

Σ Ε Ι Ρ Α Σ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΥΠΟ

Α. Μ. ΛΕΓΕΝΔΡΟΥ.

ΜΕΛΟΥΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ

ΤΑΓΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ,

ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΔΟΝΔΙΝΟΥ κ.τ.λ.

Μεταφρασθέντα ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ ἐκ τῆς δωδεκάτης
αὐτῶν ἐκδόσεως, ὑπὸ τοῦ

ΔΟΚΤΟΡΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΡΑΝΔΗΝΟΥ,

ΚΕΦΑΛΛΗΝΟΣ.

Εφόρου τῆς Ἰονίου Ἀκαδημίας, Δεκάνου τῆς Φιλοσοφικῆς

Σχολῆς, καὶ Προφέσσορος τῆς Ὑψηλοτέρας

Μαθηματικῆς.

Κ Ε Ρ Κ Υ Ρ Α Ι .

1829.

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

Ο ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΗΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΝΑΓΝΩΣΤΗΝ.

Ἰδοὺ ἐμβαίνει εἰς φῶς καὶ ὁ δεύτερος τόμος τῆς *Σοιχειώδους σειρᾶς τῶν Μαθηματικῶν*. Ο δεύτερος οὗτος τόμος περιέχει τὰ *Σοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τοῦ περιφήμου Λεγένδρου*.

Τὸ σύγγραμμα τοῦ Λεγένδρου εἶναι βέβαια τὸ καλύτερον *σοιχειῶδες σύγγραμμα τῆς Γεωμετρίας*. Ἀπὸ τοὺς ὅσοι πρὸ αὐτοῦ ἐγραψαν τὰ *σοιχεῖα* τῆς ἐπιστήμης τούτης, ἄλλοι μὲν ἀνέμιξαν τὰς γεωμετρικὰς ἀληθείας μὲ τὰς ἐφαρμογὰς των, μὴ εὐχασθέντες ὅτι ἡ ἀνάμιξις οὕτη εἶναι μέγα ἐμπόδιον εἰς τὴν πρόοδον τοῦ σπουδάζοντος τὴν Γεωμετρίαν· διότι πρέπει νὰ δαπανᾷ, ὅχι ὀλίγον καιρὸν, ἀν καὶ χωρὶς καρπὸν, εἰς ἀληθείας καὶ ὁποῖαι δὲν ἔχουν καμμίαν ἄμεσον σχέσιν μὲ τὸ ἀντικείμενον τῆς σπουδῆς του, καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἐντελής κατάληψις ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν καὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν ὁποίαν ἡ Γεωμετρία ἐφαρμόζεται. Ἄλλοι δὲ δὲν ἔπεσαν εἰς τὸ ἄτοπον τῶν πρώτων, πλὴν ἐκτὸς ὅτι εἰς τὰ συγγράμματά των δὲν φαίνεται ἐκείνη ἡ Γεωμετρικὴ ἀκρίβεια, οὐδὲ τακτικῶς ἐξέθεσαν τὰς διαφορὰς προτάσεις, ὥστε νὰ φαίνεται ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσις, ἀλλ' ὥς πρὸς τοῦτο δουλικῶς ἠκολούθησαν τὴν τάξιν τοῦ Εὐκλείδου, χωρὶς νὰ προσφέρουν ἰδιόν τι εἰς τὴν ἐπιστήμην· ἄλλοι τέλος πάντων ἐχάθησαν εἰς *Μεταφυσικὰς λεπτολογίας*, παρὰβλέψαντες τὰ οὐσιώδη, καὶ οὕτως ἐσκοτίζουν τὰρ ὅ,τι διεσάφισον τὰς ἐναργεστάτας προτάσεις πῆς Γεωμετρίας.

Ἀφοῦ δὲ εἰς τὴν Γαλλίαν ἄρχισαν νὰ προεδεῦσιν αἱ *Μαθηματικαὶ ἐπιστήμαι*, διάφοροι *σειραὶ*

σοιχείων Μαθηματικῆς ἐφάνησαν, μὲ περισσύτεραν τάξιν καὶ μέθοδον γραμμέναι, καὶ ἀρμόδια ἐπομένως εἰς τὴν σπουδάζουσαν Νεολαίαν.

Μεταξὺ τούτων διακρίνεται ἡ σοιχειώδης σειρά τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Λακροῦ (Lacroix): ὁ ἐνδοξος αὐτός Μαθηματικὸς ἀφ' οὗ εἰς τρεῖς μεγάλους τόμους συνήθροισε καὶ διέταξεν ὅ,τι ἀναφέρεται εἰς τὴν ὑψηλὴν Μαθηματικὴν, συνέγραψε καὶ πλήρη σοιχειώδη σειράν. Ἡ εὔσταξις τούτης εἰς τὰ λύκεια τῆς Γαλλίας, ἢ εἰς τὰς ἄλλας Εὐρωπαϊκὰς γλώσσας μετάφρασίς της, ἀρκετὰ ἀποδεικνύουν τὴν ἀξίαν της. Πρέπει ὁμῶς νὰ ὁμολογήσωμεν ὅτι ἂν καὶ ὁ Λακρός εἰς τὰ σοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τοῦ ἐφύλαξε τὴν ἀπαιτούμενην ἀκρίβειαν εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων, καὶ διὰ πολλὰ ὑπερέχει τὸ σῖνγγραμμά του ἄλλῃ σοιχειώδη συγγράμματα, τὰ σοιχεῖα ὁμῶς ταῦτα δὲν ἔχουσι τὸ πλήρες, καὶ ἐλλείπουσι πολλῶν ἀναγκαίων προτάσεων τῆς Γεωμετρίας. ἐν ᾧ δὲ εἰς τὸ σύγγραμμά του ἐπιγραφόμενον *essais sur l'enseignement* ἐδῶκε παροχγέλιμα δια τὴν συγγραφὴν σοιχείων Γεωμετρίας, ταῦτα ὁμῶς δὲν ἐφύλαξε, καὶ οὕτε τὴν τάξιν ἐπέτυχε.

Ὁ δὲ ἡμέτερος συγγραφεὺς εἰς τὸ σύγγραμμά του ἤνωσε τὸ πλήρες μὲ θάυμασίην τάξιν, καὶ φαίνεται ὅτι ἐβαλλεν εἰς πρᾶξιν ὅσα ὁ Λακρός παροχγέλλει εἰς τὸ εἰρημένον σύγγραμμά του. Ἡ μόνη προσεκτικὴ ἀνάγνωσις τοῦ συγγράμματος τοῦ Λεγένδρου ἤμπορεῖ νὰ δώσῃ μίαν ἰδέαν τῆς τάξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἐκτίθενται αἱ προτάσεις, καὶ ἡ ὁποία εἰς οὐδὲν ἄλλο σύγγραμμα παρατηρεῖται ὥστε διὰ ταῦτά του τὰ προτερήματα καὶ

ῥε ἄλλα περισσότερα τὸ σύγγραμμα τοῦ Δεγένδρου εἶναι κατὰ τὸ παρὸν τὸ καλλίτερον σοιχειώδες σύγγραμμα.

Ὅλα ταῦτα τὰ ὁποῖα καὶ ἡ ἰδία πείρα με ἐβεβαίωσε, με ἔκαμαν νὰ προτιμήσω τὸ σύγγραμμα τοῦ Δεγένδρου, ἐν ᾧ ἐμελετοῦσα νὰ δώσω εἰς τὸ ἔθνος μου σοιχεῖα Γεωμετρίας.

Εἰς τὴν μετάφρασίν μου δὲν ἔλλειψα νὰ προσθέσω τινὰς διασαφήσεις εἰς μερικὰς προτάσεις εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἀναγνώστης ἤμπορει νὰ ἀπαντήσῃ δυσκολίᾳς, ἠξεύρων ὅτι τὸ ἔθνος μας ἀκόμη ἐρεῖται τοιοῦτου εἶδους συγγραμμάτων, τὰ ὁποῖα, χρεῖας τυχούσης, νὰ συμβουλευέται ὁ σπουδάζων.

Ἀλλ' ἐκ δίδων τὸν παρόντα τόμον πρέπει νὰ ἀποκριθῶ εἰς τὴν κρίσιν τὴν ὁποίαν τινὲς ἐπέφερον διὰ τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Βουρδῶνος· διότι ἴσως καὶ διὰ τὴν Γεωμετρίαν τὴν αὐτὴν δέλου ἐπιφέρει : ὅτι, δηλαδή, ἡ Ἀριθμητικὴ αὕτη εἶναι ἐκτεταμένη, καὶ διὰ τοῦτο ὄχι ἀρμοδίᾳ εἰς τὴν νεολαίαν. Ἡ ἀπόκρισίς μου εἶναι ὅτι ἤμποροῦσα νὰ μεταφράσω ἄλλην συντομωτέραν καθὼς τὴν τοῦ Λακρῆου ἢ εἵτινος ἄλλου· πλὴν καὶ μὲν δὲν ἐβλεπα ἐξισουμέναν εἰς τὴν ἀξίαν με τὴν τοῦ Βουρδῶνος, ἡ ὁποία συνέσταται εἰς τὰς ἰδέας, εἰς τὴν μέθοδον, εἰς τὴν σαφήνειαν, καὶ εἰς ἄλλα προτερήματα, τὰ ὁποῖα οἱ μὴ κατ' ἐπιφάνειαν ἔχοντες ἰδέας ἐπάνω εἰς τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας, ἤμπορουν νὰ παρατηρήσουν· καὶ, διὰ νὰ μὴ πολυλογῶ, καθὼς ὁ συγγραφεὺς συνέγραψε τοιαύτην Ἀριθμητικὴν διὰ νέους " qui ont à subir des épreuves difficiles, et dont les premiers pas, dans la

5'
 carrière des sciences, doivent se faire d' une manière
 sûre et profitable « (*) ἤγουν· οἱ ὅποιοι μέλλουν νὰ
 ὑποβληθοῦν εἰς αὐτῆράς δοκιμασίας, καὶ τῶν
 ὁποίων τὰ πρῶτα βήματα εἰς τὸ σάδιον τῶν ἐπι-
 στημῶν, πρέπει νὰ γίνουν ἀσφαλῶς καὶ ἐπωφελῶς·
 οὕτω καὶ ἐγὼ τὴν ἐμετάφρασα διὰ τοὺς νέους
 ἑλλήνας οἵτινες ἀσφαλῶς θέλουν νὰ διατρέξουν
 τὸ εὐρύχωρον πεδίου τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν,
 καὶ μέλλουν νὰ ἀφιερωθοῦν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν
 ἀκριβῶν ἐπιστημῶν καὶ τῶν ἐφαρμογῶν των· δι'
 ἐκείνους ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἡ νέα Ἑλλὰς ἐλπίζει
 Εὐκλείδους καὶ Ἀρχιμήδους, καὶ εἰσαγωγεῖς τῶν
 ἐπιστημῶν εἰς τὴν ἀρχαίαν πατρίδα των. Ο και-
 ρὸς περιπλέον θέλει δείξει ἂν ἐπέτυχῃ εἰς τὴν
 ἐκλογὴν μου, καὶ ἂν ἡ εἰσαξις της εἰς τὴν σχολεῖα
 θέλῃ ὠφελήσει τὴν νεολαίαν ἢ ὄχι.

εὐτύχει.

Εἰδησις.

Αἱ δύο τριγωνομετρίαι εὐθύγραμμος
 καὶ σφαιρικὴ μετὰ τῶν σημειώσεων τοῦ
 Λεγένδρου ἐκδίδονται εἰς τὸν 5^{ον} τόμον.

(*) Βλῆτε Γαλ. ἐκδ. avertissement pag. 8.

ΕΙΔΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΟΣ.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδειξις τῆς θεωρίας τῶν πυραλ-
λῶν ὁποῖαν τὴν ἐπαρρήσιασμεν εἰς τὴν 3ην
ἐκδοσιν τοῦ παρόντος συγγράμματος καὶ εἰς τὰς
ἀκολουθοῦσας μέχρι τῆς 8.ης, δὲν ἦτον ἐλευθέρα
ἀπὸ πάσαν δυσκολίαν καὶ ἀντίρρησην, ἀπεφασί-
σαμεν, εἰς τὴν ἐννάτην ἐκδοσιν, νὰ ἀποκατα-
στήσωμεν τὴν θεωρίαν ταύτην ἐπὶ τῆς αὐτῆς
σχεδὸν βάσεως τοῦ Εὐκλείδου. Σκεφθέντες δὲ
μετὰ ταῦτα ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἀντικειμένου (τῶν
σκέψων μας τὴν ἀνάπτυξιν θέλομεν δῶπει εἰς
τὴν Β' σημειώσιν), εὐρήκαμεν δύο νέους τρό-
πους τοῦ ἀποδείκνυειν τὸ θεώρημα περὶ τῶν γω-
νιῶν τοῦ τριγώνου, χωρὶς τῆς βοηθείας οὐδενὸς
αἰτήματος (postulatum). Ἐπομένως κατεχωρίσθη-
μεν εἰς τὸ κείμενον τῆς παρούσης ἐκδόσεως μίαν
τούτων τῶν ἀποδείξεων, τὴν ἐλιγώτερον ἀπομα-
κρυνομένην τῶν κοινῶν ιδεῶν, καὶ ἡ ὁποία ἄλλως
δὲν φαίνεται περισσότερον δύσληπτος ἀπὸ τὴν
εἰς τὰς προλαβούσας ἐκδόσεις ἐκ τῆς τρίτης
μέχρι τῆς ὀγδόης δοθεῖσαν.

