overset{2}{\chi} - \overset{2}{\omega}.$$

Ὅταν ἡ γραμμὴ χ ᾖναι μεγαλύτερα τῆς ω, τότε ἡ τιμὴ τῆς ψ εἶναι πραγματικὴ, καὶ τὸ ἐκ τῆς σιγμῆς Χ ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ω, γραφόμενον τόξον, τέμνει

τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ· ὅταν δὲ ἡ γραμμὴ χ ᾖναι μικροτέρα τῆς ω τότε ἡ τιμὴ τῆς ψ εἶναι κατ' ἐπίνοιαν, καὶ τὸ εἰρημένον τόξον δὲν τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ· εἰς τὴν πρώτην περίσσειαν τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν, εἰς τὴν δευτέραν ἀδύνατον.

21 3.^{ον} Παράδειγμα. Ζητεῖται νὰ διαίρεθῇ εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΑΒ, (σχ. θ'), εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέστι, νὰ εὗρεθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας σιγμή τις Χ', ὥσε ΑΧ' δηλαδὴ τὸ διάστημα αὐτῆς ἀπὸ τὴν σιγμὴν Α, νὰ ᾖναι μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ ΑΒ καὶ ΑΧ'.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν σιγμή πρέπει νὰ ᾖναι τοιαύτη ὥσε νὰ πληροῦται ἡ ἀναλογία

$$(1) \dots AB : AX' :: AX' : BX'.$$

Εἰςωσαν, $AB = 2\alpha$, $AX' = \chi$ · ὅθεν $BX' = 2\alpha - \chi$.

Ἡ ἀναλογία (1), δίδει

$$\chi = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + (2\alpha)^2}.$$

Σημειόνοντες τὰς δύο ταύτας τιμὰς τῆς χ διὰ χ' καὶ χ'', θέλομεν ἔχει,

$$\chi' = \sqrt{\alpha^2 + (2\alpha)^2} - \alpha = -(\sqrt{5} - 1)\alpha,$$

$$\chi'' = -\sqrt{\alpha^2 + (2\alpha)^2} = -(\sqrt{5} + 1)\alpha.$$

Ἡ τιμὴ τῆς χ' εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τῆς δεδομένης εὐθείας 2α· διότι $\sqrt{5} - 1$ εἶναι ἔλασσον τοῦ 2· ἀκολουθῶς $(\sqrt{5} - 1)\alpha$ ἔλασσον τοῦ 2α· ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν, $AX' = \chi' = (\sqrt{5} - 1)\alpha$ · ἡ σιγμὴ Χ' ἡ ἀπέχουσα ἀπὸ Α ὅσον ἐκφράζει ἡ τιμὴ τῆς χ', εἰσίσκεται μεταξὺ Α καὶ Β. Ἡ σιγμὴ δὲ αὕτη εἶναι πλησιεστέρα εἰς τὴν Β παρὰ εἰς τὴν Α· διότι ἐπειδὴ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς ἀπὸ τὴν σιγμὴν Α εἶναι $(\sqrt{5} - 1)\alpha$, τὸ ἀπόστημα τῆς ἰδίας ἀπὸ τὴν Β, εἶναι $2\alpha - (\sqrt{5} - 1)\alpha = 3\alpha - (\sqrt{5} - 1)\alpha = (3 - \sqrt{5})\alpha$.

$\sqrt{5}\alpha$. Τώρα $3 - \sqrt{5}$ είναι μικρότερον ἀπὸ $\sqrt{5} - 1$.
 λοιπὸν καὶ $(3 - \sqrt{5})\alpha < (\sqrt{5} - 1)\alpha$. Πμποροῦμεν δὲ νὰ
 βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ οὕτως προσδιοριζομένη σιγμὴ ἔχει
 τὴν ζητούμενην ιδιότητα· διότι τὰ διαστήματα $AX' =$
 $(\sqrt{5} - 1)\alpha$, $BX' = (3 - \sqrt{5})\alpha$, πληροῦσι εἰς τὴν ἀνα-
 λογίαν (1)· ἐπειδὴ $[(\sqrt{5} - 1)\alpha]^2 = (6 - 2\sqrt{5})\alpha^2 = (3 -$
 $\sqrt{5}) \times 2\alpha^2 = AX'^2$, καὶ $AB \times BX' = (3 - \sqrt{5})\alpha \times 2\alpha =$
 $(3 - \sqrt{5}) \times 2\alpha^2$ · λοιπὸν $AX'^2 = AB \times BX'$.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν δὲ χ' παρατηροῦμεν ὅτι τὸ
 ῥιζικὸν $\sqrt{[\alpha + (2\alpha)]}$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἐνὸς ὀρθογ-
 νίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας
 εἶναι α καὶ 2α . Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὸ ἄκρον B τῆς AB
 ὑψωθῇ μίαν κάθετος BH ἐπὶ τὴν AB , καὶ ληρῇ ἐπὶ
 ταύτης τῆς κάθετου ἡ $B\Gamma = \alpha = \frac{1}{2} AB$ · ἡ ὑποτείνουσα
 AG θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ ῥιζικοῦ· ὥστε χ' ἰσοῦται
 μὲ $AG - \alpha$ ἢ μὲ $AG - \frac{1}{2} AB$ · ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῆς σιγμῆς
 Γ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα $\Gamma B = \alpha = \frac{1}{2} AG$, γρά-
 ψωμεν τὴν περιφέρειαν ΔBE , ἡ $A\Delta$ θέλει εἶναι ἡ τιμὴ
 τῆς χ' · διότι $A\Delta = AG - \Delta\Gamma = AG - \frac{1}{2} AB = \sqrt{[\alpha +$
 $(2\alpha)]} - \alpha$ · ἀκολουθῶς φέροντες ἐκ τῆς Δ εἰς τὴν X'
 τὴν $A\Delta$ διὰ τόξου κύκλου ἐκ τῆς σιγμῆς Λ μὲ ἀκτῖνα
 $A\Delta$ γεγραμμένου, θέλομεν ἔχει τὴν ζητούμενην σιγμὴν.
 Βλέπομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ἡ κατασκευὴ διὰ τῆς
 ὁποίας ἐπροσδιορίσθη ἡ σιγμὴ X' εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκεί-
 νην ἣτις διδεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν διὰ τὴν διχίρεσιν
 μιᾶς εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος μᾶς ἔκαμε νὰ υποθέ-
 σωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς χ μετρεῖται ἀπὸ τὴν A πρὸς τὴν B .

καὶ ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς χ τὴν ὑποίαν εὐρήκαμεν ἀναχωρήσαντες εἰς ταύτης τῆς ὑποθέσεως, λύει τὸ πρόβλημα κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐκφωνήσεώς του. Ἡ δὲ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς χ δηλαδή ἡ χ' , πρέπει νὰ φερωθῇ εἰς ἀντίθετον θέσιν, δηλαδή ἀπὸ τὴν A πρὸς τὴν προεκβολὴν AZ τῆς BA .

$$\text{Εἰς τρόπον ὥς εἰς ἂν λάβωμεν } AX'' = a + \sqrt{a^2 + (2a)^2} \\ (2a)] = (\sqrt{5} + 1)a = -\chi'' (*)$$

ἡ σιγμὴ X'' πληροῦ εἰς τὸν συνθήκην

$$(2) \dots AB : AX'' :: AX'' : BX''.$$

καὶ ἡμποροῦμεν νὰ βεβαιώσωμεν τοῦτο, διότι ἡ ὑπόθεσις

$$AX'' = (\sqrt{5} + 1)a, \text{ δίδει } BX'' = (\sqrt{5} + 3)a$$

καὶ αὗται αἱ τιμαὶ κατασαίνουσι τὴν ἀναλογίαν (2) ταυτοσημαντον.

Ἡ ἀρνητικὴ λοιπὸν τιμὴ τῆς χ , λύει τοῦτο τὸ πρόβλημα: Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς, AZ μιᾶς εὐθείας $BA = 2a$, σιγμῆς X'' ὥς εἰς AX'' νὰ ᾔηται μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μετὰ ξ AB καὶ BX'' . Καὶ τῷ ὄντι, εἰς σημειώσωμεν AX'' διὰ χ , θέλομεν εἶρη ὅτι ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς χ εἶναι $(1 + \sqrt{5})a$ · ἡ δὲ ἀρνητικὴ $-(\sqrt{5} - 1)a$ · ἡ μὲν πρώτη προσδιορίζει τὴν σιγμὴν X'' ἥτις πληροῦ εἰς τὴν ἀναλογίαν (2)· ἡ δὲ δευτέρα τὴν σιγμὴν X' ἥτις πληροῦ εἰς τὴν ἀναλογίαν (1).

Κατὰ τὴν προηγουμένην διάλυσιν αἱ τιμαὶ χ' , χ'' τῆς χ λύουσι τὸ γενικὸν τοῦτο πρόβλημα: Δεδομένων δύο σιγμῶν A καὶ B μιᾶς ἀπροσδιορίστου εὐθείας $Z\Theta$, νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας

(*) Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς AX'' , ἀρκεῖ νὰ προεκτελεθῇ ἡ εὐθεΐα $ΔΓ$ μέχρι τῆς σιγμῆς E , ὅπου συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν $ΔBE$ · ἡ εὐθεΐα $ΔE$ ἐκτράχει $ΔX''$ · διότι $ΔE = ΔΓ + ΓE = \sqrt{(a^2 + (2a)^2)} + a$.

σιγμή τις X ὥς τε AX νὰ ᾔηται μέση ἀνάλογος μεταξὺ AB καὶ BX , ἢ $AB:AX::AX:BX \dots (3)$.

Τὰ δύο σημεῖα X', X'' , τὰ προσδιοριζόμενα ἐκ τῶν τύπων $BX' = (3 - \sqrt{5})\alpha$, $BX'' = (3 + \sqrt{5})\alpha$, ἔχουσι τὴν ζητουμένην ιδιότητα ὥς τε

$$AB:AX':::AX':BX', \quad AB:AX'':::AX'':BX''$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο σημεῖα X', X'' πίπτουν πρὸς τὰρισερὰ τῆς σιγμῆς B , ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ζητουμένη σιγμή X εἶναι πρὸς τὰρισερὰ τῆς B , καὶ σημειωθῇ BX διὰ χ , αἱ δύο τιμαί, BX', BX'' , πρέπει νὰ ᾔηται ὀντικάι' καὶ τῷ ὄντι ἡ ἀναλογία (3) δίδει, $\chi = (3 - \sqrt{5})\alpha = BX'$, $\chi = (3 + \sqrt{5})\alpha = BX''$

Ἡ ζητουμένη σιγμή X δὲν ἤμπορεῖ νὰ πέσῃ εἰς τὰ δεξιὰ τῆς B · διότι ἐὰν ᾔητον ἐπὶ τῆς $B\Theta$, ἠθέλαμεν ἔχει

$$AB < AX, \quad BX < AX \cdot \text{ὅθεν } AB \times BX < AX \times AX.$$

καὶ ἡ ἀναλογία (3) εἶναι ἀνύπαρκτος. Ἡμπορούσαμεν νὰ γνωρίσωμεν τοῦτο διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ· διότι ὑποθέτοντες ὅτι X πίπτει ἐπὶ τῆς $B\Theta$, καὶ σημειόνοντες BX διὰ χ , ἠθέλαμεν καταστήσει διὰ τῆς ἀναλογίας (3) εἰς κατ' ἐπίνοιαν τιμὰς τῆς χ .

22. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὺς εἶναι P . σχ. ι'.

Ἐςωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $BA\Gamma$, $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$ ἅς ἀχθῇ ἡ διάμετρος BD , καὶ ἅς ἐπιζευχθῶσιν αἱ γραμμαὶ AD , $\Delta\Gamma$ · ἐπειδὴ εἰς κάθε ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν δύο διαγωνίων τοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν διὰ τοῦτο τὸ τετράπλευρον $AB\Delta\Gamma$ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διαγώνιος $B\Delta = 2P$, δίδει,

$$2P\beta = \gamma \times \Gamma\Delta + \alpha \times A\Delta \dots (1)$$

Απὸ δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΑΔ, συνάγομεν $\Gamma\Delta = \sqrt{(4P^2 - \alpha^2)}$, $\Lambda\Delta = \sqrt{(4P^2 - \gamma^2)}$ · ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὴν (1) εὐρίσκωμεν,

$$2P\beta = \gamma\sqrt{(4P^2 - \alpha^2)} + \alpha\sqrt{(4P^2 - \gamma^2)} \dots (2)$$

ἐξίσωσις, ἥτις ἐκφράζουσα μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν ποσοτήτων α, β, γ, P προσδιορίζει μίαν τούτων διὰ τῆς γνώσεως τῶν τριῶν ἄλλων· ὅθεν

1.^{ον} Γνωρίζοντες τὰς χορδὰς δύο τόξων ΑΒ, ΒΓ· προσδιορίζομεν β , ἢ τὴν χορδὴν ΑΓ ἐνὸς τόξου ΑΒΓ ἴσου μὲ τὸ ἄθροισμὰ των. Εὰν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ ἦναι ἴσα, τότε $\alpha = \gamma$, καὶ ἡ (2) δίδει

$$P\beta = \alpha\sqrt{(4P^2 - \alpha^2)}$$

ἐξίσωσις, ἥτις προσδιορίζει τὴν χορδὴν β ἐνὸς τόξου, ὅταν ἦναι γνωστὴ ἡ χορδὴ α τῆς ἡμιτείας τούτου τοῦ τόξου.

2.^{ον} Γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκτῖνα P τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου. Επειδὴ ἄς ὑψώσωμεν εἰς τετράγωνον τὴν (2), τὸ ἐν τῶν ῥιζικῶν ἀφανίζεται· ἄς μεταφέρωμεν ἀκολουθῶς τοὺς λογικοὺς ὅρους, καὶ ἐκ νέου ἄς τετραγωνίσωμεν διὰ νὰ ἐξαλειφθῇ τὸ ἄλλο ῥιζικὸν· εὐρίσκομεν,

$$P = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(4\alpha\gamma\gamma - (\alpha\alpha + \gamma\gamma - \beta\beta)^2)}}$$

Ο τύπος οὗτος δὲν ἡμπορεῖ ὑπὸ ταύτης τῆς μορφῆς νὰ λογαριασθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων· πλὴν ἐπειδὴ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι ἡ διαφορὰ δύο τετραγώνων, διὰ

τοῦτο ἰσοῦται μὲ $(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) \times (2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)$, ἢ $((\alpha + \gamma)^2 - \beta^2) \times (\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2)$ · ἐπειδὴ δὲ ἀκόμη

$(\alpha + \gamma) - \beta = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)$, καὶ $\beta - (\alpha - \gamma) = (\beta + \alpha - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)$. διὰ τοῦτο ἡ ὑπόρριζος ποσότης ἰσοῦται μετὰ $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \beta - \gamma)$. λοιπὸν

$$P = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \beta - \gamma)},$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν τὴν περίμετρον $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ συνάγομεν διαδοχικῶς

$$\alpha + \gamma - \beta = 2\pi - 2\beta$$

$$\beta + \gamma - \alpha = 2\pi - 2\alpha$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 2\pi - 2\gamma$$

Λοιπὸν τέλος πάντων,

$$P = \frac{\alpha\beta\gamma}{4(\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)} \quad (3)$$

23. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς α, β, γ ἐνὸς τριγώνου νὰ εὗρωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ του. σχ. ια'.

Ἐςω ΒΑΓ ἐν τρίγωνον· ΒΔ τὸ ὕψος τοῦ· καλοῦντες τὸ τμήμα ΑΔ = χ , ἔχομεν, ἐκ τῆς ιδιότητος τῶν πλα-

γιογωνίων τριγώνων, $ΒΓ = ΒΑ + ΑΓ - 2ΑΓ \times ΑΔ$, ἢ

$$\alpha = \gamma + \beta - 2\beta\chi \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας} \quad \chi = ΑΔ = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2\beta}$$

ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ δίδει $ΒΔ =$

$$\sqrt{(\gamma - \chi)^2} \quad \text{τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου} = \frac{1}{2} \beta \times ΒΔ.$$

λοιπὸν καλοῦντες τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ω , ἔχομεν

$$\omega = \frac{1}{4} \sqrt{(4\beta\gamma - (\beta + \gamma - \alpha)^2)}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπόρριζος ποσότης ἰσοῦται με^{2 2 2} $4\alpha\gamma - (\alpha + \gamma - \beta)$, αὐτὴ δὲ, ὡς ἀνωτέρω, με^{2 2 2} $16\pi \cdot (\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)$ διὰ τοῦτο

$$\omega = \sqrt{\pi \cdot (\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}.$$

Οὕτως βλέπομεν ὅτι γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν του, ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τοῦτο νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἐκάστην τῶν πλευρῶν, καὶ οὕτως εὕρισκομεν τρία ὑπόλοιπα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία ταῦτα ὑπόλοιπα ἀναμεταξύ των καὶ με^{2 2 2} τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου θελεῖ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

24. Ἡ ἐξίσωσις (3) τοῦ ἀριθμοῦ 23 προσδιορίζει τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς λειτουργίαν τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν τύπον ὅστις νὰ μᾶς προσδιορίζη τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου ἰσοῦται με^{2 2 2} τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· καλοῦντες ρ τὴν τοιαύτην ἀκτῖνα, 2π τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου, καὶ ω τὸ ἐμβαδὸν του ἔχομεν

$$\omega = \pi \rho \quad \text{ὅθεν} \quad \rho = \frac{\omega}{\pi} = \frac{\sqrt{\pi \cdot (\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}}{\pi}.$$

25. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τετραπλεύρου $AB\Gamma\Gamma'$ (σχ. 16). Ἀς ἄξωμεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma = \beta$, καὶ ἄς λάβωμεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς τῶν δύο τριγώνων $AB\Gamma$, $A\Gamma\Gamma'$ · ἔξωσαν u καὶ u' τὰ ὕψη τῶν δύο τούτων τριγώνων· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{2} u\beta$, τοῦ δευτέρου $\frac{1}{2} u'\beta$ · ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων τριγώνων, διὰ τοῦτο $\frac{1}{2} \beta(u + u')$ ἐκφράζει τὸ τοιοῦτον ἐμβαδόν.

Ἀλλως. Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ ὁποιοῦνδήποτε τετράπλευρον (σχ. ιγ'). ὥς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τῆς βάσεως $AB = \alpha$, αἱ κάθετοι $\Delta E = u$, $\Gamma Z = u'$. ὥς γένῃ $\Lambda E = \beta$, καὶ $BZ = \beta'$. ἐπειδὴ τὸ σχῆμα $\Gamma Z E \Delta$ εἶναι τραπέζιον, διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{2}(u + u')(\alpha - \beta - \beta')$. Περιπλέον, $\Delta E = \frac{1}{2}\beta u$, $\Gamma B Z = \frac{1}{2}\beta' u'$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων ἐμβαδῶν ἢ τὸ ὅλον ἐμβαδὸν $AB\Gamma\Delta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \times u' + \frac{1}{2}(\alpha - \beta') u$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαρμογὴ εἶναι εὐκόλως, δὲν ἀνήκει εἰς τὴν περίσασιν καθ' ἣν μία τῶν καθέτων πίπτει ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου· πλὴν ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην τὴν περίσασιν ἐξίσωσις συνάγεται ἀπὸ αὐτὴν, τρεπομένου β εἰς $-\beta$ καὶ β' εἰς $-\beta'$.

25° ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ ἀχθῇ ἡ EZ κάθετος εἰς τὴν βάσιν AB ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. ιγ') ὥς τε τὰ τρίγωνα AEZ , $AB\Gamma$ νὰ ἔχουν μεταξὺ τῶν λόγον δεδομένον μ πρὸς ν .

Ἐσώσαν β καὶ χ αἱ βάσεις AB , AE . u καὶ ψ τὰ ὕψη $B\Delta$, EZ . τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $AB\Gamma$, AEZ εἶναι $\frac{1}{2}\beta u$, $\frac{1}{2}\chi\psi$. ὅθεν $\frac{\chi\psi}{\beta u} = \frac{\mu}{\nu}$. Ἀλλως τὰ ὅμοια τρίγωνα AEZ ,

$AB\Delta$ δίδουν $\frac{\psi}{u} = \frac{\chi}{\alpha}$, καλουμένου $\Delta\Delta = \kappa$. λοιπὸν ἀπαλείφοντες ψ , εὐρίσκομεν $\chi = \frac{\kappa}{\nu}(\beta\mu)$. Ἐὰν $\chi > \kappa$ ἢ $\Delta\Delta$,

ἡ σιγμὴ E ἔπρεπε νὰ εὐρίσκεται πρὸς τὴν Θ , ἐκεῖθεν τῆς Δ : τότε ἡ κάθετος εἰς τὴν AB χωρίζει τρίγωνον τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται πλέον εἰς $AB\Gamma$: ἡ περίσασις αὕτη ἀκολουθεῖ ὅταν $\beta\mu > \kappa\nu$,

$$\eta \quad \frac{\mu}{\nu} > \frac{\kappa}{\beta} = \frac{\Delta\Delta}{AB}$$

26. Γνωρίζοντες (σχ. ιδ') τὴν πλευρὰν $AB = \alpha$ ἐνὸς κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὥς ζητήσωμεν τὴν

$ΑΓ \Rightarrow \chi$ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ

πλευρῶν. Ἡ ΓΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ δίδει $ΑΓ \Rightarrow ΓΙ \times 2ΓΟ$. Παριστάνοντες διὰ ω τὴν ἀκτῖνα ΟΙ τοῦ εἰς τὸ δεδομένον πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἔχομεν

$ΓΙ = P - \omega$, καὶ $ΟΙ = ΑΟ - ΑΙ$: λοιπὸν

$$\chi^2 = 2P(P - \omega), \text{ καὶ } \omega^2 = P^2 - \frac{1}{4}\alpha^2.$$

Κάμνοντες, π.χ., $\alpha = P$, ἥτις εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, εὐρίσκομεν $P/\sqrt{2-1/3}$ διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου. Ομοίως $\alpha = P/\sqrt{3}$ (πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου) δίδει $\chi = P$ διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου, κτλ.

Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν $EZ = \psi$ ἑνὸς κανονικοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν $AB = \alpha$, τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν. Διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΟΙ, ΕΟΓ δίδουν,

$$\frac{ΟΙ}{ΟΓ} = \frac{ΑΙ}{ΕΓ}, \text{ ἢ } \frac{\omega}{P} = \frac{\alpha}{\psi}.$$

λοιπὸν $\psi = \frac{\alpha P}{\omega}$ καὶ $\omega^2 = P^2 - \frac{1}{4}\alpha^2$.

Οὕτως $\alpha = P/\sqrt{2}$ δίδει $\omega = \frac{1}{2}P/\sqrt{2}$ καὶ $\psi = 2P$ διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου· $\alpha = P/\sqrt{3}$ δίδει, διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, $\psi = 2P/\sqrt{3}$, ἢ τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

27. Διὰ τῶν τύπων τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ εὐκόλον εἶναι νὰ συναχθῇ ὁ ὡς ἐγγίσα λόγος π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ ἡ ἡμιπεριφέρεια π τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὺς εἶναι ἡ μονάς. Πρὸς τοῦτο ἄς θέσωμεν $P = 1$: οἱ ἀνωτέρω τύποι ἄγονται εἰς

$$\chi = \sqrt{2-2\omega}, \omega = \sqrt{1-\frac{1}{4}\alpha^2}, \psi = \frac{\alpha}{\omega}.$$

Κάμνοντες $\alpha = 1$, ἔχομεν διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου $\chi = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 0$, 517638. Ἐὰν ἐκ νέου κάμωμεν $\alpha = 0$, 5176, εὐρίσκομεν $\chi = 0$, 261053 διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου 24 πλευρῶν. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἡ αὐτὴ ἐργασία συνεχισθεῖσα τέσσαραις φοραῖς δίδει, $\pi \chi$, . . . 0, 065438 διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου 96 πλευρῶν· θέτοντες ἀντὶ α ταύτην τὴν τιμὴν εἰς ω καὶ ψ , ἔχομεν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου· καὶ πολλαπλασιάζοντες διὰ 48, ἔχομεν διὰ τὰς ἡμιπεριμέτρους τούτων τῶν πολυγώνων, 3, 1392 καὶ 3, 1410. Ἐπειδὴ ἡ ἡμιπεριφέρεια π περιέχεται μεταξὺ τούτων τῶν ὁρίων, θέλομεν ἔχει λοιπὸν $\pi = 3$, 14 . . . μὴ λαμβάνοντες παρὰ τὰ κοινὰ δεκαδικά.

Διὰ νὰ εὐρώμην μεγαλητέραν προσέγγισιν, ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τόσον περισσότερον πλησιάζει εἰς τὰς περιμέτρους τῶν πολυγώνων, ὅσον περισσότερον πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν των, πρέπει νὰ συντρέξωμεν εἰς πολύγωνα μεγαλητέρου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐλογαρίσαμεν τὴν πλευρὰν α ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου n πλευρῶν· θέλομεν ἔχει διὰ τὴν ἡμιπερίμετρον τούτου $\frac{1}{2} \alpha \nu$ καὶ ἐπειδὴ $\psi = \frac{\alpha}{\omega}$, διὰ τοῦτο ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου εἶναι

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha \nu}{\omega} = \frac{\frac{1}{2} \alpha \nu}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} \alpha)(1 - \frac{1}{2} \alpha)}}$$

Ἐκ τούτων τέλος συνάγεται ὁ ἀριθμὸς π .

27. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένων δύο σιγμῶν A καὶ B (σχ. ιε') καὶ μιᾶς εὐθείας $\Delta\Delta'$, νὰ γράψωμεν κύκλον ὅστις νὰ διέρχεται διὰ τῶν δύο τούτων σιγμῶν καὶ νὰ ἴπτεται τῆς εὐθείας.

Επειδὴ τρία σημεῖα προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς κύκλου, ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὴν σιγμὴν Δ τῆς ἀφῆς. Ἀς προεκβληθῇ λοιπὸν ἡ AB πρὸς τὸ Γ , καὶ ᾗ γένη $\Gamma\Delta = \chi$, $\Gamma I = \alpha$, $IB = \beta$, οὕτως I τῆς σιγμῆς τῆς ἡμισείας τῆς AB . Επειδὴ ἡ ἐφαπτομένη $\Gamma\Delta$ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διατεμνουσῆς GB καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους $\Gamma\Lambda$, διὰ τοῦτο $\chi^2 = \Gamma\Lambda \times GB$ · ἀλλὰ $\Gamma\Lambda = \Gamma I - AI = \alpha - \beta$ · καὶ $GB = \Gamma I + IB = \alpha + \beta$ · λοιπὸν $\chi^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ ὅθεν $\chi = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$ · διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ταύτην τὴν τιμὴν, ἐπὶ τῆς ΓI ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμικύκλιον, λαμβάνομεν $IE = IB$ · ἡ ΓE θέλει εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ · διότι $\Gamma E = \Gamma I - IE = \alpha^2 - \beta^2$ · ἡ τιμὴ αὕτη φερομένη ἐκ τῆς E εἰς Δ διὰ τόξου κύκλου ἐκ τοῦ κέντρου Γ μὲ ἀκτῖνα ΓE γραφομένου, δίδει τὴν σιγμὴν τῆς ἀφῆς Δ .

Ἐξ αἰτίας τοῦ διπλοῦ σημείου τῆς τιμῆς τῆς χ , ὑπάρχει μία δευτέρα σιγμὴ Δ' πληροῦσα εἰς τὸ ζήτημα· δηλαδή ὑπάρχουν δύο κύκλοι οἵτινες διέρχονται ἀπὸ τὰς δύο σιγμὰς A καὶ B , καὶ ἄπτονται τῆς εὐθείας $\Delta\Delta'$, ὁ μὲν εἰς τὴν σιγμὴν Δ , ὁ δὲ εἰς τὴν Δ' . Διὰ νὰ ᾔῃναι δὲ αἱ δύο αὗται λύσεις πραγματικαί, πρέπει $\alpha > \beta$, ἢ $\Gamma I > IB$ ἢ $\Gamma I > IA$ · καὶ τῷ ὄντι ἐὰν ἡ σιγμὴ Γ ἐπιπτε, π.χ. εἰς Γ' μεταξὺ A καὶ I , ἡ εὐθεΐα $\Delta\Delta'$ δὲν ἠμποροῦσε πλέον νὰ ᾔῃναι ἐφαπτομένη.

28. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένων δύο παραλλήλων AE , BZ (σχ. 15') καὶ τῆς καθέτου εἰς αὐτὰς AB , νὰ ᾔξωμεν μίαν διατέμνουσαν EZ ὥστε AG ἡμίσεια τῆς AB νὰ ᾔῃναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων AE , BZ . Ἐςωσαν, $AE = \chi$, $BZ = \psi$, $AG = \alpha$ · ἔχομεν, ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως, $\chi : \alpha :: \alpha : \psi$ · ὅθεν $\chi\psi = \alpha^2$ · τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν ἀπρὸς διό-

μισον (*), καὶ αἱ λύσεις ἀναρίθμητοι. Κατὰ διαφόρους τρόπους ἠμπορούσαμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τὰς λύσεις, πλὴν ὁ ἀκόλουθος εἶναι ὁ ἀπλούστερος καὶ ὡραιότερος.

Απὸ τὴν σιγμὴν Γ μέσον τῆς AB ἅς ὑψωθῇ μία κάθετος· ἔσω Δ ἡ συναπάντησις τῆς ζητουμένης γραμμῆς EZ μὲ ταύτην τὴν κάθετον, καὶ ἅς κληθῇ $\Gamma\Delta = \rho$. Εἰς τὴν σιγμὴν Δ ἅς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$ ἡ κάθετος Π' . Τὰ δύο τρίγωνα $E\Delta I$, $I\Delta Z$ εἶναι φανερά ἴσα· ἀκολουθῶς $I'Z = IE$ · ὅθεν $\psi = BZ = BI' + I'Z = \rho + EI$, καὶ $\chi = AI - EI = \rho - EI$. Διὰ τοῦτο $\psi + \chi = 2\rho$. Αντεισάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ $\psi = 2\rho - \chi$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2 = \chi\psi$, εὐρίσκομεν $\chi^2 - 2\rho\chi = -\alpha^2$. ἔδῳ ρ σημειάνει μίαν κατ' ἀρέσκειαν ποσότητα, καὶ ἔχομεν $\chi = \rho \pm \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$. ἔπειδὴ διὰ νὰ ᾖ ἡ τιμὴ τῆς χ πραγματικὴ πρέπει $\rho > \alpha$ ἢ $= \alpha$ · ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ σιγμὴ Δ ποῖται νὰ ληθῇ ὥστε $\rho > \alpha$ ἢ $= \alpha$ · εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ εἶναι πραγματικαί, καὶ ἀκολουθῶς καὶ αἱ δύο τιμαὶ τῆς ψ · διὰ νὰ τὰς κατασκευάσωμεν γράφομεν ἐκ τοῦ κέντρου Δ μὲ ἀκτῖνα $\Gamma\Delta > \Delta\Gamma$ κύκλον ὅστις τέμνει τὴν παράλληλον AZ' εἰς δύο σιγμάς E καὶ Z' , καὶ τὴν παράλληλον BZ εἰς δύο σιγμάς E' καὶ Z · αἱ γραμμαὶ AE , AZ' εἶναι αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ · διότι $AE = AI - EI = \rho - \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$, καὶ $AZ' = AI + IZ' = \rho + \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$ · παρομοίως αἱ δύο τιμαὶ τῆς ψ εἶναι BE' καὶ BZ · ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι EZ καὶ $E'Z'$ πληροῦσιν εἰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος· κάθε ἄλλο κέντρον Δ δίδει ὁμοίως δύο λύσεις.

(*) Ἄν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 εἶπα ὅτι θέλει ἀρκεσθῶ εἰς μόνον τὰ προβλήματα τὰ ὅποια ἄγουν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν ἄγνωστον, μ' ὅλον τοῦτο ἀπεράσιμα νὰ θέσω τὸ ἐνωτέρω πρόβλημα διὰ τὴν ἀπλότητά του, καὶ νὰ ἰδῶσιν εἰ νέοι πῶς ἡ Ἀλγεβρα δεῖκνύει τὴν ἀπροσδιορισίαν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων.

Όταν δὲ $\rho = \alpha$ τότε αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ ἄγονται εἰς μίαν μόνον ἴσην μὲ ρ · καὶ ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Δ μὲ ἀκτῖνα $\Gamma\Delta = \rho = \alpha$ ἄπτεται τῶν δύο παραλλήλων, καὶ ἡ εὐθεῖα ἥτις πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα εἶναι ἡ II' ἢ ἡ εὐθεῖα ἥτις ἐνώνει τὰς δύο σιγμὰς τῆς ἀφῆς

Όταν τέλος $\rho < \alpha$ ἡ τιμὴ τῆς χ γίνεται κατ' ἐπίνοιαν· τοῦτο δεικνύει καὶ ἡ κατασκευὴ· διότι εἰς ταύτην τὴν περίσσειαν ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Δ μὲ ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς ἡμισείας τῆς AB δὲν τέμνει πλέον τὰς δύο παραλλήλους.

29. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐκ τῆς σιγμῆς A (σχ. ιζ') νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ $BA\Delta$, ὥστε τὰ τμήματα BA , $A\Delta$ νὰ ἔχουν μετὰ ξύ των λόγον δεδομένον $= \mu$.

Ἀς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΘAH · ἔσω $\Gamma\Theta = \rho$, $\Gamma A = \beta$, $A\Delta = \chi$ · ἔχομεν $\Theta A \times AH = BA \times A\Delta$, ὅθεν $\rho^2 - \beta^2 = \chi \cdot BA$ · ἀλλ' ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως, $BA = \mu\chi$ · λοιπὸν $\mu\chi^2 = \rho^2 - \beta^2$. Ἀς

κάμωμεν $\rho^2 - \beta^2 = x^2$, καὶ θέλωμεν ἔχει $\chi = \sqrt{\frac{x^2}{\mu}}$, ποσότης

εὐκολοκατασκευάστος. Ἡμποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφήν $\chi = \frac{x}{\mu} \sqrt{\mu}$ (μν), καὶ ἔπρεπε νὰ εὗρωμεν μίαν

μέσσην καὶ μίαν τετάρτην ἀνάλογον· διότι καλοῦντες $\mu\nu = \psi^2$, ἔχομεν $\chi = \frac{x\psi}{\mu}$ · πλὴν εἶναι προτιμητέα ἡ ἀκό-

λουθος κατασκευὴ. Ἀς ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ τὸν λόγον δύο τετραγώνων· ἐπὶ μιᾷ ἀπροσδιο-

ρίστου γραμμῆς (σχ. ιη'), ὅς λάβωμεν ΔZ καὶ ZE εἰς τὸν τρόπον ὥστε $\frac{\Delta Z}{ZE} = \frac{\mu}{\nu}$ · ὅς γράψωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΔAE ,

ἔπειτα ὅς ἄξωμεν τὴν AZ κάθετον ἐπὶ τῆς ΔE , καὶ ὅς

ἐπιζεύζομεν τὰς χορδὰς $\Lambda\Delta, \Lambda\Xi$. Θέλομεν ἔχει $\Lambda\Delta^2 = \Lambda\Xi = \frac{\mu}{\nu}$.
 $\Delta\Xi^2 \quad \Delta\Xi \quad \nu$

διότι τὰ τμήματα τῆς ὑποτείνουσας $\Delta\Xi$ εἶναι πρὸς ἄλληλα
ὡς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν $\Lambda\Delta$ καὶ $\Lambda\Xi$. οὕτως $\chi =$
 $\frac{x \times \Lambda\Xi}{\Delta\Delta}$: ἄς λάβωμεν λοιπὸν $\Lambda\Xi = \kappa$ ἐπὶ τῆς $\Lambda\Delta$, τὴν ὑποῖαν

προεκβάλλομεν ἔαν ἦναι ἀναγκαῖον· ἐκ τῆς τριγῶν B ἄς
ἄξωμεν τὴν παράλληλον $B\Gamma$ τῇ $\Delta\Xi$, καὶ $\Lambda\Gamma$ θέλει
εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ . διότι ἔχομεν $\kappa : \Lambda\Delta :: \Lambda\Gamma : \Lambda\Xi$. ὅθεν
 $\Lambda\Gamma = \frac{\kappa \times \Lambda\Xi}{\Delta\Delta} = \chi$.
 $\Delta\Delta$

30. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένου ἐνὸς πολυγώνου
νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἄλλο ὁμοιον, καὶ τὰ ἐμ-
βαδὰ τῶν νὰ ἦναι εἰς γνωστὸν λόγον μ πρὸς ν .
 Λ ς καλέσωμεν Λ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου πο-
λυγώνου, χ τὴν ἄγνωστον ὁμολογόντης· ἐπειδὴ ἐξ ἐνὸς
μέρους τὰ ἐμβαδὰ πρέπει νὰ ἦναι $:: \mu : \nu$, ἐκ δὲ τοῦ
ἄλλου $:: \Lambda^2 : \chi^2$. διὰ τοῦτο $\frac{\Lambda}{\chi^2} = \frac{\mu}{\nu}$. ὅθεν $\chi = \frac{\Lambda \sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}}$.

ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ τὸν λόγον δύο τετρα-

γώνων α^2 καὶ β^2 . ἔχομεν $\chi = \frac{\Lambda \times \beta}{\alpha}$. ἥτις παρίστανει μίαν

τετάρτην ἀνάλογον, ἥ κατασκευάζομεν αὐτὴν ὡς ἀνωτέρω.
Γνωστοῦ τοῦ μήκους τῆς χ , ἄλλο δὲν μένει παρὰ ἐπὶ τῆς
πλευρᾶς χ νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὁμοιον μὲ τὸ
δεδομένον.

31. Λ ς ζητήσωμεν ἓν σχῆμα X ὁμοιον μὲ ἓν ἄλλο
 Π καὶ ἰσοδύναμον μὲ ἓν τρίτον K . Π καὶ K εἶναι δεδο-
μένα· ἄς λάβωμεν μίαν πλευρὰν Λ τοῦ Π , καὶ ἔσω χ
ἡ ἄγνωστος ὁμολογός της· ἔχομεν $\frac{\Pi}{X} = \frac{\Lambda^2}{\chi^2}$. ὅθεν $\frac{\Pi}{K} = \frac{\Lambda^2}{\chi^2}$.

διότι $X=K$ · ἔσῳσαν M καὶ N αἱ πλευραὶ δύο ἰσοδυνάμων τετραγώνων μὲ Π καὶ K · συνάγομεν $\frac{M}{N} = \frac{A}{\chi}$ · λοιπὸν

χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν M, N , καὶ A .

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εἶναι ἱκανὰ νὰ δείξουν πόσης ὠφελείας πρόξενος εἶναι ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς ἐκτάσεως. Τὸ πᾶν συνίσταται νὰ τεθῇ τὸ γεωμετρικὸν πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, εἰς τὸ ὑποῖον φθάνει τινὰς ὅταν ξεσκεπάσῃ τὰς σχέσεις αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀγνώστων καὶ δεδομένων· ἔπειτα ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως καὶ ἡ κατασκευὴ τῶν τιμῶν τῆς ἀγνώστου, δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ.

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Αντικείμενον τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι ἡ λύσις τῶν τριγώνων, τοῦτ' ἔστιν, ἡ προσδιόρισις τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν των διὰ τινος ἱκανοῦ ἀριθμοῦ δεδομένων.

Εἰς μὲν τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα ἀρκεῖ ἡ γνῶσις τριῶν ἀπὸ τὰ ἑξ ἑκ μέρη των διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἄλλων τριῶν, φθάνει μόνον μεταξὺ τούτων τῶν μερῶν νὰ ὑπάρχῃ μία πλευρά. Διότι ἐὰν ἐδίδοντο αἱ τρεῖς γωνίαι, φανερὸν ὅτι ὅλα τὰ ὅμοια τρίγωνα ἤθελον πληροῦ εἰς τὸ ζήτημα.

Εἰς δὲ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα τρία ὁποιαδήποτε δοθέντα, γωνίαι ἢ πλευραὶ, ἀρκοῦν πάντοτε διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ τριγώνου· διότι εἰς τὰ τοιαῦτα τρίγωνα δὲν θεωρεῖται τὸ ἀπόλυτον μέγεθος τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ μόνον ὁ λόγος των πρὸς τὸ τεταρτημέριον, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τὸν ὑποῖον περιέχουν.

Εἶδομεν εἰς τὰ προβλήματα τὰ προσηρτημένα εἰς τὸ Β' βιβλίον τῆς Γεωμετρίας, τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅταν γνωρίζωμεν τρία ἀπὸ τὰ μέρη των· ἀπὸ δὲ τὰς προτάσεις ΚΔ' καὶ ΚΕ' τοῦ Ε' βιβλίου ἡμπορεῖ τις ἐπίσης νὰ λάβῃ μίαν ἰδέαν τῶν κατασκευῶν διὰ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατόν νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνάλογοι περιπτώσεις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Ἀλλ' αἱ κατασκευαὶ αὗται, ἀκριβεῖς μὲν εἰς τὴν θεωρίαν, μετρίαν ὅμως προσέγγισιν εἰς τὴν πράξιν ἤθελον δώσῃ (1), διὰ τὴν ἀτέλειαν τῶν ἐργαλείων τῶν ὁποίων ἀπαι-

(1) Πρέπει τῷ ὄντι νὰ διακρίνωμεν τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα μόνον χρησιμεύουν εἰς τὸ νὰ διευθύνουν τὸν συλλογισμὸν διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἐνὸς θεωρήματος ἢ τὴν λύσιν ἐνὸς προβλήματος, ἀπὸ ἐκείνα τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται διὰ τὴν γνῶσιν μερικῶν τῶν διαστάσεων των. Τὰ πρῶτα πάντοτε ὑποτίθενται ἀκριβῆ· τὰ δεύτερα, ἐὰν δὲν χαραχθῶν ἀκριβῶς, δίδουν ἐξαγόμενα ψευδῆ. Ο. Σ.

τῶν τὴν χρῆσιν: καλοῦνται δὲ γραφικαὶ μέθοδοι. Ἐκ τοῦ ἐναντίου, οἱ τριγωνομετρικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνεξάρτητοι κάθε μηχανικῆς ἐργασίας, δίδουν τὰς λύσεις μὲ ὅσον δύναται τις νὰ ἐπιθυμήσῃ θαυμὸν ἀκρίβειας: θεμελιοῦνται δὲ ἐπὶ τῶν γραμμῶν αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτόμεναι, κ.τ.λ. διὰ τῶν ὁποίων ἔφθασαν οἱ Μαθηματικοὶ εἰς τὸ νὰ ἐκφράσουν μὲ τρόπον ἀπλούστατον τὰς μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων σχέσεις.

Ἐν πρώτοις θελομεν ἐκθέσει τὰς ιδιότητας τούτων τῶν γραμμῶν καὶ τοὺς ἐκ τούτων προκύπτοντας ἀρχικοὺς τύπους, οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς μεγάλην χρῆσιν εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς Μαθηματικῆς, καὶ ἐνταῦτῳ δίδουν μέσα τελειοποιήσεως εἰς τὴν Ἀλγεβρικὴν ἀνάλυσιν. Ἀκολουθῶς θελομεν τοὺς ἐφαρμόσει εἰς τὴν λύσιν τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων.

Διαίρεσις τῆς περιφερείας.

α'. Ἐως ἐσχάτως οἱ Γεωμέτραι ἐκ συνθήκης ἐδδιαιροῦσαν τὴν περιφέρειαν εἰς 360 ἴσα μέρη μοίρας λεγόμενα, τὴν μοῖραν εἰς 60 λεπτά, τὸ λεπτόν εἰς 60 δεύτερα κ.τ.λ. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς διαιρέσεως ἐπαρρησίαζε μὲν καίποιας εὐκολίας εἰς τὴν πράξιν, διὰ τὸν μέγαν ἀριθμὸν τῶν διαιρετῶν τοῦ 360: πλὴν τῷ ὄντι ὑπέκειτο εἰς τὰς δυσκολίας τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, καὶ συχνάκις ἐμπόδιζε τὴν ταχεῖαν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν.

Οἱ δὲ σοφοὶ οἱ ἐφευρόντες τὸ νέον σύστημα τῶν σταθμῶν καὶ μέτρων, ἐσοχάσθησαν ὅτι ἤθελεν εἶναι μεγάλης ὠφελείας πρόξενος ἡ εἰσαγωγὴ τῆς δεκαδικῆς διαιρέσεως εἰς τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν. Ἐπομένως ἐθεώρησαν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ τέταρτον μέρος τῆς περιφερείας ἢ τὸ τεταρτημόριον, μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας, καὶ ἐδδιαι-

ρεσαν ταύτην τὴν μονάδα εἰς 100 ἴσα μέρη μοῖρας αὐτὰ ὀνομάσαντες, τὴν μοῖραν εἰς 100 λεπτὰ, καὶ τὰ λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα.

Εἰς τὸ ἐξῆς θέλομεν μεταχειρίζεσθαι τὴν νέαν εἴτε δεκαδικὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ ὅμως οἱ τριγωνομετρικοὶ πίνακες, ὅσοι ἐλογαριάσθησαν κατὰ ταύτην τὴν διαίρεσιν, δὲν εἶναι ἀκόμη τόσον διεσπαρμένοι, θέλομεν προσθέτει εἰς τὰ παραδείγματα, τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὅποια διδουν οἱ ὑπολογισμοὶ κατὰ τὴν παλαιάν, ἢ ἐξηκονταδικὴν (sexagesimale) διαίρεσιν τῆς περιφερείας γινόμενοι. Ἡ διαφορὰ δὲν ὑπάρχει διόλου εἰς τὴν τιμὴν τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ μόνον εἰς τὴν τιμὴν ἢ μᾶλλον εἰς τὴν διὰ μοιρῶν ἔκφρασιν τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων.

β'. Λί μοῖραι, λεπτὰ καὶ δεύτερα σημειοῦνται διὰ τῶν χαρακτήρων $^{\circ}$, $'$, $''$: Οὕτως ἡ ἔκφρασις $16^{\circ}6'75''$, παριστάνει τόξον ἢ γωνίαν 16 μοιρῶν 6 λεπτῶν 75 δευτέρων.

Τὸ τόξον τοῦτο ἀναπερίμενον εἰς τὸ τεταρτημόριον εἰλημμένον ὡς μονάδα, ἐκφράζεται διὰ 0, 160675. Ἐνταύτῃ βλέπομεν ὅτι ἡ μετρουμένη γωνία ἀπὸ τοῦτο τὸ τόξον, εἶναι πρὸς τὴν ὀρθὴν :: 160675 : 1000000· λόγος ὅστις ὅχι μὲς τὴν εὐκολίαν συνάγεται ἀπὸ τὰς ἐκφράσεις τὰς ὑποίας δίδει ἡ παλαιὰ διαίρεσις τῆς περιφερείας.

Τὰ τόξα καὶ αἱ γωνίαι ἐκφράζονται ἀδιαφόρως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν δι' ἀριθμῶν μοιρῶν, λεπτῶν καὶ δευτέρων. Οὕτως τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἢ τὸ τεταρτημόριον θέλομεν σημειῖν διὰ 100° , δύο ὀρθὰς γωνίας ἢ τὴν ἡμιπεριφέρειαν διὰ 200° , τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας ἢ τὴν ὅλην περιφέρειαν διὰ 400° καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

γ'. Ο,τι μένει ἀφαιρεθείσης μιᾶς γωνίας ἢ ἐνὸς τόξου ἀπὸ 100° καλεῖται συμπλήρωμα ταύτης τῆς γωνίας

4
 ἢ τούτου τοῦ τόξου· οὕτως τὸ συμπλήρωμα μιᾶς γωνίας $25^{\circ} 40'$ εἶναι $74^{\circ} 60'$. Τὸ συμπλήρωμα μιᾶς γωνίας $120^{\circ} 4' 62''$ εἶναι $87^{\circ} 95' 38''$.

Εν γένει, ἐὰν A περισσάνῃ γωνίαν ἢ τόξον ὅποιονδήποτε, 100° — A εἶναι τὸ συμπλήρωμα ταύτης τῆς γωνίας ἢ τούτου τοῦ τόξου. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἐὰν ἡ γωνία ἢ τὸ δεδομένον τόξον, ᾗναι μείζων τῶν 100° , τὸ συμπλήρωμά της εἶναι ἀρνητικόν. (1). Οὕτως τὸ συμπλήρωμα τῶν $160^{\circ} 84' 10''$ εἶναι — $60^{\circ} 84' 10''$. Εἰς ταύτην τὴν περίσασιν, τὸ συμπλήρωμα θετικῶς λαμβανόμενον, εἶναι ἡ ποσότης ἣτις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν ἢ τὸ δεδομένον τόξον, διὰ νὰ προκύψῃ ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 100° .

Επειδὴ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν μίαν ὀρθήν· ἔπεται ὅτι ἡ μία εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἄλλης.

δ'. Παραπλήρωμα μιᾶς γωνίας ἢ ἐνὸς τόξου εἶναι τὸ ἐναπομένον ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτης τῆς γωνίας ἢ τούτου τοῦ τόξου ἀπὸ 200° , τιμῆς δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ μιᾶς ἡμιπεριφερείας. Οὕτως ἐὰν A περισσάνῃ ὅποιονδήποτε τόξον ἢ ὅποιανδήποτε γωνίαν, 200° — A εἶναι τὸ παραπλήρωμά του.

Επειδὴ εἰς κάθε τρίγωνον αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ κάμνουν 200° , ἔπεται ὅτι μία γωνία ἐκ τῶν τριῶν εἶναι τὸ παραπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

(1) Δι' ἀρνητικὸν συμπλήρωμα πρέπει νὰ ἐννοῶμεν ἓν τόξον τὸ ὅποιον μετρεῖται κατὰ μίαν ἐννοσίαν ἀντίθετον ἐκείνης εἰς τὴν ὁποίαν μετρεῖται ὅταν πρὸ αὐτοῦ δὲν ἔχῃ οὐδὲν σημεῖον. Οὕτως ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα MA' ἐκτιμᾶται ἐκ τῆς Δ πρὸς τὴν M' ἤγουν κατ' ἀντίθετον ἐννοσίαν τῆς MA , λέγεται ἀρνητικόν. Ὅταν λοιπὸν λέγομεν ὅτι τὸ συμπλήρωμα ἐνὸς τόξου μείζονος τῶν 100° ᾗναι ἀρνητικόν, πρέπει μὲ τὴν λέξιν ἀρνητικὸν νὰ ἐννοῶμεν ὅτι ἐκτιμᾶται κατὰ μίαν ἐννοσίαν ἀντίθετον ἐκείνης κατὰ τὴν ὁποίαν ᾗθειεν ἐκτιμηθῇ ἐὰν τὸ τόξον ᾗτον μικρότερον τῶν 100° (βλέπε καὶ εἰσαγωγ. §. Σημεῖ.). Ο. Μ.

Αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων, τύσον εὐθυγράμμων ὅσον καὶ σφαιρικῶν καὶ αἱ πλευραὶ τούτων τῶν τελευταίων, ἔχουν πάντοτε τὰ παραπληρώματά των θετικὰ· διότι δὲν ὑπερβαίνουντι τὰς 100° μοίρας.

Γενικαί γνώσεις περὶ τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἐφαπτομένων, κ.τ.λ.

ε'. Τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου AM τοῦ ὁποίου ἡ μὲν σιγμὴ A λέγεται ἀρχή, ἡ δὲ σιγμὴ M ἄκρον· εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τοῦ ἄκρον M ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἣτις διέρχεται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς A . σχ. 1.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος $ΓA$ ὑψώῃ ἡ κάθετος $AΓ$ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ἀκτῖνα $ΓM$ ἣτις διέρχεται ἀπὸ τοῦ ἄκρον M · προεκβληθεῖσαν, ἡ γραμμὴ $AΓ$ οὕτως προσδιοριζομένη, καλεῖται ἐφαπτομένη τοῦ τόξου AM · ἡ δὲ $ΓΓ$ μέρος τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης ἀπὸ τοῦ κέντρον $Γ$ καὶ τοῦ ἄκρον M , ἣτις ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ κέντρον καὶ τελειώνει εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου, καλεῖται διατέμνουσα τοῦ τόξου AM ἢ τῆς γωνίας $ΑΓΜ$. (1)

Αἱ τρεῖς αὗται γραμμαὶ $ΜΗ$, $AΓ$, $ΓΓ$, ἀπὸ τοῦ τόξου AM ἐξαρτώμεναι, καὶ διὰ τοῦ ἰδίου καὶ τῆς ἀκτίνος πάντοτε προσδιοριζόμεναι, σημειοῦνται οὕτως: $ΜΗ$ —ἡμ AM , ἢ ἡμ $ΑΓΜ$, $AΓ$ —ἐφ AM , ἢ ἐφ $ΑΓΜ$, $ΓΓ$ —δια AM , ἢ δια $ΑΓΜ$.

(1) Βλέπομεν ἐνταῦθα ὅτι αἱ λέξεις διατέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη ἀλλομβάνονται εἰς διαφορετικὴν ἔννοιαν ἀπὸ ἐκείνην ἣτις εἰς αὐτὰς δίδεται εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας. Εἰς τὸ μέρος τοῦτο τῶν Μαθηματικῶν, ἡ διατέμνουσα καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἀπροσδιόριστοι εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν τέμνει τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἄπτεται αὐτοῦ· ἀλλ' εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν αἱ αὗται ὀνομασίαι ἐφαρμοζονται πάντοτε εἰς γραμμὰς προσδιορισμένου μεγέθους· ὅταν ἡμπερὶ νὰ ἀκολουθήσῃ ὁμωνυμία, αἱ τελευταῖαι αὗται καλοῦνται Τριγωνομετρικαὶ ἐφαπτομένη καὶ διατέμνουσα· Ο. Μ.

5. Αφ' οὗ ληφθῇ τὸ τόξον $ΑΔ$ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, ἔαν ἐκ τῶν σιγμῶν $Μ$ καὶ $Δ$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν εἶναι τὸ ἄκρον τοῦ τόξου $ΜΔ$, ἡ δὲ ἄλλη ἡ ἀρχὴ του, ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ $ΜΚ$, $ΔΣ$ κάθετοι εἰς τὴν ἀκτῖνα $ΓΔ$, ἡ μὲν περατουμένη εἰς ταύτην τὴν ἀκτῖνα, ἡ δὲ εἰς τὴν ἀκτῖνα $ΓΜ$ προεκβληθεῖσαν· αἱ γραμμαὶ $ΜΚ$, $ΔΣ$ καὶ $ΓΣ$ παρομείως θέλουν εἶναι τὸ ἡμίτονον, ἐφαπτομένη, καὶ διατέμνουσα τοῦ τόξου $ΜΔ$, συμπληρώματος τοῦ τόξου $ΑΜ$. Καλοῦνται δὲ, χάριν συντομίας, συνημίτονον, συνεφαπτομένη καὶ συνδιατέμνουσα τοῦ τόξου $ΑΜ$: τίποτε ἄλλο λοιπὸν δὲν εἶναι τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη, καὶ ἡ συνδιατέμνουσα ἑνὸς τόξου, παρὰ τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ διατέμνουσα τοῦ συμπληρώματος τοῦ τόξου· σημειόνονται δὲ ὡς ἀκολούθως: $ΜΚ = \text{συν } ΑΜ$, ἢ $\text{συν } ΑΓΜ$, $ΔΣ = \text{σφ } ΑΜ$ ἢ $\text{σφ } ΑΓΜ$, $ΓΣ = \text{σδ } ΑΜ$, ἢ $\text{σδ } ΑΓΜ$. Ἐν γένει, ἔαν $Α$ παριστάνῃ ὁποῖονδήποτε τόξον ἢ ὁποῖανδήποτε γωνίαν, ἐπειδὴ $100^\circ - Α$ παριστάνει τὸ συμπλήρωμά του καὶ, κατὰ τὰ ἄνωτέρω, τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη καὶ συνδιατέμνουσα ἑνὸς τόξου, εἶναι τὸ ἡμίτονον ἡ ἐφαπτομένη καὶ διατέμνουσα τοῦ συμπληρώματος· ἔχομεν $\text{συν } Α = \text{ἡμ}(100^\circ - Α)$, $\text{σφ } Α = \text{ἐφ}(100^\circ - Α)$, $\text{σδ } Α = \text{δια}(100^\circ - Α)$.

Τὸ τρίγωνον $ΜΚΓ$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $ΓΠΜ$, οὕτως ἔχομεν $ΓΠ = ΜΚ$ · λοιπὸν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΓΠΜ$, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα, αἱ δύο πλευραὶ $ΜΠ$, $ΓΠ$ εἶναι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου $ΑΜ$: ἡμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ μέρος τῆς διαμέτρου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ποδὸς τοῦ ἡμιτόνου. Ὅσον διὰ τὰ τρίγωνα $ΓΑΤ$, $ΓΔΣ$, αὐτὰ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ ἴσα τρίγωνα $ΓΠΜ$, $ΓΚΜ$, καὶ οὕτως εἶναι ὅμοια μεταξὺ των.

Εντεῦθεν ἀμέσως θέλομεν συνάξει τοὺς μεταξὺ τῶν γραμμῶν τὰς ὁποίας ὠρίσαμεν διαφόρους λόγους· ἀλλὰ πρότερον πρέπει νὰ ἴδωμεν τὴν ὁδὸν κατὰ τὴν ὁποίαν προβαίνουν οὗται αἱ γραμμαὶ, ἔταν τὸ τόξον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται αὐξάνη ἐκ τοῦ μηδενὸς μέχρι 200° .

Ζ. Ἀς υποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐν ἄκρον τοῦ τόξου μένει σταθερὸν εἰς Α, καὶ ὅτι τὸ ἄλλο σημειωμένον διὰ Μ, διατρέχει διαδοχικῶς ὅλην τὴν ἑκτασιν τῆς ἡμιπεριφερείας ἐκ τῆς Α μέχρι τῆς Β κατὰ τὴν ἔννοιαν ΑΔΒ.

Ὅταν ἡ σιγμὴ Μ ᾖ ἐνωμένη μὲ τὴν Α, ἢ ὅταν τὸ τόξον ΑΜ ᾖ μηδὲν, τὰ τρία σημεῖα Τ, Μ, Η ταυτίζονται μὲ τὴν σιγμὴν Α· ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τόξου μηδενὸς εἶναι μηδὲν, καὶ ὅτι τὸ συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, καθὼς καὶ ἡ διατέμνουσά του, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα. Σημειόνοντες λοιπὸν διὰ Ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θέλομεν ἔχει,

$$\text{ἡμ. } 0 = 0, \text{ ἐφ } 0 = 0, \text{ συν } 0 = P, \text{ ὅτι } 0 = P$$

η'. Αναλόγως ὁποῦ ἡ σιγμὴ Μ προχωρεῖ πρὸς τὴν Δ, τὸ ἡμίτονόν αὐξάνει, καθὼς ἦτε ἐφαπτομένη καὶ διατέμνουσα· ἀλλὰ τὸ συνημίτονον, ἢ συνεφαπτομένη καὶ ἡ συνδιατέμνουσα σμικρύνουν. Ὅταν ἡ σιγμὴ Μ εὐρεθῇ εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΔ, ἢ ὅταν τὸ τόξον ΑΜ ᾖ 50° , καθὼς καὶ τὸ συμπλήρωμά του ΜΔ, τὸ ἡμίτονον ΗΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον ΜΚ ἢ ΓΗ, καὶ τὸ τρίγωνον ΗΗΜ, ἐπεὶδὴ γίνεταί ἰσοσκελὲς, δίδει τὴν ἀναλογίαν $ΜΗ : ΓΜ :: r : \sqrt{2}$, ἢ ἡμ $50^\circ : P :: r : \sqrt{2}$. Λοιπὸν ἡμ $50^\circ = \text{συν } 50^\circ = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}P$. Εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν

τὸ τρίγωνον ΓΑΤ γίνεται ἰσοσκελὲς καὶ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΓΔΣ· ὅθεν ἐλέπομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τῶν 50° ἰσοῦνται καὶ αἱ δύο μὲ τὴν ἀκτῖνα, καὶ οὕτως ἔχομεν ἐφ $50^\circ = \text{συν } 50^\circ = P$.

θ'. Εξακολουθώντας τοῦ τόξου AM νὰ αὐξάνη, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἕως οὗ ἡ σιγμὴ M φθάσῃ εἰς Δ : τότε τὸ μὲν ἡμίτονον ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα; τὸ δὲ συνημίτονον μὲ μηδέν. Ἐχομεν λοιπὸν ἡμ $100^\circ = P$ καὶ συν $100^\circ = 0$ καὶ δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι συνέπεια ἐκείνων τὰς ὁποίας εὐρήκαμεν διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ τόξου μηδενὸς· διότι ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα τῶν 100° εἶναι μηδέν, ἔχομεν ἡμ $100^\circ = \text{συν } 0^\circ = P$ καὶ συν $100^\circ = \text{ἡμ } 0^\circ = 0$.

Ὅσον διὰ τὴν ἐφαπτομένην, αὐτὴ αὐξάνει ταχύτατα ἀναλόγως ὅπου ἡ σιγμὴ M πλησιάζει πρὸς τὴν Δ · καὶ τέλος ὅταν φθάσῃ εἰς Δ , δὲν ὑπάρχει πλέον κυρίως ἐφαπτομένη, διότι αἱ γραμμαὶ AT , TD , οὖσαι παράλληλοι, δὲν ἡμποροῦν νὰ συναπεντηθοῦν. Τοῦτο δὲ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῶν 100° εἶναι ἄπειρος, καὶ γράφομεν ἐφ $100^\circ = \infty$.

Ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα τῶν 100° εἶναι μηδέν, ἔχομεν ἐφ $0^\circ = \sigma\phi$ 100° καὶ $\sigma\phi$ $0^\circ = \text{ἐφ } 100^\circ$. Λοιπὸν $\sigma\phi$ $0^\circ = \infty$ καὶ $\sigma\phi$ $100^\circ = 0$.

ι'. Εξακολουθούσης τῆς σιγμῆς M νὰ προχωρῇ ἀπὸ τὴν Δ πρὸς τὴν B , τὰ μὲν ἡμίτονα σμικρύνουν τὰ δὲ συνημίτονα αὐξάνουν. Οὕτως βλέπομεν ὅτι τὸ τόξον AM' ἔχει δι' ἡμίτονον $M'I$ καὶ διὰ συνημίτονον $M'K$ ἢ GI . Ἀλλὰ τὸ τόξον $M'B$ εἶναι παραπλήρωμα τοῦ AM' , ἐπειδὴ $AM' + M'B$ ἰσοῦται μὲ ἡμιπεριφέρειαν· ἄλλως ἐὰν ἀχθῇ ἡ $M'M$ παράλληλος τῇ AB , φανερόν ὅτι τὰ τόξα AM , BM' , τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξύ παραλλήλων, θέλουν εἶναι ἴσα, καθὼς καὶ αἱ κάθετοι ἢ τὰ ἡμίτονα MI , $M'I$. Λοιπὸν τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τούτου τοῦ τόξου ἢ ταύτης τῆς γωνίας.

Τὸ τόξον ἢ ἡ γωνία A ἔχει διὰ παραπλήρωμα 200° —
 A : οὕτως ἔχομεν ἐν γένει

$$\eta\mu A = \eta\mu (200^\circ - A).$$

Ἡ αὐτὴ ιδιότης ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ἀκόμη διὰ τῆς ἐξισώσεως $\eta\mu (100^\circ + B) = \eta\mu (100^\circ - B)$, ὅπου B τοῦ τόξου ΔM ἢ τοῦ ἴσου τοῦ $\Delta M'$.

ἰα'. Τὰ αὐτὰ τόξα AM' , AM τὰ ὅποια εἶναι παραπλήρωμα τὸ ἐν τοῦ ἄλλου, καὶ τὰ ὅποια ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, ἔχουν καὶ συνημίτονα ἴσα $\Gamma\Pi'$, $\Gamma\Pi$. ἄλλὰ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ συνημίτονα ταῦτα διευσθύνονται κατ' ἀντιθέτους ἐννοίας. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῆς θέσεως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἐκφράζεται διὰ τῆς ἀντιθέσεως τῶν σημείων: ὥς ἐὰν θεωρηθῶσιν ὡς θετικὰ, ἢ ἔχοντα πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$, τὰ συνημίτονα τῶν τόξων μικρότερων τῶν 100° , πρέπει νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀρνητικὰ ἢ ἔχοντα πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $-$, τὰ συνημίτονα τῶν τόξων μεγαλητέρων τῶν 100° . Ἐχομεν λοιπὸν ἐν γένει

$$\sigma\upsilon\nu A = - \sigma\upsilon\nu (200^\circ - A).$$

ἢ $\sigma\upsilon\nu (100^\circ + A) = - \sigma\upsilon\nu (100^\circ - A)$. τοῦτ' ἔστιν, τὸ συνημίτονον ἐνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας μεγαλητέρου τῶν 100° εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον τοῦ παραπληρώματός του, ἀρνητικῶς λαμβανόμενον.

Ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα ἐνὸς τόξου μεγαλητέρου τῶν 100° εἶναι ἀρνητικόν (γ'), δὲν εἶναι θαυμαστὸν ἐὰν τὸ ἡμίτονον τοῦ συμπληρώματος τούτου ᾖ ἀρνητικόν· πλὴν διὰ νὰ αἰσθητοποιήσωμεν ἔτι μᾶλλον ταύτην τὴν ἀλήθειαν, ἃς ζητήσωμεν τὴν ἐκφράσιν τοῦ διαστήματος τῆς σιγμῆς A ἀπὸ τὴν κάθετον MM' . Ἐὰν κάμωμεν τὸ τόξον $AM = \chi$, θέλομεν ἔχει $i'H = \sigma\upsilon\nu \chi$, καὶ τὸ ζητού-

μενον διάστημα $ΑΠ = P$ —συνχ. Ο αὐτὸς τύπος πρέπει νὰ ἐκφράζη τὸ διάστημα τῆς σιγμῆς $Λ$ ἀπὸ τὴν εὐθεϊαν $ΜΠ$, ὅποιονδήποτε εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ τόξου $ΑΜ$, ἡ ἀρχὴ τοῦ ὁποίου εἶναι εἰς τὴν σιγμὴν $Α$. Ἀς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἡ σιγμὴ $Μ$ φθάνει εἰς $Μ'$, ὥστε $χ$ σημειώνει τὸ τόξον $ΑΜ'$, θέλομεν ἔχει ἀκόμη εἰς ταύτην τὴν σιγμὴν $ΑΠ' = P$ —συνχ· λοιπὸν $συνχ = P - ΑΠ' = ΑΓ - ΑΠ' = (ΑΠ' - ΑΓ) = -ΓΠ'$ · τοῦτο δεικνύει ὅτι $συνχ$ εἶναι τότε ἀρνητικόν· καὶ ἐπειδὴ $ΓΠ' = ΓΠ = συν (200^\circ - χ)$, ἔχομεν $συνχ = -συν (200^\circ - χ)$, ὡς ἤδη εὐρήκαμεν.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι μία ἀμβλεία γωνία ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὸ αὐτὸ συνημίτονον μὲ τὴν ὀξείαν γωνίαν ἣτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς παραπλήρωμα, μὲ ταύτην μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ συνημίτονον τῆς ἀμβλείας γωνίας πρέπει νὰ ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον—. Οὕτως ἔχομεν ἡμ. $150^\circ = -\text{ἡμ. } 50^\circ = -\frac{1}{2}P/2$, καὶ $συν 150^\circ = -συν 50^\circ = -\frac{1}{2}P/2$.

Ὅσον διὰ τὸ τόξον $ΑΔΒ$ ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, τὸ ἡμίτονόν του εἶναι μηδέν, καὶ τὸ συνημίτονόν του ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ἀρνητικῶς εἰλημμένην· ἔχομεν λοιπὸν ἡμ. $200^\circ = 0$, καὶ $συν 200^\circ = -P$. Τοῦτο παρομοίως συνάγεται καὶ ἐκ τῶν τύπων ἡμ. $A = \text{ἡμ. } (200^\circ - A)$, καὶ $συν A = -συν (200^\circ - A)$, ὅταν γένη $A = 200^\circ$.

ἰβ'. Ἀς ἐξετάσωμεν τώρα τὶ γίνεται ἡ ἐφαπτομένη ἐνὸς τόξου $ΑΜ'$ μεγαλητέρου τῶν 100° . Κατὰ τὸν ὁρισμὸν, πρέπει νὰ προσδιορισθῇ ἀπὸ τὴν συνδρομὴν τῶν γραμμῶν $ΑΓ$, $ΓΜ'$ · ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ αὗται κάμνουσι γωνίας μὲ τὴν $ΑΓ$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀπίσθων εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν, διὰ τοῦτο δὲν συναπαντῶνται κατὰ τὴν ἔννοιαν $ΑΓ$, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς $ΑΓ'$ ὅθεν εὐλόγοιμεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἐνὸς τόξου μεγαλητέρου τῶν 100° εἶναι

ἀρνητική. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ΑΥ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΝ (σχ. 1) παραπληρώματος τοῦ ΑΜ' (διότι ΝΑΜ' εἶναι ἡμιπεριφέρεια), συνάγομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἐνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας μεγαλητέρου τῶν 100° εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ παραπληρώματός του ἀρνητικῶς εἰλημμένην, εἰς τρόπον ὥστε

$$\text{ἐφ } \Lambda' = - \text{ἐφ } (200^\circ - \Lambda)$$

Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὴν συνεφαπτομένην παρισανομένην ὑπὸ ΔΣ', ἥτις εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν συνεφαπτομένην ΔΣ τοῦ ΑΜ. Ἐχομεν λοιπὸν ὡσαύτως

$$\sigma\phi \Lambda' = - \sigma\phi (200^\circ - \Lambda).$$

Λοιπὸν αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι εἶναι ἀρνητικαί, καθὼς τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα, ἀπὸ 100° μέχρι 200°. Καὶ εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ὅριον, ἔχομεν $\text{ἐφ } 200^\circ = 0$ καὶ $\sigma\phi 200^\circ = - \sigma\phi 0^\circ = -\infty$.

ιγ'. Εἰς μὲν τὴν Τριγωνομετρίαν δὲν θεωροῦνται τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα, κ.τ.λ. τόξων ἢ γωνιῶν μεγαλητέρων τῶν 200° διότι πάντοτε μεταξὺ 0 καὶ 200° περιέχονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τόσον εὐθυγράμμων ὅσον καὶ σφαιρικῶν, καὶ αἱ πλευραὶ τούτων τῶν τελευταίων. Πλὴν εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς τῆς Γεωμετρίας, δὲν εἶναι σπάνιον νὰ θεωρηθῶσι τόξα μεγαλητέρα τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ ἐνταύτῳ περιέχοντα πολλὰς περιφερείας. Εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον νὰ εὕρωμεν τὴν ἐκφρασιν τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τούτων τῶν τόξων, ὅποιον καὶ ἂν ᾖ τὸ μέγεθός των.

Ἐν πρώτοις ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι δύο ἴσα τόξα καὶ σημείων ἐναντίων ΑΜ, ΑΝ, ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καὶ σημείων ἐναντίων ΜΠ, ΟΝ, ἐν ᾧ τὸ συνημίτονον ΓΠ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ δύο. Ἐχομεν λοιπὸν ἐν γένει

$$\begin{aligned} \eta\mu(-\chi) &= -\eta\mu\chi \\ \sigma\upsilon\nu(-\chi) &= \sigma\upsilon\nu\chi, \end{aligned}$$

Τύποι οί οποῖοι χρησιμεύουν εἰς τὸ νὰ ἐκφράσσουν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων ἀρνητικῶν.

Ἐκ τοῦ 0° μέχρι 200° τὰ ἡμίτονα εἶναι πάντοτε θετικά, ὡς κείμενα ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου AB . Ἐπέκεινα τῶν 200° ἕως 400° τὰ ἡμίτονα εἶναι ἀρνητικά, ὡς κείμενα ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ταύτης τῆς διαμέτρου. Ἐστω $ABN' = \chi$ τόξον μεγαλύτερον τῶν 200° , τὸ ἡμίτονόν του HN' εἶναι ἴσον μὲ HM ἡμίτονον τοῦ τόξου $AM = \chi - 200^\circ$ λοιπὸν ἔχομεν ἐν γένει

$$\text{ἡμ}\chi = -\text{ἡμ}(\chi - 200^\circ)$$

Δηλαδή τὸ ἡμίτονον ἐνὸς τόξου μείζονος τῶν 200° εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπεροχῆς του ἐπάνω εἰς 200° ἀρνητικῶς λαμβανόμενον.

Ὁ ἄνωτέρω τύπος δίδει τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων μεταξὺ 200° καὶ 400° διὰ τῶν ἡμιτόνων μεταξὺ 0° καὶ 200° . διότι ἡ ὑπεροχὴ ἐνὸς τόξου περιεχομένου μεταξὺ 200° καὶ 400° ἐπάνω εἰς 200° περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ 200° . ὅταν δὲ τὸ τόξον χ ἰσοῦται μὲ 400° , τότε ὁ τύπος δίδει $\text{ἡμ} 400^\circ = -\text{ἡμ} 200^\circ = 0$ καὶ τῷ ὄντι εἶναι φανερόν ὅτι ὅταν ἐν τόξον ἰσοῦται μὲ τὴν ὅλην περιφέρειαν τὰ δύο ἄκρα του ταυτίζονται, καὶ τὸ ἡμίτονον ἄγεται εἰς μηδέν.

Ἐπίσης εἶναι κατὰδῆλον ὅτι ἂν εἰς ὁποιοδήποτε τόξον AM προσεθῇ μία ἢ περισσότεραι περιφέρειαι, ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ ἄκρον τοῦ ἀθροίσματος εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τοῦ τόξου AM . Ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται ὅτι τὸ τοιοῦτον ἀθροισμα ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον μὲ τὸ τόξον AM . Ἐὰν λοιπὸν 11 σημειώσῃ ἀκεραίαν περιφέρειαν ἢ 400° , θελομένην ἔχει $\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}(\Pi + \chi) = \text{ἡμ}(2\Pi + \chi) = \text{ἡμ}(3\Pi + \chi)$ κτλ. τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ συνημίτονον, ἐφαπτομένην, κτλ.

Τώρα ὅποιον καὶ ἂν ᾖ τὸ προτεθὲν τόξον, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονόν του ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ, μὲ

ἁρμόδιον σημείον, διὰ τοῦ ἡμίτονου ἐνὸς τόξου μικροτέρου τῶν 100° · διότι τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου χ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ὁποῦ μένει ὅταν ἀπὸ τὸ τόξον χ ἀφαιρεθῶσι τὸσάκις 400° ὡσάκις περιέχονται· καλοῦντες λοιπὸν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον ψ , θέλομεν ἔχει $\eta\mu\chi = \eta\mu\psi$ · καὶ ἐπειδὴ ψ περιλαμβάνεται μεταξὺ 0° καὶ 400° , ἐὰν ᾖναι μείζον 200° , κάμνομεν $\psi = 200^\circ + \omega$ · ω σημειώνει ὅ,τι πρέπει νὰ προσεθῇ εἰς 200° διὰ νὰ προκύψῃ ψ . Λοιπὸν $\eta\mu\psi = \eta\mu(200^\circ + \omega) = \eta\mu(200^\circ + \omega - 200^\circ) = \eta\mu\omega$. Τώρα ἐπειδὴ ω εἶναι ἔλασσον τῶν 200° , διὰ τοῦτο βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονον ἐνὸς τόξου ὁποιοῦδήποτε εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον ἐνὸς τόξου μικροτέρου τῶν 200° · ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τύπου $\eta\mu(100^\circ + \chi) = \eta\mu(100^\circ - \chi)$ συνάγεται ὅτι τὰ ἡμίτονα τόξων μεγαλητέρων τῶν 100° κρέμονται ἀπὸ τὰ ἡμίτονα τόξων μεταξὺ 0 καὶ 100° · ἔπεται ὅτι τὰ ἡμίτονα ὁποιοῦνδήποτε τόξων κρέμονται ὁμοίως ἀπὸ τὰ ἡμίτονα τόξων μεταξὺ 0 καὶ 100° .

ιδ'. Τὰ συνημίτονα ἄγονται πάντοτε εἰς τὰ ἡμίτονα διὰ τοῦ τύπου $\sigmaυνΑ = \eta\mu(100^\circ - Α)$, ἢ διὰ τοῦ τύπου $\sigmaυνΑ = \eta\mu(100^\circ + Α)$ · ὅθεν ἡξεύροντες νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ ἡμίτονα εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς περιστάσεις, ἡξεύρομεν ὡσαύτως νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ συνημίτονα. Τοῦ λοιποῦ, βλέπομεν ἀπὸ τὸ σχῆμα ὅτι τὰ ἀρνητικὰ συνημίτονα χωρίζονται ὑπὸ τὰ θετικὰ διὰ τῆς διαμέτρου ΔΒ, ὥστε ὅλα τὰ τόξα τῶν ὁμοίων τὸ ἄκρον πίπτει ἀριστερόθεν τῆς ΔΕ, ἔχουν θετικὸν συνημίτονον, ἐν ᾧ ἐκεῖνα τῶν ὁμοίων τὸ ἄκρον πίπτει δεξιόθεν ἔχουν ἀρνητικόν.

Οὕτως ἀπὸ 0° ἕως 100° τὰ συνημίτονα εἶναι θετικά, ἀπὸ 100° ἕως 300° εἶναι ἀρνητικά, ἀπὸ 300° ἕως 400° ξαναγίνονται θετικά· καὶ μετὰ μίαν ἀκεραίαν περιστροφὴν, λαμβάνουσι τὰς αὐτὰς τιμὰς ὁποῦ καὶ εἰς τὴν προηγουμένην, διότι ἔχομεν ὡσαύτως $\sigmaυν(400^\circ + \chi) = \sigmaυν\chi$.

Μετὰ ταύτας τὰς ἐξηγήσεις, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων πολλαπλασίων τοῦ τεταρτημορίου, ἔχουν τὰς ἀκολουθοῦς τιμὰς :

ἡμ $0^\circ = 0$	ἡμ $100^\circ = P$	συν $0^\circ = P$	συν $100^\circ = 0$
ἡμ $200^\circ = 0$	ἡμ $300^\circ = -P$	συν $200^\circ = -P$	συν $300^\circ = 0$
ἡμ $400^\circ = 0$	ἡμ $500^\circ = P$	συν $400^\circ = P$	συν $500^\circ = 0$
ἡμ $600^\circ = 0$	ἡμ $700^\circ = -P$	συν $600^\circ = -P$	συν $700^\circ = 0$
ἡμ $800^\circ = 0$	ἡμ $900^\circ = P$	συν $800^\circ = P$	συν $900^\circ = 0$
κ.τ.λ.	κ.τ.λ.	κ.τ.λ.	κ.τ.λ.

Ἐν γένει ἐὰν K σημειώσῃ ἀκέραιον ἀριθμὸν ὁποῖονδήποτε, θελομεν ἔχει :

ἡμ $2K \cdot 100^\circ = 0$	συν $(2K + 1) \cdot 100^\circ = 0$
ἡμ $(4K + 1) \cdot 100^\circ = P$	συν $4K \cdot 100^\circ = P$
ἡμ $(4K - 1) \cdot 100^\circ = -P$	συν $(4K + 2) \cdot 100^\circ = -P$

Τὰ ὅσα εἶπομεν περὶ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ παραλείψωμεν καθε μερικὴν ἐρευναν ἐπάνω εἰς τὰς ἐφαπτομένας, συνεφαπτομένας, κ.τ.λ. τῶν τόξων μεγαλητέρων τῶν 200° διότι, καθὼς θὰ ἴδωμεν ἀπὸ τοὺς τύπους τοὺς ὁποῖους ἀμέσως θέλομεν ἐκθέσει, αἱ τιμαὶ τούτων τῶν ποσοτήτων καὶ τὰ σημεία των εὐκόλως συνάγονται ἀπὸ τὰς τιμὰς καὶ σημεία τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν ἰδίων τόξων.

Θεωρήματα καὶ τύποι ἀναφερόμενα εἰς τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτομένας κ.τ.λ.

ιε'. Τὸ ἡμίτονον ἐνὸς τόξου εἶναι τὸ ἡμιτυ τῆς χορδῆς ἥτις ὑποτείνει τόξον διπλάσιον.

Διότι ἡ ἀκτὶς $ΓΑ$, κάθετος εἰς MN , τέμνει δίχα τὴν χορδὴν MN καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον MAN . λοιπὸν $ΜΠ$, ἡμίτονον τοῦ τόξου $ΜΑ$ εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς χορδῆς MN ἥτις ὑποτείνει τὸ τόξον MAN , διπλάσιον τοῦ $ΜΑ$.