Ἀλλ' ἡ τις ἀξιολογία μεταβολὴ εἰς ταύτην
τὴν ἐκδοσιν ἀναφέρεται εἰς τὴν σεριότητα τῆς
τριγωνικῆς πυραμίδος. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην
ἀπεκαταστήσαμεν σχεδὸν ὡς τὴν ἐδώκαμεν εἰς
τὴν πρώτην ἐκδοσιν τούτων τῶν στοιχείων, ὡφε-
ληθέντες ὁμῶς ἀπὸ μίαν εὐτυχῇ ιδέαν τοῦ Κ.
Κουερβρέτου κατασηματάρχου εἰς Σαιν Μάλο· συ-
νίσταται δὲ εἰς τὸ νὰ καταστήσῃ ἴσα τὰ ὕψη τῶν ὑπε-
ρεχόντων καὶ ἐλλειπόντων πρισμάτων τῶν κατα-
σκευαζομένων εἰς τὰς δύο παραβαλλομένας πυρα-
μίδας. Μὲ τὸ μέσον τοῦτο ἡ ἀπόδειξις τῆς σεριότη-
της

τὸς τῆς πυραμίδος φαίνεται ἡγμένη εἰς τὸν ἑσχατοῦ βαθμὸν τῆς ἀπλότητος τοῦ ὀποίου εἶναι δεκτικὴ.

Ἐπειδὴ τέλος οἱ τριγωνομετρικοὶ πίνακες αἱ κατασκευασμένοι κατὰ τὴν δεκαδικὴν διαίρεσιν τοῦ τεταρτημορίου (quadrant) δὲν εἶναι τόσον διεσπαρμένοι ὅσοι· ἔφερόμενοι εἰς τὴν παλαιὰν διαίρεσιν ἰς περιφερείας, ἐσοχάσθημεν ὠφέλιμον νὰ ὑποσυνάψωμεν εἰς τὰ δοθέντα παραδείγματα τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὅποια ἤθελε δώσει ἡ χρῆσις τῶν παλαιῶν πινάκων.

Ὅστις τῶν ἀναγνωσῶν, τοῦλάχιστον εἰς τὴν πρώτην ἀνάγνωσιν, θέλει νὰ περιορισθῇ εἰς τὰ ἀπλᾶ στοιχεῖα, ἔμπορεῖ νὰ παραβλέψῃ τὰς σημειώσεις, παραρτήματα καὶ γενικῶς ὅ,τι εἶναι τυπωμένον εἰς μικροὺς χαρακτῆρας (*), ὡς ὀλίγον ὠφέλιμα ἢ ἀπικιτοῦντα βαθυτέραν τὴν σπουδὴν. Θέλει δὲ ἐπιστρέφει εἰς ταῦτα ὅταν τὸ κρίνῃ εὐλόγον, ἐκλέγων ὅ,τι ἤθελε τοῦ φανῇ ἀρμόδιον, καὶ τοῦτο κατὰ τὴν συμβουλὴν πεφωτισμένου τινὸς προφέσσороς.

Σ. Κ. Οἱ εἰς τὰ περιώριον εὐρισκόμενοι ἀριθμοὶ σημειοῦνται τὰς προτάσεις εἰς τὰς ὅποιας ὁ ἀναγνώστης πρέπει νὰ πηγαίῃ διὰ τὴν κατάληψιν τῶν ἀποδείξεων. Ὁ ἀριθμὸς, ὡς 4, σημειοῦναι τὴν δ' πρότασιν τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου. Ὁ ἀριθμὸς δὲ ὡς 20, 3 σημειοῦναι τὴν 3' πρότασιν τοῦ γ' βιβλίου. (**). Εἰς δὲ τὴν τριγωνομετρίαν τὰ ἄρθρα καὶ αἱ παραπεμπταὶ ἐσημειώθησαν διὰ ῥωμαϊκῶν χαρακτήρων.

(*) Ὅλα ταῦτα εἶναι τῶν ὄντι τυπωμένα εἰς τὴν γαλλικὴν ἐκδοσιν εἰς μικροὺς χαρακτῆρας· εἰς τὴν μετάφρασιν ταύτην δὲν ἔχοντα ταῦτο διὰ τὴν ὀλίσιν ἀναλόγων χαρακτήρων.

(**) Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἰς τὴν παρούσαν μετάφρασιν ἐτίθησαν εἰς τὴν ἰδίαν τῶν ἀποδείξεων.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΛΙΛΡΧ'ΑΙ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. **Η** Γεωμετρία είναι επιστήμη έχουσα ἀντικείμενον τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως.

Η ἐκτασις ἔχει τρεῖς διαστάσεις, μήκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Β'. Η γραμμὴ εἶναι μήκος χωρὶς πλάτος.

Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς καλοῦνται σημεῖα: τὸ σημεῖον λοιπὸν δὲν ἔχει ἐκτασιν.

Γ'. Η εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ πλέον σιμοτινὸς δρόμος ἀπὸ ἑν σημείου εἰς ἄλλο.

Δ'. Κάθε γραμμὴ ἥτις δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα οὔτε σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμᾶς εἶναι καμπύλη γραμμὴ.

Οὕτως ΑΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, ΑΓΔΒ εἶναι γραμμὴ κεκλασμένη ἢ σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμᾶς, καὶ ΑΕΒ εἶναι καμπύλη γραμμὴ σχ. 1.

Ε'. Ἐπιφάνεια εἶναι ὅ,τι ἔχει μήκος καὶ πλάτος, χωρὶς ὕψος ἢ πάχος.

Ζ'. Τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὅποιαν ἂν ληθῶσι κατ' ἀρίσκειαν δύο σημεῖα, καὶ ἐνωθῶσι τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη εὐρίσκεται ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν.

Ζ'. Κάθε επιφάνεια ήτις δὲν εἶναι ἐπίπεδος οὔτε σύνθετος ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας εἶναι κάμπυλη ἐπιφάνεια.

Η'. Στερεὸν ἢ σῶμα εἶναι ὅ,τι περιέχει ἐν ταύτῃ τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς ἐκτάσεως. —

Θ'. Οταν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ συναπαντῶνται ὡς AB, AF , ἡ ποσότης περισσότερον ἢ ἐλιγώτερον μεγάλη διὰ τῆς ὁποίας ἀπομακρύνονται αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι, ὅσον πρὸς τὴν θέσιν των, καλεῖται γωνία. Τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως ἢ τῆς κοινῆς τομῆς A εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας· αἱ δὲ γραμμαὶ AB, AF εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτῆς. σχ. 2.

Ἡ γωνία σημειώνεται ἐνίοτε μόνον διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς A , ἄλλοτε διὰ τριῶν γραμμάτων BAG ἢ GAB , τιθεμένου ὁμῶς τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον.

Αἱ γωνίαι, καλῶς καὶ αἱ ἄλλαι ποσότητες, εἶναι δεκτικαὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως· οὕτως ἡ γωνία ΔFE εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $\Delta FB, BFE$, καὶ ἡ γωνία ΔFB εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο γωνιῶν $\Delta FE, BFE$. σχ. 20.

Ι'. Οταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ AB συναπαντᾷ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν $ΓΔ$, εἰς τρόπον ὥστε αἱ προσκείμεναι γωνίαι BAG, BAD νὰ ἦναι ἴσαι μεταξύ των, ἡ ἑκτὴ τοῦτων τῶν γωνιῶν καλεῖται γωνία ὀρθή· ἡ δὲ γραμμὴ AB λέγεται κάθετος ἐπὶ τὴν $ΓΔ$. σχ. 3.

ΙΑ'. Κάθε γωνία BAG μικροτέρα τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία ὀξεύα· κάθε δὲ γωνία μεγαλυτέρα ΔEZ εἶναι γωνία ἀμβλεῖα σχ. 4.

ΙΒ'. Δύο γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι, ὅταν, κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον μακρὰν καὶ ἂν προεκτελῶσιν· τοιαῦτα εἶναι αἱ γραμμαὶ $AB, ΓΔ$.

II'. Σχήμα ἐπίπεδον εἶναι ἐπίπεδόν τι περίοριζόμενον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ γραμμῆς.

Εάν αἱ γραμμαὶ ᾗναι εὐθεῖαι, τὸ περιεχόμενον ἀπὸ αὐτὰς χωρίον καλεῖται σχῆμα εὐθύγραμμον ἢ πολυγώνον· αἱ δὲ γραμμαὶ ὁμοῦ λαμβανόμεναι σχηματίζουν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου σχ. 6.

IA'. Τὸ πολυγώνον ἐν τριῶν πλευρῶν εἶναι τὸ ἀπλοῦςταρον ἀπὸ ὅλα, καὶ ὀνομάζεται τρίγωνον. Τὸ ἐκ τεσσάρων πλευρῶν καλεῖται τετράπλευρον· τὸ ἐκ πέντε, πέντε γωνιών. Τὸ ἀπὸ ἑξ ἑξάγωνον, κ. τ. λ.

IE'. Καλεῖται τρίγωνον ισόπλευρον ἐκεῖνο ὁποῦ ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας σχ. 7.

Τρίγωνον ισοσκελές, τοῦ ὁποῦ αἱ δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι σχ. 8.

Τρίγωνον σκαληνόν, τοῦ ὁποῦ καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἀνισοί σχ. 9.

IC'. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο ὁποῦ ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν. II ἀπέναντι πλευρὰ εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν καλεῖται ὑποτείνουσα. Οὕτως ABΓ εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς Α, ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ σχ. 10.

IZ'. Μεταξὺ τῶν τετραπλευρῶν διακρίνονται.

Τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποῦ αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαί. (βλέπε τὴν Κ' πρότ. βιβλ. Α'.) σχ. 11.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας ὀρθὰς χωρὶς νὰ ἔχη τὰς πλευρὰς ἴσας (βλέπε τὴν αὐτὴν πρότ.) σχ. 12.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἢ ῥόμβος, τοῦ ὁποῦ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παραλλήλοι σχ. 13.

Τὸ ρομβοειδές, τοῦ ὁποῦ αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι χωρὶς αἱ γωνίαι νὰ ᾗναι ὀρθαί. σχ. 14.

Τέλος τὸ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ μόνον εἶναι παράλληλοι σχ. 15.

ΙΗ'. Καλεῖται διαγώνιος ἡ γραμμὴ ἥτις ἐνόνει τὸς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων γωνιῶν, τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΓ· σχ. 42.

ΙΘ'. Πολύγωνον ἰσόπλευρον εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Πολύγωνον ἰσογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Κ'. Δύο πολύγωνα εἶναι ἰσόπλευρα μεταξὺ τῶν ὅταν ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας ἀνὰ μίαν μίαν, καὶ θαμέναι κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τοὔτεστιν, ὅταν διατρέχοντες τὰς περιμέτρους τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, ἔχωμεν τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἴσην μὲ τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἄλλου, τὴν δευτέραν τοῦ ἑνὸς μὲ τὴν δευτέραν τοῦ ἄλλου, τὴν τρίτην μὲ τὴν τρίτην καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ αὐτὸ ἐννοεῖται διὰ δύο πολύγωνα ἰσογώνια μεταξὺ τῶν.

Εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίεσιν, αἱ ἴσαι πλευραὶ ἢ αἱ ἴσαι γωνίαι καλοῦνται πλευραὶ ἢ γωνίαι ὁμόλογοι.

Σ. Κ. Εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία ὁ λόγος θελεῖ εἶναι περὶ ἐπιπέδων σχημάτων ἢ χαρακωμένων ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Εξήγησις τῶν Ὁρῶν καὶ σημείων.

Ἀξίωμα εἶναι πρότασις καθ' ἑαυτὴν φανερά.

Θεώρημα εἶναι ἀλήθεια γινόμενη φανερά δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ καλουμένου ἀπόδειξις.

Πρόβλημα εἶναι ζήτημα τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν.

Ἀξιωμα εἶναι ἀλήθεια τὴν ὁποίαν μεταχειρίζομεθα συμβοληθῆναι διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος ἢ διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος.

Τὸ κοινὸν ὄνομα πρότασις ἀποδίδεται ἀδιαφόρως εἰς τὰ θεωρήματα, προβλήματα καὶ λήμματα.

Πόρισμα εἶναι συνέπεια πηγάζουσα ἀπὸ μίαν ἢ περισσότερας προτάσεις.

Σχόλιον εἶναι παρατήρησις γινομένη ἐπὶ μιᾷ ἢ περισσότερων προτάσεων προηγουμένων, σκοπὸν ἔχουσα νὰ δείξῃ τὸν δεσμόντων, τὴν ὀφειλάν των, τὸν περιορισμόν των, ἢ τὴν ἔκτασίν των.

Ἰσότητες εἶναι μία θέσις γινομένη εἰς τὴν ἐκφώνησιν πρότασις τινός, ἢ εἰς τὴν ὁδὸν μιᾷς ἀποδείξεως.

Τὸ σημεῖον $=$ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος: οὕτως ἢ ἐκφρασις $A = B$ σημειώνει ὅτι A ἴσον B .

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι A εἶναι μικρότερον τοῦ B γράφομεν $A < B$.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι A εἶναι μεγαλύτερον τοῦ B γράφομεν $A > B$.

Τὸ σημεῖον $+$ προφέρεται πλέον· σημειώνει δὲ τὴν πρόσθεσιν.

Τὸ σημεῖον $-$ προφέρεται μείον· σημειώνει δὲ τὴν ἀφαίρεσιν: οὕτως $A + B$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων A καὶ B . $A - B$ παριστάνει τὴν διαφορὰν των ἢ ὅ,τι μένει ἀφαιρέθentos B ἀπὸ A · παρομοίως $A - B + \Gamma$ ἢ $A + \Gamma - B$ παριστάνει ὅτι A καὶ Γ πρέπει νὰ προσεδοῦν, καὶ ἐκ τοῦ ὅλου νὰ ἀφαιρεθῇ B .

Τὸ σημεῖον $\times$ σημειώνει τὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως $A \times B$ παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ A πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ B . Ἀντὶ τοῦ σημείου $\times$ ἐνίοτε μεταχειρίζομεθα μίαν συγμῆν: οὕτως $A \cdot B$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $A \times B$. σημειώνεται πρὸς τὴν αὐτὴν γινόμενον χωρὶς παρένθεσιν οὐδενὸς σημείου διὰ AB . ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα ταύτην τὴν ἐκφρασιν παρ' ὅταν εἰς τὸν αὐτὸν κειρὸν δὲν ἔχωμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν

ἐκείνης τῆς γραμμῆς AB ἀποστάσις τῶν σημείων A καὶ B .