Η χορδή ητις ὑποτείνει τὸ ἕκτον μέρος τῆς περιφε-
ρείας ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα· ὅθεν ἐπεὶ δὴ $\frac{400^\circ}{12}$ εἶναι τὸ

ἡμισυ τοῦ τόξου $\frac{400^\circ}{6}$, ἔχομεν ἡμ $\frac{400^\circ}{12}$ ἢ ἡμ $33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{3}P$,

τοῦτ' ἔστι τὸ ἡμίτονον τοῦ τριτημορίου τῆς ὀρθῆς γωνίας
ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμισυ τῆς ἀκτῖνος. (1)

15'. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου πλεόν
τὸ τετράγωνον τοῦ συνημιτόνου του ἰσοῦται μὲ τὸ τε-
τράγωνον τῆς ἀκτῖνος, ὥςτε ἔχομεν ἐν γένει ἡμ.²A +
συν.²A = P². (ἐνταῦθα ἡμ.²A σημειώνει τὸ τετράγωνον τοῦ
ἡμ.A, καὶ παρομοίως συν.²A τὸ τετράγωνον τοῦ συν.A).

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀμέσως προκύπτει ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον
—2 —2 —2
τρίγωνον ΓΠΜ, ὅπου ἔχομεν ΠΜ + ΓΠ = ΓΜ.

Εντεῦθεν ἔπεται ὅτι ὁθέντος τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου
εὐρίσκεται τὸ συνημιτόνόν του, καὶ τ' ἀνάπαινον, διὰ τῶν
τύπων $\text{συν}A = \pm \sqrt{P^2 - \text{ἡμ}^2A}$, $\text{ἡμ}A = \pm \sqrt{P^2 - \text{συν}^2A}$. Τὸ διπλοῦν σημεῖον τούτων τῶν τύπων προέρ-
χεται ἐκ τοῦ ὅτι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον ΠΜ ἀνήκει εἰς δύο
τόξα ΑΜ, ΑΜ', τῶν ὁποίων τὰ συνημίτονα ΓΠ, ΓΠ'
εἶναι ἴσα καὶ σημείων ἐναντίων, καθὼς τὸ αὐτὸ συνημί-
τονον ΓΠ ἀνήκει εἰς δύο τόξα ΑΜ, ΑΝ, τῶν ὁποίων τὰ
ἡμίτονα ΜΠ, ΠΝ εἶναι παρομοίως ἴσα καὶ σημείων ἐναντίων.

Οὕτω, φερέϊπεῖν, ἀφ' οὗ εὐρέθη ἡμ $33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{3}P$, συνά-
γεται $\text{συν} 33^\circ \frac{1}{3}$ ἢ ἡμ $66^\circ \frac{2}{3} = \sqrt{P^2 - \frac{1}{9}P^2} = \sqrt{\frac{8}{9}P^2}$
 $= \frac{2}{3}P\sqrt{3}$.

(1) Ἐκ τούτου ἐνκόλως κατασκευάζεται τὸ τριτημόριον τῆς ὀρθῆς
γωνίας ἢ τοῦ τεταρτημορίου· διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν
τὴν ἀκτῖνα ΓΑ εἰς δύο ἴσα μέρη· ἐκ τῆς σιγμῆς τῆς ἡμισείας νὰ
ἄξωμεν μίαν παράλληλον τῆς ἀκτῖνος ΓΑ· ἡ σιγμὴ ὅπου αὕτη συ-
ναπαντᾷ τὸ τεταρτημόριον εἶναι τὸ ἄκρον τοῦ τριτημορίου του, οὗσης
τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ εἰς Α. Ο. Μ.

ιζ'. Δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τοῦ τόξου Α, ἡμποροῦμεν νὰ εὗρωμεν τὴν ἐφαπτομένην, διατέμνουσαν, συνεφαπτομένην καὶ συνδιατέμνουσαν τοῦ ἰδίου τόξου διὰ τῶν ἀκολουθῶν τύπων :

$$\epsilon\phi A = \frac{P\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}, \quad \delta\iota\alpha A = \frac{P^2}{\sigma\upsilon\nu A}, \quad \sigma\phi A = \frac{P\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A}, \quad \sigma\delta A = \frac{P^2}{\eta\mu A}.$$

Τῷ ὄντι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΑΤ, ΓΔΣ δίδουν τὰς ἀναλογίας :

$$\Gamma\P :: \Pi M :: \Gamma A :: A T \quad \eta \quad \sigma\upsilon\nu A : \eta\mu A :: P : \epsilon\phi A = \frac{P\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}$$

$$\Gamma\P :: \Gamma M :: \Gamma A :: G T \quad \eta \quad \sigma\upsilon\nu A : P :: P : \delta\iota\alpha A = \frac{P^2}{\sigma\upsilon\nu A}$$

$$\Pi M :: \Gamma\P :: \Gamma A :: \Delta S \quad \eta \quad \eta\mu A : \sigma\upsilon\nu A :: P : \sigma\phi A = \frac{P\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A}$$

$$\Pi M :: \Gamma M :: \Gamma A :: \Gamma S \quad \eta \quad \eta\mu A : P :: P : \sigma\delta A = \frac{P^2}{\eta\mu A}$$

Ἐκ τῶν ὁποίων συνάγονται οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος τύποι παρατηροῦμεν δὲ ὅτι οἱ δύο τελευταῖοι τύποι ἡμποροῦν νὰ συναχθοῦν ἀπὸ τοὺς δύο πρώτους τιθεμένου ἀπλῶς 100—Α ἀντὶ Α.

Οἱ τύποι οὗτοι δίδουν τὰς τιμὰς καὶ τὰ ἴδια σημεῖα τῶν ἐφαπτομένων, διατεμνουσῶν, κ.τ.λ. διὰ κάθε τόξον τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὸν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον· καὶ ἐπειδὴ ὁ προϋδευτικὸς νόμος (1a 1oi progressive) τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων, κατὰ τὰ διάφορα τόξα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, ἱκανῶς ἀνεπτύχθη εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, δὲν μένει τίποτε νὰ ἐπιθυμήσῃ τις ἐπάνω εἰς τὸν νόμον τὸν ὁποῖον ἀκολουθοῦν παρομοίως αἱ ἐφαπτόμεναι, διατέμνουσαι, κ.τ.λ.

Ἡμποροῦμεν ὡσαύτως διὰ τῶν τύπων τούτων νὰ βεβαιώσωμεν πολλὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα ἀνωτέρω εὗρέθησαν

πρὸς τὰς ἐφαπτομένας. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν κάμω-
μεν $\Lambda = 100^\circ$, θέλομεν ἔχει $\eta\mu\Lambda = P$, καὶ $\sigma\upsilon\nu\Lambda = -\sigma$,
λοιπὸν ἐφ $100^\circ = \frac{P^2}{\sigma}$, ἔκφρασις σημειόνουσα ἄπειρον πο-
σότητα· διότι P^2 διαιρούμενον δι' ἐλαχίστης ποσότητος,
δίδει πηλίκον μεγαλῶτατον· λοιπὸν P^2 διὰ μηδενὸς δι-
αιρούμενον δίδει πηλίκον μείζον πάσης πεπερασμένης
ποσότητος. Καὶ ἐπειδὴ μηδὲν ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ μὲ τὸ
σημεῖον + ἢ μὲ τὸ σημεῖον -, θέλομεν ἔχει τὴν ἀμ-
φίβωλον τιμὴν ἐφ $100^\circ = \pm \sigma$.

Εἰςω προσέτι $\Lambda = 200^\circ - B$, θέλομεν ἔχει $\eta\mu\Lambda = \eta\mu B$,
καὶ $\sigma\upsilon\nu\Lambda = -\sigma\upsilon\nu B$ · λοιπὸν ἐφ $(200^\circ - B) = \frac{P\eta\mu B}{-\sigma\upsilon\nu B}$
 $= -\frac{P\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = -\epsilon\phi B$, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὸ ἄρθρον. ιβ.

ιγ'. Οἱ τύποι τοῦ προηγουμένου ἄρθρου, συμπλεκό-
μενοι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν ἐξίσωσιν $\eta\mu^2\Lambda + \sigma\upsilon\nu^2\Lambda =$
 P^2 , δίδουν ἄλλους τινὰς ἀξίους προσοχῆς.

Επειδὴ $P^2 = P^2$ καὶ ἐφ² $\Lambda = \frac{P^2\eta\mu^2\Lambda}{\sigma\upsilon\nu^2\Lambda}$, συνάγομεν διὰ τῆς
προσθέσεως $P^2 + \epsilon\phi^2\Lambda = P^2 + \frac{P^2\eta\mu^2\Lambda}{A^2} = \frac{P^2(\eta\mu^2\Lambda + \sigma\upsilon\nu^2\Lambda)}{\sigma\upsilon\nu^2\Lambda}$
 $= \frac{P^4}{\sigma\upsilon\nu^2\Lambda}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{P^4}{\sigma\upsilon\nu^2\Lambda} = \delta\iota\alpha^2\Lambda$ · ἐπετι ὅτι $P^2 + \epsilon\phi^2$
 $\Lambda = \delta\iota\alpha^2\Lambda$, τύπος ὅστις ἀμέσως συνάγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον
τρίγωνον ΓΑΤ· ὡσαύτως ἐκ τῶν τύπων ἢ ἐκ τοῦ ὀρθο-
γώνιου τριγώνου ΓΔΣ ἤθελε συναχθῇ ὅτι $P^2 + \sigma\phi^2\Lambda = \sigma\delta^2\Lambda$.

Τέλος, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μεταξύ των τοὺς τύπους
 $\epsilon\phi\Lambda = \frac{P\eta\mu\Lambda}{\sigma\upsilon\nu\Lambda}$, $\sigma\phi\Lambda = \frac{P\sigma\upsilon\nu\Lambda}{\eta\mu\Lambda}$, θέλομεν ἔχει $\epsilon\phi\Lambda \times \sigma\phi\Lambda =$
 P^2 , τύπος ὅστις δίδει $\sigma\phi\Lambda = \frac{P^2}{\epsilon\phi\Lambda}$ καὶ $\epsilon\phi\Lambda = \frac{P^2}{\sigma\phi\Lambda}$ · καὶ
δι' ἓν ἄλλο τόξον B, $\sigma\phi B = \frac{P^2}{\epsilon\phi B}$. Λοιπὸν $\sigma\phi\Lambda : \sigma\phi B ::$

$$\frac{P^2}{\sigma\phi A} : \frac{P^2}{\epsilon\phi B} \cdot \text{ἐπειδὴ δὲ δύο κλάσματα τοῦ αὐτοῦ ἀριθ-}$$

μοῦ εἶναι ἐν ἀντιπεπονητότι λόγῳ τῶν παρνομαστῶν των, ἔκτεται ὅτι αἱ συνεφαπτόμεναι δύο τόξων εἶναι εἰς ἀντιπεπονητότα λόγον τῶν ἐφαπτομένων των, ὥστε ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\sigma\phi A : \sigma\phi B :: \epsilon\phi B : \epsilon\phi A$.

Ὁ τύπος οὗτος $\sigma\phi A \times \epsilon\phi B = P^2$, συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Gamma A \Gamma$, $\Gamma \Delta \Sigma$, τὰ ὁποῖα δίδουν $A \Gamma : \Gamma A :: \Gamma \Delta : \Delta \Sigma$, ἢ $\epsilon\phi A : P :: P : \sigma\phi A$.

Ἐν δὲ Δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου δύο τόξων α καὶ β , θυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τούτων τῶν τόξων, διὰ τῶν ἀκολουθῶν τύπων:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\epsilon + \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha}{P}$$

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\epsilon - \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha}{P}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\epsilon - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta}{P}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta}{P}$$

Ἐστω ἡ ἀκτὺς $A \Gamma = P$, τὸ τόξον $AB = \alpha$, τὸ τόξον $BA = \beta$, καὶ ἐπομένως $AB\Delta = \alpha + \beta$. Ἐκ τῶν σιγμῶν B καὶ Δ ἄς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι BE , ΔZ ἐπὶ τὴν $A \Gamma$. Ἐκ τῆς σιγμῆς Δ ἄς ἀχθῇ ἡ ΔI κάθετος ἐπὶ τὴν $E \Gamma$, τέλος ἐκ τῆς σιγμῆς I ἄς ἀχθῇ ἡ μὲν IK' κάθετος ἢ δὲ IA παράλληλος τῇ $A \Gamma$. σχ. 2.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα $B \Gamma E$, $I \Gamma K'$ δίδουν τὰς ἀναλογίας

$$B \Gamma : I \Gamma :: B E : I K' \quad \eta \quad P : \sigma\upsilon\nu\beta :: \eta\mu\alpha : I K' = \frac{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta}{P}$$

$$I \Gamma : I I :: I E : I K' \quad \eta \quad P : \sigma\upsilon\nu\beta :: \sigma\upsilon\nu\alpha : I K' = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta}{P}$$

Τὰ τρίγωνα ΔΙΑ, ΓΒΕ, ἔχοντα τὰς πλευρὰς καθέτους
τὴν καθ' ἑμὴν εἰς τὴν καθ' ἑμὴν, εἶναι ὁμοία καὶ δίδουν
τὰς ἀναλογίας

$$\Gamma\beta : \Delta\iota :: \Gamma\epsilon : \Delta\lambda \quad \eta \quad P : \eta\mu\beta :: \sigmaυνα : \Delta\lambda = \frac{\sigmaυνα \cdot \eta\mu\beta}{P}$$

$$\Gamma\beta : \Delta\iota :: \beta\epsilon : \iota\alpha \quad \eta \quad P : \eta\mu\beta :: \eta\mu\alpha : \iota\alpha = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{P}$$

Αλλ' ἔχομεν

$$\begin{aligned} \text{IK}' + \Delta\lambda &= \Delta\zeta = \eta\mu(\alpha + \beta), \text{ καὶ } \Gamma\text{K}' - \iota\alpha = \\ \Gamma\zeta &= \sigmaυν(\alpha + \beta). \text{ Λοιπὸν} \end{aligned}$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu\alpha\sigmaυν\beta + \eta\mu\beta\sigmaυνα}{P}$$

$$\sigmaυν(\alpha + \beta) = \frac{\sigmaυνα\sigmaυν\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{P}$$

Εὐκλείδης ἠθέληεν εἶναι ἀπὸ τοὺς δύο τούτους τύπους νὰ
συναχθῶν αἱ τιμαὶ τοῦ $\eta\mu(\alpha - \beta)$ καὶ $\sigmaυν(\alpha - \beta)$ · δυ-
νάμεθα ὁμῶς νὰ τοὺς εὗρωμεν κατ' εὐθείαν διὰ τοῦ ἰδίου
σχήματος. Τῷ ὄντι, ἐὰν προσεβληθῇ τὸ ἡμίτονον ΔΙ
ἕως οὗ νὰ συναπκντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς Μ, θέλομεν
ἔχει ΒΜ = ΒΔ = β, καὶ ΜΙ = ΙΔ = ἡμβ. Ἀπὸ τὴν σιγ-
μὴν Μ ἄς ἀγθῇ ἡ μὲν ΜΠ κάθετος ἡ δὲ ΜΝ παράλληλος
τῇ ΑΓ· ἐπειδὴ ΜΙ = ΔΙ, ἔχομεν ΜΝ = ΙΑ, καὶ ΙΝ =
ΔΑ. Ἀλλὰ ΙΚ' - ΙΝ = ΜΠ = ἡμ(α - β), καὶ ΓΚ' +
ΜΝ = ΓΠ = συν(α - β)· λοιπὸν

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\eta\mu\alpha\sigmaυν\beta - \eta\mu\beta\sigmaυνα}{P}$$

$$\sigmaυν(\alpha - \beta) = \frac{\sigmaυνα\sigmaυν\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{P}$$

Οὗτοι εἶναι οἱ τύποι τοὺς ὁποίους ἐπρόκειτο νὰ ἀπο-
δείξωμεν.

Ἡμποροῦσε τινὰς νὰ νομίσῃ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις
δὲν εἶναι τόσο γενικὴ, ἐπειδὴ τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἡκο-
λουθήσαμεν ὑποθέτει τὰ τόξα α καὶ β, καὶ τὸ ἄθροισμά

των μικρότερα τῶν 100° · ἐπομένως ὅτι οἱ ἀποδειχθέντες τύποι δὲν ὑπάρχουσι παρὰ διὰ τόξα μικρότερα τῶν 100° καὶ τῶν ὁποίων ἐπίσης τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν 100° · πλὴν ἐν πρώτοις ἄνευ δυσκολίας ἡ ἀπόδειξις ἐκτείνεται εἰς τὴν περίσασιν καθ' ἣν α καὶ ϵ ὄντων μικροτέρων τῶν 100° , τὸ ἄθροισμά των εἶναι μείζον τῶν 100° · ἐπομένως ὅτι οἱ τύποι ὑπάρχουν διὰ τόξα μικρότερα μὲν τῶν 100° , πλὴν τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μείζον τῶν 100° · ἐπειδὴ καὶ εἰς ταύτην τὴν περίσασιν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν· μόνον ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ Z πίπτει ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς AI , ἄλλο τι δὲν ἔχομεν νὰ μεταβάλλωμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν παρὰ νὰ λάβωμεν συν $(\alpha + \beta) = -IZ$ · πλὴν ἐπειδὴ ἐνταύτῃ $IZ = IA - GK'$, διὰ τοῦτο ἔχομεν πάντοτε συν $(\alpha + \epsilon) = GK' - IA$, ἢ $P\epsilon\upsilon\nu(\alpha + \epsilon) = \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$.

Ας ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ἀκρίβεια τῶν τύπων

$$P\eta\mu(\alpha + \epsilon) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\epsilon + \eta\mu\epsilon \sigma\upsilon\nu\alpha,$$

$$P\sigma\upsilon\nu(\alpha + \epsilon) = \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\epsilon$$

ἀπεδείχθη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν α καὶ β , μικροτέρας τῶν ὁρίων A καὶ B , λέγω ὅτι οἱ τύποι οὗτοι ὑπάρχουν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν τόξων α καὶ ϵ μικροτέρας τῶν ὁρίων $100^\circ + A$ καὶ B .

Τῷ ὄντι ἵποιονδήποτε εἶναι τὸ τόξον χ , ἔχομεν ἐν γένει,

$$\eta\mu(100^\circ + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\sigma\upsilon\nu(100^\circ + \chi) = -\eta\mu\chi.$$

Διότι ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι χ εἶναι μικρότερον τῶν 100° , ἴσον, φερ' εἰπεῖν, μὲ τὸ τόξον AM · ἐκ τοῦ ἄκρου M καὶ τοῦ κέντρου Γ ἄς ἀχθῇ ἡ διάμετρος $M\Gamma M''$ καὶ ἐπὶ ταύτης ἡ κάθετος διάμετρος $M'\Gamma M'''$ · φανερόν εἶναι ὅτι MM' ἴσούται μὲ τεταρτημόριον· λοιπὸν $AM + MM' = \chi + 100^\circ$ ἢ $100^\circ + \chi$. Τὸ ἡμίτονον τοῦ AM

εἶναι ἡ κάθετος MH , τὸ δὲ συνημίτονον ἡ $ΓΠ$ · τὸ ἡμί-
 τονον τοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἡ κάθετος $M'I'$, τὸ δὲ συ-
 νημίτονον ἡ $ΓΠ'$. Τώρα τὰ τρίγωνα $ΓΗΜ$, $ΓΜ'Π'$ εἶναι
 ἴσα· διότι ἡ $ΜΓ = ΓΜ'$ · περιπλέον ἡ γωνία $ΗΜΓ = τῇ$
 γωνίᾳ $Μ'ΓΠ'$ καὶ ἡ $ΗΓΜ = ΓΜ'Π'$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα
 ταῦτα εἶναι ἴσα· ἀκολουθῶς ἡ $Μ'Π' = ΠΓ$ · καὶ ἡ $ΜΠ =$
 $ΓΠ'$ · λοιπὸν ἡμ $(100^\circ + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$, καὶ $\sigma\upsilon\nu(100^\circ + \chi)$
 $= -\eta\mu\chi$. Εἰς τὴν $\chi = \angle ΔΜ'$ · ἐπομένως $100 + \chi =$
 $\angle ΔΜ'Μ''$ · ἀποδεικνύμεν, ὡς ἄνωτέρω, ὅτι τὰ τρίγωνα
 $ΓΜ'Π'$, $ΓΜ''Π''$ εἶναι ἴσα· λοιπὸν $ΓΠ' = Μ'Π'$ καὶ
 $Μ''Π'' = ΓΠ'$ · ὅθεν ἡμ $(100^\circ + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$, καὶ $\sigma\upsilon\nu$
 $(100^\circ + \chi) = -\eta\mu\chi$ · ἐξακολουθοῦντες οὕτω ἀποδει-
 κνύμεν τοὺς ἄνωτέρω τύπους διὰ κάθε τιμῆν τοῦ τόξου
 χ · οἱ τύποι λοιπὸν οὗτοι εἶναι γενικοί. σχ. 18.

Τοῦτου τεθέντος, εἰς τὴν $\chi = \mu + \epsilon$, θέλομεν ἔχει

$$\begin{aligned}\eta\mu(100^\circ + \mu + \epsilon) &= \sigma\upsilon\nu(\mu + \epsilon) \\ \sigma\upsilon\nu(100^\circ + \mu + \epsilon) &= -\eta\mu(\mu + \epsilon).\end{aligned}$$

Ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, γνωρίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ συνη-
 μιτόνου καὶ ἡμιτόνου τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων, ἐν ὅσῳ
 ταῦτα τὰ τόξα εἶναι ἐντὸς τῶν ὁρίων A καὶ B · λοιπὸν
 ἠξιοῦμεν τὰς τιμὰς τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἄνωτέρω
 ἐξισώσεων ἐν ὅσῳ μ καὶ β δὲν ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια A
 καὶ B · ὑποτεθέντος τοῦτου, ἔχομεν :

$$\begin{aligned}R\eta\mu(100^\circ + \mu + \epsilon) &= \sigma\upsilon\nu \mu \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu. \mu \eta\mu\beta \\ R\sigma\upsilon\nu(100^\circ + \mu + \epsilon) &= -\eta\mu. \mu \sigma\upsilon\nu\epsilon - \sigma\upsilon\nu. \mu \eta\mu\beta\end{aligned}$$

Εἰς τὴν $100^\circ + \mu = \alpha$ · ἐπειδὴ ἡμ $(100 + \mu) = \sigma\upsilon\nu\mu$,
 καὶ $\sigma\upsilon\nu(100^\circ + \mu) = -\eta\mu. \mu$, ἔπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\mu = \eta\mu\alpha$
 καὶ $\eta\mu. \mu = -\sigma\upsilon\nu\alpha$ · ἀντεισάγοντες λοιπὸν ταύτας τὰς
 τιμὰς εἰς τὰς προηγουμένους ἐξισώσεις, εὐρίσκομεν

$$\begin{aligned}R\eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta \\ R\sigma\upsilon\nu(\alpha + \epsilon) &= \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu\epsilon - \eta\mu. \alpha \eta\mu\epsilon.\end{aligned}$$

Οθεν ἐλέπομεν ὅτι οἱ τύποι οὗτοι, οἱ ὅποιοι ἀπεδείχθησαν εἰς τὰ ὅρια $\alpha < A$, $\beta < B$, ἤδη βεβαιῶνται εἰς πλέον ἐκτεταμένα ὅρια $\alpha < 100^\circ + A$, $\beta < B$. Ἀλλὰ μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχοντες οἱ τύποι εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 100^\circ + A$, $\beta < B$, ὑπάρχουν καὶ εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 100^\circ + A$, $\beta < 100^\circ + B$ καὶ πάλιν ὑπάρχοντες οἱ τύποι εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 100^\circ + A$, $\beta < 100^\circ + B$, ὅτι ὑπάρχουν καὶ εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 200^\circ + A$, $\beta < 100^\circ + B$, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ συλλογίζεσθαι ἀπροσδιορίσως· καὶ οὕτω συνάγουμεν τὴν γενικότητα τῶν τύπων, ἥ ὅτι ὑπάρχουν διὰ ὅποιανδήποτε τιμὴν τῶν τόξων α καὶ β · διότι, ἐπειδὴ εἶναι βεβαίον ὅτι οἱ τύποι οὗτοι ὑπάρχουν διὰ τιμὰς τῶν τόξων α καὶ β μικροτέρας τῶν 100° , δηλαδὴ περιεχομένας ἐντὸς τοῦ ὁρίου 100° · ἐκ τῆς εἰρημένης ἀποδείξεως ἀκολουθεῖ ὅτι ὑπάρχουν διὰ τιμὰς τῶν τόξων α καὶ β ἐντὸς τοῦ ὁρίου 200° · καὶ ἐκ τῆς ἰδίας ἀκρόμῃ ὅτι ὑπάρχουν διὰ τιμὰς τῶν α καὶ β ἐντὸς τοῦ ὁρίου 300° καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἀφ' οὗ ἀπεδείχθη ἡ γενικότης τῶν δύο τούτων τύπων εὐκολον νὰ συναχθῇ ἡ τῶν ἄλλων δύο. Διότι ἐπειδὴ τὸ τόξον α σύγκειται ἀπὸ δύο ἄλλα $\alpha - \beta$ καὶ β , ἔχομεν ἐκ τῶν ἀποδείχθέντων τύπων,

$$R\eta\mu\alpha = \eta\mu(\alpha - \beta)\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)\eta\mu\beta$$

$$R\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha - \beta)\eta\mu\beta$$

Καὶ θεωροῦντες ὡς ἀγνώστους εἰς ταύτας τὰς δύο ἐκισώσεις $\eta\mu(\alpha - \beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$, καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀνάληψιν εὐρίσκουμεν ὅτι

$$R\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$R\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ τύποι ἐκ τῶν ὁποίων οὗτοι ἐσυνάχθησαν ὑπάρχουν διὰ κάθε τιμὴν τῶν τόξων α καὶ β , λοιπὸν

καὶ οἱ συναγθέντες ὑπάρχουν ἐπίσης διὰ κάθε τιμὴν τῶν τόξων α καὶ β : εἶναι δηλαδὴ ἐπίσης γενικοὶ ὡς οἱ πρῶτοι

κ'. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τοῦ προηγουμένου ἄρθρου γένη· $\beta = \alpha$, ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος θέλουν δώσει

$$\eta\mu\alpha = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha}{P}, \quad \sigma\upsilon\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{P}.$$

Διὰ τῶν τύπων τούτων εὐρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τόξου διπλασίου, ὅταν ᾔνοι γνωσθὼν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἀπλοῦ τόξου, ἀκολουθῶς οἱ τύποι οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν διπλασιασμόν ἐν τῷ τόξῳ. (*).

Ἀντιστροφῶς διὰ νὰ διαιρέσωμεν τόξον δεδομένου α εἰς δύο ἴσα μέρη, ἃς θέσωμεν εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους ἀντὶ τοῦ α , $\frac{1}{2}\alpha$, θέλομεν ἔχει

$$\eta\mu\alpha = \frac{2\eta\mu^{\frac{1}{2}}\alpha\sigma\upsilon\nu^{\frac{1}{2}}\alpha}{P}, \quad \sigma\upsilon\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\frac{3}{2}}\alpha - \eta\mu^{\frac{3}{2}}\alpha}{P}.$$

ἐκ τῶν ὁμοίων συναγομεν

$$2\eta\mu^{\frac{1}{2}}\alpha\sigma\upsilon\nu^{\frac{1}{2}}\alpha = P\eta\mu\alpha \quad (1), \quad \sigma\upsilon\nu^{\frac{3}{2}}\alpha - \eta\mu^{\frac{3}{2}}\alpha = P\sigma\upsilon\alpha \quad (2)$$

$$\text{περιπλέον ἔχομεν } \sigma\upsilon\nu^{\frac{3}{2}}\alpha + \eta\mu^{\frac{3}{2}}\alpha = P^2 \quad (3)$$

Τώρα προσθέτοντες εἰς τὴν (3) τὴν (2) καὶ ἐκ τῆς ἰδίας ἀφαιροῦντες τὴν, ἔπειτα ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν ἐξαγομένων, εὐρίσκομεν,

$$\eta\mu^{\frac{1}{2}}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{2}P\sigma\upsilon\alpha\right)}$$

$$\sigma\upsilon\nu^{\frac{1}{2}}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}P\sigma\upsilon\alpha\right)}$$

τύποι οἱ ὅποιοι προσδιορίζουν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῆς ἡμισείας ἐνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ συνημιτόνου τοῦ ὅλου τόξου.

(*) Τὸ μὲν ἡμίτονον ἐνὸς τόξου διπλασίου ἄλλου δεδομένου κατασκευάζεται, ὡς ἐκ τῶν τύπων βλέπομεν, εἴδη ζητηθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν P , $2\eta\mu\alpha$, $\sigma\upsilon\alpha$, τὸ δὲ συνημίτονον, εἴδη ζητηθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν P , $\sigma\upsilon\alpha + \eta\mu\alpha$, $\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha$. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν γραμμῶν τούτων εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ τόξον εἰς τὸ ὅποιον ἀνήκειν. Ο. Μ.

Οὕτω κάμνοντες $\alpha = 100^\circ$, ἢ $\sigmaυνα = 0$, ἔχομεν ἡμ.
 $50^\circ = \sigmaυν 50^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot P' = P \sqrt{\frac{1}{2}}$. ἀκολουθῶς ἐὰν κάμω-
 μεν $\alpha = 50^\circ$, ἐπειδὴ $50^\circ = P \sqrt{\frac{1}{2}}$, θέλομεν ἔχει ἡμ.
 $25^\circ = P \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$, καὶ $\sigmaυν 25^\circ = P \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$.

κα'. Ἡμποροῦμεν ὡσαύτως νὰ εὕρωμεν τύπους προσ-
 διορίζοντας τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τῆς
 ἡμισείας ἐνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ ἡμιτόνου τοῦ
 ὅλου τόξου, καὶ τοῦτο θέλει εἶναι ὠφέλιμον εἰς πολλὰς
 περιπτώσεις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς τύπους τούτους ἄς προ-
 σθέσωμεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προηγουμένου ἄρθρου τὴν
 (1) καὶ τὴν (3), καὶ θέλομεν ἔχει

$$(\sigmaυν \frac{1}{2} \alpha + \eta\mu \frac{1}{2} \alpha)^2 = P^2 + P \eta\mu \alpha \quad \text{ἐπομένως}$$

$$\sigmaυν \frac{1}{2} \alpha + \eta\mu \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{(P^2 + P \eta\mu \alpha)} \quad \dots (4)$$

ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῆς (3) τὴν (1) συνάγομεν

$$(\sigmaυν \frac{1}{2} \alpha - \eta\mu \frac{1}{2} \alpha)^2 = P^2 - P \eta\mu \alpha \quad \text{ἐπομένως}$$

$$\sigmaυν \frac{1}{2} \alpha - \eta\mu \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{(P^2 - P \eta\mu \alpha)} \quad \dots (5)$$

Ἡδὴ προσθαφαιροῦντες τὴν (4) καὶ (5) εὐρίσκομεν

$$\eta\mu \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(P^2 + P \eta\mu \alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{(P^2 - P \eta\mu \alpha)}$$

$$\sigmaυν \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(P^2 + P \eta\mu \alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{(P^2 - P \eta\mu \alpha)}.$$

Τύποι οἱ ὅποιοι προσδιορίζουν τὸ ἡμίτονον καὶ συνη-
 μίτονον τῆς ἡμισείας ἐνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ ἡμι-
 τόνου τοῦ ὅλου τόξου.

Τοὺς δύο τούτους τύπους ἡμποροῦμεν νὰ βεβαιώσωμεν
 ἐκ τῶν ὑπερῶν· ἐπειδὴ ἄς ὑψώσωμεν τὸν πρῶτον εἰς
 τετράγωνον, εὐρίσκομεν $\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{4} (P^2 + P \eta\mu \alpha) + \frac{1}{4} (P^2 -$
 $P \eta\mu \alpha) - \frac{1}{2} \sqrt{(P^4 - P^2 \eta\mu^2 \alpha)} = \frac{1}{2} P^2 - \frac{1}{2} P \sigmaυνα$ · ὁμοίως
 ἠθέλαμεν ἔχει $\sigmaυν^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} P \sigmaυνα$ · ἐξαγόμενα τὰ
 ὅποια συμφωνοῦν μὲ τὰς τιμὰς τοῦ $\eta\mu \frac{1}{2} \alpha$ καὶ $\sigmaυν \frac{1}{2} \alpha$
 τὰς ὁποίας εὕρομεν εἰς τὸ προηγούμενον ἄρθρον. Πρέπει
 ὁμως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐὰν $\sigmaυνα$ ᾖ τὸν ἀρνητικόν,
 τὸ ριζικόν $\sqrt{(P^2 - P \eta\mu \alpha)}$ ἔπρεπε νὰ ληφθῇ μὲ σημεῖον

ἐναντίον εἰς τὰς τιμὰς τοῦ $\frac{1}{2}\alpha$ καὶ συν $\frac{1}{2}\alpha$, τοῦτο δὲ
 θέλει τρέφει τὴν μίαν τιμὴν εἰς τὴν ἄλλην.

χβ'. Διὰ τῶν τύπων τούτων, εὐκολον νὰ προσδιορισθῇ
 τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ὅλων τῶν δεκάτων τοῦ
 τεταρτημορίου.

Καὶ ἐν πρώτοις ἔσω $\eta\mu 20^\circ = \gamma$ · ἐπειδὴ τὸ ἡμίτονον
 ἐνὸς τόξου εἶναι τὸ ἡμισυ τῆς ὑποτείνουσας διπλάσιον
 τοῦτον χορδῆς, ἔπεται ὅτι 2χ εἶναι ἡ χορδὴ τῶν 40° , ἢ
 ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου· ἀλλ'
 ἡ πλευρὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ τὸ μείζον τμῆμα τῆς ἀκτίνος
 διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (Γεωμ. βιβλ. 4,
 πρό. 5)· ἐὰν λοιπὸν γένῃ ἡ ἀκτὶς ἴση μὲ 1, θέλομεν ἔχει
 $1 : 2\chi :: 2\chi : 1 - 2\chi$. Ἐντεῦθεν $4\chi^2 = 1 - 2\chi$ καὶ λύ-
 οντες τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν χ
 ἢ $\eta\mu 20^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

Ἡ τιμὴ αὕτη ὑψωθείσα εἰς τετράγωνον, δίδει $\eta\mu^2 20^\circ$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$$
 λοιπὸν $1 - \eta\mu^2 20^\circ$, ἢ $\sigmaυν^2 20^\circ = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$.

Ἀλλὰ $\sigmaυν^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha = \sigmaυν 2\alpha$, λοιπὸν $\sigmaυν 40^\circ$ ἢ $\eta\mu 60^\circ =$

$$\frac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$
.

Ἦδη ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τοῦ ἀρ. κα' γένῃ $P = 1$,
 $\alpha = 20^\circ$, καὶ $\eta\mu \alpha = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$, θέλει συναχθῇ

$$\eta\mu 10^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5}) - \sqrt{(5 - \sqrt{5})}}$$

$$\sigmaυν 10^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
.

Ἐὰν μετὰ ταῦτα εἰς τοὺς ἰδίους τύπους κάμωμεν
 $\alpha = 60^\circ$, καὶ $\eta\mu \alpha = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$, θέλομεν ἔχει,

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$

$$\sigmaυν 30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$

Διὰ τῶν τιμῶν τούτων καὶ ἐκείνων τοῦ ἡμ⁵⁰° καὶ ἡμ¹⁰⁰°, δυνατόν νὰ σχηματισθῇ ὁ ἀκόλουθος πίναξ.

$$\eta\mu 0^\circ = \sigma\upsilon\nu 100^\circ = 0.$$

$$\eta\mu 10^\circ = \sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 20^\circ = \sigma\upsilon\nu 80^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$$

$$\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 70^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 40^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 50^\circ = \sigma\upsilon\nu 50^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 40^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(1 + \sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 70^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 80^\circ = \sigma\upsilon\nu 20^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 90^\circ = \sigma\upsilon\nu 10^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$

$$\eta\mu 100^\circ = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἡμποροῦν ἀκόρη νὰ ἀπλουστευθῶσι (se simplifier), διότι ἔχομεν $\sqrt{(3 + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{(3 - \sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ὅθεν βλέπομεν ὅτι θεωροῦντες ὡς γνωστὰς $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, καὶ $\sqrt{10}$, δὲν μένει νὰ κάμωμεν παρὰ τέσσαρας ἐξαγωγὰς τετραγωνικῶν ριζῶν διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων ὅλων τῶν πολλαπλασίων τούτων τῶν 10°.

κγ'. Ἀπὸ τοὺς τύπους τούτους ἐξάγονται δύο ἀξιοσημεῖωτοι συνέπαιαι. 1.ον ἐπειδὴ τὸ ἡμ⁴⁰° εἶναι ἡ χορδὴ τῶν 80°, ἥ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου, διὰ τοῦτο ἡ πλευρὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ καὶ τὸ τετράγωνόν της μὲ $\frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5})$. Ἡ πλευρὰ τοῦ κα-

νονικοῦ δεκαγώνου = 2ἡμ²⁰° = $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, τὸ τετράγωνόν της = $\frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})$. ἀλλὰ $\frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})$. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος πλεον τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

Εντεῦθεν ἔπεται ὅτι γνωρίζοντες τὴν ἀκτὶνα ἐνὸς κύκλου καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου, θυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου· διότι ἡ πλευρὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποῦν ἡ ἀκτὶς καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἦθελον εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

2.^{ον} Μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων τῶν περιττῶν δεκαδικῶν διαιρέσεων τοῦ τεταρτημορίου, ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθος σχέσις

$$\eta\mu 90^{\circ} + \eta\mu 30^{\circ} + \eta\mu 10^{\circ} = \eta\mu 50^{\circ} + \eta\mu 70^{\circ},$$

αἱ δὲ ἄρτιαι διαιρέσεις δίδουν παρομοίως $\eta\mu 60^{\circ} = \eta\mu 20^{\circ} + \frac{1}{2}$. Πλὴν οἱ τύποι οὗτοι εἶναι μερικαὶ περιστάσεις, καὶ ἡμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὅσωνδήποτε μοιρῶν εἶναι· τὸξον τι χ , ἔχομεν $\eta\mu (100^{\circ} - \chi) + \eta\mu (20^{\circ} + \chi) + \eta\mu (20^{\circ} - \chi) = \eta\mu (60^{\circ} - \chi) + \eta\mu (60^{\circ} + \chi)$.

Τῷ ὄντι, ἐὰν προσθέσωμεν τὸν πρῶτον καὶ δεῦτερον τύπον τοῦ ἰθ' ἄρθρου, εὐρίσκομεν $\eta\mu (\alpha + \beta) + \eta\mu (\alpha - \beta) = 2 \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta$ · ὁ τύπος οὗτος δίδει,

$$\eta\mu (20^{\circ} + \chi) + \eta\mu (20^{\circ} - \chi) = 2 \eta\mu 20^{\circ} \sigma\upsilon\nu \chi$$

$$\eta\mu (60^{\circ} + \chi) + \eta\mu (60^{\circ} - \chi) = 2 \eta\mu 60^{\circ} \sigma\upsilon\nu \chi$$

Λοιπὸν, ἐπειδὴ $\eta\mu 60^{\circ} - \eta\mu 20^{\circ} = \frac{1}{2}$, καὶ $\sigma\upsilon\nu \chi = \eta\mu (100^{\circ} - \chi)$, αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις ἀφαιρεθεῖσαι ἡ μία τῆς ἄλλης δίδουν $\eta\mu (60^{\circ} + \chi) + \eta\mu (60^{\circ} - \chi) - \eta\mu (20^{\circ} + \chi) - \eta\mu (20^{\circ} - \chi) = \eta\mu (100^{\circ} - \chi)$ · τύπος ἐκ τοῦ ὑποῦν συνάγεται ὁ τῶν περιττῶν διαιρέσεων γενομένου $\chi = 10^{\circ}$ · ὁ δὲ τῶν ἁρτίων, γενομένου $\chi = 0$, καὶ ἐν γένει ὁ τύπος οὗτος εἶναι χρήσιμος διὰ τὴν βεβαίωσιν τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων.

κδ'. Ἐὰν εἰς τὸν πρῶτον καὶ τρίτον τῶν τύπων τοῦ ἄρθρου ἰθ', γένη $\beta = 2\alpha$, θέλει συναχθῆ.

$$\eta\mu 3\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha \eta\mu \alpha}{P}, \quad \sigma\upsilon\nu 3\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - \eta\mu 2\alpha \eta\mu \alpha}{P}$$

ἀντιστάγοντες εἰς τοὺς τύπους τούτους, ἀντὶ τοῦ ἡμ²α καὶ συν²α, τὰς εἰς τὸ κ' ἄρθρον εἰρηθεύσας τιμὰς, καὶ ἀπλουστεύοντες τὰ ἐξαγόμενα διὰ μέσου τῆς ἐξίσωσως ἡμ²α + συν²α = P², εὐρίσκόμεν

$$\begin{aligned}\eta\mu 3\alpha &= 3\eta\mu\alpha - \frac{4\eta\mu^3\alpha}{P^2} \\ \sigmaυν 3\alpha &= \frac{4\sigmaυν^3\alpha}{P^2} - 3\sigmaυν\alpha.\end{aligned}$$

Οἱ τύποι οὗτοι οἵτινες χρησιμεύουν διὰ τὸν τριπλασιασμὸν τῶν τόξων, ἡμποροῦν ὡσαύτως νὰ χρησιμεύσουν καὶ διὰ τὴν τριτομήν των ἢ τὴν εἰς τρία ἴσα μέρη διαίρεσίν των. Τῷ ὄντι ἐὰν γένη ἡμ 3α = γ καὶ ἡμ α = χ, θέλει προκύψει ἡ ἐξίσωσις γP² = 3P²χ - 4χ³, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τῆς χ. Οθεν βλέπομεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας, ἀναλυτικῶς θεωρούμενον, εἶναι τοῦ τρίτου θαθμοῦ.

Εὰν εἰς τοὺς ἰδίους τύπους τοῦ ἄρθρου ιθ', κάμωμεν διαφορικῶς β' = 3α, β' = 4α, κτλ. θέλομεν ἔχει τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων 4α, 5α, κτλ. ἐν γένει, δηλαδὴ, τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων τοῦ α. Ἀντιστρόφως οἱ τύποι οἱ ὅποιοι χρησιμεύουν διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν τόξων, δίδουν τὰς ἐξισώσεις διὰ τὴν διαίρεσιν δεδομένου τόξου εἰς ἴσα μέρη· τοῦτ' ἔστι διὰ τὴν προσδιορίσιν τοῦ ἡμ α ἢ συν α γνωστοῦ τοῦ ἡμ 3α ἢ συν 3α.

κε'. Ἀς ἀναπτύξωμεν ἀκόμη τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ 5α καὶ συν 5α, καὶ πρὸς τοῦτο ἅς λάβωμεν τοὺς τύπους

$$\begin{aligned}\eta\mu(3\alpha + 2\alpha) &= \frac{\eta\mu 3\alpha \sigmaυν 2\alpha + \sigmaυν 3\alpha \eta\mu 2\alpha}{P} \\ \sigmaυν(3\alpha + 2\alpha) &= \frac{\sigmaυν 3\alpha \sigmaυν 2\alpha - \eta\mu 3\alpha \eta\mu 2\alpha}{P}\end{aligned}$$

Εάν ἀντεισάξωμεν τὰς ἡδὴ εὐρεθείσας τιμὰς εἰς τὰς
 ἡμῶν καὶ καδ', θελομεν ἔχει, μετὰ τὰς ἀναγωγὰς,

$$\begin{aligned} \eta\mu^5\alpha &= 5\eta\mu\alpha - \frac{20\eta\mu^3\alpha}{p^2} + \frac{16\eta\mu^5\alpha}{p^4} \\ \text{συν}5\alpha &= 5\sigma\upsilon\nu\alpha - \frac{20\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{p^2} + \frac{16\sigma\upsilon\nu^5\alpha}{p^4} \end{aligned}$$

Οθεν βλέπομεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς πεντατομῆς
 τῆς γωνίας ἤθελεν εἶναι τοῦ ε' βαθμοῦ, καὶ οὕτως τοῦ ζ,
 ια', ιγ' διὰ τὰς διαιρέσεις τῆς γωνίας εἰς ἑπτὰ, ἔνδεκα,
 δεκατρία ἴσα μέρη, κτλ.

κς'. Ἀς ζητηθῇ, παραδείγματος χάριν, ἡ ὡς ἔγγιστα
 τιμὴ τοῦ ἡμ¹⁰ μέχρι δεκαπέντε δεκαδικῶν, τὸ ὅποιον
 ζήτημα ἔμπορεῖ νὰ ᾖναι ὠφέλιμον διὰ τὴν κατασκευὴν
 τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων. Ἡ εἰς ἄρθ. κβ' εὐρεθεῖσα
 ἔκφρασις τοῦ ἡμ¹⁰, ἀναγθεῖσα εἰς δεκαδικὰ, ὑποτεθείσας
 τῆς ἀκτίος $P = 1$, δίδει ἡμ¹⁰ = 0.156434465040231·
 ἐντεῦθεν, διὰ τοῦ τύπου τοῦ ἀρ κα', συνάγεται ἡμ⁵ =
 0.078459095727845.

Εἰσω τώρα ἡμ¹ = χ , πρέπει, διὰ νὰ εὕρωμεν χ νὰ
 λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$16\chi^5 - 20\chi^3 + 5\chi = 0.078459095727845.$$

Εάν, συντομίας χάριν, κάμωμεν τὸ δεύτερον μέλος = γ ,
 θελομεν ἔχει περίπου $5\chi - 20\chi^3 = \gamma$, καὶ $\chi = \frac{1}{5}\gamma + 4$
 $(\frac{1}{5}\gamma)^3$. Ἀλλὰ $\frac{1}{5}\gamma = 0.0156918191$ καὶ $4(\frac{1}{5}\gamma)^3 = 0.$
 000015456· ἔχομεν λοιπὸν διὰ πρώτην προσέγγισιν, $\chi = 0.$
 015707275, τιμὴ ἥτις εἶναι ἐσφαλμένη εἰς τὸ ὄγδον
 δεκαδικὸν ψηφίον. Διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν ἀκριβεστέραν, κα-
 λοῦμεν $\chi = 0.0157073 + \psi$ ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν
 ταύτην εἰς τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν, καὶ παραμελοῦντες
 τὸ τετράγωνον καὶ τὰς ἄλλας δυνάμεις τοῦ ψ , θελομεν
 ἔχει 0.078459009424927 + 4.9852017 ψ = 0.078
 459095727845· ὅθεν $\psi = 0.000000173118207$, καὶ
 χ ἢ ἡμ¹ = 0.0157073173118207.

Απὸ τὸ ἡμίτονον τῆς 1" ἢ τῶν 100', ἤθελον παρομοίως συναχθῇ τὰ ἡμίτονα τῶν 50', τῶν 10', τῶν 5', καὶ τέλος τὸ τοῦ 1'.

κζ'. Απὸ τοὺς τύπους τοῦ ιθ' ἄρθρου ἐξάγονται πάμπολλαι συνέπειαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρωμεν τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει ἐν πρώτοις ἐξάγονται οἱ ἀκολουθοῦντες ἑσάρεις τύποι,

$$\eta\mu. \alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2} P \eta\mu.(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} P \eta\mu.(\alpha - \beta)$$

$$\eta\mu. \beta \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2} P \eta\mu.(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} P \eta\mu.(\alpha - \beta)$$

$$\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{2} P \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} P \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu. \alpha \eta\mu. \beta = \frac{1}{2} P \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} P \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

Χρήσιμοι διὰ τὴν τροπὴν ἐνὸς γινομένου πολλῶν ἡμιτόνων ἢ συνημιτόνων, εἰς ἡμίτονα καὶ συνημίτονα γραμμικὰ ἢ πολλαπλασιαζόμενα μόνον ἐπὶ σταθερῶν.

κη'. Εἰς τοὺς τύπους τούτους γένη $\alpha + \beta = \pi$, $\alpha - \beta = \kappa$, καὶ τοῦτο δίδει $\alpha = \frac{\pi + \kappa}{2}$, $\beta = \frac{\pi - \kappa}{2}$, θέλει συναχθῇ,

$$\eta\mu. \pi + \eta\mu. \kappa = \frac{2}{P} \eta\mu. \frac{1}{2} (\pi + \kappa) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\pi - \kappa)$$

$$\eta\mu. \pi - \eta\mu. \kappa = \frac{2}{P} \eta\mu. \frac{1}{2} (\pi - \kappa) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\pi + \kappa)$$

$$\sigma\upsilon\nu \pi + \sigma\upsilon\nu \kappa = \frac{2}{P} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\pi + \kappa) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\pi - \kappa)$$

$$\sigma\upsilon\nu \kappa - \sigma\upsilon\nu \pi = \frac{2}{P} \eta\mu. \frac{1}{2} (\pi + \kappa) \eta\mu. \frac{1}{2} (\pi - \kappa)$$

Νέοι τύποι τοὺς ὁποίους συγνάκις μεταχειρίζομεθα εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ νὰ ἀνάξωμεν δύο ὅρους εἰς ἓνα μόνον.

κθ'. Τέλος ἀπὸ τοὺς τελευταίους τούτους, διαίρουντες καὶ ἀποβλέποντες εἰς τὸ ὅτι $\frac{\eta\mu. \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{\epsilon\varphi \alpha}{P} = \frac{P}{\sigma\varphi \alpha}$, συνάγομεν τοὺς ἀκολουθοῦντας:

$$\frac{\eta\mu\pi + \eta\mu\kappa}{\eta\mu\pi - \eta\mu\kappa} = \frac{\eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa)} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}$$

$$\frac{\eta\mu\pi - \eta\mu\kappa}{\eta\mu\pi + \eta\mu\kappa} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}$$

$$\frac{\eta\mu\pi - \eta\mu\kappa}{\csc\pi + \csc\kappa} = \frac{\eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}$$

$$\csc\pi + \csc\kappa = \csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa) \quad P$$

$$\frac{\eta\mu\pi + \eta\mu\kappa}{\csc\kappa - \csc\pi} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa)} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{P}$$

$$\csc\kappa - \csc\pi = \eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa) \quad P$$

$$\frac{\eta\mu\pi - \eta\mu\kappa}{\csc\pi + \csc\kappa} = \frac{\eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}$$

$$\csc\pi + \csc\kappa = \csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa) \quad P$$

$$\frac{\eta\mu\pi - \eta\mu\kappa}{\csc\kappa - \csc\pi} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)} = \frac{\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)}{\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)}$$

$$\csc\kappa - \csc\pi = \eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa) \quad P$$

$$\csc\pi + \csc\kappa = \csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa) \csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa) = \csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)$$

$$\csc\kappa - \csc\pi = \eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa) \eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa) = \csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)$$

$$\eta\mu(\pi + \kappa) = 2\eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa) = \csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa)$$

$$\eta\mu\pi + \eta\mu\kappa = 2\eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa) = \csc\frac{1}{2}(\pi - \kappa)$$

$$\eta\mu(\pi + \kappa) = 2\eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa) = \eta\mu\frac{1}{2}(\pi + \kappa)$$

$$\eta\mu\pi - \eta\mu\kappa = 2\eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa)\csc\frac{1}{2}(\pi + \kappa) = \eta\mu\frac{1}{2}(\pi - \kappa)$$

Τύποι οἷτινες ἐκφράζουσι τόσα θεωρήματα· ἐκ τοῦ πρώτου ἐπεται ὅτι τῇ ἁθροίσμῳ τῶν ἡμιτόνων δύο τόξων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων ἡμιτόνων, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμισυθροίσματος τῶν τόξων εἶναι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν.

λ'. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τῶν τριῶν προηγουμένων ἀρ-
θρων κάμωμεν $\beta = \alpha$, ἢ $\kappa = 0$, θελομεν ἔχει τὰ ἀκόλουθα
ἑξαγόμενα :

$$\csc^2\alpha = P^2 + P \csc 2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = P^2 - P \csc 2\alpha$$

$$P + \csc\pi = \frac{\csc^2\frac{1}{2}\pi}{p}$$

$$\begin{aligned}
 P - \sigma \nu \pi &= \frac{2 \eta \mu^2 \frac{1}{2} \pi}{P} \\
 \eta \mu \pi &= \frac{2 \eta \mu^{\frac{1}{2}} \pi \sigma \nu \frac{1}{2} \pi}{P} \\
 \frac{\eta \mu \pi}{P + \sigma \nu \pi} &= \frac{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \pi}{P} = \frac{P}{\sigma \varphi^{\frac{1}{2}} \pi} \\
 \frac{\eta \mu \pi}{P - \sigma \nu \pi} &= \frac{\sigma \varphi^{\frac{1}{2}} \pi}{P} = \frac{P}{\epsilon \varphi^{\frac{1}{2}} \pi} \\
 \frac{P + \sigma \nu \pi}{P - \sigma \nu \pi} &= \frac{\sigma \varphi^2 \frac{1}{2} \pi}{P^2} = \frac{P^2}{\epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \pi}
 \end{aligned}$$

λα'. Διὰ νὰ ἀναπτύξωμεν καὶ μερικοὺς τύπους ὡς πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, ἃς θεωρήσωμεν τὴν ἑκφρασιν ἐφ $(\alpha + \beta) = \frac{P \eta \mu (\alpha + \beta)}{\sigma \nu (\alpha + \beta)}$, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀντείσταξις τῶν τιμῶν τοῦ $\eta \mu (\alpha + \beta)$ καὶ $\sigma \nu (\alpha + \beta)$, δίδει

$$\epsilon \varphi (\alpha + \beta) = \frac{P (\eta \mu \alpha \sigma \nu \beta + \eta \mu \beta \sigma \nu \alpha)}{\sigma \nu \alpha \sigma \nu \beta - \eta \mu \beta \eta \mu \alpha}$$

· Ἀλλὰ $\frac{\eta \mu \alpha}{\sigma \nu \alpha} = \frac{P \epsilon \varphi \alpha}{P}$ ἢ $\eta \mu \alpha = \frac{\sigma \nu \alpha \epsilon \varphi \alpha}{P}$ καὶ $\eta \mu \beta = \frac{\sigma \nu \beta \epsilon \varphi \beta}{P}$. ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς καὶ διαιροῦντες

ἔπειτα ὅλους τοὺς ὅρους διὰ $\sigma \nu \alpha \sigma \nu \beta$, θέλομεν ἔχει

$$\epsilon \varphi (\alpha + \beta) = \frac{P^2 (\epsilon \varphi \alpha + \epsilon \varphi \beta)}{P^2 - \epsilon \varphi \alpha \epsilon \varphi \beta}$$

Αὕτη εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων, ἐκφραζομένη διὰ τῶν ἐφαπτομένων ἐκάστου τούτων τῶν τόξων. Ομοίως ἠθέλαμεν εὔρη διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς των

$$\epsilon \varphi (\alpha - \beta) = \frac{P^2 (\epsilon \varphi \alpha - \epsilon \varphi \beta)}{P^2 + \epsilon \varphi \alpha \epsilon \varphi \beta}$$

Εἶω $\beta = \alpha$, ἔχομεν διὰ τὸν διπλασιασμὸν τῶν τόξων τὸν τύπον

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2P^2 \epsilon\varphi \alpha}{P^2 - \epsilon\varphi \alpha}$$

καὶ ἐντεῦθεν

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{P^2}{\epsilon\varphi 2\alpha} = \frac{P^2}{2\epsilon\varphi \alpha} - \frac{1}{2} \sigma\varphi \alpha = \frac{1}{2} \sigma\varphi \alpha - \frac{1}{2} \epsilon\varphi \alpha.$$

Εἶω $\beta = 2\alpha$, θέλομεν ἔχει διὰ τὸν τριπλασιασμὸν τῶν τὸν τύπον :

$$\epsilon\varphi 3\alpha = \frac{P^2 (\epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi 2\alpha)}{P^2 - \epsilon\varphi \alpha \epsilon\varphi 2\alpha}$$

ὣς μετὰ τὴν ἀντεισαγωγὴν τῆς τιμῆς τῆς $\epsilon\varphi 2\alpha$, τρέπεται εἰς

$$\epsilon\varphi 3\alpha = \frac{3P^2 \epsilon\varphi \alpha - \epsilon\varphi^3 \alpha}{P^2 - 3 \epsilon\varphi^2 \alpha}$$

λβ'. Ἡ Ανάπτυξις τῶν τριγωνομετρικῶν τύπων, θεωρουμένη καθ' ὅλην τῆς τὴν γενικότητα, σχηματίζει ἀξιόλογον κλάδον τῆς ἀναλύσεως, περὶ τοῦ ὁποίου ἡμπορεῖ τις νὰ συμβουλευθῇ τὸ ἔξοχον σύγγραμμα τοῦ Εὐλήρου (Euler), ἐπιγραφόμενον *introduction in analysin infinitorum* (εἰσαγωγὴ εἰς τὴν τῶν Ἀπειρόστων ἀνάλυσιν) ἢ τὴν μετάφρασίν του ὑπὸ τοῦ K. Λαβέζου (Labez). Κρίνομεν ὅμως ἀναγκαῖον νὰ ἀποδείξωμεν ἀκόμῃ τοὺς τύπους οἱ ὅποιοι χρησιμεύουν νὰ ἐκφράσουν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ τόξου, τύποι τῶν ὁποίων ἡ γνῶσις ὑποτίθεται εἰς τὴν Ε' σημείωσιν, καὶ οἱ ὅποιοι περιπλέον εἶναι ἀναγκαῖοι διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων.

Καὶ κατὰ πρῶτον ὑποθετίσης τῆς ἀκτίνος $= 1$, ἡ ὁποία ὑπόθεσις δὲν μεταβάλλει τὴν γενικότητα τῶν ἐξαγόμενων, ἔχομεν τὸν τύπον $\sigma\varphi^2 A + \eta\mu^2 A = 1$. ὅς καλέσωμεν διὰ μίαν στιγμὴν $\sigma\varphi^2 A + \eta\mu^2 A = 0$, συνάγομεν

$\text{συν}^2\Lambda' = -\dot{\eta}\mu^2\Lambda'$ ὅθεν $\sigma\Lambda = \pm \dot{\eta}\mu\Lambda\sqrt{-1}$. ἐπομένως
 $\sigma\Lambda + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu\Lambda$, $\text{συν}\Lambda - \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu\Lambda$ εἶναι οἱ δύο πα-
 ράγοντες τοῦ πρώτου μέλους τῆς εἰρημένης ἐξισώσεως.
 λοιπὸν τὸ πρῶτον τοῦτο μέλος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν
 δύο τούτων κατ'ἐπίνοιαν παραγόντων· ὁμοίως διὰ ἓν ἄλλο
 τόξον B, ἡλὲλαμεν ἔχει, $\text{συν}B + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu B$, $\text{συν}B - \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu B$
 διὰ τοὺς δύο παράγοντας τοῦ δυωνύμου $\text{συν}^2B +$
 $\dot{\eta}\mu^2B$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ δύο ὁμοίους παρὰ-
 γοντας $\text{συν}\Lambda + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu\Lambda$, $\text{συν}B + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu B$, τὸ γινό-
 μενὸν των θέλει εἶναι $\text{συν}\Lambda\text{συν}B - \dot{\eta}\mu\Lambda\dot{\eta}\mu B + (\dot{\eta}\mu\Lambda\text{συν}B$
 $+ \dot{\eta}\mu B\text{συν}\Lambda)\sqrt{-1}$, καὶ ἐπομένως ἄγεται εἰς τὴν μορ-
 φὴν $\text{συν}(\Lambda + B) + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu(\Lambda + B)$, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοία
 μὲ τὴν μορφὴν ἐκάστου τῶν παραγόντων. Ἐν γένει λοι-
 πὸν ἔχομεν

$$(\text{συν}\Lambda + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu\Lambda)(\text{συν}B + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu B) = \text{συν}(\Lambda + B) + \sqrt{-1}\dot{\eta}\mu(\Lambda + B).$$

ἔσω $A + B = A'$, καὶ ἄς πολλαπλασιάσωμεν $\text{συν}A' + \dot{\eta}\mu$
 $A'\sqrt{-1}$, ἐπὶ $\text{συν}\Gamma + \dot{\eta}\mu\Gamma\sqrt{-1}$, εὐρίσκομεν ὡσαύτως

$$\begin{aligned}
 & (\text{συν}A' + \dot{\eta}\mu A'\sqrt{-1})(\text{συν}\Gamma + \dot{\eta}\mu\Gamma\sqrt{-1}) \\
 & = \text{συν}(A' + \Gamma) + \dot{\eta}\mu(A' + \Gamma)\sqrt{-1}
 \end{aligned}$$

καὶ ἐπομένως

$$(\text{συν}A + \dot{\eta}\mu A'\sqrt{-1})(\text{συν}B + \dot{\eta}\mu B'\sqrt{-1})(\text{συν}\Gamma + \dot{\eta}\mu\Gamma\sqrt{-1}) = \text{συν}(A + B + \Gamma) + \dot{\eta}\mu(A + B + \Gamma)\sqrt{-1}.$$

Ἐν γένει ἔσω εἰς ἀριθμὸς ν· τόξων A, B, Γ . . . Π,
 ἔχομεν προφανῶς τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον

$$(\text{συν}A + \dot{\eta}\mu A'\sqrt{-1})(\text{συν}B + \dot{\eta}\mu B'\sqrt{-1}) \dots (\text{συν}\Pi + \dot{\eta}\mu\Pi'\sqrt{-1}) = \text{συν}(A + B + \Gamma + \dots + \Pi) + \dot{\eta}\mu(\Lambda + B + \Gamma + \dots + \Pi)\sqrt{-1}$$

Εἶναι ἀξιοπαρατήρητον ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν
 τοιούτων ποσοτήτων ἐκτελεῖται διὰ τῆς προσθέσεως τῶν
 τόξων, καθὼς ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς
 προσθέσεως τῶν λογαρίθμων των· ἐὰν τῶρα εἰς τὴν ἀνω-

τέρω εξίσωσιν καλέσωμεν $A = B = \Gamma \dots = \Pi$
 συνάγομεν $A + B + \Gamma + \dots + \Pi = nA$ · επομένως
 $(\text{συν}A + \text{—} \text{ήμ}A)^n = \text{συν. } nA + \text{—} \text{ήμ. } nA \quad (1)$

Επειδή ὁ τύπος οὗτος εἶναι ἀληθής, ὅποιον καὶ ἂν
 ᾖαι τὸ τόξον A , δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ
 $A, -A$, καὶ εὐθυμούμενοι ὅτι $\text{συν}(-A) = \text{συν}A$, ἢμ. $(-A)$
 $= -\text{ήμ. } A$, συνάγομεν τοῦτον τὸν νέον τύπον

$$(\text{συν}A - \text{—} \text{ήμ}A)^n = \text{συν. } nA - \text{—} \text{ήμ. } nA \quad (2)$$

προσθαφαιροῦντες τὰς δύο ταύτας εξισώσεις ἐκ τῶν ὁ-
 ποίων ἡ μία εἶναι συνέπεια τῆς ἄλλης, συνάγομεν τὰς
 τιμὰς τοῦ ἢμ. nA καὶ $\text{συν. } nA$: τοῦτ' ἔστι

$$\text{συν. } nA = \frac{1}{2}(\text{συν}A + \text{—} \text{ήμ}A)^n + \frac{1}{2}(\text{συν}A - \text{—} \text{ήμ}A)^n$$

$$\text{ήμ. } nA = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\text{συν}A + \text{—} \text{ήμ}A)^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\text{συν}A - \text{—} \text{ήμ}A)^n$$

λγ'. Εὖν τὰς αὐτὰς ποσότητες θέλωμεν νὰ ἐκφράσω-
 μεν διὰ σειρῶν, πρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν διὰ τοῦ τύπου
 τοῦ δυωνύμου $(\text{συν}A + \text{—} \text{ήμ}A)^n$ · ἐκτελοῦντες τὴν
 ἀνάπτυξιν ταύτην εὐρίσκομεν

$$\begin{aligned} & \text{συν}^n A + \frac{n}{1} \text{συν}^{n-1} A \text{—} \text{ήμ. } A \text{—} \text{—} \text{—} \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \text{συν}^{n-2} A \text{—} \text{ήμ.}^2 A \\ & - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{συν}^{n-3} A \text{—} \text{ήμ.}^3 A \text{—} \text{—} \text{—} \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{συν}^{n-4} A \text{—} \text{ήμ.}^4 A + \text{κτλ.} \end{aligned}$$

Οθεν βλέπομεν ὅτι τὸ ξετύλιγμα τοῦτο σύγκειται ἀπὸ
 δύο ξεχωριστὰ μέρη: τὸ ἓν εἶναι πραγματικὸν καὶ προέρ-
 χεται ἀπὸ τὴν ἔνωσιν ὅλων τῶν ὄρων τῶν ἀνεξαρτήτων
 ἀπὸ $\text{—} \text{—} \text{—}$ · τὸ ἄλλο κατ' ἐπίνοιαν, καὶ προέρχεται ἀπὸ
 τὴν ἔνωσιν τῶν ὄρων οἵτινες περιέχουν $\text{—} \text{—} \text{—}$ · ἀπὸ ἄλλο
 μέρος ἐπειδὴ τὸ ξετύλιγμα τοῦτο ἐκφράζει τὴν τιμὴν
 τῆς ἐκφράσεως $\text{συν. } nA + \text{—} \text{—} \text{—} \text{ήμ. } nA$ · διὰ τοῦτο τὸ

πραγματικὸν μέρος τῆς ἐκφράσεως πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πραγματικὸν τοῦ ζετυλίγματος, καὶ τὸ κατ' ἐπίνοιαν μὲ τὸ κατ' ἐπίνοιαν ἔχομεν λοιπὸν

$$\text{συν.} \nu A = \text{συν}^{\nu} A - \frac{\nu \cdot \nu - 1}{1 \cdot 2} \text{συν}^{\nu-2} A \dot{\mu}^2 A + \frac{\nu \cdot \nu - 1 \cdot \nu - 2 \cdot \nu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\text{συν}^{\nu-4} A \dot{\mu}^4 A - \text{κ.τ.λ.}$$

$$\dot{\mu}. \nu A = \nu \text{συν}^{\nu-1} A \dot{\mu} A - \frac{\nu \cdot \nu - 1 \cdot \nu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{συν}^{\nu-3} A \dot{\mu}^3 A + \text{κτλ},$$

σειραὶ τῶν ὁποίων ὁ νόμος εἶναι εὐκατάληπτος, καὶ διὰ τῶν ὁποίων εὐρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑνὸς τόξου πολλαπλασίου τοῦ α με περισσοτέραν ταχύτητα παρὰ διὰ τῶν ἐργασιῶν τὰς ὁποίας ἐσημειώσαμεν εἰς τὸ κδ' ἄρθρον.

λδ'. Ἐπειδὴ ἔχομεν $\dot{\mu}. A = \text{συν} A \epsilon \phi A$, ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω σειρὰς ἀντὶ $\dot{\mu}. A$ θέσωμεν ταύτην τὴν τιμὴν, καὶ ἀντὶ τῶν διαφορῶν δυνάμεων τοῦ $\dot{\mu}. A$, τὰς δυνάμεις τῆς ἰδίας εὐρίσκομεν

$$\text{συν.} \nu A = \text{συν}^{\nu} A \left(1 - \frac{\nu \cdot \nu - 1}{1 \cdot 2} \epsilon \phi^2 A + \frac{\nu \cdot \nu - 1 \cdot \nu - 2 \cdot \nu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \epsilon \phi^4 A - \text{κτλ} \right)$$

$$\dot{\mu}. \nu A = \text{συν}^{\nu} A \left(\frac{\nu}{1} \epsilon \phi A - \frac{\nu \cdot \nu - 1 \cdot \nu - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \epsilon \phi^3 A + \text{κτλ} \right)$$

Ἐστω $\nu = \frac{\chi}{\Delta}$. ἀντεισάγοντες ταύτην τὴν τιμὴν, καὶ φυλάττοντες μ' ὅλον τοῦτο τὸν παράγοντα $\text{συν}^{\nu} A$, θελομεν ἔχει.

$$\text{συν.} \chi = \text{συν}^{\nu} A \left(1 - \frac{\chi \cdot \chi - \Delta}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\epsilon \phi^2 A}{\Delta^2} + \frac{\chi \cdot \chi - \Delta \cdot \chi - 2 \Delta \cdot \chi - 3 \Delta}{\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\epsilon \phi^4 A}{\Delta^4} - \text{κτλ} \right)$$

$$\dot{\mu}. \chi = \text{συν}^{\nu} A \left(\frac{\chi}{1} \cdot \frac{\epsilon \phi A}{\Delta} - \frac{\chi \cdot \chi - \Delta \cdot \chi - 2 \Delta}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\epsilon \phi^3 A}{\Delta^3} + \text{κτλ.} \right)$$

Ἄς σημειώσωμεν τώρα ὅτι ἐπειδὴ αἱ τρεῖς ποσότητες Λ , χ καὶ ν συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\nu\Lambda = \chi$, δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν ν καὶ Λ , ὥστε τὸ γινόμενόν των χ νὰ μένῃ σταθερόν· διότι ἐὰν λάβωμεν παραδείγματος χάριν, διὰ Λ μίαν σειρὰν τιμῶν κατ'ἀρέσκειαν, αἱ ἀντικείμεναι τιμαὶ τοῦ ν εἰς ταύτας τὰς τιμὰς τοῦ Λ καὶ εἰς τὴν σταθερὰν τιμὴν τοῦ χ , συνάγονται ἐκ τῆς σχέσεως $\nu = \frac{\chi}{\Lambda}$. Ὅθεν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν Λ κατ'ἀρέσκειαν. Εἰς ὑποθέσωμεν Λ πολλὰ μικρόν, τότε $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda}$ ἤγουν ὁ λόγος τοῦ τόξου Λ πρὸς τὴν ἐφαπτομένην του, πολλὰ ὀλίγον τῆς μονάδος θέλει διαφέρει, διότι ἡ ἐφαπτομένη τόξου μικροτάτου εἶναι σχεδὸν ἴση μὲ τὸ τόξον. Μ' ὅλον τοῦτο ἐν ὅσῳ τὸ τόξον δὲν εἶναι μὴδὲν ἔχομεν $\epsilon\phi\Lambda > \Lambda$ · καὶ τοῦτο εἶναι φανερόν· διότι (σχ. 1) τὸ τρίγωνον $\Lambda\Gamma\Gamma$ εἶναι πρὸς τὸν τομέα $\Lambda\Gamma\Gamma :: AT \times \frac{1}{2}AG : AM \times \frac{1}{2}AG :: AT : AM$ καὶ ἐπειδὴ $AT\Gamma > \Lambda\Gamma\Gamma$, ἀκολουθεῖ ὅτι $AT > AM$ · συνάγομεν λοιπὸν $\epsilon\phi\Lambda > \Lambda$ ἢ $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda} > 1$ · ἐνταυτῷ ἔχομεν $\Lambda > \eta\mu\Lambda$ · καὶ τοῦτο διότι τὸ τόξον MAN εἶναι μεῖζον τῆς χορδῆς του MN · λοιπὸν AN ἥμισυ τοῦ τόξου εἶναι μεῖζον τῆς MI ἡμισείας τῆς χορδῆς· ὅθεν ἐν ὅσῳ Λ δὲν εἶναι μὴδὲν ἔχομεν $\Lambda > \eta\mu\Lambda$ · ἐπειδὴ δὲ $\epsilon\phi\Lambda = \epsilon\phi\Lambda$ διὰ τοῦτο $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda} < \frac{\epsilon\phi\Lambda}{\eta\mu\Lambda}$, ἢ $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda} < \frac{1}{\sin\Lambda}$ · ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda}$ πάντοτε περιέχεται μεταξύ τῶν ὁρίων 1 καὶ $\frac{1}{\sin\Lambda}$ · καὶ ὅτι ἀκταπαύσως τείνει πρὸς τὴν μονάδα ὅσον $\sin\Lambda$ πλησιάζει πρὸς αὐτήν, ἢ ὅσον τὸ τόξον Λ πλησιάζει νὰ γένῃ πάσης δεδομένης ποσότητος ἔλασσην· ὅταν λοιπὸν

Λ φθάσῃ εἰς τοῦτο τὸ ὅριον, τότε ὁ λόγος $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda}$ ἀκριβῶς εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα: μὲ ἄλλους ὅρους ὅταν $\Lambda=0$, τότε $\text{συν}\Lambda=1$ · καὶ $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda}=1$. Κάμνοντες λοιπὸν $\Lambda=0$, θέλομεν ἔχει

$$\text{συν}\chi = \text{συν}^v\Lambda \left(1 - \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\chi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\chi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \kappa\tau\lambda \right)$$

$$\eta\mu\chi = \text{συν}^v\Lambda \left(\chi - \frac{\chi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\chi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \kappa\tau\lambda \right)$$

Μένει νὰ ἰδῶμεν τί γίνεται $\text{συν}^v\Lambda$, ὅταν Λ σμικρύνῃ μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον, καὶ τέλος γένη μηδὲν. Τώρα ἔχομεν

$$\frac{1}{\text{συν}^2\Lambda} = \text{δια}^2\Lambda = 1 + \epsilon\phi^2\Lambda \text{ λοιπὸν } \text{συν}\Lambda = (1 + \epsilon\phi^2\Lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{λοιπὸν } \text{συν}^v\Lambda = (1 + \epsilon\phi^2\Lambda)^{-\frac{v}{2}} = 1 - \frac{v}{2}\epsilon\phi^2\Lambda + \frac{v \cdot v-1}{2 \cdot 4}\epsilon\phi^4\Lambda$$

— $\kappa\tau\lambda$. ἀντὶ v ἀττεισάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{\chi}{\Lambda}$, θέλομεν ἔχει

$$\text{συν}^v\Lambda = 1 - \frac{\chi}{2}\Lambda \cdot \frac{\epsilon\phi^2\Lambda}{\Lambda^2} + \frac{\chi \cdot \chi + 2\Lambda}{2 \cdot 4}\Lambda^2 \cdot \frac{\epsilon\phi^4\Lambda}{\Lambda^4} - \kappa\tau\lambda.$$

Εἰν τῶρα ἐννοήσωμεν ὅτι Λ ἀδιακόπως σμικρύνει, ἐν ᾧ χ μένει τὸ αὐτὸ, ἡ τιμὴ τοῦ $\text{συν}^v\Lambda$ ἀδιακόπως πλησιάζει πρὸς τὴν μονάδα· καὶ τέλος, ὅταν $\Lambda=0$, τότε $\text{συν}^v\Lambda=1$ · ἐπειδὴ $\frac{\epsilon\phi\Lambda}{\Lambda}$ εἰς τὴν ἰδίαν ὑπόθεσιν $=1$. Λοι-

πὸν ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\text{συν}\chi = 1 - \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\chi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\chi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \kappa\tau\lambda.$$

$$\eta\mu\chi = \chi - \frac{\chi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\chi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \kappa\tau\lambda.$$

διὰ τῶν ὁποίων ἡμποροῦμεν νὰ λογαριάσωμεν τὸ ἡμί-

τονον καὶ τὸ συνημίτονον ἐνὸς τόξου ὅταν ἔχωμεν τὸ μῆκος του δεδομένου εἰς μέρη τῆς ἀκτίνος εἰλημμένης ὡς μονάδος.

Σημειώσεις. Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι τὸ ζετύλιγμα τοῦ συνημιτόνου περιέχει τὰς ἀρτίας δυνάμεις τοῦ τόξου· ἐκεῖνο δὲ τοῦ ἡμιτόνου τὰς περιττάς. Ὡς ὅντι ὅταν τὸ τόξον ἀλλάσῃ σημεῖον καὶ ἀπὸ θετικὸν γίνεται ἀρνητικόν, τὸ ἡμίτονόν του πάσχει τὴν ἰδίαν μεταβολὴν· πλὴν φυλάττει τὴν ἰδίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν, ὅταν τὸ τόξον ἄλλην μεταβολὴν δὲν πάσχη παρὰ τὴν τοῦ σημείου. Ἐπρεπε λοιπὸν καὶ τὸ ζετύλιγμα τοῦ ἡμιτόνου νὰ ἔχη τὴν αὐτὴν ιδιότητα. Ὡς τοῦτο ἀκολουθεῖ ὅταν τὸ ζετύλιγμα περιέχῃ μόνον περιττάς δυνάμεις τοῦ τόξου· ἐξ ἐναντίας ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλῃ σημεῖον, τὸ συνημίτονον ὅχι μόνον φυλάττει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν, ἀλλὰ καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἐκ τούτου ἐκεται ὅτι τὸ ζετύλιγμα τοῦ συνημιτόνου ἔπρεπε νὰ περιέχῃ μόνον ἀρτίας δυνάμεις τοῦ τόξου.

λε'. Αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ἡμποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ τρόπον σύντομον, διὰ τῶν ἐκθετικῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εὐθυμηθῶμεν ὅτι ἐὰν εἰς παριστάνῃ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὑπολοίπου ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος εἶναι ἡ μονὰς, ἔχομεν

$$e^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \text{κτλ.}$$

Εὰν, εἰς τοῦτον τὸν τύπον γένῃ $\omega = \chi \sqrt{-1}$, προκύπτει

$$\begin{aligned} \chi \sqrt{-1} &= 1 + \frac{\chi \sqrt{-1}}{1} - \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} - \frac{\chi^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\chi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &+ \frac{\chi^5 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \text{κτλ.} \end{aligned}$$

παρομοίως ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον τοῦ $\sqrt{-1}$,

$$\frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} = 1 - \frac{\sqrt{-1}}{1} - \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\chi^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\chi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\chi^5 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{κτλ.}$$

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν προσθαιροῦντες

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} + \frac{-\sqrt{-1}}{\varepsilon} &= 1 - \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\chi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{κτλ.} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} - \frac{-\sqrt{-1}}{\varepsilon} &= \chi - \frac{\chi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\chi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{κτλ.} \end{aligned}$$

σειραὶ τῶν ὁποίων τὰ δεύτερα μέλη εἶναι αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ διὰ συνχ καὶ ἡμχ. Λοιπὸν ἔχομεν

$$\begin{aligned} \text{συνχ} &= \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} + \frac{-\sqrt{-1}}{\varepsilon}, \quad \text{ἡμχ} = \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} - \frac{-\sqrt{-1}}{\varepsilon} \\ \text{ἔντεῦθεν, } \frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} - \frac{-\sqrt{-1}}{\varepsilon} &= \sqrt{-1} \cdot \frac{\text{ἡμχ}}{\text{συνχ}} = \sqrt{-1} \varepsilon \phi \chi \end{aligned}$$

τύπος τοῦ ὁποίου ἐκάμαμεν χρῆσιν εἰς τὴν Δ' σημείωσιν.

Οἱ αὐτοὶ τύποι δίδουν $\varepsilon \sqrt{-1} = \text{συνχ} + \sqrt{-1} \text{ἡμχ}$,
 $-\frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon} = \text{συνχ} - \sqrt{-1} \text{ἡμχ}$. λοιπὸν διαιροῦντες τὴν
 μίαν διὰ τῆς ἄλλης εὐρίσκομεν, $\varepsilon \sqrt{-1} =$
 $\frac{\text{συνχ} + \sqrt{-1} \text{ἡμχ}}{\text{συνχ} - \sqrt{-1} \text{ἡμχ}} = \frac{1 + \sqrt{-1} \varepsilon \phi \chi}{1 - \sqrt{-1} \varepsilon \phi \chi}$, ἢ λαμβάνοντες τοὺς λο-

γαριθμούς ἐκάστου μέλους, $\varepsilon \sqrt{-1} = \log \left(\frac{1 + \sqrt{-1} \varepsilon \phi \chi}{1 - \sqrt{-1} \varepsilon \phi \chi} \right)$.

Ἀλλ' εἶναι γνωστὸν ὅτι $\log \left(\frac{1 + \omega}{1 - \omega} \right) = 2\omega + \frac{2}{3}\omega^3 + \frac{2}{5}\omega^5 + \text{κτλ.}$ ἀντὶ ω θέτοντες λοιπὸν $\sqrt{-1} \varepsilon \phi \chi$, καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέρη διὰ $\varepsilon \sqrt{-1}$, εὐρίσκομεν

$$\chi = \epsilon\phi\chi - \frac{1}{3}\epsilon\phi^3\chi + \frac{1}{5}\epsilon\phi^5\chi - \frac{1}{7}\epsilon\phi^7\chi + \text{κτλ.}$$

Τύπος άπλούστατος, χρήσιμος διά τήν προσδιόρισιν τοῦ μήκους ἑνὸς τόξου ἢ ἐφαπτομένη τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστῇ, καὶ μικροτέρα μονάδος· διότι ὅταν αὕτη ᾖναι μείζων μονάδος, οἱ ὅροι τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς γίνονται πολλὰ μεγάλοι, καὶ ἡ σειρά δὲν εἶναι ποσῶς κατιοῦσα· καὶ τέλος γίνονται ἄπειροι ὅταν $\epsilon\phi\chi = \infty$, καὶ τότε ἡ σειρά δὲν εἶναι οὐδεμιᾶς χρήσεως.

λς'. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους εἰς τήν προσδιόρισιν τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου τὸ ὁποῖον δίδεται εἰς μῆτρας καὶ μέρη τῆς μοίρας, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸ μῆκος τούτου τοῦ τόξου ἐκπεφρασμένον διὰ μερῶν τῆς ἀκτίνος, ἥ, ὅπερ ταῦτόν, τὸν λόγον τούτου τοῦ τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Τώρα, οὔσης τῆς ἀκτίνος 1, ἡ ἡμιπεριφέρεια ἢ τὸ τόξον τῶν $200^\circ = 3.1415926535897932$. Εἰς τὸν ἀριθμὸς οὗτος $= \pi$ · ἐπειδὴ ἔν τῷ τόξον ὅσωνδήποτε μοιρῶν περιέχεται εἰς τὸν τύπον $\frac{\mu}{v} \cdot 100^\circ$, διὰ τοῦτο τὸ μῆκος τούτου τοῦ τόξου συνά-

γεται ἀπὸ τοῦ τύπου $\frac{\mu}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$ · ἔὰν λοιπὸν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους κάμωμεν $\chi = \frac{\mu}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$, ἀκολουθῶς θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ π , καὶ λογαριάσωμεν τοὺς συντελεστὰς μέχρι δεκαεῖς δεκαδικῶν, θέλομεν ἔχει τοὺς ἀκολουθοῦς τύπους.

$\begin{aligned} \eta\mu\left(\frac{\mu}{v} \cdot 100^\circ\right) &= \\ 1.5707968267948966 \frac{\mu}{v} \\ - 0.6459640975062463 \frac{\mu^3}{v^3} \\ + 0.0796926262461670 \frac{\mu^5}{v^5} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\mu}{v} \cdot 100^\circ\right) &= \\ 1.0000000000000000 \\ - 1.2337005501361698 \frac{\mu^2}{v^2} \\ + 0.2536695079010480 \frac{\mu^4}{v^4} \end{aligned}$
--	--

$$\begin{array}{l}
 -0.0046817541353187 \frac{\mu^7}{v^7} \\
 +0.0001604411847874 \frac{\mu^9}{v^9} \\
 -0.000035988432352 \frac{\mu^{11}}{v^{11}} \\
 +0.0000000569217292 \frac{\mu^{13}}{v^{13}} \\
 -0.0000000006088035 \frac{\mu^{15}}{v^{15}} \\
 +0.00000000000060669 \frac{\mu^{17}}{v^{17}} \\
 -0.00000000000000438 \frac{\mu^{19}}{v^{19}} \\
 +0.00000000000000003 \frac{\mu^{21}}{v^{21}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -0.0008634807633530 \frac{\mu^6}{v^6} \\
 +0.0009192602748394 \frac{\mu^8}{v^8} \\
 -0.0000252020423731 \frac{\mu^{10}}{v^{10}} \\
 +0.0000001710874779 \frac{\mu^{12}}{v^{12}} \\
 -0.00000000063866031 \frac{\mu^{14}}{v^{14}} \\
 +0.00000000000656596 \frac{\mu^{16}}{v^{16}} \\
 -0.00000000000005294 \frac{\mu^{18}}{v^{18}} \\
 +0.000000000000000034 \frac{\mu^{20}}{v^{20}}
 \end{array}$$

Γὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων ἐκ τοῦ μηδενὸς μέχρι τῶν 50° συμπεριλαμβάνουν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων ἐπέκεινα τῶν 50° μέχρι 100° διότι ἔχομεν ἡμ. $(50^\circ + \omega) = \text{συν.}(50^\circ - \omega)$ καὶ $\text{συν.}(50^\circ + \omega) = \text{ημ.}(50^\circ - \omega)$ ὅθεν γνωρίζοντες τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἐκ τοῦ 0 μέχρι 50° γνωρίζομεν τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων ἐπέκεινα τῶν 50° μέχρι 100° καὶ παρομοίως γνωρίζοντες τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων ἐκ τοῦ 0 ἄχρι 50° ἔχομεν τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἐπέκεινα τῶν 50° μέχρι τῶν 100° ὥστε βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ λογαριάσωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ 0 καὶ 50° , διὰ νὰ ἔχωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ 0 καὶ 100° ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι εἰς τοὺς τύπους οἱ ὅποιοι δίδουν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ. $\frac{\mu}{v}$ 100° καὶ $\text{συν.} \frac{\mu}{v}$ 100° , πάντοτε ἡμποροῦμεν

νὰ ὑποθέσωμεν $\frac{\mu}{v} < \frac{1}{2}$ τοτ' ἔστι νὰ δώσωμεν τιμὰς

εἰς $\frac{1}{v}$ περιεχομένους μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$ ὥστε αἱ σειραὶ θεί-
λουν εἶναι τόσον κατιοῦσαι ἥσυγκύπτουσai (convergentes),
ὥστε ἀρκεῖ νὰ λογαριασθῇ μικρότατος ἀριθμὸς ὁρῶν, ὅταν
μάλιστα δὲν ᾔηται χρεία πολλῶν δεκαδικῶν.

$$\text{Ἐὰν κάμωμεν διαδοχικῶς } \frac{u}{v} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots$$

$$\frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \dots$$

Θέλουμεν εὑρεῖν τὰ ἀκόλουθα ἐξαγόμενα:

$$\text{ἤμ. } 10'' = \text{συν } 90'' = 0. 156434465040231$$

$$\text{ἤμ. } 20'' = \text{συν } 80'' = 0. 309016994374947$$

$$\text{ἤμ. } 30'' = \text{συν } 70'' = 0. 453990499739547$$

$$\text{ἤμ. } 40'' = \text{συν } 60'' = 0. 587785252292473$$

$$\text{ἤμ. } 50'' = \text{συν } 50'' = 0. 707106781186548$$

$$\text{ἤμ. } 60'' = \text{συν } 40'' = 0. 809016994374947$$

$$\text{ἤμ. } 70'' = \text{συν } 30'' = 0. 8910066524188368$$

$$\text{ἤμ. } 80'' = \text{συν } 20'' = 0. 951056516295154$$

$$\text{ἤμ. } 90'' = \text{συν } 10'' = 0. 987688340595138$$

$$\text{ἤμ. } 100'' = \text{συν } 0'' = 1. 0000000000000000.$$

τὰ ὑποῖα συμφωνοῦν μὲ τοὺς ἀλγεβρικοὺς τύπους τοῦ
ἄρ. 22. εὐρίσκομεν παρομοίως, κάμνοντες $\frac{u}{v} = \frac{1}{100}$ τὴν
αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἤμ. 1'', τὴν ὁποίαν εὐρομεν εἰς ἄρ. 26.
καὶ ἡ μεγάλη εὐκολία μὲ τὴν ὁποίαν φθάνομεν εἰς ταῦτα
τὰ ἐξαγόμενα δεικνύει τὸ ἔξοχον τῆς μεθόδου.

Περὶ τῆς κατασκευῆς τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων.

λζ'. Οἱ ᾠφέλιμοι σοφοὶ εἰς τοὺς ὁποίους χρεωσέεται
ἡ πρώτη κατασκευὴ τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων, ἐθεμε-
λίωσαν τοὺς ὑπολογισμοὺς των ἐπὶ εὐφυῶν μεθόδων,
πλὴν τῶν ὑπερίων ἢ ἐφαρμογῇ ἥτον πολλὰ ἐπίπονους. Ἡ

ἀνάλυσις ἔπειτα ἔδωκε μεθόδους διὰ τῶν ὁποίων ἡμπορεῖ τις νὰ φθάσῃ εἰς τὸν αὐτὸν σκοπὸν μὲ περισσotέραν ταχύτητα καὶ εὐκολίαν· πλὴν ἐπειδὴ οἱ ὑπολογισμοὶ εἶχον ἤδη γένη, αἱ μέθοδοι αὗται ἤθελον μείνῃ δίχως ἐφαρμογὴν, ἔὰν ἡ σφερέωσις τοῦ μετρικοῦ συστήματος δὲν ἤθελε δώσῃ εὐκαιρίαν νὰ λογαριασθῶσιν νέοι πίνακες κατὰ τὴν δεκαδικὴν τοῦ κύκλου διαίρεσιν.

Διὰ νὰ δώσωμεν ἰδέαν τινὰ τῶν μεθόδων τὰς ὁποίας ἡμπορεῖ τις νὰ ἀκολουθήσῃ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ λογαριασῶμεν τὰ ἡμίτονα ὅλων τῶν τόξων ἀπὸ λεπτῶν εἰς λεπτὸν ἐκ τοῦ 1 λεπτοῦ μέχρι 10000 λεπτῶν ἢ 100 μοιρῶν· τὴν ἀκτῖνα κάμνομεν $= 1$, τὸ τόξον ἐνὸς λεπτοῦ καλοῦμεν α , καὶ πρέπει νὰ εὗρωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου α μὲ μέγαν βαθμὸν προσεγγίσεως.

Οὕτως τῆς ἀκτίνος 1, γνωστὸν εἶναι ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια ἢ τὸ τόξον τῶν 200° $= 3.1415926535897932$ · ἃς διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ 20000· ἔχομεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου 1' ἢ $\alpha = 0.00015707963267948966$, τιμὴ ἣτις εἶναι ἀκριβὴς ἕως εἰς τὸ εἰκοστὸν δεκαδικὸν ψηφίον. Οὔτεν ἐν τόξον ᾗναι μικρότατον, τὸ ἡμίτονόν του εἶναι ἐπαισθητῶς ἴσον μὲ τὸ τόξον· οὕτως ἔχομεν περίπου ἡμ. $\alpha = 0.00015707963267948966$ · διὰ νὰ ἐκτιμῶμεν τὸ σφάλμα τὸ ὑπεῖον πράττομεν λαμβάνοντες τὸ μῆκος ἐνὸς τόξου μικροτάτου διὰ τὸ ἡμίτονόν του, ἃς παρατηρήσωμεν ὅτι νὰ λάβωμεν τὸ μῆκος ἐνὸς τόξου διὰ τὸ ἡμίτονόν του, εἶναι νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς σειρᾶς ἣτις ἐκφράζει τὴν τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου δι' ὅλην τὴν σειράν. Γώρα ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς ταύτης εἶναι ἐναλλάξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί, τὸ πραττόμενον σφάλμα ἐκτιμᾶται ἀπὸ τὸν πρῶτον τῶν ὁρῶν τοὺς ἀποίους πρᾶβλέπομεν· λοιπὸν λαμβάνοντες α διὰ

ἡμ. α , πράττομεν σφάλμα μικρότερον τοῦ $\frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ καὶ ἐπει-
 δὴ $\alpha^3 < (0,00016)^3$ ἢ 0.000000000004096,
 καὶ τὸ ἕκτον μέρος ταύτης τῆς ποσότητος εἶναι μικρό-
 τερον ἀπὸ 0.000000000001· ἔπεται ὅτι τὸ πραττό-
 μενον σφάλμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος τῆς 12^{ης}
 δεκαδικῆς τάξεως· ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἡμ. α
 δὲν διαφέρει ἀπὸ αὐτὸ τὸ τόξον α εἰς τὰ δώδεκα
 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία· καὶ λοιπὸν ὅταν ληθῇ ἡ ἀνω-
 τέρω τιμὴ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου ἐνὸς λεπτοῦ,
 αὕτη εἶναι ἐσφαλμένη εἰς τὸ δέκατον τρίτον δεκαδικὸν
 ψηφίον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ δωδέκατον σημαντικὸν ψηφίον.

Διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν ἀκριβεστέραν, ἀρκεῖ εἰς τοὺς τύ-
 πους τοῦ ἀρ. 36 νὰ κάμωμεν $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{10000}$. καὶ νὰ λά-
 βωμεν τοὺς δύο ἢ τρεῖς πρώτους ὁρους ἐκάστης σειρᾶς·
 εὐρίσκομεν

$$\eta\mu\alpha = 0.000157079632033525563$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0.99999987662994524005253$$

II πρώτη τιμὴ εἶναι ἀκριβὴς ἕως εἰς τὸ εἰκοσὸν δεκα-
 δικὸν καὶ ἡ δευτέρα ἕως τὸ εἰκοσὸν τέταρτον.

λη'. Γνωρίζοντες τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ
 τόξου ἐνὸς λεπτοῦ σημειωμένου διὰ α , διὰ νὰ εὕρωμεν
 δι' αὐτοῦ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον ὅλων τῶν πολ-
 λαπλασιῶν τοῦ α τόξων, ἀρκεῖ εἰς τοὺς τύπους τοῦ ἀρθ.
 28 νὰ κάμωμεν $\pi = \chi + \alpha$, $\kappa = \chi - \alpha$. Πράττοντες τὴν
 τοιαύτην ἀντεισαγωγὴν εἰς τὸν πρῶτον καὶ τρίτον, καὶ
 κάμνοντες πάντοτε $P = 1$, εὐρίσκομεν,

$$\eta\mu(\chi + \alpha) = 2 \sigma\upsilon\nu \alpha \eta\mu \chi - \eta\mu(\chi - \alpha) = 2 \sigma\upsilon\nu \alpha. \eta\mu \chi -$$

$$1. \eta\mu(\chi - \alpha)$$

$$\sigma\upsilon\nu(\chi + \alpha) = 2 \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \chi - \sigma\upsilon\nu(\chi - \alpha) = 2 \sigma\upsilon\nu \alpha. \sigma\upsilon\nu \chi$$

$$- 1. \sigma\upsilon\nu(\chi - \alpha)$$

ἐκ τῶν τύπων τούτων ἔπεται ὅτι ἐὰν ἔχωμεν μίαν σείραν
τόξων τὰ ὅποια νὰ σχηματίζουν μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον,
τῆς ὁποίας ἡ διαφορὰ νὰ ἦναι α , τὰ ἡμίτονα τῶν θέλουν
σχηματίζει μίαν ἀνατρέχουσαν σειρὰν (suite recurrente)
τῆς ὁποίας ἡ κλίμαξ τῆς σχέσεως (échelle de relation)
εἶναι 2 συν α , -1 : τοῦτ' ἔστι ἀφ' οὗ λογαριάζομεν δύο
διαδοχικὰ ἡμίτονα Λ καὶ B , εὐρίσκομεν τὸ ἀκόλουθον
 Γ , πολλαπλασιάζοντες B ἐπὶ 2 συν α , καὶ Λ ἐπὶ -1 ,
καὶ προσθέτοντες τὰ δύο γινόμενα· ἔσσε ἔχομεν $\Gamma = 2B$
συν $\alpha - \Lambda$.

Τὰ συνημίτονα τῶν ἰδίων τόξων σχηματίζουν ἐπίσης
μίαν ἀνατρέχουσαν σειρὰν τῆς ὁποίας ἡ κλίμαξ τῆς σχέ-
σεως εἶναι 2 συν α , -1 · θέλομεν ἔχει λοιπὸν διαδοχικῶς,

ἡμ. $0^\circ = 0$	συν $0 = 1$
ἡμ. $\alpha = \text{ἡμ. } \alpha$	συν $\alpha = \text{συν } \alpha$
ἡμ. $2\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ ἡμ. } \alpha$	συν $2\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ συν } \alpha - 1$
ἡμ. $3\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ ἡμ. } 3\alpha - \text{ἡμ. } \alpha$	συν $3\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ συν } 2\alpha - \text{συν } \alpha$
ἡμ. $4\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ ἡμ. } 3\alpha - \text{ἡμ. } 2\alpha$	συν $4\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ συν } 3\alpha - \text{συν } 2\alpha$
ἡμ. $5\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ ἡμ. } 4\alpha - \text{ἡμ. } 3\alpha$	συν $5\alpha = 2 \text{ συν } \alpha \text{ συν } 4\alpha - \text{συν } 3\alpha$

λθ'. Δὲν μένει πλέον παρὰ ἀφ' οὗ ἀντεισάξωμεν τὰς
τιμὰς τοῦ ἡμ. α καὶ συν α , νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειω-
μένας ἐργασίας. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν πίνakas
ἡμιτόνων μὲ 10 δεκαδικὰ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς
τοῦ ἡμ. α καὶ συν α μὲ 16 δεκαδικὰ, τοῦτ' ἔστι :

$$\text{ἡμ. } \alpha = 0.0001570796320335$$

$$\text{συν } \alpha = 0.9999999876629945$$

πλὴν ἐπειδὴ συν α πολλὰ ὀλίγον τῆς μονάδος διαφέρει,
ὑπάρχει μέσον συντομίας ἀπὸ τὸ ὅποϊον πρέπει νὰ ὠφελη-
θῶμεν. Ἐστω $K = 2(1 - \text{συν } \alpha) = 0.0000000246740110$,
θέλομεν ἔχει $2 \text{ συν } \alpha = 2 - K$, καὶ τοῦτο δίδει,

$$\begin{aligned} & \eta\mu(\chi + \alpha) - \eta\mu \chi = \eta\mu \chi - \eta\mu(\chi - \alpha) - K \eta\mu \chi \\ & \sigmaυν(\chi + \alpha) - \sigmaυν \chi = \sigmaυν \chi - \sigmaυν(\chi - \alpha) - K \sigmaυν \chi. \end{aligned}$$

Διὰ τὰ εὐρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ὅρου $\eta\mu(\chi + \alpha)$ ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν προηγούμενον ὅρον $\eta\mu \chi$ τὴν διαφορὰν $\eta\mu(\chi + \alpha) - \eta\mu \chi$, ἡ ὁποία πάντοτε θέλει εἶναι πολλὰ μικρὰ: τώρα, κατὰ τὸν τύπον, ἡ διαφορὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ μίαν ὁμοίαν διαφορὰν ἥδη λογαριασθεῖσαν $\eta\mu \chi - \eta\mu(\chi - \alpha)$, μεῖον τὸ γινόμενον τοῦ $\eta\mu \chi$ ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ K . Οὗτος λοιπὸν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ μόνη ἐργασία ὀλίγον τι μακρυνή τὴν ὁποίαν ἔχομεν νὰ κάμωμεν διὰ τὰ συνάξωμεν ἓν ἡμίτονον ἀπὸ δύο προηγούμενα· πλὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν 1.^{ον} ὅτι δὲν ἔχομεν χρεῖαν νὰ γνωρίσωμεν εἰ μὴ δεκαεὺς δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, καὶ διὰ τοῦτο πολλὰ ὀλίγα ψηφία νὰ λογαριάζωμεν. 2.^{ον} ὅτι τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τούτους ἡμποροῦμεν πολὺ νὰ συντομεύσωμεν σχηματίζοντες πρότερον τὰ γινόμενα τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ 246740110 ἐπὶ 1, 2, 3 ἕως 9· διότι διὰ τούτου τοῦ μέσου, ἀμέσως θελομεν ἔχει τὰ μερικὰ γινόμενα τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ $\eta\mu \chi$, καὶ δὲν μένει πλεόν ἄλλο τι νὰ κάμωμεν παρὰ τὴν πρόσθεσιν τούτων τῶν γινομένων, περιοριζόμενοι πάντοτε εἰς τὸ δέκατον ἑκτον δεκαδικόν.

Τὰς αὐτὰς διδασκαλίας πρέπει τις νὰ ἀκολουθήσῃ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συνημιτόνων· καὶ ὅταν λογαριασθῶσι τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ὅλων τῶν περιεχομένων τόξων μεταξὺ 0 καὶ 50°, τότε ὁ πίναξ θέλει εἶναι πλήρης.

λθ'. Εἶναι ἀναγκαῖον, πάλιν τὸ λέγωμεν, νὰ λογαριασθῶσι τὰ ἡμίτονα μὲ 16 δεκαδικὰ, δηλαδή μὲ πέντε ἢ ἕξ δεκαδικὰ περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι εἶναι χρεῖα, ὥστε τὰ σφάλματα, τὰ ὁποῖα ἡμποροῦν νὰ πολλαπλασιασθοῦν εἰς τὴν ὁδὸν 5000 ἐργασιῶν νὰ μὴ ἐπιρρέουσιν εἰς τὸ δέ-

κατον δεκαδικὸν τῶν τελευταίων ἐξαγομένων. Τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου, ἀφαιροῦνται τὰ περιττὰ δεκαδικὰ καὶ φυλάττονται εἰς τὸν πίνακα μόνον δέκα δεκαδικά.

Τοῦ λοιποῦ, ὅταν πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῶσι τόσοι ὑπολογισμοὶ, πρέπει νὰ ζητῇται ἡ ἀλήθειαις τῶν ἐξαγομένων ὅσον τῇ δυνατὸν πολλὰ συχνά. Εἰς τὸ ἀναφερθὲν παράδειγμα ἐνὸς πίνακος λογαριαζομένου ἀπὸ λεπτὸν εἰς λεπτὸν, ἤθελεν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ λογαριασθῶσι πρότερον τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν· διότι τοῦτο ἤθελεν εἶναι ὠφελιμωτάτη βεβαίωσις ἀπὸ 100 εἰς 100 ὅρους. Τώρα διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἡμιτόνων ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν, πρέπει νὰ βαλθοῦν εἰς χρῆσιν οἱ ἀκόλουθοι τύποι καὶ τιμαὶ :

$$\eta\mu(\chi + 1^\circ) - \eta\mu \chi = \eta\mu \chi - \eta\mu(\chi - 1^\circ) - \theta\eta\mu\chi$$

$$\sigma\upsilon\nu(\chi + 1^\circ) - \sigma\upsilon\nu \chi = \sigma\upsilon\nu \chi - \sigma\upsilon\nu(\chi - 1^\circ) - \theta\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\eta\mu 1^\circ = 0.015707317311820676$$

$$\sigma\upsilon\nu 1^\circ = 0.999876632481660599$$

$$0 = 2(1 - \sigma\upsilon\nu 1^\circ) = 0.000246735036678802$$

Τὰ ἡμίτονα λογαριαζόμενα ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν βεβαιώνονται καὶ αὐτὰ ἀπὸ δέκα εἰς δέκα διὰ τῶν ἤδη γνωστῶν τιμῶν τοῦ ἡμ 10° , ἡμ 20° κτλ. Τέλος ὁ ὅλος πίναξ κατασκευασθεὶς ἡμπορεῖ νὰ βεβαιωθῇ καθ' ὅσους τρόπους θέλει τις διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\eta\mu(100^\circ - \chi) + \eta\mu(20^\circ - \chi) + \eta\mu(20^\circ + \chi) = \eta\mu(60^\circ - \chi) + \eta\mu(60^\circ + \chi).$$

μα'. Τὰ ἡμίτονα, ὅποια προκύπτουσιν ἀπὸ τοὺς ὑπολογισμοὺς τοὺς ὁποίους ἐσημειώσαμεν, ἐκφράζονται διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, καὶ καλοῦνται φυσικὰ ἡμίτονα· πλὴν ἐπαρτηρήθη ὅτι εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ χρῆσις τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἀντὶ τῶν ἰδίων ἡμιτόνων, εἶναι ἐπωφελεστέρα. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι ἀφ' οὗ τὰ ἡμίτονα ἐλογαριάσθησαν, εὐκολον ἦτον νὰ εὐρεθῶσιν οἱ λογάριθμοί

των· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀκτίνος $= 1$ ἤθελε κα-
ταστήσει ἀρνητικούς ὅλους τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων,
ἐπρωτιμύθη ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀκτίνος $= 10000000000$,
τοῦτ' ἔστιν ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 10000000000 ὅλα
τὰ ἡμίτονα τὰ εὐρεθέντα εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀκτίνος
 $= 1$ · καὶ τοῦτο διότι τὸ ἡμίτονον μιᾶς γωνίας μετρου-
μένης εἰς κύκλον διαφορετικῆς ἀκτίνος ἀπὸ 1, ἰσοῦται
μὲ τὸ ἡμίτονον τῆς ἰδίας γωνίας μετρομένης εἰς τὸν
κύκλον τῆς ἀκτίνος 1 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τῆς νέας
ἀκτίνος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἀκτις ἢ τὸ ἡμίτονον
τῶν 100°, ἧτις συχνάκις ἀπαντᾶται εἰς τοὺς ὑπολογι-
σμούς, ἔχει λογάριθμον 10 μονάδας, καὶ ἔπρεπε νὰ ᾔῃαι
τόσον μικρὰ αἱ γωνίαι ὥστε νὰ μὴ ἀπαντῶνται εἰς τὴν
πρᾶξιν, διὰ νὰ ἔχουν τὰ ἡμίτονα τῶν ἀρνητικούς λογα-
ρίθμους.

Αφ' οὗ εὐρεθῶσιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων, εὐκο-
λῶτατα συνάγονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων δι'
ἀπλῶν ἀφαιρέσεων· διότι, ἐπειδὴ ἐφ. $\chi = \frac{\text{Ρῆμ}\chi}{\text{συν}\chi}$, ἀκολου-
θεῖ ὅτι λογ. ἐφ $\chi = 10 + \text{λογ. ἡμ}\chi - \text{λογ. συν}\chi$. Ὅσον
διὰ τοὺς λογαρίθμους τῶν διατεμνουσῶν, μὲ ἔτι ἀπλού-
στερον τρόπον ἤθελον σύρεθῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως, δια χ
 $= \frac{p^2}{\text{συν}\chi}$ · ἐπειδὴ μὲ τόσῃν εὐκολίαν συνάγονται οἱ λο-
γάριθμοι τῶν τοιούτων γραμμῶν, διὰ τοῦτο εἰς τοὺς
πίνακας καταχωρίζονται μόνον οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμι-
τόνων καὶ ἐφαπτομένων.

Ἐμενε νὰ ἐξηγήσω τὸ εἶδος τῆς παρεμβολῆς (interpo-
lation), τῆς ὁποίας γίνεται χρῆσις, εἴτε διὰ τὴν εὕρεσιν
τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων τόξων
τὰ ὅποια περιέχουν κλάσματα λεπτοῦ, εἴτε διὰ τὴν εὕ-
ρεσιν τοῦ εἰς δεδομένον λογάριθμον ἡμιτόνου ἢ ἐφαπτο-

μένης ἀνταποκρίνομένου τόξου, ὅταν ὁ λογάριθμος οὗτος πίπτῃ μεταξύ δύο λογαρίθμων τῶν πινάκων. Πλὴν δι' ὅλα ταῦτα ἡμπορεῖ τις νὰ συμβουλευθῇ τὴν ἐρμηνείαν ἀπὸ τὴν ὁποίαν οἱ πίνακες πάντοτε συντρεφούνται.

Ἀρχαί· διὰ τὴν λύσιν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

μβ'. Εἰς κάθε τρίγωνον ὀρθογώνιον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ ἡμίτονον μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὴν ἀπέναντι εἰς ταύτην τὴν γωνίαν πλευράν.

Εἰς ABΓ τὸ πρῶτεν ὀρθογώνιον εἰς Α τρίγωνον (σχ. 3)· ἐκ τῆς σιγμῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ ἴσῃ μὲ τὴν τῶν πινάκων, ἃς γραφθῇ τὸ τόξον ΔΕ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας Γ· ἐπὶ τῆς ΓΔ ἃς κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΕΖ ἥτις εἶναι τὸ ἡμίτονον τῆς ἰδίας γωνίας. Τὰ τρίγωνα ΓΒΑ, ΓΕΖ εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΓΕ:ΕΖ::ΓΒ:ΒΑ· λοιπὸν

$$P : \text{ἡμ. } \Gamma :: B\Gamma : BA.$$

μγ'. Εἰς κάθε τρίγωνον ὀρθογώνιον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ὡς ἡ προσκειμένη εἰς ταύτην τὴν γωνίαν πλευρὰ πρὸς τὴν ἀπέναντι.

Γραφθέντος, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον ἄρθρον, τοῦ τόξου ΔΕ, ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡ κάθετος ΔΗ ἥτις εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας Γ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΓΔΗ, ΓΑΒ συνάγεται ἡ ἀναλογία ΓΔ:ΔΗ::ΓΑ:ΑΒ· λοιπὸν

$$P : \text{ἐφ. } \Gamma :: \Gamma A : AB.$$

μδ'. Εἰς ὅποιονδήποτε εὐθύγραμμον τρίγωνον τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Εἰς ABΓ (σχ. 4) τὸ πρῶτεν τρίγωνον, ΑΔ ἡ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ ἡγμένη κάθετος· δυνατόν νὰ ἀκολουθήσουν δύο περιττάσεις:

1^η Εάν ἡ κάθετος πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ θέλουν δώσει, κατὰ τὸ ἀρ. μ.β'.

$$P : \text{ήμ } B :: AB : AD$$

$$P : \text{ήμ } \Gamma :: AG : AD.$$

Επειδὴ εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας τὰ ἄκρα εἶναι ἴσα, τὰ μέσα εἶναι ἀνάλογα, καὶ οὕτω

$$\text{ήμ } \Gamma : \text{ήμ } B :: AB : AG.$$

2^α Εάν δὲ ἡ κάθετος πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (τχ. 5), ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, θέλουν συναχθῇ ἀκόμη αἱ ἀναλογίαι

$$P : \text{ήμ } AB\Delta :: AB : AD$$

$$P : \text{ήμ } \Gamma :: AG : AD :$$

ἐκ τῶν ὁποίων $\text{ήμ } \Gamma : \text{ήμ } AB\Delta :: AB : AG$. πλὴν ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΑΒΓ ἢ Β, τὸ ἡμίτονον τῆς ΑΒΔ γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τῆς ΑΒΓ ἢ Β λοιπὸν

$$\text{ήμ } \Gamma : \text{ήμ } B :: AB : AG.$$

με'. Εἰς κάθε εὐθύγραμμον τρίγωνον τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν ταύτην τὴν γωνίαν μείον τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης πλευρᾶς, πρὸς τὸ διπλοῦν ὀρθογώνιον τῶν δύο πρώτων πλευρῶν τοῦτ' ἐστὶ :

$$\begin{array}{l} \text{συν}B : P :: \overbrace{AB}^{-2} + \overbrace{BG}^{-2} - \overbrace{AG}^{-2} : 2AB \times BG \text{ ἢ } \text{συν}B = P \times \\ \overbrace{AB}^{-2} + \overbrace{BG}^{-2} - \overbrace{AG}^{-2} \\ \hline 2AB \times BG \end{array}$$

Ας κατεβῇ ἀκόμη ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

1^{ον} Εάν ἡ κάθετος αὕτη πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου

(σχ. 4), θέλει εἶναι (Γεωμ. βιβλ. 3. πρ. 12) $\overline{A\Gamma} =$

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} - 2\overline{B\Gamma} \times \overline{B\Delta} \cdot \text{λοιπὸν } \overline{B\Delta} = \frac{\overline{AB} + \overline{B\Gamma} - \overline{A\Gamma}}{2\overline{B\Gamma}}. \text{ Ἀλλὰ}$$

εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\overline{AB\Delta}$, $P : \acute{\mu} \overline{BA\Delta} :: \overline{AB} : \overline{B\Delta}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία $\overline{BA\Delta}$ εἶναι συμπλήρωμα τῆς B , ἀκο-

λουθεῖ ὅτι $\acute{\mu} \overline{BA\Delta} = \text{συν } B$. λοιπὸν $\text{συν } B = \frac{P \times \overline{BA}}{\overline{AB}}$, ἢ, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς τῆς $\overline{B\Delta}$,

$$\text{συν } B = P \times \frac{\overline{AB} + \overline{B\Gamma} - \overline{A\Gamma}}{2\overline{AB} \times \overline{B\Gamma}}$$

2^{ον} Εάν ἡ κάθετος πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 5),

θέλει εἶναι $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + 2\overline{B\Gamma} \times \overline{B\Delta}$. (13, 3)· λοι-

πὸν $\overline{B\Delta} = \frac{\overline{A\Gamma} - \overline{AB} - \overline{B\Gamma}}{2\overline{B\Gamma}}$. Ἀλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον

$\overline{BA\Delta}$, $\acute{\mu} \overline{BA\Delta}$, ἢ $\text{συν } \overline{AB\Delta} = \frac{P \times \overline{BA}}{\overline{AB}}$, καὶ Ἐπειδὴ ἡ γω-

νία $\overline{AB\Delta}$ εἶναι παραπλήρωμα τῆς $\overline{AB\Gamma}$ ἢ B , διὰ τοῦτο

(14') $\text{συν } B = - \text{συν } \overline{AB\Delta} = - \frac{P \times \overline{BA}}{\overline{AB}}$. λοιπὸν, τῇ

ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς τῆς $\overline{B\Delta}$, θέλει προκύψει,

$$\text{συν } B = P \times \frac{\overline{AB} + \overline{B\Gamma} - \overline{A\Gamma}}{2\overline{AB} \times \overline{B\Gamma}}$$

μς'. Εἰσωσαν A, B, Γ , αἱ τρεῖς γωνίαι ὁποιοῦδήποτε τριγώνου· α, β, γ αἱ ἀμειβαίως ἀπέναντι τούτων πλευραὶ κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην πρότασιν θέλομεν ἔχει

$\text{συν } B = P \cdot \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$. Ἡ αὕτη ἀρχὴ ἐφαρμοζομένη εἰς

ἐκείνην τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν δίδει παρομοίως συν Α

$$\equiv P \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\epsilon\gamma}, \text{ συν } \Gamma \equiv P \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

Οἱ τρεῖς οὔτοι τύποι ἀρκοῦν μόνοι διὰ τὴν λύσιν ὧν τῶν προβλημάτων τῆς εὐθυγράμμου τριγωνομετρίας· διότι δίδουν τὰς ἀναγκαίας ἐξισώσεις διὰ τὴν προσδιόρισιν τριῶν ἀπὸ τὰς ἐξ ποσότητος Α, Β, Γ, α, β, γ, ὅταν αἱ ἄλλαι τρεῖς ἦναι γνωσταί. Ἐπομένως αἱ ἤδη ἐκτεθεῖσαι ἀρχαὶ καὶ ὅσαι ἄλλαι ἡμποροῦν εἰς ταύτας νὰ προσεθεοῦν πρέπει νὰ ἦναι συνέπεια τῶν τριῶν τούτων ἀρχικῶν τύπων.

Τῷ ὄντι, ἡ τιμὴ τοῦ συν Β δίδει ἡμ²Β = Ρ² — συν²Β

$$\equiv P^2 \cdot \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \epsilon^2)^2}{4\alpha^2\gamma^2} = \frac{P^2}{4\alpha^2\gamma^2} - (2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4) \cdot \text{λοιπὸν } \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{P}{2\alpha\beta\gamma} \sqrt{(2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4)}.$$

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι συμμετρικὴ λειτουργία τῶν α, β, γ, φανερόν ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν δύο τούτων τῶν γραμμάτων κατ' ἀρέσκειαν, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει $\frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu A}{\alpha} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\gamma}$ τοῦτο δὲ ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ τοῦ ἀρ. μ.δ' ἀρχή. Ἀπὸ ταύτην εὐκόλως ἠθέλαμεν συνάξει τὰς ἀρχὰς τῶν ἀρ. μ.β' καὶ μ.γ'.

μ.ζ'. Εἰς κάθε τρίγωνον εὐθύγραμμον τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν των, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἀπέναντι εἰς ταύτας τὰς πλευρὰς γωνιῶν, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν γωνιῶν.

Διότι (σχ. 4 καὶ 5) ἐκ τῆς ἀναλογίας ΑΒ : ΑΓ :: ἡμ Γ : ἡμ Β, συνάγεται ΑΓ — ΑΒ : ΑΓ + ΑΒ :: ἡμ Β —

ήμ. Γ : ήμ. Β — ήμ. Γ'. Αλλὰ κατὰ τοὺς τύπους τοῦ ἀρ. κθ', ἔχομεν

$$\text{ήμ. Β} + \text{ήμ. Γ} : \text{ήμ. Β} - \text{ήμ. Γ}' :: \epsilon\phi \frac{\text{Β} + \Gamma}{2} : \epsilon\phi \frac{\text{Β} - \Gamma'}{2} \cdot \text{λοιπὸν}$$

$$\text{ΑΓ} + \text{ΑΒ} : \text{ΑΓ} - \text{ΑΒ} :: \epsilon\phi \frac{\text{Β} + \Gamma}{2} : \epsilon\phi \frac{\text{Β} - \Gamma'}{2}.$$

Αναλογία ἥτις ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ ἡ ἐκφωνηθεῖσα ἀρ/η.

Διὰ τῶν ὀλιγαριθμῶν τούτων ἀρχῶν ἡμποροῦν νὰ λυθῶσιν ὅλαι αἱ περιστάσεις τῆς εὐθυγράμμου τριγωνομετρίας.

Λύσεις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

μ.η'. Ἐστω Α ἡ ὀρθή γωνία προτεθέντος τινὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, Β καὶ Γ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι· ἔστω α ἡ ὑποτείνουσα, β ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Β πλευρὰ, καὶ γ ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Γ. Πρέπει νὰ ἔχωμεν κατὰ νοῦν ὅτι αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης, καὶ οὕτω, κατὰ τὰς διαφορὰς περιστάσεις, ἡμποροῦμεν νὰ λαμβάνωμεν ἢμ. Γ = συν Β, ἢμ. Β = συν Γ, καὶ παρομοίως ἐφ Β = σφ Γ, ἐφ Γ = σφ Β. Τούτου τεθέντος, τὰ διάφορα προβλήματα τὰ ὑποὶα δυνατόν νὰ ἔχωμεν διὰ νὰ λύσωμεν ἐπάνω εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἀνάγονται πάντοτε εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας τέσσαρας περιστάσεις.

Π Ρ Ω Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

μ.θ'. Δοθείσης τῆς ὑποτείνουσας α καὶ μιᾶς πλευρᾶς β, νὰ εὑρεθῶσιν ἡ τρίτη πλευρὰ, καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι.

Η προσδιόρισις τῆς γωνίας Β, γίνεται διὰ τῆς ἀναλογίας (μ.β') α : β :: Ρ : ήμ. Β. Γνωστῆς τῆς γωνίας Β, γίνεται γνωστὸν ἐνταύτῳ καὶ τὸ συμπλήρωμά της 100° — Β = Γ, δυνατόν δὲ καὶ κατ' εὐθείαν διὰ τῆς ἀναλογίας α : β :: Ρ : συν Γ νὰ προσδιορισθῇ ἡ Γ.

Ὅσον διὰ τὴν τρίτην πλευρὰν γ, ἡμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους. Μετὰ τὴν εὑρεσιν τῆς γωνίας Β, δυ-

νατὸν νὰ γένῃ ἡ ἀναλογία $(\mu\gamma')$ $P : \tau\phi B :: \beta : \gamma$, ἐκ τῆς ὁποίας συναγεται ἡ τιμὴ τῆς γ' ἢ δυνατὸν νὰ συναχθῇ κατ' εὐθείαν ἡ τιμὴ τῆς γ , ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, ἥτις δίδει $\gamma = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$, καὶ ἐπομένως

$$\log. \gamma = \frac{1}{2} \log. (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \log. (\alpha - \beta).$$

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ν'. Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν β καὶ γ τῆς ὀρθῆς γωνίας, νὰ εὐρεθῶσιν ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ γωνίαι.

Ἡ γωνία B προσδιορίζεται διὰ τῆς ἀναλογίας $(\mu\gamma')$ $\gamma : \beta :: P : \epsilon\phi B$. Ακολουθῶς $\Gamma = 100^\circ - B$. Ἡθελε δὲ εὐρεθῇ κατ' εὐθείαν ἡ γωνία Γ διὰ τῆς ἀναλογίας $\beta : \gamma :: P : \epsilon\phi \Gamma$.

Γνωστῆς τῆς γωνίας B , ἡ ὑποτείνουσα εὐρίσκεται διὰ τῆς ἀναλογίας ἢ $\mu B : P :: \beta : \alpha'$ ἢ δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ α κατ' εὐθείαν διὰ τῆς ἐξισώσεως $\alpha = \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)}$. ἡ ἔκφρασις ὁμῶς αὕτη, ἐπειδὴ $\beta^2 + \gamma^2$ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ εἰς παράγοντας, δὲν εἶναι ἐπιτηδεῖα διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

να'. Δοθείσης τῆς ὑποτείνουσας α καὶ μιᾶς γωνίας B , νὰ εὐρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ β καὶ γ .

Αἱ ἀναλογίαι $P : \eta\mu B :: \alpha : \beta$, $P : \sigma\upsilon\nu B :: \alpha : \gamma'$ δίδουν τὰς τιμὰς τῆς β καὶ γ . Ὅσον διὰ τὴν γωνίαν Γ , αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ συμπλήρωμα τῆς B .

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νβ'. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς β τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν, νὰ εὐρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη πλευρά.

Γνωστῆς μιᾶς τῶν ὀξείων γωνιῶν γίνεται γνωστὴ ἡ ἄλλη· ὅθεν δυνατὸν νὰ ὑποτεθῶσι γνωστὰ ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ

ἀπέναντι γωνία B. Ακολουθῶς, αἱ πλευραὶ α καὶ γ δίδονται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας ἢμ. $B:P::\beta:\alpha$, $P:\sigma\phi B::\epsilon:\gamma$.

Λύσεις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

Εἰσῶσαν A, B, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι προτεθέντος τινὸς εὐθυγράμμου τριγώνου, καὶ α, β, γ αἱ ἀμοιβαίως εἰς ταύτας ἀπέναντι πλευραὶ: τὰ διάφορα προβλήματα εἰς τὰ ὅποια ἤθελε ζητεῖται ἡ προσδιόρισις τριῶν τούτων τῶν ποσοτήτων διὰ μέσου τῶν ἄλλων τριῶν, πάντοτε ἡμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὰς ἀκολουθοῦσας τέσσαρας περιπτώσεις.

Π Ρ Ω Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

νγ'. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς α καὶ δύο τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ β καὶ γ.

Αἱ δύο γνωσταὶ γωνίαι κάμνουν γνωστὴν τὴν τρίτην, ἀκολουθῶς αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ εὐρίσκονται διὰ τῶν ἀναλογιῶν (μδ').

$$\text{ἢμ. } A : \text{ἢμ. } B :: \alpha : \beta.$$

$$\text{ἢμ. } A : \text{ἢμ. } \Gamma :: \alpha : \gamma.$$

Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Α Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

νδ'. Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β, μετὰ τῆς γωνίας A ἀπέναντι μιᾶς τούτων τῶν πλευρῶν, νὰ εὑρεθῶσιν ἡ τρίτη πλευρὰ γ καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι B καὶ Γ.

Ἡ γωνία B εὐρίσκεται διὰ τῆς ἀναλογίας

$$\alpha : \beta :: \text{ἢμ. } A : \text{ἢμ. } B.$$

Εἰς M ἡ ὀξεία γωνία τῆς ὁποίας τὸ ἡμίτονον $= \frac{\epsilon \text{ἢμ. } A}{\alpha}$, ἐπειδὴ ἢμ. $M = \text{ἢμ. } (200^\circ - M)$ διὰ τοῦτο δυνατὸν νὰ ληφθῇ $B = M$ ἢ $B = 200^\circ - M$. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται λύσεις δὲν ἔχουν χώραν παρ' ὅσας εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία A εἶναι ὀξεία καὶ $\epsilon > \alpha$. Ἐὰν δὲ ἡ γωνία A ᾖ

ἀμβλεῖα, ἐπειδὴ B δὲν ἔμπορεῖ νὰ ᾔῃναι, διὰ τοῦτο εἰς ταύτην τὴν περίσασιν δὲν ὑπάρχει παρὰ μία λύσις· καὶ ἐὰν ἐν ᾧ A ᾔῃναι ὀξεῖα ἢ ὁ B ᾔῃναι μικροτέρα τῆς α, οὐδὲ τότε ὑπάρχουν δύο λύσεις· διότι τότε $M < A$, καὶ ἐν ληφθῇ $B = 200^\circ - M$, ἤθελε προκύψει $A + B > 200^\circ$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἐὰν $\alpha = \beta$, τότε δὲν ὑπάρχει ἀκόμη παρὰ μία μόνη λύσις.

Γνωσθὼν τῶν γωνιῶν A καὶ B, συνάγεται ἡ τρίτη Γ'. Ακολουθῶς ἡ τρίτη πλευρὰ γ δίδεται ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν

$$\eta\mu A : \eta\mu \Gamma :: \alpha : \gamma.$$

Δυνατὸν ἀκόμη νὰ συναχθῇ κατ' εὐθείαν ἡ γ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\sin A}{\rho} = \frac{b^2 + \gamma^2 - a^2}{2b\gamma}$, ἥτις δίδει $\gamma = \frac{\cos A}{\rho} \pm \sqrt{\left(a^2 - \frac{\beta^2 \eta\mu^2 A}{\rho^2}\right)}$. Αλλ' ἡ τιμὴ αὕτη δὲν ἔμπορεῖ νὰ λογαριασθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων εἰ μὴ μὲ τὸ μέσον μιᾶς συμβοηθητικῆς γωνίας M ἢ B, τὸ ὁποῖον κατανατᾷ εἰς τὴν ἀνωτέραν λύσιν.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νε'. Δοθεῖσθων δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Γ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι A καὶ B καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ γ.

Γνωστῆς τῆς γωνίας Γ, γίνεται γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν $A + B = 200^\circ - \Gamma$, καὶ τὸ ἡμιάθροισμά των $\frac{1}{2}(A + B) = 100^\circ - \frac{1}{2}\Gamma$. Ακολουθῶς ἡ ἡμιδιαφορὰ τῶν αὐτῶν γωνιῶν λογαριάζεται διὰ τῆς ἀναλογίας (μῆ'),

$\alpha + \beta : \alpha - \beta :: \varepsilon\phi \frac{1}{2}(A + B) \eta \sigma\phi \frac{1}{2}\Gamma : \varepsilon\phi \frac{1}{2}(A - B)$
ἐνθα ὑποτίθεται $\alpha > \beta$, καὶ ἐπομένως $A > B$.

Εὐρεθείσης τῆς ἡμιδιαφορᾶς $\frac{1}{2}(A - B)$, ἐὰν προσθεθῇ εἰς τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{1}{2}(A + B)$, θέλει προσδιορισθῇ ἡ μείζων γωνία A· ἐὰν, ἐξ ἐναντίας, ἀφαιρεθῇ, θέλει προσδιο-

ρισθῇ ἡ ἐλάσσων γωνία Β· διότι ἐὰν Α καὶ Β παρισά-
νωσιν ὀπίσθας δὴ ποτε ποσότητας, πάντοτε ἔχομεν

$$A = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B)$$

$$B = \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B).$$

Αφ' οὗ γνωσθῶσιν αἱ γωνίαι Α καὶ Β, ἡ τρίτη πλευρὰ
γ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\eta\mu A : \eta\mu B :: \alpha : \gamma.$$

νς'. Εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμοὺς ἀκολουθεῖ
συχνά τις νὰ ᾖ γινώσκαι δύο πλευραὶ α καὶ β διὰ τῶν
λογαρίθμων των· τότε διὰ νὰ μὴ ἤμεθα ὑποχρεωμένοι
νὰ ζητήσωμεν τοὺς ἀνταποκρινομένους ἀριθμοὺς, ζητοῦ-
μεν μόνον τῆς γωνίας φ διὰ τῆς ἀναλογίας $\beta : \alpha :: P : \epsilon\phi. \phi$.
Ἡ γωνία φ θέλει εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ 50° , διότι ὑπο-
τίθεται $\alpha > \beta$ · ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ φ, 50° , κάμνομεν
τὴν ἀναλογίαν $P : \epsilon\phi(\phi - 50^\circ) :: \sigma\phi \frac{1}{2} \Gamma : \epsilon\phi \frac{1}{2}(A-B)$,
ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν ὡς ἀνωτέρω τὴν τιμὴν τῆς
 $\frac{1}{2}(A-B)$, ἀκολουθῶν τὰς τιμὰς τῶν δύο γωνιῶν.

$$\begin{aligned} & \text{Ἡ λύσις αὕτη θεμελιούται ἐπὶ τοῦ ὅτι } \epsilon\phi(\phi - 50^\circ) \\ &= \frac{P^2 \epsilon\phi. \phi - P^2 \epsilon\phi. 50^\circ}{P^2 + \epsilon\phi. \phi \epsilon\phi. 50^\circ}. \text{ Ἀλλὰ } \epsilon\phi. \phi = \frac{\alpha P}{\beta} \text{ καὶ } \epsilon\phi. 50^\circ \\ &= P \cdot \text{λοιπὸν } \epsilon\phi(\phi - 50^\circ) = \frac{P(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \cdot \text{λοιπὸν } \alpha + \beta : \\ &\alpha - \beta :: P : \epsilon\phi(\phi - 50^\circ) :: \sigma\phi \frac{1}{2} \Gamma : \epsilon\phi \frac{1}{2}(A-B). \end{aligned}$$

Ὅσον διὰ τὴν τρίτην πλευρὰν γ, ἔμπορεῖ κατ' εὐθείαν
νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{P} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$, ἥτις

$$\text{δίδει } \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2\alpha\beta \sigma\upsilon\nu \Gamma}{P}}.$$

Δὲν εἶναι ἐπιτήδειον νὰ λογαριασθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων,
ἐκτὸς ὅταν οἱ παρισανόμενοι ὑπὸ α, β, καὶ συνΓ ἀριθμοὶ
ᾖναι ἀπλούστατοι.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς γ ὑπὸ ἄλλην

μορφὴν· ἐπειδὴ ἡμ² $\frac{1}{2}$ Γ = $\frac{1}{2}$ Ρ² - $\frac{1}{2}$ Ρ συν Γ, διὰ τοῦτο συν
 $\Gamma = \frac{Ρ^2 - 2\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ}$ ἡ ἀντισταγωγὴ ταύτης τῆς τιμῆς εἰς

τὸν ἀνωτέρω τύπον, τὸν τρέπει εἰς $\sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{4\alpha\beta\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2} - \frac{2\alpha\beta Ρ^2}{Ρ^2}\right)} = \sqrt{\left((\alpha - \beta)^2 + \frac{4\alpha\beta\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2}\right)}$. ἀλλ' ἐπειδὴ Ρ² = ἡμ² $\frac{1}{2}$ Γ + συν² $\frac{1}{2}$ Γ· διὰ τοῦτο ἡ ὑπόρριζος ποσότης τοῦ δευτέρου μέλους ἄγεται εἰς

$$\frac{(\alpha - \beta)^2 \eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma + (\alpha - \beta)^2 \sigmaυν^2 \frac{1}{2} \Gamma + 4\alpha\beta\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2} =$$

$$(\alpha + \beta)^2 \frac{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2} + (\alpha - \beta)^2 \frac{\sigmaυν^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2} \text{ λοιπὸν τέλος πάντων,}$$

$$\gamma = \sqrt{\left((\alpha - \beta)^2 + \frac{4\alpha\beta\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2}\right)} = \sqrt{\left((\alpha + \beta)^2 \frac{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2} + (\alpha - \beta)^2 \frac{\sigmaυν^2 \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ^2}\right)}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι μάλιστα ὠφέλιμοι, ὅταν ὡς οὗτος τῆς γωνίας Γ μικροτάτης καθὼς καὶ α - β, θελωμεν νὰ λογαριασώμεν γ με πολλὴν ἀκρίβειαν. Ἡ τελευταία δεικνύει ὅτι γ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὀποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι $(\alpha + \beta) \frac{\eta\mu \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ}$, καὶ

$(\alpha - \beta) \frac{\sigmaυν \frac{1}{2} \Gamma}{Ρ}$ καὶ τοῦτο ἡμποροῦμεν ἀκόμη νὰ εὕρωμεν διὰ τῆς ἀκολουθοῦ ἀπλουστάτης κατασκευῆς.

Εἰσω ΑΒΓ (σχ. 6) τὸ προτεθὲν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς ΓΒ = α, ΓΑ = β, καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ· ἐκ τῆς σιγμῆς Γ ὡς ἐκ κέντρου με ἀκτῖνα ΓΒ ἴσην με τὴν μεγαλητέραν τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν, ἃς γράψωμεν περιφέρειαν ἣτις συναπαντᾷ εἰς Δ καὶ Ε τὴν προεκβολὴν τῆς πλευρᾶς ΓΑ· ἃς ἐπιζεύζωμεν ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἃς ἄζωμεν τὴν ΑΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἡ γωνία ΔΒΕ ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν τῇ ἡμιπερι-

φερεία είναι ὀρθή· διὰ τοῦτο αἱ γραμμαὶ AZ, BE εἶναι πᾶράλληλοι, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $BZ : AE :: \Delta Z : \Delta \Delta :: \text{συν} \Delta : P$. Ὡσαύτως εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Delta \Delta Z$ ἔχομεν, $AZ : \Delta \Delta :: \eta \mu \Delta : P$. Ἀντεισάγοντες λοιπὸν τὰς τιμὰς $\Delta \Delta = \Delta \Gamma + \Gamma \Delta = \alpha + \beta$, $AE = \Gamma E - \Gamma \Delta = \alpha - \beta$, $\Delta = \frac{1}{2} \Gamma$, θέλομεν ἔχει

$$AZ = \frac{(\alpha + \beta) \eta \mu \frac{1}{2} \Gamma}{P}, \quad BZ = \frac{(\alpha - \beta) \text{συν} \frac{1}{2} \Gamma}{P}.$$

Ἡ τρίτη λοιπὸν πλευρὰ AB τοῦ προτεθέντος τριγώνου εἶναι τῷ ὄντι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ABZ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $(\alpha + \beta) \frac{\eta \mu \frac{1}{2} \Gamma}{P}$ καὶ $(\alpha - \beta) \frac{\text{συν} \frac{1}{2} \Gamma}{P}$. ἔν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ζητήσωμεν τὴν γωνίαν ABZ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς AZ, καὶ ἀπ' αὐτὴν ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν $\Gamma B \Delta = \frac{1}{2} \Gamma$, θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν B τοῦ τριγώνου ABΓ.

Ἐντεῦθεν ἐλέπομεν ὅτι ἡ λύσις τοῦ τριγώνου ABΓ, εἰς τὸ ἵποϊον γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ, ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ABZ, εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας, δηλαδὴ: $AZ = (\alpha + \beta) \frac{\eta \mu \frac{1}{2} \Gamma}{P}$ καὶ $BZ = (\alpha - \beta) \frac{\text{συν} \frac{1}{2} \Gamma}{P}$. Οὕτω, διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης, ἡμπορούσαμεν νὰ μὴ συντρέξωμεν εἰς τὴν πρότασιν τοῦ ἄρ. 47 διὰ τὴν λύσιν τῆς τρίτης περιπτώσεως.

Τ Ε Τ Α Ρ Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

ν^{ος}. Δοθεῖσῶν τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τρεῖς γωνίαι A, B, Γ.

Ἡ γωνία A ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α, εὑρίσκεται διὰ τοῦ τύπου $\text{συν} A = P \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, καὶ παρομοίως προσ-

διορίζονται αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι. Πλὴν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν αὐτὴν περίστασιν δι' ἐνὸς τύπου πλέον ἐπιτηδείου διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

Εὰν ἐνθυμηθῶμεν τὸν τύπον $P^2 - P \text{ συν } A = 2 \eta \mu^2 \frac{1}{2} A$, καὶ ἀντεισάξωμεν εἰς αὐτὸν τὴν τιμὴν τοῦ $\text{συν } A$, θελομεν ἔχει $2 \eta \mu^2 \frac{1}{2} A = P^2 \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma}{2\beta\gamma} = P^2 \cdot \frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2}{2\beta\gamma}$
 $= P^2 \cdot \frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)}{2\beta\gamma}$. Λοιπὸν $\eta \mu \frac{1}{2} A = P \sqrt{\left(\frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)}{4\beta\gamma} \right)}$. Εἶσω, συντομίας χάριν, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$, ἢ $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, θελομεν ἔχει $\alpha + \beta - \gamma = 2\pi - 2\gamma$, $\alpha - \beta + \gamma = 2\pi - 2\beta$. λοιπὸν

$$\eta \mu \frac{1}{2} A = P \sqrt{\left(\frac{(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}{\beta\gamma} \right)}.$$

Τύπος ὅστις δίδει τὴν ἀναλογίαν

$$\beta\gamma : (\pi - \beta)(\pi - \gamma) :: P^2 : \eta \mu^2 \frac{1}{2} A$$

καὶ εἶναι εὐκολολογάριαστος διὰ τῶν λογαριθμῶν. Γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον τοῦ $\eta \mu \frac{1}{2} A$, γνωρίζομεν $\frac{1}{2} A$, ἐπομένως τὴν ζητούμενην γωνίαν A ἥτις εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{2} A$. Κατὰ τὴν αὐτὸν τρόπον ἠμπορούσαμεν νὰ πράξωμεν διὰ κάθε μίαν τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν B καὶ Γ .

Υπάρχουν καὶ ἄλλοι τύποι οἱ ὅποιοι ἐπίσης λύουν τὸ ζήτημα. Καὶ ἐν πρώτοις ὁ τύπος $P^2 + P \text{ συν } A = 2 \text{ συν}^2 \frac{1}{2} A$ δίδει $\text{συν}^2 \frac{1}{2} A = P^2 \cdot \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{4\beta\gamma} = P^2 \cdot \frac{(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{4\beta\gamma}$
 $= P^2 \cdot \frac{(\beta + \gamma - \alpha)(\beta + \gamma + \alpha)}{4\beta\gamma}$. Ἀλλὰ κάμνοντες πάντοτε $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, ἔχομεν $\beta + \gamma - \alpha = 2\pi - 2\alpha$. λοιπὸν

$$\text{συν} \frac{1}{2} A = P \sqrt{\left(\frac{(\pi - \alpha)\pi}{\beta\gamma} \right)}.$$

Ακολουθῶς ἡ συμπλοκὴ τῆς τιμῆς ταύτης μὲ ἐκείνην τοῦ ἡμ $\frac{1}{2} \Lambda$ δίδει ἄλλον τινὰ τύπον· διότι ἐπειδὴ ἐφ $\frac{1}{2} \Lambda$
 $\frac{\text{Ρῆμ. } \frac{1}{2} \Lambda}{\text{συν } \frac{1}{2} \Lambda}$, συνάγεται

$$\text{ἐφ } \frac{1}{2} \Lambda = \text{Ρ} \cdot \left(\frac{\pi - \beta \cdot \pi - \gamma}{\pi \cdot \pi - \alpha} \right).$$

Παραδείγματα τῆς λύσεως τῶν εὐθυ- γραμμῶν τριγώνων.

νῆ. Παράδειγμα Α'. Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ ὕψος οἰκοδομῆς τινὸς AB, τῆς ὁποίας ὁ ποῦς εἶναι προσιτός. σχ. 7.

Ἀφ' οὗ μιστρήσωμεν ἐπὶ τῆς γῆς, τὴν ὁποίαν ὑποθέσωμεν περίπου κατὰ σάθμην (de pinceau), βάσιν τινὰ ΑΔ ἥτις νὰ μὴ ᾖ οὔτε πολλὰ μεγάλη οὔτε πολλὰ μικρὰ ὡς πρὸς τὸ ὕψος AB, σένομεν εἰς Δ τὸν πόδα τοῦ κύκλου ἢ τοῦ ὁποιοῦδήποτε ἐργαλείου διὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν BΓΕ, τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὴν ὀριζόντειον γραμμὴν ΓΕ, παράλληλον τῇ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ φωτὸς ΓΒ διευθυνημένην πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς οἰκοδομῆς· ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι εὐρομεν ΑΔ ἢ ΓΕ=67.84 μέτρα καὶ τὴν γωνίαν BΓΕ=45°64'· διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ΒΕ, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον BΓΕ εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὴν γωνίαν Γ καὶ τὴν προσκειμένην πλευρὰν ΕΓ. Οὕτω κατὰ τὴν Δ' περι-
 σασιν, κάμνομεν τὴν ἀναλογίαν Ρ: ἐφ 45°64' :: 67.84: ΒΕ.

$$\Lambda. \text{ ἐφ } 45^{\circ} 64' \dots\dots\dots 9.9403263$$

$$\Lambda. 67.84 \dots\dots\dots \underline{1.8314858}$$

$$\text{ἄθροισμα — λογ. Ρ} \dots\dots\dots 1.7718121$$

Ο λογάριθμος οὗτος ἀνταποκρίνεται εἰς 59.130, οὕτως ἔχομεν ΒΕ=59^μ,13. Προσθέτοντες εἰς ΒΕ τὸ ὕψος

τοῦ ἐργαλείου ΓΔ ἢ ΑΕ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν $1^{\mu}.12$, θέλωμεν ἔχει τὸ ζητούμενον ὕψος $AB = 60^{\mu}.25$.

Ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΒΕΓ θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν τὴν ὑποτείνουσάν ΒΓ, κἀμνομεν τὴν ἀναλογίαν συν $45^{\circ}64' : P :: 67.84 : B\Gamma$

$$\Lambda. P \div \Lambda. 67.84 \dots\dots\dots 11.8314858$$

$$\Lambda. \text{ συν } 45^{\circ} 64' \dots\dots\dots 9.8772784$$

$$\text{Διαφορά} \dots\dots\dots 1.9542074 = \Lambda. B\Gamma$$

$$\text{Λοιπὸν } B\Gamma = 89^{\mu}.993.$$

Σ. Κ. Ἐὰν δὲν ἐφαίνετο εἰ μὴ ἡ κορυφή τῆς οἰκοδομῆς ἢ τοῦ ὁποιοῦδήποτε τύπου τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὕψος, ἤθελε προσδιορισθῇ τὸ διάστημα ΒΓ ὥς ρηθήσεται εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα: τὸ διάστημα τοῦτο καὶ ἡ γνωστὴ γωνία ΒΓΕ ἀρκοῦν διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΕ αὐξηθεῖσα ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος.

νθ'. Παράδειγμα Β'. Διὰ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς γῆς (σχ. 8) τὸ διάστημα τῆς σιγμῆς Α ἀπὸ ἀπρόσιτόν τι ἀντικείμενον Β, μετρεῖται βάσις τις ΑΔ καὶ αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΒΑΔ, ΑΔΒ. Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρέθη $\Lambda\Delta = 588^{\mu}.45$, $\text{Β}\Lambda\Delta = 115^{\circ}48'$ καὶ $\text{Β}\Lambda\Delta = 40^{\circ}8'$. ἐν πρώτοις συνάγεται ἡ τρίτη γωνία $\text{ΑΒ}\Delta = 44^{\circ}44'$ καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας ἡμ $\text{ΑΒ}\Delta : \text{ἡμ } \Lambda\Delta\text{B} :: \Lambda\Delta : \text{ΑΒ}$ προσδιορίζεται ἡ ΑΒ.

$$\Lambda \text{ ΑΔ} \dots\dots\dots 2.7697096$$

$$\Lambda. \text{ ἡμ } \Lambda\Delta\text{B} \dots\dots\dots 9.7699689$$

$$\text{Αθροισμα} \dots\dots\dots 12.5396785$$

$$\Lambda. \text{ ἡμ } \text{ΑΒ}\Delta \dots\dots\dots 9.8080314$$

$$\Lambda. \text{ ΑΒ} \dots\dots\dots 2.7316471$$

$$\text{Λοιπὸν τὸ ζητούμενον διάστημα } \text{ΑΒ} = 539^{\mu}.07$$

Λοιπὸν B = $94^{\circ}22',3$
 καὶ Γ = $29^{\circ}46',7$

Τώρα τὸ διάστημα ΒΓ προηροδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν ἢμ Β : ἢμ Α :: ΑΓ : ΒΓ ἢ

ἢμ $94^{\circ}22',3$: ἢμ $76^{\circ}34'$:: $1202^{\mu}.32$: ΒΓ.

Α. 1202. 32 3. 0800200

Α. ἢμ $76^{\circ}31'$ 9. 9692099

Αθροισμα 13.0492299

Α. ἢμ $94^{\circ}22',3$ 9. 9982096

Α. ΒΓ 3. 0510203

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον διάστημα ΒΓ = $1124^{\mu}.66$.

Ξ'. Παράδειγμα Δ'. Δοθεῖσὼν τριῶν σιγμῶν Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς χάρτης τόπου τινὸς, νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τετάρτης σιγμῆς Μ ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἤθελον μετρηθῇ αἱ γωνίαι ΑΜΒ, ΑΜΓ· αἱ τέσσαρες δὲ σιγμαὶ ὑποτίθενται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. (σχ. 9).

Επὶ τῆς ΑΒ ἃς γραφθῇ τμήμα κύκλου τὸ ΑΜΔΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ΒΜΑ· ἐπὶ τῆς ΑΓ ἃς γραφθῇ παρομοίως τμήμα κύκλου τὸ ΑΜΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ΑΜΓ· τὰ δύο τόξα θέλουν τμηθῇ εἰς Α καὶ Μ, καὶ ἡ σιγμὴ Μ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη. Διότι αἱ μὲν σιγμαὶ τοῦ τόξου ΑΜΔΒ εἶναι αἱ μόναι ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡμπορεῖ τις νὰ ἴδῃ τὴν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ ΑΜΒ· αἱ δὲ τοῦ τόξου ΑΜΓ εἶναι αἱ μόναι ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡμπορεῖ τις νὰ ἴδῃ τὴν ΑΓ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ ΑΜΓ· λοιπὸν ἡ σιγμὴ Μ, κοινὴ τομὴ τῶν δύο τούτων τόξων, εἶναι ὡσαύτως ἡ μόνη ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἡμπορεῖ τις νὰ ἴδῃ ἐνταύτῳ τὴν ΑΒ καὶ ΑΓ ὑπὸ τὰς γωνίας ΑΜΒ, ΑΜΓ. Πρόκειται νῦν νὰ λογαριασθῇ τριγωνομετρικῶς ἡ θέσις τῆς σιγμῆς Μ, κατὰ ταύτην τὴν κατασκευὴν.

Εἴπωσαν τὰ δοθέντα $AB=2500''$, $AG=7000''$, $BΓ=9000''$, $AMB=30^{\circ}80'$, $AMΓ=121^{\circ}40'$. Εἰς τὸ τρίγωνον $ABΓ$, εἰς τὸ ὅποιον εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ, προσδιορίζεται ἡ γωνία BAG (νζ') διὰ τοῦ τύπου $\eta\mu^2 \frac{1}{2} A = P^2 \cdot \frac{6750 \cdot 2250}{2500 \cdot 7000}$ ἐκ τοῦ ὁποίου $2 \log \eta\mu \frac{1}{2} A = 19.9384483$, $\log \eta\mu \frac{1}{2} A = 9.9692241$, $\frac{1}{2} A = 76^{\circ}31'.5$ καὶ τέλος $A = 152^{\circ}63'$. Ἀς ἀγθῇ ἡ διάμετρος AD καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ DB εἰς τὸ τρίγωνον BAD ὀρθογώνιον εἰς B ἢ πλευρὰ $BA=2500$, καὶ ἡ ἀπέναντι γωνία $BDA=BMA=30^{\circ}80'$. ὅθεν προκύπτει ἡ ὑποτείνουσα $AD = \frac{BA \times P}{\eta\mu BDA} = 5374''.6$. Ἀγθείσθης ὡσαύτως τῆς διαμέτρου AE καὶ τῆς GE ἐπιζευχθείσης, θέλει σχηματισθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $ΓAE$ εἰς τὸ ὅποιον εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ $AG=7000$ καὶ ἡ προσκείμενη γωνία $ΓAE=AMΓ=100^{\circ}=21^{\circ}40'$. ὅθεν συνάγεται $AE = \frac{P \times AG}{\sigmaυν ΓAE} = 7415''$.

Εάν τῶρα ἀγθῶσιν αἱ MD , ME , ἐπειδὴ αἱ γωνίαι AMD , AME εἶναι ὀρθαί, ἡ γραμμὴ DME , θέλει εἶναι εὐθεῖα. Μένει λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον DAE , εἰς τὸ ὅποιον ἡ γραμμὴ AM , τῆς ὁποίας πρέπει νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ μέγεθος, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν DE . Τώρα εἰς τοῦτο τὸ τρίγωνον ἡ πλευρὰ $AD=5374.6$, $AE=7415$, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $DAE=BAG+ΓAE-ΔΒ=104^{\circ}83'$. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ γωνία $ADE=56^{\circ}93'$ καὶ τέλος ἀπὸ τοῦ ὀρθογώνιον τρίγωνον DAM , $AM=4160''.83$. Τὸ διάστημα τοῦτο καὶ ἡ γωνία $BAM=112^{\circ}27'$ προσδιορίζουν κατὰ πάντα τὴν θέσιν τῆς συγμῆς M .

Σημείωσις. Εάν θέλωμεν νὰ λογαριάζωμεν τὰ αὐτὰ παραδείγματα διὰ τῶν πινάκων τῶν κατασκευασμένων

κατὰ τὴν παλαιὰν διαίρεσιν τοῦ κύκλου, πρέπει νὰ τρέψωμεν ὡς ἀκολουθῶς τὴν ἔκφρασιν τῶν δεδομένων ἢ προσδιοριζομένων γωνιῶν· τοῦ λοιποῦ ὅλαι αἱ λογαριθμικαὶ τιμαὶ καὶ αἱ τιμαὶ τῶν πλευρῶν μένουσι αἱ αὐταί.

Παράδειγμα α'. Γωνία δεδομένη $BGE = 41^{\circ}4'33''$. 6, ἢ ἀπλῶς $BGE = 41^{\circ}4'30''$, διότι εἰς τὰς τοιαύτας ἐργασίας μερικὰ δεύτερα περισσύτερον ἢ ὀλιγώτερον, δὲν ἐπιδέχονται ἐπαισθητῶς ἐπὶ τῶν προσδιοριζομένων διασχημάτων.

Πα. β'. Γωνίαι δεδομέναι $BAD = 103^{\circ}55'55''$. 2, $BAD = 36^{\circ}4'19''$. 2, $ABD = 39^{\circ}59'45''$. 6, $ΓAD = 35^{\circ}15'10''$. 8, $ADΓ = 119^{\circ}32'49''$. 2.

Πα. γ'. Γωνία δεδομένη $EAG = 68^{\circ}40'44''$. 4,

Γωνία συναγομένη $\frac{1}{2} (E + Γ) = 55^{\circ}39'37''$. 8.

Γωνίαι προσδιοριζόμεναι $\frac{1}{2} (B - Γ) = 29^{\circ}8'24''$. 7

$B = 84^{\circ}48'2''$. 5, $Γ = 26^{\circ}31'13''$. 1.

Πα. δ'. Γωνίαι δεδομέναι $AMB = 27^{\circ}43'12''$, $AMΓ = 109^{\circ}15'36''$, γωνίαι προσδιοριζόμεναι $A = 137^{\circ}22'1''$. 2, $DAE = 94^{\circ}20'49''$, $BAM = 101^{\circ}2'34''$. 8.

Σημείωσις τοῦ μεταφραστοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε εὐθυγράμμου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο προσεχῶν πλευρῶν του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμιτονον τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῶν ἰδίων πλευρῶν.

Ἐς τὸν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ (σχ. 4) ἢ τὸ $ABΓ$ (σχ. 5). ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας A ἄς κατεβασθῇ ἡ κάθετος AD ἐπὶ τὴν $BΓ$. Γινώσκοντες εἶναι ὅτι ἐὰν κληθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἢ τοῦ ἐνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν δύο τριγώνων E αὕτη θέλει

ἰσοῦται μὲ $\frac{BΓ \cdot AD}{2}$. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ ὀρθογώνιον τριγώνον ADB δίδει (μζ') $P: \text{ἢ} \mu B :: AB: AD$, ὅθεν $AD = \frac{AB \cdot \mu B}{P}$. λοιπὸν $E = \frac{BΓ}{2} \times \frac{AB \cdot \mu B}{P}$. Κληθεῖς

σὺν τῇ AB—γ, τῇ BG—α, τῇ AG—β καὶ τῇ P—r,
 θέλει εἶναι $E = \frac{\alpha\gamma\mu B}{2} - \frac{\alpha\beta\mu\Gamma}{2} - \frac{\gamma\beta\mu\lambda}{2}$. Λοιπὸν κ.τ.λ.

Εντεῦθεν, ἐπειδὴ 2ABΓ ἰσοῦται μὲ τὸ παραλληλό-
 γραμμον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ προσεχεῖς πλευρὰς τὰς AB,
 BG, δηλαδὴ τὰς δύο προσεχεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου
 ABΓ, συνάγεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τοιούτου παραλλη-
 γράμμου ἰσοῦται μὲ ἀγ' ἡμ B, καὶ ἐν γένει τὸ ἐμβαδὸν
 κάθε παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο
 προσεχῶν πλευρῶν του καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς περιεχομένης
 ὑπ' αὐτῶν γωνίας.

Εκρίνα ἀναγκαῖον νὰ ὑποσυνάψω ἐνταῦθα τὰ δύο ταῦτα
 θεωρήματα, ἐπειδὴ συχνάκις ἀπαντῶνται εἰς τὰς ἐφαρμογὰς.

Αρχαὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

ξβ'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογωνιον τρίγωνον, ἡ ἀκτὶς
 εἶναι πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑποτείνουσας, ὡς τὸ ἡμίτονον
 μιᾶς τῶν πλαγίων γωνιῶν πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι
 πλευρᾶς.

Ἐς ABΓ (σχ. 10) τὸ σφαιρικὸν προτεθὲν τρίγωνον,
 A ἡ ὀρθὴ γωνία του. B καὶ Γ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τὰς
 ὁποίας καλοῦμεν γωνίας πλαγίας, καὶ αἱ ὁποῖαι μ'
 ὅλον τοῦτο ἡμπεροῦν νὰ ᾖναι ὀρθαὶ ἢ μία ἢ ἄλλη, ἢ καὶ
 αἱ δύο ἐνταῦθα· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν
 $P : \text{ἡμ. BG} :: \text{ἡμ. B} : \text{ἡμ. AG}$.

Απὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας O, ἃς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες
 OA, OB, OG, ἃς λαβθῇ ἀκολουθῶς ἡ OZ ἴση μὲ τὴν
 ἀκτῖνα τῶν πινάκων, καὶ ἀπὸ τὴν σιγμὴν Z ἃς ἀχθῇ ἡ
 ZΔ κάθετος ἐπὶ τὴν OA· ἡ γραμμὴ ZΔ θέλει εἶναι κάθετος
 εἰς τὸ ἐπίπεδον OAB, ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία A
 εἶναι ὀρθή, καὶ οὕτω τὰ δύο ἐπίπεδα OAB, OAG εἶναι

κάθετα μεταξύ των. Από τὴν σιγμὴν Δ ἃς ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ· αὕτη θέλει εἶναι ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, καὶ οὕτως ἡ γωνία ΔΕΖ θέλει μετρεῖ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΟΒΛ, ΟΒΓ, καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τούτου τεθέντος εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ὀρθογώνιον εἰς Δ ἔχομεν $P : ἡμ ΔΕΖ :: ΕΖ : ΔΖ$ · ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΖ = Β, καὶ ἐπειδὴ $OZ = P$, ἔπεται ὅτι $EZ = ἡμ ΕΟΖ = ἡμ ΒΓ, ΔΖ = ἡμ ΑΓ$. Λοιπὸν $P : ἡμ Β :: ἡμ ΒΓ : ἡμ ΑΓ$, ἢ

$$P : ἡμ ΒΓ :: ἡμ Β : ἡμ ΑΓ.$$

Εὰν λοιπὸν καλέσωμεν α τὴν ὑποτείνουσαν ἢ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α, β τὴν ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Β, καὶ γ τὴν ἀπέναντι εἰς τὴν Γ, θέλομεν ἔχει

$$P : ἡμ α :: ἡμ Β : ἡμ β :: ἡμ Γ : ἡμ γ.$$

καὶ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων συνάγονται δύο ἐξισώσεις μεταξύ τῶν μερῶν τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

ξγ'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ συνημίτονον μιᾶς πλαγίας γωνίας, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὑποτεינוύσης πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς προσκειμένης εἰς ταύτην τὸν γωνίαν πλευρᾶς.

Εἶσω πάντοτε (σχ. 10) ΑΒΓ τὸ προτεθὲν ὀρθογώνιον εἰς Α τρίγωνον· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $P : \text{συν } Β :: \epsilon\phi ΒΓ : \epsilon\phi ΑΒ$.

Διότι γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΖ δίδει τὴν ἀναλογίαν $P : \text{συν } ΔΕΖ :: ΕΖ : ΕΔ$. Ἀλλὰ $ΔΕΖ = Β$, $ΕΖ = ἡμ ΒΓ$, $ΟΕ = \text{συν } ΒΓ$, καὶ εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΔ ὀρθογώνιον εἰς Ε,

$$\Delta E = \frac{OE \epsilon\phi \Delta OE}{P} = \frac{\text{συν } ΕΓ \epsilon\phi ΑΒ}{P} \cdot \text{λοιπὸν } P : \text{συν } Β :: ἡμ ΒΓ :$$

$$\frac{\text{συν } ΒΓ \epsilon\phi ΑΒ}{P} :: \frac{P ἡμ ΒΓ}{\text{συν } ΒΓ} : \epsilon\phi ΑΒ, \text{ ἢ τέλος}$$

$$P : \text{συν } Β :: \epsilon\phi ΒΓ : \epsilon\phi ΑΒ.$$

Εάν κάμωμεν, ὡς ἀνωτέρω, $BΓ = α$ καὶ $AB = γ$, θέ-
 λομεν ἔχει $P : \text{συν } B :: \acute{\epsilon}\phi α : \acute{\epsilon}\phi γ$, ἢ $\text{συν } B = \frac{P \acute{\epsilon}\phi γ}{\acute{\epsilon}\phi α} = \frac{\acute{\epsilon}\phi σφ α}{P}$

Ἡ αὐτὴ ἀρχὴ ἐφαρμοσθεῖσα εἰς τὴν γωνίαν $Γ$ δίδει $\text{συν } Γ$
 $= \frac{P \acute{\epsilon}\phi β}{\acute{\epsilon}\phi α} = \frac{\acute{\epsilon}\phi β σφ α}{P}$

ξδ'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ἀκτὶς
 εἶναι πρὸς τὸ συνημίτονον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς
 γωνίας, ὡς τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης πλευρᾶς πρὸς τὸ
 συνημίτονον τῆς ὑποτείνουσας.

Εἰς $ABΓ$ (σχ. 10) τὸ προτεθὲν ὀρθογώνιον εἰς A
 τρίγωνον, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $P : \text{συν } AB :: \text{συν } AΓ : \text{συν } BΓ$.

Διότι ἐπειδὴ ἡ κατασκευὴ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τῶν ἀνω-
 τέρω δύο προτάσεων, τὸ τρίγωνον $ΟΔΖ$ ὀρθογώνιον εἰς $Δ$,
 καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ὑποτείνουσα $ΟΖ = P$, δίδει $ΟΔ = \text{συν}$
 $ΔΟΖ = \text{συν } AΓ$. ἀκολουθῶς τὸ τρίγωνον $ΟΔΕ$ ὀρθογώνιον εἰς
 E , δίδει $ΟΕ = \frac{ΟΔ \text{ συν } ΔΟΕ}{P} = \frac{\text{συν } AΓ \text{ συν } AB}{P}$. Ἀλλ' εἰς τὸ
 ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΟΕΖ$, ἔχομεν $ΟΕ = \text{συν } BΓ$. λοιπὸν
 $\text{συν } BΓ = \frac{\text{συν } AΓ \text{ συν } AB}{P}$, ἢ, ὅπερ ταῦτόν,

$$P : \text{συν } AΓ :: \text{συν } AB : \text{συν } BΓ.$$

Ἡ τρίτη αὕτη ἀρχὴ ἐκφράζεται διὰ τῆς ἐξίσωσως
 $P \text{ συν } α = \text{συν } β \text{ συν } γ$ ἀπὸ ταύτην, ὡς ἀπὸ τὰς δύο προλα-
 βούσας, δὲν συνάγεται μία δευτέρα ἐξίσωσις· διότι ἡ γινο-
 μένη μετὰθεσις μεταξὺ $α$ καὶ $β$ δὲν φέρει οὐδεμίαν τροπὴν
 εἰς τὴν ἐξίσωσιν.