Ἡ Ἐκφρασις $A \times (B + \Gamma - \Delta)$ παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ A ἐπὶ τὴν ποσότητα $B + \Gamma - \Delta$. Ἐάν δὲ πρὶν νὰ πολλαπλασιάσωμεν $A + B$ ἐπὶ $A - B + \Gamma$, ἠθέλαμεν σημειώσαι τὸ γινόμενον οὕτω $(A + B)(A - B + \Gamma)$ · ὁ, τι περιέχεται μεταξύ παρενθέσεων θεωρεῖται ὡς μία μόνη ποσότης.

Ἐνας ἀριθμὸς ἔμπροσθεν μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς ποσότητος, χρησιμεύει ὡς πολλαπλασιαστῆς ταύτης τῆς γραμμῆς ἢ ταύτης τῆς ποσότητος· οὕτως διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ AB λαμβάνεται τρεῖς φορές, ἢ τὸ τριπλάσιον αὐτῆς γράφομεν $3AB$ · διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας A , γράφομεν $\frac{1}{2} A$.

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς AB σημειοῦνται διὰ $\frac{1}{2}$
 AB^2 · ὁ κύβος τῆς διὰ AB^3 . Ἐν οἰκείῳ τόπῳ θέλομεν ἐξηγήσαι τί σημαίνει ἀκριβῶς τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κύβος μιᾶς γραμμῆς.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{\quad}$ δεικνύει ἐξαγωγὴν ρίζης. Οὕτως $\sqrt{a}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ a . $\sqrt{(A \times B)}$ εἶναι ἡ ρίζα τοῦ γινομένου $A \times B$, ἢ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξύ A καὶ B .

AΞΙΩΜΑΤΑ.

1. Δύο ποσότητες ἴσαι μὲ μίαν τρίτην εἶναι ἴσαι καὶ μεταξύ των.

2. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἰδίου μέρους.

3. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν εἰς τὰ ὅποια διηρέθη.

4. Ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μίαν μόνον εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν.

Ὁ. Δύο μεγέθη, γραμμῇ, ἐπιφανείᾳ ἢ στερεόν, εἶναι
ἴσα εἴταν τιθέμενα τὸ ἐν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουσι
καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν.

Π Ρ Ω Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η,

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α,

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξὺ των.

Εἶω ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ,
καὶ ἡ ΗΘ ἐπὶ τὴν ΕΖ. λέγω ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΔ,
ΕΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξὺ των. σχ. 16.

Ας λαβῶσαι τὰ τέσσαρα διαστήματα ΓΑ, ΓΒ, ΗΕ,
ΗΖ ἴσα, τὸ διάστημα ΑΒ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ διά-
στημα ΕΖ, καὶ εἶναι δυνατόν ἡ γραμμὴ ΕΖ νὰ τεθῇ
ἐπὶ τῆς ΑΒ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ
εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Β. Αἱ δύο αὗται γραμμαὶ
αὕτως θεμελίαι θελοῦν ἐφαρμόσαι· διότι, ἀλλίως, ἥτοιλον
υπάρχει δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ
ἴπποδὲν εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. λοιπὸν τὸ σημεῖον Η
μέσον τῆς ΕΖ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου, Γ μέσου
τῆς ΑΒ. Αφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ΗΕ ἐφαρ-
μόσῃ μὲ τὴν ΓΑ, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΗΘ θέλει πέσει
ἐπὶ τῆς ΓΔ· διότι ἕς ὑποθέσωμεν, εἴναι δυνατὸν,
ὅτι πέσῃ ἐπὶ μιᾷς εὐθείας ΓΚ' διαφορετικῆς τῆς ΓΔ·
ἔπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ὀρ. 10. ἡ γωνία ΕΗΘ = ΘΗΖ,
πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΓΚ' = Κ'ΓΒ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΑΓΚ'
εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ, ἡ γωνία Κ'ΓΒ εἶναι μι-
κροτέρα τῆς ΒΓΔ· ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΓΔ =
ΒΓΔ· λοιπὸν ΑΓΚ' εἶναι μεγαλητέρα τῆς Κ'ΓΒ· λοιπὸν
ἡ γραμμὴ ΗΘ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾷς
γραμμῆς ΓΚ' διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· λοιπὸν πίπτει ἐπὶ
τῆς ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΕΗΘ ἐπὶ τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν ὅλα
αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι μεταξὺ των ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, ἥτις συναπαντᾷ μίαν ἄλλην ΑΒ, κάμνει μὲ αὐτὴν δύο γωνίας προσκειμένας ΑΓΔ, ΒΓΔ, τὸ ἄθροισμά τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας σχ. 17.

Εἰς τὴν σιγμὴν Γ, ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ κάθετος ΓΕ. Ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ· λοιπὸν ΑΓΔ + ΒΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΔ. Ἡ πρώτη τούτων εἶναι ὀρθή, αἱ δύο ἄλλαι κάμνουν ὁμοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΓΕ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Πόρισμα Α. Εὰν μία τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ὀρθή, ἡ ἄλλη θέλει εἶναι παρομοίως ὀρθή.

Πόρισμα Β'. Εὰν ἡ γραμμὴ ΔΕ ᾖ καθετός ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἀντιστρόφως ΑΒ θέλει εἶναι καθετός ἐπὶ τὴν ΔΕ. σχ. 18.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΕ εἶναι καθετός εἰς τὴν ΑΒ, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν προσκειμένην τῆς ΔΓΒ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ὀρθή, ἔπεται ὅτι ἡ προσκειμένη τῆς ΑΓΕ εἶναι ἐπίσης ὀρθή· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΕ = ΑΓΔ, λοιπὸν ΑΒ εἶναι καθετός ἐπὶ τὴν ΔΕ. σχ. 34.

Πόρισμα Γ'. Οἱ αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΖ, αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΖ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθὰς· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ ἐκείνου τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο εὐθείαι γραμμαὶ αἵτινες ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα ἐφαρμόζουσι εἰς ὅλην των τὴν ἑκτασιν, καὶ δὲν σχηματίζουν παρὰ μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμὴν.

Ἔστωσαν τὰ δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β κατὰ πρῶτον αἱ δύο γραμμαὶ δὲν πρέπει νὰ κάμνουν παρὰ μίαν μεταξὺ Α καὶ Β, διότι ἄλλῶς ἤθελον εἶναι δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. Ἀς ὑποθέσωμεν ἀκολουθῶς ὅτι προεκβολόμεναι αἱ γραμμαὶ αὗται, ἀρχίζουν νὰ χωρίζονται εἰς τὴν σιγμὴν Γ, καὶ ἡμὲν διευθύνεται κατὰ τὴν ΓΔ, ἡ δὲ κατὰ τὴν ΓΕ. Ἀς ἀξῶμεν εἰς τὴν σιγμὴν Γ τὴν γραμμὴν ΓΖ, ὥστε νὰ κάμνη μὲ τὴν ΓΑ ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΖ. Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΔ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΔ εἶναι ὀρθή πρ. 2. πόρ. 1. Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι παρομοίως γωνία ὀρθή. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΖΓΕ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾖ ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΖΓΔ· λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ αἵτινες ἔχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β κοινὰ δὲν ἔμπορουν νὰ χωρισθῶσιν εἰς κανὲν σημεῖον τῆς προεκβολῆς των· λοιπὸν δὲν σχηματίζουν παρὰ μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμὴν. σχ. 19.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΔ, ΔΓΒ, ἰσχυνομένην μὲ δύο ὀρθὰς αἱ δύο ἐξωτερικαὶ πλευραὶ ΑΓ, ΓΒ θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας. σχ. 20.

Ἐπειδὴ ἔαν ΓΒ δὲν ᾖ ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ, ἔστω ΓΕ αὕτη ἡ προεκβολή· τότε ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΕ

είναι εὐθεία, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma\Xi$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma\Β$ εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν $\Lambda\Gamma\Delta + \Delta\Gamma\Β$ εἶναι ἴσον μὲ $\Lambda\Gamma\Delta + \Delta\Gamma\Xi$, εἰάν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία $\Lambda\Gamma\Delta$, μένει τὸ μέρος $\Delta\Gamma\Β$ ἴσον μὲ τὸ ὅλον $\Delta\Gamma\Xi$, τὸ ὅποion εἶναι ἀδύνατον· λοιπὸν $\Gamma\Β$ εἶναι ἡ πρό-κβολή τῆς $\Lambda\Gamma$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε΄,

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Οσάκις δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ τέμνονται ὡς $\Lambda\Β$, $\Delta\Xi$, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. σχ. 27.

Διότι ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ $\Delta\Xi$ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Lambda\Gamma\Xi$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· καὶ ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ $\Lambda\Β$ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\Lambda\Gamma\Xi$, $\Β\Gamma\Xi$, εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $\Lambda\Gamma\Delta + \Lambda\Gamma\Xi$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $\Lambda\Gamma\Xi + \Β\Gamma\Xi$. ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς γωνίας $\Lambda\Gamma\Xi$, μένει ἡ γωνία $\Lambda\Gamma\Delta$ ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς $\Β\Gamma\Xi$.

Παρεμφαίως ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία $\Lambda\Gamma\Xi$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς $\Β\Gamma\Delta$.

Σχόλιον. Αἱ τέσσαρες γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὁλόγυρα μιᾷς σιγμῆς ἀπὸ δύο εὐθείας αἰτίνες τέμνονται ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς· διότι αἱ γωνίαι $\Lambda\Gamma\Xi$, $\Β\Gamma\Xi$ ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν δύο ὀρθάς, αἱ δὲ ἄλλαι δύο $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Β\Gamma\Delta$ ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν.

Ἐάν ὅσαι δῆποτε εὐθεῖαι $\Gamma\Lambda$, $\Gamma\Η$, κ.τ.λ. συναπαν-τῶνται εἰς μίαν σιγμὴν Γ , τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $\Lambda\Gamma\Β$, $\Β\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma\Xi$, $\Xi\Gamma\Ζ$, $\Ζ\Gamma\Α$, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς· διότι εἰς τὴν σιγμὴν Γ σχηματισθῶσι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι διὰ μέσου δύο

εὐθείων καθέτων μεταξύ των, τὸ αὐτὸ χωρίον θέλει πληροῦται τόσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ὀρθῆς γωνίας, ὅσον ἀπὸ τὰς διαδοχικῆς γωνίας $ΑΓΒ$, $ΒΓΔ$, κ.τ.λ. σχ. 22.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν, καὶ τὴν περιεχομένην ἀπὸ αὐτὰς γωνίαν ἴσην. σχ. 23.

Ἐστω ἡ πλευρὰ $ΑΒ$ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν $ΔΕ$, ἡ πλευρὰ $ΑΓ$ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν $ΔΖ$, ἡ γωνία $Α$ ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Δ$. Λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ θέλουν εἶναι ἴσα.

Τῶν ὄντι τὸ ἐν τούτων τῶν τριγώνων δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ὥστε ἰσχυρῶς νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ αὐτό. Καὶ κατὰ πρῶτον ἔαν ἡ πλευρὰ $ΔΕ$, τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς $ΑΒ$, τὸ σημεῖον $Δ$ θέλει πέσει εἰς τὸ $Α$, καὶ τὸ $Ε$ εἰς τὸ $Β$: ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία $Δ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Α$, ἀφ' οὗ ἡ πλευρὰ $ΔΕ$ τεθῇ ἐπὶ τῆς $ΑΒ$ ἡ πλευρὰ $ΔΖ$ θέλει λαμβεῖ πᾶν διεύθυνσιν τῆς $ΑΓ$. Περιπλέον $ΔΖ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $ΑΓ$. λοιπὸν τὸ σημεῖον $Ζ$ θέλει πέσει εἰς τὸ $Γ$, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ $ΕΖ$ θέλει ἐφαρμόσῃ ἀκριβῶς μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν $ΒΓ$. λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ΔΕΖ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ ἀξ. 5.

Πόρισμα. Ὅταν τρία τινὰ ᾖναι ἴσα εἰς δύο τρίγωνα, δηλαδή ἡ γωνία $Α = Δ$, ἡ πλευρὰ $ΑΒ = ΔΕ$, καὶ ἡ πλευρὰ $ΑΓ = ΔΖ$, ἡμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι καὶ τὰ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα, δηλαδή, ἡ γωνία $Β = Ε$, ἡ γωνία $Γ = Ζ$, καὶ ἡ πλευρὰ $ΒΓ = ΕΖ$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν καὶ τὴν προσκειμένην εἰς αὐτὰς πλευρὰν ἴσην, εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα.

Εἴτω ἡ γωνία B ἴση τῇ γωνίᾳ E , καὶ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ Z · ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ ἴση τῇ πλευρᾷ EZ · λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΔEZ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ σχ. 23.

Διότι, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπιθεσιν (superposition), ἄς τεθῇ ἡ EZ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς $B\Gamma$, τὸ σημεῖον E θέλει πῶς εἰς τὸ B , καὶ τὸ σημεῖον Z εἰς τὸ Γ . Επειδὴ ἡ γωνία E εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν B , ἡ πλευρὰ EA θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν BA . Οὕτως τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς BA . Παρομοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία Z εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Γ , ἡ γραμμὴ $Z\Delta$ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΓA , καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς πλευρᾶς ΓA . λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ τὸ ὅποιον πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐν τούτῳ ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν $BA, \Gamma A$, θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς των A . Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα $AB\Gamma, \Delta EZ$, ἐφαρμόζουσι, καὶ εἶναι ἐντελῶς ἴσα.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς ἰσότητος τριῶν πραγμάτων εἰς δύο τρίγωνα, τούτεσι, $B\Gamma = EZ, B = E, \Gamma = Z$, ἤρκεσθαι νὰ συνάξωμεν τὴν ἰσότητά των ἄλλων τριῶν, τούτεσι, $AB = \Delta E, A\Gamma = \Delta Z, A = \Delta$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς καθὲ τρίγωνον ὅποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Διότι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $B\Gamma$, παραδείγματος χάριν, εἶναι ὁ πλέον σιμωτινὸς δρόμος ἀπὸ τὸ B εἰς τὸ Γ ὁρ. 3. λοιπὸν $B\Gamma$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $BA + A\Gamma$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐν ἐντὸς ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ληφθῇ σημεῖον τι O , καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς

ΒΓ, αἱ εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΓ, τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν εὐθειῶν ἔλπει εἶναι μικρότερον ἐκείνου τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. ΑΒ, ΑΓ.