ξε'. Διὰ τῶν τριῶν τούτων γενικῶν ἀρχῶν δυνάμεθα
 νὰ εὕρωμεν ἄλλας τρεῖς ἀναγκαίαις διὰ τὴν λύσιν τῶν
 σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἐκάστην τῶν τελευταίων
 τούτων ἀρχῶν ἤμπορούσαμεν νὰ ἀποδείξωμεν κατ'εὐθείαν,
 διὰ μιᾶς ἰδιαιτέρας κατασκευῆς· ἀλλ' εἶναι προτιμότερον

νά τὰς συναζώμεν ἀπὸ τὰς τρεῖς πρώτας διὰ τῆς ἀναλέ-
τσεως, καθὼς ἐρχόμεθα νὰ πράξωμεν.

$$\text{Αἱ ἐξισώσεις ἤμ. Β} \Rightarrow \frac{P \cdot \eta \mu \beta}{\eta \mu \alpha}, \text{ συν } \Gamma \Rightarrow \frac{P \cdot \epsilon \varphi \beta}{\epsilon \varphi \alpha} \quad \text{δίδουν}$$

$$\text{διὰ τῆς διαιρέσεώς των} \frac{\text{συν } \Gamma}{\eta \mu \beta} \Rightarrow \frac{\epsilon \varphi \beta}{\eta \mu \beta} \cdot \frac{\eta \mu \alpha}{\epsilon \varphi \alpha} \Rightarrow \frac{\text{συν } \alpha}{\text{συν } \beta}$$

(κατὰ τὴν τρίτην ἀρχὴν) $\Rightarrow \frac{\text{συν } \gamma}{P}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν τετάρ-
την ταύτην ἀρχὴν

$$\eta \mu \beta : \text{συν } \Gamma :: P : \text{συν } \gamma$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων προ-
κύπτει $\eta \mu \Gamma : \text{συν } B :: P : \text{συν } \beta$.

$$\begin{aligned} \text{Ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα ἀρχὴ δίδουν } \eta \mu B &= \frac{P \cdot \eta \mu \beta}{\eta \mu \alpha} \\ \text{συν } B &= \frac{P \cdot \epsilon \varphi \gamma}{\epsilon \varphi \alpha} \quad \text{ἐντεῦθεν συνάγεται} \frac{\eta \mu B}{\text{συν } B} \cdot \frac{\epsilon \varphi B}{P} = \frac{\eta \mu \beta \cdot \epsilon \varphi \alpha}{\eta \mu \alpha \cdot \epsilon \varphi \gamma} \\ &= \frac{P \cdot \eta \mu \beta}{\text{συν } \alpha \cdot \epsilon \varphi \gamma} = (\text{δυνάμει τῆς τρίτης ἀρχῆς}) \frac{P^2 \cdot \eta \mu \beta}{\text{συν } \beta \cdot \text{συν } \gamma \cdot \epsilon \varphi \gamma} \\ &= \frac{\epsilon \varphi \beta}{\eta \mu \gamma} \quad \text{Ἐχομεν λοιπὸν διὰ πέμπτην ἀρχὴν τὴν ἐξίσωσιν} \\ \epsilon \varphi B &= \frac{P \cdot \epsilon \varphi \beta}{\eta \mu \gamma}, \quad \text{ἢ τὴν ἀναλογίαν} \end{aligned}$$

$$P : \epsilon \varphi B :: \eta \mu \gamma : \epsilon \varphi \beta :$$

ἐκ τῆς ὁποίας διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων συνάγεται

$$P : \epsilon \varphi \Gamma :: \eta \mu \beta : \epsilon \varphi \gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{Τέλος οἱ δύο οὗτοι τύποι δίδουν } \epsilon \varphi B \cdot \epsilon \varphi \Gamma &= \frac{P^2 \cdot \epsilon \varphi \beta \cdot \epsilon \varphi \gamma}{\eta \mu \beta \cdot \eta \mu \gamma} \\ &= \frac{P^4}{\text{συν } \beta \cdot \text{συν } \gamma} = (\text{δυνάμει τῆς τρίτης ἀρχῆς}) \frac{P^3}{\text{συν } \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Λοιπὸν } P^3 = \text{συν } \alpha \cdot \epsilon \varphi B \cdot \epsilon \varphi \Gamma, \quad \text{ἢ } \sigma \varphi B \cdot \sigma \varphi \Gamma = P \cdot \text{συν } \alpha, \quad \text{ἢ} \\ \epsilon \varphi B : \sigma \varphi \Gamma :: P : \text{συν } \alpha$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἕκτη καὶ τελευταία ἀρχὴ, καὶ δὲν δίδει
ἄλλην ἐξίσωσιν, διότι ἡ μετάθεσις μεταξύ Γ καὶ B δὲν
φέρει οὐδεμίαν τροπὴν.

Ἰδοὺ ἡ ἀνακεφαλαίωσις τῶν ἐξ τούτων ἀρχῶν ἐκ τῶν ὑποίων τέσσαρες δίδουν ἐκάστη δύο ἐξισώσεις.

$$Α'. Ρῆμ β = ἡμ α ἡμ Β, Ρῆμ γ = ἡμ α ἡμ Γ$$

$$Β'. Ρέφ β = ἐφ α \sin Γ, Ρέφ γ = ἐφ α \sin Β$$

$$Γ'. Ρ\sin α = \sin β \sin γ,$$

$$Δ'. Ρ\sin Β = ἡμ Γ \sin β, Ρ\sin Γ = ἡμ Β \sin γ$$

$$Ε'. Ρέφ β = ἡμ γ ἐφ Β, Ρέφ γ = ἡμ β ἐφ Γ$$

$$ΣΤ'. Ρ\sin α = \sigmaφ Β \sigmaφ Γ,$$

Εντεῦθεν προκύπτουν δέκα ἐξισώσεις περιέχουσαι ὅλας τὰς δυνατὰς νὰ ὑπάρξουν σχέσεις μεταξύ τριῶν τῶν πέντε στοιχείων Β, Γ, α, β, γ· ὥστε ὅταν ἦναι γνωστὰι δύο τούτων τῶν ποσοτήτων μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἀμέσως γίνεται γνωστὴ ἡ τρίτη, διὰ τοῦ ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης ἢ συνεφαπτομένης της.

Ἡς'. Σημειωτέον ὅτι ὅταν στοιχείον τι προσδιορίζεται μόνον διὰ τοῦ ἡμιτόνου του, τότε ἔχει δύο τιμὰς, καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν δύο τρίγωνα πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα· διότι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον πρὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς μίαν τινα γωνίαν ἢ τὸζον, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ παραπλήρωμά της. Ἀλλὰ τὸ πρᾶγμα δὲν ἔχει οὕτως ὅταν τὸ ἄγνωστον στοιχείον προσδιορίζεται διὰ τοῦ συνημιτόνου, ἐφαπτομένης ἢ συνεφαπτομένης του. Τότε δυνατόν εἶναι νὰ ἀποφασισθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον ταύτης τῆς τιμῆς, ἐὰν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στοιχείον ἦναι μείζον ἢ ἔλαττον τῶν 100°. τὸ στοιχείον θέλει εἶναι ἔλαττον τῶν 100°, ἐὰν τὸ συνημίτονον ἢ ἐφαπτομένη ἢ συνεφαπτομένη του ἔχῃ τὸ σημεῖον +· θέλει δὲ εἶναι μείζον τῶν 100°, ἐὰν μία τῶν γραμμῶν τούτων ἔχῃ τὸ σημεῖον —. Περὶ τῆς ὑποθέσεως ταύτης ἦτον δυνατόν νὰ σερεωθῶσι γενικὰ παραγγέλματα τὰ ὅποια ἄλλό τι δὲν ἤθελον εἶναι παρὰ συνέπειαι τῶν ἐξ ἀποδεδειγμένων ἐξισώσεων.

Φερ' εἰπεῖν, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $Ρ\sin α = \sin β \sin γ$,

ἐπεταί ὅτι αἱ τρεῖς πλευραὶ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἢ ὅλαι εἶναι μικρότεραι τῶν 100° , ἢ δύο τῶν τριῶν πλευρῶν εἶναι μεγαλύτεραι τῶν 100° , καὶ ἡ τρίτη μικρότερα. Οὐδεὶς ἄλλος συνδυασμὸς ἡμπορεῖ νὰ καταστήσῃ τὸ σημεῖον τοῦ συν β συν γ ὁμοῖον μὲ τὸ τοῦ συν α, ὡς ἀπαιτεῖ αὕτη ἡ ἐξίσωσις. ὡσαύτως ἡ ἐξίσωσις $R \sin \gamma = \eta \mu \epsilon \sin \Gamma$, εἰς τὴν ὁποίαν $\eta \mu \epsilon$ εἶναι πάντοτε θετικόν, δεικνύει ὅτι $\epsilon \sin \Gamma$ ἔχει πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ τῆς $\epsilon \sin \gamma$. Εἰς καθ'ε λοιπὸν σφαιρικὸν ὀρθογωνίον τρίγωνον μία πλάγια γωνία καὶ ἡ ἀπέναντι εἰς ταύτην πλευρὰ, εἶναι πάντοτε τοῦ ἰδίου εἴδους· τοῦτ' ἔστι, ἢ καὶ τὰ δύο μεγαλύτερα ἢ καὶ τὰ δύο μικρότερα τῶν 100° .

Λύσις τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

Ἐξ. Σφαιρικὸν τρίγωνον δυνατόν νὰ ἔχῃ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, καὶ τότε αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἰσοῦνται μὲ 100° · δυνατόν νὰ ἔχῃ δύο μόνον ὀρθὰς γωνίας· τότε αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ἴσαι μὲ 100° , καὶ μένει μία γωνία μὲ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν, μέτρον τῶν ὁμοίων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μοιρῶν, ὥστε ἡ γνῶσις τοῦ ἑνὸς τῶν δύο τούτων σοιχείων φέρει τὴν γνῶσιν τοῦ ἄλλου. Ἐκ τούτου φανερὸν γίνεται ὅτι τοιοῦτου εἴδους τρίγωνα δὲν ἡμποροῦν νὰ δώσουν χώραν εἰς καὶ ἓν πρόβλημα· ἡμποροῦμεν λοιπὸν νὰ ἀφήσωμεν κατὰ μέρος τὰς μερικὰς ταύτας περιπτώσεις, καὶ νὰ θεωρήσωμεν ἐκεῖνα τὰ τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν μίαν μόνον ὀρθὴν γωνίαν.

Ἐστω A ἡ ὀρθὴ γωνία, B καὶ Γ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι αἱ λεγόμεναι πλάγαι, a ἡ ὑποτείνουσα ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν A πλευρὰ, b καὶ γ αἱ εἰς τὰς γωνίας B καὶ Γ ἀπέναντι πλευραὶ. Δοθεῖσιν δύο τῶν πέντε ποσοτήτων B , Γ , a , b , γ , πάντοτε ἡ λύσις τοῦ τριγώνου ἡμπορεῖ νὰ ἀναγῇ εἰς μίαν τῶν ἀκολουθίων ἐξ περιπτώσεων.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ξγ'. Δοθείσης τῆς ὑποτείνουσας α καὶ μιᾶς πλευρᾶς β, εὐρίσκονται αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Γ καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ γ διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\eta\mu B = \frac{P \eta\mu \epsilon}{\eta\mu \alpha}, \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\epsilon\varphi \beta \sigma\upsilon\nu \alpha}{P}, \sigma\upsilon\nu \gamma = \frac{P \sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \epsilon}.$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο στοιχεῖα Γ καὶ γ προσδιορίζονται διὰ τοῦ συνημιτόνου των, διὰ τοῦτο δὲν εἶναι δεκτικὰ παρὰ μιᾶς μόντης τιμῆς. Ὅσον διὰ τὴν γωνίαν Β, πρέπει νὰ ᾔηται τοῦ ἰδίου εἶδους μὲ τὴν δεδομένην πλευρὰν β.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ξδ'. Δοθείσων τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας β καὶ γ, εὐρίσκεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu \epsilon \sigma\upsilon\nu \gamma}{P}, \epsilon\varphi B = \frac{P \epsilon\varphi \beta}{\eta\mu \gamma}, \epsilon\varphi \Gamma = \frac{P \epsilon\varphi \gamma}{\eta\mu \epsilon}.$$

Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ο'. Δοθείσης τῆς ὑποτείνουσας α καὶ μιᾶς γωνίας Β, αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ ἄλλη γωνία Γ προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\eta\mu \epsilon = \frac{\eta\mu \alpha \eta\mu B}{P}, \epsilon\varphi \gamma = \frac{\epsilon\varphi \alpha \sigma\upsilon\nu B}{P}, \sigma\varphi \Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha \epsilon\varphi B}{P}.$$

Τὰ στοιχεῖα γ καὶ Γ προσδιορίζονται ἐκ τούτων τῶν τύπων χωρὶς ἀμφιβολίαν· ὅσον διὰ τὴν πλευρὰν β, πρέπει νὰ ᾔηται τοῦ αὐτοῦ εἶδους μὲ τὴν γωνίαν Β.

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

οα'. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας ε μετὰ τῆς ἀπέναντι γωνίας Β, εὐρίσκονται τὰ τρία ἄλλα στοιχεῖα διὰ τῶν τύπων

$$\eta\mu\alpha = \frac{p \eta\mu\beta}{\eta\mu B}, \quad \eta\mu\gamma = \frac{\epsilon\phi\epsilon\sigma\phi B}{p}, \quad \eta\mu\Gamma = \frac{p \sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\beta}$$

Εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν τὰ τρία ἄγνωστα στοιχεῖα προσδιορίζονται δι' ἡμιτόνων, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ζήτημα εἶναι ἐπιδεκτικόν δύο λύσεων. Εἶναι τῷ ὄντι φανερόν ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ τὸ τρίγωνον $AB'\Gamma$ (σχ. 11) εἶναι καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς A , καὶ τὰ δύο ἔχουν τὴν αὐτὴν πλευρὰν $A\Gamma = \beta$, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπέναντι γωνίαν $B = B'$. Τοῦ λοιποῦ, αἱ διπλαῖ τιμαὶ πρέπει νὰ συμπληχθοῦν ὑψώπως ὥστε γ καὶ Γ νὰ ᾔναι τοῦ αὐτοῦ εἶδους· ἀκολουθῶς τὸ εἶδος τῆς γ καὶ β προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ τῆς α διὰ τῆς παρατηρήσεως τοῦ τύπου $\sigma\upsilon\nu\epsilon$ $\sigma\upsilon\nu\gamma = p \sigma\upsilon\nu\alpha$, ἀλλ' ἡ τιμὴ τῆς α προσδιορίζεται κατ' εὐθείαν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\eta\mu\alpha = \frac{p \eta\mu\beta}{\eta\mu B}$.

Π Ε Μ Η Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

οβ'. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας β μετὰ τῆς προσκειμένης γωνίας Γ , εὐρίσκονται τὰ τρία ἄλλα στοιχεῖα α , γ , B , διὰ τῶν τύπων

$$\sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\phi\epsilon\sigma\upsilon\nu\Gamma}{p}, \quad \epsilon\phi\gamma = \frac{\eta\mu\beta\epsilon\phi\Gamma}{p}, \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\Gamma}{p}$$

Εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν δὲν μένει οὐδεμία ἀβιβασιότης περὶ τοῦ εἶδους τῶν ἀγνώστων στοιχείων.

Ε Κ Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

ογ'. Δοθεῖσθων τῶν πλαγίων γωνιῶν B καὶ Γ , εὐρίσκονται αἱ τρεῖς πλευραὶ α , β , γ διὰ τῶν τύπων

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\phi B \sigma\phi\Gamma}{p}, \quad \sigma\upsilon\nu\epsilon = \frac{p \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma}, \quad \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{p \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B}$$

Καὶ εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν δὲν μένει ἀκόμη οὐδεμία ἀβεβαιότης.

οδ'. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου A, B, Γ εἶναι αἱ γωνίαι, καὶ α, β, γ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ, ἀντιστοιχεῖ εἰς πολικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρώματα τῶν πλευρῶν α, β, γ , καὶ αἱ πλευραὶ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν A, B, Γ . ὥστε ἐὰν καλέσωμεν A', B', Γ' τὰς γωνίας τοῦ πολικοῦ τριγώνου, καὶ α', β', γ' τῆς ἀπέναντι εἰς ταύτας τὰς γωνίας πλευρᾶς, θέλομεν ἔχει

$$A' = 200^\circ - \alpha, B' = 200^\circ - \beta, \Gamma' = 200^\circ - \gamma$$

$$\alpha' = 200^\circ - A, \beta' = 200^\circ - B, \gamma' = 200^\circ - \Gamma.$$

Τούτου τεθέντος, ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχη μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ τεταρτημέριον, φανερόν ὅτι ἡ ἀντιστοιχούσα γωνία A' τοῦ πολικοῦ εἶναι ὀρθή, καὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο ὀρθογώνιον. Ἐὰν δὲ δύο λοιπὸν δοθέντα τὰ ὅποια, ἐκτὸς τῆς πλευρᾶς τῆς ἴσης μὲ 100° , ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λύσιν τοῦ προτεθέντος τριγώνου, χρησιμεύουν διὰ τὴν εὗρεσιν τῆς λύσεως τοῦ πολικοῦ, καὶ ἀκολουθῶς ἐκείνης τοῦ προτεθέντος τριγώνου. Ἐκ τούτου δυνατόν νά συναχθῶσι παρόμοιοι μὲ τοὺς προηγουμένους τύποι διὰ τὴν κατ' εὐθείαν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τὰ ὅποια ἔχουν μίαν πλευρὴν ἴσην μὲ 100° .

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον μοιράζεται εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα καθ' ὅλὰ των τὰ μέρη· οὕτως ἡ λύσις τῶν σφαιρικῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων κρέμαται προσέτι ἀπὸ τὴν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων.

Ἐστω $AB\Gamma$ (σχ. 12) σφαιρικὸν τρίγωνον, τοιοῦτον ὥστε αἱ δύο πλευραὶ $AB, B\Gamma$ νὰ ᾖναι παραπληρώματα ἢ μία τῆς ἄλλης· ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ $AB, A\Gamma$ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ , φανερόν ὅτι $B\Gamma$ καὶ $B\Delta$ θέλουν εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς παραπληρώματα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς AB . ἄλλως δὲ εἶναι κατάδηλον ὅτι γνωστῶν τῶν μερῶν τοῦ τριγώνου $B\Gamma\Delta$, γίνονται γνωστὰ τὰ μέρη

τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τὸ ὅποιον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀ-
τρίκτου; καὶ τ' ἀνὰ πάλιν. Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ τριγώνου
 $AB\Gamma$ εἰς τὸ ὅποιον δύο πλευραὶ κάμνουν ὁμοῦ 200° , ἀ-
νάγεται εἰς τὴν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $B\Gamma\Delta$, ἢ εἰς τὴν
τοῦ ὀρθογωνίου $B\Delta E$ ἡμίσεως τοῦ $\Gamma B\Delta$.

Οταν αἱ δύο πλευραὶ AB , $B\Gamma$ ᾖναι παραπληρώματα
ἢ μία τῆς ἄλλης, πρέπει τὸ αὐτὸ νὰ ὑπάρχη καὶ διὰ τὰς
ἀπέναντι γωνίας $A\Gamma B$, $BA\Gamma$ · διότι $B\Gamma\Delta$ εἶναι παραπλή-
ρωμα τῆς $B\Gamma A$ · ἀλλὰ $B\Gamma\Delta = \Delta = A$. Αἰσχύνατον λοιπὸν
νὰ ὑπάρχη $\alpha + \gamma = 200^\circ$, χωρὶς ἐνταυτῷ $A + \Gamma =$
 200° , τὸ ὅποιον εἶναι ἀντίστροφον.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν
ὀρθογωνίων τριγώνων συμπεριλαμβάνεται, 1^{ον} ἡ τῶν
σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ
τεταρτημόριον. 2^{ον} ἡ τῶν σφαιρικῶν ἰσοσκελῶν. 3^{ον} ἡ
τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὰ ὅποια τὸ ἄθροισμα δύο
πλευρῶν, ὡς καὶ τῶν ἀπέναντι δύο γωνιῶν, ἰσοῦται μὲ 200° .

Ἀρχαί διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἐν γένει.

οέ'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὰ ἡμίτονα τῶν
γωνιῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Εἰς $AB\Gamma$ (σχ. 13) ὅποιονδήποτε σφαιρικὸν τρίγω-
νον· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $\eta\mu B : \eta\mu \Gamma :: \eta\mu A\Gamma : \eta\mu AB$.

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἄς κατεβασθῇ τὸ τόξον AD κά-
θετον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $B\Gamma$ · τὰ ὀρθογώνια τρί-
γωνα $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$ δίδουν τὰς ἀναλογίας

$$\eta\mu B : P :: \eta\mu A\Delta : \eta\mu AB.$$

$$P : \eta\mu \Gamma :: \eta\mu A\Gamma : \eta\mu A\Delta.$$

Ἀπὸ τὸν κατὰ τὰξιν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο τού-
των ἀναλογιῶν, καὶ τὴν τῶν κοινῶν παραγόντων ἐξά-
λειψιν, συνάγεται

$$\text{ήμ Β} : \text{ήμ Γ} :: \text{ήμ ΑΓ} : \text{ήμ ΑΒ.}$$

Εάν ἡ κάθετος ΑΔ ἔπιπτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 14), ἤθελον προκύψει αἱ αὐταὶ ἀναλογίαι εἰς τὴν μίαν τῶν ὑποίων ἡμ Γ θὰ ἐσθμεῖονε ἡμ ΑΓΔ· πλὴν ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ καὶ ἡ ΑΓΒ εἶναι παραπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης, τὰ ἡμίτονά των εἶναι ἴσα· καὶ διὰ τοῦτο πάντοτε ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμ Β : ἡμ Γ :: ἡμ ΑΓ : ἡμ ΑΒ.

Εἰςωσαν α, β, γ αἱ ἀπέναντι εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ πλευραὶ, ἡ κάθε μία εἰς τὴν κάθε μίαν· κατὰ τὴν παροῦσαν ἀρχὴν θέλομεν ἔχει ἡμ Α : ἡμ α :: ἡμ Β : ἡμ β :: ἡμ Γ : ἡμ γ· ἐκ τῶν ὑποίων ἀναλογιῶν προκύπτει ἡ διπλῇ ἐξί-
σωσις:

$$\frac{\text{ήμ Α}}{\text{ήμ α}} = \frac{\text{ήμ Β}}{\text{ήμ β}} = \frac{\text{ήμ Γ}}{\text{ήμ γ}}$$

ος'. Εἰς κάθε σφαιρικόν τρίγωνον τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτίνος ἐπὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πολλαπλασιασθέντες, καὶ τοῦ γινομένου τῆς ἰδίας ἀκτίνος ἐπὶ τῶν συνημιτόνων τῶν προσκειμένων πλευρῶν, διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἡμιτόνων τῶν ἰδίων τούτων πλευρῶν: δηλαδή, διὰ τὴν γωνίαν Γ, παραδείγματος χάριν, ἔχομεν $\text{συν Γ} = \frac{p^2_{\text{συν γ}} - p_{\text{συν α}} \text{συν β}}{\text{ήμ α} \text{ήμ β}}$
καὶ παρομοίως διὰ τὰς ἄλλας δύο, $\text{συν Α} = \frac{p^2_{\text{συν α}} - p_{\text{συν β}} \text{συν γ}}{\text{ήμ β} \text{ήμ γ}}$,
 $\text{συν Β} = \frac{p^2_{\text{συν β}} - p_{\text{συν α}} \text{συν γ}}{\text{ήμ α} \text{ήμ γ}}$.

Εἰςω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν τρίγωνον (σχ. 15) εἰς τὸ ὑποῖον κάμνομεν ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ. Ας σύρωμεν ἀπὸ τὸ κέντροn Ο τῆς σφαίρας τὰς ἀπροσδιορίστους εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ· ἀφ' οὗ λάβωμεν τὴν ΟΔ κατ' ἀρέσκειαν, ἐκ τῆς σιγμῆς Δ ὡς ἄξωμεν τὴν ΔΕ εἰς τὸ ἐπί-

λάβομεν τὴν τιμὴν τοῦ EZ καὶ εἰς τὴν πρῶτην τὴν ἀν-
 τισταζώμεν θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{συν } FAZ}{P} = \frac{\overset{-2}{\Delta E} + \overset{-2}{\Delta Z} - \overset{-2}{OE} - \overset{-2}{OZ} + \overset{-2}{2OE \cdot OZ}}{2\Delta E \cdot \Delta Z} \quad \frac{\text{συν } EOZ}{P}$$

$\overset{-2}{\Delta E} \overset{-2}{OE} - \overset{-2}{\Delta E} = OA \text{ καὶ } \overset{-2}{OZ} - \overset{-2}{\Delta Z} = OA, \text{ ἔχομεν λοιπὸν}$

$$\text{συν } FAZ = \frac{\overset{-2}{OE \cdot OZ \text{ συν } EOZ} - \overset{-2}{OA \cdot P}}{\Delta E \cdot \Delta Z}$$

Αλλό τι δὲν μένει παρὰ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς
 ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὰς ἀναφερομένας τιμὰς εἰς τὸ
 σφαιρικὸν τρίγωνον: τώρα ἔχομεν

$$FAZ = \Gamma, EOZ = AB = \gamma, \Delta E = \frac{OE}{\gamma \Delta E} = \frac{P}{\eta \mu A \eta E},$$

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{\text{ΟΖ}}{\text{ΑΖ}} = \frac{\text{Ρ}}{\text{ήμΔΟΖ}} = \frac{\text{Ρ}}{\text{ήμ α}}, & \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{συν ΑΟΕ}}{\text{ήμΔΟΕ}} = \frac{\text{συν β}}{\text{ήμ β}}, \\
 \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{συν ΔΟΖ}}{\text{ήμΔΟΖ}} = \frac{\text{συν α}}{\text{ήμ α}}. & \text{Λοιπὸν}
 \end{array}$$

$$\text{συν Γ} = \frac{\text{Ι}^2 \text{συν γ} - \text{Ρσυν α σιν β}}{\text{ήμ α ήμ β}}.$$

Ἡ ἀρχὴ αὕτη, τῆς ὁποίας ἡ διαδοχικὴ ἐφάρμοσις εἰς τὰς τρεῖς γωνίας, χρηρηγεί τρεῖς ἐξισώσεις, ἀρκεῖ διὰ τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας· ἔχει, ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, τὴν αὐτὴν γενικότητα τὴν ὁποίαν ἡ τοῦ ἀρ. μέ ἔχει ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ πάντοτε δίδονται τρία στοιχεῖα διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ προσδιορισθῶσι τὰ ἄλλα τρία, φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ἀρχὴ αὕτη δίδει τὰς ἀναγκαίας διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐξισώσεις· ἐξισώσεις τῶν ὁποίων ἡ ἀνάπτυξις ἀνήκει εἰς τὴν ἀνάλυσιν ὥστε ἐξ αὐτῶν, κατὰ τὰς διαφοροὺς περιπτώσεις, νὰ συναχθῶσιν οἱ ἀπλούστεροι καὶ ἀρμοδιώτεροι εἰς τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμὸν τύποι.

οζ'. Ἐπειδὴ ἡ περὶ τῆς ὁποίας ὁ λόγος ἀρχὴ εἶναι γενικωτάτη, πρέπει νὰ περιέχῃ εἰς ἑαυτὴν ὅλας τὰς ἄλλας ἀρχὰς τὰς εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἀναφερομένας, καὶ μάλιστα τὴν τοῦ ἀρ. οε'. τοῦτο εἶναι εὐκόλον νὰ βεβαιώσωμεν.

$$\text{Τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις συν Γ} = \frac{\text{Ι}^2 \text{συν γ} - \text{Ρσυν α σιν β}}{\text{ήμ α ήμ β}} \text{ δίδει } \text{Ρ}^2 =$$

$$\begin{array}{l}
 \text{συν}^2 \Gamma \text{ ἢ } \text{ήμ}^2 \Gamma = \\
 \frac{\text{Ρ}^2 \text{ήμ}^2 \alpha \text{ήμ}^2 \beta - \text{Ρ}^2 \text{συν}^2 \alpha \text{συν}^2 \beta + 2 \text{Ρ}^3 \text{συν } \alpha \text{συν } \beta \text{συν } \gamma - \text{Ι}^4 \text{συν}^2 \gamma}{\text{ήμ}^2 \alpha \text{ ήμ}^2 \beta}
 \end{array}$$

Ἀλλὰ $\text{ήμ}^2 \alpha \text{ήμ}^2 \beta = (\text{Ρ}^2 - \text{συν}^2 \alpha)(\text{Ρ}^2 - \text{συν}^2 \beta) = \text{Ρ}^4 - \text{Ρ}^2 \text{συν}^2 \alpha - \text{Ρ}^2 \text{συν}^2 \beta + \text{συν}^2 \alpha \text{συν}^2 \beta$. Ἀντεισάγοντες λοιπὸν καὶ ἐξάγοντες τὴν ρίζαν, θέλομεν ἔχει

ἡμ. Γ = $\frac{P}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \sqrt{(P^2 - P^2 \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - P^2 \sigma\upsilon\nu^2 \beta - P^2 \sigma\upsilon\nu^2 \gamma + 2P\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma)}$.

Εἰς διὰ τὸ σύντομον $\Omega = \sqrt{(P^2 - P^2 \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - P^2 \sigma\upsilon\nu^2 \beta - P^2 \sigma\upsilon\nu^2 \gamma + 2P\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma)}$ θέλομεν ἔχει λοιπὸν

$$\eta\mu. \Gamma = \frac{P\Omega}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \quad \eta \quad \frac{\eta\mu. \Gamma}{\eta\mu\gamma} = \frac{P\Omega}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ συν Α καὶ συν Β ἤθελον δώσει παρομοίως

$$\frac{\eta\mu. A}{\eta\mu\alpha} = \frac{P\Omega}{\eta\mu\kappa\eta\mu\delta\eta\mu\gamma}, \quad \frac{\eta\mu. B}{\eta\mu\beta} = \frac{P\Omega}{\eta\mu\alpha\eta\mu\delta\eta\mu\gamma}$$

διότι ἡ ποσότης Ω δὲν ἀλλάσσει, ὅταν γένη ἡ μετάθεσις μεταξὺ δύο τῶν ποσοτήτων α, β, γ· λοιπὸν $\frac{\eta\mu. A}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu. B}{\eta\mu\beta}$

$\frac{\eta\mu. \Gamma}{\eta\mu\gamma}$, ἐξισώσεις αἵτινες ἄλλό τι δὲν εἶναι περὰ ἡ τοῦ οὐ ἀρ. ἀρχή.

ση. Αἱ εὐρεθεῖσαι τιμαὶ διὰ συν Γ καὶ ἡμ Γ, ἡμποροῦν νᾶ χρησιμεύσουν διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν γωνιῶν ἐνὸς σφαιρικῷ τριγώνου τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ αἱ τρεῖς πλευραὶ· πλὴν ὑπάρχουν ἄλλοι τύποι ἐπιτηδευότεροι διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

Τῶ ὄντι, ἐὰν εἰς τὸν τύπον $P^2 - P\sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\eta\mu.^2 \frac{1}{2} \Gamma$, ἀντείσάζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ συν Γ, θέλομεν ἔχει $\frac{2\eta\mu.^2 \frac{1}{2} \Gamma}{P^2}$

$$= 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{P} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta - P\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\beta\eta\mu\alpha}$$

Ο ἀριθμητὴς ταύτης τῆς ἐκφράσεως ἄγεται εἰς $P\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - P\sigma\upsilon\nu\gamma$ τὴν κατὰ τὸν τύπον $P\sigma\upsilon\nu\kappa - P\sigma\upsilon\nu\pi = 2\eta\mu.^2 \frac{1}{2} (\pi + \kappa) \eta\mu.^2 \frac{1}{2} (\pi - \kappa) (\kappa\eta)$, εὐρίσκομεν $P\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - P\sigma\upsilon\nu\gamma = 2\eta\mu.^2 \frac{1}{2} (\gamma - \beta + \alpha) \eta\mu.^2 \frac{1}{2} (\gamma - \alpha + \beta)$ λοιπὸν

$$\frac{\eta\mu.^2 \frac{1}{2} \Gamma}{P^2} = \frac{\eta\mu. \left(\frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} \right) \eta\mu. \left(\frac{\gamma + \alpha - \beta}{2} \right)}{\eta\mu.\alpha\eta\mu.\beta}$$

$$\eta \text{ ήμ. } \frac{1}{2} \Gamma \rightarrow P \sqrt{\left\{ \frac{\eta \mu. \frac{\gamma + \epsilon - \alpha}{2} \cdot \eta \mu. \frac{\gamma + \alpha - \epsilon}{2}}{\eta \mu. \alpha \cdot \eta \mu. \epsilon} \right\}}.$$

Φανερόν εἶναι ὅτι ἠθέλαμεν ἔχει παρομοίους τύπους διὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἡμ. $\frac{1}{2} A$ καὶ ἡμ. $\frac{1}{2} B$, διὰ μέσου τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ .

οθ'. Τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας συνίσταται, ὡς ἤδη εἶπομεν, εἰς τὴν προσδιόρισιν τριῶν τῶν ἐξ ποσοτήτων $A, B, \Gamma, \alpha, \epsilon, \gamma$ διὰ μέσου τῶν ἄλλων τριῶν. Πρὸς τοῦτο ἀνάγκη εἶναι νὰ ἔχωμεν ἐξισώσεις μεταξὺ τεσσάρων τούτων τῶν ποσοτήτων, εἰλημμένων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους· τώρα ἐξ ποσότητος συνδυάζοντες ἀνὰ τέσσαρας ἢ ἀνὰ δύο, εὐρίσκο-

μεν $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$ ἢ 15 συνδυασμοὺς· διὰ τοῦτο δεκαπέντε ἐξι-
σώσεις πρέπει νὰ σχηματίσωμεν· πλὴν μὴ θεωρουμένων παρὰ τῶν οὐσιωδῶς διαφορετικῶν συνδυασμῶν, αἱ δεκαπέντε αὗται ἐξισώσεις ἀνάγονται εἰς τέσσαρας.

Τῷ ὄντι, ἔχομεν 1^{ον} τὸν συνδυασμὸν $\alpha\beta\gamma A$, ὅστις συμπεριλαμβάνει, διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων $\alpha\beta\gamma A$, $\alpha\epsilon\gamma B$, $\alpha\beta\gamma\Gamma$.

2^{ον} Τὸν συνδυασμὸν $\alpha\beta AB$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτουν $\alpha\beta AB$, $\epsilon\gamma B\Gamma$, $\alpha\gamma A\Gamma$.

3^{ον} Τὸν συνδυασμὸν $\alpha\epsilon A\Gamma$, ὅστις συμπεριλαμβάνει τοὺς ἐξ $\alpha\beta A\Gamma$, $\alpha\epsilon B\Gamma$, $\alpha\gamma AB$, $\alpha\gamma B\Gamma$, $\beta\gamma AB$, $\beta\gamma A\Gamma$.

4^{ον} Τέλος τὸν συνδυασμὸν $\alpha AB\Gamma$, ὅστις συμπεριλαμβάνει τοὺς τρεῖς $\alpha AB\Gamma$, $\beta AB\Gamma$, $\gamma AB\Gamma$.

Ολοὶ λοιπὸν οἱ συνδυασμοὶ εἶναι δεκαπέντε· πλὴν τέσσαρες εἶναι οἱ οὐσιωδῶς διάφοροι.

π'. Ἡ ἐξισῶσις $\text{συν} A = \frac{1^2 \text{ συν } \alpha - \text{ρσυν } \epsilon \text{ συν } \gamma}{\eta \mu \beta \eta \mu \gamma}$ παριστάνει τὸν πρῶτον συνδυασμὸν $\alpha\beta\gamma A$ καὶ τοὺς ἀπ' αὐτὸν ἐξαρτωμένους.

Διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἀντιστοιχούσης ἐξίσωσης εἰς τὸν συνδυασμὸν $\alpha\beta AB$, πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν γ ἀπὸ τοὺς δύο τύπους οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τοῦ συν A καὶ συν B · πλὴν τὴν ἀπάλειψιν ταύτην ἐκάμωμεν (οἷ') καὶ τὸ εὗρεθὲν ἐξαγόμενον εἶναι $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu \alpha} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu \beta}$.

Ο τρίτος συνδυασμὸς σχηματίζεται ἀπὸ τὴν μεταξὺ τῶν α, β, A, Γ , σχέσιν· πρὸς τοῦτο, ἔχοντες τὰς δύο ἐξισώσεις
 $\text{συν} A \eta\mu \beta \text{ ἢ } \eta\mu \gamma = P^2 \text{ συν } \alpha - P \text{ συν } \beta \text{ συν } \gamma,$
 $\text{συν} \Gamma \eta\mu \beta \text{ ἢ } \eta\mu \alpha = P^2 \text{ συν } \gamma - P \text{ συν } \beta \text{ συν } \alpha,$
ἀπαλείφομεν ἐν πρώτοις συν γ , καὶ εὐρίσκωμεν $P \text{ συν} A \eta\mu \gamma + \text{συν} \Gamma \eta\mu \alpha \text{ συν } \beta = P \text{ συν } \alpha \eta\mu \beta$. θέτοντες ἔπειτα εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὴν τιμὴν $\eta\mu \gamma = \frac{\eta\mu \alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$, ἔχομεν διὰ τὸν τρίτον συνδυασμὸν

$$\sigma\phi A \eta\mu \Gamma + \text{συν} \Gamma \text{συν} \beta = \sigma\phi \alpha \eta\mu \beta \quad (1)$$

Τέλος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ A, B, Γ, α σχέσιν, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν ὁ ὅρος $\sigma\phi \alpha \eta\mu \beta = P \text{ συν } \alpha \cdot \frac{\eta\mu \beta}{\eta\mu \alpha} = P \text{ συν } \alpha \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A}$. λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ $\eta\mu A$, θελομεν ἔχει $P \text{ συν} A \eta\mu \Gamma = P \text{ συν } \alpha \eta\mu B - \eta\mu A \text{ συν } \Gamma \text{συν } \beta$.

(1) Διὰ τὴν εὐκόλον ἐνθύμησιν τούτου τοῦ τύπου καὶ τὴν εὐρεσίαν του εἰς τὴν χρειάν, φύλαξον τὸν ἀκλόουθεν κανόνα τῆς Μνημονικῆς:

τόν Μὲ τὴν πλευρὰν α καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν A ,

Μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν β καὶ τὴν προσκειμένην γωνίαν Γ , σχηματίσων τὴν πλασὴν ἐξίσωσιν $\sigma\phi \alpha \sigma\phi A = \sigma\phi \beta \sigma\phi \Gamma$, παρατηρῶν νὰ θέτῃς τὰ μικρὰ γράμματα ἔμπροσθεν τῶν μεγάλων.

2ον Πολλαπλασίωσον καὶ τὰ δύο μέρη ἐπὶ $\eta\mu \beta$ ἢ $\eta\mu \Gamma$, ὑποθέτων τὴν ἀκτῖνα $P=1$ · θέλεις ἔχει

$$\sigma\phi \alpha \eta\mu \beta \sigma\phi A \text{ ἢ } \eta\mu \Gamma = \text{συν } \beta \text{ συν } \Gamma.$$

3ον Χώρισον εἰς τὸ πρῶτον μέλος τὰ μικρὰ γράμματα τῶν μεγάλων, θέτων ἔμπροσθεν τούτων τὸ σημεῖον—· θέλεις ἔχει τὴν ἀληθῆ ἐξίσωσιν

$$\sigma\phi \alpha \text{ ἢ } \eta\mu \beta - \sigma\phi A \text{ ἢ } \eta\mu \Gamma = \text{συν } \beta \text{ συν } \Gamma$$

Ἡγὶς οὗτα ὁμογενῆς ἔχει χώραν, καὶ χωρὶς νὰ ὑποτεθῇ $P=1$. Ο. Σ.

Εὰν εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν μεταθέσωμεν τὰ γράμματα A καὶ B , καθὼς ἀκόμη α καὶ β , θέλομεν εἶναι

$$P \text{ συν } B \text{ ἢ } \Gamma = P \text{ συν } \beta \text{ ἢ } A - \text{ἢ } B \text{ συν } \Gamma \text{ συν } \alpha.$$

Καὶ ἐκ τῶν δύο τούτων, διὰ τῆς ἀπαλείψεως τοῦ συν β ,

$$P^2 \text{ συν } A \text{ ἢ } \Gamma + P \text{ συν } B \text{ ἢ } \Gamma \text{ συν } \Gamma = \text{συν } \alpha \text{ ἢ } B \text{ ἢ } \Gamma.$$

Λοιπὸν τέλος

$$\text{συν } \alpha = \frac{P^2 \text{ συν } A + P \text{ συν } B \text{ συν } \Gamma}{\text{ἢ } B \text{ ἢ } \Gamma}.$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη μεταξὺ A, B, Γ, α σχέσις, ἥτις εἶναι ἡ τετάρτη τῶν ἀναγκαίων ἐξισώσεων διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

πα'. Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις μεταξὺ A, B, Γ, α παρρησιάζει ἐξαίσιον ἀναλογίαν μὲ τὴν πρώτην μεταξὺ α, β, γ, A καὶ ἡμποροῦμεν νὰ ἀποδώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς ιδιότητος τῶν πολικῶν ἢ παραπληρωματικῶν τριγώνων. Ἐφ' ὄντι, εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι A, B, Γ , καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ α, β, γ ἀντιστοιχεῖ εἰς πολικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $200^\circ - A, 200^\circ - B, 200^\circ - \Gamma$, καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι $200^\circ - \alpha, 200^\circ - \beta, 200^\circ - \gamma$. Τώρα ἡ ἐφαρμοσις τῆς τοῦ ἀρ. 55' ἀρχῆς εἰς τοῦτο τὸ τελευταῖον τρίγωνον, δίδει

$$\text{συν}(200^\circ - \alpha) = \frac{P^2 \text{ συν}(200^\circ - A) - P \text{ συν}(200^\circ - B) \text{ συν}(200^\circ - \Gamma)}{\text{ἢ } (200^\circ - B) \text{ ἢ } (200^\circ - \Gamma)}.$$

ἥτις ἀνάγεται εἰς

$$\text{συν } \alpha = \frac{P^2 \text{ συν } A + P \text{ συν } B \text{ συν } \Gamma}{\text{ἢ } B \text{ ἢ } \Gamma},$$

ὥς δι' ἄλλης ὁδοῦ εὑρεμεν.

Ο τύπος οὗτος λύει ἀμέσως τὴν περίστασιν καθ' ἣν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν μίαν πλευρὰν διὰ μέσου τῶν τριῶν γωνιῶν· πλὴν διὰ νὰ εὑρωμεν ἐπιτηδειότερον διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμὸν τύπον, ἀντικαθιστῶμεν

$$\begin{aligned} \text{τὴν τιμὴν τοῦ συν } \alpha \text{ εἰς τὴν ἐξίσωσιν } 1 - \frac{\text{συν } \alpha}{P} &= \frac{2\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha}{P^2}, \\ \text{καὶ συνάγομεν } \frac{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha}{P^2} &= \frac{\eta\mu B \text{ ἢ } \mu \Gamma - \text{συν } B \text{ συν } \Gamma - P \text{ συν } A}{2\eta\mu B \text{ ἢ } \mu \Gamma} \\ &= \frac{-P \text{ συν } (B + \Gamma) - P \text{ συν } A}{2\eta\mu B \text{ ἢ } \mu \Gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Καὶ ἐπειδὴ ἐν γένει (ἀρ. κη') } P \text{ συν } \pi + P \text{ συν } \kappa &= \\ 2 \text{ συν } \frac{1}{2} (\pi + \kappa) \text{ συν } \frac{1}{2} (\pi - \kappa), \text{ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνά-} \\ \text{γεται εἰς } \frac{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha}{P^2} &= \frac{-\text{συν } \frac{1}{2} (A + B + \Gamma) \text{ συν } \frac{1}{2} (B + \Gamma - A)}{\eta\mu B \text{ ἢ } \mu \Gamma}, \end{aligned}$$

Εὐθα παρατηρητέον ὅτι ἂν καὶ τὸ δεύτερον μέλος ὑπὸ μορφὴν ἀρνητικὴν, εἶναι μ' ὅλον τοῦτο πάντοτε θετικόν. Διότι ἐν γένει ἡμ. ($\chi - 100^\circ$)

$$= \frac{\eta\mu \chi \text{ συν } 100^\circ - \text{συν } \chi \eta\mu 100^\circ}{P} = \text{συν } \chi \cdot \text{λοιπὸν}$$

$-\text{συν } \frac{1}{2} (A + B + \Gamma) = \eta\mu \left(\frac{A + B + \Gamma}{2} - 100^\circ \right)$
 ποσότης ἣτις πάντοτε εἶναι θετικὴ· διότι ἐπειδὴ $A + B + \Gamma$ πάντοτε περιέχεται μεταξύ 200° καὶ 600° , ἡ γωνία $\frac{1}{2} (A + B + \Gamma) - 100^\circ$ περιέχεται μεταξύ μηδενὸς καὶ 200° . ἄλλως $\text{συν } \frac{1}{2} (B + \Gamma - A)$ εἶναι πάντοτε θετικόν, διότι $B + \Gamma - A$ δὲν δύναται νὰ ὑπὲρβαίνῃ 200° . τῶ ὄντι εἰς τὸ πολικὸν τρίγωνον ἡ πλευρὰ $200^\circ - A$ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων $200^\circ - B$, $200^\circ - \Gamma$. λοιπὸν $200^\circ - A < 400^\circ - B - \Gamma$ ἢ $B + \Gamma - A < 200^\circ$.

Βεβαιωθέντες οὕτως ὅτι τὸ ἐξαγόμενον πάντοτε θέλει εἶναι θετικόν, ἡμποροῦμεν ἀσφαλῶς νὰ ἐξάξωμεν τὴν ρίζαν, καὶ ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον τύπον διὰ τὴν προσδιόρισιν μιᾶς πλευρᾶς διὰ μέσου τῶν γωνιῶν,

$$\eta\mu \frac{1}{2} \alpha = P \sqrt{\left\{ -\text{συν } \frac{A + B + \Gamma}{2} \text{ συν } \frac{B + \Gamma - A}{2} \right\}}$$

$\eta\mu B \text{ ἢ } \mu \Gamma$

πβ'. Πρὶν ὑπάγωμεν περαιτέρω, σημειοῦμεν ὅτι ἀπὸ τοὺς γενικοὺς τούτους τύπους, δυνάμεθα νὰ συναΐξωμεν τοὺς ἀναφερομένους εἰς τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα. Πρὶς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν $A=100^\circ$, τύσον εἰς τοὺς τέσσαρας ἀρχικοὺς τύπους ὅσον καὶ εἰς τοὺς ἐξ αὐτῶν συναγομένους διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων. Καὶ ἐν πρώτοις πράττοντες τὴν τοιαύτην ἀντεισαγωγὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\text{συν } A \text{ ἢ } \mu \beta \text{ ἢ } \mu \gamma = P^2 \text{ συν } \alpha - P \text{ συν } \beta \text{ συν } \gamma$, εὐρίσκωμεν

$$P \text{ συν } \alpha = \text{συν } \beta \text{ συν } \gamma. \quad (1)$$

Αἱ συναγομέναι τῆς γενικῆς ἐξίσωσεως δὲν περιέχουν A καὶ διὰ τοῦτο δὲν δίδουν καμμίαν νέαν σχέσιν ὅταν $A=100^\circ$.

$$\text{Ἡ ἐξίσωσις } \frac{\text{ἡμ } A}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ } B}{\text{ἡμ } \beta}, \text{ δίδει ὅταν } A=100^\circ,$$

$$\frac{P}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ } B}{\text{ἡμ } \beta}. \quad (2)$$

$$\text{καὶ ἡ συναγομένη } \frac{\text{ἡμ } A}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ } \Gamma}{\text{ἡμ } \gamma}, \text{ ἥθελε δώσει ἐπίσης } \frac{P}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ } \Gamma}{\text{ἡμ } \gamma}.$$

ἀλλ' αὕτη εἶναι συναγομένη τῆς ἐξίσωσεως (2)

$$\text{Ἡ ἐξίσωσις } \text{σφ } A \text{ ἢ } \mu \Gamma + \text{συν } \Gamma \text{ συν } \epsilon = \tau \gamma \alpha \text{ ἢ } \mu \beta \text{ δίδει ἐν τῇ ὑποθέσει τῆς } A=100^\circ, \text{ συν } \Gamma \text{ συν } \beta = \text{σφ } \alpha \text{ ἢ } \mu \beta, \text{ ἢ}$$

$$\text{συν } \Gamma \epsilon \phi \alpha = P \epsilon \phi \beta. \quad (3)$$

$$\text{Ἡ συναγομένη } \text{σφ } \Gamma \text{ ἢ } \mu A + \text{συν } A \text{ συν } \beta = \text{σφ } \gamma \text{ ἢ } \mu \beta \text{ δίδει εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν, } P \text{ σφ } \Gamma = \text{σφ } \gamma \text{ ἢ } \mu \beta, \text{ ἢ}$$

$$P \epsilon \phi \gamma = \text{ἡμ } \epsilon \phi \Gamma. \quad (4)$$

Τέλος ἡ τετάρτη ἀρχικὴ ἐξίσωσις $\text{ἡμ } B \text{ ἢ } \mu \Gamma \text{ συνα} = P^2 \text{ συν } A + P \text{ συν } B \text{ συν } \Gamma$ καὶ ἡ συναγομένη τῆς $\text{ἡμ } A \text{ ἢ } \mu \Gamma \text{ συν } \beta = P^2 \text{ συν } B + P \text{ συν } A \text{ συν } \Gamma$, δίδουν εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν $A=100^\circ$, $\text{ἡμ } B \text{ ἢ } \mu \Gamma \text{ συν } \alpha = P \text{ συν } B \text{ συν } \Gamma$ καὶ $\text{ἡμ } \Gamma \text{ συν } \epsilon = P \text{ συν } B$, ἢ

σφ Β σφ Γ = Ρ συν α,

(5)

ήμ Γ συν β = Ρ συν Β.

(6)

Αὗται εἶναι αἱ ἐξ ἐξισώσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελι-
οῦται ἡ λύσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

πγ'. Τελειόνομεν ταύτας τὰς ἀρχὰς δίδοντες τὴν ἀ-
πόδειξιν τῶν Ἀναλογιῶν τοῦ Νεπέρου (Nepcr), διὰ
τῶν ὁποίων ἀπλουσεύονται πολλὰι περιστάσεις τῆς λύσεως
τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

Διὰ τῆς συμπλοκῆς τῶν τιμῶν τοῦ συν Α καὶ συν Γ
ἐκπεφρασμένων διὰ α, β, γ, εὔρομεν τὴν ἐξίσωσιν (ἀρ. π')

Ρ συν Α ήμ γ = Ρ συν α ήμ β — συν Γ ήμ α συν β.

Αὕτη δι' ἀπλῆς μεταθέσεως δίδει:

Ρ συν Β ήμ γ = Ρ συν β ήμ α — συν Γ ήμ β συνα.

Λοιπὸν προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ
ἀνάγοντες θέλομεν ἔχει

ήμ γ (συν Α + συν Β) = (Ρ — συν Γ) ήμ (α + β).

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\eta\mu \gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\eta\mu \alpha}{\eta\mu \Delta} = \frac{\eta\mu \epsilon}{\eta\mu \beta}$, ἔχομεν

ήμ γ (ήμ Α + ήμ Β) = ήμ Γ (ήμ α + ήμ β)

καὶ ήμ γ (ήμ Α — ήμ Β) = ήμ Γ (ήμ α — ήμ β).

Διαιροῦντες διαδοχικῶς τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις
διὰ τῆς προηγουμένης, θέλομεν ἔχει

$\frac{\eta\mu \Delta + \eta\mu \beta}{\sigma\upsilon\nu \Delta + \sigma\upsilon\nu \beta} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\rho - \sigma\upsilon\nu \Gamma} \cdot \frac{\eta\mu \alpha + \eta\mu \beta}{\eta\mu (\alpha + \beta)}$

$\frac{\eta\mu \Delta - \eta\mu \beta}{\sigma\upsilon\nu \Delta + \sigma\upsilon\nu \beta} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\rho - \sigma\upsilon\nu \Gamma} \cdot \frac{\eta\mu \alpha - \eta\mu \beta}{\eta\mu (\alpha - \beta)}$

Καὶ ἀνάγοντες ταύτας διὰ τῶν τύπων τῶν ἄρθρων
κ' καὶ λ' εὐρίσκομεν

$\epsilon\phi \frac{1}{2} (A + B) = \sigma\phi \frac{1}{2} \Gamma \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\alpha + \epsilon)}$

$\epsilon\phi \frac{1}{2} (A - B) = \sigma\phi \frac{1}{2} \Gamma \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\eta\mu \frac{1}{2} (\alpha + \epsilon)}$

Δοθείσων λοιπὸν τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Γ , εὐρίσκομεν τὰς δύο ἄλλας γωνίας A καὶ B διὰ τῶν ἀναλογιῶν,

$$\text{συν} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \text{συν} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) :: \sigma\phi \frac{1}{2}\Gamma : \epsilon\phi \frac{1}{2}(A + B)$$

$$\eta\mu \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \eta\mu \frac{1}{2}(\alpha - \beta) :: \sigma\phi \frac{1}{2}\Gamma : \epsilon\phi \frac{1}{2}(A - B)$$

Εὰν ἐφαρμόσωμεν τὰς ἰδίας ταύτας ἀναλογίας εἰς τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, πρέπει ἀντὶ τῶν $\alpha, \beta, A, B, \Gamma$ νὰ θέσωμεν ἀμοιβαίως $200^\circ - A, 200^\circ - B, 200^\circ - \alpha, 200^\circ - \beta, 200^\circ - \gamma$ καὶ θέλομεν ἔχει δι' ἐξαγόμενον τὰς ἀκολουθοῦσας δύο ἀναλογίας

$$\text{συν} \frac{1}{2}(A + B) : \text{συν} \frac{1}{2}(A - B) :: \epsilon\phi \frac{1}{2}\gamma : \epsilon\phi \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu \frac{1}{2}(A + B) : \eta\mu \frac{1}{2}(A - B) :: \epsilon\phi \frac{1}{2}\gamma : \epsilon\phi \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Διὰ τῶν ὁποίων, δοθέντων μιᾶς πλευρᾶς γ καὶ τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν A καὶ B , δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς α καὶ β . Αἱ τέσσαρες αὗται ἀναλογίαι εἶναι γνωσταὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα **Αναλογίαι τοῦ Νεπέρου**.

Λύσεις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἐν γένει.

Ἡ λύσις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων περιλαμβάνει ἕξ γενικὰς περιπτώσεις, τὰς ὁποίας κατὰ διαδοχὴν θέλομεν ἀναπτύξει.

Π Ρ Ω Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

πδ'. Δοθείσων τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ , εὐρίσκεται ὁποιαδήποτε γωνία, ἡ ἀπέναντι, φερ' εἰπεῖν, εἰς τὴν πλευρὰν α , διὰ τοῦ τύπου

$$\eta\mu \frac{1}{2} A = P \sqrt{\frac{\eta\mu \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}}{\eta\mu \beta \eta\mu \gamma}}$$

Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Α Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

πέ'. Δοθείσων δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς γωνίας A ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων, νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ γ καὶ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι B καὶ Γ .

2^{ον} Η γωνία Β εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως ἡμ Β
 $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$

2^{ον} Διὰ νὰ εὑρωμεν δὲ τὴν Γ, πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\sigma\phi\Lambda \eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\Gamma \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\phi\alpha \eta\mu\beta.$$

πρὸς τοῦτο ἃς λάβωμεν συμβοηθητικὴν τινὰ γωνίαν φ

$$\text{εἰς τρόπον ὥστε } \epsilon\phi.\phi = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta \epsilon\phi\Lambda}{P} (*) \text{ ἢ } \sigma\phi\Lambda = \frac{\sigma\upsilon\nu\delta\sigma\upsilon\nu\phi}{\eta\mu\phi}.$$

ἡ τιμὴ αὕτη τῆς σφ Α ἀντικαθιστῶσα εἰς τὴν λυτέαν

$$\text{ἐξίσωσιν δίδει } \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\phi} (\sigma\upsilon\nu\phi \eta\mu\Gamma + \eta\mu\phi \sigma\upsilon\nu\Gamma) = \sigma\phi\alpha \eta\mu\beta \text{ καὶ ἐντεῦθεν}$$

$$\eta\mu(\Gamma + \phi) = \frac{\epsilon\phi\beta \eta\mu\phi}{\epsilon\phi\alpha}.$$

Διὰ τοῦ τεχνεύματος τούτου, βλέπομεν ὅτι οἱ δύο ἄγνωστοι ὅροι εἰς τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν ἤχθησαν εἰς ἓνα μόνον, καὶ οὕτως εὐκόλως συνάγεται ἡ τιμὴ τῆς Γ.

3^{ον} Η πλευρὰ γ εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}.$$

Ἡμποροῦμεν δὲ καὶ κατ' εὐθείαν νὰ τὴν προσδιορίσωμεν λύοντες τὴν ἐξίσωσιν :

$$P \sigma\upsilon\nu\beta \sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu\Lambda \eta\mu\beta \eta\mu\gamma = P^2 \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

(*) Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως δὲν εἶναι ἐπιτέδσιον διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν διὰ νὰ φθάσῃ λείπον ὁ συγγραφεὺς εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς ἐκείας νὰ συνάγεται ἡ τιμὴ τῆς Γ διὰ τῶν λογαριθμῶν, φαντάζεται ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ἐποίου ἡ ὑποτείνουσα νὰ ἔχῃ τόσας μοῖρας ὅσας ἡ δεδομένη γωνία Α, καὶ νὰ κάμῃ γωνίαν μὲ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην μὲ β, ἥτις δηλονότι νὰ περιέχῃ τόσας μοῖρας ὅσας ἡ δεδομένη πλευρὰ β· καλῶν τὴν πλευρὰν ἐκείνην φ, ἔχει, κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχὴν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὴν ἀναλογίαν P : σὺν β :: ἐφ Α : ἐφ.

$$\phi = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta \epsilon\phi\Lambda}{P}. \quad \text{O. M.}$$

$$\text{Πρὸς τοῦτο, ἔσω συνΑήμβ} = \frac{\text{Ρσυν } \epsilon \text{ ήμ } \varphi}{\text{συν } \varphi}, \text{ ἢ ἐφ. } \varphi$$

$$= \frac{\text{συν } \Lambda \text{ ἐφ } \beta}{\text{Ρ}}, \text{ θέλομεν ἔχει}$$

$\frac{\text{συν } \beta}{\text{συν } \varphi} (\text{συν } \gamma \text{ συν } \varphi + \text{ήμ } \gamma \text{ ήμ } \varphi) = \text{Ρσυν } \alpha$. Αφ' οὗ λοιπὸν
ζητήσωμεν τὴν συμβοηθητικὴν φ διὰ τῆς ἐξισώσεως ἐφ.
 $\varphi = \frac{\text{συν } \Lambda \text{ ἐφ } \beta}{\text{Ρ}}$, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πλευρὰν γ ,
ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\text{συν}(\gamma - \varphi) = \frac{\text{συν } \alpha \text{ συν } \varphi}{\text{συν } \beta}$$

Ἡ δευτέρα αὕτη περίσασις, ὡς καὶ ἡ ἀνάλογος τῶν
εὐθυγράμμων τριγώνων, δυνατόν νὰ ἔχη δύο λύσεις.

Τ Ρ Γ Τ Π. Π Ε Ρ Γ Σ Γ Α Σ Γ Σ.

πς'. Διοθετῶν δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς περι-
χομένης γωνίας Γ , νὰ εὐρέθωσιν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Λ
καὶ B καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ γ .

1^{ον} Αἱ γωνίαι Λ καὶ B εὐρίσκονται διὰ τῶν δύο
τούτων ἐξισώσεων

$$\sigma\varphi \Lambda = \frac{\sigma\varphi \alpha \text{ ήμ } \beta - \text{συν } \Gamma \text{ συν } \beta}{\text{ήμ } \Gamma}$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\sigma\varphi \beta \text{ ήμ } \alpha - \text{συν } \Gamma \text{ συν } \alpha}{\text{ήμ } \Gamma}$$

εἰς τὰς ὁποίας τὰ δευτέρα μέλη δυνατόν διὰ τινος συμ-
βοηθητικῆς νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἓνα μόνον ὅρον· ἀλλ' εἶναι
ἀπλούστερον νὰ μεταχειρισθῶμεν, εἰς ταύτην τὴν περι-
στασιν, τὰς ἀναλογίας τοῦ Νεπέρου, αἵτινες δίδουν

$$\text{ἐφ } \frac{\Lambda - B}{2} = \sigma\varphi \frac{1}{2} \Gamma \cdot \frac{\text{ήμ } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{ήμ } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

$$\text{ἐφ } \frac{\Lambda + B}{2} = \sigma\varphi \frac{1}{2} \Gamma \cdot \frac{\text{συν } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{συν } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

2^{ον} Γνωρίζοντες τὰς γωνίας Λ καὶ B , ἤμποροῦμεν νὰ
λογαριάζωμεν τὴν τρίτην πλευρὰν γ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\Lambda}$. ἀλλὰ διὰ τὴν κατ' εὐθείαν προσδιόρισίν της, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$P' \text{ συν } \gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \text{ συν } \Gamma + P \text{ συν } \alpha \text{ συν } \beta.$$

Ἀς ληφθῇ ἡ συμβοηθητικὴ ϕ , εἰς τρόπον ὥστε $\eta\mu\beta \text{ συν } \Gamma = \text{συν } \epsilon \phi \cdot \phi$, ἢ $\epsilon \phi \cdot \rho = \frac{\text{συν } \Gamma \epsilon \phi \beta}{\rho}$. θέλομεν ἔχει

$$\text{συν } \gamma = \frac{\text{συν } \epsilon}{\text{συν } \phi} \text{ συν } (\alpha - \phi).$$

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πζ. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν Λ καὶ B μετὰ τῆς προσκειμένης πλευρᾶς γ , νὰ εὐρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ α καὶ β , καὶ ἡ τρίτη γωνία γ .

1ον Αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β δίδονται διὰ τῶν τύπων.

$$\sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\phi\Lambda \cdot \eta\mu\beta + \text{συν } B \text{ συν } \gamma}{\eta\mu\gamma}$$

$$\sigma\phi\beta = \frac{\sigma\phi B \cdot \eta\mu\Lambda + \text{συν } \Lambda \text{ συν } \gamma}{\eta\mu\gamma},$$

ἀλλ' εὐκολώτερον ἡμποροῦμεν νὰ τὰς λογαριάσωμεν διὰ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπέρου, τοῦτ' ἔστι:

$$\eta\mu\frac{\Lambda+B}{2} : \eta\mu\frac{\Lambda-B}{2} :: \epsilon\phi\frac{1}{2}\gamma : \epsilon\phi\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{συν}\frac{\Lambda+B}{2} : \text{συν}\frac{\Lambda-B}{2} :: \epsilon\phi\frac{1}{2}\gamma : \epsilon\phi\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2ον Γνωρίζοντες α καὶ β , εὐρίσκομεν Γ διὰ τῆς ἐξίσωσεως $\eta\mu\Gamma = \frac{\eta\mu\gamma \cdot \eta\mu\Lambda}{\eta\mu\alpha}$. πλὴν δυνάμεθα ἀκόμη νὰ προσδιορίσωμεν κατ' εὐθείαν τὴν Γ διὰ τῆς ἐξίσωσεως

$$P' \text{ συν } \Gamma = \text{συν } \gamma \cdot \eta\mu\Lambda \cdot \eta\mu\beta - P \text{ συν } \Lambda \text{ συν } B.$$

Ἀς ληφθῇ ἡ συμβοηθητικὴ ϕ , εἰς τρόπον ὥστε $\text{συν } \gamma \cdot \eta\mu\beta = \text{συν } B \cdot \sigma\phi\phi$, ἢ $\sigma\phi\phi = \frac{\text{συν } \gamma \epsilon\phi B}{\rho}$, θέλομεν ἔχει

$$\text{συν } \Gamma = \text{συν } B \cdot \frac{\eta\mu(\Lambda - \phi)}{\eta\mu\phi}.$$

Η παροῦσα καὶ ἡ προλαβοῦσα περίσασις δὲν ἀφίνουν οὐδεμίαν ἀπροσδιορισίαν.

Π Ε Μ Π Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

πῆ'. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β μετὰ τῆς πλευρᾶς α ἀπέναντι μιᾶς τούτων τῶν γωνιῶν, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ β, γ, καὶ ἡ τρίτη γωνία Γ.

1^{ον} Η πλευρὰ β εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως ἡμ β

$$= \text{ἡμ α} \cdot \frac{\text{ἡμ Β}}{\text{ἡμ Α}}$$

2^{ον} Η πλευρὰ γ κρίνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν

$$\sigmaφ α \text{ ἡμ γ} = \sigmaυν Β \sigmaυν γ = \sigmaφ Α \text{ ἡμ Β}.$$

$$\text{Εἰσω } \sigmaφ α = \sigmaυν Β \frac{\sigmaυν φ}{\text{ἡμ φ}} \text{ ἢ ἐφ. φ} = \frac{\sigmaυν Β \epsilonφ α}{P}, \text{ θέλομεν ἔχει}$$

$$\frac{\sigmaυν Β}{\text{ἡμ φ}} (\text{ἡμ γ} \sigmaυν φ - \sigmaυν γ \text{ ἡμ φ}) = \sigmaφ Α \text{ ἡμ Β} \cdot \text{λοιπὸν}$$

$$\text{ἡμ}(γ - φ) = \frac{\epsilonφ Β \text{ ἡμ φ}}{\epsilonφ Α}$$

3^{ον} Τὴν γωνίαν Γ δίδει ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\sigmaυν α \text{ ἡμ Β ἡμ Γ} - Ρ \sigmaυν Β \sigmaυν Γ = Ρ^2 \sigmaυν Α.$$

$$\text{Εἰσω } \sigmaυν α \text{ ἡμ Β} = \frac{Ρ \sigmaυν Β \sigmaυν φ}{\text{ἡμ φ}}, \text{ ἢ } \sigmaφ. φ = \frac{\sigmaυν α \epsilonφ Β}{P},$$

$$\text{θέλομεν ἔχει } \frac{\sigmaυν Β}{\text{ἡμ φ}} (\text{ἡμ Γ} \sigmaυν φ - \sigmaυν Γ \text{ ἡμ φ}) = Ρ \sigmaυν Α \cdot \text{λοιπὸν}$$

$$\text{ἡμ}(Γ - φ) = \frac{\sigmaυν Α \text{ ἡμ φ}}{\sigmaυν Β}$$

Η πέμπτη αὕτη περίσασις, καθὼς καὶ ἡ δευτέρα, εἶναι ἐπιδεκτικὴ δύο λύσεων, ὡς τοῦτο ἔχει χῶραν εἰς τὴν ἀνάλογον περίσασιν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

Ε Κ Τ Η Π Ε Ρ Ι Σ Τ Α Σ Ι Σ.

πῆ'. Δοθεισῶν τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, εὑρίσκεται ὁποιαδήποτε πλευρὰ, ἡ ἀπέναντι, φερ' εἰπεῖν, εἰς τὴν γωνίαν Α, διὰ τοῦ τύπου

$$\text{ἡμ} \frac{1}{2} α = Ρ \sqrt{\left(\frac{-\sigmaυν \frac{1}{2} (Α + Β + Γ) \sigmaυν \frac{1}{2} (Β + Γ - Α)}{\text{ἡμ Β ἡμ Γ}} \right)}$$

Ἡμποροῦμεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἀπὸ τὰς ἐξ ταύτας γενικὰς περιζήσεις αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἡμποροῦσαν νὰ συναχθοῦν ἀπὸ τὰς τρεῖς πρώτας, διὰ τῆς ιδιότητος τῶν πολυγῶν τριγώνων: ὥςτε κυρίως δὲν ὑπάρχουν παρὰ τρεῖς διαφορετικαὶ περιζήσεις εἰς τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Ἡ πρώτη περίσσις λύεται διὰ μιᾶς μόνης ἀναλογίας, ὡς καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα· ἡ τρίτη λύεται μὲ τὸν αὐτὸν σχεδὸν ἀπλοῦν τρόπον διὰ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπέρου. Ὅσον διὰ τὴν δευτέραν, ἀπαιτεῖ δύο ἀναλογίας, καὶ περιπλέον ἐνίοτε εἶναι ἐπιδεκτικὴ δύο λύσεων, ἐν ᾧ ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη δὲν εἶναι ἐπιδεκτικαὶ πάρεξ μιᾶς μόνον.

γ. Διὰ νὰ ἡξεύρωμεν πότε εἰς τὴν δευτέραν περίσστιν ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ὅποια περιέχουν τὰς δεδομένας μερικὰς τιμὰς τῶν A , α , β , καὶ ἐπομένως πληροῦν εἰς τὸ ζήτημα, καὶ πότε ὑπάρχει ἓν μόνον ἄς ὑποθέσωμεν (σχ. 16) ἐν πρώτοις τὴν γωνίαν $A < 100^\circ$, καὶ ἄς προεκβάλλωμεν τὰς δύο πλευρὰς AG , AB ἕως οὗ πάλιν νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς A' . Ἐὰν λάβωμεν τὸ τόξον $AG < 100^\circ$, καὶ κατεβάσωμεν GD κάθετον ἐπὶ τὴν AB , αἱ πλευραὶ AD , GD , τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AGD θέλουν εἶναι καὶ αἱ δύο μικρότεραι τῶν 100° , ἡ γραμμὴ GD θέλει εἶναι ἡ σιμωτινότερα ἀπίσσις τῆς σιγμῆς G ἀπὸ τὸ τόξον AB , καὶ ἐὰν λάβωμεν $\Delta B' = \Delta B$, αἱ πλάγια GB' , GB θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ τόσον μακρότεραι ὅσον περισσότερον ἀπέχουσι τῆς καθέτου. Ἐς ω $AG = \beta$, $GB = \alpha$, βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἐν τρίγωνον εἰς τὸ ὅποιον $A < 100^\circ$, $\beta < 100^\circ$, καὶ $\alpha < \beta$, ἔχει ἀναγκαιῶς δύο λύσεις AGB , AGB' . ἄλλ' ἐὰν ὑποθέτοντες πάντοτε A καὶ β μικρότερα τῶν 100° , ἔχωμεν $\alpha > \beta$, τότε ἡ σιγμὴ B' , ἤθελε περᾶσει ἐκείθεν τῆς A , καὶ δὲν ἤθελεν ὑπάρχει πάρεξ μία λύσις καριςανομένη ὑπὸ ABG .

Ἐς ω ἀκολουῶς $AG' > 100^\circ$, ἐὰν κατεβάσωμεν τὴν

κάθετον $\Gamma\Delta'$ ἐπὶ $\Lambda\text{Β}\Lambda'$, θέλομεν ἔχει ὡσαύτως $\Gamma\Delta' < \Lambda\Gamma'$, καὶ τὸ τόξον $\Gamma\text{Β}''$ ἄχθεν μεταξὺ Δ' καὶ Λ' , θέλει εἶναι $> \Gamma\Delta'$ καὶ $> \Gamma\Lambda'$. λοιπὸν ἐὰν κάμωμεν $\Lambda\Gamma' = \beta$, $\Gamma\text{Β}'' = \Gamma\text{Β}''' = \alpha$, βλέπομεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις $\Lambda < 100^\circ$ καὶ $\beta > 100^\circ$ δίδει δύο λύσεις ἐὰν $\alpha + \beta < 200^\circ$, καὶ δὲν δίδει πᾶρεξ μίαν ἐὰν $\alpha + \beta > 200^\circ$, διότι τότε ἡ τιγμὴ $\text{Β}'''$ περνᾷ ἐκεῖθεν τῆς Λ' . Εὐρευνῶντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν περίσασιν καθ' ἣν $\Lambda > 100^\circ$, ἡμποροῦμεν νὰ τρεψώσωμεν τὰ συμπτώματα τὰ ὁποῖα προσδιορίζουν ἐὰν εἰς τὴν β' περίσασιν, τὸ ζήτημα ἐπιδέχεται μίαν ἢ δύο λύσεις.

$$\begin{array}{l}
 \Lambda < 100^\circ, \beta < 100^\circ \left\{ \begin{array}{ll} \alpha > \beta & \text{μία λύσις.} \\ \alpha < \beta & \text{δύο λύσεις.} \end{array} \right. \\
 \Lambda < 100^\circ, \beta > 100^\circ \left\{ \begin{array}{ll} \alpha + \beta > 200^\circ & \text{μία λύσις.} \\ \alpha + \beta < 200^\circ & \text{δύο λύσεις.} \end{array} \right. \\
 \Lambda > 100^\circ, \beta < 100^\circ \left\{ \begin{array}{ll} \alpha + \beta > 200^\circ & \text{δύο λύσεις.} \\ \alpha + \beta < 200^\circ & \text{μία λύσις.} \end{array} \right. \\
 \Lambda > 100^\circ, \beta > 100^\circ \left\{ \begin{array}{ll} \alpha > \beta & \text{δύο λύσεις.} \\ \alpha < \beta & \text{μία μόνη λύσις.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Δὲν ὑπάρχει παρὰ μία μόνη λύσις ἐὰν $\Lambda = 100^\circ$, εἴτε $\alpha = \beta$, εἴτε $\alpha + \beta = 200^\circ$. ὑπάρχουν δύο, ἐὰν $\beta = 100^\circ$.

γὰ'. Τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν πέμπτην περίσασιν διὰ τοῦ πολικοῦ τριγώνου. Πράττοντες οὕτω συνάγομεν τὰ ἀκόλουθα συμπτώματα, διὰ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν ἐὰν εἰς μερικὰς δεδομένας τιμὰς τῶν $\Lambda, \text{Β}$, α ὑπάρχη ἓν ἢ δύο τρίγωνα πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα.

$$\begin{array}{l}
 \alpha > 100^\circ, \text{Β} > 100^\circ \left\{ \begin{array}{ll} \Lambda < \text{Β} & \text{μία λύσις.} \\ \Lambda > \text{Β} & \text{δύο λύσεις.} \end{array} \right. \\
 \alpha > 100^\circ, \text{Β} < 100^\circ \left\{ \begin{array}{ll} \Lambda + \text{Β} < 200^\circ & \text{μία λύσις.} \\ \Lambda + \text{Β} > 200^\circ & \text{δύο λύσεις.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\alpha < 100^\circ, B > 100^\circ \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{δύο λύσεις.} \\ A + B > 200^\circ & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

$$\alpha < 100^\circ, B < 100^\circ \begin{cases} A < B & \text{δύο λύσεις.} \\ A > B & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

ὑπάρχει μία μόνη λύσις ὅταν ἔχη χώραν μία τῶν ἀκολουθίων ἀνισοτήτων $\alpha = 100^\circ$, $A = B$, $A + B = 200^\circ$. ὑπάρχουν δὲ δύο εἰς $B = 100^\circ$.

γβ'. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, διὰ νὰ ἀποφεύγωμεν τὰς ἀνωφελεῖς ἢ ψευθεῖς λύσεις, πρέπει νὰ εὐθυμώμεθα, 1^{ον} ὅτι κάθε γωνία ἢ πλευρὰ πρέπει νὰ ᾖ μικρότερα τῶν 200° .

2.^{ον} Ὅτι αἱ μεγαλήτεροι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν μεγαλητέρων πλευρῶν, ὥστε εἰς $A > B$ πρέπει καὶ $\alpha > \beta$, καὶ τ' ἀνὰ πάλιν.

Παραδείγματα τῆς λύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

γγ'. Παράδειγμα Α'. Ἐσῶσαν O, M, N (σχ. 15) τρεῖς σιγμαὶ κείμεναι εἰς ἐπίπεδον κλίνον πρὸς τὸν ὀρίζοντα· εἰς ἀπὸ τὰς τρεῖς ταύτας σιγμὰς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι OΔ, Μμ, Νν ἐπὶ τοῦ ὀριζοντείου ἐπιπέδου ΔΕΖ, τὰ εὐρισκόμενα ἀντικείμενα εἰς O, M, N θέλουν παρασταθῇ ἐπὶ τοῦ ὀριζοντείου ἐπιπέδου διὰ τῶν προβολῶν των (1) Δ, μ, ν, καὶ ἡ γωνία MON διὰ τῆς μΔν. Τοῦτου τεθέντος, δοθείσης τῆς γωνίας MON καὶ τῶν κλίσεων

(1) Προβολή (projection) μιᾶς σιγμῆς ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου καλεῖται ὁ πῦς τῆς φερομένης καθέτου ἀπὸ τὴν σιγμὴν εἰς τὸ ἐπίπεδον· προβολὴ δὲ μιᾶς εὐθείας ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἡ εὐθεῖα ἥτις ἐνώνει τὰς προβολὰς δύο σιγμῶν τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου· εἰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου προβολήσωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας εἰς τὸ διάστημα, ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰς προβολὰς ταύτας ἐννοεῖται γωνία προβολικὴ (angle de projection). O. M.

τῶν δύο πλευρῶν τῆς OM, ON ἐπὶ τῆς κορυφαίας (vertical) OΔ, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολικὴ γωνία μΔν.

Ἐκ τῆς σιγμῆς O ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα = 1, ἀγραφθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν συναπάντησιν τῆς σφαιρικῆς ταύτης ἐπιφανείας μὲ τὰς πλευρὰς OM, ON καὶ τὴν κορυφαίαν OΔ εἰς Α, Β, Γ, καὶ τὴν ἔνωσιν τῶν σιγμῶν τούτων διὰ τόξων μεγίστων κύκλων, σχηματίζεται σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ABΓ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι γνωσταί· δύναται λοιπὸν νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ μΔν διὰ τοῦ τύπου τῆς πρώτης περιστάσεως.

Ἐξω παοαδείγματος χάριν, ἡ γωνία MON = AB = 64° 44' 60" ἡ γωνία ΔOM = ΑΓ = 98° 12', καὶ ἡ γωνία ΔON = ΒΓ = 105° 42'. Ο ἀναφερθεῖς τύπος δίδει:

$$\eta \mu^2 \frac{1}{2} \Gamma = P^2 \cdot \frac{\eta \mu 28^\circ 57' 30'' \cdot \eta \mu 35^\circ 87' 30''}{\eta \mu 98^\circ 12' \cdot \eta \mu 105^\circ 42'}$$

Τιμὴ ἥτις λογαριάζεται οὕτω:

Λ. ἡμ 28° 57' 30"	9. 6373956	Λ. ἡμ 98° 12'	9. 9998106
Λ. ἡμ 35° 87' 30"	9. 7276562	Λ. ἡμ 105° 42'	9. 9984242
ἄθροισμα + 2Λ. Ρ.	39. 3650518		19. 9932348
	19. 9932348		
2Λ. ἡμ $\frac{1}{2} \Gamma$	19. 3668170		
Λ. ἡμ $\frac{1}{2} \Gamma$	9. 6834085	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Gamma = 32^\circ 4' 30''.5 \\ \Gamma = 64^\circ 9' 41'' \end{array} \right.$	

Ἡ γωνία λοιπὸν 64° 44' 60" μετρουμένη εἰς ἐπίπεδον κλίνον πρὸς τὸν ὀρίζοντα, ἀνάγεται εἰς 64° 9' 41" προβολομένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὀρίζοντος.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς τὴν σχεδιαστικὴν τέχνην (art de lever les plans), ὅταν αἱ σιγμαὶ τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ προσδιορίσις εὐρίσκονται εἰς ὕψη ἐπαισθητῶς διάφορα ἄνω τοῦ αὐτοῦ ὀριζοντείου ἐπιπέδου.

γδ'. Παράδειγμα Β'. Γνωρίζοντες τὰ πλάτη δύο σιγμῶν τῆς σφαίρας, καὶ τὴν διαφορὰν τῶν μηκῶν των, νὰ εὕρωμεν τὸ πλεόν σιμοτινόν των διάστημα.

Φανταζόμεθα σφαιρικόν τρίγωνον τὸ ΑΓΒ σχηματίζομενον ἀπὸ τὸν βόρειον πόλον Γ, καὶ τοῦς δύο τόπους Α καὶ Β περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος· εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο γνωρίζομεν τὴν εἰς τὸν πόλον γωνίαν ΑΓΒ, ἥτις εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν δύο τόπων Α καὶ Β, καὶ τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ αἱ ὁποῖαι εἶναι τὰ συμπληρώματα τοῦ πλάτους τῶν σιγμῶν Α καὶ Β. Προσδιορίζομεν λοιπὸν τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ διὰ τῶν τύπων τῆς τρίτης περιτάσεως.

Εἰσωσαν, φερ' εἰπεῖν, Α καὶ Β τὰ παρατηρητήρια (observatoires) τῶν Παρισίων καὶ τοῦ Πεκίν· τὸ βόρειον πλάτος τῶν Παρισίων εἶναι $54^{\circ} 26' 36''$, τὸ τοῦ Πεκίν $44^{\circ} 33' 73''$, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν των $126^{\circ} 80' 56''$. Οὕτως ἔχομεν

$$\alpha = 45^{\circ} 73' 64''$$

$$\beta = 55 66 27$$

$$\Gamma = 126 80 56$$

Εχόντες ταῦτα τὰ δοθέντα προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν γ διὰ τῶν τύπων ἐφ.φ $= \frac{\text{συν}\Gamma \epsilon\phi\beta}{p}$, $\text{συν}\gamma = \frac{\text{συν}\beta \text{συν}(\alpha - \varphi)}{\text{συν}\varphi}$, τῶν ὁποίων ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμός.

$$\Lambda. \text{συν}\Gamma 9. 6114352$$

$$\Lambda. \epsilon\phi\beta 10. 0776707$$

$$\Lambda. \epsilon\phi\varphi 9. 6891059$$

Ἡ γωνία φ τὴν ὁποίαν δίδουν οἱ πίνακες διὰ τοῦ λογαριθμοῦ τούτου τῆς ἐφαπτομένης εἶναι $28^{\circ} 94' 23''$. Ἀλλὰ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $\text{συν}\Gamma$ εἶναι ἀρνητικόν, καὶ οὕτως ἐπειδὴ ἐφ.φ εἶναι ἀρνητικὴ, πρέπει νὰ λάβωμεν $\varphi = - 28^{\circ} 94' 23''$, καὶ τοῦτο δίδει $\alpha - \varphi = 74^{\circ} 67' 87''$. Τούτου τεθέντος, παρατηροῦντες ὅτι $\text{συν}(-\varphi) = \text{συν}\varphi$, τελειόνομεν ὡς ἀκολούθως τὸν ὑπολογισμόν.

$$\Lambda. \text{ συν}(\alpha - \varphi) \dots \dots 9. 5880938$$

$$\Lambda. \text{ συν } \beta \dots \dots \dots 9. 8071953$$

$$19. 3952891$$

$$\Lambda. \text{ συν } \varphi \dots \dots \dots 9. 9534823$$

$$\Lambda. \text{ συν } \gamma \dots \dots \dots 9. 4418068$$

Λαμβὼν τὸ ζητούμενον διάστημα $\gamma = 82^\circ 16' 04''$. Τὸ αὐτὸ τοῦτο διάστημα ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ μυριαμέτρων διὰ $821\ 605'$ διότι ἐν μυριαμέτρων εἶναι τὸ μήκος ἐνὸς τόξου δέκα λεπτῶν, καὶ ἐν μέτρον εἶναι τὸ μήκος ἐνὸς τόξου ἴσον μὲ ἐν δέκατον δευτέρου λεπτοῦ.