ο Δε προεκβληθῇ ἡ ΒΟ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ· εἰς Δ. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΟΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΟΔ + ΔΓ. πρό. 8. προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΒΟ, ἔχομεν $ΒΟ + ΟΓ < ΒΟ + ΟΔ + ΔΓ$ ἢ $ΒΟ + ΟΓ < ΒΔ + ΔΓ$.

Ἐχομεν παρομοίως $ΒΔ < ΒΑ + ΑΔ$ · προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΑΓ συνάγομεν $ΒΔ + ΔΓ < ΒΑ + ΑΓ$. Ἀλλ' εὐρήκαμεν $ΒΟ + ΟΓ < ΒΔ + ΔΓ$. Λοιπὸν, πολὺ περισσότερον $ΒΟ + ΟΓ < ΒΑ + ΑΓ$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ᾖναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἡ καθε μίᾳ μὲ τὴν καθε μίαν· ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία ΒΑΓ περιεχομένη ἀπὸ τὰς πρώτας, ᾖναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ, περιεχομένη ἀπὸ τὰς δευτέρας· λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου. σχ. 25.

Ας γένῃ ἡ γωνία ΓΑΗ = Δ, ἃς ληρῶ ἈΗ = ΔΕ, καὶ ἃς ἐπιτευχθῇ ΓΗ, τὸ τρίγωνον ΗΑΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ἐπεὶδὴ ἔχουν ἓκ τῆς κατασκευῆς μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων πρό. 6. ἔχομεν λοιπὸν ΓΗ = ΕΖ. Τώρα δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν τρεῖς περιπτώσεις, καθὼς τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἢ ἐντὸς τοῦ ἰδίου τριγώνου.

Πρώτη περίστασις. Ἡ εὐθεῖα γραμμή $HΓ$ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ $HI + IG$, ἡ εὐθεῖα γραμμή AB εἶναι μικροτέρα ἀπὸ $AI + IB$. λοιπὸν $HΓ + AB$ εἶναι μικροτέρον τοῦ $HI + AI + IG + IB$ ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, $HΓ + AB < AH + BG$. Εἰν ἀπὸ τὸ ἐν μέρει ἀφαιρέθῃ AB , καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἡ ἴση τῆς AH , μένει. $HΓ < BG$: ἀλλὰ $HΓ = EZ$. λοιπὸν θέλομεν ἔχει $EZ < BG$. σχ. 25.

Δευτέρᾳ περίστασις. Εἰν τὸ σημεῖον H πίση ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $BΓ$, φανερόν εἶναι ὅτι $HΓ$ ἢ ἡ ἴση τῆς EZ θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς $BΓ$. σχ. 26.

Τρίτῃ περίστασις. Τέλος εἰν τὸ σημεῖον H πίση ἐντός τοῦ τριγώνου $ABΓ$, θέλομεν ἔχει, κατὰ τὸ προλαβόν θεωρήμα, $AH + HΓ < AB + BΓ$. ἀφαιρέσειν ἀπὸ τὸ ἐν μέρος τῆς AH , καὶ ἀπὸ ἄλλο τῆς ἴσης τῆς AB , μένει $HΓ < BΓ$, ἢ $EZ < BΓ$ σχ. 27.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, εἰν αἱ δύο πλευραὶ AB , AG , τοῦ τριγώνου $ABΓ$ ἦναι ἴσαι μετὰς δύο πλευρὰς AE , AZ , τοῦ τριγώνου AEZ . εἰν, περιπλέον, ἡ τρίτη πλευρὰ GB τοῦ πρώτου τριγώνου ἦναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης EZ τοῦ δευτέρου, λέγω ὅτι ἡ γωνία BAG τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας EAZ τοῦ δευτέρου.

Διότι εἰν δὲν ἦναι μεγαλητέρα ἡ γωνία BAG τῆς EAZ , πρέπει νὰ ἦναι ἴση ἢ μικροτέρα: εἰν τὸ πρῶτον, ἡ πλευρὰ GB ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ EZ πρ. 6. εἰν τὸ δεῦτερον, GB ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς EZ : ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ἐναντιόονται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία BAG εἶναι μεγαλητέρα τῆς EAZ .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΑ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μετὰ τὴν κάθε μίαν.

Έξω ἡ πλευρὰ $AB = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$, $ΒΓ = ΕΖ$. λέγω, ὅτι
 θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν $A = Δ$, $B = E$, $Γ = Z$. σχ. 23.

Διότι ἐὰν ἡ γωνία A ᾖτον μεγαλύτερα τῆς γωνίας
 $Δ$, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ AB , $ΑΓ$, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς
 $ΔΕ$, $ΔΖ$, ἡ καθὲς μία μὲ τὴν καθὲς μίαν, ἤθελεν ἀκο-
 λουθήσει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ὅτι ἡ πλευρὰ
 $ΒΓ$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς $ΕΖ$. ἐὰν δὲ ἡ γωνία A ᾖτον
 μικρότερα τῆς γωνίας $Δ$, ἤθελεν ἀκολουθήσει ὅτι ἡ πλευρὰ
 $ΒΓ$ εἶναι μικρότερα τῆς $ΕΖ$. ἀλλὰ $ΒΓ$ εἶναι ἴση τῇ
 $ΕΖ$. λοιπὸν ἡ γωνία A δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾖται οὔτε
 μεγαλύτερα οὔτε μικρότερα τῆς γωνίας $Δ$. λοιπὸν εἶναι
 ἴση μὲ αὐτήν. Παρομοίως ἀποδείκνύεται ὅτι ἡ γωνία
 $B = E$, καὶ ἡ γωνία $Γ = Z$.

Σχόλιον. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι
 ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν: οὕτως αἱ ἴσαι γωνίαι A
 καὶ $Δ$ εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ 1Β'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν
 ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσαι.

Έξω ἡ πλευρὰ $AB = ΑΓ$, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει
 τὴν γωνίαν $Γ = B$. σχ. 28.

Ας ἀχθῇ ἡ γραμμὴ $ΑΔ$ ἐκ τῆς κορυφῆς A εἰς τὴν
 εὐθεῖαν $Δ$ μέσον τῆς βάσεως $ΒΓ$, τὰ δύο τρίγωνα $ΑΒΔ$,
 $ΑΔΓ$, θέλουσιν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθὲς
 μίαν μὲ τὴν καθὲς μίαν· τοῦτέστι $ΑΔ$ κοινὴν, $AB =$
 $ΑΓ$ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $ΒΔ = ΔΓ$ ἐκ τῆς κατασκευῆς·
 λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία B εἶναι
 ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Γ$.

Πόρισμα. Ἐν ἰσοπλευρὸν τρίγωνον εἶναι ἓν καὶ τὸ
 καὶ ἰσογώνιον, ὁμοίᾳ, ἔχει τὰς γωνίας τοῦ ἴσας.

Σχόλιον Η ισότης τῶν τριγώνων $ΑΒΔ$, $ΑΓΔ$ δεικνύει εἰς τὸ αὐτὸν καιρὸν ὅτι ἡ γωνία $ΒΔΔ = ΔΑΔ$, καὶ ἡ γωνία $ΒΔΑ = ΑΔΓ$. λοιπὸν αἱ δύο αὗται τελευταῖαι εἶναι ὁρθαί· λοιπὸν ἡ ἀγομένη γραμμὴ ἐκ τῆς κορυφῆς ἐνδὲς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, εἶναι κάθετος εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ διαιρᾷ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Εἰς ἓν τρίγωνον μὴ ἰσοσκελὲς ἀδιεφόρως λαμβάνεται ὡς βάσις ὅποιαδήποτε πλευρὰ, καὶ τότε ἡ κορυφή του εἶναι ἐκείνη τῆς ἀπέναντι γωνίας· εἰς τὸ ἰσοσκελὲς δὲμας τρίγωνον λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ πλευρὰ ἣτις δὲν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄλλων δύο.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ.

Ἀντιστρόφως εἰάν δύο γωνίαι εἰς ἓν τρίγωνον ᾗναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ θέλουσι εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Εἰς ἡ γωνία $ΑΒΓ = ΑΓΒ$ · λέγῶ ὅτι ἡ πλευρὰ $ΑΓ$ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν $ΑΒ$. σχ. 29.

Διότι εἰάν αἱ πλευραὶ αὗται δὲν ᾗναι ἴσαι, εἰς $ΑΒ$ ἡ μεγαλητέρα τῶν δύο. Ἀς ληφθῇ $ΒΔ = ΑΓ$, καὶ ἃς ἐπιζευχῇ $ΔΓ$ · ἡ γωνία $ΔΒΓ$ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση τῇ $ΑΓΒ$ · αἱ δύο πλευραὶ $ΔΒ$, $ΒΓ$ εἶναι, ἴσαι μὲ τὰς δύο $ΑΓ$, $ΓΒ$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ΔΒΓ$ προ. 6. ᾗθελον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $ΑΓΒ$ · ἀλλὰ τὸ μέρος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅλον· λοιπὸν δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ἀνισότης μεταξύ τῶν πλευρῶν $ΑΒ$, $ΑΓ$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ εἶναι ἰσοσκελές.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εκ δύο πλευρῶν ἐνδὲς τριγώνου, ἐκείνη εἶναι ἡ μεγαλητέρα ἣτις εἶναι ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας,

καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου ἡ μεγαλύτερα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς.

1.^{ον} Εἰς ἡ γωνία $\Gamma > B$, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ AB ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ εἶναι μεγαλύτερα τῆς πλευρᾶς AG ἀπέναντι τῆς γωνίας B . σχ. 30.

Ἀς γίνῃ ἡ γωνία $B\Gamma\Delta = B$. Εἰς τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$ ἔχομεν πρ. 13. $B\Delta = \Delta\Gamma$. ἀλλ' ἡ εὐθεία ἀγχιμμή AG εἶναι μικρότερα ἀπὸ $\Delta\Delta + \Delta\Gamma$, καὶ $\Delta\Delta + \Delta\Gamma = \Delta\Delta + AB = AB$. λοιπὸν AB εἶναι μεγαλύτερα τῆς AG .

2.^{ον} Εἰς ἡ πλευρὰ $AB > AG$, λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς AB θέλει εἶναι μεγαλύτερα τῆς γωνίας B ἀπέναντι τῆς AG . Διότι ἐὰν εἴχαμεν $\Gamma < B$, ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, $AB < AG$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἐὰν δὲ $\Gamma = B$, ἡθέλαμεν ἔχει πρ. 13. $AB = AG$, τὸ ὁποῖον ἀκόμη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ ᾖναι μείζων τῆς B .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐξ ἐνὸς δεδομένου σημείου A ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας ΔE , μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατόν νὰ ἀγθῇ εἰς ταύτην τὴν εὐθείαν. σχ. 31.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἀγθῶσι δύο AB καὶ AG ἄς προεκβάλλωμεν μίαν τούτων τὴν AB πρὸς ὅσην τινα $BZ = AB$, καὶ ἂς ἐπιζεύξωμεν $Z\Gamma$.

Τὸ τρίγωνον ΓBZ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$: ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓBZ εἶναι ὀρθή, καθὼς καὶ ἡ $\Gamma B A$, ἡ πλευρὰ ΓB εἶναι κοινή, ἡ δὲ $BZ = AB$. λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἔπεται ὅτι ἡ γωνία $B\Gamma Z = B\Gamma A$. Ἡ γωνία $B\Gamma A$ εἶναι ὀρθή ἐξ ὑποθέσεως· λοιπὸν ἡ γωνία $B\Gamma Z$ εἶναι ἑπίσης ὀρθή. Ἀλλ' ἐὰν αἱ

προσκειμένον γωνίαι ὁμοῦ ἰσοδυναμοῦν μετὰ δύο ὀρθάς, πρέπει ἡ γραμμὴ ΑΓΖ νὰ ᾔηται εὐθεΐα πρ. 4. Οθεν ἔπεται ὅτι μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Ζ, ἤθελεν εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεΐαι ΑΒΖ, ΑΓΖ· τὸ ὅποτον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. λοιπὸν εἶναι παρομοίως ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας γραμμῆς.

Σχόλιον. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ δεδομένον ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, εἶναι ἐπίσης ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς ταύτην τὴν γραμμὴν· διότι ἐὰν ΓΔ καὶ ΓΕ ἦσαν αἱ δύο αὗται κάθετοι, ἡ γωνία ΔΓΒ ἤθελεν εἶναι ὀρθή καθὼς καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ τὸ μέρος ἤθελεν εἶναι ἴσον· τῷ δλφ. σχ. 17.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ϊ Σ ΙΓ.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α κειμένου ἐκτὸς εὐθείας τινος ΑΕ ἀξῶμεν τὴν κάθετον ΑΒ, ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας, καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΕ, ΑΓ, ΑΔ κ. τ. λ, εἰς διάφορα σημεία ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 31.

1.^{ον} Ἡ κάθετος ΑΒ θέλει εἶναι μικροτέρα καὶ πλαγίας.

2.^{ον} Αἱ δύο πλάγια ΑΓ, ΑΕ, ἡγμέναι ἀπὸ τὸ ἔν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς καθέτου εἰς ἴσα διαστήματα ΒΓ, ΒΕ θέλουν εἶναι ἴσαι.

3.^{ον} Ἀπὸ δύο πλαγίας ΑΓ καὶ ΑΔ, ἡ ΑΕ καὶ ΑΔ ἡγμένας κατ' ἀρέσκειαν, ἡ ἀπομακρυνομένη περισσώτερον τῆς καθέτου θέλει εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ας προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΑΒ πρὸς τὴν εὐθεΐαν ΒΖ—ΑΒ, καὶ ἅς ἐπιζευχθῶσι ΖΓ, ΖΔ.