γ^α. Διὰ νὰ δώσωμεν ἓν παράδειγμα τῆς πέμπτης περιπτώσεως, ἃς προτείνωμεν τὴν λύσιν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο γωνίας $A = 78^\circ 50'$, $B = 54^\circ 0'$, καὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὴν μίαν τούτων $a = 99^\circ 20' 17'$. Μὲ τὰ δοθέντα ταῦτα, εὐρίσκομεν διὰ τοῦ πίνακος τοῦ ἄρθρου γ^α, ὅτι δὲν πρέπει νὰ ὑπάρῃ παρὰ μία μόνη λύσις, διότι ἐνταύτῃ ἔχομεν $a < 100^\circ$, $B < 100^\circ$, καὶ $A > B$. Ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμὸς ταύτης τῆς λύσεως.

1^{ον} Ἡ πλευρὰ β εὐρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A}$

$$\Lambda. \eta\mu\alpha \dots \dots \dots 9. 9999659$$

$$\Lambda. \eta\mu B \dots \dots \dots 9. 8751256$$

$$10 - \Lambda. \eta\mu A \dots \dots \dots 0. 0252525$$

$$\Lambda. \eta\mu\beta \dots \dots \dots 9. 9003440$$

Τοῦτο δίδει $\beta = 58^\circ 50' 14''$ ἢ τὸ παραπλήρωμα τούτου τοῦ τόξου $141^\circ 49' 86''$. ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία $B < A$ πρέπει καὶ ἡ πλευρὰ β νὰ ᾖ $< \alpha$, ὅθεν ἡ πρώτη τιμὴ εἶναι μόνον ἀποδεκτή.

2ον Εἰς εὗρεσιν τῆς πλευρᾶς γ πρέπει νὰ γένη ἐφ. φ

$$\frac{\text{συν } B \text{ ἢ } \varphi \alpha}{p}, \text{ ἢ } \mu. (\gamma - \varphi) = \frac{\text{ἐφ } B \text{ ἢ } \mu \varphi}{\text{ἐφ } A} = \frac{\text{ἐφ } B \text{ σφ } \Lambda \text{ ἢ } \mu \varphi}{p^2}.$$

$\Lambda. \text{συν } B \dots\dots 9.8204063$ $\Lambda. \text{ἐφ } \alpha - \Lambda P \dots 1.9016731$ $\Lambda. \text{ἐφ. } \varphi \dots\dots 11.7220794$ $\varphi = 98^\circ 79' 28''.8$	$\Lambda. \text{ἢ } \mu \varphi \dots\dots 9.9999220$ $\Lambda. \text{ἐφ. } B^2 - \Lambda P \dots 0.0547193$ $\Lambda. \text{σφ } \Lambda \dots\dots 9.5455236$ $\Lambda. \text{ἢ } \mu (\gamma - \varphi) \dots 9.6001649$ $\gamma - \varphi = 26^\circ 7' 70''.5$
--	---

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα $\gamma - \varphi$ προσδιορίζεται δι' ἡμιτόνου, διὰ τοῦτο τύσον ἡμπορεῖ $\gamma - \varphi$ νὰ ἰσοῦται μετὰ τὴν τιμὴν $26^\circ 7' 70''.5$ ὅσον καὶ μετὰ τὸ παραπλήρωμά της $173^\circ 92' 29''.5$ πλὴν ἐπειδὴ ἐὰν ληφθῇ ἡ δευτέρα αὕτη τιμὴ, ἤθελε προκύψει $\gamma > 200^\circ$, διὰ τοῦτο δὲν εἶναι ἀποδεκτὴ καὶ πρέπει νὰ ληφθῇ ἡ πρώτη τιμὴ· οὕτως γ ἰσοῦται μετὰ $124^\circ 71' 99''.3$.

3ον Τέλος διὰ νὰ λογαριάζωμεν κατ' εὐθεΐαν τὴν γωνίαν Γ λαμβάνομεν τοὺς τύπους $\sigma\varphi. \psi = \frac{\text{συν } \alpha \text{ ἢ } \varphi B}{p}, \text{ ἢ } \mu$

$$(\Gamma - \psi) = \frac{\text{συν } \Lambda \text{ ἢ } \mu \psi}{\text{συν } B}.$$

$\Lambda. \text{συν } \alpha \dots\dots 8.0982928$ $\Lambda. \text{ἐφ } B - \Lambda P \dots 0.0547193$ $\Lambda. \text{σφ. } \psi \dots\dots 8.1530121$ $\psi = 99^\circ 9' 45''.5$	$\Lambda. \text{ἢ } \mu \psi \dots\dots 9.9999563$ $\Lambda. \text{συν } A \dots\dots 9.5202711$ $\Lambda. P - \Lambda \text{συν } B \dots 0.1795937$ $\Lambda. \text{ἢ } \mu (\Gamma - \psi) \dots 9.6998211$ $\Gamma - \psi = 33^\circ 40' 54''.5$ $\psi \dots\dots 99 \quad 9 \quad 45. \quad 5$ $\Gamma = 132 \quad 50 \quad 0. \quad 0$
--	--

Δὲν ἐλάβομεν διὰ $\Gamma - \psi$ τὸ παραπλήρωμα τοῦ $33^\circ 40' 54''.5$ διότι τοῦτο ἤθελε δώσει διὰ Γ τιμὴν μεγα-

λητέραν ἀπὸ 2000' ὅθεν τῷ ὄντι βλέπομεν ὅτι τὸ προ-
τεθὲν πρόβλημα δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὸν πάρεξ μιᾶς μόνης
λύσεως.

Σημείωσις. Εἰάν κἀμῶμεν χρῆσιν τῆς παλαιᾶς διαι-
ρέσεως τοῦ κύκλου διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τούτων τῶν πα-
ραδειγμάτων, αἱ διδόμεναι ἢ προσδιοριζόμεναι γωνίαι
θέλουν ἐκφρασθῇ ὡς ἀκολούθως :

Παράδειγμα Α'. Γωνίαι διδόμεναι. $\angle MON = 58^{\circ} 0' 5''$,
 $\angle O M = 88^{\circ} 18' 28''$, 8, $\angle O N = 94^{\circ} 52' 42''$, 8. Γωνία
προσδιοριζομένη $\angle \Gamma = 57^{\circ} 41' 4''$, 9.

Παρ. Β'. Γωνίαι καὶ πλευραὶ διδόμεναι. $\alpha = 41^{\circ} 9'$
 $46''$, $\beta = 500^{\circ} 5' 47''$, $\Gamma = 114^{\circ} 7' 30''$. πλευρὰ συναγο-
μένη $\gamma = 73^{\circ} 46' 40''$.

Παρ. Γ'. Γωνίαι καὶ πλευραὶ διδόμεναι. $A = 70^{\circ} 39'$,
 $B = 48^{\circ} 36'$, $\alpha = 89^{\circ} 16' 53''$, 5. Γωνίαι καὶ πλευραὶ
προσδιοριζόμεναι $\beta = 52^{\circ} 39' 4''$, 5. $\gamma = 112^{\circ} 20' 16''$, 6,
 $\Gamma = 119^{\circ} 15' 0''$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Περιέχον τὴν λύσιν διαφόρων μερικῶν περιπτώσεων
τῆς Τριγωνομετρίας.

Υς'. Η λύσις τῶν τριγώνων, ἐπείαν τὴν ἐξεθέσαμεν, δὲν ἀφίνει ἐν εὐχῇς ἄξιον καὶ ὅσον ἀπεβλέπει τὴν γενικότητα. Δίδονται ὁμοίως τινὲς περιπτώσεις εἰς τὰς ἐπείας ἢ χρῆσις μερικῶν λύσεων ἀντὶ τῶν γενικῶν, εἶναι ἐπωφελεῖς, εἴτε ἐπειδὴ δι' αὐτῶν συντίμωνται οἱ ὑπολογισμοί, εἴτε ἐπειδὴ τὰ ἐξαγομὲνα ἀποκαθίζονται ἀκριβέστερα καὶ μᾶλλον ἀνεξάρτητα τοῦ σφάλματος τῶν πινακῶν. Εἰς το παράρτημα τοῦτο θέλομεν λύσει τινὰς τῶν μερικῶν τούτων περιπτώσεων, ἐκλέγοντες τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει, ἢ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι φέρουν εἰς πλεον ἄξιοσημειώτους τύπους.

Καὶ ἐνταῦθα σημειόνομεν τὰς γωνίας τοῦ προτεθέντος τριγώνου, οὐθυγράμμου ἢ σφαιρικοῦ, διὰ τῶν χαρακτῆρων Α, Β, Γ, τὰς δὲ ἀμειβίως εἰς ταύτας ἀπέναντι πλευρὰς διὰ τῶν α, β, γ. Περιπλέον τὴν ἀκτὶνα ὑποθέτομεν = 1, ἢ ὁποῖα ὑπόθεσις δὲν φέρει τὴν παραμακρὰν βλάβην εἰς τὴν γενικότητα τῶν ἐξαγομῶν. Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ ἐκφράζονται εἰς τοὺς ὑπολογισμὸν, εἴτε διὰ τῶν μοιρῶν, εἴτε διὰ τῶν ἀπολύτων μῆκων τῶν μετρούμενων αὐτὰς τόξων, τὰ ἐπεία λαμβάνονται εἰς τὸν κύκλον τῆς ἀκτίνος 1. Εἰς τὸν τόξον χ ἢ γωνία, ἵναὶ μικρότατον, ἡμικορῶμεν ἀντὶ τοῦ ἡμ. χ καὶ συν. χ, νὰ θέσωμεν τὰς διὰ σειρῶν ἐκφραζομένας τιμάς των: τοῦτ' ἐστὶ: $\eta\mu\chi = \chi - \frac{\chi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

+ κ.τ.λ., συν $\chi = 1 - \frac{\chi^2}{1 \cdot 2} + \kappa\tau\lambda.$ ἀλλὰ τότε χ πρέπει νὰ ἴηαι ἐκ-

πιφρασμένον διὰ μοιρῶν τῆς ἀκτίνος. Ανίσως ἀφ' οὗ εὐρομεν τὴν ἐκφρασιν ἐνὸς τόξου διὰ μερῶν τῆς ἀκτίνος, θελήσωμεν νὰ εὐρωμεν τὴν διὰ λεπτῶν ἐκφρασιν τοῦ ἰδίου τόξου, πρέπει νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς τὴν ἀκτὶνα περιεχομένων λεπτῶν· ἐπειδὴ εἰς καλέσωμεν θ τὸ μῆκος ἐνὸς τόξου, π τὸ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἔχομεν φανερὰ τὴν ἀναλογίαν $\pi : \theta :: 20000 : \chi$ ἐκ τῆς ὁποίας

$\chi = \theta \cdot \frac{20000}{\pi}$ · τῶρα $\frac{20000}{\pi}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὴν ἀκτὶνα

περιεχομένων λεπτῶν, καὶ ὅςτις ἰσούται μὲ 6366. 1977237· ὁ ἀριθμὸς δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι 3. 80388012297.

§ Α'. Περὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων τῶν ὁποίων
δύο γωνίαι εἶναι πολλὰ μικραί.

ΥΓ'. Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι πολλὰ μικραί, καὶ ἀκολουθῶς ἡ γωνία Γ πολλὰ ἀμβλεῖα· ἡμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ἢμ $A = 1 - \frac{\kappa}{6} A^3$, ἢμ $B = 1 - \frac{\kappa}{6} B^3$, καὶ ἢμ $\Gamma = \text{ἢμ}(A+B) = A+B - \frac{\kappa}{6} (A+B)^3$. Γνωρίζοντες λοιπὸν τὴν πλευρὰν γ μὲ τὰς προσημιμέναις γωνίαις Α καὶ Β, εὐρίσκουμεν τὰς ἄλλας δύο πλευράς διὰ τῶν τύπων $\alpha = \frac{\gamma \text{ ἢμ } A}{\text{ἢμ}(A+B)}$, $\beta = \frac{\gamma \text{ ἢμ } B}{\text{ἢμ}(A+B)}$, αἱ ὁποῖαι, μετὰ τὴν ἀντεισαγωγὴν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν, ἀποβαίνουσιν

$$\alpha = \frac{\gamma A}{A+B} \left(1 + \frac{2AB+B^2}{6} \right)$$

$$\beta = \frac{\gamma B}{A+B} \left(1 + \frac{A^2+2AB}{6} \right)$$

καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει $\alpha + \beta - \gamma = \frac{1}{6} \gamma AB$. Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι ἀκριβεῖς, εἰς δὲ θεωρηθῶσιν εἰ ὅροι εἰσίνετις περιέχουσιν τέσσαρας διαστάσεις εἰς Α καὶ Β.

Υη'. Ἀς θεωρήσωμεν τὴν περίσσειαν καθ' ἣν δίδονται αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β, μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας $\Gamma = \pi - \theta$, ὅπου θ παριστάνει γωνίαν μικροτάτην. Ἐν πρώτῃς ἔχομεν $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \sin \theta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \theta^2$, λοιπὸν

$$\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\beta\theta^2}{\alpha + \beta}.$$

ἀκολουθῶς ἡ γωνία Α εὐρίσκεται διὰ τῆς ἐξίσωσως ἢμ $A = \frac{\alpha}{\gamma}$ ἢμ

$\Gamma = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ ἢμ } \theta$ καὶ ἐντεῦθεν, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τῆς τιμῆς τῆς

$$\gamma \text{ καὶ τοῦ ἢμ } \theta, \text{ συνάγομεν, ἢμ } A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \theta^3 - \frac{1}{6} \theta^3 \right) = \frac{\alpha\theta}{\alpha + \beta} \left(1 + \frac{\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \frac{\theta^2}{6} \right).$$

$$\text{Λοιπὸν } A = \text{ἢμ } A + \frac{1}{6} \text{ ἢμ}^3 A = \frac{\alpha\theta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \frac{\theta^3}{6}.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἡδὲ λαμβάνει συνάξει τὴν τιμὴν τῆς Β μεταθί-

τοντες μεταξύ των τὰ γράμματα α και β · πλὴν ἀφ' οὗ γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , ἀμέσως προσδιορίζομεν τὴν B · διότι $B = \theta - A$. Εἰν ἡ γωνία θ δεθῇ διὰ λεπτῶν, και θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ἐπίσης και τὴν A διὰ λεπτῶν, πρέπει εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους, νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ A και θ τοὺς λόγους $\frac{A}{P}$, $\frac{\theta}{P}$ εἰς τοὺς ἑποίους P παριστάνει τὸν περιεχόμενον ἀριθμὸν λεπτῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα ἐπειδὴ εἰς λόγῳ οὗτοι ἄλλο τι δὲν ἐκφράζουν παρὰ τὰ μήκη τῶν γωνιῶν A και θ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ἐκφραζομένας διὰ λεπτῶν. Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν

$$\gamma = \alpha + \beta - \frac{\frac{1}{2} \alpha \theta}{\alpha + \beta} \cdot \left(\frac{\theta}{P} \right)^2$$

$$A = \frac{\alpha \theta}{\alpha + \beta} \left(1 + \frac{\beta(\alpha - \beta)}{6(\alpha + \beta)^2} \cdot \left(\frac{\theta}{P} \right)^2 \right)$$

ἤθ'. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τούτους εἰς μερικὴν παράδειγμα, ἔστω $\alpha = 1000''$, $\beta = 2400''$, $\Gamma = 199^\circ 32'$, $\theta = 68''$ θί-
λομεν ἔχει $\alpha + \beta - \gamma = \frac{1200000}{3400} \cdot \left(\frac{68}{P} \right)^2 = 0.037806$, ὅθεν $\gamma = 3399''$, 962194 . Ὅσον διὰ τὴν τιμὴν τῆς A , εἰν εὐχαριστηθῶμεν εἰς μίαν μετρίαν προσέγγισιν, ἡμικραῦμεν νὰ λάβωμεν $A = \frac{\alpha \theta}{\alpha + \beta} = 20'$ και $B = \theta - A = 48'$ ὁ ὅλος ὁμοῦς τύπος δίδει $A = 20'$
 $\left(1 - \frac{2400 \times 1400}{6(3400)^2} \left(\frac{68}{P} \right)^2 \right) = 19^\circ 99988946$, και ἀκολουθῶς $B = 48'.00011054$, τιμαὶ αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἦναι ἀκριβεῖς ἕως εἰς τὸ τελευταῖον δεκαδικόν.

§ Β'. λύσις τῆς τρίτης περιπτώσεως τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων διὰ τῶν σειρῶν.

ρ'. Ὅταν δεθεῖν αἱ δύο πλευραὶ α και β και ἡ περιεχομένη γωνία Γ , διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν B , ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\beta : \alpha :: \eta\mu B : \eta\mu(B + \Gamma)$, ἡ ὁποία δίδει $\alpha \eta\mu B = \beta (\eta\mu B \sin \Gamma + \sin B \eta\mu \Gamma)$, και ἐπομένως $\frac{\eta\mu B}{\sin B} = \frac{\beta \eta\mu \Gamma}{\alpha - \beta \sin \Gamma}$. Εἰν εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων και συνημίτονων θέσωμεν τὰς διὰ τῶν κατ' ἐπίνοϊαν ἐκθετικῶν ἐκφραζομένας τιμὰς των (26'), θέλωμεν ἔχει

$$\frac{B\sqrt{-1} - B\sqrt{-1}}{1 - 1} = \frac{6(1 - 1)}{2\alpha - \beta(1 + 1)}$$

εξαλείφοντας τούς παραινμασας και μετὰ ταῦτα ἀνέχοντας, εὐρίσκομεν

$$\frac{2B\sqrt{-1}}{1} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}$$

Λαμβάνοντας τὸν λογάριθμον ἐκείνου μέλους καὶ ἀναπτύσσοντας τὸ δεύτερον εἰς σειράν κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\Lambda(x-\chi) = \Lambda\alpha - \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} - \frac{\chi^3}{3\alpha^3} - \dots$ εὐρίσκομεν

$$2B\sqrt{-1} = \frac{6}{\alpha} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} + \frac{\beta^3}{3\alpha^3} + \dots$$

$$- \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} - \frac{\beta^3}{3\alpha^3} - \dots$$

Διαιρούμεντες λοιπὸν διὰ $2\sqrt{-1}$, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\mu\sqrt{-1}$

$$B = \frac{\beta}{\alpha} \mu\sqrt{-1} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \mu\sqrt{-1} + \frac{\beta^3}{3\alpha^3} \mu\sqrt{-1} + \frac{\beta^4}{4\alpha^4} \mu\sqrt{-1} + \dots$$

Ἡ σειρά αὕτη τῆς ὁποίας ὁ νόμος εἶναι ἀπλοῦς αὐτός, ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῆς γωνίας B διὰ μερῶν τῆς ἀκτίνος, καὶ εἶναι τόσον μάλλον συγκύπτουσα ὅσον περισσώτερον ἢ πλευρὰ β εἶναι μικροτέρα ὡς πρὸς τὴν α .

Ἡ εὐρεθεῖσα τιμὴ πρέπει νὰ πληρῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\epsilon\phi(B + \frac{1}{2}\Gamma)$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma, \text{ ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν } \epsilon\phi \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

$\epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma$, καὶ δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\mu B}{\sin B} = \frac{\beta \mu \Gamma}{\alpha - \beta \sin \Gamma}$

μὴ κατὰ τὴν μορφήν. (*)

(*) 1.ον Διὰ νὰ εἰσθαιωθῶμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\epsilon\phi(B + \frac{1}{2}\Gamma) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$

ρα'. Γνωρίζοντες τὴν γωνίαν B, ἔχομεν τὴν τρίτην γωνίαν A
 $= 100^\circ - B - \Gamma$. Ὅσον διὰ τὴν τρίτην πλευράν γ, ἐξαρτᾶται ἀπὸ
 τὴν ἐξίσωσιν $\gamma^2 = x^2 - 2\alpha\beta \sin \Gamma + \beta^2$, ἥτις διὰ τῆς ἐξαγωγῆς
 τῆς ρίζης δίδει,

$$\gamma = x - \beta \sin \Gamma + \frac{\beta^2}{2\alpha} \sin^2 \Gamma + \frac{\beta^3}{2\alpha^2} \sin^3 \Gamma - \kappa\lambda.$$

Ἡ σειρά ὅμως αὕτη μὴ ἰδεύουσα κανονικῶς, δὲν ἡμπορεῖ νὰ
 συνεχισθῇ κατ' ἀρέσκειαν. Ἐξ ἐναντίας, ἡμποροῦμεν νὰ εὗρωμεν μίαν
 ἀπλουστάτην σειράν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ὑπερβολικοῦ λογαριθμοῦ τῆς
 πλευρᾶς γ. Τῷ ὄντι, εὐκολῶς βλέπομεν ὅτι ἡ κοσότης $\alpha^2 - 2\alpha\beta$
 $\sin \Gamma + \beta^2 = (\alpha - \beta \sin \Gamma - \frac{\beta^2}{2\alpha}) (\alpha - \beta \sin \Gamma + \frac{\beta^2}{2\alpha})$. διότι ἐὰν ἀνα-
 πτύξωμεν τὸ γινόμενον τῶν δὲν τούτων παραγόντων εὐρίσκομεν
 $\alpha^2 - 2\alpha\beta \left(\frac{\sin \Gamma}{2} + \frac{\sin \Gamma}{2} \right) + \beta^2$ ἢ $\alpha^2 - 2\alpha\beta \sin \Gamma + \beta^2$

ἐφ' $\frac{1}{2} \Gamma$ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐφ' $\frac{1}{2} (A - B) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ ἐφ' $\frac{1}{2} \Gamma$, ἃς πα-
 ρατηρήσωμεν ὅτι ἡ τελευταία αὕτη ἄγεται εἰς $(\alpha + \beta)$ ἐφ' $\frac{1}{2} A -$ ἐφ' $\frac{1}{2}$
 $B (\alpha + \beta) = (\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} \Gamma + (\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} \Gamma \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B$ ἢ ὁποῖα, ἐξ
 ἀφορμῆς ὅτι ἐφ' $\frac{1}{2} A = \sin \frac{1}{2} (B + \Gamma) = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} (B + \Gamma)}$, καὶ ἐφ' $\frac{1}{2} \Gamma =$

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \Gamma}, \text{ τρέπεται εἰς } (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} \Gamma - \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (B + \Gamma) \sin \frac{1}{2} \Gamma (\alpha + \beta) =$$

$$\sin \frac{1}{2} \Gamma (\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} (B + \Gamma) + (\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} B : \text{ τοῦτ' ἐστὶ } (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} \Gamma (1 -$$

$$\sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (B + \Gamma)) = (\alpha - \beta) (\sin \frac{1}{2} (B + \Gamma) + \sin \frac{1}{2} B). \text{ Λοιπὸν}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \sin \frac{1}{2} \Gamma = \frac{\sin \frac{1}{2} (B + \Gamma) + \sin \frac{1}{2} B}{1 - \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} (B + \Gamma)} = \sin (B + \frac{1}{2} \Gamma).$$

2ον. Ὅτι δὲ ἡ ἐξίσωσις ἐφ' $(B + \frac{1}{2} \Gamma) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \sin \frac{1}{2} \Gamma$ διαφέρει

μόνον κατὰ τὴν μορφήν ἀπὸ τὴν $\frac{\sin B}{\sin B} = \frac{\beta \sin \Gamma}{\alpha - \beta \sin \Gamma}$ τὸ δεικνύομεν

οὕτως: Ἡ πρώτη ἄγεται εἰς $(\alpha - \beta) \sin B + (\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} \Gamma = (\alpha + \beta)$
 $\sin \frac{1}{2} \Gamma - (\alpha + \beta) \sin^2 \frac{1}{2} \Gamma \sin B$ τοῦτ' ἐστὶ $(\alpha - \beta + (\alpha + \beta) \sin^2 \frac{1}{2} \Gamma) \sin B$
 $= 2\beta \sin \frac{1}{2} \Gamma \cdot \frac{1}{2} \sin B (\alpha (1 + \sin^2 \frac{1}{2} \Gamma) - \beta (1 - \sin^2 \frac{1}{2} \Gamma)) = 2\beta \sin \frac{1}{2} \Gamma :$
 δηλοῦντι

$$\sin B \left(\frac{\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} \Gamma} - \frac{\beta \sin \Gamma}{\sin^2 \frac{1}{2} \Gamma} \right) = \frac{\beta \sin \Gamma}{\sin^2 \frac{1}{2} \Gamma} \cdot \frac{1}{2} \sin B = \frac{\sin B}{\sin B}$$

$$\frac{\beta \sin \Gamma}{\alpha - \beta \sin \Gamma} \quad \text{Ο. Μ.}$$

Εχομεν λοιπόν $\gamma^2 = (\alpha - \beta \sqrt{-1}) (\alpha - \epsilon \sqrt{-1})$.

Λαμβάνοντες τούς λογαρίθμους ἑκάστου μέλους, συνάγμεν

$$2\lambda\gamma = 2\lambda\alpha - \frac{6}{\alpha} \sqrt{-1} - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \sqrt{-1} - \frac{\epsilon^2}{3\alpha^3} \sqrt{-1} - \dots$$

— κτλ

$$+ 2\lambda\alpha - \frac{6}{\alpha} \sqrt{-1} - \frac{\epsilon^2}{2\alpha^2} \sqrt{-1} - \frac{2\epsilon\sqrt{-1}}{3\alpha^3} \sqrt{-1} - \dots$$

— κτλ

$$\text{Ανάγοντες λοιπὸν καὶ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διὰ τοῦ τύπου } \mu\sqrt{-1} + \dots$$

$\epsilon = 2\text{ συν}\mu\Gamma$, ἔχομεν

$$\lambda\gamma = \lambda\alpha - \frac{\beta}{\alpha} \text{ συν } \Gamma - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \text{ συν } 2\Gamma - \frac{\beta^3}{3\alpha^3} \text{ συν } 3\Gamma - \dots$$

σειρά ὅχι ὀλιγώτερον χαριεστέρα ἀπὸ ἐκείνην ἣτις δίδει τὴν τιμὴν τῆς Β. Ἐὰν θελωμεν οἱ λογαρίθμοι νὰ ἀναφέρονται εἰς τὴν θάσιν 10 πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὅρους μὲ τὸ μέτρον (module) (1) ὁ 43429448

§. Γ'. Λύσις τῆς τρίτης περιζήσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων διὰ τῶν σειρῶν.

ρβ', Εἶδομεν εἰς τὸν προηγουμένον παρὰγραφον ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ

χ συναγομένη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\epsilon\chi = \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} \epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma$, ἡμπορεῖ νὰ ἰσφρασθῇ διὰ ταύτης τῆς σειράς:

$$\chi = \frac{1}{2}\Gamma + \frac{\nu}{\mu} \eta\mu\Gamma + \frac{\nu^2}{2\mu^2} \eta\mu 2\Gamma + \frac{\nu^3}{3\mu^3} \eta\mu 3\Gamma + \dots$$

Τώρα ὅταν εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον γνωρίζωμεν τὰς δύο πλευράς α καὶ β καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ, διὰ τὴν προσδιορίσιν τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν ἔχομεν τοὺς ἀκολουθοῦντος τύπους οἱ ὁποῖοι συνάγονται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας τοῦ Νεπέρου ἀρ. πη'.

$$\begin{aligned} \sigma\phi \frac{A-B}{2} &= \frac{\eta\mu(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\eta\mu(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta)} \epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma = \frac{\eta\mu \frac{1}{2}\alpha \text{ συν } \frac{1}{2}\beta + \text{συν } \frac{1}{2}\alpha \eta\mu \frac{1}{2}\beta}{\eta\mu \frac{1}{2}\alpha \text{ συν } \frac{1}{2}\beta - \text{συν } \frac{1}{2}\alpha \eta\mu \frac{1}{2}\beta} \epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma \\ \sigma\phi \frac{A+B}{2} &= \frac{\text{συν}(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\text{συν}(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta)} \epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma = \frac{\text{συν } \frac{1}{2}\alpha \text{ συν } \frac{1}{2}\beta + \eta\mu \frac{1}{2}\alpha \eta\mu \frac{1}{2}\beta}{\text{συν } \frac{1}{2}\alpha \text{ συν } \frac{1}{2}\beta - \eta\mu \frac{1}{2}\alpha \eta\mu \frac{1}{2}\beta} \epsilon\phi \frac{1}{2}\Gamma \end{aligned}$$

(1). Ἐδῶ μὲ τὴν λέξιν μέτρον (module) ἐννοεῖται ἡ σταθερὸς ἐκείνος ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς λογαρίθμους ἐνὸς τινὸς συστήματος διὰ νὰ τοὺς μεταφέρωμεν εἰς τοὺς λογαρίθμους ἐνὸς ἄλλου.

Ἐάν λοιπὸν κἀνωμεν $\mu = \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta$, $\nu = \frac{1}{2} \alpha \eta \mu \frac{1}{2} \beta$, ἐκ τῶν ἐπειῶν συνάγμεν $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \eta \mu \frac{1}{2} \beta}{\eta \mu \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta}{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \alpha}$, καὶ ἀντι-
παράξωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον ἀντὶ $\frac{\nu}{\mu}$ ταύτην τὴν τιμὴν, ἀντὶ

δὲ χ , $100 - \frac{A+B}{2}$, θελομεν εὐρη

$$\frac{A+B}{2} = 100^\circ - \frac{1}{2} \Gamma - \frac{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta}{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \alpha} \eta \mu \Gamma - \frac{\epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \beta}{2 \epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \alpha} \eta \mu 2\Gamma - \frac{\epsilon \varphi^3 \frac{1}{2} \beta}{3 \epsilon \varphi^3 \frac{1}{2} \alpha} \eta \mu 3\Gamma - \text{κτλ.}$$

Ἀντιστάγοντες παρομοίως εἰς τὸν αὐτὸν τύπον ἀντὶ $\frac{\nu}{\mu}$, —

$$\frac{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta}{\sigma \varphi \frac{1}{2} \alpha} \text{ καὶ ἀντὶ } \chi, 100^\circ - \frac{A+B}{2}, \text{ εὐρίσκομεν}$$

$$\frac{A+B}{2} = 100^\circ - \frac{1}{2} \Gamma + \frac{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta}{\sigma \varphi \frac{1}{2} \alpha} \eta \mu \Gamma - \frac{\epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \beta}{2 \sigma \varphi^2 \frac{1}{2} \alpha} \eta \mu 2\Gamma + \frac{\epsilon \varphi^3 \frac{1}{2} \beta}{3 \sigma \varphi^3 \frac{1}{2} \alpha} \eta \mu 3\Gamma - \text{κτλ.}$$

Αἱ δύο αὗται σειραὶ ὁδεύουν κατὰ νόμον ἀπλούστατον, καὶ εἶναι τόσον περισσότερον συγκύπτουσαι ὅσον ἡ πλευρὰ β εἶναι μικροτέρα. Ἡ πρώτη τούτων εἶναι πάντοτε συγκύπτουσα, ἐπεὶδὴ ὑποτίθεται $\beta < \alpha$ καὶ ἡ δευτέρα θέλει εἶναι τοιαύτη ὅταν ὁμῶς $\epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta < \sigma \varphi \frac{1}{2} \alpha$, ἢ $\alpha + \beta < 200^\circ$. Ἐάν δὲ $\alpha + \beta > 200^\circ$, ἡ δευτέρα σειρά ἤθελεν εἶναι ἐκκύπτουσα καὶ ψευδής, πλὴν τὴν περισσῶς ταύτην πάντοτε ἡμ-
πορεύμεν νὰ ἀποφύγωμεν διότι τὴ λύσις τοῦ τριγώνου ΒΓΛ (σχ. 11) εἰς τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι $\Gamma A + \Gamma B > 200^\circ$, πάντοτε ἀνάγεται εἰς τὴν τοῦ τριγώνου Α'ΓΒ' εἰς τὸ ὁποῖον $\Gamma A' + \Gamma B' < 200^\circ$. Τοῦ λοιποῦ, ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β εἶναι μικρόταται, ἡ δευτέρα σειρά εἶναι κατὰ πολλὰ συγκύπτουσα· τότε ἡ τρίτη πλευρὰ γ εἶναι ὡσαύτως μικροτάτη, ἐπεὶδὴ γ πρέπει νὰ ᾖ $< \alpha + \beta$, καὶ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον πολλὰ ὀλίγον διαφέρει ἐνὸς ἐπιπέδου· εἰς ταύτην τὴν περίρσιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς δύο ὁρθὰς, ἐκκράζεται οὕτως:

$$A+B+\Gamma-200^\circ = \frac{2}{1} \epsilon \varphi \frac{1}{2} \alpha \epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta \eta \mu \Gamma - \frac{2}{2} \epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \alpha \epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \beta \eta \mu 2\Gamma + \frac{2}{3} \epsilon \varphi^3 \frac{1}{2} \alpha \epsilon \varphi^3 \frac{1}{2} \beta \eta \mu 3\Gamma - \text{κτλ.}$$

ργ'. Εἰς εὐρεσιν τῆς τρίτης πλευρᾶς γ τοῦ προτεθέντος τριγώνου, ἔχουμεν τὴν ἐξίσωσιν $\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta + \eta \mu \alpha \eta \mu \beta \sin \Gamma$, ἀπὸ τὴν ἐπειῶν εὐκόλως εἶναι νὰ συνάξωμεν τὰς δύο ἀκολουθοῦς:

$$\begin{aligned} \eta\mu^2 \frac{1}{2} \gamma &= \eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \csc^2 \frac{1}{2} \beta - \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \alpha \csc \frac{1}{2} \beta \csc \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta \csc \Gamma + \\ &\csc^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta \\ \csc^2 \frac{1}{2} \gamma &= \csc^2 \frac{1}{2} \alpha \csc^2 \frac{1}{2} \beta + 2 \csc \frac{1}{2} \alpha \csc \frac{1}{2} \beta \eta\mu \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta \csc \Gamma \\ &+ \eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta. \end{aligned}$$

Εκ τῆς μορφῆς τῶν τιμῶν τούτων βλέπομεν ὅτι $\eta\mu \frac{1}{2} \gamma$ ἢ $\eta\mu$ πορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τρίτη πλευρὰ εὐθυγράμμου τριγώνου εἰς τὸ ἐπίκειν ἠθελον εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο πλευραὶ $\eta\mu \frac{1}{2} \alpha \csc \frac{1}{2} \beta$, $\csc \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta$ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία Γ παρομοίως ὅτι $\csc \frac{1}{2} \gamma$ εἶναι ἡ τρίτη πλευρὰ εὐθυγράμμου τριγώνου, τοῦ ἐπίκειν δύο πλευραὶ ἠθελον εἶναι $\csc \frac{1}{2} \alpha \csc \frac{1}{2} \beta$, $\eta\mu \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta$ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $200^\circ - \Gamma$. Ἀπὸ τὸν εὐρεθέντα λοιπὸν τύπον (ἀρ. ρα') διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ἔχομεν

$$\log \eta\mu \frac{1}{2} \gamma = \log \left(\eta\mu \frac{1}{2} \alpha \csc \frac{1}{2} \beta \right) - \frac{\varphi \frac{1}{2} \beta}{\varphi \frac{1}{2} \alpha} \csc \Gamma - \frac{\varphi^2 \frac{1}{2} \beta}{2 \varphi^2 \frac{1}{2} \alpha} \csc 2\Gamma - \kappa\tau\lambda$$

$$\log \csc \frac{1}{2} \gamma = \log \left(\csc \frac{1}{2} \alpha \csc \frac{1}{2} \beta \right) + \frac{\varphi \frac{1}{2} \beta}{\varphi \frac{1}{2} \alpha} \csc \Gamma - \frac{\varphi^2 \frac{1}{2} \beta}{2 \varphi^2 \frac{1}{2} \alpha} \csc 2\Gamma + \kappa\tau\lambda.$$

Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐπειδὴ καθὲν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων περὶ τῶν ὑποκείμενων ἀνωτέρω ὠμιλήσαμεν, ἢ πορεῖ νὰ λυθῇ διὰ μέσου εὐθυγράμμου ὀρθογωνίου τριγώνου, ἢ λύσεις τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου δύναται ἀμέσως νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν εὐθυγράμμου ὀρθογωνίου τριγώνου.

Εὐρίσκωμεν ὡς τὼς ὅτι $\eta\mu \frac{1}{2} \gamma$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἐπίκειν αἱ πλευραὶ εἶναι $\eta\mu \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ $\eta\mu \frac{1}{2} \Gamma$ καὶ $\eta\mu \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ $\csc \frac{1}{2} \Gamma$. Ὁσαύτως $\csc \frac{1}{2} \gamma$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ἐπίκειν αἱ πλευραὶ ἠθελον εἶναι $\csc \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ $\csc \frac{1}{2} \Gamma$ καὶ $\csc \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ $\eta\mu \frac{1}{2} \Gamma$.

Εὰν περιπλέον καλέσωμεν M τὴν γωνίαν ἥτις εἰς τὸ πρῶτον τρίγωνον εἶναι ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς $\eta\mu \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ $\csc \frac{1}{2} \Gamma$, καὶ εἰς τὸ δεῦτερον, N τὴν γωνίαν τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶν $\csc \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ $\csc \frac{1}{2} \Gamma$, ἀπὸ τὰς ἀναλογίας τοῦ Νεπέρου ἔπεται ὅτι θέ-

$$\begin{aligned} \log \mu \text{ν} \text{ν} \text{ν} \frac{A-B}{2} &= M, \text{ καὶ } \frac{A+B}{2} = N \text{ ἢ } 200^\circ - N. \text{ ὁδηλοῦν: } \frac{A+B}{2} \\ &= N \text{ εἰάν } \alpha + \beta < 200^\circ, \text{ καὶ } \frac{A+B}{2} = 200^\circ - N \text{ εἰάν } \alpha + \beta > 200^\circ. \end{aligned}$$

Εἰς κάθε λοιπὸν σφαιρικὸν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωστὰ δύο πλευραὶ α καὶ β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία Γ , ἐκάστη τῶν πτωσθέντων $\frac{1}{2} \gamma$, $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$ ἢ πορεῖ κατ' εὐθείαν νὰ εὐρεθῇ, διὰ τῆς λύσεως εὐθυγράμμου ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς τὸ ὑποκείμεν εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ὑ. ἔσθιν ἀκτμή ἐπεται ὅτι μετὰ τὴν εὐρεσιν τῆς γωνίας M
 $\frac{A-B}{2}$ διὰ τοῦ τύπου ἐφ M = $\frac{\eta\mu \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\eta\mu \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ σφ $\frac{1}{2} \Gamma$, δυνατόν νά
 λογαριασθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ διὰ τοῦ τύπου $\eta\mu \frac{1}{2} \gamma =$
 $\frac{\eta\mu \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \text{ συν } \frac{1}{2} \Gamma}{\eta\mu \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \eta\mu \frac{1}{2} \Gamma}$.
 $\frac{\eta\mu M}{\text{συν } M}$

Σ. Κ. Οἱ εἰς τον καράγραφον τεῦτον εὐρεθέντες τύποι εὐκόλως
 ἡμπερὺν νά ἐφαρμοσθοῦν εἰς τὴν λύσιν τῆς πέμπτης περιπτώσεως
 τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, διότι αὕτη ἡμπερεῖ νά ἀναφερθῇ εἰς
 τὴν τρίτην διὰ τῆς ιδιότητος τοῦ πελικοῦ τριγώνου.

§ Δ'. Λύσεις σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου δύο
 πλευραὶ ὀλίγον τι διαφέρουν ἀπὸ 100°.

ρδ'. Εἰσωσαν α καὶ β αἱ δυο δεδομένα πλευραὶ ὀλίγον τι δια-
 φέρουσαι τῶν 100°· πρόκειται νά προσδιορισθῇ ἡ γωνία Γ διὰ
 μέσου τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ α καὶ β ἦσαν ἀκριβῶς ἴσαι μὲ 100°, ἤθελον
 εἶναι Γ = γ· ἐπειδὴ λοιπὸν α καὶ β ὀλίγον τι διαφέρουν ἀπὸ
 100°, ἡ γωνία Γ μετρεῖται ἀπὸ τοξὸν ὀλίγον τι διαφέρειν τῆς
 πλευρᾶς Γ. Εἰσω α = 100° + α', β = 100° + β', γ = γ + χ· ἐὰν ἀντει-
 σάξωμεν ταῦτα· τὰς τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\text{συν } \Gamma = \frac{\text{συν } \gamma - \text{συν } \alpha \text{ συν } \beta}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$,

θέλομεν εἶχει $\text{συν } (\gamma + \chi) = \frac{\text{συν } \gamma - \eta\mu \alpha' \eta\mu \beta'}{\text{συν } \alpha' \text{ συν } \beta'}$. Πλὴν ἐπειδὴ α καὶ
 β' ὑποτίθενται μικρότατοι ποσότητες, δυνάμεθα παραβλέποντες
 μόνον τοὺς ὅρους εἰς τοὺς ὁποίους α' καὶ β' ὑψώνονται εἰς τὸν
 τέταρτον βαθμὸν, νά κέκωμεν $\eta\mu \alpha' \eta\mu \beta' = \chi \beta'$, $\text{συν } \alpha' \text{ συν } \beta' = 1$
 $-\frac{\alpha'^2}{2} - \frac{\beta'^2}{2}$, καὶ τοῦτο δίδει $\text{συν } (\gamma + \chi) = \frac{\text{συν } \gamma - \alpha' \beta'}{1 - \frac{1}{2} \alpha'^2 - \frac{1}{2} \beta'^2} = (1 + \frac{1}{2} \alpha'^2 + \frac{1}{2} \beta'^2) \text{συν } \gamma - \alpha' \beta'$. Ἀλλὰ παραβλέποντες τὸ τετράγωνον τοῦ
 χ, ἔχομεν $\text{συν } (\gamma + \chi) = \text{συν } \gamma - \chi \eta\mu \gamma$ · λοιπὸν
 $\chi = \frac{\alpha' \beta' - \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2) \text{συν } \gamma}{\eta\mu \gamma}$.

Καὶ ἐπειδὴ χ εἶναι τῆς δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς α' καὶ β', θέ-
 πομεν ὅτι ἄλλας ποσότητας εἰς ταύτην τὴν τιμὴν δέν πρέπει νά
 παραβλέψωμεν παρὰ ἐκεῖνας αἱ ὁποῖαι εἶναι τῆς τετάρτης τάξεως.
 Εἰσω $\frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \pi$, $\frac{1}{2}(\alpha' - \beta') = \kappa$ ἢ $\alpha' = \pi + \kappa$, $\beta' = \pi - \kappa$ · θέλομεν
 εἶχει ὑπὸ ἀπλοῦς ἐξάν μορφήν $= \kappa^2 \left(\frac{1 - \text{συν } \gamma}{\eta\mu \gamma} \right) - \kappa^2 \left(\frac{1 + \text{συν } \gamma}{\eta\mu \gamma} \right) =$
 $\kappa^2 \text{ ἐφ } \frac{1}{2} \gamma - \kappa^2 \sigmaφ \frac{1}{2} \gamma$.

Ἡ τιμὴ αὐτῇ ἐκφράζεται διὰ μερῶν τῆς ἀκτίνος· πλὴν ἐπειδὴ εἰς τὴν πρᾶξιν π καὶ χ οἶδονται· ἐκπεφρασμένα διὰ δευτέρων, ἐὰν θέλωμεν καὶ χ ἐπίσης νὰ ἐκφράζεται διὰ δευτέρων, πρέπει νὰ κάμωμεν

$$\chi = \frac{\pi^2}{p} \epsilon\phi \frac{1}{2} \gamma - \frac{\chi^2}{p} \sigma\phi \frac{1}{2} \gamma,$$

Οπου Ρ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα περιεχομένων δευτέρων, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι = 5.8038801. Γνωρίζοντες χ, ἔχομεν γνωστὴν τὴν ζητούμενην γωνίαν $\Gamma = \gamma + \chi$.

Ο εὐρεθεὶς τύπος· εἶναι ὠφέλιμος εἰς τὰς γεωδαισιακὰς ἐργασίας διὰ τὴν εἰς τὸν ὀρίζοντα ἀναγωγὴν τῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι ἤθελον παρατηρηθῇ εἰς κλίνοντα ἐπίπεδα· εἶναι ἐπιτηδειότερος καὶ ζητεῖ ὀλιγώτερον ἐκτεταμένους πίνακας ἀπὸ τὸν τύπον τῆς πρώτης περιστάσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, τῆς ἐποίας ἐδόξαμεν προάδειγμα (ἀρ. 93). Ἀλλ' ἐὰν αἱ ὑψώσεις ἢ καταβάσεις α καὶ β ὑπερβαίνουν τὰς 2 ἢ τρεῖς μοῖρας, ἀσφαλές ἐστιν εἶναι τότε νὰ γένῃ χρῆσις τῆς γενικῆς μεθόδου.

§. Ε'. Λύσις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι μικρόταται ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

ρ'. Οταν αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι μικρόταται ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὸ προτεθὲν τρίγωνον ὀλίγον διαφέρει ἀπὸ ἐν εὐθύγραμμον· καὶ ὡς τοιοῦτον θεωροῦντές το ἡμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν μίαν πρώτην ὡς ἐγγίσα λύσιν, ἀλλὰ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον παραβλέπομεν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς 200°. Οθεν διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν πλέον ὡς ἐγγίσα λύσιν, πρέπει νὰ ἀποβλέπωμεν εἰς ταύτην τὴν ὑπεροχὴν, καὶ τοῦτο ἡμποροῦμεν ἐνδεχόμενα νὰ κάμνωμεν, διὰ τινος γενικῆς ἀρχῆς τὴν ἐπείαν ἐρχόμεθα νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἐσω ρ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας· ἐπὶ τῇ ἐποίας κεῖται τὸ προτεθὲν τρίγωνον· ἐὰν φαντασθῶμεν τρίγωνον ὅμοιον χαρακτημένον ἐπὶ τῆς σφαίρας τῆς ἐποίας ἡ ἀκτίς εἶναι 1, αἱ πλευραὶ τούτου τοῦ τριγώνου θέλουσιν εἶναι $\frac{\alpha}{\rho}$, $\frac{\beta}{\rho}$, $\frac{\gamma}{\rho}$, καὶ θέλωμεν ἔχει συν Δ =

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{\rho} - \sin \frac{\beta}{\rho} \sin \frac{\gamma}{\rho}}{\sin \frac{\beta}{\rho} \sin \frac{\gamma}{\rho}} \cdot \text{Ἀλλ' ἐπειδὴ } \rho \text{ εἶναι πολλὰ μεγάλον ὡς}$$

πρὸς α, β, γ, ἔχομεν πολλά ὡς ἑγγιστὰ (λδ') συν $\frac{\alpha}{\rho} = 1 - \frac{\alpha}{2\rho^2} +$
 $\frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\rho^2}$, συν $\frac{\beta}{\rho} = 1 - \frac{\beta^2}{2\rho^2} + \frac{\beta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4\rho^4}$, συν $\frac{\gamma}{\rho} =$
 $1 - \frac{\gamma^2}{2\rho^2} + \frac{\gamma^4}{2 \cdot 3 \cdot 4\rho^4}$, ἤμ $\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\beta}{\rho} - \frac{\beta^3}{2 \cdot 3\rho^3}$, ἤμ $\frac{\gamma}{\rho} =$
 $\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma^3}{2 \cdot 3\rho^3}$. ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὴν ἀνω-

τέρω ἐξίσωσιν καὶ παραβλέποντες τοὺς ὅρους τοῦ περισσοτέρων
 ἀπὸ τέσσαρτος διαστάσεων εἰς α, β, γ, θέλομεν ἔχει

$$\text{συν } \Lambda = \frac{\frac{\epsilon^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{24\rho^3} - \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{4\rho^4}}{\frac{6\gamma}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{6\rho^2} - \frac{\gamma^2}{6\rho^2} \right)}$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦτου τοῦ κλάσματος ἐπὶ
 $1 + \frac{\epsilon^2 + \gamma^2}{6\rho^2}$ καὶ ἀνάγοντες εὐρίσκουμεν

$$\text{συν } \Lambda = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{26\gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma\rho^2}$$

Ἐστω τώρα Λ' ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α γωνία εἰς τὸ τρί-
 γωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἤθελον εἶναι ἰσομήκεις μὲ τὰ τόξα
 β, γ· θέλομεν ἔχει συν $\Lambda' = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{26\gamma}$ καὶ $4\beta^2\gamma^2 \eta\mu^2 \Lambda' = 2\alpha^2$
 $\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^2 - \gamma^4$. Λοιπὸν

$$\text{συν } \Lambda = \text{συν } \Lambda' - \frac{6\gamma}{\epsilon^2} \eta\mu^2 \Lambda'.$$

Ἐστω $\Lambda = \Lambda' + \chi$, ἀπορρίπτοντες τὸ τετράγωνον τῆς χ θέλομεν
 ἔχει συν $\Lambda = \text{συν } \Lambda' - \chi \eta\mu \Lambda'$. ὅθεν βλέπομεν ὅτι $\chi = \frac{6\gamma}{\epsilon^2} \eta\mu \Lambda'$.
 καὶ ἐπειδὴ χ εἶναι τῆς διυτέρως τάξεως ὡς πρὸς τὰς ποσότητας
 $\frac{6}{\rho}$ καὶ $\frac{\gamma}{\rho}$, ἔπεται ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ἀκριβὲς μέχρι
 τῶν ποσοτήτων τῆς τετάρτης τάξεως. Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν

$$\Lambda = \Lambda' + \frac{6\gamma}{\epsilon^2} \eta\mu \Lambda'.$$

Αλλ' ἐν $\frac{1}{2}$ βγ ἢ μ Α' εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εὐθυγράμμου τριγώνου τοῦ ὁποῖου α, β, γ εἶναι αἱ τρεῖς πλευραὶ, τὸ ἐπὶ τὴν ἐμβαδὸν δὲν διαφέρει ἐπαισθητῶς ἀπὸ τὸ τοῦ σφαιρικοῦ προτεθέντος τριγώνου. Ἐὰν λοιπὸν ἢ τὸ ἐν ἢ τὸ ἄλλο καλέσωμεν α', θέλομεν ἔχει $A =$

$$A' + \frac{\alpha'}{3r^2} \quad \text{ἢ} \quad A' = A - \frac{\alpha'}{3r^2} \quad \text{παρεμοίως ἡθέλαμεν ἔχει} \quad B = B - \frac{\alpha'}{3r^2}, \quad \Gamma = \Gamma - \frac{\alpha'}{3r^2}, \quad \text{καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει} \quad A' + B' + \Gamma' \quad \text{ἢ} \quad 200^\circ =$$

$$A + B + \Gamma - \frac{\alpha'}{r^2} \quad \text{Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν ποσότητα} \quad \frac{\alpha}{r^2}$$

ὡς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς. Ἐντεῦθεν πηγάζει τὴ ἀξιοσημείωτον τοῦτο θεώρημα διὰ τοῦ ὁποῖου ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν πολλὰ μικρῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὴν τῶν εὐθυγράμμων.

Ἐὰν ἀφ' ἐκάστης τῶν γωνιῶν προτεθέντος τινὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ εἶναι μικρόταται ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἀφαιρεθῇ τὸ τριτημόριον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς, αἱ εὖτως ἡλαττωμέναι γωνίαι ἡμῶν ὁρῶν νὰ ληφθοῦν ὡς γωνίαι εὐθυγράμμου τριγώνου τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ εἶναι ἰσομήκεις μὲ τὰς τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις.

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποῖου ἡ καμπυλότης εἶναι πολλὰ μικρὰ καὶ τοῦ ὁποῖου αἱ γωνίαι εἶναι Α, Β, Γ, αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραὶ α, β, γ, ἀντιστοιχεῖ πάντοτε εἰς εὐθύγραμμον τρίγωνον τοῦ ὁποῖου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἰσομήκεις μὲ τὰς τοῦ σφαιρικοῦ α, β, γ, αἱ δὲ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι $A - \frac{1}{2}\epsilon$, $B - \frac{1}{2}\epsilon$, $\Gamma - \frac{1}{2}\epsilon$, ὅπου ϵ παριστάνει τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς.

ρς'. Ἡ ὑπεροχὴ ϵ ἢ $\frac{\alpha'}{r^2}$, ἥτις εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ

τριγώνου, δύναται πάντοτε νὰ λογαριασθῇ ἐκ τῶν προτέρων διὰ τῶν δεδομένων τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ὡς εὐθυγράμμου θεωρουμένου. Ἐὰν δοθῶσιν δύο πλευραὶ β καὶ γ μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Α, τὸ ἐμβαδὸν α' θέλει ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ βγ ἢ μ Α' ἐὰν δὲ δοθῇ μία πλευρὰ α μετὰ τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν Β, Γ, τὸ ἐμβαδὸν α' θέλει ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\eta \mu \beta \eta \mu \Gamma}{\eta \mu (B + \Gamma)}$. ἀκολούθως θέ-

λομεν ἔχει $\varepsilon = \frac{\alpha'}{r^2} P$, ἐνθα P εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα περιεχομένων δευτέρων, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ε ἐκφράζεται διὰ δευτέρων.

Λιὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τοῦς τύπους εἰς τὰ χαραγμένα τρίγωνα ἐπὶ τῆς γῆνις ἐπιφανείας, ὑποθεοίσης ὡς σφαιρικῆς (1) πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ α, β, γ καθὼς καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς ρ ἐκφράζεται διὰ μέτρων. Τώρα, ἐπειδὴ τὸ τέταρτον τοῦ μεσημβρινοῦ $\frac{1}{2}$ πρὶς ἰσοῦται μετὰ 10000000 μέτρα, συνάγεται ὅτι $\log \rho = 6.8038801$ ἀπὸ ἄλλο μέρος ἡ ἀκτὶς P ἐκφραζομένη διὰ δευτέρων, ἔχει λογάριθμον 5.8038801. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν λογάριθμον τοῦ ἐμβαδοῦ α' διὰ τετραγωνικῶν μέτρων ἐκφραζομένου, προσεθῇ ὁ σταθερὸς λογάριθμος 2.196119, καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῶσι δέκα μονάδες, θέλει προκύψει ὁ λογάριθμος τῆς ὑπεροχῆς ε διὰ δευτέρων ἐκφραζομένης.

Γνωστῆς τῆς ὑπεροχῆς ε ἀφαιρεῖται ἢ ὑποτίθεται ἀφαιρούμενον τὸ τριτημόριον αὐτῆς ἢ $\frac{1}{3} \varepsilon$ ἀφ' ἐκείνης γωνίας τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, καὶ τότε τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον τὸ σχηματιζόμενον ἀπὸ τὰς πλευρὰς α, β, γ καὶ ἀπὸ τὰς γωνίας $A' = A - \frac{1}{3} \varepsilon, B' = B - \frac{1}{3} \varepsilon, \Gamma = \Gamma - \frac{1}{3} \varepsilon$, θέλει περιέχει τὰ ἀναγκαῖα διδόμενα διὰ τὴν προσδιόρισιν ὅλων τῶν μερῶν τοῦ καὶ οὕτως εἰς τὸν αὐτὸν καὶ τὸν γίνονται γνωστὰ τὰ μέρη τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου.

ρ'. Παράδειγμα. Ἀς ὑποθεθῇ γνωστὴ ἡ γωνία Γ καὶ αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β , δηλαδή.

$$\Gamma = 123^\circ 19' 99''.23$$

$$\log \alpha = 4.5891503$$

$$\log \beta = 4.5219271$$

ἡ ποσότης $\frac{1}{2} \alpha \beta \sin \Gamma$ ἥτις παρίστανε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἔχει λογάριθμον 8.78055, εἰς τὸν ὁποῖον προσθέτοντες 2.19612, ἔχομεν $\log \varepsilon = 0.97667$ ὅθεν $\varepsilon = 9''.48$ καὶ $\frac{1}{3} \varepsilon = 3''.16$. Τοῦτου τεθέντος, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὰς δύο πλευρὰς α καὶ β ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν $\Gamma' = 123^\circ 19' 96''.07$. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὴν μέθοδον τοῦ ἀρ 56,

(1) Εἰς τὰς γεωδαισιακὰς ἐργασίας ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὰ τρίγωνα σχηματίζονται μεταξὺ τριῶν στασεων (stations) αἱ ὁποῖαι ἀνισάκις ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς γῆς· πλὴν, δι' ἀρμεδιῶν ἀναγωγῶν, ἀντὶ τῶν παρατηρηθέντων τριγώνων ἀντιλαμβάνονται τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὰς προβολὰς τῶν στασεων ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας καθέτου εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος. Ο. Σ,

$$\begin{array}{ll} \lambda\gamma\alpha \dots\dots\dots 4.5891503 & \varphi(\varphi=50^\circ) \dots\dots\dots 8.8878392 \\ \lambda\gamma\epsilon \dots\dots\dots 4.5219271 & \sigma\varphi \frac{1}{2} 1' \dots\dots\dots 9.8381110 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi \cdot \varphi \dots\dots\dots 0.0672232 & 1\varphi \frac{A'-B'}{2} \dots\dots\dots 8.7259502 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi = 54^\circ 90' 74'' \cdot 72 & \frac{A'-B'}{2} = 3^\circ 38' 39'' \cdot 27 \\ \frac{1}{2} \Gamma = 38 \quad 40 \quad 1 \quad 97 & \end{array}$$

$$100^\circ - \frac{1}{2} \Gamma = 61 \quad 59 \quad 98 \cdot 03 \quad \frac{A'+B'}{2} = 38 \quad 40 \quad 1 \cdot 77$$

$$A' = 41 \quad 78 \quad 41 \cdot 24$$

$$B' = 35 \quad 1 \quad 62 \cdot 70$$

Μένει νὰ προσδιορισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ γ, το ὅποιον γίνεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\gamma = \frac{\alpha \cdot \eta\mu \Gamma'}{\eta\mu A'}$

$$\lambda\gamma\alpha \dots\dots\dots 4.5891503$$

$$\eta\mu A' \dots\dots\dots 9.7854893$$

$$\text{Διαφορὰ} \quad 4.8036610 \quad \dots\dots\dots 4.8036610$$

$$\eta\mu \Gamma' \dots\dots\dots 9.9705008 \quad \eta\mu B' \dots\dots\dots 9.7182661$$

$$\lambda\gamma \cdot \gamma = \dots\dots\dots 4.7741618 \quad \lambda\gamma \beta = \dots\dots\dots 4.5219271$$

Εἰς τὸ προτεθὲν λοιπὸν σφαιρικὸν τρίγωνον, τὰ στοιχεῖα τὰ ὅποια ἔπρεπε νὰ εὐρεθῶν, εἶναι:

$$A = 41^\circ 78' 44'' \cdot 40$$

$$B = 35 \quad 1 \quad 65 \cdot 86$$

$$\lambda\gamma \cdot \gamma = 4.7741618, \quad \eta \quad \gamma = 59451'' \cdot 256.$$

Σ. Κ. Η δοθεῖσα μέθοδος εἰς τεῦτον τὸν παράγραφον ἡμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ ἀκόμῃ διὰ τὴν λύσιν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὅποια δύο πλευραὶ πολλὰ ὀλίγον ἔθελον διαφέρει ἀπὸ 200° καὶ ἡ τρίτη ἦθελον εἶναι μικροτάτη· διότι εἰάν προσεχθῶμεν τὰς μεγαλύτερας πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ, θέλωμεν ἔχει σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΒΓΑ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι μικρόταται. σχ. 16.

§. Ζ'. Περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι πολλὰ ὀξείαι.

ρη'. Εἷω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν σφαιρικὸν τρίγωνον εἰς τὸ ὅποιον Α καὶ Β εἶναι δύο γωνίαι ὀξύταται, ἔσω ΑΜΝ τὸ πελικόν του, εἰς τοῦτον ὥστε ΜΝ = 200° — Α καὶ ΑΝ = 200° — Β. Εἰάν προσεχθῶσι τὰ τόξα ΝΜ, ΝΑ, ἔως εἰς νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Κ', φανερόν ὅτι θέλει εἶναι Κ'Μ = Α, καὶ Κ'Α = Β, τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΚ'Μ ἔχει τὰς πλευρὰς του μικροτάτας, καὶ ἡμπορεῖ νὰ λυθῇ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ προηγούμενου παραγράφου. Εἰσωσαν Α', Β', Γ', αἱ

τρεις γωνίαι καὶ α, β, γ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου $\Delta\text{Κ}'\text{Μ}$,
θίλομεν ἔχει

$$\text{Α}' = \text{ΜΑΚ}' = \alpha \quad \alpha' = \text{Κ}'\text{Μ} = \text{Α}$$

$$\text{Β}' = \text{ΑΜΚ}' = \beta \quad \beta' = \text{ΑΚ}' = \text{Β}$$

$$\text{Γ}' = \text{ΑΚ}'\text{Μ} = 200^\circ - \gamma \quad \gamma' = \text{ΑΜ} = 200^\circ - \Gamma.$$

Τὰ τρία λοιπὸν γνωστὰ στοιχεῖα εἰς τὸ τρίγωνον $\text{ΑΒΓ}'$ κἀμνὸν
γνωστὰ τρία εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta\text{Κ}'\text{Μ}$, καὶ ἐπομένως τρία εἰς τὸ εὐθ.
γραμμικὸν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ τρίγωνον $\Delta\text{Κ}'\text{Μ}$ ἡμπερεῖ νὰ
ἀναχθῇ. Τώρα φανερόν εἶναι ὅτι ἡ λύσις τοῦ εὐθυγράμμου τρι-
γώνου δίδει τὴν λύσιν τοῦ $\Delta\text{Κ}'\text{Μ}$, ἐκ τῆς ὁποίας τέλος συνάγεται
ἡ τοῦ προτεθέντος σφαιρικῆς.

ρβ'. Ἐςω, π.χ., $\text{Α} = 3^\circ \text{ Β} = 2^\circ$, καὶ ἡ προσκειμένη πλευρὰ $\gamma =$
 $150''$. Τὰ γνωστὰ εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta\text{Κ}'\text{Μ}$, ἢ μᾶλλον εἰς τὸ $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$
εἶναι $\alpha' = 3^\circ$, $\beta' = 2^\circ$, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $\text{Γ}' = 50^\circ$. Διὰ τῶν

$$\text{θεθέντων τούτων εὐρίσκεται ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχὴ} \epsilon = \frac{\frac{1}{2} \alpha\beta' \eta\mu \Gamma'}{P}$$

$= 333''.21$, καὶ τὸ τρίτον τῆς ϵ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ $\text{Γ}'$, ἀφίνει ὑπό-
λοιπον $49^\circ 98' 88''.93$. Πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν εὐθύγραμμικον
τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὰς δύο πλευρὰς $\alpha' = 30000''$,
 $\beta' = 20000''$, καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν $\text{Γ}' = 49^\circ 98' 88''.93$,
Λύοντες δὲ τὸ τρίγωνον τοῦτο εὐρίσκομεν τὰς ἄλλας δύο γωνίας
 $\text{Α}'' = 103^\circ 64' 86''.33$, $\text{Β}'' = 46^\circ 36' 24''.75$, καὶ τὴν τρίτην πλευ-
ρὰν $\gamma' = 21244''.36$. Τώρα ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\text{Α}''$ καὶ $\text{Β}''$ τοῦ σφαι-
ρικῆς τριγώνου ὑπερέχουσι τὰς γωνίας $\text{Α}''$ καὶ $\text{Β}''$ τοῦ εὐθυγράμμου
κατὰ τὸ $\frac{1}{2} \epsilon$, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτας $\frac{1}{2} \epsilon$ διὰ νὰ
προσδιορίσωμεν ἐκείναις, καὶ οὕτως ἔχομεν διὰ τὴν ζητούμενην λύσιν

$$\text{Α}' = \alpha = 103^\circ 65' 97''.40$$

$$\text{Β}' = \beta = 46 \quad 37 \quad 35.82$$

$$\text{Γ}' = 200 - \gamma' = 197 \quad 87 \quad 35.64$$

§. Ζ'. Περὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου δεκαεπτὰ πλευρῶν.

ρι'. Θίλομεν τελειώσει τὰς ἐφαρμογὰς ταύτας τοῦ τριγωνομε-
τρικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἀφ' οὗ, ἀκτελευθεῦντες τὸ ἔξοχον σύγγραμμα τοῦ
Γαυσοῦ (Gauss) ἀναφερθὲν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας
βιβλίον Α', δεῖξωμεν πῶς διὰ τῆς ἀπλῆς λύσεως δευτεροβάθμιων
ἑξισώσεων ἐγγράφεται τὸ κανονικὸν πολυγώνον δεκαεπτὰ πλευρῶν.

Ἐςω τὸ τέξεν $\frac{200^\circ}{17} = \phi'$ λέγω ἐν πρώτοις ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν

ἑξίσωσιν $\text{συν } \phi + \text{συν } 3\phi + \text{συν } 5\phi + \text{συν } 7\phi + \text{συν } 9\phi + \text{συν } 11\phi + \text{συν } 13\phi + \text{συν } 15\phi = \frac{1}{2}$: διότι ἐὰν καλέσωμεν τὸ πρῶτον μέλος Π καὶ

πολλαπλασιάζωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἐπὶ 2 συν φ· ἀκολουθῶς τρέψωμεν καθεὶ γινόμενον δύο συνημιτόνων εἰς συνημίτονα ἀπλῶν τῶν τριγώνων, πράττοντες τοῦτο κατὰ τὸν τύπον:

$$2 \text{ συν } A \text{ συν } B = \text{συν} (A+B) + \text{συν} (A-B)$$

Θέλουμεν εἶχει

$$2\Pi \text{ συν } \varphi = 1 + 2 \text{ συν } 2\varphi + 2 \text{ συν } 4\varphi + 2 \text{ συν } 6\varphi \dots + 2 \text{ συν } 14\varphi + \text{συν } 15\varphi.$$

Τώρα ἐπειδὴ $17\varphi = 200^\circ$, ἀκολουθεῖ ὅτι $\text{συν } 2\varphi = \text{συν} (200^\circ - 15\varphi) = -\text{συν } 15\varphi$, $\text{συν } 4\varphi = \text{συν} (200^\circ - 13\varphi) = -\text{συν } 13\varphi$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι $\text{συν } 16\varphi = -\text{συν } \varphi$. Λοιπὸν

$$2\Pi \text{ συν } \varphi = 1 - 2 \text{ συν } 15\varphi - 2 \text{ συν } 13\varphi - 2 \text{ συν } 11\varphi \dots - 2 \text{ συν } 3\varphi - \text{συν } \varphi \quad \eta \quad 2\Pi \text{ συν } \varphi = 1 + \text{συν } \varphi - 2\Pi, \quad \eta \quad 2\Pi (1 + \text{συν } \varphi) = 1 + \text{συν } \varphi. \quad \text{Λοιπὸν } \Pi = \frac{1}{2}.$$

Τούτου τεθέντος, μοιράζω τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἰς ὅπως τε συγχορευτῶν Π εἰς δύο μέρη, δηλαδή:

$$\chi = \text{συν } 3\varphi + \text{συν } 5\varphi + \text{συν } 7\varphi + \text{συν } 11\varphi$$

$$\psi = \text{συν } \varphi + \text{συν } 9\varphi + \text{συν } 13\varphi + \text{συν } 15\varphi$$

Ἐχω λοιπὸν $\chi + \psi = \frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζω τώρα τοὺς τέσσαρας ὅρους τοῦ χ ἐπὶ τῶν τεσσάρων ὅρων τοῦ ψ , καὶ τρέπων τὰ γινόμενα τῶν συνημιτόνων εἰς συνημίτονα, ἀπλῶν τῶν τριγώνων, εὐρίσκω μετὰ τὰς ἀναγωγὰς,

$$\chi\psi = 2 (\text{συν } 2\varphi + \text{συν } 4\varphi + \text{συν } 6\varphi \dots + \text{συν } 16\varphi)$$

$$\eta \quad \chi\psi = -2 (\text{συν } 15\varphi + \text{συν } 13\varphi + \text{συν } 11\varphi \dots + \text{συν } \varphi)$$

$$\eta \quad \text{τέλος } \chi\psi = -1$$

Διὰ τῶν ἐξισώσεων τοῦτων εὐρίσκω

$$\chi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{17}, \quad \psi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{17}.$$

Ἐὰν τώρα ἔκαστον τῶν ἀθροισμάτων χ καὶ ψ μοιρασθῇ πάλιν εἰς δύο μέρη, δηλαδή:

$$\chi = \sigma + \tau \quad \psi = \omega + \upsilon$$

$$\sigma = \text{συν } 3\varphi + \text{συν } 5\varphi \quad \omega = \text{συν } \varphi + \text{συν } 13\varphi$$

$$\tau = \text{συν } 7\varphi + \text{συν } 11\varphi \quad \upsilon = \text{συν } 9\varphi + \text{συν } 15\varphi$$

Θέλει εὐρεθῆ παρομοίως

$$\sigma\tau = -\frac{1}{4}, \quad \omega\upsilon = -\frac{1}{4}$$

Ὡς εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ $\sigma, \tau, \omega, \upsilon$ διὰ δύο νέων δευτεροβάθμιων ἐξισώσεων.

Τέλος γνωρίζοντες $\text{συν } \varphi + \text{συν } 13\varphi = \omega$ καὶ $\text{συν } \varphi \text{ συν } 13\varphi = \frac{1}{2} (\text{συν } 12\varphi + \text{συν } 14\varphi) = -\frac{1}{2} (\text{συν } 3\varphi + \text{συν } 5\varphi) = -\frac{1}{2} \sigma$, εὐ-

παραγομένην διὰ μιᾶς τετάρτης δευτεροβάθμίου εξισώσεως τὴν τιμὴν τοῦ συνφ, καὶ ἐντεῦθεν τὴν τιμὴν τῆς πλευρᾶς τοῦ προτεθέντος πολυγώνου, ἥτις εἶναι $2\sqrt{3}$ ἢ $2\sqrt{1-\sin^2\varphi}$.)

Ὅσον διὰ τὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν εἰς τὸν μειρασμὸν τῶν διαφορῶν τύπων εξισώσεων, συνέχεται μὲ μίαν λεπτοτάτην θεωρίαν, θεμελιουμένην ἐπὶ τῆς ἀπροσδιόριστου ἀναλύσεως, καὶ τῆς ὁποίας ἡμπορεῖ τις νὰ ἴδῃ τὴν ἀνάπτυξιν εἰς τὸ αὐτὸ σύγγραμμα τοῦ Γαυσσίου, ἢ εἰς τὸ δοκίμιον περὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ἑκδόσις δευτέρα· ἐκεῖ εὐρίσκεται ἡ πλήρης ἀπόδειξις τοῦ ὠραιοτάτου τούτου καὶ ἐνταύτῳ γενικοτάτου θεωρήματος:

« Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς n ᾖ πρῶτος, καὶ $n-1$ περικύπτῃ ἀπὸ
 $\alpha \beta \gamma$

« τὸ γινόμενον τῶν πρώτων παραγόντων $2 \ 3 \ 5$ κτλ. ἡ διαίρεσις
 « τοῦ κύκλου εἰς n ἴσα μέρη ἡμπορεῖ πάντοτε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν
 « λύσιν α εξισώσεων τοῦ δευτέρου, β τοῦ τρίτου, γ τοῦ πέμπτου
 « βαθμοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς »

ΚΕΦΑΛΟΝ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ε Ι Σ

ΕΙΣ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Α'.

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΟΝΟΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΩΝ.

Εἰς τὸ σύγγραμμα ταῦτο εἰσιξαμεν νέας τινὰς ἐκφράσεις καὶ ὀρισμούς· σκοπὸν δὲ αὐτῶν ἔχοντες νὰ δώσωμεν εἰς τὴν γεωμετρικὴν γλῶσσαν περισσότεραν τὴν ἀκρίβειαν καὶ βραχυλογίαν· Εἰς τὴν σημείωσιν λοιπὸν τύχον θελωμεν ἀποδώσει λόγον τῶν μεταβλητῶν τούτων, καὶ προτείνει ἄλλας τινὰς αἱ ὁποῖαι ἀπεβλέπουν εἰς τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Εἰς τὸν κοινὸν ὅρισμὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τετραγώνου, λέγεται ὅτι αἱ γωνίαι τούτων τῶν σχημάτων εἶναι ὀρθαί· ὀρθότερον ἤθελεν εἶναι νὰ λέγεται ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· διότι νὰ ὑποθέσῃ τινὰς ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου ἤμπορουν νὰ ᾔναι ὀρθαί, καὶ ἀκόμη ὅτι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ ὑποθέσῃ-προτάσεις αἰτινες χρήζουν ἀπεδείξεως. Τὸ ἀνάρμοστον τοῦτο καὶ ἄλλα παρόμοια δὲν ἤθελεν λάβῃ χώραν, ἔαν, ἀντὶ, κατὰ τὴν καθιερωσάν συνήθειαν, νὰ προτάσσωνται οἱ ὅρισμοί, ἐτίθετο ἕκαστος ἐκεῖ εἶθι ἀπεδείκνυται τὸ ὑπ' αὐτοῦ ὑποτιθέμενον.

Ἡ λέξις κλίσις πρέπει νὰ νοῆται κατὰ τὴν αὐτὴν ἑννοίαν ἵπυ καὶ ἡ λέξις γωνία· καὶ αἱ δύο δεικνύουν τὴν τροπεῦπαρξιν (*maniere d'être*) δύο γραμμῶν ἢ δύο ἐπιπέδων τὰ ἐπὶ τῇ συναπαντῶνται, ἢ παρεκβληόμενα ἤθελον συναπαντηθῇ. Ἡ κλίσις δύο γραμμῶν εἶναι μηδὲν ὅταν ἡ γωνία ᾔναι μηδὲν, τούτ' ἔστιν ὅταν αἱ γραμμαὶ ᾔναι παραλλήλοι ἢ ταυτιζόμεναι. Ἡ κλίσις εἶναι ἡ μεγαλητέρα ὅταν ἡ γωνία ᾔναι ἡ μεγαλητέρα, ἢ ὅταν αἱ δύο γραμμαὶ κάμνουν μεταξύ των ἀμβλυτάτην γωνίαν. Ἡ δὲ λέξις ῥοπή ἐκλαμβάνεται εἰς διαφορετικὴν ἑννοίαν· μία γραμμὴ τόσον περισσότερον ῥέπει ἐπὶ μιᾷ ἄλλῃ ὅσον ἀπεμακρύνεται τῆς καθέτου εἰς αὐτήν.

Ο Εὐκλείδης καὶ ἄλλοι συγγραφεῖς συχνῶτατα ὀνομάζουσιν ἴσα τρίγωνα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μόνον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ σφραῖ ἴσα ἐκεῖνα τὰ σφραῖ τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἴσα εἰ μὴ κατὰ τὴν σφραῖότητα. Μᾶς ἐφάνη καταλληλότερον νὰ ὀνομάσωμεν τὰ τρίγωνα ταῦτα ἢ τὰ σφραῖ ἰσοδύναμα τρίγωνα ἢ ἰσο-

δύναμα στερεά, καὶ νὰ φυλάξωμεν τὴν ὀνομασίαν ἴσα τρίγωνα, ἴσα στερεά, δι' ἐκεῖνα τὰ ὅποια ἐφαρμόζουσιν διὰ τῆς ἐπιθέσεως.

Πῶς προσέτι ἀναγκαῖον νὰ διακρίνωμεν εἰς τὰ στερεά καὶ τὰς καμπύλας ἐπιφανείας δύο διαφορετικὰ εἶδη ἰσότητος. Τῷ ὄντι, δύο στερεά, δύο στερεαὶ γωνίαι, δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἢ πολύγωνα, ἢ μπερσοῦν νὰ ᾖναι ἴσα καθ' ὁλόκληρον τὰ συστατικά μέρη, χωρὶς μ' ὅλον τοῦτο νὰ ἐφαρμόζουσιν διὰ τῆς ἐπιθέσεως. Ἡ παρατήρησις αὕτη φαίνεται ὅτι δὲν ἐγένετο εἰς τὰ στοιχειώδη βιβλία, καὶ ὅμως, διὰ τὴν ἁλλοτρίαν ταύτην, πολλοὶ ἀποδείξεις θεμελιούμεναι ἐπὶ τῆς ἐφαρμοστικῆς τῶν σχημάτων δὲν εἶναι ἀκριβεῖς. Τοιαῦτα εἶναι ἐκεῖνα διὰ τῶν ὁποίων πολλοὶ συγγραφεῖς διατείνονται νὰ ἀποδείξουσιν τὴν ἰσότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὰς αὐτὰς περιπτώσεις καὶ καθ' ἓν τρόπον ἀποδεικνύεται ἢ τῶν εὐθυγράμμων· πρὸ πάντων δὲ ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν ὡς παράδειγμα τὸν Ρομβέρτιν Σίμωνα (1), ὅστις πολεμῶν τὴν ἀπόδειξιν τῆς καὶ προτάσεως τοῦ 1^{ου} βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, θεμελιώνει τὴν ἐδίκην τοῦ ἐπὶ μιᾷ ἐφαρμοστικῆς ἥτις δὲν ὑπάρχει. Ἐκρίναμεν λοιπὸν πρέπον νὰ δώσωμεν εἰς ταύτην τὴν ἰσότητα, ἥτις δὲν συνεπιφέρει τὴν ἐφαρμοστικὴν, ἰδιαιτέρον ὄνομα· ὥθεν τὴν ὀνομάσαμεν ἰσότητα ἐκ συμμετρίας, καὶ τὰ σχήματα τὰ ὅποια ἔχουσιν μὲν ὁλόκληρον τὰ συστατικά μέρη ἴσα, πλὴν ἐπιτιθέμενα δὲν ἐφαρμόζουσιν, σχήματα συμμετρικά.

Ἄλλην λοιπὸν ἰδέαν πρέπει νὰ ἔχωμεν τῶν ἴσων σχημάτων, ἄλλην τῶν ἰσοδυνάμων, καὶ ἄλλην τέλος τῶν συμμετρικῶν, καὶ τὰς τρεῖς ταύτας ὀνομασίας ὡς ἀναφερομένας εἰς διαφορετικὰ πράγματα δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν εἰς μίαν μόνην.

Εἰς τὰς πρῆτασεις αἱ ὅποια ἀποβλέπουσιν τὰ πολύγωνα, τὰς στερεὰς γωνίας καὶ τὰ πολύεδρα, ἀπεκλείσαμεν ῥητῶς ἐκεῖνα τὰ ὅποια ἤθελον ἔχει εἰσεχούσας γωνίας. Διότι, ἐκτὸς ὅτι πρέπει εἰς τὰ στοιχεῖα νὰ περιερίζεται τινὰς εἰς τὰ ἀπλούστερα σχήματα, εἰάν δὲν ἐπράτταμεν εὐθὺς, μερικαὶ προτάσεις, ἢ δὲν ἤθελον εἶναι ἀληθεῖς, ἢ ἤθελον χρῆζει τροπολογίας. Ἐπεριωρίσθημεν λοιπὸν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν κυρτάς, καὶ εἶναι τοιαῦτα ὥστε δὲν τέμνονται ἀπὸ εὐθεΐαν γραμμὴν εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεία.

Συχνώτατα ἐμεταχειρίσθημεν τὴν ἔκφρασιν γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων γραμμῶν διὰ τῆς ὁποίας ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν περισσόντων ταύτας τὰς γραμμάς, αἱ

(1) Βλέπε τὸ πόνημα ταύτου τοῦ συγγραφέως, ἐπιγραφόμενον: *Euclidis Elementorum libri sex, etc.* Glasgux, 1756.