1.^{ον} Τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τρίγωνον ΒΓΑ, ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία ΓΒΖ=ΓΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι κοινὴ, ἡ δὲ ΒΖ=ΒΑ. λοιπὸν πρ. 6. ἡ τρίτη

ΓZ είναι ἴση μὲ τὴν τρίτην $\Lambda \Gamma$. Τώρα, ΛBZ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα τῆς $\Lambda \Gamma Z$ γραμμῆς κεκλασμένης· λοιπὸν ΛB ἥμισυ τῆς ΛBZ εἶναι μικροτέρα τῆς $\Lambda \Gamma$ ἡμίσεως τῆς $\Lambda \Gamma Z$. λοιπὸν 1.^{ον} ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα κάθε πλάγίας.

2.^{ον} Ἐὰν ὑποτεθῇ $BE = B\Gamma$, ἐπειδὴ ἐκτὸς ἀπὸ AB εἶναι κοινὴ καὶ ἡ γωνία $ABE = AB\Gamma$, ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΛBE εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ πρ. 6. λοιπὸν αἱ πλευραὶ ΛE , $\Lambda \Gamma$ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν 2.^{ον} δύο πλάγια ἰσάκεις ἀπομακρυνόμεναί τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

3.^{ον} Εἰς τὸ τρίγωνον $\Delta Z \Lambda$ τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν $\Lambda \Gamma$, ΓZ , εἶναι μικρότερον. πρ. 9. τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν $\Lambda \Delta$, ΔZ . λοιπὸν ΛE , ἥμισυ τῆς γραμμῆς $\Lambda \Gamma Z$ εἶναι μικροτέρα τῆς $\Lambda \Delta$ ἡμίσεως τῆς $\Lambda \Delta Z$. λοιπὸν 3.^{ον} αἱ πλάγια αἵτινες περισσότερον ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου εἶναι μεγαλύτεραι.

Πόρισμα Α'. Ἡ κάθετος μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν ἐνδὸς σημείου ἀπὸ μίαν γραμμὴν, ὡς μικροτέρα κάθε πλάγίας.

Πόρισμα Β'. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι· διότι ἐὰν τοῦτο ἦτον δυνατόν, ἤθελον ὑπάρχει ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου δύο ἴσαι πλάγια, τὸ ὅπολον εἶναι ἀδύνατον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ 12'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ , μέσον τῆς εὐθείας AB , ὑψωθῇ ἡ κάθετος EZ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. 1.^{ον} κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκεις θάλει ἀπέχει τῶν δύο ἄκρων τῆς AB . 2.^{ον} κάθε δὲ σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνίσάκεις θάλει ἀπέχει τῶν αὐτῶν ἄκρων A καὶ B . σχ. 32,

Διότι, 1.^{ον} ἐπειδὴ ὑποτίθεται $ΑΓ \equiv ΓΒ$ αἱ δύο πλάγιαι $ΑΔ, ΔΒ$ ἰσάκεις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· λοιπὸν εἶναι ἴσαι. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς πλαγίας $ΑΕ, ΕΒ, ΑΖ, ΖΒ$, κ. τ. λ. λοιπὸν 1.^{ον} κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκεις ἀπέχει τῶν ἄκρων $Α$ καὶ $Β$.

2.^{ον} Ἐστω $Ι$ ἐν σημείον ἐκτὸς τῆς καθέτου. Ἐὰν ἐπιζευχθῶσι $ΙΑ, ΙΒ$, ἡ μία τῶν γραμμῶν τούτων θέλει τέμνει τὴν καθέτον εἰς $Δ$, ὅθεν ἄγοντες τὴν $ΔΒ$; θέλομεν ἔχει $ΔΒ \equiv ΔΑ$. Ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $ΙΒ$ εἶναι μικροτέρα τῆς κεκλασμένης $ΙΔ + ΔΒ$, καὶ $ΙΔ + ΔΒ \equiv ΙΔ + ΔΑ \equiv ΙΑ$ · λοιπὸν $ΙΒ < ΙΑ$ · λοιπὸν 2.^{ον} κάθε σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκεις ἀπέχει τῶν ἄκρων $Α$ καὶ $Β$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Η'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην.

Ἐστω ἡ ὑποτείνουσα $ΑΓ \equiv ΔΖ$, καὶ ἡ πλευρὰ $ΑΒ \equiv ΔΕ$ · λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΒΓ$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΔΕΖ$. σγ. 33.

Ἡ ἰσότης ἤθελεν εἶναι φανερὰ ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ $ΒΓ$ ἦτον ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν $ΕΖ$. Ἀς ὑποθέσωμεν, ἐὰν δυνατόν, ὅτι αἱ πλευραὶ αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ ἔστω $ΒΓ$ ἡ μεγαλητέρα. Ἀς ληθῇ $ΒΗ \equiv ΕΖ$, καὶ ἅς ἐπιζευχθῇ $ΑΗ$. Τὸ τρίγωνον $ΑΒΗ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $ΔΕΖ$ · διότι ἡ ὀρθὴ γωνία $Β$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν $Ε$, ἡ πλευρὰ $ΑΒ \equiv ΔΕ$, καὶ ἡ $ΒΗ \equiv ΕΖ$ · λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἐπομένως $ΑΗ \equiv ΔΖ$ · ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $ΔΖ \equiv ΑΓ$ · λοιπὸν $ΑΗ \equiv ΑΓ$. Ἀλλ' ἡ πλαγία $ΑΓ$ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾖ ἴση τῇ $ΑΗ$ πρ. 16. ὥς περισσύτερον ἀπομακρυνομένη τῆς καθέτου $ΑΒ$ · λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ $ΒΓ$ νὰ διαφέρει τῆς $ΕΖ$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ εἶναι ἴσην μὲ τὸ $ΔΕΖ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Υ Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Εἶπω $AB\Gamma$ τὸ προτιθέμενον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν (1) ὅτι AB εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἡ δὲ $B\Gamma$ ἡ μικροτέρα πλευρὰ, καὶ οὕτως AGB εἶναι ἡ μεγαλητέρα γωνία ἡ δὲ BAG ἡ μικροτέρα πρ. 14. σχ. 35.

Εκ τῆς σιγμῆς A καὶ τῆς σιγμῆς I μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $B\Gamma$, ἃς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα AI ἣτις ἃς προσελθῇ εἰς Γ' ὥστε $AG' = AB$ παρομοίως ἃς προσελθῇ AB εἰς B' ὥστε $AB' = AI$ διπλασία τῆς AI .

Εὖν σημειωθῶσι διὰ A, B, Γ , αἱ τρεῖς γωνταὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, καὶ παρομοίως διὰ A', B', Γ' αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου $AB'\Gamma'$, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν $\Gamma' = B + \Gamma$, καὶ τὴν γωνίαν $A = A' + B'$, ὅθεν ἐπεται $A + B + \Gamma = A' + B' + \Gamma'$, τούτέστιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰ δύο τρίγωνα.

Πρὶς ἀποδείξιν τούτου, ἃς γένη $AK' = AI$, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ $\Gamma'K'$, θέλομεν ἔχει τὸ τρίγωνον $\Gamma'AK'$ ἴσον μὲ τὸ BAI . Διότι εἰς τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, ἡ κοινὴ γωνία A περιέχεται μεπαξὺ πλευρῶν ἴσων, ἡ καθε μία μὲ τὴν καθε μίας, δηλαδὴ: $AG' = AB$, καὶ $AK' = AI$. λοιπὸν ἡ τρίτη πλευρὰ $\Gamma'K'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην BI λοιπὸν ὡσαύτως ἡ γωνία $\Gamma'K'A = B\Gamma$ καὶ ἡ γωνία $AK'I = AIB$.

Λέγω τώρα ὅτι τὸ τρίγωνον $B'\Gamma'K'$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ AGI , διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν $AK'I + \Gamma'K'B'$ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς πρ. 2. καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $AIG + AIB$. Εὖν

(1) Ἡ ὑπόθεσις αὕτη δὲν ἀπεκλείει τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἡ μίση πλευρὰ AI θέλιν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄλλων AB ἢ $B\Gamma$.

καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι $\text{AK}'\Gamma'$, AIB μένει ἡ γωνία $\Gamma'K'B' = \text{AIG}$. Αἱ πλευραὶ ὅπου περιέχουσι τὰς ἴσας ταύτας γωνίας εἶναι ἴσαι ἢ καθὲς μία μὲ τὴν καθὲς μίαν, δηλαδή $\Gamma'K' = \text{IB} = \text{GI}$, καὶ $K'B' = \text{AK}' = \text{AI}$, ἐπειδὴ ὑπετίθη $\text{AB}' = 2\text{AI} = 2\text{AK}'$. Ἀοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $\text{B}'\Gamma'K'$, AIG εἶναι ἴσα πρ. 6. ἀκολουθῶς ἡ πλευρὰ $\Gamma'B' = \text{AG}$, ἡ γωνία $\text{B}'\Gamma'K' = \text{AGB}$, καὶ ἡ γωνία $K'B'\Gamma' = \text{GAI}$.

Ἐκ τούτου ἔπεται 1.^{ον} ὅτι ἡ γωνία AIGB' σημειωθεῖτα διὰ Γ' σύγκειται ἀπὸ δύο ἴσας γωνίας μὲ τὰς γωνίας B καὶ Γ τοῦ τριγώνου ABG , καὶ οὕτως ἔχομεν $\Gamma' = \text{B} + \Gamma$. 2.^{ον} ὅτι ἡ γωνία A τοῦ τριγώνου ABG σύγκειται ἐκ τῆς γωνίας A' ἢ $\Gamma'\text{AB}'$ ἥτις ἀνήκει εἰς τὸ τρίγωνον $\text{AB}'\Gamma'$ καὶ τῆς γωνίας GAI ἴσας μὲ τὴν γωνίαν B' τοῦ ἰδίου τριγώνου, δηλαδή $\text{A} = \text{A}' + \text{B}'$. λοιπὸν $\text{A} + \text{B} + \Gamma = \text{A}' + \text{B}' + \Gamma'$. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $\text{AG} < \text{AB}$ καὶ ἐπομένως $\Gamma'B' < \text{AG}'$, βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον AIGB' ἡ γωνία εἰς A , σημειωθεῖσα διὰ A' , εἶναι μικροτέρα τῆς B' , καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου ABG , ἔπεται ὅτι ἡ γωνία $\text{A}' < \frac{1}{2}\text{A}$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὸ τρίγωνον $\text{AB}'\Gamma'$, διὰ τὸ σχηματίσωμεν ἕν τρίτον τρίγωνον $\text{AIG}''\text{B}''$, τοῦ ὁποίου τὰς γωνίας σημειόνομεν διὰ A'' , B'' , Γ'' , θέλομεν ἔχει παρομοίως τὰς δύο ἰσότητας $\Gamma'' = \Gamma' + \text{B}'$, $\text{A}'' = \text{A}' + \text{B}''$, ὅθεν ἔπεται $\text{A}' + \text{B}' + \Gamma' = \text{A}'' + \text{B}'' + \Gamma''$. Ὅτως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ ἴδιον εἰς ταῦτα τὰ τρία τρίγωνα· εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν $\text{A}'' < \frac{1}{2}\text{A}'$, καὶ ἐπομένως $\text{A}'' < \frac{1}{4}\text{A}$.

Ἐξακολουθοῦντες ἀπροσδιορίτως τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων AIGB' , $\text{AIG}''\text{B}''$, κ. τ. λ. θέλομεν φθάσει εἰς ἕν τρίγωνον $\text{aB}\gamma$ εἰς τὸ ὅποιον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν

γωνίων θέλει είναι τὸ ἴδιον ὡς εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, καὶ τὸ ὅποιον θέλει ἔχει τὴν γωνίαν α μικροτέραν ὅποιονδήποτε ἔρου τῆς κατιούσης προέχου $\delta' A$, $\epsilon' A$, ιA , κ.τλ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων προεκτεινομένην ἕως ὅπου ἡ γωνία α νὰ ᾖται μικροτέρα πάσης δεδομένης.

Καὶ ἴαν διὰ μέσου τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ κατασκευάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τρίγωνον $\alpha\beta'\gamma'$, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\alpha' + \beta'$ τούτου θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν α , καὶ ἐπαμένως μικρότερον πάσης δεδομένης γωνίας. Ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $\alpha\beta'\gamma'$ ἄγεται σχεδὸν εἰς τὴν μὲν γωνίαν γ .

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἀκριβὲς μέτρον τούτου τοῦ ἄθροισματος, ἔσ: προεκβάλλωμεν τὴν πλευρὰν $\alpha'\gamma'$ πρὸς τὸ δ' , καὶ ἂς καλέσωμεν χ' τὴν ἐκτὸς γωνίαν $\beta'\gamma'\delta'$. ἡ γωνία χ' , μετὰ τῆς γωνίας γ' τοῦ τριγώνου $\alpha\beta'\gamma'$, κάμνει ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Οὕτως σημειόνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν διὰ O , θέλομεν ἔχει $\gamma' = 2O - \chi'$ · λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $\alpha\beta'\gamma'$ θέλει εἶναι.

$$2O + \alpha' + \beta' - \chi'$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $\alpha\beta'\gamma'$ μεταβάλλονται, εἰς τρόπον ὥστε διὰ τῆς μεταβολῆς ταύτης νὰ παριστάνῃ τὰ τρίγωνα τὰ ὅποια ἐκ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γεννῶνται καὶ πλησιάζουν μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον πρὸς τὸ ὅριον ὅπου αἱ γωνίαι α' καὶ β' ᾔθελον εἶναι μηδέν. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο, ταυτιζομένης τῆς εὐθείας $\alpha'\gamma'\delta'$ μὲ τὴν $\alpha\beta'$ τὰ τρία σημεῖα α' , γ' , δ' θέλουν εἶναι ἀπ' εὐθείας· τότε αἱ γωνίαι β' καὶ χ' μηδενίζονται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὅπου καὶ ἡ α' , καὶ ἡ ποσότης $2O + \alpha' + \beta' - \chi'$ μέτρον τοῦ

ἄθροισματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $\alpha' \gamma' \delta'$, ἄγεται εἰς $2O$, λοιπὸν εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Πόρισμα Α'. Γνωρίζοντες δύο γωνίας ἐνὸς τριγώνου ἢ μόνον τὸ ἄθροισμά των, προσδιορίζομεν τὴν τρίτην ἄφαντοῦντες τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν γωνιῶν ἀπὸ δύο ὀρθάς.