ὅτεται ὑποτίθενται ἱκανοῦνται μὲ μίαν κατ' ἀρίσκειαν γραμμικὴν μονάδα. Στερεώσεως τῆς ἐννοίας ταύτης τῇ: λέξεως, ἡ χρῆσις τῆς δὲν φέρει καμμίαν δυσκολίαν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡθελον ἐννεῆται ἡ σημασία τοῦ γινομένου ἐπιφανείας καὶ γραμμῆς, ἐπιφανείας καὶ στερεῦ καὶ: ἀρκεῖ νὰ στερεωθῇ μίαν φοράν διὰ πάντα ὅτι τὰ γινόμενα ταῦτα θεωροῦνται ἢ πρέπει καὶ, νὰ θεωροῦνται ὡς: γινόμενα ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὑποῶν ἀντρέσεται εἰς τὸ ἴδιον: εἰς τὸ ὑποῶν ἀντρέσεται. Ὡς: τοῦ γινόμενον ἐπιφανείας καὶ στερεῦ ἀλλ' οἱ δὲν εἶναι ἐκ μὴ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὑποῶν ὁ μὲν παριστάνει μονάδας ἐπιφανείας, ὁ δὲ στερεῦ.

Συχνάκις εἰς τὴν ἐμιλίαν θίλιντες νὰ φανερώσωμεν τὴν σιγαμὴν τὴν εὐστακισμένην ἐπὶ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας, μεταχειρίζομεθα τὴν ἰδίαν λέξιν γωνία: ὁ τρόπος αὗτος τοῦ ἐκφράζεσθαι δὲν εἶναι ὀρθός: καλὴν ἦτον πρὸς περισσεύσαν καθαρότητα καὶ ἀκρίβειαν νὰ ἐνομασθῶσιν μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα, καθὼς μὲ τὸ ὄνομα κορυφαί αἱ εὐστακισμέναι σιγαμαὶ εἰς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν πολυγώνου ἢ πολυέδρου. Ὡς: ἐννεῆται ἡ σημασία κορυφαί πολυγώνου ἢ πολυέδρου τὴν ὑποῶν συχνὰ ἐμεταχειρίζομεθα.

Εἰς τὸν ἐρισμὸν τῶν εὐθυγράμμων ἐμοῦσιν σχημάτων ἀπολευθῆσάμεν τὴν κρινόν: πλὴν παρατηροῦμεν ὅτι περιέχει τρεῖς περιπτώσεις συνθήκας. Διότι, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον νὰ πλευρῶν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν μίαν πλευράν, καὶ νὰ ἔχωμεν τὴν θέσιν τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς ταύτης τῆς πλευρᾶς κειμένων γωνιῶν. Τώρα ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν ταύτων εἶναι $n - 2$, καὶ ἡ θέσις: ἐκάστης κορυφῆς ἀπαιτεῖ δύο διδόμενα: ἐκ τοῦ ὑποῶν ἐπεταὶ ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν κατασκευὴν πολυγώνου νὰ πλευρῶν εἶναι $1 + 2n - 4$ ἢ $2n - 3$. Πλὴν εἰς τὸ ὅμοιον πολύγωνον εἶναι μία πλευρὰ κατ' ἀρίσκειαν: εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαιῶν συνθηκῶν διὰ τὴν ὁμοιότητα πολυγώνου μὲ ἄλλο διδόν, εἶναι $2n - 4$. Τώρα ἀπὸ τῶν κρινόν ἐρισμὸν ἀπαιτεῖται, ἵνα αἱ γωνίαι νὰ ἦναι: ἴσαι ἢ καὶ: μία μὲ τὴν καθε μίαν, τὸ ὑποῶν δίδει χώραν εἰς νὰ συνθήκας. 2ον αἱ ὁμοῦλοι πλευραὶ νὰ ἦναι: ἀνάλογαι, τὸ ὑποῶν δίδει χώραν εἰς νὰ συνθήκας. Οἱ λοιπὸν αἱ συνθήκαι εἶναι $2n - 1$, δηλαδή τρεῖς περισσότερες. Πρὸς ἀπεφυγὴν ταύτου, ἡμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἐρισμὸς εἰς δύο ἄλλους, κατὰ τὸν ἀκρίβουτον τρόπον.

1ον Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια δταν ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν.

2ον Δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια δταν καὶ εἰς τὰ δύο ἡμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Αλλὰ διὰ τὴν μὴ περιέχει καὶ ἡ τελευταία, οὗτος ὁρισμός, συν-
 θήκας περιττάς, πρέπει ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων νὰ ἰσοῦται μὲ
 τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου παρὰ δύο· καὶ τοῦτο ἡμ-
 πορεῖ νὰ γένη κατὰ δύο τρόπους. Δυνατὸν εἶναι ἀπὸ δύο ἡμο-
 λόγους γωνίας νὰ ἀγῶσιν διαγώνιοι εἰς τὰς ἀπέναντι γωνίας, καὶ
 τότε ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἰς ἕκαστον πολυγώνον ἔχουν
 τὴν αὐτὴν κορυφήν, καὶ τὸ ἄθροισμὰ τῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πολυγώνον·
 ἢ δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἰς ἓν
 πολυγώνον, ἔχουν διὰ κοινὴν βάσιν, μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου,
 καὶ κορυφὰς τὰς τῶν διαφόρων ἀπέναντι ταύτης τῆς βάσεως γω-
 νιών. Εἴτε εἰς τὴν μίαν εἴτε εἰς τὴν ἄλλην περιῃχον ἐπειδὴ ὁ
 ἀριθμὸς τῶν σχηματιζομένων τριγώνων καὶ εἰς τὰ δύο μέρη εἶναι
 $n-2$, ὁ ἀριθμὸς τῶν διὰ τὴν ἡμιόβητά των ἀπαιτουμένων συν-
 θηκῶν εἶναι $2n-4$, καὶ ὁ ὁρισμὸς δὲν περιέχει τίποτε περιττόν.
 Τελέντος τοῦ νέου τούτου ὁρισμοῦ, ὁ παλαιὸς καταντᾷ εἰς θεώ-
 ρημα· τὸ ὁπεῖν ἀμέσως ἀποδεικνύεται.

Οχι ὀλιγώτερον ἀτελής εἰς τὰ στοιχεῖα βιβλία εὐρίσκεται ὁ
 ὁρισμὸς τῶν πολυέδρων ὁμοείων στερεῶν. Εἰς τὸν Εὐκλείδην
 ὁ ὁρισμὸς οὗτος κρέμαται ἀπὸ ἀναπόδεικτον θεώρημα· εἰς ἄλλους
 συγγραφεῖς περιέχει πολλὰ πλεονάζοντα. Ἡμεῖς λοιπὸν ἀπερρίψαμεν
 τοὺς ὁρισμοὺς τούτους τῶν στερεῶν, καὶ ἀντ' αὐτῶν ἀντικαταστή-
 σαμεν ἄλλον θεμελιούμενον ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τὰς ὁποίας ἐξεθέσαμεν.
 Αλλ' ἐπειδὴ ἔχμεν νὰ κἀμωμεν πολλὰς ἄλλας παρατηρήσεις περὶ
 τῆς ὑποθέσεως ταύτης, θέλομεν ἐπιστρέψει εἰς αὐτὴν εἰς ἰδιαιτέραν
 σημείωσιν.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς καθέτου ἐν ἐπιπέδῳ ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ
 ὡς θεώρημα. Ὁ τῆς κλίσεως δύο ἐπιπέδων ἔχει χρεῖαν πα-
 ρομοίως νὰ βεβαιωθῇ δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ· διὰ πολλοὺς ἄλλους ὑπάρχει
 τὸ ἴδιον· καὶ ἰδοὺ διατὶ φυλάττοντες τοὺς ὁρισμοὺς τούτους κατὰ
 τὴν παλαιὰν συνήθειαν, ἐφροντίσαμεν νὰ παραπέμπωμεν εἰς τὰς
 πρτάσεις ἔκαστο αὐτοῖς ἀποδεικνύοντα· ἐνίστε δὲ εὐχαριστήθημεν εἰς
 τὴν πρόσθεσιν μιᾶς συντόμου διασαφήσεως.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὴν συναπάντησιν δύο ἐπιπέδων
 καὶ ἡ σχηματιζομένη στερεὰ γωνία ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα συ-
 ναπαντώμενα εἰς τὴν αὐτὴν στιγμήν, εἶναι μεγέθη, ἕκαστον τοῦ
 ἰδίου εἶδους, εἰς τὰ ὁποῖα καλὸν ἴσως ἦεν νὰ δοθῶσιν ἰδιαιτέρα
 ὀνόματα· διότι ἄλλως εἶναι δύσκολον νὰ ἀποφύγῃ τινὰς τὴν ἀσά-
 φειαν καὶ τὰς περιφράσεις εἰς τὸν περὶ τῆς διατάξεως τῶν ἐπι-
 πέδων τὰ ὁποῖα συγχροτῶν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς πολυέδρου λόγον·
 καὶ ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῶν στερεῶν τούτων ὀλίγον ἐκαλλιεργήθη
 μέχρι τῆς σήμερον, δὲν εἶναι ἀνόικειον νὰ εἰσαχθῶσιν νέαι ἐκ-
 φράσεις ὅταν τὰς ἀπαιτῇ ἡ ἰδία φύσις τῶν πραγμάτων.

Ἡθιλα προτείνει νὰ ἐνομάζεται ἀγωνὴ (coīn) ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ δύο ἐπίπεδα· ἡ κόψις τῆς ἀγωνῆς ἤθελεν εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων. Ἡ ἀγωνὴ ἤθελε σημειοῦνται διὰ τεσσάρων γραμμάτων, ἐκ τῶν ὑπείων τὰ δύο μεσαῖα θὰ ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν κόψιν. Τότε ἡ ἐρθὴ ἀγωνὴ ἤθελεν εἶναι ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξὺ τῶν. Τέσσαρες ὀρθαὶ ἀγωναὶ ἤθελον πληρεῖ ὅλυν τὸ γωνιώδες σφαιρὸν χωρίον ὁλόγυρα μιᾶς δεδομένης εὐθείας. Ὁ νέος δὲ εὐρὸς ὁρισμὸς δὲν ἤθελεν ἐμποδίσαι ἀπὸ τοῦ νὰ ἔχη πάντοτε ἡ ἀγωνὴ μέτρον τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἀπὸ τὰς δύο κάθετους τὰς ἡγμένους εἰς ἑκάστων τῶν ἐπιπέδων εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς ἢ κόψεως.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Β'.

Περὶ τῆς ἀποδείξεως τῆς ΙΘ' προτάσεως τοῦ Α'
βιβλίου, καὶ περὶ τινων ἄλλων θεμελιωδῶν
προτάσεων τῆς Γεωμετρίας.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ΙΘ' προτάσεως τὴν ἐπίαν διδασκόμεν εἰς τὸ κείμενον, ὥτως εἶναι μεταξὺ τῶν στοιχειωδῶν ἀποδείξεων ἡ ἀπλουσίαι καὶ ἡ πλέον ἄμερος· ἐλπίζομεν ὅτι εἰ ἔρσται τῇ γεωμετρικῇ ἀκριβείας θέλουν τὴν ἀποδεχθῇ, καὶ δι' αὐτῆς θέλει ἐκλείψει ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ἡ ἀτέλεια εἰς τὴν ἐπίαν ἢ θεωρίαν τῶν παραλλήλων ὥς τοῦ νῦν εὐρίσκειτο.

Εἰδὼ λαμβάνομεν ἀφορμὴν νὰ κώμωμεν νέας τινὰς παρατηρήσεις ἐπάνω εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰδίαις προτάσεως, τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν εἰς τὴν 3ην ἐκδοσιν τούτου τοῦ συγγράμματος, δηλώσαμεν ἐν ἔτει 1800 καὶ εἰς τὰς ἀκτινύτους μέχρι τῆς 8ης· πρὸς τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἀνακλησώμεν διὰ ῥαχίων τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τῆς ἐπείας θεμελιωτοῦ ἡ ἀπόδειξις αὕτη.

Ἡμεῖς ἀποδείξαμεν τότε μὲ πολλὴν ἀκρίβειαν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου δὲν ἤμπορεῖ νὰ ὑπερβαῖν δύο ὀρθάς. Πρότασις ἡ ὁποία δεικνύει οὐσιώδη διαφορὰν μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων καὶ τῶν σφαιρικῶν, καὶ χωρίζει τὰ πρῶτα ἀπὸ τὰ δεύτερα. Στερεωθέντος τοῦ πρώτου τούτου μέρους, εἶπεν νὰ ἀποδεχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δὲν ἤμπορεῖ νὰ ᾖ μῆκος ἀπὸ δύο ὀρθάς· τῶρα καθὼς εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἡ ὑπερβολὴ τῶν τριῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου· οὕτω καὶ εἰς τὰ εὐθύγραμμα ἔχον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἦεν μικρότερον δύο ὀρθῶν, τὸ ἐλλείπον ἀπὸ τοῦ ἄθροισμα τοῦτο διὰ νὰ ἐξισεῖται μὲ δύο ὀρθάς, ἤθελεν εἶναι ἀνάλογον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. Ἐντεῦθεν φανερὸν γί-

ναι: ότι εάν ἔχοντες δεδομένον τρίγωνον ἡμετέρωσαμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο, εἰς τὸ ὅποιον τὸ δεδομένον νὰ περιέχεται τοῦλάχιστον μ. φοραῖς, τὸ ἑλλείπον ἀπὸ τῆς ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ νέου τούτου τριγώνου διὰ νὰ ἐξισωται μὲ δύο ὀρθὰς, ἤθελεν ἰσοῦται μὲ μ. φοραῖς τοῦλάχιστον τὸ ἑλλείπον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου διὰ νὰ ἐξισωται ἐπίσης μὲ δύο ὀρθὰς, ὥστε τὸ ἀθροῖμα τῶν γωνιῶν τοῦ μεγάλου τριγώνου βαρυνθὲν ἤθελεν ἐκλογισθεῖ ἀναλόγως τῆς αὐξήσεως τοῦ μ., ὥς εὖ νὰ κατασταθῇ μὲν ἡ ἀρνητικὴν. Ἀποκρίνεται ἔξαγομένον καὶ διὰ τοῦτο τὸ ἀθροῖμα τῶν γωνιῶν ἐνὶ τριγώνου δὲν ἡμερεῖ νὰ ἦναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθὰς.

Οδοιποροῦμεν ἀπὸ τὴν ἀποδεικτικὴν ταύτην ἀρχὴν ἥτις εἶναι ἀλάνθαστος, ἐδείξαμεν ὅτι δεῖ ἡ δυσκολία ἐκασταεῦσιν εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου τὸ ἐπὶ νὰ περιέχῃ τοῦλάχιστον δις τὸ δεδομένον· ἀλλ' ἡ λύσις τὴν ἐπὶ ἰδίαν ἐκασταεῦσιν τοῦτου τοῦ προβλήματος, κατὰ τὸ φαινόμενον ἀπικυρῶται, ὑποθέτει ὅτι παντοῦ εἶναι δυνατόν διὰ μιᾶς σιγμῆς δεδομένης ἐντὶς γωνίας μικροτέρας τῶν δύο τριτημιρίων τῆς ἐξῆς, νὰ διέλθῃ εὐθεῖα γραμμὴ συναπαντῶσα ἐν ταύτῃ τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας.

Κατ' αὐτὸν τὴν τρόπον τοῦτο ἐπληρώσαμεν εἰς τὸν σκοπὸν μας, ἀλλ' ὅχι καὶ ἐκτενέως εἰς αὐτὸν ἐφθασαμεν, διότι ἡ ἀποδείξις μας ἔχρησθη ἀπὸ αἰτήματα τὸ ἐπὶ καλῶτατα ἡμῶς: τίς νὰ ἀπονηθῇ. (1) Ὁ συγχωμὸς οὗτος μᾶς ἔκαμιν νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὴν γῆν ἐλδοῖν, εἰς τὴν ἀπλὴν ἰδὲν τοῦ Εὐκλείδου παραπέμποντες διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀποδείξιν εἰς τὰς σημειώσεις.

Ἐξετάζοντες τὸ πρῶτον προσεκτικώτερον ἐπληροφόρηθημεν ὅτι πρὸς πλήρη ἀποδείξιν τοῦ αἰτήματός μας ἐχρησίστο νὰ συναξωμεν ἀπὸ τὸν ὀρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς χαρακτηριστικὴν ἰδιό-

(1) Εἰς ἐν ἄρθρον τῆς φιλοσοφικῆς ἀποθήκης τοῦ Μαρτίου τῶν 1822 φαίνεται ὅτι σφόδρα τις Γεωμέτρης ἐπισπρόθηκε νὰ τελειοποιήσῃ τὴν ἀποδείξιν ταύτην καὶ καταστήσῃ αὐτὴν ἀνιζήτητον καὶ αἰτήματος: ἀλλ' ἡ κατασκευὴ τὴν ἐπὶ ἰδίαν ἐμεταχειρίσθη διὰ τὴν ἀποδείξιν τοῦ δευτέρου μέρους συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀχθῶσιν ἀπὸ δεδομένην σιγμὴν διάφοροι εὐθεῖαι εἰς ἕλας τὰς κορυφὰς μιᾶς γραμμῆς ἥτις πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς πολυγωνικὴ, ὥς, ὑποθεθέντος ὅτι ἡ προτασις ἀποφάσσεται, νὰ ἡμερεῖ τινὰς νὰ συλλεγισθῇ κατὰ τοῦ ἀποφάσκοντος: τῶρα ἡ κυριότης ταύτης τῆς γραμμῆς, εἴαν ἐδίδετο, δὲν ἤθελε συγχωρήσει νὰ συνεχισθῇ ἀπροσδιοριστῶς ἡ κατασκευὴ τοῦ συγγραφῆως, καθὼς τοῦτο ἀπαιτεῖτο διὰ τὴν ἀκριβῆσιν τῆς ἀποδείξεώς του.

τητα ἥτις νὰ ἀποκλείῃ κάθε ἐπιμέλεια ταύτης τῆς γραμμῆς μὲ τὴν μερὴν μιᾶς υπερβολῆς περιεχομένης μεταξύ τῶν δύο ἀσυμπτῶτων της. Ἰδιὸν τὸ ἐξαγόμενον τῶν ζητήσεών μας.

Εἰς γωνία δεδομένη ἡ $\angle BAI$, καὶ M σιγμῇ τις ἐντὸς ταύτης τῆς γωνίας ἐπίσης δεδομένη· ὥς τμηθῇ διχα ἡ γωνία $\angle BAI$ διὰ τῆς εὐθείας AD , καὶ ἀπὸ τὴν σιγμὴν M ὥς ἀχθῇ ἡ PM κάθετος ἐπὶ τὴν AD : λέγω ὅτι ἐὰν ἡ εὐθεῖα PM προεκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, ἀναγκαίως θέλει συναπαντήσῃ τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας $\angle BAI$. σχ. 274.

Ἡ συναπαντᾷ ἡ εὐθεῖα αὕτη μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $\angle BAI$ ἢ δὲν συναπαντᾷ εἰς τὴν πρώην περίσσειαν ἀναγκαίως συναπαντᾷ καὶ τὴν ἄλλην· ἐπειδὴ τότε ἐν μέρος τῆς προεκβολῆς τῆς εὐθείας PM περιέχεται μεταξύ Π καὶ τῆς σιγμῆς τῆς συναπαντήσεώς της E μὲ ἐκείνην τὴν πλευρὰν, καὶ ἐὰν ἡ γωνία $\angle BAI$ σφαγῇ ἐλγυρα τῆς AI ἕως ὅ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ἴσην της $\angle PAI$, ἡ σιγμὴ E θέλει εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AI , καὶ τὸ μέρος PE θέλει περιέχεται μεταξύ Π καὶ τῆς νέας θέσεως τῆς σιγμῆς E ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AI : πλὴν ἐπειδὴ τὸ μέρος PE εἰς ταύτην τὴν περιστροφὴν διευθύνεται κατὰ τὴν προεκβολὴν τῆς PM ἀκολουθεῖ ὅτι ἡ σιγμὴ E εἰς τὴν νέαν θέσιν της εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς PM : διηλαδὴ ἡ προεκβολὴ τῆς PM πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ μίαν σιγμὴν τῆς πλευρᾶς AI . Εἰς τὴν δευτέραν περίσσειαν οὐδὲ τὴν ἄλλην ἡμπερεῖ νὰ συναπαντήσῃ· διότι εἶδμεν ὅτι ἡ συναπάντησις μὲ τὴν μίαν φέρει ἀναγκαίως τὴν συναπάντησιν μὲ τὴν ἄλλην· ὥς εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίσσειαν πρέπει ἡ εὐθεῖα ὅλη νὰ περιχλείσται εἰς τὸ μεταξύ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $\angle BAI$ περιεχόμενον χωρίον· ἀλλὰ τὸ νὰ ἡμπερῇ μία εὐθεῖα γραμμὴ ἀπροσδιορίσως προεκβληθεῖσα νὰ περιέχεται ἐντὸς μιᾶς γωνίας, μάχεται εἰς τὴν φύσιν της.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐπὶ ἐπιπέδου χαραχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ AB καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀπροσδιορίσως προεκβληθῇ, ἡ εὐθεῖα αὕτη διαίρει τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς δύο μέρη τὰ ἑκάστα διὰ τῆς ἐπιθέσεως ἐφαρμοζούν καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν καὶ ἐντελῶς ἰσοῦνται. Τὸ μέρος AMB τοῦ ὅλου ἐπιπέδου τὸ ἐντεῦθεν τῆς AB καίμενον, ἰσοῦται κατὰ πάντα μὲ τὸ μέρος $AM'B$ τὸ ἐκείθεν τῆς AB εὐρισκόμενον· διότι ἐὰν ληθῇ μία σταθερὰ σιγμὴ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB , ἡ θέσις καθ' ἑκάστην σιγμῇ τοῦ μέρους AMB προσδιορίζεται διὰ τοῦ διαστήματος GM καὶ τῆς γωνίας $\angle AM'$ · ἐὰν λοιπὸν ἐκείθεν τῆς πλευρᾶς AB γένῃ ἡ γωνία $\angle AM'$ ἴση μὲ τὴν $\angle GM$ καὶ ληθῇ τὸ διάστημα $GM = G'M$, φανερόν ὅτι αἱ δύο σιγμαὶ M καὶ M' ὁλοῦν ἔχει τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τῶν δύο τούτων μερῶν ἐπιτεθέντων αἱ σιγμαὶ M καὶ M' θίλουν ταυτοῦθ'. Κάθε λοιπὸν

εὐθεία γραμμὴ χαραγμένη ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου καὶ προεκβλημένη ἀπροσδιορίστως διαιρεῖ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ας ὑποθέσωμεν τώρα, εἰ δυνατόν, ὅτι μία ἀπροσδιορίστης εὐθεία $X\psi$ περιέχεται ὅλη ἐντὸς ἐποικυδῆστοις γωνιώδους χωρίου, φερ' εἰπείν, ἐντὸς τῆς γωνίας $B\Gamma M$ ἢ εὐθεία αὕτη δὲν ἔμπορεῖ εἰ μὴ νὰ διαιρῇ εἰς δύο ἴσα ἢ ἄνισα μέρη τὸ περιεχόμενον μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς τῆς γωνίας $B\Gamma M$ εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἀντιστοιχεῖ τὸ μέρος $B\Gamma M$ κείμενον ἐκείθεν τῆς BI · πλὴν ἐπειδὴ ἐκτὸς τῶν δύο τούτων ἴσων μερῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχουν δύο ἄλλα περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῶν ἴσων γωνιῶν $A\Gamma M$, $A\Gamma M'$ βλέπομεν ὅτι τὸ γωνιώδες χωρίον $BI'M$ δὲν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου ἐπιπέδου· ἡ εὐθεία λοιπὸν γραμμὴ $X\psi$ ἢ ἐξ ὑποθέσεως μισράζουσα εἰς δύο μέρη τὸ χωρίον $B\Gamma M$, μισράζει εἰς δύο ἄνισα μέρη τὸ ὅλον ἐπίπεδον, τὸ ἐπεὶ ἐναντιοῦται εἰς τὴν φύσιν τῆς εὐθείας γραμμῆς.

Οχι μόνον διὰ τῆς ἀπλυσάτης ταύτης ἀρχῆς τὸ αἵτημα διὰ τὸ ἐποῖον ἡ ἀπόδειξις μας δὲν ἔτον ἀκριβῆς, ἀποδεικνύεται, ἀλλ' ἀκόμη ἀμέσως ἔμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τὸ αἵτημα τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ αἵτημα τούτο, ὡς εἶναι γνωστὸν, εὐκολῶς ἀνάγεται εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἐν τῷ ἢ μίᾳ τῶν εὐθεϊῶν AI εἶναι κάθετος εἰς τὴν AB , ἢ ἄλλη εὐθεῖα BA κάμνει μὲ τὴν AB γωνίαν μικροτέραν ὀρθῆς. Πέρεται λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἡ BA προεκβληθεῖσα πρέπει νὰ συναπαντήσῃ τὴν AI . σλ. 276.

Λοιπὸν, εἰὰν τὸ πρᾶγμα δὲν εἶχεν αὕτω, προεκβληθείσης τῆς AI πρὸς τὴν σιγμὴν I' καὶ γενομένης τῆς γωνίας $ABI = ABI'$, ἢ εὐθεία GI' ἔθελε περιέχεται ὅλη ἐντὸς τῆς γωνίας ABI μικροτέρας δύο ὀρθῶν, τὸ ὅποιον εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη δὲν ἔμπορεῖ ἴσως περισσύτερον παρὰ καθὲς ἄλλην νὰ καταχωρηθῇ εἰς τὰ σιγμὰ, ὥς νὰ ἀκολουθῇται πάλιν εἰς αὐτὰ ἡ ὁδὸς τοῦ Εὐκλείδου ἥτις ἀφ' οὗ σηκωθῇ τὸ αἵτημά του δὲν ὑπάρκει εἰς καμμίαν ἀντίρρησην; ἂς κρίνωσι περὶ τούτου οἱ Γεωμέτραι.

Ὁ σκοπὸς μας εἶναι τώρα νὰ δείξωμεν ὅτι διὰ τῆς ἀναλύσεως ἔμπορεῖ ἀκριβέστατα νὰ ἀποδειχθῇ ἡ IO πρότασις καὶ αἱ ἄλλαι θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας. Καὶ τοῦτο ἐρχόμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν μὲ ὅλην τὴν ἀναγκαστικὴν λεπτομέρειαν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ θεώρημα περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Αμέσως διὰ τῆς ἐπιθέσεως, καὶ χωρὶς καμμίαν προηγουμένην πρότασιν δεικνύεται ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας τὴν καθὲς μίαν μὲ τὴν καθὲς μίαν. Ας καλίσωμεν π τὴν

περί ἧς ὁ λόγος πλευράν, A καὶ B τὰς δύο προσκειμένας γωνίας, Γ τὴν τρίτην γωνίαν. Πρέπει λοιπὸν ἡ γωνία Γ νὰ προσδιορίζεται κατὰ πάντα, ὅταν ᾖναι γνωσταὶ αἱ γωνίαι A καὶ B μετὰ τῆς πλευρᾶς π . Διότι ἐὰν εἰς τὰ τρία διδόμενα A, B, π ᾖτον δυνατόν νὰ ἀντιστοιχοῦν πολλαὶ γωνίαι Γ , ἤθελον ὑπάρχει τόσα διαφορετικὰ τρίγωνα ἔχοντα μίαν πλευράν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γωνία λοιπὸν Γ πρέπει νὰ ᾖναι προσδιορισμένη τῆς λειτουργίας τῶν τριῶν ποσοτήτων A, B, π , π' τοῦτο δὲ ἐκφράζω οὕτω, $\Gamma = \varphi : (A, B, \pi)$.

Ας λαμβῇ ἡ ὀρθὴ γωνία ὡς μονάς· τότε αἱ γωνίαι A, B, Γ θέλουσιν εἶναι ἀριθμοὶ περιεχόμενοι μεταξὺ 0 καὶ 2· καὶ ἐπειδὴ $\Gamma = \varphi : (A, B, \pi)$, λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ π δὲν πρέπει νὰ εἰσέρχεται εἰς τὴν λειτουργίαν φ . Εἰδομεν, τῷ ὄντι, ὅτι ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ προσδιορίζεται ἀπὸ μόνον τὰς ποσότητας A, B, π χωρὶς ἄλλαν ὁποιανδήποτε γωνίαν ἢ γραμμὴν· ἀλλ' ἡ γραμμὴ π εἶναι ἑτεροειδῆς μὲ τὸν ἀριθμὸν A, B, Γ καὶ ἐὰν εἴχαμεν ὁποιανδήποτε ἐξισωσιν μεταξὺ A, B, Γ, π , ἠμποροῦσαμεν ἀπὸ αὐτὴν νὰ ἐξάξωμεν τὴν τιμὴν τῆς π διὰ λειτουργίας τῶν A, B, Γ · ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε προκύψει ὅτι π ἰσοῦται μὲ ἀριθμὸν ἑτεροειδῆ, τὸ ὅποιον εἶναι ἀτοπὸν· λοιπὸν π δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἰσέρχεται εἰς τὴν λειτουργίαν φ , καὶ ἔχομεν ἀπλῶς $\Gamma = \varphi : (A, B)$. . . (1).

(1) τύπος οὗτος δεικνύει ὅτι, ἐὰν δύο γωνίαι ἐνὸς τριγώνου ἰσοῦνται μὲ τὰς δύο γωνίας ἐνὸς ἄλλου, ἡ τρίτη πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην· καὶ, τούτου τεθέντος, εὐκόλιν εἶναι νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ προκείμενον θεώρημα.

(1) Κατὰ τῆς ἀποδείξεως ταύτης ἐπροτίθη ὅτι, ἐὰν ἐφαρμόζετε, λέξιν κατὰ λέξιν, εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἤθελον ἀκολωθῇσαι ὅτι δύο γνωσταὶ γωνίαι ἀρκεῖν διὰ τὴν προσδιορίσιν τῆς τρίτης, τὸ ὅποιον δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ ταιαῦτα τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο ἀποκρινόμεθα ὅτι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα περιέχουν ἐν σφαίρῳ περισσότερον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα, καὶ τὸ σφαίρειον τοῦτο εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας τὴν ὁποίαν δὲν πρέπει νὰ παραβλέψωμεν. Ἐςω λοιπὸν ρ ἡ ἀκτίς, τότε ἀντὶ νὰ ἔχωμεν $\Gamma = \varphi (A, B, \pi)$;

θέλομεν ἔχει $\Gamma = \varphi (A, B, \pi, \rho)$, ἡ μόνον $\Gamma = \varphi \left(A, B, \frac{\pi}{\rho} \right)$, δυνάμει τοῦ νόμου τοῦ ὁμοειδοῦς. Τώρα ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\pi}{\rho}$ εἶναι ἀ-

ριθμὸς καθὼς καὶ A, B, Γ , δὲν εἶναι κἀνένας λόγος ἡ ταιαύτη ποσότης νὰ μὴ εὑρίσκεται εἰς τὴν λειτουργίαν φ , καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι $B = \varphi (A, B)$. Ο. Σ.

Εν πρώτοις ἴσω $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς Δ (σχ. 109) ἀπὸ τὴν σιγμὴν A ἄς κατεβασθῇ ἡ $\Delta\Delta$ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. Αἱ γωνίαι B καὶ Δ τοῦ τριγώνου $AB\Delta$ ἰσοῦνται μὲ τὰς γωνίας B καὶ A τοῦ τριγώνου $BA\Gamma$ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα λοιπὸν ἢ τρίτην $B\Delta\Delta$ ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην Γ . Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία $\Delta A\Gamma = B$, λοιπὸν $B\Delta\Delta + \Delta A\Gamma$ ἢ $BA\Gamma = B + \Gamma$: ἀλλ' ἡ γωνία $BA\Gamma$ εἶναι ὀρθή· αἱ δὲ, λοιπὸν, ὀξεῖαι γωνίαι ἐντὺς ὀρθογώνιου τριγώνου ἐμὲν λαμβανόμεναι καμνουν μίαν ὀρθήν.

Διελθὼντες ἴσω τρίγωνον ἐπεικονήσετε τὸ $BA\Gamma$ (σχ. 112) καὶ $B\Gamma$ μία πλευρὰ ἥτις νὰ μὴ ᾖται μικροτέρα ἐκείνης τῶν ἄλλων δύο: ἴαν ἀπὸ τὴν ἀπέναντι γωνίαν A κατεβασθῇ ἡ κάθετος $\Delta\Delta$ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, ἡ κάθετος αὕτη θέλει πῆσαι ἐντὺς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, καὶ μερίζει αὐτὸ εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Delta$, $\Delta A\Gamma$: τὼρα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $B\Delta\Delta$, αἱ δύο γωνίαι $B\Delta\Delta$, $\Delta B\Delta$ κάμνουν ὁμῶς μίαν ὀρθήν· καὶ πάλιν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Delta A\Gamma$, αἱ δύο γωνίαι $\Delta A\Gamma$, $\Delta\Gamma\Delta$ κάμνουν ἐπίσης μίαν ὀρθήν. Αἱ τέσσαρες λοιπὸν ἐμὲν, ἢ μόνον αἱ τρεῖς $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $A\Gamma B$, κάμνουν δύο ὀρθάς· εἰς κάθε λοιπὸν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο, θεωρούμενον ἐκ τῶν προτέρων δὲν ἐξαρτᾶται διόλου ἀπὸ μίαν ἄλυσιν προτάσεων, καὶ οἱ ἀμέσως συνάγεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐμειδέντος· ἀρχὴν ἥτις πρέπει νὰ ἔχῃ χωρὰν εἰς καθε σχέσιν μεταξὺ ἐπεικονήσετε ποσοτήτων. Ἀλλ' ἔς ἐξακολουθήσωμεν, καὶ ἄς δεῖξωμεν ὅτι ἀπὸ τὴν αὐτὴν πηγὴν δυνατόν νὰ ἐξαχθῶσι τὰ ἄλλα θεμελιώδη θεωρήματα τῆς Γεωμετρίας.

Λς φυλάξωμεν ὡς ἀνωτέρω τὰς αὐτὰς ὀνομασίας, καὶ περιπλέον ἄς καλέσωμεν μ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὴν γωνίαν A , καὶ ν τὴν ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν B . Ἡ ποσότης μ πρέπει νὰ προσδιορίζεται ἀπὸ μόνον τὰς ποσότητας A, B, π ,· λοιπὸν μ εἶναι

λειτουργία τῶν A, B, π , καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\pi}$ εἶναι παρομοίως μία τις

λειτουργία τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, ὥς ἐνδεχόμενον νὰ κάμωμεν

$\frac{\mu}{\pi} = \varphi(A, B, \pi)$ · ἀλλ' ὁ λόγος δύο γραμμῶν δὲν ἔμπορεῖ νὰ ᾖται παρὰ

ἑνὸς ἀριθμοῦ· λοιπὸν $\frac{\mu}{\pi}$ εἶναι ἀριθμὸς καθὼς ἀκόμη A καὶ B · ἡ

λειτουργία λοιπὸν ψ παντάπασι δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ τὴν γραμ-

μὴν π , καὶ ἔχομεν ἀπλῶς $\frac{\mu}{\pi} = \psi(A, B)$, ἢ $\mu = \pi\psi(A, B)$ · πα-

ρομοίως λοιπὸν ἔχομεν $\nu = \pi\psi(A, B)$.

Ὡς ὑποθέσωμεν τώρα ἐν ἄλλο τρίγωνον τὸ ὁποιον νὰ περιέχῃ τὰς αὐτὰς γωνίας A, B, Γ , καὶ ὅτι εἰς τὰς γωνίας ταύτας εἶναι ἀμειβίως ἀπέναντι αἱ πλευραὶ μ', ν', π' ἐπειδὴ A καὶ B μένουσαν σταθερά, θέλομεν ἔχει εἰς τοῦτο τὸ νέον τρίγωνον $\mu = \pi' \psi : (A, B)$, καὶ $\nu = \pi' \psi : (A, B)$. Λοιπὸν $\mu : \mu' :: \nu : \nu' :: \pi : \pi'$. Εἰς τὰ ἰσογώνια λοιπὸν τρίγωνα, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ εἶναι ἀνάλογαι.

Ἀπὸ τὴν γενικὴν ταύτην πρότασιν συναχεται ὡς καὶ κατὰ τὴν πρότασιν ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὑποθέταμεν εἰς τὸ κεφάλαιον ταύτου ἀποδείξιν τῆς K' πρότασος. Τὸ ὄντι εἰς τὰ τρίγωνα $AZH, AM\Lambda$ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν καθέ μίαν μὲ τὴν καθέ μίαν, δηλαδή, τὴν γωνίαν A κοινὴν, καὶ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ταῦτα εἶναι ἰσογώνια, καὶ διδουν τὴν ἀναλογίαν $AZ : \Lambda A :: AH : \Lambda M$, διὰ τῆς ὁποιᾶς ἡ K' πρότασις εἶναι πληρέστατα ἀποδειγμένη.

Ἡ ποσότης τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας εἶναι, καθὼς ἤξεύρομεν, συνίπεια τῆς προτάσεως τῶν ἰσογώνιων τριγώνων. Ἰδού λοιπὸν τοεῖς θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας, ἡ τῶν τριῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου, ἡ τῶν ἰσογώνιων τριγώνων, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας, συναχόμεναι ἀπλοῦςτα καὶ ἀμέσως ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν λειτουργιῶν. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῶσιν ἐπιτομώτατα αἱ ἀποβλέπουσαι τὰ ὅμοια σχήματα καὶ τὰ ὅμοια στερεὰ προτάσεις.

Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ ἰσιονόηποτε πολύγωνον· ληθεύτης μιᾶς πλευρᾶς AB ὡς βάσεως, ἃς σχηματισθῶσιν ἐπὶ ταύτης τῆς βάσεως τὶς αὐτὸς τριγωνα ABI', ABA , κτλ, ὅσαι εἶναι αἱ ἐκτὸς τῆς ἰδίας βάσεως γωνίαι Γ, Δ, E , κτλ. Ἐστω ἡ ἔκτις $AB = \pi$, καὶ A, B αἱ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν πλευρὰν AB ἔξωσαν A' καὶ B' αἱ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Delta$ αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν AB , καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ σχῆμα $AB\Gamma\Delta E$ κατὰ πάντα προσδιορίζεται, ὅταν ᾖται γνωστὴ ἡ πλευρὰ π μετὰ τῶν γωνιῶν A, B, A', B', A'', B'' , κτλ, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν απαιτουμένων διὰ τὴν ταύτην προσδιορίσιν εἶναι $2n-3$, ἐνθα n εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Τοῦτου τεθέντος, ὅποιονδήποτε γραμμὴν ἢ πλευρὰν χ ἡγμένη ἐπὶ τὴν ὁποῖον εἰς τὸ πολύγωνον, πρέπει νὰ ᾖται λειτουργία τῶν ποσοτήτων ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν προσδιορίσιν τοῦ πολυγώνου· ἐπειδὴ δὲ $\frac{\chi}{\pi}$ εἶναι

ἀριθμὸς, ἡμπαροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν $\frac{\chi}{\pi} = \psi : (A, B, A', B', \text{κ.τ.λ.})$, ἢ $\chi =$

$\pi \psi : (A, B, A', B', \text{κ.τ.λ.})$, καὶ ἡ λειτουργία ψ δὲν περιέχει παντάπασιν τὴν πλευρὰν π . Ἐάν μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας A, B, A', B'

κτλ, καὶ μὲ μίαν ἄλλην πλευρὰν π , σχηματίζωμεν ἄλλο δεύτερον πολύγωνον, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν γραμμὴν χ τὴν ἀντιστοιχούσαν ἢ ὁμολογὸν εἰς τὴν χ , τὴν τιμὴν $\chi = \pi \psi : (A, B, A', B', \text{κτλ.})$. λοιπὸν $\chi : \chi' :: \pi : \pi'$. Τὰ εὖτω κατασκευαζόμενα σχήματα δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν, ὅμοια σχήματα· εἰς τὰ ὅμοια λοιπὸν σχήματα αἱ ὁμολογοὶ γραμμαὶ εἶναι ἀνάλογοι. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ὅχι μόνον αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ, αἱ ὁμολογοὶ διαγώνιοι, ἀλλ' ἀκόμη αἱ περατούμεναι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γραμμαὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, εἶναι μεταξύτων ὡς δύο ἄλλαι ἐπειαιδήποτε ὁμολογοὶ γραμμαί.

Ἀς καλέσωμεν E τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρώτου πελυγώνου· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὸ τετράγωνον π^2 . πρέπει λοι-

πὸν $\frac{E}{\pi^2}$ νὰ ἦναι ἀριθμὸς περιέχων μόνον τὰς γωνίας A, B, A', B' , κτλ, εἰς τρόπον ὥστε $E = \pi^2 \varphi : (A, B, A', B', \text{κτλ.})$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἰάν E' παριστῇ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δευτέρου πελυγώνου, θέλομεν ἔχει $E' = \pi^2 \varphi' : (A, B, A', B', \text{κτλ.})$. λοιπὸν $E : E' :: \pi^2 : \pi'^2$. ὅθεν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων σχημάτων εἶναι μεταξύτων ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολογῶν πλευρῶν.

Ἀς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὰ πολύεδρα. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν εἰς μία ἑδρα προσδιρίζεται διὰ μέσου μιᾶς γνωστῆς πλευρᾶς π καὶ πολλῶν γωνιῶν A, B, Γ , κτλ. Ακολουθῶς ἐκάστη τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς ταύτης τῆς βάσεως σφαιρῶν γωνιῶν, προσδιρίζεται διὰ μέσου τριῶν δεδομένων, τὰ ὅποια δυνατόν νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τόσαι γωνίαι· ὥστε ἡ ὁλοκληρὸς προσδιόρισις τοῦ πολυέδρου κρέμαται ἀπὸ μίαν πλευρὰν π , καὶ ἀπὸ πολλὰς γωνίας A, B, Γ , κτλ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς μεταβάλλεται κατὰ τὴν φύσιν τοῦ πολυέδρου. Τούτου τεθέντος, μία γραμμὴ ἢ ἐκεία ἐνώνει δύο κορυφάς, ἢ γενικώτερον, ἢ ὅποια ἄγεται κατὰ προσδιορισμένον τινα τρόπον εἰς τὸ πολύεδρον, θέλει εἶναι λειτουργία τῶν ποσοτήτων π, A, B, Γ κτλ· ἐπειδὴ δὲ $\frac{\chi}{\pi}$ πρέπει νὰ ἦναι ἀριθμὸς, ἡ ἴση λειτουργία μὲ

$\frac{\chi}{\pi}$, ἀνάγκη νὰ περιέχῃ μόνον τὰς γωνίας A, B, Γ , κτλ, καὶ δυνατόν νὰ ὑποτιθῇ $\chi = \pi \varphi : (A, B, \Gamma, \text{κτλ.})$. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιροῦ εἶναι ὁμοειδὴς μὲ π^2 . διὰ τοῦτο, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἡμπορεῖ νὰ παρασθῇ διὰ $\pi^2 \psi : (A, B, \Gamma, \text{κτλ.})$ · ἡ σφαιρότης τοῦ εἶναι ὁμοειδὴς μὲ π^3 , καὶ ἡμπορεῖ νὰ παρασθῇ διὰ $\pi^3 \Pi : (A, B, \Gamma, \text{κτλ.})$ · αἱ σημειούμεναι δὲ λειτουργίαι διὰ ψ καὶ Π εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς πλευρᾶς π .

Ας υποθέσωμεν ἄλλο δεύτερον σφαῖρον κατασκευασμένον μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας A, B, Γ , κτλ., καὶ μὲ μίαν πλευρὰν π διαφορετικὴν τῆς π' : τὰ οὕτω κατασκευασμένα σφαῖρα ὀνομάζομεν ὁμοία σφαῖρα καὶ, τοῦτον τεθέντος, ἡ γραμμὴ ἥτις εἰς τὸ πρῶτον σφαῖρον ἦτον $\pi\phi$: (A, B, Γ , κτλ.) ἢ ἀπλῶς $\pi\phi$, εἰς τὸ δεύτερον θίλει εἶναι $\pi'\phi'$ ἢ ἐπιφάνεια ἥτις εἰς τὸ ἐν ἡτον $\pi^2\psi$, εἰς τὸ ἄλλο θίλει εἶναι $\pi'^2\psi'$, καὶ τέλος πάντων ἡ σφαρότης ἥτις εἰς τὸ πρῶτον ἦτον $\pi^1\Pi$ εἰς τὸ δεύτερον θίλει εἶναι $\pi'^3\Pi$. Λοιπὸν ἰὸν εἰς τὰ ὁμοία σφαῖρα αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἢ γραμμαὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὡς αἱ σφαρότητες τῶν ὡς οἱ κύβοι τῶν αὐτῶν πλευρῶν.

Αἱ αὐταὶ ἀρχαὶ εὐκλῶς ἐφαρμόζονται εἰς τὸν κύκλον. Ἐστω γ ἡ περιφέρεια καὶ σ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου τοῦ ὁποῦ ρ ἢ ἀκτὺς εἶναι ρ : ἐπειδὴ δύο κύκλοι τὴν αὐτὴν ἔχοντες ἀκτῖνα δὲν ἡμποροῦν νὰ ᾖναι ἄνιστοι, διὰ τοῦτο αἱ ποσότητες $\frac{\gamma}{\rho}$ καὶ $\frac{\sigma}{\rho^2}$ πρέπει νὰ ᾖναι προσδιορισμέναι λειτουργίαι τῆς ρ : πλὴν ἐπειδὴ αἱ ποσότητες αὗται εἶναι ἀριθμοί, ἢ ἐκφρασίς τῶν δὲν πρέπει διόλου νὰ περιέχῃ τὴν γραμμὴν ρ : οὕτω θέλομεν ἔχει $\frac{\gamma}{\rho} = \alpha$, καὶ $\frac{\sigma}{\rho^2} = \beta$, ἐνθα α καὶ β εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί. Ἐστω γ' ἡ περιφέρεια καὶ σ' ἡ ἐπιφάνεια κύκλου τοῦ ὁποῦ ρ' ἢ ἀκτὺς εἶναι ρ' : θέλομεν ἔχει λοιπὸν ὡσαύτως $\frac{\gamma'}{\rho'} = \alpha$, $\frac{\sigma'}{\rho'^2} = \beta$. Λοιπὸν $\gamma : \gamma' :: \rho : \rho'$ καὶ $\sigma : \sigma' :: \rho^2 : \rho'^2$, ὅθεν αἱ μὲν περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ας θεωρήσωμεν τομέα τοῦ ὁποῦ ρ εἶναι ἡ ἀκτὺς καὶ A ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία· ἔστω χ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον περικλείει τὸν τομέα, καὶ ψ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐτοῦ τομέως. Ἐπειδὴ ὁ τομέως ὁλοκληρῶς προσδιορίζεται ὅταν ᾖναι γνωσταὶ αἱ ποσότητες ρ καὶ A , πρέπει χ καὶ ψ , νὰ ᾖναι προσδιορισμέναι λειτουργίαι τῶν ρ καὶ A : λοιπὸν $\frac{\chi}{\rho}$ καὶ $\frac{\psi}{\rho^2}$ εἶναι ὡσαύτως παρόμοιαι λειτουργίαι. Ἀλλὰ $\frac{\chi}{\rho}$ καὶ $\frac{\psi}{\rho^2}$ εἶναι ἀριθμοί: αἱ ποσότητες λοιπὸν αὗται δὲν πρέπει νὰ περιέχουσι ρ , καὶ εἶναι ἀπλῶς λειτουργίαι τῆς A , εἰς τρόπον ὥς $\frac{\chi}{\rho} = \varphi : A$, καὶ $\frac{\psi}{\rho^2} = \omega : A$. Ἐσώσαν χ' καὶ ψ' τὸ

τόξον καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄλλου τομέως τοῦ ὁμοίου ἢ γωνία εἶναι A καὶ ἡ ἀκτὶς ρ' τοὺς δύο τούτους τομείς ὀνομάζομεν τομείς ὁμοίους· ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία A εἶναι ἴση καὶ εἰς τὰ δύο μέρη,

διὰ τοῦτο $\frac{\chi'}{\rho} = \varphi : A$, καὶ $\frac{\psi'}{\rho'} = \omega : A$. Λοιπὸν $\chi : \chi' :: \rho : \rho'$, καὶ

$\psi : \psi' :: \rho^2 : \rho'^2$. Ἀκλουῦσι τὰ ὁμοία τόξα ἢ τὰ τόξα τῶν ὁμοίων τομέων εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων, αὐτοὶ δὲ εἰς τομείς εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἔθελεν ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς εἰ κῶσοι τῶν ἀκτίνων τῶν.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι μετροῦνται ἀπὸ τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν, καὶ αἱ σφαιρότητες ἀπὸ τὸ γινόμενον τριῶν· ἀλλὰ καὶ τοῦτο ἐκκλίω· ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἀναλύσεως. Ἀς θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον τοῦ ὁμοίου αἱ διαστάσεις εἶναι π καὶ κ , καὶ ἂς παραστήσωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του ἥτις εἶναι λειτουργία τῶν π καὶ κ , διὰ $\varphi : (\pi, \kappa)$ · ἐὰν ἡ διάστασις π λάβῃ μίαν αὐξήσιν π' καὶ γένῃ $\pi + \pi'$, φανερόν ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον λαμβάνει αὐξήσιν ἴσιν μὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁμοίου αἱ διαστάσεις εἶναι π' καὶ κ' ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁμοίου αἱ διαστάσεις εἶναι $\pi + \pi'$ καὶ κ , σύγκριται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁμοίου αἱ διαστάσεις εἶναι π καὶ κ , καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁμοίου αἱ διαστάσεις εἶναι π' καὶ κ' λοιπὸν

$$\varphi : (\pi + \pi', \kappa) = \varphi : (\pi, \kappa) + \varphi : (\pi', \kappa).$$

Ἐσῶ $\pi' = \pi$, ἔχομεν $\varphi(2\pi, \kappa) = 2\varphi(\pi, \kappa)$. Ἐσῶ $\pi' = 3\pi$, ἔχομεν $\varphi(3\pi, \kappa) = \varphi(\pi, \kappa) + \varphi(2\pi, \kappa) = 3\varphi(\pi, \kappa)$. Ἐσῶ $\pi' = 4\pi$, ἔχομεν $\varphi(4\pi, \kappa) = \varphi(\pi, \kappa) + \varphi(3\pi, \kappa) = 4\varphi(\pi, \kappa)$. Ἐν γένει λοιπὸν, ἐὰν K παριστάνῃ ἐπειροδῆποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν, θέλωμεν

$$\text{ἔχει } \varphi(K\pi, \kappa) = K\varphi(\pi, \kappa) \text{ ἢ } \frac{\varphi(\pi, \kappa)}{\pi} = \frac{\varphi(K\pi, \kappa)}{K\pi}.$$

ἔπειτα ὅτι $\frac{\varphi(\pi, \kappa)}{\pi}$ εἶναι τοιαύτη λειτουργία τῆς π , ὥστε δὲν

πάσχει τὴν παραμικρὰν μεταβολὴν ὅταν εἰς αὐτὴν ἀντὶ π τεθῇ ἐπειροδῆποτε πολλαπλάσιον τῆς π τὸ $K\pi$. Ἡ λειτουργία λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς π , καὶ δὲν πρέπει νὰ ᾖται εἰ μὴ περιεκτικὴ τῆς κ . Ἀλλὰ διὰ λόγον παρόμοιον $\frac{\varphi(\pi, \kappa)}{\kappa}$ πρέπει

νὰ ᾖται ἀνεξάρτητος τῆς κ · λοιπὸν $\frac{\varphi(\pi, \kappa)}{\pi\kappa}$ δὲν περιέχει οὔτε

π οὔτε κ , καὶ οὕτως ἡ ποσότης αὕτη πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ σταθεράν τινὰ α . Θέλωμεν ἔχει λοιπὸν $\varphi(\pi, \kappa) = \alpha\pi\kappa$ καὶ ἐπειδὴ

πικότε δὲν ἐμποδίζει νὰ λάβωμεν $\alpha=1$, διὰ τοῦτο $\varphi(\pi, \kappa)=\pi \kappa'$ ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια ἐνὶς ἑρθογωνίου ἰσούται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τοῦ διασάσεων.

Μὲ τρόπον κατὰ πάντα ὅμοιον ἤθελεν ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ σφαιρῆς ἑρθογωνίου παραλληλεπίπεδου τοῦ ὁποίου αἱ διασάσεις εἶναι π, κ, ρ ἰσούται μὲ τὸ γινόμενον $\pi \kappa \rho$ τῶν τριῶν τοῦ διασάσεων.

Τοῦ λοιποῦ παρατηροῦμεν ὅτι τῆς θεωρίας τῶν λειτουργιῶν, διὰ τῆς ὁποίας, ὡς ἐλέπεμεν, ἀπεδεικνύονται ἀπλούστατα αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας, ἔγινεν ἤδη χρῆσις μὲ πολλὴν ἐπιτυχίαν πρὸς ἀπόδειξιν τῶν θεμελιωδῶν ἀρχῶν τῆς Μηχανικῆς. Βλέπετε τὰ ὑπομνήματα τοῦ Τωρίνου, τόμ. Β'.

Εὐ τελεῖ πρέπει νὰ ὁμολογήσωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω θεωρία, ἃν καὶ ἐπιστηριγμένη ἐπάνω εἰς τὰ πλείν σφαιρὰ θεμέλια, ἐπολεμήθη ἀπὸ τὸν Κ. Λεσλίον, περιφκμὲν προφέσσορα τοῦ Εἰδιμβούργου εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας του εἰς τὴν δευτέραν καὶ τρίτην ἐκδόσιν των· ἀλλὰ χωρὶς νὰ ἐμβωμεν εἰς καμμίαν ἐρευναν περὶ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ἀρκούμεθα νὰ εἰπωμεν ὅτι αἱ ἐνστάσεις τοῦ Κ. Λεσλίου ἐξ ὁλοκλήρου ἀνεσχευάσθησαν ἐν πρώτοις μὲν ἀπὸ τὸν συμπατριώτην του Κ. Πλεϋφαῖρον, εἰς τὴν ἐν Εἰδιμβούργῳ ἀναθεώρησιν Τόμ. Κ'· ἔπειτα δὲ καὶ ἀπὸ τὸν Κ. Μασουρίκιον τὸν ἐκ τῆς ἐν Παρισίοις Ακαδημίας τῶν ἐπιστημῶν, εἰς τὴν καθολικὴν βιβλιοθήκην τῆς Γενεύης, μὲνὶ ὁκτωβρίῳ κατὰ τὸ ἔτος 1819. Ἡμπορεῖ δὲ ἀκόμη νὰ ἴδῃ τινὰς τὴν ἐρευναν τῶν αὐτῶν τούτων ἐνστάσεων, εἰς τὴν ἀγγλικὴν ἐκδόσιν τῶν στοιχείων μας τὴν ὁποίαν κατὰ τὸ ἔτος 1822 ἐν Εἰδιμβούργῳ ἔδωκεν ὁ Κ. Δαβὶδ Βριουζέρος.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Γ',

Περὶ τῆς προσεγγίσεως τῆς ΙΓ' προτάσεως τοῦ Δ' βιβλίου.

Αφ' οὗ εὗρομεν δύο ἀκτῖνας τὴν μὲν ὑπερέχουσαν τὴν δὲ ἐλλείπουσαν τῆς ἀληθείης τῶν ὁρίων τὰ πρῶτα ψηφία εἶναι τὰ αὐτά, δυνάμεθα τάχις νὰ τελειώσωμεν τὴν ὑπολογισμὸν διὰ τινος ἀλγεβρικῦ τύπου.

Ἔσω α ἡ ἐλλείπουσα ἀκτίς καὶ β ἡ ὑπερέχουσα, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι μικρὰ· ἔωσαν α' καὶ β' αἱ ἀκόλουθοι ἀκτῖνες αἱ ὁποῖαι συναγόνται ἀπὸ τοῦς τύπους $\beta' = \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha' = \sqrt{\alpha \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁ τελευταῖος ἔρος τῆς σειρᾶς $\alpha, \alpha', \alpha'', \kappa\tau\lambda$, ὅστις εἶναι ἰσαύτῳ ὁ τῆς σειρᾶς $\beta, \beta', \beta'', \kappa\tau\lambda$. Ἀς καλέσωμεν τὴν τελευταίον τοῦτον ὅρον χ , καὶ ἔσω $\beta = \alpha(1+\omega)$. Δυνατὸν νὰ ὑποθεθῇ $\chi = \alpha(1+\Pi\omega + K\omega^2 + \kappa\tau\lambda)$, ἐνθα Π καὶ K εἶναι ἀπροσδιόριστοι συντελεσταί. Τώρα αἱ τιμαὶ τῆς β' καὶ α' δίδουν

$$\beta' = \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{8} \omega^2 + \kappa\lambda. \right)$$

$$\alpha' = \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{32} \omega^2 + \kappa\lambda. \right).$$

Καὶ εἰν κάμωμεν παρομοίως $\beta' = \alpha' (1 + \omega')$. Θίλομεν ἔχει

$$\omega' = \frac{1}{4} \omega - \frac{5}{32} \omega^2 + \kappa\lambda.$$

Αλλ' ἡ τιμὴ τῆς χ πρέπει νὰ ᾖ αὐτὴ, εἴτε ἡ σειρά α , α' , α'' , $\kappa\lambda.$ ἀρχίζει ἀπὸ α εἴτε ἀπὸ α' λοιπὸν θελομεν ἔχει

$$\alpha \left(1 + \Pi \omega + K \omega^2 + \kappa\lambda. \right) = \alpha' \left(1 + \Pi \omega' + K \omega'^2 + \kappa\lambda. \right)$$

Ἀντιστοίχοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὰς τιμὰς τῶν α' καὶ ω' διὰ α καὶ ω ἐκφραζόμενας, καὶ συγκρίνοντες τοὺς ἑμίους

ἔρως εὐρίσκομεν $\Pi = \frac{1}{3}$, καὶ $K = -\frac{1}{15}$. λοιπὸν

$$\chi = \alpha \left(1 + \frac{1}{3} \omega - \frac{1}{15} \omega^2 \right).$$

Εἰν ἡ πρώτη ἑμίσεια τῶν ψηφίων τῶν ἀκτίνων α καὶ β ᾖ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο, δυνάμεθα νὰ ἀπερρίψωμεν τὸν ὅρον ω^2 , καὶ ἡ ἀνωτέρω τιμὴ ἀνάγεται εἰς $\chi = \alpha \left(1 + \frac{1}{3} \omega \right) =$

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}. \text{ Οὕτω κάμνοντες } \alpha = 1, 1282657, \text{ καὶ } \beta = 1, 1286063,$$

συνάγουμεν ἀμέσως $\chi = 1, 1283792$.

Εἰν δὲ αἱ ἀκτίνες συμφωνοῦν μόνον εἰς τὸ τρίτον μέρος τῶν ψηφίων τῶν, πρέπει νὰ λήθωμεν τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἀνωτέρω σειράς: οὕτω κάμνοντες $\alpha = 1, 1265639$ καὶ $\beta = 1, 1320149$, εὐρίσκομεν $\chi = 1, 1283791$.

Ἡμπερὺσαμεν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι α καὶ β συμφωνοῦν εἰς εἰς ὀλιγώτερα ψηφία· ἀλλὰ τότε ἔπρεπε νὰ λογαριάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ μὲ περσσοτέρους ὅρους.

Ἡ προσέγγισις τῆς ἸΔ' προτάσεως, ἥτις εἶναι τοῦ Ἰακώβου Γρηγορίου, ἐπιδέχεται παρεμοίους ἐπιτεμὰς· περὶ τούτων παραπέμπουμεν εἰς τὸ σύγγραμμα τούτου τοῦ συγγραφέως ἐπιγραφόμενον: *Vera circuli et hyperbolae quadratura* σύγγραμμα μεγάλης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον καθ' ὃν ἐφάνη.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Δ'.

Ενθα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ τὸ τετράγωνόν του, εἶναι ἄλογοι ἀριθμοί.

Ἀς θεωρήσωμεν τὴν ἄπειρον σειράν

$$1 + \frac{\alpha}{\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\omega \cdot \omega + 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\alpha^3}{\omega \cdot \omega + 1 \cdot \omega + 2} + \kappa\lambda.$$

τῆς ὁποίας ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{\alpha^n}{\omega \cdot \omega + 1 \cdot \omega + 2 \dots (\omega + n - 1)}$
καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $\varphi : \omega$ παριστάνει τὸ ἄθροισμά της. Ἐὰν ἀντὶ
 ω τεθῇ $\omega + 1$, $\varphi : (\omega + 1)$ παρομοίως θέλει εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς
σειρᾶς

$$1 + \frac{\alpha}{\omega + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\omega + 1 \cdot \omega + 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\alpha^3}{\omega + 1 \cdot \omega + 2 \cdot \omega + 3} + \text{κτλ.}$$

Ἀς ἀφαιρέσωμεν καθεὶν ὅρον τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀπὸ καθεὶν ὅρου
τῆς πρώτης, καὶ θέλουμεν ἔχει $\varphi : \omega - \varphi : (\omega + 1)$ διὰ τὸ ἄθροισμα
τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἐπὶ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\omega \cdot \omega + 1} + \frac{\alpha^2}{\omega \cdot \omega + 1 \cdot \omega + 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^3}{\omega \cdot \omega + 1 \cdot \omega + 2 \cdot \omega + 3} + \text{κτλ.}$$

Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἡμπερὶ νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$\frac{\alpha}{\omega \cdot \omega + 1} \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{\omega + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\omega + 1 \cdot \omega + 2} + \text{κτλ.} \right),$$

καὶ τότε ἀνάγεται εἰς $\frac{\alpha}{\omega \cdot \omega + 1} \varphi : (\omega + 1)$. Ἐν γίνεи λοιπὸν ἔχουμεν

$$\varphi : \omega - \varphi : (\omega + 1) = \frac{\alpha}{\omega \cdot \omega + 1} \varphi : (\omega + 1)$$

Ἀς διαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διὰ $\varphi : (\omega + 1)$, καὶ, πρὸς
ἀπλούσευσιν τοῦ ἐξαγομένου, ἔστω $\psi : \omega$ νέα λειτουργία τῆς ω , τοι-
αύτη ὥστε $\psi \cdot \omega = \frac{\alpha}{\omega} \cdot \frac{\varphi : (\omega + 1)}{\varphi : (\omega)}$. τότε ἀντὶ $\frac{\varphi : \omega}{\varphi : (\omega + 1)}$ καὶ
 $\frac{\varphi : (\omega + 2)}{\varphi : (\omega + 1)}$ θυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{\alpha}{\omega \psi : \omega}$, καὶ $\frac{(\omega + 1) \psi : (\omega + 1)}{\alpha}$.
πράττοντες λοιπὸν τὴν ταιαύτην ἀντιστοιχωγὴν εὐρίσκομεν

$$\psi : \omega = \frac{\alpha}{\omega + \psi : (\omega + 1)},$$

Ἀλλὰ θέτοντες διαδοχικῶς εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ ω ,
 $\omega + 1$, $\omega + 2$, κτλ, συνάγομεν

$$\psi : (\omega + 1) = \frac{\alpha}{\omega + 1 + \psi : (\omega + 2)},$$

$$\psi : (\omega + 2) = \frac{\alpha}{\omega + 2 + \psi : (\omega + 3)} \cdot \text{κτλ}$$

Η τιμὴ λοιπὸν τῆς λειτουργίας $\psi : \omega$ ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος :

$$\psi : \omega = \frac{a}{\omega} + \frac{a}{\omega+1} + \frac{a}{\omega+2} + \kappa\tau\lambda.$$

Αντιστρόφως τὸ συνεχές τεῦτο κλάσμα ἐπ' ἄπειρον προεκτεθέν ἔχει δι' ἄθροισμα $\psi : \omega$, ἢ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{a}{\omega} \cdot \frac{\varphi : (\omega+1)}{\varphi : \omega}$, καὶ τὸ ἄθροισμα τεῦτο ἀναπτυγμένον εἰς κοινὰς σειρὰς εἶναι

$$\frac{a}{\omega} \cdot \frac{1 + \frac{a}{\omega+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\omega+1 \cdot \omega+2} + \kappa\tau\lambda.}{1 + \frac{a}{\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\omega \cdot \omega+1} + \kappa\tau\lambda.}$$

Ἐςω τῶρα $\omega = \frac{1}{2}$, τὸ συνεχές κλάσμα ἀποβαίνει

$$\frac{2a}{1} + \frac{4a}{3} + 4a + \kappa\tau\lambda.$$

εἰς τὸ ἑποῖον οἱ ἀριθμηταί, ἐκτὸς τοῦ πρώτου, εἶναι ἴσοι μὲ 4α· εἰ παρονομασταὶ δὲ σχηματίζουσι τὴν σειρὰν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, κτλ. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ συνεχοῦς τούτου κλάσματος ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ἀκόμη καὶ διὰ

$$2a \cdot \frac{1 + \frac{4a}{2 \cdot 3} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7} + \kappa\tau\lambda.}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6} + \kappa\tau\lambda.}$$

Ἀλλ' αἱ σειραὶ αὗται ἀναφέρονται εἰς γνωστὸς τύπους, καὶ γνωστὸν εἶναι ὅτι ἐάν ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἑποίου ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος εἶναι 1 παρασταθῇ διὰ ε, ἡ ἀνωτέρω ἐκφρασις ἀνάγεται εἰς

$$\frac{1}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} \text{ εἰς τρόπον ὥστε ἔχομεν ἓν γίνεαι}$$

$$1 + 1$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{a} - 2\sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{a}}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{a}} \cdot 2\sqrt{a} = \frac{4a}{1} + \frac{4a}{3} + \frac{4a}{5} + \text{κτλ}$$

Εντεῦθεν προκύπτουν δύο ἀρχικοὶ τύποι καθὼς α εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Εἰς κατὰ πρῶτον $4a = \chi^2$, θέλομεν εἶχει

$$\frac{\frac{\chi - \chi}{2 - 2}}{\frac{\chi - \chi}{2 + 2}} = \frac{\chi}{1} + \frac{\chi^2}{3} + \frac{\chi^2}{5} + \text{κτλ.}$$

ἀκολουθῶς εἰς $4a = -\chi^2$ ἀντιστέλλομεν ταύτην τὴν τιμὴν καὶ

$$\frac{\frac{\chi\sqrt{-1} - \chi\sqrt{-1}}{2 - 2}}{\frac{\chi\sqrt{-1} - \chi\sqrt{-1}}{2 + 2}} = \sqrt{-1} \cdot \chi, \text{ εὐρίσκομεν}$$

$$\epsilon\phi \cdot \chi = \frac{\chi}{1} - \frac{\chi^2}{3} - \frac{\chi^2}{5} - \frac{\chi^2}{7} - \text{κτλ.}$$

Οὗτος εἶναι ὁ τύπος ἐπὶ τοῦ ὁποῖου θέλομεν θεμελιώσῃ τὴν ἀποδείξιν μας. Ἀλλὰ πρέπει πρῶτον νὰ ἀποδείξωμεν τὰ ἀκόλουθα δύο λήμματα.

ΛΗΜΜΑ Α'. Εἰς συνεχὲς κλάσμα ἐπ' ἀπείρην προεκτεινόμενον τὸ

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''} + \text{κτλ.}$$

εἰς τὸ ὁποῖον $\mu, \nu, \mu', \nu', \text{κτλ.}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί· εἰάν ὑποτεθῇ ὅτι ὅλα τὰ συσχετικὰ κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}, \frac{\mu'}{\nu'}, \frac{\mu''}{\nu''}, \text{κτλ.}$ εἶναι μικρότερα μονάδος, λέγω ὅτι ἡ ὅλη τιμὴ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος εἶναι ἐξ ἀνάγκης ἄλγος ἀριθμός.

Λέγω, κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι μικρότερα μονάδος. Τῷ ὄντι, χωρὶς νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν γενικότητα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, ἡμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ὅλους τοὺς παρνομαστές $\nu, \nu', \nu'', \text{κτλ.}$ θετικούς. Εἰς τὴν τῶρα λάβωμεν ἓνα μόνον ὅρον τῆς

προτεθείσης σειράς, θέλομεν έχει, ἐξ ὑποθέσεως, $\frac{\mu}{\nu} < 1$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τῶς δύο πρώτους, ἐπειδὴ $\frac{\mu'}{\nu'} < 1$, φανερόν εἶναι ὅτι $\nu + \frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ποσότης μείζων τῆς $\nu - 1$: ἀλλ' ὁ ἀριθμητικὸς μ εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ ν · ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ δύο εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, ἔπεται ὅτι μ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος ἀκόμῃ καὶ ἀπὸ $\nu + \frac{\mu}{\nu}$. Ἡ προκύπτουσα λοιπὴν τιμὴ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'}$$

εἶναι μικροτέρα μονάδος. Ἀς λογαριάσωμεν τρεῖς ὅρους τοῦ προτεθέντος συνεχοῦς κλάσματος· καὶ ἐν πρώτοις, ὡς εἶδομεν, ἡ τιμὴ τοῦ μέρους

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'}$$

εἶναι μικροτέρα μονάδος. Ἀς καλέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ω · φανερόν ὅτι $\frac{\mu}{\nu + \omega}$ εἶναι ἀκόμῃ μικρότερον μονάδος· ἡ προκύπτουσα λοιπὴν τιμὴ ἀπὸ τοὺς τρεῖς ὅρους

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''}$$

εἶναι μικροτέρα μονάδος. Ἐὰν ἀκολουθήσωμεν τὸν αὐτὸν συλλογισμόν, θέλομεν εἶδει ὅτι, ὅποιοςδήποτε εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὄρων τοῦ προτεθέντος συνεχοῦς κλάσματος τοὺς ὁποίους λογαριάζομεν, ἡ προκύπτουσα τιμὴ εἶναι μικροτέρα μονάδος· καὶ ἐὰν λοιπὴν τὸ συνεχὲς κλάσμα ἐπ' ἀπείρων προεκταθῇ, ἡ τιμὴ τοῦ ἀκόμῃ θέλει εἶναι μικροτέρα μονάδος· τότε δὲ μόνον ἰσοῦται μὲ αὐτὴν ὅταν τὸ προτεθὲν συνεχὲς κλάσμα ᾖ τῆς μορφῆς

$$\frac{\mu}{\mu+1} - \frac{\mu'}{\mu'+1} - \frac{\mu''}{\mu''+1} - \text{κτλ}$$

εἰς κάθε ἄλλην περίσασιν εἶναι μικρότερα.

Τούτω τιθέντες, ἴαν τις ἀρνήσεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ προτάθεντος συνεχεῶς κλάσματος εἶναι ἴση μὲ ἀλογον ἀριθμὸν, ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσοῦται μὲ λογικόν, καὶ ἔσω ὁ ἀριθμὸς οὗτος $\frac{B}{A}$, ἐνθα B καὶ A εἶναι ἐπιειδῆποτε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ· θέλομεν ἔχει λοιπὸν

$$\frac{B}{A} = \frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''} + \text{κτλ.}$$

Ἐξωσαν Γ, Δ, Ε, κτλ. ἀπροσδιόριστοι ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥς

$$\frac{\Gamma}{B} = \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''} + \frac{\mu'''}{\nu'''} + \text{κτλ.}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\mu''}{\nu''} + \frac{\mu'''}{\nu'''} + \frac{\mu^{iv}}{\nu^{iv}} + \text{κτλ.}$$

καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον. Ἐπειδὴ τὰ διάφορα ταῦτα συνεχῇ κλάσματα ἔχουν ὅλους τοὺς ὄρους των μικροτέρους μονάδας, ἀκολουθεῖ ὅτι αἱ τιμαὶ των ἢ τὰ ἀθροίσματα $\frac{B}{A}, \frac{\Gamma}{B}, \frac{\Delta}{\Gamma}, \frac{E}{\Delta}, \text{κτλ.}$ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, πρέπει νὰ ᾖναι μικρότεραι μονάδας, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει $B < A, \Gamma < B, \Delta < \Gamma, \text{κτλ.}$ ἐκ τοῦ ὁποῖου βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ, Δ κτλ. συγκροτοῦν μίαν ἐπ' ἄπειρον φθίνουσαν σειράν. Ἀλλ' ἡ ἄλυσις τῶν συνεχῶν κλασμάτων δίδει τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{B}{A} = \frac{\mu}{\nu} + \frac{\Gamma}{B} \cdot \text{ἐκ τῆς ἰποίας } \Gamma = \mu A - \nu B,$$

$$\frac{\Gamma}{B} = \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\Delta}{\Gamma} \cdot \text{ἐκ τῆς ὁποίας } \Delta = \mu' B - \nu' \Gamma,$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\mu''}{\nu''} + \frac{E}{\Delta} \cdot \text{ἐκ τῆς ἰποίας } E = \mu'' \Gamma - \nu'' \Delta,$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοὶ A καὶ B εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἀκέραιοι, ἔπεται ὅτι καὶ ἔστι οἱ ἄλλοι Γ, Δ, Ε, κτλ. οἱ ὁποῖοι ἔως τώρα ἦσαν ἀπροσδιόριστοι, εἶναι ὁμοίως ἀκέραιοι. Τώρα τὸ νὰ ᾖναι μία σειρά A, B, Γ, Δ, Ε κτλ. ἐνταύτῳ φθίνουσα καὶ σύνθετος ἀπὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν, περικλείει ἀντίφασιν· διότι περι-

πλέον οὐδείς τῶν ἀριθμῶν A, B, Γ, Δ, E , κτλ. ἡμπαρεῖ νὰ ᾖται μηδέν, ἐπειδὴ τὸ προτεθὲν συνεχές κλάσμα ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, καὶ οὕτω τὰ παρισανόμενα ἄθροισματα ἀπὸ $\frac{B}{A}, \frac{\Gamma}{B}, \frac{\Delta}{\Gamma}$, κτλ, πρέπει πάντοτε νὰ ᾖται κατὰ τί. Ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ προτεθέντος συνεχὺς κλάσματος ἰσοῦται μὲ λογικὴν ποσότητα $\frac{B}{A}$ εἶναι ἀσύσχυρος· ἐξ ἀνάγκης λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἄλλος ἀριθμός.

ΛΗΜΜΑ Β'. Τῶν αὐτῶν κειμένων, εἰάν τὰ συστατικὰ κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}, \frac{\mu'}{\nu'}, \frac{\mu''}{\nu''}$, κτλ. εἰς μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς σειρᾶς ᾖται ὅποιοιδήποτε μεγέθους· ὅσων δὲ ἀπὸ καποῖον διασχημα ἰσοῦνται σταθερῶς μὲ ποσοτήτας μικρότερας μονάδος· λέγω ὅτι τὸ προτεθὲν συνεχές κλάσμα, εἰάν ὑποτεθῇ πάντοτε ὅτι ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, ἔχει ἄλλογον τιμὴν.

Διότι ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὅλα τὰ κλάσματα τὰ ἐπεία ἔπονται μετὰ τὸ $\frac{\mu'''}{\nu'''}$ δηλαδή τὰ $\frac{\mu''''}{\nu''''}, \frac{\mu^{iv}}{\nu^{iv}}, \frac{\mu^v}{\nu^v}$ κτλ ἐπ' ἄπειρον, εἶναι μικρότερα μονάδος· τότε, κατὰ τὸ Α' Λήμμα, τὸ συνεχές κλάσμα.

$$\frac{\mu'''}{\nu'''} + \frac{\mu^{iv}}{\nu^{iv}} + \frac{\mu^v}{\nu^v} + \text{κτλ}$$

ἔχει ἄλλογον τιμὴν. Ἀς καλέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ω καὶ τὸ προτεθὲν συνεχές κλάσμα ἀποδίδει

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''} + \omega$$

Ἀλλ' εἴν καμωμεν διαδοχικῶς

$$\frac{\mu''}{\nu'' + \omega} = \omega', \frac{\mu'}{\nu' + \omega'} = \omega'', \frac{\mu}{\nu + \omega''} = \omega''', \text{φανερὸν ὅτι ἐπειδὴ}$$

ω εἶναι ποσότης ἄλλος, ὅλαι αἱ ποσότητες $\omega', \omega'', \omega'''$, πρέπει παρομοίως νὰ ᾖται τειαυταί. Τώρα ἡ τελευταία ω''' , ἰσοῦται μὲ τὸ προτεθὲν συνεχές κλάσμα· ἡ τιμὴ λοιπὸν τούτου εἶναι ποσότης ἄλλος.

Μετὰ τὴν ζερίωσιν τῶν δύο τούτων λημμάτων ἠμποροῦμεν, δια νὰ ἐπανελάβωμεν ἐπὶ τὸ προκείμενον, νὰ ἀπεδείξωμεν τὴν γενικὴν ταύτην πρότασιν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ ἐφαπτομένη τόξου συμμετρικοῦ μὲ τὴν ἀκτῖνα εἶναι ἰσόμετρος μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα.

Ἐὰν ὅντι, ἔσω ἡ ἀκτίς $= 1$, καὶ τὸ τόξον $\chi = \frac{\mu}{v}$, ἔνθα μ καὶ v εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω εὐρεθέντα τύπον ἀντὶ χ ἀντικαθίσταμεν $\frac{\mu}{v}$, εὐρίσκομεν,

$$\text{ἐφ. } \frac{\mu}{v} = \frac{\mu}{v} - \frac{\mu^2}{3v} - \frac{\mu^2}{5v} - \frac{\mu^2}{7v} - \kappa\lambda.$$

Τώρα ἐπεὶ δὴ οἱ παρονομασταὶ τοῦ συνεχοῦς τούτου κλάσματος $3v, 5v, 7v$ κτλ. ἀδιακόπως αὐξάνουν, ὁ δὲ ἀριθμητὴς μ^2 μένει τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἀκολουθεῖ ὅτι τὰ συστατικὰ κλάσματα εἶναι πᾶσι γένει μικρότερα μονάδες· λοιπὸν κατὰ τὸ Β' λῆμμα ἡ τιμὴ τοῦ συνεχοῦς τούτου κλάσματος δηλαδὴ ἐφ. $\frac{\mu}{v}$ εἶναι πο-

σότης ἄλογος. ὅθεν ἡ ἐφαπτομένη τόξου συμμετρικοῦ μὲ τὴν ἀκτῖνα, εἶναι ἰσόμετρος μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα.

Εντεῦθεν προκύπτει, ὡς ἄμεσος συνέπεια, ἡ πρότασις ἥτις εἶναι τὸ ἀντικείμενον ταύτης τῆς σημειώσεως. Ἐσω π ἡ ἡμιπεριφέρεια τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι 1· ἐὰν π ᾔτην ποσότης λογικὴ, $\frac{\pi}{4}$ ᾔθελεν εἶναι παρομοίως ποσότης λογικὴ, καὶ ἐπομένως ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ᾔθελεν εἶναι ποσότης ἄλογος· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας ᾔξεύρομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\frac{\pi}{4}$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα· λοιπὸν π δὲν δύναται νὰ ᾔηται λογικὴ ποσότης. Ὁ λόγος λοιπὸν τῆς περιφέρειας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ἄλογος ἀριθμός. (1)

Πιθκὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς π οὔτε εἶναι ἐκ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀλῶγων ποσοτήτων, τοῦτ' ἔστιν ὅτι δὲν δύναται νὰ ᾔηται ἡ ρίζα

(1.) Ἡ πρότασις αὕτη ἀπεδείχθη πρῶτην φορὰν ἀπὸ τὸν Λαμ-βέρτον, εἰς τὰ ὑπομνήματα τοῦ Βαρσλίνου, ἐν ἔτει 1761. Ο. Σ.

μιάς ἀλγεβρικής ἐξισώσεως πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἔρων τῆς ὁποίας εἰ συντελεσταὶ εἶναι λογικοὶ ἀριθμοὶ: ἀλλ' ἡ ἀκριβὴς ἀπόδειξις ταύτης τῆς προτάσεως φαίνεται δυσκολωτάτη τοῦτο μόνον δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ π εἶναι ἐπίσης ἄλογος ἀριθμός.

Τῷ ὄντι ἐὰν εἰς τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ ἐκφράζον τὴν τιμὴν τῆς ἐφ. χ γένῃ $\chi = \pi$, ἔξ ἀφορμῆς, ὅτι ἐφ. $\pi = 0$, πρέπει νὰ ᾖναι

$$0 = 3 - \frac{\pi^2}{5} - \frac{\pi^2}{7} - \frac{\pi^2}{9} - \kappa\lambda.$$

Ἄλλ' ἐὰν π^2 ᾖ τὸν λογικὴ ποσότης, καὶ ἰσοῦτο μὲ $\frac{\mu}{\nu}$, ὄντων μ καὶ ν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἤθελε προκύψει

$$3 = \frac{\mu}{5\nu} - \frac{\mu}{7\nu} - \frac{\mu}{9\nu} - \kappa\lambda$$

Τώρα φανερὸν εἶναι, ὅτι εἰς τὸ συνεχὲς τοῦτο κλάσμα ὑπάρχουν τὰ ὑποτιθέμενα ἀπὸ τὸ Β' λήμμα· λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ εἶναι ἄλογος, καὶ δὲν ἔμπορεῖ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 3. Ὅθεν τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τῆς διαμέτρου, εἶναι ἄλογος ἀριθμός.

Σ Η Μ Ε Ι Σ Ι Σ Ε'.

Ενθα δίδεται ἡ ἀναλυτικὴ λύσις διαφόρων προβλημάτων ἀφορώντων τὸ τρίγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον, τὸ παραλληλεπίπεδον καὶ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Π Ρ Ω Τ Ο Ν.

Δοθεῖσῶν τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ εὐρεθῇ ἡ ἐπιφάνειά του, ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου.

Εἰςωσαν (σχ. 126) αἱ πλευραὶ $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$ · ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν A κατεβάσωμεν τὴν κάθετον AD ἐπὶ τῆς ἀπέναντι

πλευρᾶς $B\Gamma$, θέλομεν ἔχει (12, 3) $AD = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma}$ · ἡ τιμὴ αὕτη δίδει $AB = BA$ ἢ $AD =$

$\frac{\gamma^2 - (\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma})^2}{4\alpha^2}$ · λοιπὸν

$$\Lambda\Delta = \frac{\sqrt{[4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2]}}{2\alpha}. \text{ Εξω Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ}$$

τριγώνου· γνωστὸν εἶναι ὅτι $E = \frac{1}{2} \text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ}$. λοιπὸν $E = \frac{1}{4} \sqrt{[4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2]} = \frac{1}{4} \sqrt{(2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4)}$. Ο τύπος οὗτος ἡμικρεῖ νὰ τεθῇ ὑπὸ ἄλλην μορφήν ἐπιτηδεύσαντες διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμὸν· πρὸς τοῦτο παρατηρητέον ὅτι ἡ ποσότης $4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $2\alpha\gamma + (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)$ καὶ $2\alpha\gamma - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)$. ὁ πρῶτος $= (\alpha + \gamma)^2 - \beta^2 = (\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)$. ὁ δεύτερος $= \beta^2 - (\alpha - \gamma)^2 = (\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$. λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$E = \frac{1}{4} \sqrt{[(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \gamma - \alpha)]}$$

Εὰν τέλος κάμωμεν $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi$, καὶ τοῦτο δίδει $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, $\alpha + \beta - \gamma = 2\pi - 2\gamma$, $\alpha + \gamma - \beta = 2\pi - 2\beta$, $\beta + \gamma - \alpha = 2\pi - 2\alpha$, θέλομεν ἔχει εἰς ἀπλυσίαν ἐκφράσιν τοῦ ἐμβαδίου τοῦ τριγώνου τὴν

$$E = \sqrt{(\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}$$

Οθὴν βλέπομεν ὅτι γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ, πρέπει ἀπὸ τὸ ἡμιᾶθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἐκάστην τῶν ἰδίων πλευρῶν, καὶ ἀφ' αὐτῶν πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία συναγόμενα ὑπόλοιπα μεταξὺ τῶν καὶ μὲ τὸ ἡμιᾶθροισμα τῶν πλευρῶν, νὰ ἐξάξωμεν τέλος τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου· ἡ τετραγωνικὴ αὕτη ρίζα θέλει εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Εξω τώρα ω ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου, καὶ φ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον κατὰ τὴν λβ' πρότασιν τοῦ Γ' βιβλίου, ἔχομεν $\omega = \frac{\frac{1}{2} \alpha \beta \gamma}{E}$, καὶ

$$\varphi = \frac{2E}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{E}{\pi} \cdot \text{ἀντιστάγοντες λοιπὸν τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν τῆς Ε, εὕρισκομεν}$$

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \alpha \beta \gamma}{\sqrt{(\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}}, \quad \varphi = \sqrt{\left(\frac{\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}{\pi}\right)},$$

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

Δοθεισῶν τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, νὰ εὕρεθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραπλεύρου καὶ αἱ γωνίαι τοῦ.

Εξωσαν (σχ. 135) αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ $\text{ΑΒ}=\alpha$, $\text{ΒΓ}=\beta$, $\text{ΓΔ}=\gamma$, $\text{ΔΑ}=\delta$, καὶ αἱ ἄγνωστοι διαγώνιοι $\text{ΑΓ}=\chi$, $\text{ΒΔ}=\psi$ κατὰ τὴν 33

πρότασιν τοῦ Γ' βιβλίου ἔχομεν τὰς δύο ἰσώσεις $χ\psi = \alpha\gamma + \beta\delta$
καὶ $\frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$. ἐκ τῶν ὁποίων

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta} \right)}, \quad \psi = \sqrt{\left(\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma} \right)}$$

Ἀλλὰ, κατὰ τὸ προλαβὸν πρόβλημα, ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι α, β, γ:

ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ τύπου $\omega = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b)^2]}}$
ἀντισταθύνοντες ἀντὶ χ τὴν εὐρεθεῖσαν τιμὴν καὶ ἀναλύνοντες τὸ ἐξαγόμενον εἰς παράγοντας, εὐρίσκομεν

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\epsilon + \gamma\delta)}{(\alpha + \epsilon + \gamma - \delta)(\alpha + \epsilon + \delta - \gamma)(\alpha + \gamma + \delta - \epsilon)(\beta + \gamma + \delta - \alpha)} \right)}$$

Τούτου τεθέντος, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ $= \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma}{\omega}$, τὸ τοῦ

τριγώνου ΑΔΓ $= \frac{\frac{1}{2}\gamma\delta\chi}{\omega}$. λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου

$$\text{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha\epsilon + \gamma\delta)\chi}{\omega} = \frac{1}{4} \sqrt{[(\alpha + \beta + \gamma - \delta)(\alpha + \beta + \delta - \gamma)(\alpha + \gamma + \delta - \epsilon)(\beta + \gamma + \delta - \alpha)]}$$

Καὶ ἐὰν, συντομίας χάριν, κάωμεν, $\pi = \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon + \gamma + \delta)$ θέλωμεν ἔχει τὸ ἐμβαδὸν $\text{ΑΒΓΔ} = \sqrt{(\pi - \alpha \cdot \pi - \beta \cdot \pi - \gamma \cdot \pi - \delta)}$. Τέλος διὰ νὰ εὐρωμεν μίαν τῶν γωνιῶν, φερ' εἰπείν, τὴν Β, παραινεῖται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διδὲι $\sin B = \frac{a^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$. ἀντισταθύνοντες τὴν τιμὴν τῆς χ καὶ ἀνά-

γόντες, εὐρίσκομεν $\sin B = \frac{a^2 + \epsilon^2 - \gamma^2 - \delta^2}{2\alpha\beta + 2\gamma\delta}$. Ἐντεῦθεν $\frac{1 - \sin B}{1 + \sin B}$,

$$\frac{1}{2} \epsilon\phi^2 \cdot \frac{1}{2} B = \frac{(\gamma + \delta)^2 - (\alpha - \epsilon)^2}{(\alpha + \epsilon)^2 - (\gamma - \delta)^2} = \frac{(\alpha + \gamma + \delta - \epsilon)(\beta + \gamma + \delta - \alpha)}{(\alpha + \epsilon + \gamma - \delta)(\alpha + \beta + \delta - \gamma)}$$

$$\epsilon\phi \cdot \frac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{\pi - \alpha \cdot \pi - \beta}{\pi - \gamma \cdot \pi - \delta} \right)}$$

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Γ'.

Ἀσθεισθῶν εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΑΓ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀρθαί, τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας ΒΑΓ, νὰ εὐρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΔ.
σχ. 277.

Έστω $AI = \beta$, $AB = \gamma$, καὶ ἡ γωνία $BAI = A$. Ἐὰν προσεβλη-
θῶσιν αἱ BD , AF ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν κατὰ τὸ F , τὸ
τρίγωνον BAF εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν B γωνία εἶναι ὀρθή, καὶ εἰς
τὸ ὁποῖον εἶναι γνωστὴ ἡ γωνία BAE καὶ ἡ πλευρὰ AB , θέλει
δῶσει $AE = \frac{\gamma}{\sin A}$, λοιπὸν $FE = \frac{\gamma}{\sin A} - \beta$. Μετὰ ταῦτα τὸ
ὀρθογώνιον εἰς F τρίγωνον AFE , εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωστὴ ἡ
πλευρὰ FE καὶ ἡ γωνία $FAE = A$, δίδει $FA = FE \operatorname{csc} A = \frac{\gamma - \beta \sin A}{\eta \mu A}$.
παρεμοίως λοιπὸν $BA = \frac{\beta - \gamma \sin A}{\eta \mu A}$. αὗται εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν
δύο ζητουμένων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

Ενταῦθεν προκύπτει ἡ διαγώνιος $AA' = \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2) - 2\beta\gamma \cos A} = \sqrt{\beta^2 + (\gamma - \beta \cos A)^2} = \frac{\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A)}}{\eta \mu A}$. Ἀλλ' ἀπὸ τὸ
τρίγωνον BAI ἔχομεν $BI' = \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A)}$. Ἡ διαγώνιος
λοιπὸν AA' ἥτις ἐνώνει τὰς δύο πλάγιας γωνίας λόγον ἔχει πρὸς
τὴν διαγώνιον BI' ἥτις ἐνώνει τὰς δύο ὀρθὰς ὅν ἡ μὴ μὴ πρὸς
ἡμ A .

Σχόλιον. Ἡ διαγώνιος AA' εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν κίρρον ἡ διά-
μετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸν τετράπλευρον $ABDI$.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἡ γωνία $ABI' = \angle AI'$ ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ
τῆς AB κατεβασθῇ ἡ κάθετος $I'Z$, τὰ τρίγωνα BZI' , $AI'Z$ θάλουσιν
εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο $AA' : BI' :: AI' : ZI' :: 1 : \eta \mu A'$ ἐξαγ-
όμενον σύμφωνον μὲ τὸ προλαβόν.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Δ'.

Λοθεῖσθαι τῶν τριῶν κόψων ἐνὸς παραλληλεπιπέδου
μετὰ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας κάμνουν μεταξὺ τῶν, νὰ
εὐρεθῇ ἡ σφαιρικὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Έσωσαν (σχ. 278) αἱ κόψεις $SA = \zeta$, $SB = \eta$, $SI' = \theta$, καὶ οἱ
περιεχόμεναι γωνίαι $\angle ASB = \gamma$, $\angle ASI' = \beta$, $\angle BSI' = \alpha$. Ἀπὸ τὴν σιγμῶν
 Γ ἂς κατεβασθῇ ἡ IO κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ASB , καὶ ἂς
ἐπιτευχθῇ ἡ SO τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΓSO$ δίδει $IO = I'S \eta \mu$
 $\Gamma SO = \theta \eta \mu \Gamma SO$. Επειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου
 $ASBI' = \zeta \eta \eta \mu \gamma$, ἔπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν Σ τὴν σφαιρικότητα τοῦ
παραλληλεπιπέδου ST , θέλομεν ἔχει $\Sigma = \zeta \eta \theta \eta \mu \gamma \eta \mu \Gamma SO$. Μένει
νὰ εὐρεθῇ τὸ ἡμ ΓSO .

Πρὸς τοῦτο, ἐκ τῆς σιγμῆς Σ ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα $= 1$
ὡς γεωμ. σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἥτις συναπαντᾷ εἰς A, B, Z, H

τὰς εὐθείας ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΟ· ἂν ἀνὰ δύο ἐνωθῶσιν αἱ σιγμαί.
 Δ, Ε, Ζ διὰ τῶν μεγίστων κύκλων, θέλει σχηματισθῇ τὸ σφαι-
 ρικὸν τρίγωνον ΔΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ τόξον ΖΗ εἶναι κάθετον
 ἐπὶ ΕΔ, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΓΣΟ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ΑΣΒ.
 Τώρα τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὰς τρεῖς πλευράς

$$\Delta E = \gamma, \Delta Z = \beta, EZ = \alpha, \text{ δίδει συν } E = \frac{\text{συν } \beta - \text{συν } \alpha \text{ συν } \gamma}{\eta\mu \alpha \eta\mu \gamma},$$

$$\text{καὶ } \eta\mu E = \frac{\sqrt{(1 - \text{συν}^2 \alpha - \text{συν}^2 \beta - \text{συν}^2 \gamma + 2 \text{συν } \alpha \text{ συν } \beta \text{ συν } \gamma)}}{\eta\mu \alpha \eta\mu \gamma}.$$

Ακολουθῶς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΖΗ δίδει $\eta\mu HZ \dot{\eta} \eta\mu \Gamma\Sigma O$
 $= \eta\mu E \cdot \eta\mu EZ = \eta\mu \alpha \eta\mu E$. λοιπὸν $\Sigma = \zeta\eta\theta \eta\mu \alpha \eta\mu \gamma \eta\mu E \dot{\eta}$
 $\Sigma = \zeta\eta\theta \sqrt{(1 - \text{συν}^2 \alpha - \text{συν}^2 \beta - \text{συν}^2 \gamma + 2 \text{συν } \alpha \text{ συν } \beta \text{ συν } \gamma)},$

Εἰς τὴν ἔκφρασιν ταύτην ἡ ὑπερρίζος ποσότης εἶναι τὸ γινώ-
 μενον τῶν δύο παραγόντων $\eta\mu \alpha \eta\mu \gamma + \text{συν } \beta - \text{συν } \alpha \text{ συν } \gamma$ καὶ $\eta\mu \alpha$
 $\eta\mu \gamma - \text{συν } \beta + \text{συν } \alpha \text{ συν } \gamma$ · ὁ πρῶτος $= \text{συν } \beta - \text{συν } (\alpha + \gamma) =$
 $2\eta\mu \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$, ὁ δεύτερος $= \text{συν } (\alpha - \gamma) - \text{συν } \beta$
 $= 2\eta\mu \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \eta\mu \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$. λοιπὸν ἡ ζητούμενη σφαιρική Σ =

$$2\zeta\eta\theta \sqrt{\left(\eta\mu \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \eta\mu \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \right)}.$$

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ε'.

Εχόντες τὰς αὐτὰ δεδομένα μετὰ τὰ τοῦ προλαβόντος
 προβλήματος, νὰ εὐρωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς διαγωνίου
 ἥτις ἐνώνει δύο ἀπέναντι κορυφάς.

Εἰς (σχ. 278) ἡ διαγώνιος τῆς βάσεως ΣΠ = ω καὶ ἡ ζη-
 τουμένη διαγώνιος ΣΤ = ψ· τὸ τρίγωνον ΑΣΠ εἰς τὸ ὁποῖον συν
 ΣΑΠ = — συν γ, δίδει $\omega^2 = \zeta^2 + \eta^2 + 2\zeta\eta \text{ συν } \gamma$ · παρμερίζως τὸ
 τρίγωνον ΤΣΠ εἰς τὸ ὁποῖον συν ΤΠΣ = — συν ΓΣΗ, δίδει $\psi^2 =$
 $\omega^2 + 2\theta\omega \text{ συν } \Gamma\sigma\text{Π}$. Πρόκειται τώρα νὰ εὐρωμεν τὸ συνημίτονον
 τῆς γωνίας ΓΣΠ ἢ τοῦ τόξου ΖΘ· τώρα εἰς τὸ σφαιρικὸν τρί-
 γωνον ΕΖΘ ἔχομεν, συν ΖΘ = συν ΕΖ συν ΕΘ + $\eta\mu EZ \eta\mu E\Theta \text{ συν } \Gamma$
 ἀντικεισάγοντες τὰς τιμὰς $EZ = \alpha$, καὶ συν Ε = $\frac{\text{συν } \beta - \text{συν } \alpha \text{ συν } \gamma}{\eta\mu \alpha \eta\mu \gamma}$,

$$\text{εὐρίσκουμεν συν } Z\Theta = \text{συν } \alpha \text{ συν } E\Theta + \frac{\eta\mu E\Theta}{\eta\mu \gamma} (\text{συν } \beta - \text{συν } \alpha \text{ συν } \gamma) =$$

$$\frac{\eta\mu E\Theta \text{ συν } \beta}{\eta\mu \gamma} + \frac{\eta\mu (\gamma - E\Theta) \text{ συν } \alpha}{\eta\mu \gamma} = \frac{\eta\mu E\Theta \text{ συν } \beta + \eta\mu \Delta\Theta \text{ συν } \alpha}{\eta\mu \gamma}. \text{ λοιπὸν}$$

$$\alpha\theta\omega\sigma\upsilon\nu\Gamma\Theta, \eta \ 2\theta\omega\sigma\upsilon\nu\Gamma\Sigma\Pi = 2\theta\sigma\upsilon\nu\epsilon \cdot \frac{\omega\eta\mu. \Gamma\Theta}{\eta\mu \gamma} + 2\theta\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \frac{\omega\eta\mu\delta\Theta}{\eta\mu \gamma}$$

$$\text{Αλλ' εἰς τὸ τρίγωνον } ΒΣΠ \text{ ἔχομεν } ΒΠ = \frac{\Sigma\Pi \eta\mu ΒΣΠ}{\eta\mu ΣΒΠ} \text{ καὶ } ΒΣ =$$

$$\frac{\Sigma\Pi \eta\mu ΒΠΣ}{\eta\mu ΣΒΠ} \cdot \text{ἐπειδὴ δὲ } ΒΠ = ΣΑ = ζ, \Sigma\Pi = \omega, \eta\mu ΣΒΠ =$$

$$\eta\mu \gamma, \eta\mu ΒΣΠ = \eta\mu \Gamma\Theta, \text{ καὶ } ΒΣ = \eta, \eta\mu ΒΠΣ = \eta\mu \Delta\Theta. \text{ διὰ τοῦτο}$$

$$\frac{\omega\eta\mu \Gamma\Theta}{\eta\mu \gamma} = ζ \text{ καὶ } \frac{\omega\eta\mu \Delta\Theta}{\eta\mu \gamma} = \eta. \text{ Λοιπὸν } 2\theta\omega\sigma\upsilon\nu\Gamma\Sigma\Pi = 2ζ\theta\sigma\upsilon\nu\epsilon$$

$$+ 2\eta\theta\sigma\upsilon\nu\alpha. \text{ Λοιπὸν τέλος τὲ τετράγωνον τῆς ζητούμενης διαγωνίου:}$$

$$\psi^2 = ζ^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2ζ\eta\sigma\upsilon\nu\gamma + 2ζ\theta\sigma\upsilon\nu\beta + 2\eta\theta\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Πόρισμα. Ἡ σφερέα γωνία Α σχηματίζεται ἀπὸ τὰς κόψεις ζ, η, θ, αἵτινες κάμνουν ἀναμεταξύ των ἀνὰ δύο τὰς γωνίας 200° — γ, 200° — ε, α' ἐπομένως ἔρχεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τοῦ

συν γ καὶ συν β εἰς τὴν ἑκφρασιν τοῦ ΣΕ διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν τοῦ ΑΜ' πράττοντες τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἄλλας δύο διαγωνίου; εὐρίσκουμεν τὰς ἀκολουθοῦς τιμὰς τῶν τετραγώνων των.

$$\Sigma\Gamma = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2\zeta\eta\sigma\upsilon\nu\gamma + 2\zeta\theta\sigma\upsilon\nu\beta + 2\eta\theta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{ΑΜ} = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 - 2\zeta\eta\sigma\upsilon\nu\gamma - 2\zeta\theta\sigma\upsilon\nu\beta + 2\eta\theta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{ΒΝ} = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 - 2\zeta\eta\sigma\upsilon\nu\gamma + 2\zeta\theta\sigma\upsilon\nu\beta - 2\eta\theta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\Gamma\Pi = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2\zeta\eta\sigma\upsilon\nu\gamma - 2\zeta\theta\sigma\upsilon\nu\beta - 2\eta\theta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Εντεῦθεν διὰ τῆς προσθέσεως συνάγουμεν $\Sigma\Gamma + \text{ΑΜ} + \text{ΒΝ} + \Gamma\Pi = 4\zeta^2 + 4\eta^2 + 4\theta^2$. Εἰς κάθε λοιπὸν παραλληλεπίπεδον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα κόψεων. Τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο θεώρημα εἶναι ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει χώραν εἰς τὸ παραλληλόγραμμον (14, 3, πορ.), καὶ ἡμπερὶ νὰ συναχθῇ ἀπὸ τοῦτο τὸ τελευταῖον. Διότι τὰ παραλληλόγραμμα ΣΓΠ, ΑΒΜΝ, διδουν

$$\Sigma\Gamma + \Gamma\Pi = 2\Sigma\Gamma + 2\Sigma\Pi$$

$$\text{ΑΜ} + \text{ΒΝ} = 2\text{ΒΜ} + 2\text{ΑΒ}$$

Πρόσθετοιντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ παρατηροῦντες

$$\begin{array}{r} \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \\ \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \\ \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \quad \text{---}2 \end{array}$$

$$\text{ἐπεὶ } \Sigma\Gamma = \text{BM καὶ } \Sigma\text{H} + \text{AB} = 2\Sigma\text{A} + 2\Sigma\text{B, εὐρίσκομεν } \Sigma\Gamma + \text{AM} +$$

$$\text{BN} + \text{PH} = 4\Sigma\text{A} + 4\Sigma\text{B} + 4\Sigma\Gamma.$$

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Γ'.

Λοθεισῶν τῶν τριῶν κόψεων μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος αἱ ὀποῖαι συνέρχονται εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν, καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν τὰς ἐποίας αἱ κόψεις αὗται κάμνουν μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ ἡ σερειότης τῆς πυραμίδος.

Εἶω (σχ. 278) ΣΑΒΓ' ἡ προτεθεῖσα τριγωνικὴ πυραμὶς, εἰς τὴν ἐποίαν εἶναι γνωστὰ αἱ κόψεις ΣΑ=ζ, ΣΒ=η, ΣΓ=θ καὶ αἱ περιεχόμεναι γωνίαι ΑΣΒ=γ, ΑΣΓ=β, ΒΣΓ=α. Εἴαν ἐπὶ τῶν κόψεων ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, τῶν ἐπειῶν τὸ μέγεθος καὶ θέσις εἶναι δεδομένα, γραφθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΣΤ, ἡ πυραμὶς ἥτις εἶναι τὸ τριτημέριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΒΣΑΝΜΓ' θέλει εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ παραλληλεπιπέδου ΣΤ. Εἴαν λοιπὸν καλέσωμεν Η τὴν σερειότητα τῆς πυραμίδος, κατὰ τὸ Δ' πρόβλ. θελομεν εἶχει,

$$\Pi = \frac{1}{6} \zeta \eta \theta \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)} \quad \eta$$

$$\Pi = \frac{1}{6} \zeta \eta \theta \sqrt{\left(\eta \mu \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \eta \mu \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \eta \mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \eta \mu \frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} \right)}.$$

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ζ'.

Λοθεισῶν τῶν ἐξ πλευρῶν ἢ κόψεων μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος, νὰ εὑρεθῇ ἡ σερειότης τῆς.

Εἴαν (σχ. 278) φυλάξωμεν τὰς ὀνομασίας τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, καὶ περιπλέεν κάμνωμεν ΒΓ'=ζ', Γ'Α=η', ΒΔ=θ',

$$\text{θελομεν εἶχει } \sin \gamma = \frac{\zeta^2 + \eta^2 - \theta'^2}{2\zeta\eta}, \quad \sin \beta = \frac{\zeta^2 + \theta'^2 - \eta'^2}{2\zeta\theta}, \quad \sin \alpha$$

$$= \frac{\eta'^2 + \theta'^2 - \zeta'^2}{2\eta\theta}.$$

ἀντικαθιστῶντες ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον, καὶ κάμνοντες διὰ τὸ σύντομον $\eta'^2 + \theta'^2 - \zeta'^2 = \chi$, $\zeta^2 + \theta'^2 - \eta'^2 = \mu$, $\zeta^2 + \eta'^2 - \theta'^2 = \nu$, εὐρίσκομεν διὰ τὴν ζητούμενην σερειότητα

$$\Pi = \frac{1}{12} \sqrt{(4\zeta^2 \eta^2 \theta'^2 - \zeta^2 \chi^2 - \eta^2 \mu^2 - \theta'^2 \nu^2 + \chi \mu \nu)}.$$

Ὅταν δὲ πρόκειται νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τούτους, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ μὲν χαρακτῆρες ζ', η', θ' σημειοῦν τὰς πλευρὰς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἑδρας ἢ βάσεως, οἱ δὲ ζ, η, θ τὰς τρεῖς

ἄλλας κόψεις αἱ ὁποῖαι τελειοῦν εἰς τὴν κορυφὴν, καὶ εἶναι οὕτω διατεταγμέναι ὥς ζ εἶναι ἀπέναντι τῆς ζ', ἢ τῆς η' καὶ θ τῆς θ'.

Σχόλιον. Εἶς Α τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τριγώνων τῶν συνιστώντων τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, καὶ ρ ἡ ἀκτὺς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας. Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος ἀπὸ τεσσάρων ἄλλων πυραμίδων τῶν ὑποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ διάφοροι ἐδραιότητες, κοινὴ δὲ κορυφὴ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας, καὶ ἡ στερότης ἐκάστης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τῆς ἐπὶ τῆς βάσεώς της· ἔπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν τὴν στερότητα τῆς ὅλης πυραμίδος Π, βέβαιον ἔχει $\Pi = A \times \frac{1}{3} \rho$ ἡμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἰπώμεν ὅτι ἡ στερότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτὺς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὴν σφαίρας. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν συναγομένον τὴν ἀκτὺν τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας $\rho = \frac{3\Pi}{A}$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Η'.

Εἰχόντες τὰ αὐτὰ δοθέντα τοῦ ζ' προβλήματος, νὰ εὗρωμεν τὴν ἀκτὺν τῆς περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένης σφαίρας.

Ἀπὸ τὸ κέντρον Μ τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΣΑΒ (βλ. 279) περιγεγραμμένου κύκλου, ἄς ὑψώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΒ τὴν κάθετον ΜΟ· παρομοίως ἀπὸ τὸ κέντρον Ν τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΣΑΓ περιγεγραμμένου κύκλου, ἄς ὑψώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΓ τὴν κάθετον ΝΟ· λέγω ἰον ὅτι αἱ δύο αὗται κάθετοι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. ζον ὅτι συναπαντῶνται εἰς μίαν σιγμὴν Ο· διότι ἰον ἐὰν ἀπὸ τὰ δύο κέντρα Μ καὶ Ν ἀξώμεν δύο κάθετους ἐπὶ τὴν ΣΑ, αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς μίαν σιγμὴν Δ τῆς ΣΑ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΜΑΝ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἰδίαν ΣΑ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΣΑ εἶναι κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων ΔΣΒ, ΑΣΓ, διὰ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ΜΑΝ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τοῦ ΔΣΒ καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΣΓ· λοιπὸν ἡ ΜΟ ὡς κάθετος ὑψωμένη ἀπὸ μίαν σιγμὴν Μ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου ΔΣΒ μὲ τὸ ΜΑΝ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΑΝ (Γεωμ.)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ κάθετος ΝΟ εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΑΝ· λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΜΟ, ΝΟ εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΑΝ. ζον ἐὰν τῶρα αἱ δύο αὗται κάθετοι δὲν συναπαντῶνται, ἀναγκαίως πρέπει νὰ ᾖναι παράλληλοι· ἀλλὰ τότε ἡ ΜΔ κάθετος εἰς τὴν ΝΟ πρέπει νὰ ᾖναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ΝΟ· πλὴν καὶ ἡ ΔΝ εἶναι ἐπὶ τῆς κάθετος εἰς τὴν ΝΟ· λοιπὸν ἔοικεν ἀκολουθεῖν ὅτι ἐκ τῆς αὐτῆς σιγμῆς Δ νὰ ἀναχωρεῖν δύο κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς

εὐθείας· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΜΟ, ΝΟ συναπαντῶνται εἰς μίαν σιγμὴν Ο. Τούτου τεθέντος ἡ σιγμὴ Ο ὡς ἀνήκουσα εἰς τὴν κάθετον ΜΟ ἰσάκεις ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς σιγμὰς Σ, Α, Β· ὡς ἀνήκουσα δὲ εἰς τὴν κάθετον ΝΟ ἰσάκεις ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς σιγμὰς Σ, Α, Γ· ὥστε ἡ σιγμὴ Ο ἰσάκεις ἀπέχει ἀπὸ τὰς τέσσαρας Σ, Α, Β, Γ· ἔαν λοιπὸν ἐκ τῆς σιγμῆς Ο ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα τὴν ΣΟ γράψωμεν σφαῖραν, αὕτη θέλει διέλθῃ καὶ διὰ τῶν ἄλλων τριῶν κορυφῶν τῆς πυραμίδος, ἐπομένως θέλει εἶναι ἡ περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένη σφαῖρα. Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὗρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΣΟ αὐτῆς τῆς σφαίρας.

Τώρα παρατηρεῖμεν ὅτι ἡ θέσις τῆς σιγμῆς Μ προσδιορίζεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ, διὰ τοῦ τετραπλεύρου ΣΑΜΘ τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι Δ καὶ Θ εἶναι ὀρθαί, καὶ εἰς τὸ ὅποιον ἔχομεν $\Sigma\Delta = \frac{1}{2}\zeta$, $\Sigma\Theta = \frac{1}{2}\eta$, καὶ $\Lambda\Sigma\beta = \gamma$. Λοιπὸν κατὰ τὸ γ' προβλήμα ἔχομεν, $M\Delta = \frac{\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\zeta \text{ συν } \gamma}{\eta \mu \gamma}$. παρμοσίως $\Delta\Gamma = \frac{\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\zeta \text{ συν } \gamma}{\eta \mu \beta}$.

Ας καλέσωμεν Δ τὴν γωνίαν ΜΑΝ τὴν μετροῦσαν τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΣΑΓ· εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ, Δ εἶναι ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν α γωνία, καὶ οὕτως ἔχομεν $\text{συν } \Delta = \frac{\text{συν } \alpha - \text{συν } \beta \text{ συν } \gamma}{\eta \mu \theta \eta \mu \gamma}$, ὥστε ἡ γωνία Δ ἔμπορεῖ νὰ ὑποτεθῇ γνωστή.

Τούτου τεθέντος, εἰς τὸ τετράπλευρον ΟΜΑΝ τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι Μ καὶ Ν εἶναι ὀρθαί, καὶ εἰς τὸ ὅποιον εἶναι γνωστὰ αἱ δύο πλευραὶ ΜΔ, ΔΝ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία ΜΑΝ = Δ,

ἔχομεν, κατὰ τὸ γ' προβλήμα, τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΟΑ = $\frac{\Delta\text{Μ} + \Delta\text{Ν} - 2\Delta\text{Μ} \times \Delta\text{Ν} \text{ συν } \Delta}{\eta \mu^2 \Delta}$. Ἀπὸ δὲ τὸ τρίγωνον ΟΣΔ ὀρθογώνιον

εἰς Δ ἔχομεν $\Sigma\text{Ο} = \text{ΟΔ} + \Sigma\Delta$ · αὕτη εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτίνος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας.

Ἐάν, διὰ νὰ εὗρωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς ἀκτίνος ΣΟ διὰ τῶν θεθέντων τοῦ 5' προβλήματος, ἀντισταθώμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ΟΑ τὰς τιμὰς τῶν ΔΜ, ΔΝ καὶ ἀκροβύθως τὰς τῶν συν Δ καὶ ἡμ Δ, θέλωμεν εὖρη δι' ἐξαγόμενον:

$$\Sigma O = 1 \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} \zeta^2 \mu^2 x + \chi^2 \mu^2 \beta + \theta^2 \mu^2 \gamma - 2\zeta\eta(\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\delta\sigma\upsilon\nu\alpha) \\ - 2\zeta\theta(\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma) - 2\chi\theta(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\beta) \\ \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} \end{array} \right\}}$$

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Γ'.

Περὶ τοῦ σιμοτινωτέρου διασήματος δύο εὐθειῶν μὴ
ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων.

Ἦσαν δύο δεδομένοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΑ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, τῶν ἐποίων πρόκειται νὰ εὗρωμεν τὸ σιμοτινώτερον διάστημα. σχ. 280.

Διὰ τῆς ΑΒ ἃς περάσωμεν δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των τὰ ἐποῖα συναπαντοῦν τὴν ΓΑ τὸ μὲν κατὰ τὸ Γ, τὸ δὲ κατὰ τὸ Α' ἀπὸ τῆς σιγμᾶς Γ καὶ Δ ἃς κατεβάσωμεν τὰς ΓΑ, ΔΒ κάθετους ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΑ ἃς ἄξωμεν τὴν μὲν ΑΕ παράλληλον τῇ ΑΒ, τὴν δὲ ΑΕ κάθετον εἰς τὴν ἰδίαν φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς κητασκευῆς ταύτης σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΒΕ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ ἃς ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ἃς ἄξωμεν τὴν ΑΙ κάθετον τέλος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ ἃς ἄξωμεν τὴν ΙΚ' παράλληλον τῇ ΑΕ καὶ ἃς τὴν προεκβάλλωμεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ εἰς Κ', ἃς λάβωμεν ΑΛ = ΙΚ' καὶ ἃς ἐπιζεύξωμεν τὴν Κ'Α' λέγω ἰον ὅτι ἡ εὐθεῖα Κ'Α' εἶναι ἐνταύτῳ κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΓΑ' 2ον ὅτι ἡ ἰδία αὕτη εὐθεῖα Κ'Α' εἶναι σιμοτινωτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἐνόνουσαν δύο σιγμᾶς τῶν γραμμῶν ΑΒ, ΓΑ, καὶ ἀκολούτως ἡ Κ'Α' ἢ ἡ ἴση μὲ αὐτὴν ΑΙ εἶναι τὸ ζητούμενον σιμοτινώτερον διάστημα.

Τῷ ὄντι ἰον ἐπειδὴ ἐκ τῆς κατασκευῆς αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΕ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, μία τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων· λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ, καὶ διὰ τοῦτο κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΙ' περιπλέον ἢ Κ'Ι' παράλληλος οὖσα τῇ ΔΕ παράλλῳ τῇ ΑΒ, εἶναι παράλληλος τῇ ἰδίᾳ ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη ἡ ΑΛ = ΙΚ' καὶ ἡ ΑΛ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΙ' ἔπεται ὅτι τὸ σχῆμα ΑΙΚ'Α' εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, λοιπὸν ἡ γωνία ΑΙΚ' εἶναι ὀρθή· ὀρθὴ δὲ εἶναι καὶ ἡ ΑΙΠ'· λοιπὸν ἡ ΑΙ εἶναι κάθετος ἐνταύτῳ εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓΙ καὶ ΙΚ'· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΓΙΚ' ἢ ΓΑΕ· λοιπὸν καὶ ἡ παράλληλος αὐτῆς Κ'Α' εἶναι κάθετος εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ καὶ διὰ τοῦτο κάθετος εἰς τὴν ΓΑ, εἶναι δὲ ἡ Κ'Α' κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΒ· λοιπὸν ἰον ἡ εὐθεῖα Κ'Α' εἶναι ἐνταύτῳ κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΓΑ.

2ον Εξω Μ ὁποιοδήποτε σιγμή τῆς εὐθείας ΓΑ· ἐὰν ἀπὸ τῆς σιγμῆς Μ ἀξώμεν τὴν ΜΝ παράλληλον τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΑΒ, τὸ μεταξύ τῆς σιγμῆς Μ καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας διάστημα θέλει ἰσοῦται μὲ ΑΝ, διότι ἡ γωνία ΒΑΝ εἶναι ὀρθή. Τώρα ΑΝ > ΑΙ· λοιπὸν ΑΙ εἶναι τὸ σιμοτινώτερον διάστημα τῶν δεδομένων γραμμῶν ΑΒ, ΓΑ.

Εἰς τὴν αἰκάθετοι ΓΑ = α, καὶ ΑΒ = ΑΕ = β· τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΕ δίδει ΓΕ = $\sqrt{a^2 + b^2}$ · ἐπειδὴ δὲ τὸ ἑμβάδιον τοῦ ἰδίου τριγώνου τόσον ἐκφράζεται διὰ $\frac{1}{2} ΑΙ \times ΑΕ$, ὅσον καὶ διὰ $\frac{1}{2} ΓΕ \times ΑΙ$, διὰ τοῦτο ΑΙ = $\frac{ΑΙ \times ΕΙ}{ΓΕ} = \frac{αβ}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ · αὕτη εἶναι ἡ ἐκφρασις τοῦ σιμοτινωτέρου διαστήματος τῶν δεδομένων γραμμῶν.

Εὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κἀμωμεν τὸ διάστημα ΑΒ = γ, καὶ καλέσωμεν Α τὴν περιεχομένην γωνίαν μεταξύ τῶν δύο δεδομένων γραμμῶν τοῦτ' ἐστὶ τὴν γωνίαν ΓΑΕ τὴν περιεχομένην μεταξύ τῆς γραμμῆς ΓΑ καὶ τῆς ΔΕ παραλλήλου τῆς ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΓΑΕ ὀρθογώνιον εἰς Ε, ἐξ ἁπορρυῆς ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, αὕτη δὲ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ, δίδει συν ΓΑΕ = $\frac{ΔΕ}{ΓΑ}$,

$$\eta \text{ συν } Α = \frac{\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 + \gamma^2)}} \cdot \overset{-2}{-2} \overset{-2}{-2} \overset{-2}{-2} \text{ διότι } ΓΑ = ΓΕ + ΕΔ = a^2 + b^2 + \gamma^2.$$

$$\text{Εντεῦθεν συνάγεται ἡμ} Α = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + \gamma^2}} \text{ καὶ σφ} Α = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Ζ'.

Περὶ τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων.

Ορίζοντες τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα (βιβλ. 5' ὁρ. 16) διὰ τὸ ἀπλοῦςρον ὑποθέσαμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον τὰ πολύεδρα ταῦτα ἀναφέρονται εἶναι τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἑδρας· ἡμπορούσαμεν ὅμως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ὁποιοδήποτε, καὶ τότε ὁ ὁρισμὸς ἔθελε κατασταθῇ γενικώτερος, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὸ παραμικρὸν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς Β' προτάσεως διὰ τῆς ὁποίας ἐξερεύσαμεν τὰς ἀμοιβαίας τῶν δύο στερεῶν σχέσεις. Ἡμπορεῖ δὲ ἀκόμη νὰ λάβῃ τινὰς ὀρθοτάτην ιδέαν τῆς τροποῦπαρξίας τῶν δύο τούτων στερεῶν, θεωρῶν τὸ ἓν ὡς τὴν σχηματιζομένην εἰκόνα τοῦ ἄλλου μίσα εἰς ἐπίπεδον καθρέπτην τόπον ἐπέχοντα τοῦ ἐπίπεδου εἰς τὸ ὁποῖον τὰ δύο στερεὰ ἀναφέρονται.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Η'.

Περὶ τῆς ΚΕ' προτάσεως τοῦ Ζ' Βιβλίου.

Απο τὸ θεώρημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον πρῶτος ὁ Εὐκλῆς ἀπέδειξεν εἰς τὰ ὑπομνήματα τῆς Περικυπόλεως, ἐν ἔτει 1758, ἐξάγονται πολλάκι συνέπειαί τὰς ὁποίας καλὸν εἶναι νὰ ἀνάπτωμεν.

Ἦν Εἰς α ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων, β ὁ τῶν τετραπλεύρων, γ ο τῶν πενταγώνων, κτλ. τῶν συγχροτούντων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου· φανερὸν εἶναι ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἐδρῶν ἴσούται μὲ $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots$ κτλ, καὶ ὁ τῶν πλευρῶν τῶν μὲ $3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \dots$ κτλ. Ο τελευταῖος ὕψος ἀριθμὸς εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόψεων, διότι ἡ αὐτὴ κόψις ἀνέκει εἰς δύο ἑδρας. Ὅθεν ἐὰν καλέσωμεν Η τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐδρῶν καὶ Λ τὸν ἀριθμὸν τῶν κόψεων, θέλομεν ἔχει:

$$H = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots \text{ κτλ.}$$

$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \dots \text{ κτλ.}$$

Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸ περὶ αὐτοῦ λόγος θεώρημα, $\Sigma + H = A + 2$, ἔνθα Σ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, διὰ τοῦτο

$$2\Sigma = 4 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \dots \text{ κτλ.}$$

Τώρα ἐπειδὴ Σ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ δεύτερον μέλος διαιρούμενον διὰ 2 δίδει ἀκέραιον πηλίκον· ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο μέλος μοιράζεται εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν εἶναι $4 + 2\beta + 2\gamma + 4\delta + \dots$, τὸ δὲ $\alpha + \gamma + \epsilon + \dots$ κτλ. τώρα τὸ πρῶτον εἶναι διαιρέσιμον διὰ τοῦ 2· ἀναγκαίως λοιπὸν καὶ τὸ δεύτερον εἶναι τοιοῦτον. Ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιττῶν ἐδρῶν $\alpha + \gamma + \epsilon + \dots$ κτλ. εἶναι πάντοτε ἄρτιος ἀριθμὸς.

Ἀς κάμωμεν, διὰ τὸ σύντομον, $\omega = \beta + 2\gamma + 3\delta + \dots$ κτλ. τότε

$$A = \frac{3}{2} H + \frac{1}{2} \omega$$

$$\Sigma = 2 + \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} \omega.$$

Εἰς κάθε λοιπὸν πολυέδρον ἔχομεν πάντοτε $A > \frac{3}{2} H$, καὶ $\Sigma >$

$2 + \frac{1}{2} H$, ὅπου πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον $>$ δὲν ἀποκλείει τὴν ἰσότητα, διότι ἡμπορεῖ νὰ ᾖ $\omega = 0$.

Ο ἀριθμὸς ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ πολυέδρου εἶναι $2A$, ὁ τῶν στερεῶν γωνιῶν εἶναι Σ, ὥστε ὁ μέσος ἀριθμὸς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἐκάστην στερεὰν γωνίαν, εἶναι $\frac{2A}{\Sigma}$.

Ο ἀριθμὸς αὗτος δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖ μικρότερος ἀπὸ 3, ἐπειδὴ χρειάζονται τολάχιστον τρεῖς ἐπίπεδοι γωνία διὰ τὸν σχηματι-

σμὸν μιᾶς σεριᾶς γωνίας· ἔθεν πρέπει νὰ ἔχωμεν $2A > 3\Sigma$ · τὸ σημεῖν δὲ $>$ δὲν ἀποκλείει τὴν ἰσότητα. Εἰς ἀντὶ Δ καὶ Σ θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν διὰ H καὶ ω ἐκφραζομένας, θέλωμεν ἔχει

$$3H + \omega > 6 + \frac{3}{2}H + \frac{3}{2}\omega, \text{ ἢ } 3H > 12 + \omega \cdot$$

ἀντεισάγιντες εἰς ταύταν τὴν ἀνισότητα ἀντὶ H καὶ ω τὰς τιμὰς τῶν διὰ α, β, γ , κτλ. ἐκφραζομένας, συνάγουμεν

$$3\alpha + 2\beta + \gamma > 12 + \epsilon + 2\zeta + 3\eta + \text{κτλ.}$$

Ἡ νέα αὕτη ἀνισότης δεικνύει ὅτι α, β, γ δὲν ἡμπερεῖ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ ᾖναι μηδὲν, καὶ οὕτω δὲν ὑπάρχει πολύεδρον τοῦ ὁποῖου ὅλαι αἱ ἑδραὶ νὰ ἔχουν περισσότερον ἀπὸ πέντε πλευράς.

$$\text{Ἐπειδὴ } H > 4 + \frac{1}{2}\omega, \text{ συνάγουμεν } 2 + \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}\omega > 4 + \frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega,$$

δηλαδὴ $\Sigma > 4 + \frac{2}{3}\omega$, καὶ $\frac{3}{2}H + \frac{1}{2}\omega > 6 + \omega$ ἢ $A > 6 + \omega$. Ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἔχομεν $\omega < 3H - 12$ · καὶ ἐντεῦθεν $\Sigma < 2H - 4$, καὶ $A < 3H - 6$, ἐνθα πρέπει νὰ εὐθυμούμεθα ὅτι τὰ σημεία $>$ καὶ $<$ δὲν ἀποκλείουσιν τὴν ἰσότητα. Τὰ ὅρια ταῦτα ὑπάρχουν ἐν γένει διὰ κάθε πολύεδρον.

2ον Ἀς ὑποθέσωμεν $2A > 4\Sigma$. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἔχει χῶρον εἰς ἀπειράριθμα πολύεδρα, καὶ ἐξαίρετως εἰς ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ σεριαὶ γωνίαι σχηματίζονται ἀπὸ τέσσαρα ἢ περισσότερα ἐπιπεδα· εἰς τὴν περίσσειαν ταύτην ἔχομεν $H > 8 + \omega$, ἢ ἀντεισάγιντες ἀντὶ H καὶ ω τὰς τιμὰς τῶν,

$$\alpha > 8 + \frac{1}{2}\epsilon + 2\delta + 3\epsilon + \text{κτλ.}$$

Πρέπει λοιπὸν τὸ σεριὲν νὰ ἔχη τοῦλάχιστον ὀκτὼ τριγωνικὰς ἑδρας· τὸ ὅριον $H > 8 + \omega$ δίδει $\Sigma > 6 + \omega$, καὶ $A > 12 + 2\omega$. Ἀλλ' ἐνταύτῳ ἔχομεν $\omega < H - 8$ · καὶ ἐντεῦθεν $\Sigma < H - 2$, $A < 2H - 4$.

3ον Ἀς ὑποθέσωμεν $2 > 5\Sigma$ · ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀναφέρεται πρὸς τοὺς ἄλλους καὶ εἰς ἐκεῖνα τὰ πολύεδρα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ σεριαὶ γωνίαι εἶναι τοῦλάχιστον πενταπλαῖ· ἐκ ταύτης προκύπτει $H > 20 + 3\omega$, ἢ

$$\alpha > 20 + 2\beta + 5\gamma + 8\delta + \text{κτλ.}$$

Ἐκ τῆς ὁποίας βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ τριαῦτα πολύεδρα πρέπει τοῦλάχιστον νὰ ὑπάρχουν εἴκοσι τριγωνικαὶ ἑδραὶ. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἔχομεν $\Sigma > 12 + 3\omega$, καὶ $A > 30 + 5\omega$ · τέλος πάντων ἐκ τοῦ ὅτι $\omega < \frac{1}{3}(H - 20)$, ἐξάγονται τὰ ὅρια $\Sigma < \frac{2}{3}(H - 2)$ $A < \frac{5}{3}(H - 2)$.

Δὲν δύναμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $2A = 6\Sigma$ · διότι ἀπὸ τὴν ἀπᾶ-
λλήν τοῦ H μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων $A = \frac{3}{2}H + \frac{1}{2}\omega$, καὶ

$$\Sigma = 2 + \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} \omega \text{ συνάγουμεν κατὰ πρώτον } \Lambda = 3\Sigma - 6 - \frac{3}{2} \omega + \frac{1}{2} \omega:$$

μετὰ ταῦτα εὐρίσκομεν $2\Lambda + 2\omega + 12 = 6\Sigma$. Η ὑπόθεσις λοιπὸν $2\Lambda = 6\Sigma$ δὲν συμφωνεῖ μὲ τὸ τοιαῦτον ἐξαγόμενον· ὅθεν συμπεραίνομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει πολυέδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ σερεαὶ γωνίαι νὰ σχηματίζονται ἀπὸ ἐξ ἢ περισσοτέρας ἐπιπέδους γωνίας· καὶ τῷ ὄντι ἡ μικροτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν ἐκλήθη γωνία, ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην, ἥθελεν ἔχει, ὅα ἦτον ἡ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου· τῶρα ἐξ τούτων τῶν γωνιῶν κάμνουν τέσσαρας ὀρθάς, τὸ ὁποῖον εἶναι παρὰ πολὺ διὰ μίαν σερεὰν γωνίαν.

Ἄν Ἀς θεωρήσωμεν πολυέδρον τὸ ὁποῖον ὅλας τὰς ἑδρας ἔχει τριγωνικάς, τότε $\omega = 0$, καὶ ἐπομένως $\Lambda = \frac{3}{2} H$, καὶ $\Sigma =$

$$2 + \frac{1}{2} H \cdot \text{ἂν ὑποθίσωμεν περιπλέεν ὅτι αἱ σερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου εἶναι μέρος πενταπλαῖ καὶ μέρος ἐξαπλαῖ· ἔστω π ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταπλῶν, καὶ κ ὁ τῶν ἐξαπλῶν· ἔχουμεν } \Sigma = \pi + \kappa \text{ καὶ } 2\Lambda = 5\pi + 6\kappa \cdot \text{ἐκ τῶν ὁπε.ων } 6\Sigma - 2\Lambda = \pi \cdot \text{ἀλλ' ἀπὸ ἄλλο μέρος } \Lambda = \frac{3}{2} H, \text{ καὶ } \Sigma = 2 + \frac{1}{2} H \cdot \text{λοιπὸν } \pi = 6\Sigma - 2\Lambda = 12. \text{Εὐτεῦθεν ἔπεται}$$

ὅτι ἐὰν ὅλαι αἱ ἑδραι ἑνὸς πολυέδρου ἦναι τριγωνικαὶ καὶ αἱ σερεαὶ τοῦ γωνίαι ἦναι μέρος πενταπλαῖ καὶ μέρος ἐξαπλαῖ, πάντοτε ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταπλῶν θέλει ἰσοῦται μὲ 12. Ο ἀριθμοὶ δὲ τῶν ἐξαπλῶν ἡμπορεῖ νὰ ἦναι ἀπροσδιόριστος· ὅθεν ἀφίνοντες κ ἀπροσδιόριστον, ἔχουμεν εἰς ὅλα ταῦτα τὰ σερεὰ $\Sigma = 12 + \kappa$, $H = 20 + 2\kappa$, $\Lambda = 30 + 3\kappa$.

Θέλομεν τελειώσει τὰς ἐφαρμογὰς ταύτας ἀφ' οὗ ζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν ἢ διεθέντων διὰ τὴν προσδιορίσιν ἑνὸς πολυέδρου· ζήτημα ὠφέλιμον μὲν, πλὴν δὲν φαίνεται εἶτι ἐδοθη ἀκόμη ἡ λύσις του.

Ἀς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ πολυέδρον εἶναι προσδιορισμένου εἵδους, τοῦτ' ἔστιν ὅτι εἶναι γνωστὸς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν του, ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ξεχωριστὰ καθεῖ ἑδρας, καὶ ἡ διάταξις τῆς μιᾶς ὡς πρὸς τὴν ἄλλην. Εἶναι λοιπὸν γνωστοὶ οἱ ὁμοῖ H , Σ , Λ καθὼς καὶ α , β , γ , δ , κτλ. καὶ πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διεθέντων, γραμμῶν ἢ γωνιῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἡμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἡ προσδιορισθῇ τὸ πολυέδρον.

Ἀς θεωρήσωμεν μίαν τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ὅτιν του. Ἐστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς· χρειάζεται 2ν-3 διεθέντα διὰ τὴν προσδιορίσιν ταύτης τῆς ἑδρας ἢ βάσεως. Ἄν καλέσωμεν Σ τὸν ἀριθμὸν τῶν σερεῶν γωνιῶν, φανερόν ὅτι $\Sigma - ν$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐκτὸς τῆς βάσεως σερεῶν

γωνιών· καὶ ἐπειδὴ ἐκάστη γωνία ἀπαιτεῖ τρία δευτέρω διὰ τὴν προσδιόρισίν της· ἐπεται ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεως τῶν κορυφῶν ἀπαιτοῦνται $3\Sigma - 3$ ν δευτέρω· ὥςτε προσθέτοντες εἰς αὐτὰ τὰ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς βάσεως ἀπαιτούμενα καὶ τὰ ὅποια εἶναι $2\nu - 3$, ἔχουμεν διὰ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν δευτέρων $3\Sigma - \nu - 3$. Πλὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐν γένει δὲν ἀπαιτοῦνται τόσα δευτέρω ὥσας μενᾶδος· ἔχει ὁ ἀριθμὸς αὐτῆς, διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ πελυέδρου, διότι πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸν, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαιῶν συνθηκῶν διὰ νὰ ᾔνοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον αἱ κορυφαὶ αἱ ἀνήκουσαι εἰς τὴν ἰδίαν ἐδρᾶν· διὰ νὰ εὐρωμεν δὲ πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν τοιούτων συνθηκῶν, αἱ παρατηρήσωμεν ὅτι τρία σημεία ἀρκούν διὰ τὴν προσδιόρισιν ἐνὸς ἐπίπεδου, δηλονότι τρία σημεία πάντοτε ἡμποροῦν νὰ ἐμβεθῶν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν ἀφ' αὐτοῦ προσδιορισθῇ ἡ θέσις μιᾶς ἐδρας δι' ἐκείνης τῶν τριῶν κορυφῶν αἱ ὅποιαι εἰς αὐτὴν ἀνήκουν, διὰ νὰ περιέγῃ καὶ ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αἱ ὅποιαι εἰς αὐτὴν ἀναφέρονται, ἀπαιτοῦνται τόσαι συνθήκαι ὥσαι εἶναι αἱ ὑπόλοιποι κορυφαί· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τούτων ἰσούται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν παρὰ 3· διὰ τοῦτο ἐὰν καλέσωμεν ν' , ν'' , ν''' κτλ. τοὺς ἀριθμοὺς τῶν πλευρῶν τῶν ἐδρῶν ἐκτὸς ἐκείνης τὴν ὅποιαν ἐλάβομεν ὡς βάσιν, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαιῶν συνθηκῶν διὰ νὰ εὐρίσκωνται αἱ διάφοροι κορυφαὶ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὅποια ἀνήκουν, ἰσούται μὲ $(\nu' - 3) + (\nu'' - 3) + (\nu''' - 3) +$ κτλ. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἔρων τῆς σειρᾶς ταύτης εἶναι $H - 1$, καὶ περιπλέον $\nu + \nu' + \nu'' +$ κτλ. $= 2A$ · λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $2A - \nu - 3(H - 1)$. Ἐὰν τώρα ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τούτων ἀπὸ $3\Sigma - \nu - 3$, εὐρίσκομεν δι' ὑπόλοιπον $3\Sigma - 2A + 3H - 6$, τὸ ὅποιον, ἐξ ἀφορμῆς ὅτι $\Sigma + H = A + 2$, ἀνάγεται εἰς A . Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀναγκαίων δευτέρων διὰ τὴν προσδιόρισιν ἐνὸς πολυέδρου, μεταξὺ ἐκείνων τὰ ὅποια εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἶδους, ἰσούται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κόψεων του.

Πρέπει ὅμως νὰ σημειώσωμεν ὅτι διὰ τὰ δευτέρω ταῦτα δὲν πρέπει νὰ λάβωμεν γραμμὰς ἢ γωνίας ἀπὸ ἐκείνης ἐπεὶ συνίσουν τὸ πολυέδρον, ὅπως τύχη· διότι ἀγκαλὰ καὶ ἠθέλαμεν ἔχει τόσας ἐξισώσεις ὥσας καὶ ἀγνώστους, δυνατόν ὅμως νὰ ἀκλουθήσῃ ὅπερ ἐξ αἰτίας μερικῶν σχεσιῶν μεταξὺ τῶν γνωστῶν ποσότητων, τὸ πρὸβλημα νὰ κατασταθῇ ἀπροσδιόριστον. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεωρημα φαίνεται ὅτι ἡ γνώσις μόνον τῶν κόψεων ἀρκεῖ ἐν γένει διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ πελυέδρου· πλὴν δίδονται περιστάσεις κατὰ τὰς ἐπιτάς ἢ γνώσεις αὐτῇ δὲν εἶναι ἀποχωῶσα. Ἐὰν, παραδείγματα χάριν, διδῇ μὴ τριγωνικὸν ὁποιονδήποτε πρίσμα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀπειράριθμα πρίσματα τὰ ὅποια νὰ ἔχουν ἴσας κόψεις

καὶ ὁμοίως κειμένους. Διότι ἔταν ἡ βάσις ἔχη περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς πλευρὰς, δυνάμεθα φυλάττοντες τὰς πλευρὰς, νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας, καὶ οὕτω νὰ δώσωμεν εἰς ταύτην τὴν θάσιν ἀπειραριθμοὺς διαφορετικὰς μορφὰς εἰς ἐκάστην τῶν ὁπίων ἤθελεν ἀντιτεῖν. ἔχει ἐν ἰδιαιτέρον πρίσμα περιέχον τὰς αὐτὰς κοφείας ἐπεὶ καὶ τὸ διθέν. Ἡμποροῦμεν δὲ ἀκόμη νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῆς κατὰ μῆκος κόψεως τοῦ πρίσματος ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· τέλος πάντων τὰς δύο ταύτας μεταβολὰς ἡμποροῦμεν νὰ συνδυάσωμεν τὴν μίαν μὲ τὴν ἄλλην, καὶ πάντοτε θέλει προκύψει πρίσμα ἔχον τὰς αὐτὰς κοφείας ἢ πλευρὰς μὲ τὰς τοῦ δοθέντος. Πλέομεν λοιπὸν ὅτι αἱ κόφεις μόναι δὲν ἀρκούν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ στερεοῦ.

Τὰ διθέντα τὰ ἐπεῖα πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ τὴν προσδιόρισιν ἑνὸς στερεοῦ, εἶναι ἐκεῖνα τὰ ἐπεῖα δὲν ἀφίνουν καμμίαν ἀπροσδιορίσιαν, ἢ δὲν δίδουν πλὴν μίαν μόνην λύσιν. Καὶ ἐν πρώτοις ἡ βάσις $\Delta B\Gamma$ (σχ. 281) τῆς ἐπείας ἢ προσδιορίσεως ἡμπορεῖ νὰ γένη κατὰ πολλοὺς τρόπους, προσδιορίζεται προσέτι ὅταν ἦναι γνωστὴ ἢ πλευρὰ AB μετὰ τῶν προσκειμένων γωνιῶν $B\Delta\Gamma$, $\Delta B\Gamma$, διὰ τὴν σιγμὴν Γ · μετὰ δὲ τῶν γωνιῶν $B\Delta\Delta$, $\Delta B\Delta$ διὰ τὴν σιγμὴν Δ καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀκολουθῶς ἔσω M σιγμὴ τῆς ἐπείας πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως· φανερόν ὅτι ἡ σιγμὴ αὕτη θέλει προσδιορισθῇ ἔαν φανταζόμενοι τὴν πυραμίδα $MAB\Gamma$, ἢ μόνον τὸ ἐπίπεδον MAB , γνωρίζωμεν τὰς γωνίας MAB , ΔBM , καὶ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου MAB ἐπὶ τῆς βάσεως $\Delta B\Gamma$. Ἐὰν διὰ μέσου ἄλλων τριῶν παρομοίων διθέντων, προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν ἐκάστης τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου τῶν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, φανερόν ὅτι τὸ πολυέδρον θέλει προσδιορισθῇ κατὰ πάντα καὶ κατὰ ἓνα μόνον τρόπον, τοῦτ' ἔστι δὲν θέλει εἶναι δυνατὸν ἄλλο δεύτερον πολυέδρον νὰ ἔχη τὰ αὐτὰ διθέντα καὶ νὰ μὴ ἰσοῦται μὲ αὐτό· ὥστε τὰ δύο πολυέδρα ἤθελεν εἶναι ἴσα· ἤθελεν δὲ εἶναι συμμετρικὰ ἔαν ἐκαστασχευάζοντο κατὰ διὰφορα μέρη τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως.

Δὲν χρειάζονται πάντοτε τρεῖς διθέντα διὰ τὴν προσδιόρισιν ἐκάστης κορυφῆς ἑνὸς πολυέδρου· διότι ἔαν ἡ σιγμὴ M πρέπει νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἤδη προσδιορισμένου ἐπιπέδου τοῦ ὁπίου ἢ κοινῇ τομῇ μὲ τὴν βᾶσιν εἶναι ἡ ZH , ἀρκεῖ ἂψ' οὗ λάβωμεν τὴν ZH κατ' ἀρέσκειαν, νὰ γνωρίζωμεν τὰς γωνίας MHZ , MZH · ὅθεν βλέπομεν ὅτι εἰς ταύτην τὴν περίστασιν χρειάζεται ἐν διθέν ὀλιγότερον. Ἐὰν δὲ ἡ σιγμὴ M πρέπει νὰ εὐρίσκηται ἐπάνω εἰς δύο ἤδη προσδιορισμένα ἐπίπεδα, ἢ εἰς τὴν κοινὴν τομὴν τῶν MK · ἤτοι συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον $\Delta B\Gamma$ εἰς K , τότε γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν ΔK , τὴν γωνίαν $\Delta K'M$ καὶ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου

ΑΚ' Μ' ἐπὶ τῆς βάσεως, ἔχομεν χρεῖαν ἀπὸ μόνῃν τὴν γωνίαν ΜΑΚ. Διὰ αὐτῶν τῶν μερικῶν συνθηκῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων δευτέρων διὰ τὴν κατὰ πάντα προσδιορίζειν ἐνὸς πολυέδρου καὶ κατὰ ἓνα μένου τρόπον, πάντοτε ἡμπορεῖ νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν κοψέων τοῦ Α.

Ἡ πλευρὰ ΑΒ καὶ ἀριθμὸς δευτεριῶν γωνιῶν ἴσος μὲ Α—1 προσδιορίζει ἐν πολυέδρῳ· ἄλλη κατ' ἀρέσκειαν πλευρὰ καὶ αἱ αὐταὶ γωνίαι προσδιορίζουσι ἄλλο ἕμειον πολυέδρον. Ὄθεν ἐπεταὶ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο πολυέδρων τοῦ αὐτοῦ εἶδους, ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κοψέων παρὰ μονάδα.

Τὸ ζήτημα τὸ ὁποῖον ἐλύσαμεν ἤθελεν εἶναι ἔτι ἀπλούστερον ἢν δὲν ἦεν γνωστὴν τὸ εἶδος τοῦ πολυέδρου, ἀλλὰ μένου ὁ ἀριθμὸς τῶν σερεῶν γωνιῶν τοῦ. Τότε προσδιορίζομεν τρεῖς κορυφάς διὰ μέσου τριγώνου τὸ ἐπὶ τὸν ἀπαιτεῖ τρία διυθέντα· τὸ τρίγωνον τοῦτο θεωροῦμεν ὡς τὴν βάσιν τοῦ σερεῦ· μετὰ ταῦτα ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκτὸς ταύτης τῆς ἐξάσεως κορυφῶν εἶναι Σ—3, καὶ ἡ προσδιορίσις ἐκάστης ἀπαιτεῖ τρία διυθέντα, φανερὸν ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων διυθέντων διὰ τὴν προσδιορίσιν τοῦ πολυέδρου ἰσοῦται μὲ $3+3(Σ-3)$ ἢ $3Σ-6$.

Χρειάζονται λοιπὸν $3Σ-7$ συνθήκαι διὰ τὴν μεταξὺ δύο σερεῶν τὰ ἐπὶ αὐτὰ ἔχουσιν ἰσαριθμοὺς σερεῖς γωνίας ὁμοιότητος.

Σ Η Μ Ε Ι Σ Ι Σ Θ'.

Περὶ τῶν Κανονικῶν πολυέδρων (βλέπε τὸ παράρτημα εἰς τὸ Ζ Βιβλίον)

Εἰς τὴν Β' πρότασιν τοῦ παραρτήματος τούτου ἀπεδείξαμεν τὴν ὑπαρξίν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ διαταχθῇ ἀριθμὸς τις ἴσων ἐπιπέδων εὖτω πως ὥστε νὰ προκίψῃ σερεῖν μονόμορφον καθ' ἑαυτὴν τὴν ἔκτασιν. Μᾶς ἐφάνη ὅτι εἰς ἄλλα συγγράμματα ὑποτίθεται ἡ ὑπαρξίς τῆς τοιαύτης διατάξεως, χωρὶς νὰ ἀποδεικνύεται· ἢ ἀποδεικνύεται μὲν πλὴν διὰ περιπεπλεγμένων καὶ δυσλήπτων σχημάτων, καθὼς τοῦτο παρατηρεῖται εἰς τὸν Εὐκλείδην.

Ἐἵδμεν εἰς τὸ αὐτὸ παράρτημα (πρὸ βλ Γ' καὶ Δ') διὰ πόσον ἀπλουστάτων κατασκευῶν προσδιορίζεται ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἐνὸς κανονικοῦ πολυέδρου, καὶ ἡ ἀκτὺς τῆς τε ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης σφαίρας· ἀλλ' ἴσως δὲν θέλει εἶναι ἀνωφελές νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ αὐτὰ προβλήματα τὸν Τριγωνομετρικὸν ὑπολογισμὸν ἕως περιπλέον θέλει μᾶς χρηγήσῃ νέας προτάσεις.

Γνωσάν α, β, γ (σχ. 222) αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ συγ-
κροτοῦσαι τὴν στερεάν γωνίαν Ο, καὶ ἃς ζητήσωμεν τὴν κλίσιν τῶν
ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ γωνίαι α καὶ β· ἐκ τῆς σιγμῆς
Ο ὡς ἐκ κέντρου γεγράφμεν τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ· εἰς τὸ
τρίγωνον τοῦτο γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς ΒΓ=α, ΑΓ=β,
ΑΒ=γ· ἡμπεριέχοντες λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν Γ τὴν πε-
ριεχομένην ὑπὸ τῶν πλευρῶν α καὶ β διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$\text{συν } \Gamma = \frac{\text{συν } \gamma - \text{συν } \alpha \text{ συν } \beta}{\text{ἡμ } \alpha \text{ ἡμ } \beta} \cdot \text{ Ἀς ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦτον}$$

··· τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα καὶ θέλωμεν προσδιορίσαι τὴν
κλίσιν δύο προσκειμένων ἐδρῶν εἰς ἕκαστον τούτων.

σχ. 243. Εἰς τὸ τετράεδρον, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ
συγκροτοῦσαι τὴν στερεάν γωνίαν Σ, εἶναι γωνίαι ἰσοπλεύρων τρι-
γώνων· ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἢ τὸ τόξον τῶν

$$200^\circ = \pi, \text{ θέλωμεν ἔχει } \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \pi \cdot \text{ ὅθεν } \text{συν } \Gamma = \frac{\text{συν } \alpha - \text{συν } \alpha^2}{\text{ἡμ } \alpha^2}$$

$$= \frac{\text{συν } \alpha (1 - \text{συν } \alpha)}{1 - \text{συν } \alpha^2} = \frac{\text{συν } \alpha}{1 + \text{συν } \alpha} \cdot \text{ ἄλλὰ γνωστὸν εἶναι ὅτι } \text{συν } \frac{1}{3} \pi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{ λοιπὸν } \text{συν } \Gamma = \frac{1}{3}.$$

σχ. 245. Εἰς τὸ ἑξάεδρον ἢ κύβον, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι
γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεάν γωνίαν Α, εἶναι ὀρθαί·
ὅθεν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2} \pi$, καὶ $\text{συν } \alpha = 0$ · ὅθεν $\text{συν } \Gamma = 0$. Π γωνία
λοιπὸν δύο προσκειμένων ἐδρῶν εἶναι ὀρθή.

$$\text{σχ. 243. Εἰς τὸ ὀκτάεδρον, ἐὰν κάμωμεν } \alpha = \Delta \Lambda \Sigma = \frac{1}{2} \pi, \\ \beta = \Delta \Lambda \Gamma = \frac{1}{2} \pi, \gamma = \Gamma \Lambda \Sigma = \frac{1}{2} \pi, \text{ θέλωμεν ἔχει } \text{συν } \Gamma = \frac{\text{συν } \frac{1}{2} \pi - \text{συν } \frac{1}{2} \pi^2}{\text{ἡμ } \frac{1}{2} \pi^2} \cdot$$

ἄλλὰ $\text{συν } \frac{1}{2} \pi = 0$, $\text{συν } \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2}$, $\text{ἡμ } \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \checkmark$ · λοιπὸν $\text{συν } \Gamma$
 $= -\frac{1}{3}$ · παραβάλλοντες τὴν τιμὴν ταύτην μετὰ τὴν εὐρεθεῖσαν διὰ
τὸ τετράεδρον, ἐλέγομεν ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐδρῶν τοῦ τετράεδρου
καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐδρῶν τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τοιαῦται ὥς ἡ μία
εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἄλλης.

σχ. 246. Εἰς τὸ δωδεκάεδρον, ἐκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων
γωνιῶν ἐπεὶ συγκροτοῦν τὴν στερεάν γωνίαν, ἰσοῦται μετὰ γωνίαν
κανονικοῦ πενταγώνου· κάμνοντες λοιπὸν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{5} \pi$, εὐ-

$$\text{ρίσκομεν } \text{συν } \Gamma = \frac{\text{συν } \alpha}{1 + \text{συν } \alpha} \cdot \text{ ἄλλὰ } \text{συν } \frac{3}{5} \pi = -\text{συν} \left(\pi - \frac{3}{5} \pi \right)$$

$$= -\text{συν } \frac{2\pi}{5} = -\text{ἡμ} \left(\frac{1}{5} \pi - \frac{2}{5} \pi \right) = -\text{ἡμ} \frac{\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{λοιπὸν συν } \Gamma &= \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20} = -\frac{\sqrt{5}}{20} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ ἀκολουθῶς ἤμ } \Gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ καὶ ἐφ } \Gamma = -2. \end{aligned}$$

σχ. 247. Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον, πρέπει νὰ κἀνωμεν $\gamma = \Gamma B \Delta' = \frac{3}{5} \pi$, $\alpha = \beta = \Gamma B \Lambda' = \frac{1}{2} \pi$, καὶ θέλομεν εἶχει συν $\Gamma' =$
 $\text{συν } \frac{3}{5} \pi = \text{συν } \frac{2}{5} \pi = \frac{\frac{1}{2} (1-\sqrt{5}) - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ λοιπὸν ἡμ Γ'
 $= \frac{3}{5}$.

Τοιαῦται εἶναι αἱ ἀπλούσταται ἐκφράσεις διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται ἡ κλίσις δύο ἐδρῶν εἰς τὰ πέντε κανονικά πολύεδρα. Ἀλλ' εἶναι δυνατόν νὰ τὰ συμπεριλάβωμεν εἰς ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν τύπον.

Τῷ ὄντι (σχ. 248) ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἐκάστης ἐδρας, μ ὁ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συνεννοῦνται εἰς ἐκάστην σφαιρὴν γωνίαν· ἔαν ἀπὸ τὴν σιγμὴν Ο ὡς κέντρον μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα γράψωμεν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, αὕτη θέλει συναπαντήσει τὰς τρεῖς γραμμὰς ΟΑ, ΟΓ, ΟΔ εἰς π', κ, ρ, καὶ ἀπὸ τὴν ἐκαστὴν τῶν σιγμῶν τούτων διὰ τῶν μεγίστων κύκλων θέλει σχηματισθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ π'κρ' εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο ἡ ἐν ρ γωνία εἶναι ὀρθή· διότι αἱ εὐθεῖαι ΔΓ, ΟΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν ΑΛ· λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΔΓ, ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον ΟΑΔ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ κλίσις τῶν ἡ γωνία ρ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου π'κρ' εἶναι ὀρθή· προσέτι ἐπειδὴ ἡ γωνία κ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΟΓΔ καὶ ΟΑΓ, αὕτη δὲ ἰσοῦται μὲ τὴν εἰς τὸ κέντρον Γ ἡμιγωνίαν τῆς κανονικῆς ἐδρας τῆς ὁποίας ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ ἡ ὁποία ἡμιγωνία εἶναι ἴση μὲ $\frac{\pi}{\nu}$, διὰ τοῦτο $\kappa = \frac{\pi}{\nu}$ · εὐκό-

λως δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ γωνία π' τοῦ ἰδίου σφαιρικοῦ τριγώνου ἥτις ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΔ ἐπὶ ΟΑΓ εἶναι τοιοῦτον μέρος δύο ὀρθῶν ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνερχομένων ἐπιπέδων γωνιῶν εἰς τὴν σιγμὴν Α· λοιπὸν $\pi' = \frac{\pi}{\mu}$.

Εἰς τὸ σφαιρικὸν λοιπὸν τρίγωνον π'κρ' ἐκτός τῆς ὀρθῆς γωνίας γνωρίζομεν τὰς γωνίας $\pi' = \frac{\pi}{\mu}$ καὶ $\kappa = \frac{\pi}{\nu}$. Τώρα κατὰ τὴν

Α' ἀρχὴν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἔχομεν τὴν ἀνα-
 λογίαν $\eta\mu x : \sigma\upsilon\nu \pi' :: 1 : \sigma\upsilon\nu \kappa\rho'$ ἐκ τῆς ὁποίας $\sigma\upsilon\nu \kappa\rho' = \frac{\sigma\upsilon\nu \pi'}{\eta\mu x}$ ἀλλὰ
 $\sigma\upsilon\nu \kappa\rho' = \sigma\upsilon\nu \Gamma\Omega\Delta = \eta\mu \Gamma\Lambda\Theta = \eta\mu \frac{1}{2} \Gamma$, ὅπου Γ σημειώνει τὴν γω-

νίαν $\Gamma\Lambda\Theta$. λοιπὸν $\eta\mu \frac{1}{2} \Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{\mu}}{\eta\mu \frac{\pi}{\nu}}$. Τύπος γενικὸς τὸν ὁποῖον

ἔχον διχοτομικῶς ἐντρυφώσωμεν εἰς τὰ πέντε πολύεδρα, θέλομεν εὐρη-
 τὰς ἰδίαις τιμὰς τοῦ $\sigma\upsilon\nu \Gamma$ ἢ $1 - 2\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Gamma$ τὰς ὁποίας δι' ἄλλης
 ἰδιότητος ἔρομεν· ἀρκεῖ, πρὸς τοῦτο, νὰ ἀντειστάωμεν εἰς κάθε περί-
 σταςιν τὰς τιμὰς τοῦ μ καὶ ν , τοῦτ' ἐστὶ νὰ κάμωμεν διὰ τὸ
 τετράεδρον, ἑξάεδρον, ἑκτάεδρον, δωδεκάεδρον, εἰκοσάεδρον
 $\mu = 3 \dots 3 \dots 4 \dots 3 \dots 5$
 $\nu = 3 \dots 4 \dots 3 \dots 5 \dots 3$.

Τὸ αὐτὸ σφαιρικὸν τρίγωνον $\pi' \kappa\rho'$, ἀπὸ τοῦ ὁποῖου ἐσυνάξαμεν τὴν
 κλίσιν δύο προσκαίμενων ἑδρῶν, δίδει $\sigma\upsilon\nu \pi' \kappa' = \sigma\phi \pi' \sigma\phi \kappa$, ἢ $\frac{\Gamma\Theta}{\Omega\Delta} =$

$\sigma\phi \frac{\pi}{\mu} \sigma\phi \frac{\pi}{\nu}$. Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν P τὴν ἀκτῖνα τῆς περι-
 τὸ πολύεδρον περιγεγραμμένης σφαίρας, καὶ ρ τὴν τῆς ἐγγεγραμ-
 μένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον, θέλομεν ἔχει $\frac{P}{\rho} = \frac{1}{\sigma\phi \frac{\pi}{\mu}} \times$

$\frac{1}{\sigma\phi \frac{\pi}{\nu}} = \epsilon\phi \frac{\pi}{\mu} \epsilon\phi \frac{\pi}{\nu}$ περιπλέον, κάμνοντες τὴν πλευρὰν

$AB = a$, ἔχομεν $\Gamma A = \frac{\frac{1}{2} a}{\eta\mu \frac{\pi}{\nu}}$, καὶ ἐπομένως $P^2 = \rho^2 + \frac{\frac{1}{4} a^2}{\eta\mu^2 \frac{\pi}{\nu}}$

αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις δίδουν διὰ κάθε πολύεδρον τὰς τιμὰς
 τῶν ἀκτίνων P καὶ ρ τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης
 σφαίρας. Ἰποθετόντες τὴν γωνίαν Γ γνωστὴν ἐχόμεν ἀκόμη, $\rho =$
 $\frac{1}{2} a \sigma\phi \frac{\pi}{\nu} \epsilon\phi \frac{1}{2} \Gamma$ καὶ $P = \frac{1}{2} a \epsilon\phi \frac{\pi}{\mu} \epsilon\phi \frac{1}{2} \Gamma$.

Ἠλέπομεν ὅτι εἰς τὸ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον ὁ λόγος $\frac{P}{\rho}$

ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐφ' $\frac{\pi}{3}$ ἐφ' $\frac{\pi}{5}$. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἀκτίς P ᾖ ἡ μία

ἢ αὐτὴ καὶ διὰ τὰ δύο, ἡ ἀκτίς ρ θέλει εἶναι ἐπίσχος ἢ αὐτὴ·
δηλονότι, εἰὰν τὰ δύο ταῦτα σφεαῖ ἐγγράζωνται εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν,
τὰ αὐτὰ καὶ περιγράφονται εἰς μίαν καὶ τὴν ἰδίαν σφαῖραν, καὶ
τ' ἀνάπαλιν. Ἡ αὐτὴ ιδιότης ὑπάρχει εἰς τὸ ἑξάεδρον καὶ ὁ-
κτάεδρον, διότι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{P}{\rho}$ εἶναι καὶ διὰ τὰ δύο ἴση μὲ

$$\text{ἐφ} \frac{\pi}{3} \text{ ἐφ} \frac{\pi}{4}.$$

Δε σημειώσωμεν ὅτι τὰ κανονικὰ πολύεδρα δὲν εἶναι τὰ μόνα
τὰ ἑπεὶ περιέχονται ὑπὸ ἴσων κανονικῶν πελυγώνων· διότι εἰὰν
ἐπὶ μιᾷ κεινῆς ἑδρας ἐπισχηρίξωμεν δύο κανονικὰ ἴσα τετράεδρα,
θέλει προκύψει σφεδρὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἑξ ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν
τριγώνων. Δυνατὸν δὲ νὰ σχηματισθῇ ἄλλο σφεδρὸν μὲ δέκα ἴσα
καὶ ἰσοπλευρα τρίγωνα· ἀλλὰ τὰ κανονικὰ πολύεδρα εἶναι τὰ μόνα
τὰ ἑπεὶ ἔχουν ἐνταύτῳ τὰς σφεαῖς γωνίας ἴσας.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Ι'.

Περὶ τοῦ ἐμβλαδοῦ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἐσὼ τ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, π ἡ ἡμιπεριφέρεια μεγίστου κύκλου·
ἔσωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς πλευραὶ ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου· A, B, Γ
τὰ τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ὅποια μετροῦν τὰς ἀπέναντι γωνίας·
ἔσὼ $A+B+\Gamma-\pi=\Sigma$ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ κείμενον (23, 7),
τὸ ἐμβλαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τόξον Σ πολ-
λαπλασιασθὲν ἐπὶ τῆς ἀκτίνος, καὶ οὕτω παριστάνεται διὰ Σ .
Τώρα, ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπέρου ἔχομεν

$$\text{ἐφ} \frac{A+B}{2} : \sigma\phi \frac{\Gamma}{2} :: \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha-\beta}{2} : \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\text{καὶ ἐντεῦθεν ἐφ} \frac{1}{2} (A+B) = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} (\alpha+\beta)} \sigma\phi \frac{1}{2} \Gamma =$$

$$\frac{(\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta + 1)}{\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta - 1} \sigma\phi \frac{1}{2} \Gamma \cdot \text{ἀπὸ ἄλλο μέρος ἐφ} \frac{1}{2} (A+B+\Gamma) =$$

$$\text{ἐφ} \frac{1}{2} (A+B) + \text{ἐφ} \frac{1}{2} \Gamma, \text{ ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντι-}$$

$$1 - \text{ἐφ} \frac{1}{2} (A+B) \text{ ἐφ} \frac{1}{2} \Gamma$$

$$\text{ἐφ} \frac{1}{2} (A+B) \text{ τὴν ἀνωτέρω τιμὴν εὐρίσκομεν ἐφ} \frac{1}{2} (A+B+\Gamma) =$$

$$(1 + \text{ἐφ} \frac{1}{2} \Gamma) \sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta + 1 - \text{ἐφ} \frac{1}{2} \Gamma, \text{ ἄλλ' ἐπειδὴ } 1 + \text{ἐφ} \frac{1}{2} \Gamma$$

$$= 2 \text{ ἐφ} \frac{1}{2} \Gamma$$

ΠΜ ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν, φανερὸν ὅτι ἡ γωνία ΜΠΟ θέλει εἶναι μεγίστη ἀπὸ ὅλας ἐκείνας τῶν ἐπείων ἡ κορυφή εἶναι εἰς τὴν σιγμὴν Π καὶ αἱ δύο πλευραὶ τελειόνουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ μεταδλητοῦ τόξου ΧΩ, καὶ τότε ἡ γωνία ΜΠΟ=ΜΟΩ=½π· τὸ σφαιρικὸν λοιπὸν τρίγωνον τὸ σχηματιζόμενον μετὰ δύο δεδομένας πλευρὰς περιέχει τὴν μεγίστην ἐπιφανείαν ὅταν ἢ Σ=Γ-½π, ἢ Γ=Α+Β, ὅταν δηλ. ἡ γωνία Γ' ἰσοῦται μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· ἐξαχόμενον σύμφωνον μετὰ τὴν ἀναφερθεῖσαν πρότασιν.