Β'. Ἐὰν δύο γωνίαι ἐνὸς τριγώνου ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο γωνίας ἐνὸς ἄλλου, ἢ καθε μίᾳ μὲ τὴν καθε μίαν, ἢ τρίτη τοῦ ἐνὸς θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ ἄλλου, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια μεταξὺ των.

Γ'. Ἐν τρίγωνον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἔχη παρὰ μίαν μόνην ὀρθὴν γωνίαν· ἐπειδὴ ἐὰν εἴχῃ δύο, ἢ τρίτη ἐπρεπε νὰ ἦναι μηδὲν· πολὺ περισσότερον δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἔχη παρὰ μίαν μόνην ἀμβλείαν γωνίαν.

Δ'. Εἰς ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν.

Ε'. Εἰς τὸ ἰσοπλευρον τρίγωνον καθε γωνία εἶναι τὸ τρίτον δύο ὀρθῶν ἢ τὰ δύο τρίτα μιᾶς ὀρθῆς. Λοιπὸν ἐὰν ἡ ὀρθὴ γωνία ἐκφρασθῇ διὰ 1, ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 3.

Ζ'. Εἰς κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐὰν προσεβληθῇ ἡ πλευρὰ AB πρὸς τὸ Δ , ἡ ἐκτὸς γωνία $\Gamma B\Delta$ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι A καὶ Γ · διότι ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλα μέρος $AB\Gamma$, τὰ δύο ἄθροίσματα θέλουν εἶναι ἴσα μὲ δύο ὀρθάς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν ἐνὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τοσάκις δύο ὀρθας ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μετὰν δύο.

Ἐστω $AB\Gamma\Delta$ κ. τ. λ. τὸ προτεθὲν πολύγωνον· ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς γωνίας A , ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς

κορυφὰς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν, αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, κ. τ. λ. εὐκολῶς βλέπομεν ὅτι τὸ πολυγώνον θέλει μοιρασθῇ εἰς πέντε τρίγωνα, ἔαν ἔχη ἐπὶ πλευρὰς εἰς ἑξ, ἔαν ὀκτώ· καὶ ἐν γένει εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολυγώνον μείον δύο· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔχοντα διὰ κορυφὴν κοινὴν τὴν γωνίαν Α, καὶ διὰ βάσεις τὰς διαφόρους πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ἐκτὸς τῶν δύο ὅπου σχηματίζουσιν τὴν γωνίαν Α. Βλέπομεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τούτων τῶν τριγώνων δὲν διαφέρει παντάπασι τοῦ ἄθροισματος τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, τουτέστιν, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μείον δύο. σχ. 42.

Πόρισμα Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς τετραπλεύρου ἵναί ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ $4-2$, τὸ ὅποσον κἀμνη τέσσαρας ὀρθὰς. Λοιπὸν ἔαν ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἦναι ἴσαι, ἐκάστη τούτων θέλει εἶναι ὀρθή. Τοῦτο βεβαιῶναι τὸν Η' ὀρισμὸν ὅπου ὑπετέθη ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι ἐνὸς τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, ὅταν ἦναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον.

Β'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς πενταγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ $5-2$, δηλαδή μὲ 3 ὀρθὰς. Ὅταν λοιπὸν τὸ πεντάγωνον ἦναι ἰσογώνιον, ὅταν δηλαδή ἔχη τὰς γωνίας τοῦ ἴσου μεταξὺ τῶν, ἐκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ πέμπτον ἐξ ὀρθῶν, ἢ μὲ τὰ $\frac{5}{6}$ μιᾶς ὀρθῆς.

Γ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $2 \times (6-2)$ ἢ 8 ὀρθαί γωνίαι· λοιπὸν εἰς τὸ ἰσογώνιον, καθεὶς γωνία εἶναι τὰ $\frac{8}{6}$ ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

Σχόλιον. Εάν ήθέλαμεν νά ἐφαρμόσωμεν ταύτην τήν πρότασιν εἰς ἓν πολύγωνον τὸ ὅποιον ήθελεν ἔχει μίαν ἢ περισσοτέρας γωνίας εἰσεχούσας (*angles rentrants*), ἔπρεπε νά θεωρήσωμεν κάθε γωνίαν εἰσεχούσαν μεγαλύτεραν δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ πρὸς ἀποφυγὴν κάθε περιπλοκῆς, ἐνταῦθα καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα δὲν θέλομεν θεωρεῖ παρὰ τὰ πολύγωνα μὲ γωνίας ἐξεχούσας (*angles saillants*), τὰ ὅποια δυνάμεθα νά ὀνομάσωμεν πολύγωνα κυρτὰ (*polygones convexes*). Κάθε κυρτὸν πολύγωνον εἶναι τοιούτον, ὥστε μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἡγμένη ὅπωςδὴποτε, δὲν συναπαντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου παρὰ εἰς δύο σημεῖα. σχ. 43.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΑ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Δύο εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$, κάθετοι ἐπὶ μιᾷς τρίτης ZH , εἶναι παράλληλοι, τουτέστιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι δὲν δύνανται νά συναπαντηθοῦν. σχ. 36.

Επειδὴ ἐν συναπαντῶντο εἰς σημεῖόν τι O , ήθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι OZ, OH ἡγμέναι ἐκ τῆς ἰδίας σιγμῆς O ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ZH , ὅπερ ἀδύνατον. πρ. 15.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΒ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Εάν δύο εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$ κάμνουν μὲ μίαν τρίτην EZ , δύο ἐντὸς γωνίας $BEZ, \Delta ZE$, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νά ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, αἱ γραμμαὶ $AB, \Gamma A$, θέλουσιν εἶναι παράλληλοι. σχ. 36.

Εάν αἱ γωνίαι $BEZ, \Delta ZE$, ἦσαν ἴσαι, ήθελον εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ δύο, καὶ ήθέλαμεν πείσει εἰς τὴν περίστασιν τῆς προλαβούσης περοτάσεως. Ἀς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι εἶναι ἄνισοι, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Z , κορυφῆς τῆς μεγαλητέρας ἅς κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ZH ἐπὶ τῆς AB .

Εἰς τὸ τρίγωνον EZH , τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξείων γωνιῶν $ZEH + EZH$ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν. πρ. 19. πρ. 4. Ἐν τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $BEZ + AZE$ ἴσον ἐξ ὑποθέσεως μὲ δύο ὀρθάς γωνίας, μένει ἡ γωνία ΔZH ἴση μὲ μίαν ὀρθήν. Λειπὸν αἱ δύο γραμμαὶ $AB, \Gamma A$ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεταν ZH . λοιπὸν εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΓ'.

Θ Ε Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι $AB, \Gamma A$, κἀμνουν μὲ μίαν τρίτην EZ δύο ἐντὸς γωνίας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους, τὸ ἄθροισμα τῶν ὑποκείμενων νὰ ἦναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν, αἱ γραμμαὶ $AB, \Gamma A$, ἱκανῶς προεκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθοῦν. σγ. 37.

Εἶπω 1.^{ον} Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $BEZ + EZA$ μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἅς ἀχθῇ ἡ ZH εἰς τρόπον ὥστε ἡ γωνία $EZH = AEZ$, ὁλοκρινεῖται ἔχει τὸ ἄθροισμα $BEZ + EZH$ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $BEZ + AEZ$ καὶ ἐπομένως ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ ἐπειδὴ $BEZ + EZA$ εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἡ εὐθεῖα ΔZ περιέχεται εἰς τὴν γωνίαν EZH .

Ἐκ τῆς εὐθεῖας Z ἅς ἀχθῇ ἡ πλαγία ZM ἥτις συναπαντᾷ AB εἰς M , ἡ γωνία AMZ θέλει εἶναι ἴση τῇ HZM , ἐπειδὴ ἔὰν προσεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ἡ αὐτὴ ποσότης $EZM + ZEM$, ἔκαστον τῶν δύο ἄθροισμάτων ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Ἀς ληφθῇ ἀκολουθῶς $MN = ZM$ καὶ ἅς ἐπιζευχθῇ ZN : ἡ γωνία AMZ , ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ZMN , εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι MZN, MNZ , πρ. 19. πρ. 6. αὗται δὲ εἶναι μεταξύ των ἴσαι ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, MN, ZM . λοιπὸν ἡ γωνία AMZ ἢ ἴση τῇ MZH εἶναι διπλασία τῇ MZN . λοιπὸν

ἡ εὐθεῖα ZN διαιρεῖ διῆχα τὴν γωνίαν HZM καὶ συναπαντᾷ τὴν AB εἰς ἐν σημεῖον N μακρὰν τῆς M , $MN = ZM$.

Ἐκ τῆς ἰδίας ἀποδείξεως ἔπεται ὅτι ἐὰν λαβώμεν $NI = ZN$, θέλομεν προῖδιορίσει ἐπὶ τῆς AB τὴν σιγμὴν Π ὅπου συναπαντᾷ αὐτὴν ἡ ZI ποιοῦσα τὴν γωνίαν HZI ἴσων μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας HZN , ἢ μὲ τὸ τέταρτον τῆς HZM .

Ἡμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λαβώμεν διχοχικῶς τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὸ ὄγδον, κ. τ. λ. τῆς γωνίας HZM , καὶ αἱ γραμμαὶ αἵτινες ἐκτελοῦν ταύτας τὰς διαιρέσεις θέλουν συναπαντᾷ τὴν γραμμὴν AB εἰς σημεῖα μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀπομακρυνόμενα, ἀλλ' εὐκόλως προσδιοριζόμενα, ἐπειδὴ $MN = ZM$, $NI = ZN$, $PK = \Pi Z$, κ. τ. λ. Ἡμποροῦμεν παρομοίως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κάθε διάστημα μιᾶς τούτων τῶν σιγμῶν τῆς κοινῆς τομῆς ἀπὸ τὴν σταθερὰν Z , δὲν εἶναι ὅλως διόλου διπλάσιον τοῦ διασήματος τῆς προηγουμένης σιγμῆς τῆς κοινῆς τομῆς, διότι ZN παραδείγματος χάριν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ $ZM + MN$ ἢ $2ZM$: ὡσπύτω; ἔχομεν $ZI < 2ZN$, $ZK < 2Z\Pi$, κ. τ. λ.

Ἀλλ' ἐξακολουθοῦντες τὴν ὑποδιαίρεσιν τῆς γωνίας HZM κατὰ λόγον διπλάσιον, θέλομεν φθάσει εἰς μίαν γωνίαν $HZ\Omega$ μικροτέραν τῆς δεδομένης HZA , καὶ ἀκόμη θέλει εἶναι ἀληθές, ὅτι $Z\Omega$ προεκβαλλομένη συναπαντᾷ τὴν AB εἰς προσδιορισμένον σημεῖον· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἢ εὐθεῖα ZA περιεχομένη εἰς τὴν γωνίαν $EZ\Omega$, θέλει συναπαντήσῃ AB .

Ὡς ὑποθέσωμεν 2.^{ον} ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς γωνιῶν $AEZ + \Gamma ZE$ εἶναι μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν, ἐὰν προεκβληθῇ AE πρὸς τὸ B καὶ ΓZ πρὸς τὸ Δ , τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν AEZ , BEZ , ΓZE , EZA , θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Λοιπὸν ἐὰν ἀπὸ τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ $AEZ + \Gamma ZE$ μείζον δύο ὀρθῶν,

μένει τὸ ἄθροισμα $BEZ + EZA$ μικρότερον δύο ὀρθῶν. Λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν αἱ γραμμαὶ EB, ZA , ἰκανῶς προσκαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθῶν.

Πόρισμα. Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Z μία μόνη παράλληλος τῆς δεδομένης γραμμῆς AB εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν φέρωμεν τὴν ZE κατ' ἀρέσκειαν, μία μόνη γραμμὴ ὑπάρχει ἡ ZH ἥτις νὰ κάμῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $BEZ + EZH$ ἴσον μετὰ δύο ὀρθῶν· καθὼς ἄλλη εὐθεῖα $ZΔ$ ἤθελε κάμει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $BEZ + EZA$ μικρότερον ἢ μεγαλύτερον δύο ὀρθῶν· ἐπομένως ἤθελε συναπαντᾷ τὴν AB .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Δ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α:

Εὰν δύο παράλληλοι γραμμαὶ $AB, ΓΔ$ συναπαντηθῶσιν ἀπὸ μίαν διατέμνουσαν EZ , τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὺς γωνιῶν $AHO, HOΓ$, θελεῖ εἶναι ἴσον μετὰ δύο ὀρθῶν. σγ. 38.

Επειδὴ ἐὰν ἦτον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον, αἱ δύο εὐθῆαι $AB, ΓΔ$ ἤθελον συναπαντῶνται ἀπὸ τὸ ἐν ἢ τὸ ἄλλο μέρος πρ. 23 καὶ δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλοι.

Πόρισμα Α'. Εὰν ἡ γωνία $HOΓ$ ᾖ κατ' ὀρθήν, ἡ γωνία AHO θελεῖ εἶναι παρομοίως· λοιπὸν καθὲς γραμμὴ κάθετος εἰς μίαν τῶν παράλληλων εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἄλλην.