Τὸ μέγιστον δὲν ἔχει χώραν ὅταν ἡ σιγμὴ Π εὐρίσκεται ἐν τῇ τετῇ κύκλου, ὅταν, δηλαδὴ, σφ ½ α σφ ½ β < 1: συνίσταται ἀπὸ τῶν ὁμοίων διαδοχικῶς ἐξάγεται σφ ½ α < ἐφ ½ β, ἐφ (½π - ½ α) < ἐφ ½ π - ½ α < ½ β, καὶ τέλος π < α+β· ἐξαχόμενον σύμφωνον μετὰ τὸ σχῆμα τῆς ἰδίας προτάσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Λ'. Νὰ εὐρωμεν τὴν ἐπιφανείαν ἐνός σφαιρικοῦ τριγώνου διὰ μέσου τῶν τριῶν πλευρῶν του.

Πρὸς τοῦτο, πρέπει νὰ ἀντεισαξωμεν εἰς τὸν τύπον

$$\sigma\phi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta + \sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ Γ' καὶ σιν Γ' ἐκπεφρασμένας διὰ α, β, γ· τὴν

$$\epsilon\chi\omicron\mu\epsilon\nu \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu \gamma - \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} \text{ καὶ } \sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta = 2\sigma\phi \alpha +$$

$$\epsilon\phi \frac{1}{2} \alpha (2\sigma\phi \beta + \epsilon\phi \frac{1}{2} \beta) = 4\sigma\phi \alpha \sigma\phi \beta + 2\sigma\phi \beta \epsilon\phi \frac{1}{2} \alpha + 2\sigma\phi \alpha \epsilon\phi \frac{1}{2} \beta$$

$$+ \epsilon\phi \frac{1}{2} \alpha \epsilon\phi \frac{1}{2} \beta \cdot \text{ἀντεισαχόντες εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν ἀντὶ σφ α καὶ σφ β τὰς τιμὰς } \frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha} \text{ καὶ } \frac{\sigma\upsilon\nu \beta}{\eta\mu \beta} \text{ καὶ ἀντὶ } \epsilon\phi \frac{1}{2} \alpha, \text{ καὶ } \epsilon\phi \frac{1}{2} \beta$$

$$\text{τὰς τιμὰς } \frac{\eta\mu \frac{1}{2} \alpha}{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} \alpha}, \text{ καὶ } \frac{\eta\mu \frac{1}{2} \beta}{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} \beta} \cdot \text{ἔπειτα εἰς τὸ ἐξαχόμενον ἀντὶ}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} \alpha \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu \frac{1}{2} \beta \text{ τὰ ἴσα } \frac{\eta\mu \alpha}{2\eta\mu \frac{1}{2} \alpha} \text{ καὶ } \frac{\eta\mu \beta}{2\eta\mu \frac{1}{2} \beta}, \text{ εὐρίσκομεν}$$

$$4\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta + 4\sigma\upsilon\nu \beta \eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha + 4\sigma\upsilon\nu \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta + 4\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta$$

$$\frac{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}{\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta} \cdot \text{ἀλλ' ἐπειδὴ } 4\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha = 2 - 2\sigma\upsilon\nu \alpha, \text{ καὶ } 4\eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta = 2 - 2\sigma\upsilon\nu \beta, \text{ συνάγουμεν } 4\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta + 2\sigma\upsilon\nu \alpha - 2\sigma\upsilon\nu \beta - 2\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta + 2\sigma\upsilon\nu \alpha -$$

$$2\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta + 1 - \sigma\upsilon\nu \beta - \sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta \text{ ἢ } \frac{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \beta + \sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$$

$$= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha} \cdot \frac{1 + \sigma\upsilon\nu \beta}{\eta\mu \beta} = \sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta \cdot \text{ἐντεῦθεν προκύπτει}$$

$$\sigma\upsilon\nu \Gamma + \sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \beta + \sigma\upsilon\nu \gamma}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$$

Μετα ταῦτα ἡ τιμὴ τοῦ συν Γ' δίδει

$$1 + \text{συν} \Gamma = \frac{\text{συν} \gamma - \text{συν}(\alpha + \epsilon)}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} = \frac{2\eta\mu \frac{\alpha + \epsilon + \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$$

$$1 - \text{συν} \Gamma = \frac{\text{συν}(\alpha - \epsilon) - \text{συν} \gamma}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta} = \frac{2\eta\mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \eta\mu \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταῦτα; κοσότητες; μεταξύ των καὶ ἔξαγοντες; ἔχον ὅτι τὸ γινόμενο, εὐρίσκουμεν

$$\eta\mu \Gamma = \frac{\left(\eta\mu \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \epsilon - \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \eta\mu \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \right)}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$$

Λοιπὸν τέλος πάντων

$$\sigma\phi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{1 + \text{συν} \alpha + \text{συν} \epsilon + \text{συν} \gamma}{2\left(\eta\mu \frac{\alpha + \epsilon + \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \epsilon - \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \gamma - \epsilon}{2} \eta\mu \frac{\epsilon + \gamma - \alpha}{2} \right)}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύεται τὸ προτεθὲν πρόβλημα, ἀλλ' ἡμποροῦμεν νὰ φθάσωμεν εἰς ἀπλούστερον ἐξαγόμενον.

Πρὸς τοῦτο ἃ; ξαναλάβωμεν τὸν τύπον

$$\sigma\phi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta + \text{συν} \Gamma}{\eta\mu \Gamma}$$

$$\text{Ἐκ τούτου συνάγουμεν } 1 + \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \Sigma, \eta \frac{1}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Sigma} = \frac{\sigma\phi^2 \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \beta + 2\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta \text{ συν} \Gamma + 1}{\eta\mu^2 \Gamma} \cdot \text{Ἀλλ' ἡ τιμὴ τοῦ συν} \Gamma$$

$$\text{δίδει } 2\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \epsilon \text{ συν} \Gamma = \frac{2\text{συν} \frac{1}{2} \alpha \text{συν} \frac{1}{2} \beta}{\eta\mu \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta} \times \frac{\text{συν} \gamma - \text{συνασυν} \epsilon}{\eta\mu \alpha \eta\mu \beta}$$

$$\text{ἐπειδὴ δὲ } \eta\mu \alpha \eta\mu \epsilon = 2\eta\mu \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta \text{ συν} \frac{1}{2} \alpha \text{συν} \frac{1}{2} \epsilon, \text{ διὰ τούτο}$$

$$2\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \epsilon \text{ συν} \Gamma = \frac{\text{συν} \gamma - \text{συνασυν} \epsilon}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta} \cdot \text{ὁτιοντες εἰς τὸν ἀριθ-}$$

μητήν, ἀντὶ τῶν συν γ, συν α, συν ε τὰς τιμὰς των $1 - 2\eta\mu^2 \frac{1}{2} \gamma$, $1 - 2\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha$, $1 - 2\eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta$, καὶ ἀνάγοντες, εὐρίσκουμεν

$$2\sigma\phi \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi \frac{1}{2} \beta \text{ συν} \Gamma = \frac{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha + \eta\mu^2 \frac{1}{2} \epsilon - \eta\mu^2 \frac{1}{2} \gamma}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta} - 2.$$

$$\text{Ἀπὸ ἄλλης μέρους } \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \alpha \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{1 - \eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha} \cdot \frac{1 - \eta\mu^2 \frac{1}{2} \epsilon}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta} =$$

$$\frac{1-\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha - \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta} + 1. \text{ Αντισταθόντες λοιπόν ταύτας, τὰς τιμὰς:}$$

$$\text{εὐρίσκουμεν } \frac{1}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \Sigma} = \frac{1-\eta\mu^2 \frac{1}{2} \gamma}{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \alpha \eta\mu^2 \frac{1}{2} \beta \eta\mu^2 \frac{1}{2} \gamma}, \text{ ἐπομένως } \eta\mu \frac{1}{2} \Sigma$$

$$= \frac{\eta\mu \frac{1}{2} \alpha \eta\mu \frac{1}{2} \beta \eta\mu \frac{1}{2} \gamma}{\text{συν } \frac{1}{2} \gamma}, \text{ καὶ ξαναθίτοντες τὴν τιμὴν τοῦ } \eta\mu \Gamma, \text{ ἔχομεν}$$

$$\eta\mu \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\sqrt{\left(\eta\mu \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \eta\mu \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \right)}}{2 \text{συν } \frac{1}{2} \alpha \text{συν } \frac{1}{2} \beta \text{συν } \frac{1}{2} \gamma}$$

Τύπος ἐπιτήδειος διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

Εὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν τύπον τοῦτον μετὰ τὴν τιμὴν τῆς $\sigma\phi \frac{1}{2} \Sigma$, θάλομεν εὑρεῖν

$$\sigma\phi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{1+\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\beta+\sigma\phi\gamma}{4\sigma\phi\frac{1}{2}\alpha\sigma\phi\frac{1}{2}\beta\sigma\phi\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sigma\phi^2 \frac{1}{2} \alpha + \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \beta + \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \gamma - 1}{2\sigma\phi\frac{1}{2}\alpha\sigma\phi\frac{1}{2}\beta\sigma\phi\frac{1}{2}\gamma}$$

Νέος τύπος, ὅστις ἔχει τὸ καλὸν νὰ σύγκριται ἀπὸ λογικῶς ὁρους.

Εντεῦθεν συνάγομεν ἀκόμη $\frac{1-\sigma\phi\frac{1}{2}\Sigma}{\eta\mu \frac{1}{2} \Sigma}$, ἥ

$$\eta\phi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{1-\sigma\phi^2 \frac{1}{2} \alpha - \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \beta - \sigma\phi^2 \frac{1}{2} \gamma + 2\sigma\phi\frac{1}{2}\alpha\sigma\phi\frac{1}{2}\beta\sigma\phi\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(\eta\mu \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \eta\mu \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \right)}}$$

Τώρα τὴν ἀριθμητικὴν ταύτης τῆς ἐκφράσεως ἡμποροῦμεν νὰ ἀναλύσωμεν εἰς παράγοντας, καθὼς ἐκμάχμεν διὰ παρομοίαν ποσότητα ($\Sigma \eta\mu$, Ε' προβλ. Δ')

$$\eta\phi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{4\eta\mu \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} \eta\mu \frac{\alpha+\beta-\gamma}{4} \eta\mu \frac{\alpha+\gamma-\beta}{4} \eta\mu \frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}}{\sqrt{\left(\eta\mu \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \eta\mu \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \right)}}$$

$$\text{Ἀλλὰ } \frac{\eta\mu \frac{1}{2} \pi}{\eta\mu \pi} = \sqrt{\left(\frac{\eta\mu^2 \frac{1}{2} \pi}{2\eta\mu \frac{1}{2} \pi \sigma\phi \frac{1}{2} \pi} \right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \eta\phi \frac{1}{2} \pi \right)}$$

λοιπὸν τέλος πάντων

$$\eta\phi \frac{1}{2} \Sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \eta\phi \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} \eta\phi \frac{\alpha+\beta-\gamma}{4} \eta\phi \frac{\alpha+\gamma-\beta}{4} \eta\phi \frac{\beta+\gamma-\alpha}{4} \right)}$$

Ο γαρίας αὗτος τύπος χρεώσεται εἰς τὸν Σίμωνα Δουλιέρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν $B\Gamma=x$, $A\Gamma=y$, $AB=z$, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν τῆς σιγμῆς I , πόλου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ περιγεγραμμένου κύκλου. (σλ. 284).

Η θέσις τῆς τριᾶντης σιγμῆς προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἀποσπῆ-
ματός της ἀπὸ τὴν σιγμὴν Γ ἤγουν διὰ ΓΙ καὶ τῆς γωνίας τὴν
ἐποῖαν τὸ τοῦτον ΓΙ κάμνει μὲ τὸ ΑΙ· ἔσω λοιπὸν ΑΓΙ=χ, καὶ
τὸ τοῦτον ΑΙ=ΓΙ=ΒΙ=φ. Εἰς τὰ τρίγωνα ΓΑΙ, ΓΒΙ ἔχομεν ἀπὸ

$$\text{τὸς γωνιαὶ: τύπου: } \text{συν} \chi = \frac{\text{συν} \phi - \text{συν} \beta \text{συν} \alpha}{\eta \mu \beta \eta \mu \phi} = \frac{1 - \text{συν} \beta}{\eta \mu \beta} \phi \cdot \phi =$$

$$\frac{\eta \mu \beta}{1 + \text{συν} \beta} \phi \cdot \phi, \text{συν}(\Gamma - \chi) = \frac{1 - \text{συν} \alpha}{\eta \mu \alpha} \phi \cdot \phi. \text{Λοιπὸν } \frac{\text{συν}(\Gamma - \chi)}{\text{συν} \chi},$$

$$\frac{1}{2} \text{συν} \Gamma + \eta \mu \Gamma \epsilon \phi \chi = \frac{(1 + \text{συν} \beta)(1 - \text{συν} \alpha)}{\eta \mu \alpha \eta \mu \beta}. \text{ἀντιστρέφοντες εἰς ταύ-}$$

την τὴν ἐξίσωσιν τὰς τιμὰς τοῦ σιν Γ καὶ ἡμ Γ' ἐκπεφρασμένας
διὰ α, β, γ, καὶ, διὰ τὸ σύντομον, κλίνοντες: $M = \sqrt{(1 - \text{συν}^2 \alpha - \text{συν}^2 \beta - \text{συν}^2 \gamma + 2 \text{συν} \alpha \text{συν} \beta \text{συν} \gamma)}$, εὐρίσκουμεν $\epsilon \phi \chi = \frac{1 + \text{συν} \beta - \text{συν} \gamma - \text{συν} \alpha}{M}$,

$$\text{τύπος διὰ τοῦ ἐποῖου προσδιορίζεται ἡ γωνία ΑΓΙ. Δυνάμεθα νὰ}$$

παρατηρήσωμεν ὅτι ἐξ αἰτίας τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΓΙ, ΑΒΙ,
ΒΓΙ, ἔχομεν ΑΓΙ = $\frac{1}{2}(\Gamma + \Lambda - \text{Β})$. διότι ΑΓΙ = ΑΓ'Β - Γ'Β = ΑΓ'Β -
[Γ'ΒΑ - (Γ'ΑΒ - Γ'Α)] = ΑΓ'Β - Γ'ΒΑ + Γ'ΑΒ - Γ'Α' δηλαδή 2ΓΑ =
Γ + Α - Β· καὶ Γ'Α = $\frac{1}{2}(\Gamma + \Lambda - \text{Β})$ · παρεμφώς ΒΓ'Ι = $\frac{1}{2}(\text{Β} + \Gamma - \Lambda)$,
ΒΑΙ = $\frac{1}{2}(\Lambda + \text{Β} - \Gamma)$. Ἐντεῦθεν προκύπτουν οἱ ἀξιοσημεῖωτοι αὗτοι τύποι:

$$\epsilon \phi \frac{1}{2}(\Lambda + \Gamma - \text{Β}) = \frac{1 + \text{συν} \beta - \text{συν} \alpha - \text{συν} \gamma}{M}$$

$$\epsilon \phi \frac{1}{2}(\text{Β} + \Gamma - \Lambda) = \frac{1 + \text{συν} \alpha - \text{συν} \beta - \text{συν} \gamma}{M}$$

$$\epsilon \phi \frac{1}{2}(\Lambda + \text{Β} - \Gamma) = \frac{1 + \text{συν} \gamma - \text{συν} \alpha - \text{συν} \beta}{M}$$

εἰς τοὺς ἐποῖους ἡμπεροῦμεν νὰ ὑποσυνάψωμεν καὶ τὴν δίδοντα
τὴν τιμὴν τῆς σφ $\frac{1}{2} \Sigma$, ὅς τις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τῆς μορφῆς:

$$\epsilon \phi \frac{1}{2}(\Lambda + \text{Β} + \Gamma) = \frac{-1 - \text{συν} \alpha - \text{συν} \beta - \text{συν} \gamma}{M}.$$

$$\text{Η εὐρεθεῖσα τιμὴ τῆς } \epsilon \phi \chi, \text{ δίδει } 1 + \epsilon \phi^2 \chi \text{ ἢ } \frac{1}{\text{συν}^2 \chi} =$$

$$\frac{2(1 + \text{συν} \beta)(1 - \text{συν} \gamma)(1 - \text{συν} \alpha)}{M^2} = \frac{16 \text{συν}^2 \frac{1}{2} \beta \eta \mu^2 \frac{1}{2} \gamma \eta \mu^2 \frac{1}{2} \alpha}{M^2} \cdot \text{λοιπὸν}$$

$$\frac{1}{\text{συν} \chi} = \frac{4 \text{συν} \frac{1}{2} \beta \eta \mu \frac{1}{2} \gamma \eta \mu \frac{1}{2} \alpha}{M}. \text{ Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξίσωσεως } \text{συν} \chi$$

$$= \frac{1 - \sin \beta}{\eta \mu \beta} \sigma \varphi \varphi - \epsilon \varphi \frac{1}{2} \zeta \sigma \varphi \varphi, \text{ εἰς ἀγεται } \epsilon \varphi \varphi = \frac{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \beta}{\sigma \eta \nu \chi} \cdot \text{λοιπὸν } \epsilon \varphi \varphi =$$

$$\frac{\eta \chi \mu \frac{1}{2} \alpha \chi \mu \frac{1}{2} \zeta \chi \mu \frac{1}{2} \gamma}{\sigma \eta \nu \chi}$$

M

$$\sqrt{\left(\eta \mu \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \eta \mu \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cdot \eta \mu \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \cdot \eta \mu \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \right)}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῇ τῆς σφαίρας ἡ γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων τὰ ὑποκείμενα ἔχουσιν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν.

Εἶς ABΓ ἐν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ὑποκείμενων εἶναι AB=γ, καὶ ἡ δεδομένη ἐπιφάνεια A. Ἀπὸ τὴν σιγμὴν τῆς ἡμισείας τῆς AB ἄς ὑψωθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος καθεστὸς ΠΚ' ἐὰν ληφθῇ τὸ τόξον ΠΠ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, ἡ σιγμὴ Π θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου AB, καὶ τὸ τόξον ΠΓA ἡγμένον διὰ τῶν σιγμῶν Π, Γ θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ AB. Εἶς ID=π', ΓA=κ' τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα AΓA, BΓA, εἰς τὰ ὑποκείμενα ἔχομεν AΓ=δ, BΓ=χ, AD=π'+½γ, BD=π'-½γ, διδόντων συνα=συνκσυν(π'-½γ), συνβ=συνκσυν(π'+½γ). Ἀλλ' ἀνωτέρω εὕρομεν:

$$\sigma \varphi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{1 + \sigma \eta \nu \alpha + \sigma \eta \nu \beta + \sigma \eta \nu \gamma}{\eta \mu \alpha \eta \mu \beta \eta \mu \Gamma}$$

ἀντιστάγοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰς τιμὰς συνα+συνβ=2συνκσυνπ'συν½γ, 1+συνγ=2συν²½γ, ἡμβἡμΓ=ἡμγἡμB=2ἡμ½γσυν½γἡμB' θέλομεν ἔχει

$$\sigma \varphi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\sigma \eta \nu \frac{1}{2} \gamma + \sigma \eta \nu \pi' \sigma \eta \nu \kappa}{\eta \mu \alpha \eta \mu \frac{1}{2} \gamma \eta \mu B}$$

Ἀπὸ ἄλλο μέρος εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον BΓA, ἔχομεν προσέτι ἡμBἡμB=ἡμκ' λοιπὸν $\sigma \varphi \frac{1}{2} \Sigma = \frac{\sigma \eta \nu \frac{1}{2} \gamma + \sigma \eta \nu \pi' \sigma \eta \nu \kappa}{\eta \mu \frac{1}{2} \gamma \eta \mu \kappa}$, ἡ συνπ'συνκ=σφ½Σἡμ½γἡμκ-συν½γ' αὕτη εἶναι ἡ μεταξὺ π' καὶ κ σχέσις ἡ ὁποία πρέπει νὰ προσδιορίσῃ τὴν γραμμὴν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται ὅλαι αἱ σιγμαὶ Γ.

Προεκβληθείσης τῆς ΠΠ ποσότης τινὰ ΠΚ'=χ, ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ Κ'Γ' καὶ εἶς K'Γ=ψ' εἰς τὸ τρίγωνον ΠΚ'Γ, εἰς τὸ ὑποκείμενον ἡ ΠΓ=½π-κ καὶ ἡ γωνία Κ'ΠΓ=π-π', ἡ πλευρὰ Κ'Γ εὐρίσκεται διὰ τοῦ τύπου συνΚ'Γ=συνΚ'ΠΓἡμΠΚ'ἡμΠΓ+συνΠΚ'συνΠΓ, ἡ

$$\sigma \eta \nu \psi = \eta \mu \kappa \sigma \eta \nu \chi - \eta \mu \chi \sigma \eta \nu \kappa \sigma \eta \nu \pi'.$$

ἀντιστοιχούντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ συν χ συν π' τὴν τιμὴν
 τοῦ $\sigma\varphi \frac{1}{2} \Sigma \dot{\eta}\mu \frac{1}{2} \gamma \dot{\eta}\mu \chi$ — συν $\frac{1}{2} \gamma$, εὐρίσκομεν

$$\text{συν } \psi = \dot{\eta}\mu \chi \text{ συν } \frac{1}{2} \gamma + \dot{\eta}\mu \chi (\text{συν } \chi - \dot{\eta}\mu \chi \sigma\varphi \frac{1}{2} \Sigma \dot{\eta}\mu \frac{1}{2} \gamma)$$

Ἐὰν τὴν ὥρα ὑποθέσωμεν Σ καὶ γ σταθερά, καὶ θέλωμεν ὅτι ἡ
 τιμὴ τοῦ χ καὶ ψ νὰ μένῃ ἐπίσης σταθερά ὅποιαδήποτε εἶναι ἡ
 θέσις τῆς σιγμῆς: Γ, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ $\dot{\eta}\mu \chi$
 ἵσιν μὲ τὸ μηδέν· διότι τότε ἐπειδὴ συν $\chi - \dot{\eta}\mu \chi \sigma\varphi \frac{1}{2} \Sigma \dot{\eta}\mu \frac{1}{2} \gamma = 0$
 συνάγουμεν $\sigma\varphi \chi = \sigma\varphi \frac{1}{2} \Sigma \dot{\eta}\mu \frac{1}{2} \gamma$, καὶ $\psi = \dot{\eta}\mu \chi \text{ συν } \frac{1}{2} \gamma$, τιμαὶ αἱ ὁποῖαι
 μένουσιν σταθεραὶ ὅταν Σ καὶ γ ᾖναι ἐπίσης σταθεραί· αἱ τιμαὶ λοιπὸν
 εἶναι ὅχι μόνον εἶναι τοιαῦται: σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ
 τριγώνου ΑΒΓ, ἀλλὰ σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν καθὼς ἄλλου τρι-
 γώνου τὸ ὅποιον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιφανείαν
 μὲ τὸ ΑΒΓ· ὥστε ὅλαι αὗται αἱ κορυφαὶ ἰσάκεις ἀπέχουσιν ἀπὸ μίαν
 σιγμὴν τῆς καθέτου ΙΠΚ διὰ τὴν ὁποίαν $\chi = \sigma\varphi \frac{1}{2} \Sigma \dot{\eta}\mu \frac{1}{2} \gamma$, καὶ
 $\psi = \dot{\eta}\mu \chi \text{ συν } \frac{1}{2} \gamma$ · εὐρίσκονται λοιπὸν ἐπὶ τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ
 ὁποίου πόλος εἶναι ἡ τοιαύτη σιγμὴ. Λιτὴ νὰ προσδιορίσωμεν δὲ
 τὸν τοιοῦτον κύκλον, ἀφ' οὗ ἄξωμεν τὸ τόξον ΙΠ κάθετον εἰς τὸ
 μέσον τῆς ὁμάσεως ΑΒ, λαμβάνομεν ἐκείθεν τοῦ πόλου, τὸ μέρος
 ΠΚ τοιοῦτον ὥστε $\sigma\varphi \Pi K' = \sigma\varphi \frac{1}{2} \Sigma \dot{\eta}\mu \frac{1}{2} \gamma$, καὶ ὁ γραφόμενος μικρὸς
 κύκλος ἐκ τῆς σιγμῆς: Κ' ὡς ἐκ πόλου μὲ διάστημα τὸ Κ'Γ
 τοιοῦτον ὥστε συν Κ'Γ = $\dot{\eta}\mu \Pi K'$ συν $\frac{1}{2} \gamma$ θίλει εἶναι ὁ γεωμετρικὸς
 τόπος ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως γ καὶ
 τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας Σ .

Τὸ ὥραϊον τοῦτο θεώρημα χρῆσσειται εἰς τὸν Δεξιῶλον· (βλέπε
 nova Acta Petropolitana Tom V, par. I).

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ ΙΑ'.

Περὶ τῆς Γ' προτάσεως τοῦ Η' βιβλίου.

Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα ἀκριβέστερον νὰ ἀπεδείξωμεν
 ἀνάγκη τὴν εἰς τὰ προειμωδῆ λήμματα τὰ ὅποια ἐπροτάξαμεν
 τοῦ βιβλίου τούτου, κατὰ τὸν ἀκολουθοῦν τρόπον.

Λέγω πρῶτον ὅτι ἡ περατωμένη κυρτὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὰς
 κοίφεις ΑΖ, ΒΗ. καὶ ἀπὸ τὰ τόξα ΑΩΒ, ΖγΗ δὲν ἔμπορεῖ νὰ
 ᾖναι μικροτέρα τοῦ ἀντιστοιχοῦντος μέρους τοῦ ἐγγεγραμμένου πρί-
 σματος, τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδὴ, ΑΒΗΖ. σελ. 252.

Τῷ ὄντι ἔσω Σ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος κυρτὴ ἐπιφάνεια, καὶ,
 εἰ δυνατόν, ἔσω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ ἢ $ΑΒ \times ΑΖ = \Sigma + Μ'$ ἐνθα Μ
 εἶναι πλεονέκτης θετική.

Ας προεκβληθῇ τὸ ὕψος ΑΖ τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου
 ποσότητες τινὰ ΑΖ' ἴσιν μὲ ν φοραῖς τὴν ΑΖ, ὅντος ὁ ὁποιοῦδή-

ποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ· ἰάν ἐνταύτῃ προεκβληθῇ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ πρίσμα, φανερόν εἶναι ὅτι ἡ περιλαμβανή κυρτὴ ἐπιφάνεια Σ' μεταξὺ τῶν κόψεων AZ' , BH' , θέλει περιέχει ν φοραῖς τὴν ἐπιφάνειαν Σ' εἰς τρόπον ὥς $\Sigma' = \nu \Sigma$. καὶ ἐπειδὴ $\nu \times AZ = AZ'$, ἔπεται ὅτι $AB \times AZ = \nu \Sigma + \nu M = \Sigma' + \nu M$. Τώρα ἐπειδὴ ν εἶναι ἀκεραῖος κατ' ἀρέσκειαν ἀριθμὸς καὶ Μ μία δεδομένη πρὸς τοῦ, δυνάμεθα νά λάβωμεν ν ὥς ν Μ νά ᾖναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ τμήματος $\Delta\omega B$, διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νά κάμωμεν $\nu > \frac{2\Delta\omega B}{M}$. τότε λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $AB \times AZ'$ ἢ ἡ ἐπίπεδος

ἐπιφάνεια $ABH'Z'$ ἤθελεν εἶναι μεγαλύτερα τῆς περικυκλώσεως ἐπιφάνειας, ἥτις σύγκειται ἀπὸ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν Σ' καὶ ἀπὸ δύο κυκλικὰ ἴσα τμήματα $\Delta\omega B$, $Z'\chi'H'$. Ἀλλ' ἐξ ἐναντίας, ἡ δευτέρα ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλύτερα τῆς πρώτης, κατὰ τὸ πρῶτον προσιμῶδες λήμμα· λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον $\Sigma < ABH'Z$.

Λέγω δεύτερον ὅτι ἡ αὐτὴ κυρτὴ ἐπιφάνεια Σ δὲν ἔμπορεῖ νά ἴσῃται μὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου $ABH'Z$. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατόν, ὅτι, ληφθείσης τῆς $AE = \Delta B$, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $\Delta MK'$ ἴσῃται μὲ τὸ ὀρθογώνιον $AZK'E$ ἀπὸ ὁποιονδήποτε σιγμῆν Μ τοῦ τόξου ΔME , ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΔM , ME , καὶ ἂς ὑψωθῇ ἡ MN κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ἐπειδὴ τὰ τρία ὀρθογώνια ΔMNZ , $MEK'N$, $\Delta EK'Z$, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔπεται ὅτι εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΔM , ME , ΔE . Ἀλλὰ $\Delta M + ME > \Delta E$, λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΔMNZ , $MEK'N$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ὀρθογωνίου $AZK'E$. τοῦτο δὲ ἴσодυναμῆι, ἐξ ὑποθέσεως, μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν $\Delta MK'$, τὴν σύνθετον ἀπὸ τὰς δύο μερικὰς ἐπιφανείας ΔN , MK' . λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΔMNZ , $MEK'N$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἀντιστοιχοῦσων κυρτῶν ἐπιφανειῶν ΔN , MK' . Πρέπει λοιπὸν ἐν τοῦλάχιστον ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια ΔMNZ , $MEK'N$ νά ᾖναι μεγαλύτερον τῆς ἀντιστοιχοῦσης κυρτῆς ἐπιφανείας. Ἡ συνέπεια ὁμῶς αὕτη ἐναντιοῦται εἰς τὸ ἤδη ἀποδειχθὲν πρῶτον μέρος. Ἀιπὸν οὖν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια Σ οὔτε ἴση ἔμπορεῖ νά ᾖναι μὲ τὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ὀρθογωνίου $ABH'Z$.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι $\Sigma > ABH'Z$, καὶ οὕτως ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπιφανείας καθὲ ἐγγεγραμμένου πρίσματος.

Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου, ἤθελεν ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας καθὲ περιγεγραμμένου πρίσματος.

Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ Ι Β'.

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

Εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ΙΑ' βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου ὁ ἑνάτος καὶ δέκατος ὁρισμὸς οὕτως εὐρίσκονται ἐκπεφρασμένοι:

Θ'. Δύο στερεὰ εἶναι ὅμοια, ὅταν περιέχωνται ἀπὸ ἰσάριθμα ὅμοια ἐπίπεδα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν.

Ι'. Δύο στερεὰ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια, ὅταν περιέχωνται ἀπὸ ἰσάριθμα ἐπίπεδα ἴσα καὶ ὅμοια τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν.

Ἐπειδὴ τὸ ἀντικείμενον τῶν ὅρισμῶν τούτων εἶναι ἀπὸ τὰ δυσκολώτερα πράγματα τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, θέλομεν τὸ ἐξετάσει ὅπως οὖν λεπτομερῶς, καὶ ἐνταύτῃ θελομεν ἐρευνῆσαι τὰς παρατηρήσεις τὰς ὁποίας περὶ τῆς αὐτῆς ὑποθέσεως ἔκαμεν ὁ Ροβέρτος Σίμσων εἰς τὴν ἐκδόσιν, τῶν στοιχείων, σελ. 388 καὶ ὁκολ.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν μὲ τὸν Ροβέρτον Σίμσωνα, ὅτι ὁ δέκατος ὁρισμὸς κυρίως δὲν εἶναι ὁρισμὸς, ἀλλὰ θεώρημα τὸ ὁποῖον ἔχει χρεῖαν ἀποδείξεως· διότι δὲν εἶναι φανερόν, ὅτι δύο στερεὰ διὰ τοῦτο μόνον εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ἐδρας ἴσας· καὶ ἔάν ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύῃ, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ εἴτε διὰ τῆς ἐπιθέσεως, εἴτε δι' ὁποιονδήποτε ἄλλου τρόπου. Ἰλέπομεν ἀκολούθως ὅτι ἀπὸ τὸ ἐλάχιστον τοῦ δεκάτου ὁρισμοῦ μετέχει καὶ ὁ ἑνάτος. Διότι, ἔάν ὁ δέκατος ὁρισμὸς δὲν ἀποδειχθῇ, ἡμπορεῖ νὰ νομισθῇ τινὰς ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄνισα καὶ ἀνόμοια στερεὰ ἴσας ἔχοντα τὰς ἐδρας· ἀλλὰ τότε, κατὰ τὸν ἑνάτον ὁρισμόν, ἓν τρίτον στερεὸν ἔχον τὰς ἐδρας ὁμοίας μὲ τὰς τῶν δύο πρώτων ἤθελεν εἶναι ὅμοιον μὲ ἕκαστον τούτων, καὶ ἰσομένως ὅμοιον μὲ σώματα ἑτερόμορφα· συνέπεια ἣτις περιχλείει ἀντίφασιν, ἢ τοῦλάχιστον δὲν συμφωνεῖ μὲ τὴν ἰδέαν τὴν ὁποίαν φυσικὰ ἔχομεν περὶ τοῦ ὁμοίου.

Πολλαὶ προτάσεις τοῦ ΙΑ' καὶ ΙΒ' βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου θεμελιούνται ἐπὶ τοῦ ἑνάτου καὶ δεκάτου ὁρισμοῦ, μεταξύ δὲ τῶν ἄλλων καὶ ἡ ΚΗ' πρότασις τοῦ ΙΑ' βιβλίου, ἀπὸ τῆς ὁποίας κρέμονται ἡ καταμέτρησης τῶν πρισμάτων καὶ τῶν πυραμίδων. Φαίνεται λοιπὸν ὅτι ἡμποροῦσε νὰ ἐπιπλήξῃ τινὰς τὸν Εὐκλείδην ὡς παμπόλλους προτάσεις ὅχι μὲ ἀκρίβειαν εἰς τὰ στοιχεῖά του ἀποδείξαντα. Εἶναι ὅμως μίᾳ περιστάσει ἐπιτηδεῖα νὰ ἐξασθηνίσῃ τὴν ἐπιπλήξιν ταύτην, καὶ αὐτὴν δὲν πρέπει νὰ παραλείψωμεν.

Τὰ σχήματα τῶν ὁμοίων τὴν ἰσότητα ἢ ὁμοιότητα ἐπιστηρίζομενος ὁ Εὐκλείδης ἐπὶ τοῦ ἑνάτου καὶ δεκάτου ὁρισμοῦ ἀποδεικνύει, εἶναι τοιαῦτα ὥστε εἰς τὰς στερεὰς τῶν γωνίας δὲν συνανεύονται περισσύτεραι τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν· τὰρὰ εἰς σκελὰ μέρη τοῦ Εὐκλείδου μὲ πολλὴν καθαρότητα ἀποδεικνύεται:

Εάν εἰς ἑκατέρωθεν πλῆθρον προσθέσωμεν πυραμίδα δι-
δυντες βάσιν εἰς αὐτὴν μίαν τῶν ἰδρῶν τοῦ πολυέδρου· εἰάν ἀπο-
λείψωμεν, ἀντὶ τῆς τῆς προσθέσωμεν, τὴν ἀφαιρέσωμεν, σχηματίζοντες εἰς τὸ πολυέδρον κοιλότητα ἴσην μετὰ τὴν πυραμίδα, θέλωμεν ἔχει δύο σφαιρὰ ἴσας ἔχοντα τὰς ἰδρῶν τὴν καθὲ μίαν μετὰ τὴν καθὲ μίαν, καὶ ὁμοίως ἔνισα. Οὐδεμία ἀμφισβησία περὶ τῆς ἀνισότητος τῶν αὐτῶν κατασκευαζομένων σφαιρῶν· παρατηροῦμεν ὁμοίως ὅτι ἐν τούτων περιέχει εἰσεχούσας σφαιρὰς γωνίας· τὴν εἶναι πολλὰ πιθανὸν ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐννοῇ τὴν ἀπικλείσθαι τὰ ἀκονόνισα σώματα τὰ ὅποια ἔχουν κοιλότητας ἢ εἰσεχούσας σφαιρὰς γωνίας, καὶ ἐπεριερίσθαι εἰς τὰ κυρτὰ πολυέδρα. Εάν ἀπεδεχθῶμεν τὸν περιορισμὸν τούτον, χωρὶς τοῦ ἑκείνου περιπλέξιν πολλὰ ἄλλα προτάσεις δὲν ἤθελον εἶναι ἀληθεῖς, τὸ παράδειγμα τοῦ Ροβέρτου Σίμωνα δὲν συνάγει τίποτε κατὰ τοῦ ὁρίσμου ἢ τοῦ θεωρήματος τοῦ Εὐκλείδου.

Ὅπως καὶ ἂν ἔλγῃ τὸ πρᾶγμα, ἀπὸ ὧν ταύτας τὰς παρατηρήσεις προκύπτει ὅτι οἱ ὁρίσμοι τοῦ Εὐκλείδου ἐννοῇ καὶ δι-
κατος δὲν ἡλπεροῦν νὰ μείνουν ὡς ὑπάρχουν. Ο Ροβέρτος Σίμων

ZBA, καὶ τὸ τρίγωνον EBA ἰσοῦται μετὰ ZBA, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ἐνός μετὰ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον EBF εἶναι ὅμοιον μετὰ τὸ ZBF, καὶ τὸ EAF μετὰ τὸ ZAF· ἔχομεν λοιπὸν δύο σφαιρὰ ἑκάστων τῶν ὁποίων περιέχεται ἀπὸ ἑξ τριῶν· τὰ τρία πρῶτα τρίγωνα τοῦ ἐνός ἔχουν τὴν κορυφὴν των εἰς τὸ H, καὶ αἱ βάσεις των εἶναι αἱ AB, BF, FA· τῶν δὲ ἄλλων τριῶν ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι εἰς E, καὶ αἱ βάσεις αἱ AB, BF, FA· τὸ ἄλλο δὲ σφαιρὸν περιέχεται ἀπὸ τὰ αὐτὰ τρία τρίγωνα, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ H, καὶ βάσεις αἱ AB, BF, FA, καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα τρία τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι Z, καὶ αἱ βάσεις αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι AB, BF, FA· τὴν τὰ τρία τρίγωνα HAB, HBF, HFA εἶναι κοινὰ καὶ εἰς τὰ δύο σφαιρὰ, τὰ ἄλλα δὲ τρία EAB, EBF, EFA τοῦ πρώτου σφαιροῦ τὰ ἐδείχμεν ἴσα καὶ ὅμοια μετὰ τὰ ἄλλα τρία ZAB, ZBF, ZFA τοῦ ἄλλου σφαιροῦ τὸ καθὲ ἐν μετὰ τὸ καθὲ ἐν. Ὅθεν τὰ δύο ταῦτα σφαιρὰ περιέχονται ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἀριθμὸν ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων· τί ὅτι δὲ εἶναι ἴσα, φανερὸν· διότι τὸ πρῶτον περιέχεται εἰς τὸ δεύτερον· ὅθεν δὲν ἀληθεύει ἐν γένει ὅτι ἐκεῖνα τὰ σφαιρὰ εἶναι ἴσα τὰ ὅποια περιέχονται ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἀριθμὸν ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων, (βλέπε *the elements of Euclid by Alexander Ingram. Philomath., Edinburgh, 1799 Notes pag. 302*). Ο Μ.

σηκώνει τὸν ὅρισμόν τῶν ἴσων σφαιρῶν, ὅστις τῷ ὄντι πρέπει νὰ συγκαταριθμηθῇ μεταξὺ τῶν θεωρημάτων, καὶ ἐρίζει ὁμοία σφαιρὰ εἶναι τὰ ὅποια περιέχονται ἀπὸ ἰσάριθμα ὁμοία ἐπίπεδα, καὶ ἔχουν τὰς ἐμολόγους σφαιρὰς γωνίας ἴσας τὴν καθὲς μίαν μὲ τὴν καθὲς μίαν. Ο ἔρισμός ἐστὶς εἶναι ἀληθὴς, πλὴν τὸ ἐλαττωμά του εἶναι ὅτι περιέχει πολλὰς περιττὰς συνθήκας. Εἰναι ἀπ' αὐτὸν σηκωθῇ ἡ συνθήκη τῶν ἴσων σφαιρῶν γωνιῶν, τότε κατανατᾷ εἰς τὸν τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ ὁποῦ τοῦ ἔλλειμμα ἄλλο δὲν εἶναι εἰ μὴ ὅτι ὑποθέτει τὸ θεωρημα παρὶ τῶν ἴσων ποὺ εἶδρων. Πρὸς ἀποφυγὴν καθὲς περιπλοκῆς, ἐκρίναμεν καταλληλὸν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἔρισμόν τῶν ὁμοίων σφαιρῶν εἰς δύο μέρη· ἐν πρώτοις ἐδώκαμεν τὸν ἔρισμόν τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων, ἔπειτα ὠρίσαμεν ὁμοία σφαιρὰ τὰ ἔχοντα βάσεις ὁμοίας, καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἐκτὸς τῶν βάσεων τούτων ἐμολογοὶ κορυφαὶ προσδιορίζονται ἀπὸ ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας ἢ καθὲς μία μὲ τὴν καθὲς μίαν.

Ὁ ἔρισμός ἐστὶς διὰ μὲν τὰς βάσεις, ὑποθεθείσας τριγωνικὰς, ἀπαιτεῖ δύο συνθήκας, δι' ἐκάστην δὲ τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς τῶν βάσεων, τρεῖς· ὥςτις ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν σφαιρῶν γωνιῶν ἐκίς τῶν πολυέδρων παρὰ σφαιρὰ διὰ Σ , ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τούτων πολυέδρων ἀπαιτεῖ $2 + 3(\Sigma - 3)$ ἴσας γωνίας καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, $\frac{1}{2} 3\Sigma - 7$ συνθήκας· καὶ οὐδεμία τῶν συνθηκῶν τούτων εἶναι περιττὴ ἢ περιεχομένη εἰς τὰς ἄλλας· διότι ἐνταῦθα θεωροῦμεν δύο πολυέδρα ὡς ἀπλῶς ἔχοντα ἰσαριθμοὺς κορυφὰς ἢ σφαιρὰς γωνίας, καὶ τότε χρειάζονται ἀκριβῶς, χωρὶς νὰ ληφῇ κἄμμία, αἱ $3\Sigma - 7$ συνθήκαι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν δύο σφαιρῶν· πλὴν ἐάν πρὸ πάντων ὑποθέταμεν ὅτι καὶ τὰ δύο εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἶδους, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἔχουν ἰσαριθμοὺς ἑδρας, καὶ αἱ ἑδραι αὗται παρὰ βλαλλόμεναι ἢ καθὲς μία μὲ τὴν καθὲς μίαν, ἰσαριθμοὺς πλευρὰς, ἢ ὑποθεσίς αὕτη ἤθελεν περιελίξει συνθήκας τινὰς εἰς τὴν περίσσω καθ' ἣν αἱ ἑδραι ἤθελεν ἔχει περισσεύρας τῶν τριῶν πλευρῶν, καὶ αἱ συνθήκαι αὗται ἤθελεν ἐλαττώσει τὸν ἀριθμὸν $3\Sigma - 7$, ὥςτις ἀντὶ τῶν $3\Sigma - 7$ συνθηκῶν ἤθελε χρειάζονται μόνον $\Lambda - 1$ · καὶ περὶ τούτου βλέπει τὴν II' σημείωσιν. Ἐνταῦθεν βλέπομεν τὴν εἶναι ἐκεῖνὸ τὸ ἐπίτερον κάμνει τόσον δύσκολον εἶναι καλὸν ἔρισμόν τῶν ὁμοίων σφαιρῶν· εἶναι ὅτι δυνατὸν νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τοῦ αὐτοῦ εἶδους, ἢ μόνον ὡς ἔχοντα ἰσαριθμοὺς σφαιρὰς γωνίας. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίσσω δὲν ὑπάρχει κἄμμία δυσκολία, καὶ εἶναι αἱ περιελειόμεναι εἰς τὸν ὁρισμὸν $3\Sigma - 7$ συνθήκαι ἀνάγκη νὰ πληροῦνται διὰ νὰ ᾖναι ὁμοία τὰ σφαιρὰ, καὶ ἐκ τούτου θέλει συναχθῇ πάλιν περισσύτερον ὅτι εἶναι καὶ τοῦ αὐτοῦ εἶδους. Τοῦ λοιποῦ, ὄντες πλήρως τοῦ ἡμετέρου ἔρισμοῦ, ἐσυνάξαμεν ὡς θεωρημα τὸν ἔρισμόν τοῦ Σίμωνος.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι δυνατόν νὰ παρασιωπηθῇ εἰς τὰ στοιχεῖα τὸ θεώρημα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν πολυέδρων· πλὴν ἐπειδὴ τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι καθ' ἑαυτὸ διάφορον (interessant), εὐχαρίστως καθεὶς θέλει εὖρη ἐνταῦθα τὴν ἀποδείξιν του διὰ τῆς ὁποίας καταστραίνεται πλήρης ἡ θεωρία τῶν πολυέδρων. (1)

Τὸ ζήτημα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν συνίσταται εἰς τὸ, ἐὰν μεταβαλλομένων τῶν κλίσεων τῶν ἐπιπέδων τὰ ἑκεία συγκροτῶν τὴν ἐπιφανείαν ἐνὸς δεδομένου κυρτοῦ πολυέδρου, ἡμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἄλλο δεύτερον κυρτὸν πολυέδρον περιεχόμενον ἀπὸ τὰ αὐτὰ πολυγωνικά ἐπίπεδα συνηνωμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν δίδεται ἐν δεύτερον πολυέδρον πληρὺν εἰς τὸ ζήτημα, τοῦτο δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ δεδομένου· διότι εἰς τὰ δύο ταῦτα πολυέδρα τὰ ἴσα ἐπίπεδα εἶναι διατεταγμένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν ὁλόγυρον τῶν ἀντιστοιχουσῶν σφαιρῶν γωνιῶν. Διὰ τοῦτο ἀπὸ τὸ προκείμενον ζήτημα πρέπει νὰ ἀπομακρύνωμεν τὰ συμμετρικά πολυέδρα.

Παρατηροῦμεν, δεύτερον, ὅτι, ἐὰν τὸ δεδομένον πολυέδρον περιέχῃ μίαν ἢ περισσοτέρας σφαιρᾶς τριπλᾶς γωνίας, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐκ φύσεως ἀμετάβλητοι, διότι ἡ γνῶσις τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιορίσιν τῶν ἀμοιβαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων των, ὅταν συνενενοῦνται εἰς σφαιρᾶν γωνίαν· δυνάμεθα διὰ τοῦτο ἀπὸ τὸ προτεθὲν σφαιρὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅλας τὰς τριγωνικάς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς τριπλᾶς σφαιρᾶς γωνίας (2)· καὶ ἐὰν τὸ ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην προκύπτον σφαιρὸν, ἔχῃ ἀκόμη σφαιρᾶς τριπλᾶς γωνίας, δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ τὰς ἀφαιρέσωμεν, καὶ τὸ αὐτὸ νὰ πράξωμεν ὥς οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς πολυέδρον εἰς ἐκείνην τῶν σφαιρῶν γωνιῶν τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συνενενοῦνται ὀλιγώτεραι ἀπὸ τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας. Ἐὰν, τῷ ὄντι, τὸ σχῆμα τοῦ προτεθέντος σφαιροῦ ἡμπορῇ νὰ ἀλλάξῃ δι' ὁποιωνδήποτε μεταβολῶν τῶν κλίσεων τῶν ἐπιπέ-

(1) Ἡ ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἐνταῦθα δίδομεν, εἶναι, ἐκτὸς τινῶν διασαφήσεων, ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ὑπὸ τοῦ Κ. Καυσχύου (Cauchy) παρουσιασθεῖσαν εἰς τὸ ἐντιστότον ἐν ἔτει 1812, τὴν ὁποίαν ἀνεκάλυψεν ἀναχωρῶν ἀπὸ μερικᾶς ιδέας αἱ ὁποῖαι ἐπρότεθον περὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποκειμένου εἰς τὴν πρώτην ἐκδοσιν τῶν Στοιχείων τούτων, σελ. 327 καὶ ἀκελ. Ο Σ.

(2) Ἐὰν ἡ αὐτὴ κόψις ᾖτον κοινὴ εἰς δύο σφαιρᾶς τριπλᾶς γωνίας εἰς τὴν πρώτην ἐργασίαν δὲν ἠθέλημεν ἀφαιρέσει εἰ μὴ μίαν τούτων. Ο. Σ.

δων του, ἡ ἀλλαγὴ αὐτὴ δὲν ἔμπορεῖ νὰ γένη εἰς τὰς ἀφαιρουμένας τριγωνικὰς πυραμίδας, ἀλλ' εἰς τὸ ἐναπομένον γέρειν μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ὅλων τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων. Εἰς τὰ ἀκέραια λοιπὸν ὁ λόγος θέλει εἶναι μόνον περὶ τῶν πολυέδρων εἰς τῶν ὁποίων τὰς γωνίας συνενεῶνται τοῦλάχιστον τέσσαρες ἐπίπεδοι γωνίαί.

Τούτου τεθέντος, ἔστω Σ (σχ. 286) ὁποιοδήποτε τῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Σ ὡς ἐκ κέντρου ᾧς γραμμῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν κοινὴν συνκρίνῃ τῆς ὁποιᾶς μὲ τὰ ἐπίπεδα τῆς γωνίας σχηματίζεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον $\Lambda\Gamma\Delta\epsilon\zeta$. Αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τούτου ΛB , $\text{B}\Gamma$, κτλ. μετροῦν τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΛB , $\text{B}\Gamma$, κτλ., καὶ ἐπομένως εἶναι ἀμετάβληται ὅσον διὰ τὰς γωνίας Λ , B , Γ , κτλ. τοῦ πολυγώνου, ἐκάστη τούτων εἶναι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως δύο προσκειμένων ἐπιπέδων τῆς γωνίας· οὕτως ἡ γωνία B εἶναι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων ΛB , $\Sigma\text{B}\Gamma$, τὴν ὁποίαν, διὰ τὸ σύντεμον, καλεῶμεν, κλίσιν ἐπὶ τῆς κλίσεως ΣB ὥσαυτως ἡ γωνία Γ εἶναι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως ἐπὶ τῆς κλίσεως $\Sigma\Gamma$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἡμποροῦμεν λοιπὸν νὰ κρίνωμεν περὶ τῶν μεταβολῶν τοῦ σχήματος ἐκάστης γωνίας, ἀπὸ τὰς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\epsilon\zeta$, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι σταθεραὶ, αἱ δὲ γωνίαὶ μεταβάλλονται καθ' ὅποιοιδήποτε τρόπον, φυλαττεμένης ὁμῶς πάντοτε τῆς κυρτότητος τοῦ πολυγώνου. Ἀλλ' εἰς τὰ πολύγωνα ταῦτα τὰ σημεῖα τῶν μεταβολῶν ἐπὶ τῶν γωνιῶν παρεσιάζουν ἀξιοσημειώτους νόμους, τοὺς ὁποίους ἀρχόμεθα νὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὰ ἀκόλουθα δύο λήμματα.

Λ Η Μ Μ Α Α'.

Ἀποθεισῶν ὅλων τῶν πλευρῶν ἐνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου τῶν ΛB , $\text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , ἐκτὸς τῆς τελευταίας ΛZ , ἐὰν μεταβληθῇ μία τῶν ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν ΛZ γωνιῶν $\text{B}\Gamma$, ΔE , ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι μένουσιν σταθεραί· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΛZ θέλει μὲν αὐξάνει ἐὰν ἡ γωνία αὐξάνῃ, θέλει δὲ ὀλιγοσεύει ἐὰν ἡ γωνία ὀλιγοσεύῃ· ὑποτίθεται περιπλέον εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ὅτι τὸ πολύγωνον εἶναι κυρτὸν πρὶν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σχήματός του. σχ. 286.

Ὡς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι μεταβάλλεται ἡ γωνία B , ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι τρεῖς Γ , Δ , E , μένουσιν σταθεραί· ἐὰν ἐπιτευχθῇ ἡ BZ , τὸ σχῆμα $\text{B}\Gamma\Delta\epsilon\zeta$ δὲν θέλει δοκιμάσει καμμίαν μεταβολὴν καὶ ἡ BZ θέλει μένει σταθερά. Θέλωμεν ἔχει λοιπὸν σφαιρικὸν τριγώνον τὸ ΛBZ ,

τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ AB, BZ , εἶναι σταθεραὶ, καὶ εἰς τὸ ὅποιον ἡ γωνία ABZ μεταβάλλεται τὴν αὐτὴν ποσότητα ὅσην καὶ ἡ γωνία $AB\Gamma$ τοῦ πολυγώνου. διότι τὸ μέρος $ZB\Gamma$ μένει σταθερόν. Τώρα, κατὰ τὰς γνωσθ. ιδιότητας (1), ἡξιοῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ AZ θίλει αὐξάνει ἐάν ἡ γωνία ABZ αὐξάνῃ, καὶ θίλει ὀλιγοστέλει ἐάν ἡ γωνία ABZ πύσῃ τὸ ἴδιον.

Λε. ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ γωνία Γ μεταβάλλεται, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι: τρεῖς B, Δ, E , μένουσιν σταθεραὶ· ἐάν ἀρχῶνται αἱ διαγωνίαι $AZ, Z\Gamma$, φανερόν ὅτι αἱ διαγωνίαι αὗται θίλουν μένει σταθερὰ καὶ ὡς καὶ αἱ γωνίαι $A\Gamma B, Z\Gamma \Delta$ θέλουσι εἶναι ἀμεταβλητὰς, ὡς καὶ οἱ ὅμοιοι τρίγωνον τὸ $A\Gamma Z$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ $A\Gamma, \Gamma Z$ εἶναι σταθεραὶ, καὶ εἰς τὸ ὅποιον ἡ γωνία $A\Gamma Z$ μεταβάλλεται τὴν αὐτὴν ποσότητα ὅπου καὶ ἡ γωνία Γ τοῦ πολυγώνου· ὅθεν εὐσχεύομεν ὅτι ἡ πλευρὰ AZ θίλει αὐξάνει ἐάν ἡ γωνία Γ αὐξάνει, καὶ θίλει ὀλιγοστέλει ἐάν ἡ γωνία Γ πύσῃ τὸ ἴδιον.

Φανερόν ὅτι ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἡλπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν μεταβολὴν μιᾶς τῶν δύο γωνιῶν Λ καὶ Γ , καὶ ὅτι εἶναι χώρας διὰ κάθε σφαρικὸν πολύγωνον περισσοτέρων ἀπὸ τρεῖς πλευρῶν. διὰ τοῦτο εἰς ὅλκας τὰς περιπτώσεις τὸ συμπέρασμα θίλει εἶναι σύμφωνον μὲ τὴν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως, φθάνει μόνον τὸ πολύγωνον νὰ ᾖ καὶ κυρτόν πρὶν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ στήματος· του. Ο πεπλορισμός αὗτος εἶναι ἀνεγκλιτός, διότι, ἐάν, παρ' εἰπεῖν, ἡ γωνία Γ ὀλιγοστεύει ἕως οὗ ἡ σιγματὴ Z νὰ πύσῃ ἐπὶ τῆς διαγωνίου AE , τότε ἡ AZ ἤθελον εἶναι ἐλαχίστην καὶ, ἐάν ἐκ ταύτης τῆς σιγματῆς, ἀκολουθοῦσε νὰ ὀλιγοστεύῃ ἡ γωνία E , φανερόν ὅτι ἡ πλευρὰ AZ ἤθελον αὐξάνει ἀντὶ νὰ ὀλιγοστεύῃ πάλιν τότε, ἐπειδὴ ἡ γωνία AZE γίνεται εἰσέχουσα, τὸ πολύγωνον ἤθελον παύσαι τοῦ νὰ ᾖ καὶ κυρτόν.

Πόρισμα. Τῶν αὐτῶν καμμένων, ἐάν πολλὰ τῶν ἀμεταβλητῶν εἰς τὴν πλευρὰν AZ γωνιῶν αὐξάνουσιν, καὶ οὐδεμίαν τούτων ὀλιγοστεύῃ, ἡ πλευρὰ AZ ἐξ αἰτίας ὅλων ὁμοῦ τῶν μεταβλητῶν ἀνεγκλιῶς θίλει αὐξήσεται. Τὸ ἐναντίον ἀκολουθεῖ ὅταν πολλὰ τῶν ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν AZ γωνιῶν ὀλιγοστεύουσιν, καὶ οὐδεμίαν τούτων αὐξάνῃ.

Διότι, ἐάν ἐξ αἰτίας τῆς τυτοχρήνου αὐξομενίσσεως, αἱ γωνίαι A, B, Γ , κτλ. τοῦ πολυγώνου, τρεφθοῦν εἰς A', B', Γ' , κτλ. δυνάμειαν νὰ μεταβῶμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τὸ πρῶτον πολύγωνον εἰς τὸ μὴ περιέχον πάρεξ μίαν μεταβεβλημένην γωνίαν A' ἀπὸ τούτου εἰς τὸ μὴ περιέχον πάρεξ τὰς δύο μεταβεβλημένας γωνίας A'

(1) Η προτάσις αὕτη δεικνύεται καθ' ὅν τρόπον καὶ ἡ Γ' τοῦ A' β.βλ. διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα. Ο. Σ,

καὶ Β', καὶ οὕτως ἐρεξῆς. Τώρα εἰς ἑκάστην τῶν μεταβάσεων τούτων ἡ ἐφαρμογὴ τῆς προτάσεως εἶναι φανερά, καὶ φέρει πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Λ Η Μ Μ Α Β'.

Ἐὰν δεδομένου σφαιρικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποῦ αἱ πλευραὶ εἶναι σταθεραὶ καὶ ὑπὲρ τὰς τρεῖς, μεταβάλλωμεν τὰς γωνίας καθ' ὅποιονδ' ἔποτε τρόπον, χωρὶς ὅμως τὸ πολύγωνον νὰ παύσῃ τοῦ νὰ ᾖναι κυρτόν· ἔὰν ἀκολουθῶς θέσωμεν τὸ μὲν σημεῖον $\vdash$ εἰς τὴν κορυφὴν καθ' ἣν αὐξανομένης γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον $\dashv$ εἰς τὴν κορυφὴν καθ' ἣν ἐλαττουμένης, καὶ δὲν θέσωμεν κανὲν σημεῖον εἰς τὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι μένουσιν σταθεραί· λέγω ὅτι κάμνοντες τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου, πρέπει νὰ εὕρωμεν τέσσαρας τοῦλάχιστον ἀλλαγὰς σημείου ἀπὸ τὴν μίαν κορυφὴν εἰς τὴν ἀκολουθοῦσαν.

Τῷ ὄντι· ἔστω ἔάν ν ᾖναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, δὲν ἡμποροῦν νὰ ὑπάρχουν ν — 2 ἀκολουθοῦν γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἐνταύτῳ νὰ αὐξάνουν, ἢ αἱ μὲν νὰ αὐξάνουν αἱ δὲ νὰ μένουσιν σταθεραί· διότι ἔὰν μία τῶν δύο τούτων περιστάσεων ἐθίδετο, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ παραβρόντος λήμματος, ἤθελεν ἀκολουθεῖν ὅτι ἡ ἀπέναντι εἰς τὰς ν — 2 ταύτας γωνίας πλευρὰ τοῦ πολυγώνου θὰ αὐξανε· συνέπεια ἐναντία εἰς τὴν ὑποθεσιν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι σταθεραί. Διὰ λόγον παρόμοιον δὲν ἡμπορεῖ νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ν — 2 ἀκολουθοῦν γωνίαι ἐλιγιστεύουν ἐνταύτῳ ἢ ὅτι μερικαὶ ἐλιγιστεύουν, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι μένουσιν σταθεραί. Εἰς τὴν σειρὰν λοιπὸν τῶν ν — 2 ἀκολουθῶν γωνιῶν πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τοῦλάχιστον μία ἀλλαγὴ σημείου· πολὺ δὲ περισσότερον τὴν ἀλλαγὴν ταύτην πρέπει νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ν ἀκολουθῶν γωνιῶν ὅταν κάμωμεν ὅλον τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου.

2ον Αἱ μεταβολαὶ εἰς τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου δὲν ἡμποροῦν νὰ ᾖναι τοιαῦται, ὥστε νὰ παρυσιάζουν μόνον μίαν σειρὰν σημείων $\vdash$ καὶ μίαν σημείων $\dashv$, καὶ οὕτω νὰ μὴ ὑπάρχουν πᾶρεξ δύο ἀλλαγὰς σημείου εἰς ὅλον τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου.

Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν, ὅτι Α, Β, Γ εἶναι αἱ τρεῖς σημειωμέναι μὲ τὸ σημεῖον $\vdash$ γωνίαι, καὶ Δ, Ε, Ζ, Η αἱ τέσσαρες σημειωμέναι μὲ τὸ σημεῖον $\dashv$ (σχ. 287) (ἡ ὑπόθεσις αὕτη περιλαμβάνει ἐκείνην καθ' ἣν ἤθελεν εἶναι μικρότερος ἀριθμὸς σημείων εἰς ἑκάστην σειρὰν, ἐξ αἰτίας τοῦ ἀμεταβλήτου μερικῶν γωνιῶν). Ἐὰν τὸ σχῆμα παριστάνῃ τὴν πρώτην κατάστασιν τοῦ πολυγώνου, ἡ διαγωνίος ΗΔ πρέπει νὰ αὐξάνῃ ὅταν αὐξάνουν ὅλαι αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, ἢ μόνον μερικαὶ τούτων· ἀλλ' ἡ αὕτη διαγωνίος ΗΔ ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ πολύγωνον ΗΖΕΔ, τοῦ ὁποῦ αἱ

ἄλλαι πλευραὶ εἶναι σταθεραὶ, πρέπει νὰ ὀλιγοσεύῃ ἐν ᾧ ὀλιγοσεύουσιν αἱ γωνίαι Z καὶ E, ἢ τοῦλάχιστον νὰ μὲνῃ σταθερὰ, εἰάν ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας Δ, Ε, Ζ, Η, αἱ δύο Δ καὶ Η, ἢ μὲνεν μία τούτων, ὀλιγοσεύουσιν· ἡ περὶ ἧς ὀλίγως λειπὸν ὑπόθεσις εἶναι ἀσύστατος· ὅθεν ἡ μεταβολὴ τῶν γωνιῶν δὲν ἤμπορεῖ νὰ ᾔῃαι τοιαύτη ὥστε μόνον νὰ παρουσιάξῃ δύο σειρὰς τὴν μὲν συγκειμένην ἀπὸ σημεία +, τὴν δὲ ἀπὸ σημεία —.

3ον Ἀδύνατον προσίτι κείμεντες τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου νὰ εὗρωμεν τρεῖς ἐκτὸς σειρὰς σημείων + καὶ σημείων —· διότι, εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη σειρὰ ἤθελον εἶναι τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ ἡ μία ἤθελεν ἀκολουθεῖ μετὰ τὴν ἄλλην, ὥστε δὲν ἤθελον σχηματίζει πᾶρεξ μίαν μόνην σειρὰν· ὥστε εἰς τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου δύο πραγματικῶς ἤθελον εἶναι αἱ σειραὶ, ἡ μία συγκειμένη ἀπὸ σημεία +, καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ σημεία —· πᾶν γὰρ τὸ ἐπὶ τὸν ἀπεδείξαμεν ἀδύνατον.

Λειπὸν τέλες πάντων αἱ ἀλλὰ καὶ τοῦ σημείου τὰς ὁποίας κείμεντες τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου θέλωμεν εὑρεῖν, πρέπει νὰ ᾔῃαι τοῦλάχιστον τέσσαρες τὸν ἀριθμόν.

Πόρισμα. Ὅτι ἀπεδείξαμεν διὰ τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα, ἀμείως ἐφαρμόζεται εἰς τὰς σφαιρὰς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦν τὰ πολύγωνα ταῦτα. Ὅθεν, δευτέρας μιᾶς κυρτῆς σφαιρᾶς γωνίας, εἰς τὴν ὁποίαν συνενεῦνται ὑπὲρ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, εἰάν καθ' ὁποῖονδήποτε τρόπον μεταβληθῶσιν αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κόψεων, χωρὶς ὅμως νὰ παύσῃ ἡ σφαιρὰ γωνία τοῦ νὰ ᾔῃαι κυρτή· καὶ εἰάν τεθῇ ἐφ' ἐκάστης κόψεως τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον —, καθὼς ἡ κλίσις ἐπὶ ταύτης τῆς κόψεως αὐξάνει ἢ ὀλιγοσεύει, καὶ αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις μένει σταθερὰ δὲν σημειωθεῖν μὲ κένον σημεῖον, λέγω ὅτι γενεσμένου τοῦ γύρου τῆς σφαιρᾶς γωνίας, πρέπει νὰ ἀπαντηθῶσι τοῦλάχιστον τέσσαρες ἀλλὰ καὶ σημεία ἀπὸ τὴν μίαν κόψιν εἰς τὴν ἀκόλουθον.

Διὰ τῆς προτάσεως ταύτης καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Εὐλήρου περὶ τῶν πολυέδρων (25, 7), δυνατόν ἐστι νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἐπόμενον θεώρημα καθ' ὅλην τὴν γενικότητα.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Διόεντος ἐνὶς κυρτοῦ πολυέδρου, εἰς τοῦ ὁποίου τὰς σφαιρὰς γωνίας συνέρχονται ὑπὲρ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ἀδύνατον νὰ μεταβληθῶν αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων τοῦ πολυέδρου τούτου, ὥστε νὰ προκύβῃ δει-

τερον πολυέδρον σχηματισμένον μετὰ αὐτὰ ἐπίπεδα καὶ εὐθὺ διατεταγμένα πρὸς ἀλλήλα καθὼς εὐρίσκονται εἰς τὸ δοθεῖν.

Αἰὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν ταύτην, πρέπει νὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις, ἐκείνην καθ' ἣν μεταβάλλομεν τὰς κλίσεις ἐπὶ ὧν τῶν κόψεων, καὶ ἐκείνην καθ' ἣν μερικὰς τῶν κλίσεων τούτων.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

Αἰς ὑποθέσωμεν ὅτι μεταβάλλομεν ἐν αὐτῷ τὰς κλίσεις ἐπὶ ὧν τῶν κόψεων, καὶ αἰς καλέσωμεν N τὴν ὅσον ἀριθμὸν τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ἐπείας κἀννοῦντες τὸν γόρυν ἐκάστης σφραῖς γωνίας θελομεν εὖρη μεταβαίνοντες ἀπὸ μίαν κόψιν εἰς τὴν ἀκολουθίαν.

Ἰδίδμεν εἰς τὸ Β' λήμμα ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου, δὲν ἤμπερ εἶναι μικρότερος τοῦ τέσσαρα διὰ κάθε σφραῖν γωνίαν.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Σ τὸν ἀριθμὸν τῶν σφραῖν γωνίων, ὅσων ἔχει $N > 4$, τοῦ σημείου $>$ μὴ ἀποκλείοντες τὴν ἰσότητά.

Παρατηρῶ τώρα ὅτι δύο ἐφεξῆς κόψαι μιᾶς σφραῖς γωνίας ἀντικουν πάντοτε εἰς μίαν ἑῴαν τοῦ πολυέδρου, καὶ δὲν ἀντικουν παρὰ εἰς μίαν μόνην· ὁ ὅλος λοιπὸν ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ἐπείας ἡθ' ἄραμεν παρατηρήσει ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς κόψεων κάθε σφραῖς γωνίας, πρέπει νὰ ἰσῶται μετὰ τὴν ὅσον ἀριθμὸν τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τῶν παρατηρουμένων ἐπὶ τῇ ἐφεξῆς πλευρῶν ἐκάστης ἑῴας· διότι δὲν δίδεται κῆρυμνα ἀλλαγὴ σημείου εἰς τὸ ἐν σύστημα ἥτις νὰ μὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς παρεμφαν ἀλλαγὴν εἰς τὸ ἄλλο.

Τώρα, διὰ κάθε τριγωνικὴν ἑῴαν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου δὲν ἤμπερ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δύο· διότι ἴπως· δέποτε καὶ ἂν τρεθεῖν τὰ σημεία τῆς σφραῖς $++$ ἢ $+-$ $+-$, δὲν συνάγινται παρὰ δύο ἀλλοαχὰ σημεία.

Διὰ κάθε τετραγωνικὴν ἑῴαν, αἱ ἀλλοαχὰ τοῦ σημείου εἶναι τὸ πολὺ τέσσαρες τὸν ἀριθμὸν· τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον.

Ἐν γίνεαι, ἔὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μιᾶς ἑῴας ἦναι ἄρτιος $= 2n$, ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ἐπείας κἀννοῦντες τὸν γόρυν τῶν πλευρῶν ἤμπερ εἶναι νὰ εὖρωμεν, εἶναι $2n$ · τοῦτο δὲ ἀκολουθεῖ ὅταν αἱ πλευραὶ φέρουν ἐναλλάξ τὰ σημεία $+$ καὶ $-$.

Ἀλλ' ἔὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μιᾶς ἑῴας ἦναι περιττός $= 2n+1$, ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου ὅσων εἶναι μόνον $2n$ · διότι ἔὰν εἰς τὰς πλευρὰς δοθεῖν ἐναλλάξ τὰ σημεία $+$ καὶ $-$, ἡ πρώτη καὶ ἡ τελευταία ἐναγκαλῶς θέλουν ἔχει

τὸ αὐτὸ σημείον· διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου οἶλεται εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν κατὰ μεγέθη·

Τούτου τεθέντος, ἔστω α ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων, β ὁ τῶν τετραπλευρῶν, γ ὁ τῶν πενταγώνων, κτλ. τῶν συγκροτούντων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δεδομένου πολυέδρου· ἐκ τῶν εἰρημένων ἔπεται ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ἐπείας καμνόντες τὸν γύρον ἐκάστης ἑδρας θέλομεν παρατηρήσει, δὲν δύναται νὰ ᾔηται μείζων τοῦ 2α διὰ τὰς τριγωνικάς ἑδρας· τοῦ 4β διὰ τὰς τετραγωνικάς, τοῦ 4γ διὰ τὰς πενταγωνικάς, τοῦ 6δ διὰ τὰς ἑξαγωνικάς. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν

$$N < 2\alpha + 4\beta + 4\gamma + 6\delta + 8\epsilon + 8\zeta + 8\eta + \text{κτλ.}$$

Ἔστω Α ὁ ἀριθμὸς τῶν κοψέων τοῦ πολυέδρου, καὶ Η ὁ τῶν ἑδρῶν του, οἰόμεν ἔχει·

$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + 7\epsilon + 8\zeta + 8\eta + \text{κτλ.}$$

$$H = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \text{κτλ.}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου, $\Sigma + H = 2$ · λοιπὸν $4\Sigma = 8 + 4A - 4H$, καὶ τῶν ἀντιστοιχωγῶν γενομένων θίγει εἶναι·

$$4\Sigma = 8 + 2\alpha + 4\beta + 6\gamma + 8\delta + 10\epsilon + \text{κτλ.}$$

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῆς τιμῆς ταύτης μετὰ τὸ ἥδη εὑρεθὲν δριμύνηται·

$$N < 4\Sigma - 8.$$

Ἀλλ' αἱ δύο ἀνισότητες $N > 4\Sigma$ καὶ $N < 4\Sigma - 8$ ἀδύνατον νὰ συνυπάρχωσι· ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι νὰ μεταβληθῶσιν ἐν αὐτῷ ὅτι αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κοψέων τοῦ πολυέδρου, χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ συναρμολογία (coherence) τῶν ἐπιπέδων τῶν σχηματιζόντων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

Ἀς ὑποθώμεν τώρα ὅτι δὲν μεταβάλλονται ὅλκι ἐν αὐτῷ αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κοψέων, ἀλλ' ὅτι μερικαὶ τούτων μένουσιν σταθεραί.

Ἔστω ΖΙ (σχ. 204) μία τῶν κοψέων τούτων· ἡμπερὺμεν νὰ τὴν νοήσωμεν ἀφηρημένην, καὶ τὰς δύο προσκειμένας ἑδρας ΖΙΗ, ΕΖΙΘ ἐνωμένας εἰς μίαν μόνην μὴ ἐπίπεδον περατωμένην ἀπὸ τὴν ἀμεταβλήτου μορφῆς περίμετρον ΓΖΗΘΙ. Ἀς καλέσωμεν Σ', Η' καὶ Α' ὅτι ἀπογίνονται εἰς ἀριθμοὶ Σ, Η καὶ Α μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν μιᾶς κοψέως· θέλομεν ἔχει $H' = H - 1$, καὶ $A' = A - 1$ · περιπίπτον ἔχουμεν $\Sigma' = \Sigma$, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν στερεῶν γωνιῶν εἶναι ὁ αὐτός καὶ εἰς τὰ δύο στερεὰ· λοιπὸν $\Sigma' + H' - A' = \Sigma + H - A = 2$. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου ἔχει τὸν τόπον του εἰς τὸ νῦν πελυέδρον τὸ ὅποιον περιέχει μίαν κοψὴν ἐλιγώτερον, καὶ μίαν ἑδραν ἐλιγώτερον, διότι δύο ἑδραι ἐνώθησαν εἰς μίαν μόνην μὴ ἐπίπεδον.

Εάν από τὸ δεύτερον τοῦτο σκερῶν ἀφαιρέσωμεν ἀκόμη μίαν τῶν κόψεων ἐπὶ τῶν ὁμοίων ἢ κλίσις μένει ἀμεταβάλητος, ἢ ἀφαιρέσεις τῆς κόψεως ταύτης θέλει δώσει πάλιν ἀφορμὴν εἰς τὴν ἐνωσιν δύο προσεγγόντων (contiguës) ἑδρῶν εἰς μίαν μόνην· καὶ ὡσαύτως θέλομεν δεῖξει ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου ἔχει ἀκόμη τὸ τόπον τοῦ εἰς τὸ τρίτον σκερῶν τὸ προκύπτον ἀπὸ τῆν ἀφαιρέσεων δύο κόψεων.

Δυνάμεθα νᾶ ἐξακολουθῶμεν τὴν ἀφαιρέσιν ἔσων θέλομεν κόψεων, εἰς μίαν μόνην νᾶ μὴ συναφαιρῇται καμμία σκερὰ γωνία· καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου πάντοτε θέλει ἔχει τὸν τόπον τοῦ εἰς τὸ ἐναπομένον σκερῶν· τοῦτο δὲ ἡμπερὶ μὴν ἀκόμη νᾶ ἴδωμεν κατ' εὐθείαν καὶ γενικῶς, ἐξετάζοντες τὴν ἀποδείξιν τὴν ἐπὶ τῶν ἑδῶκαμεν εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου ἢ ἀποδείξεις αὐτῇ, τῶ ἐντι, δὲν ὑποθέτει ὅτι αἱ ἑδραὶ τοῦ πολυέδρου εἶναι ἐπίπεδοι· διὰ τοῦτο ἤθελον ἔχει ἐπίσης τὸν τόπον τῆς, καὶ ὅταν αἱ ἑδραὶ ἤθελον περαιοῦνται ἀπὸ περιμέτρους μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κειμένας· ἐκεῖνο μόνον ἐποῦ ὑποῖται εἶναι ὅτι καθὲν περιμέτρους, κατὰ τὴν κατασκευὴν μας, παριστάνεται ἀπὸ σφαιρικῶν πολύγωνων, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν πολυγώνων τούτων ἰσούται μὲ τὴν ἐπιφανείαν τῆς σφαίρας. Καὶ πάλιν δὲν εἶναι ἀναγκαζόν νᾶ ἦναι κυρτὰ ὅλα ταῦτα τὰ πολύγωνα· ἀρκεῖ νᾶ ἡμπερῇ νᾶ θεωρηθῇ καθὲν τούτων ὡς τὸ ἄθροισμα πολλῶν κυρτῶν πολυγώνων· τοῦτο δὲ ἀκολουθεῖ πάντοτε, ὅταν, διὰ τῆς ἀφαίρεσεως, πολλῶν κόψεων αἱ ἐποῖαι ἀνέλκυν εἰς τὸ πολυέδρον, πολλαὶ τῶν ἐπιπέδων ἑδρῶν ἐνέονται εἰς μίαν μόνην μὴ ἐπίπεδον· διότι τότε τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ὁποῖον παριστάνει ταύτην, σύγκειται ἀπὸ τῶ ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν κυρτῶν πολυγώνων τὰ ὁποῖα ἐπαράσχονεν τὰς ἀφαιρέσεις· ἑδρας.

Ας ἴδωμεν τώρα εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἐν ᾧ ἀφαιρῶνται αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ἐπὶ τῶν ἢ κλίσις δὲν μεταβάλλεται. συναφαιρῆται μία ἢ περισσότεροι σκεραὶ γωνίαι, εἴτε ἐπειδὴ αἱ κλίσεις ἐπὶ ὅλων τῶν κόψεων, εἰς ἐκάστην τῶν γωνιών τούτων, εἶναι ἀμετάβλητοι, εἴτε διὰ τὸ ἀδύνατον τῆς μεταβολῆς· τῶν κλίσεων τούτων ἐπὶ περισσοτέρων τῶν τριῶν κόψεων, καὶ τότε ἀναγκαστικῶς εἶναι σταθεραί.

Ας ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι δὲν ἀφαιρῆται πάρεξ μίαν σκερὰ γωνία, καὶ ἔστω μ. ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας ταύτης, ἢ τῶν κόψεων αἱ ἐποῖαι ἀπολήκυν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς. Αφαιρουμένης τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος σκερᾶς γωνίας, συναφαιρῶνται μ. κόψεις, καὶ αἱ μ. ἑδραὶ αἱ σχηματίζουσαι τὴν σκερὴν γωνίαν καταναστῶν εἰς μίαν μόνην· εἰς λοιπὸν καλέσωμεν Σ, Α', Η' ὅτι ἀπογίνονται οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τὴν ἀφαιρέσιν μιᾶς σκερᾶς γωνίας.

Θέλωμεν ἔχει $\Sigma' = \Sigma - 1$; $\Lambda' = \Lambda - \mu$, $\Pi' = \Pi - (\mu - 1)$. Ἐντεῦθεν συναγόμεν $\Sigma' + \Pi' - \Lambda' = \Sigma + \Pi - \Lambda = 2$. Τὸ θεώρημα λοιπὸν τοῦ Εὐκλήρου ἔχει ἀκρίβη τὸν τόπον του εἰς τὸ νέον σφαιρὸν.

Εἶναι τῶρα φανερὸν ὅτι ἡμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅσας σφαιρὰς γωνίας θέλωμεν τοῦ δεδομένου πολυέδρου, καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλήρου πάντοτε θέλει ἔχει τὸν τόπον του εἰς τὸ ἐναπομείνον σφαιρὸν· διότι ἀφαιρούμεν τὰς σφαιρὰς γωνίας ἀνὰ μίαν, ἔχομεν διαδοχικῶς διάφορα πολυέδρα, ἀπὸ τὰ ὅποια δύο ἐφεξῆς ὑπάρχονται εἰς τὴν περισσασιν τὴν ὁποίαν ἐξετάσαμεν.

Ἐν γένει λοιπὸν, ἐὰν ἀπὸ τὸ προτεθὲν πολυέδρον ἀφαιρεθεῖν ὅλαι αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁρίων ἢ κλίσις δὲν μεταβιβάλλεται, εἴτε διὰ τῆς ἀφαίρεσεως ταύτης ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν μείνῃ ὁ αὐτὸς, εἴτε γίνῃ μικρότερος, τὸ ἐναπομείνον πολυέδρον πάντοτε θέλει πληροῦ εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Εὐκλήρου, τοῦτ' ἔστιν, καλοῦντας σ, κ, α τὰς περισσότητας αἱ ὁποῖαι διὰ τὸ πολυέδρον τοῦτο ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς Σ, Π, Λ , τοῦ προτεθέντος, θέλωμεν ἔχει $\sigma + \kappa - \alpha = \Sigma + \Pi - \Lambda = 2$.

Ἀλλ' εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο σφαιρὸν, ὅλαι ἐνταύτῳ αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κόψεων, πρέπει νὰ μεταβιβεθῶν, ἐπειδὴ ἀγρεθέσαν ὅλαι αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁρίων ἢ κλίσις δὲν μεταβιβάλλεται· τὸ σφαιρὸν λοιπὸν τοῦτο ὑπάγεται εἰς τὴν πρώτην περισσασιν ἢ ταυτόχρονος λοιπὸν μεταβιβὴ ὅλων τούτων τῶν κλίσεων δὲν ἡμπορεῖ νὰ λάβῃ χώραν χωρὶς ἐλαβὴν τῆς φύσεως τοῦ πολυέδρου.

Λοιπὸν τέλος πάντων ὁποιονδήποτε κυρτὸν πολυέδρον, δὲν ἡμπορεῖ νὰ τρεφῇ εἰς ἄλλο κυρτὸν πολυέδρον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχεται ὑπὸ τῶν αὐτῶν πελυγωνικῶν ἐπιπέδων καὶ διατεταγμένων κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ εἰς ὡς πρὸς τὸ ἄλλο.

Τ Ε Λ Ο Σ Τ Ω Ν Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ε Ω Ν.