Πόρισμα Β'. Επειδὴ τὸ ἄθροισμα $AHO + HOΓ$ εἶναι ἴσον μετὰ δύο ὀρθῶν, καὶ τὸ ἄθροισμα $HOΔ + HOΓ$ εἶναι ἐπίσης ἴσον μετὰ δύο ὀρθῶν· ἐὰν ἀφαιρέθῃ ἀπὸ τὸ ἐν καὶ τὸ ἄλλο μέρος $HOΓ$, θελωμεν ἔχει τὴν γωνίαν $AHO = HOΔ$. Ἀπὸ ἄλλο μέρος $AHO = BHE$, καὶ $HOΔ = ΓΟΖ$ πρ. 5. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες ὀξείαι γωνίαι $AHO, BHE, HOΔ, ΓΟΖ$, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς τέσσαρας ἀμβλείας $AHE, BHO, HOΓ, ΔΟΖ$. Περιπλέον δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν

ὅτι ἐὰν προσεθῇ μὲν τῶν τεσσάρων ὀξείων γωνιῶν εἰς μίαν τῶν τεσσάρων ἀμβλυαίων, τὸ ἄθροισμα πάντοτε θείλει ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Σχόλιον. Αἱ γωνίαι περὶ τῶν ὁποίων ἀμιλήσαμεν, συγκρινόμεναι ἀνὰ δύο, λαμβάνουσι διάφορα ὀνόματα. Ἐκμίσαιμεν τὰς γωνίας AHO , HOΓ , ἐν τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους αἱ γωνίαι BHO , HOΔ , καλοῦνται Ἐναλλαξ ἐν τῷ, ἢ ἀπλῶς Ἐναλλαξ, οὕτως ὀνομάζονται καὶ αἱ γωνίαι BHO , HOΓ . Τέλος καλοῦνται ἐν τῷ ἐκ τῷ αἱ γωνίαι EHB , HOΔ , ἢ EHA , HOΓ , καὶ Ἐναλλαξ-ἐκ τῷ αἱ γωνίαι EHB , GOZ , ἢ AHE , AOZ . Τοῦτου τεύχους δυνάμεθα νῦν θεωρήσωμεν τὰς ἀκολουθοῦσας προτάσεις ὡς ἀποδεικνύμεν.

1.^{ον} Αἱ ἐν τῷ γωνίαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς.

2.^{ον} Αἱ Ἐναλλαξ-ἐν τῷ γωνίαι εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἐκ τῷ-ἐκ τῷ, καὶ αἱ Ἐναλλαξ-ἐκ τῷ.

Ἀντιγράφως ἴαν εἰς τὴν δευτέραν ταύτην πείρασαι, δύο γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος εἶναι ἴσαι, δυνάμεθα νῦν συμπεράνωμεν ὅτι αἱ γραμμαὶ εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται εἶναι παράλληλοι. Ἐστω π. χ. ἡ γωνία $\text{AHO} = \text{HOΔ}$. Ἐπειδὴ $\text{HOΓ} + \text{HOΔ}$, εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, ὅλοιμον ἔχει παρομοίως $\text{AHO} + \text{HOΓ}$ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, λοιπὸν, πρ. 22. αἱ γραμμαὶ AH , GO εἶναι παράλληλοι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο γραμμαὶ AB , ΓΔ , παράλληλοι μιᾶς τρίτης EZ , εἶναι καὶ μετὰξὺ των παράλληλοι. σχ. 39.

Ας ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα PKP κάθετος εἰς τὴν EZ . Ἐπειδὴ AB εἶναι παράλληλος τῇ EZ , ἡ διατέμνουσα PP θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν AB πρ. 24. πόρ. 1.

παρομοίως ἐπειδὴ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλος τῆς EZ , ἡ δια-
τμήνουσα HP θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν $\Gamma\Delta$. Λοιπὸν
 AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν PK .
διὰ τοῦτο εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΖ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Δύο παράλληλοι ἰσάκις ἀπέχουσαι εἰς ὅλην των τὴν
ἐκτασιν.

Δεδομένων τῶν δύο παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$, ἐὰν ἐκ δύο
σημείων λαμβανομένων κατ' ἀρέσκειαν, ὑψωθῶσιν ἐπὶ τῆς
 AB αἱ δύο κάθετοι EH , ZO , αἱ εὐθεῖαι EH , ZO θελοῦν εἶναι
εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κάθετοι εἰς τὴν $\Gamma\Delta$ πρ. 24. λέγω
περιπλέον ὅτι θελοῦν εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των. σχ. 40.

Επειδὴ ἐπιζευχθείσης τῆς HZ , αἱ γωνίαι HZE , $\text{ZH}\Theta$,
θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους AB , $\Gamma\Delta$, εἶναι
ἴσαι ὡς ἐναλλάξ ἐντὸς. σχο. πρ. 24. παρομοίως ἐπειδὴ
αἱ εὐθεῖαι EH , ZO εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν
 AB , καὶ ἑπομένως παράλληλοι μεταξύ των, αἱ γωνίαι
 EHZ , $\text{HZ}\Theta$, θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους HE ,
 ZO , εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλάξ ἐντὸς. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα
 EZH , $\text{ZH}\Theta$, ἔχουν μίαν κοινὴν πλευρὰν ZH προσκει-
μένην εἰς δύο γωνίας ἴσας, ἡ καθε μία μὲ τὴν καθε μίαν.
λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρ. 7. λοιπὸν
ἡ πλευρὰ EH ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλ-
λήλων AB , $\Gamma\Delta$ ἀπὸ τὴν σιγμὴν E , εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευ-
ρὰν ZO ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἰδίων παραλλή-
λων ἀπὸ τὴν σιγμὴν Z .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΖ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Εὰν δύο γωνίαι BAG , DEZ , ἔχουν τὰς πλευρὰς των πα-
ράλληλους, τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, καὶ διευθυ-

νομέναις κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι
ὀφίονται εἶναι ἴσαι. σχ. 41.

Ἀς προεκβληθῇ, ἐὰν ἀνάγκη τὸ καλλίστην, ἡ ΔΕ ὥς
ὅπου νᾶ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς Η· ἡ γωνία ΔΕΖ
εἶναι ἴση τῇ ΔΗΓ, ἐπεὶ δὲ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΗ.
πρ. 24. ἡ γωνία ΔΗΓ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ, ἐπεὶ δὲ ΔΗ
εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἡ γωνία ΔΕΖ· εἶναι
ἴση τῇ ΒΑΓ.

Σχόλιον. Εἰς ταύτην τὴν πρότασιν ἐκτὸς τοῦ πα-
ραλληλισμοῦ ὑποθέσαμεν τὴν ΕΖ πλευρὰν διευθυνομένην
κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὅπου καὶ ἡ ΑΓ, καὶ τὴν ΕΔ δι-
ευθυνομένην κατὰ τὴν ἔννοιαν ὅπου καὶ ἡ ΑΒ· ὁ λόγος
εἶναι ὅτι ἐὰν προεκβληθῇ ΖΕ πρὸς τὸ Θ, ἡ γωνία ΔΕΘ
ἤθελεν ἔχει τὰς πλευρὰς τῆς παραλλήλους· ἐκείνων τῆς
γωνίας ΒΑΓ, ἀλλὰ δὲν ἤθελεν εἶναι ἴση. Εἰς ταύτην
τὴν περίστασιν, ἡ γωνία ΔΕΘ καὶ ΒΑΓ ἤθελεν κάμνει
ὁμοῦ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΗ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἐνὸς παραλληλογράμμου εἶναι
ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι.

Ἀς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ,
ΔΒΓ, ἔχουν τὴν κοινὴν πλευρὰν ΒΔ· περιπλέον ἐξ αἰ-
τίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ,
πρ. 24. καὶ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἡ γω-
νία ΑΒΔ=ΒΑΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ,
εἶναι ἴσα πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΗ ἀπέναντι τῆς
γωνίας ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓ ἀπέναντι τῆς ἴσης
γωνίας ΔΒΓ· καὶ παρομοίως ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΔ εἶναι
ἴση τῇ τρίτῃ ΒΓ· λοιπὸν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἐνὸς πα-
ραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι. σχ. 44.

Δεύτερον, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἰδίων τριγώνων ἐπεται ὅτι ἡ γωνία A εἶναι ἴση τῇ Γ , καὶ ἡ γωνία $\Lambda\Delta\Gamma$, σύνθετος ἀπὸ τὰς δύο γωνίας $\Lambda\Delta B$, $B\Delta\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $\Lambda B\Gamma$, σύνθετον ἀπὸ τὰς δύο γωνίας $\Delta B\Gamma$, $\Lambda B\Delta$, λοιπὸν αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Λοιπὸν δύο παράλληλοι AB , $\Gamma\Delta$ περιεχόμεναι μεταξὺ δύο ἄλλων παραλλήλων $\Lambda\Delta$, $B\Gamma$, εἶναι ἴσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Θ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν εἰς ἓν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ αἱ ἀπέναντι πλευраὶ ᾖναι ἴσαι, εἰς τρόπον ὥστε $AB = \Gamma\Delta$, καὶ $\Lambda\Delta = B\Gamma$, αἱ ἴσαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον. (σχ. 44.).

Διότι, ἐπιζευχθείσης τῆς διαγωνίου $B\Delta$, τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda B\Delta$, $B\Delta\Gamma$ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν μίαν· λοιπὸν εἶναι ἴσα· διὰ τοῦτο ἡ γωνία $\Lambda\Delta B$ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς AB εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $\Delta B\Gamma$ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς $\Gamma\Delta$ · λοιπὸν ἡ πλευρὰ $\Lambda\Delta$ εἶναι παράλληλος τῇ $B\Gamma$ (πρό. 24.). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, AB εἶναι παράλληλος τῇ $\Gamma\Delta$ · λοιπὸν τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Λ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ AB , $\Gamma\Delta$, τετραπλεύρου τινὸς ᾖναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα $AB\Gamma\Delta$ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 44.).

Ἀς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος $B\Delta$ · ἐπειδὴ AB εἶναι παράλληλος τῇ $\Gamma\Delta$, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι $\Lambda B\Delta$, $B\Delta\Gamma$ εἶναι

ἴσαι (πρ. 24.): ἀπὸ ἄλλο μέρος $AB = \Delta\Gamma$, ἡ πλευρὰ ΔB εἶναι κοινὴ, λοιπὸν τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$ (πρ. 6.)· ἐπομένως ἡ πλευρὰ $A\Delta = B\Gamma$, ἡ γωνία $A\Delta B = \Delta B\Gamma$, διὰ τοῦτο $A\Delta$ εἶναι παράλληλος τῆς $B\Gamma$ · λοιπὸν τὸ σχῆμα $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΑΛ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Αἱ δύο διαγώνιοι $AG, \Delta B$, ἐνὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 45.

Διότι, συγκρίνοντας τὸ τρίγωνον $A\Delta O$ μὲ τὸ τρίγωνον $\Gamma O B$, εὐρίσκωμεν τὴν πλευρὰν $A\Delta = \Gamma B$, τὴν γωνίαν $A\Delta O = \Gamma B O$ (πρὸς 24.)· καὶ τὴν γωνίαν $\Delta A O = O \Gamma B$ · λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα (πρ. 7)· λοιπὸν AO ἀπέναντι τῆς γωνίας $A\Delta O$, εἶναι ἴση τῇ $O\Gamma$, ἀπέναντι τῆς γωνίας $O\Gamma B$ · διὰ τοῦτο καὶ $\Delta O = OB$.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ρομβοειδὲς, αἱ πλευραὶ $AB, B\Gamma$ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα $AOB, O\Gamma B$ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθέ μίαν μὲ τὴν καθέ μίαν, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα· ὅθεν ἔπεται ὅτι ἡ γωνία $AOB = BO\Gamma$, καὶ οὕτως αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ρομβοειδοῦς τέμνονται ἀμοιβαίως κατ' ὀρθὰς γωνίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ
ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. **Η** περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι γραμμὴ τις καμπύλη τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀπὸ ἐν ἐντὸς αὐτῆς σημείου καλούμενον κέντρον.

Ο κύκλος εἶναι τὸ περικτούμενον χωρίον ἀπὸ ταύτης τὴν καμπύλην γραμμὴν.

Σ΄. Κ. Ἐνίοτε εἰς τὴν ὁμίλειαν συγχέομεν τὸν κύκλον μὲ τὴν περιφέρειάν του· ἀλλ’ εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὴν σύγχυσιν ταύτην καὶ νὰ ἀντικαθίστωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐκφράσεων, ἐνθυμούμενοι ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἐπιφάνεια ἣτις ἔχει μῆκος καὶ πλάτος, ἐν ᾧ ἡ περιφέρεια εἶναι γραμμὴ.

Β. Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ ΓΑ, ΓΕ, ΓΔ, κ. τ. λ. ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, καλεῖται ἀκτίς ἢ ἡμιδιάμετρος, κάθε δὲ γραμμὴ, ὡς ΑΒ, διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη περατουμένη εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται διάμετρος.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου, ὅλαι αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι παρομοίως, καὶ διπλαῖαι τῆς ἀκτίνος.

Γ. Καλεῖται τόξον μέρος τῆς περιφερείας ὡς τὸ ΖΘΗ.

Χορδὴ δὲ ἢ ὑποτείνουσα τοῦ τόξου εἶναι ἡ εὐθεῖα ΖΗ ἢ ἐνόνουσα τὰ δύο ἄκρα του.

Δ'. Τμήμα είναι ἡ ἐπιφάνεια ἢ μέρος τοῦ κύκλου περιχόμενον μεταξύ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς.

Σ. Κ. Εἰς τὴν αὐτὴν χορδὴν ΖΗ ἀντίκεινται πάντοτε δύο τόξα ΖΘΗ, ΖΕΗ, καὶ ἐπομένως δύο τμήματα· πλὴν πάντοτε ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ μικροτέρου, ἐν ᾧ δὲν ἐκφράζομεν τὸ ἐναντίον.

Ε. Τομεὺς εἶναι τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιχόμενον μεταξύ ἐνὸς τόξου ΔΕ καὶ τῶν δύο ἀκτίνων ΓΔ, ΓΕ, ἡγμένων εἰς τὰ ἄκρα τούτου τοῦ τόξου.

Ζ'. Καλεῖται γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, ἐκείνη τῆς ὁποίας τὰ δύο ἄκρα εἶναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς ΑΒ. (σχ. 47.).

Γωνία ἐγγεγραμμένη, ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ σχηματιζομένη ἀπὸ δύο χορδῶν. Τοιαύτη εἶναι ἡ ΒΑΓ.

Τρίγωνον ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς τὸ ΒΑΓ.

Καὶ ἐν γένει σχῆμα ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὴν περιφέρειαν· εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν λέγεται ὁ κύκλος περιγεγραμμένος εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα.

Ζ'. Καλεῖται διατέμνουσα ἡ γραμμὴ ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεία· τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΒ (σχ. 48.).

Η'. Ἐφαπτομένη εἶναι γραμμὴ ἔχουσα ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν· τοιαύτη εἶναι ἡ ΓΔ. Ἡ κοινὴ σιγμὴ Μ λέγεται σημεῖον τῆς ἀφ᾽ ἧς.

Θ'. Παρομοίως δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὅταν ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι.

Ι'. Πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς

περιφερείας. Εἰς τὴν αὐτὴν περιέσταιν ὁ κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον. σχ. 160.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε διάμετρος AB διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 49.).

Διότι ἂν φυλάττοντες τὴν κοινὴν βάσιν AB τρέψωμεν τὸ σχῆμα AEB ἐπὶ τοῦ AZB, πρέπει ἡ καμπύλη γραμμὴ AEB νὰ πέσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς καμπύλης AZB· ἐπειδὴ, ἂν υποθέσωμεν ὅτι πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην σημεῖα ἀνισάκεις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, τὸ ὅποιον ἐναντιοῦται εἰς τὸν ὅρισμὸν τοῦ κύκλου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α,

Κάθε χορδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου.

Διότι ἂν εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΔ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΓΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἐλάσσων ΑΓ + ΓΔ ἢ ΑΔ < ΑΒ. (σχ. 49.).

Πόρισμα. Λοιπὸν ἡ μεγαλητέρα εὐθεῖα γραμμὴ ἥτις δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕνα κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν του.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα.

Διότι ἂν τὴν συναπαντοῦσιν εἰς τρία, τὰ τρία ταῦτα σημεῖα ἰσάκεις ἤθελον ἀπέχει τοῦ κέντρου· ἤθελον ὑπάρχει λοιπὸν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον (πρὸ. 16: βιβλ. Γ.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνονται ἀπὸ ἴσας χορδὰς, καὶ ἀντιστρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν.

Εἰάν ἡ ἀκτὶς ΑΓ' ᾖται ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΟ, καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ, λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΕΗ. (σχ. 50.)

Διότι οὗσης τῆς διαμέτρου ΑΒ ἴσης μὲ τὴν διάμετρον ΕΖ, εἰάν τὸ ἡμικύκλιον ΑΜΑΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΕΝΗΖ, θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ αὐτὸ, καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΜΑΒ μὲ τὴν καμπύλην ΕΝΗΖ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΑΜΑ ὑποτίθεται ἴσον μὲ τὸ μέρος ΕΝΗ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσαι ἐπὶ τοῦ Η· λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΗ.

Αντιστρόφως, ὑποτιθεμένης πάντοτε τῆς ἀκτίνος ΑΓ' = ΕΟ, εἰάν ἡ χορδὴ ΑΔ = ΕΗ, λέγω ὅτι τὰ τόξα ΑΜΑ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ.

Διότι ἐπιζευχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΓΔ, ΟΗ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΕΟΗ, θέλουσι εἶναι τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθ' ἑμῇ μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμῇ μίαν, δηλαδή, ΑΓ' = ΕΟ, ΓΔ = ΟΗ, καὶ ΑΔ = ΕΗ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (11, 1)· ἀκολουθῶς ἡ γωνία ΑΓΔ = ΕΟΗ. Ἀλλ' εἰάν τὸ ἡμικύκλιον ΑΑΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου τοῦ ΕΝΖ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ = ΕΟΗ, φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ἀκτὶς ΓΔ θέλει πέσαι ἐπὶ τῆς ἀκτίνος ΟΗ, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τοῦ σημείου Η· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜΑ εἶναι ἴσον μὲ τόξον ΕΝΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὸ μεγαλύτερον τόξον ὑποτείνεται ἀπὸ τὴν μεγαλύτεραν χορδὴν,

καὶ ἀντιστρόφως, ἔάν ὁμῶς τὰ τόξα περὶ τῶν ὑποίων ὁ λόγος ᾖναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Δίδωσι ἴσῳ, τὸ τόξον $\Lambda\Theta$ (σχ. 50) μείζον τοῦ $\Lambda\Delta$, καὶ ἀγθῆτωσαν αἱ χορδαὶ $\Lambda\Delta$, $\Lambda\Theta$, καὶ αἱ ἀκτῖνες $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Theta$. αἱ δύο πλευραὶ $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Theta$ τοῦ τριγώνου $\Lambda\Gamma\Theta$ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta$ τοῦ τριγώνου $\Lambda\Gamma\Delta$: ἡ γωνία $\Lambda\Gamma\Theta$ εἶναι μεγαλητέρα τῆς $\Lambda\Gamma\Delta$: λοιπὸν (10, 1) ἡ τρίτη πλευρὰ $\Lambda\Theta$ εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης $\Lambda\Delta$: λοιπὸν ἡ χορδὴ ἢ ὑποτείνουσα τὸ μεγαλητερον τόξον εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ἀντιστρόφως, ἔάν ἡ χορδὴ $\Lambda\Theta$ ὑποτεθῇ μεγαλητέρα τῆς $\Lambda\Delta$, ἤελομεν συνάξει ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων ὅτι ἡ γωνία $\Lambda\Gamma\Theta$ εἶναι μεγαλητέρα τῆς $\Lambda\Gamma\Delta$, καὶ οὕτως τὸ τόξον $\Lambda\Theta$ εἶναι μεγαλητερον τοῦ $\Lambda\Delta$.

Σχόλιον. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ τόξα περὶ τῶν ὑποίων ὁ λόγος εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἐάν τὰ τόξα ᾖσαν μεγαλητερα, ᾗθελεν ὑπάρχει ἡ ἐναντία ἰδιότης: τοῦ τόξου αὐξανομένου, ἡ χορδὴ ᾗθελε σμικρύνει, καὶ ἀντιστρόφως: οὕτως ἐν ᾧ τὸ τόξον $\Lambda\Κ\Β\Delta$ εἶναι μεγαλητερον τοῦ $\Lambda\Κ\Β\Theta$, ἡ χορδὴ $\Lambda\Delta$ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς χορδῆς $\Lambda\Theta$ τοῦ δευτέρου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ ἀκτὶς $\Gamma\mathrm{H}$ (σχ. 51), κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς AB διαιρεῖ ταύτην τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον AHB , εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ὡς ἀγθῶσιν αἱ ἀκτῖνες $\Gamma\mathrm{A}$, $\Gamma\mathrm{B}$: αἱ ἀκτῖνες αὗται, ὡς πρὸς τὴν κάθετον $\Gamma\mathrm{D}$, εἶναι δύο ἴσαι πλάγια: λοιπὸν ἴσκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου (16, 1), ὅθεν $\Lambda\Delta = \Delta\mathrm{B}$.

Δευτέρον, ἐπειδὴ $\Lambda\Delta = \Delta\mathrm{B}$, $\Gamma\mathrm{H}$ εἶναι κάθετος ὑψωμένη εἰς τὸ μέσον τῆς AB : λοιπὸν (17, 1) κάθε σημείον

ταύτης τῆς καθέτου ἰσάκως πρέπει νὰ ἀπέχη ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β. Μεταξὺ τούτων εἶναι καὶ τὸ Η· λοιπὸν τὸ διάστημα $AH = BH$ · ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται ὅτι τὸ τόξον ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΒΗ (πρό. 4.)· λοιπὸν ἡ ἀκτίς ΓΗ, κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ, διαιρεῖ τὸ ὑποτετινόμενον τόξον ἀπὸ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Τὸ κέντρον Γ, τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΑΒ, καὶ τὸ μέσον Η τοῦ ὑποτετινομένου ἀπὸ αὐτὴν τόξου, εἶναι τρία σημεῖα εὐρισκόμενα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τὴν χορδὴν. Τώρα ἐπειδὴ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεως μιᾶς εὐθείας, ἀρκοῦσι δύο σημεῖα· ἔπεται ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ δύο τῶν εἰρημένων σημείων, διέρχεται καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν.

Ἐπεται ὡσαύτως ὅτι ἡ ὑψωμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ μέσου τοῦ ὑποτετινομένου ἀπὸ τὴν χορδὴν τόξου.

Διότι ἡ κάθετος ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἐκείνη ἣτις ἤθελε κατεβασθῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τῆς ἰδίας χορδῆς, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο διέρχονται ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐκ τριῶν μὴ ἐπὶ εὐθείας δεδομένων σιγμῶν Α, Β, Γ, πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου, καὶ δὲν εἶναι δυνατόν παρὰ μία μόνῃ νὰ διέλθῃ.

Ἀς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἅς τμηθῶσι δίχα ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ· λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ κάθετοι αὗται συναπαντῶνται εἰς ἓν σημεῖον Ο.

Ἐὰν αἱ γραμμαὶ ΔΕ, ΖΗ δὲν ἦναι παράλληλοι, ἀναγκαίως τέμνονται. Ἀς υποθέσωμεν ὅτι εἶναι παράλληλοι· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὴν ΔΕ, ἤθελεν εἶναι

κάθετος καὶ εἰς τὴν ZH (24, 1), καὶ ἡ γωνία K' θέ-
λαν εἶναι ὀρθή· ἀλλὰ BK' προεκβολὴ τῆς BD εἶναι δια-
φορετικὴ τῆς BZ , διότι τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ δὲν
εἶναι ἐπ' εὐθείας· λοιπὸν ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι BZ ,
 BK' ἡγμέναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμ-
μῆς, ὅπερ ἀδύνατον (15, 1)· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΔE ,
 ZH τέμνονται πάντοτε εἰς ἓν σημεῖον O .

Τώρα τὸ σημεῖον O , ἐπειδὴ ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον
 ΔE , ἰσάκεις ἀπέχει τῶν δύο σημείων A καὶ B (17, 1)
τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐπειδὴ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν κάθετον ZH ,
ισάκεις ἀπέχει τῶν δύο σημείων B καὶ Γ . Τὰ τρία λοιπὸν
διαστήματα OA, OB, OG , εἶναι ἴσα. Ἡ γραφομένη λοιπὸν
περιφέρεια ἐκ τοῦ O ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα OB θέλει
διέλθῃ ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ .

Ἐκ τούτου ἀπεδείχθη ὅτι πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ
διέλθῃ περιφέρεια κύκλου ἐκ τριῶν δεδομένων σιγμῶν,
μὴ ἐπ' εὐθείας· λέγω περιπλῆρον ὅτι μία μόνη δύναται
νὰ διέλθῃ.

Διότι ἐὰν ὑπῆρχε μία δευτέρα περιφέρεια ἣτις νὰ
διηροχέτο ἀπὸ τὰ τρία δεδομένα σημεῖα A, B, Γ , τὸ
κέντρον τῆς δὲν ἠμποροῦσε νὰ εὑρίσκαται ἐκτὸς τῆς γραμ-
μῆς ΔE (17, 1), ἐπειδὴ τότε ἀνισάκεις ἤθελον ἀπέχει
τοῦ A καὶ B · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον δὲν ἠμποροῦσε νὰ
εὑρίσκαται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς ZH · λοιπὸν ἤθελον εὑρί-
σκαται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν ΔE ,
 ZH . Ἀλλὰ δύο εὐθεῖαι εἰς ἓν μόνον σημεῖον τέμνονται·
λοιπὸν μία μόνη περιφέρεια ὑπάρχει ἣτις δύναται νὰ δι-
έλθῃ ἀπὸ τὰς τρεῖς δεδομένας σιγμᾶς.

Πόρισμα. Δύο περιφέρειαι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ τέ-
μνονται εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων· ἐπειδὴ ἐὰν
εἶχον τρία κοινὰ, ἤθελον εἶχει τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δὲν
ἤθελον σχηματίζει παρὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου· καὶ ἐκ δύο- ἀνίσων, ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον.

1.^{ον} Εἰσω ἡ χορδὴ $AB = DE$, ἃς τμηθῶσι διχα αἱ χορδαὶ αὐταὶ ὑπὸ τῶν καθέτων FZ, GH , καὶ ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες FA, FD , (σχ. 53). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $F\Delta Z, \Delta GH$, ἔχουν τὰς ὑποτερούσας $F\Delta, GD$ ἴσαι· περιπλέον ἡ πλευρὰ AZ ἥμισυ τῆς AB , εἶναι ἴση μὲν τῇ ΔH , ἥμισυ τῆς DE · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18. 1), καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ FZ εἶναι ἴση μὲν τῇ τρίτῃ GH · ὅθεν 1.^{ον} αἱ δύο ἴσαι χορδαὶ AB, DE , ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου.

2.^{ον} Εἰσω ἡ χορδὴ AO μεγαλητέρα τῆς DE , τὸ τόξον $AK\Theta$ θέλει εἶναι μείζον τοῦ ΔME (πρό. 5); ἃς ληθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου $AK\Theta$ τὸ μέρος $\Delta NB = \Delta ME$, ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ AB , καὶ ἃς κατεβασθῇ ἡ FZ κάθετος εἰς ταύτην τὴν χορδὴν, καὶ GI , κάθετος ἐπὶ τὴν AO · φανερόν εἶναι ὅτι FZ εἶναι μεγαλητέρα τῆς GO , καὶ GO μεγαλητέρα τῆς GI (16, 1)· λοιπὸν πολὺ περισσότερον $FZ > GI$. Ἀλλὰ $FZ = GH$, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ AB, DE εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἔχομεν $GH > GI$ · ἔπεται λοιπὸν ὅτι ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κάθετος BD , ἡγμένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος FA εἶναι ἰσφακτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν. σχ. 54.

Διότι κάθετο πλαγία FE εἶναι μεγαλητέρα τῆς καθέτου FA (16, 1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον E εἶναι ἐκτός τοῦ κύκλου· διὰ τοῦτο ἡ BD ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲν τὴν πε-

μφέρειαν. Δὲν ἔχει εἰ μὴ τὸ A' λοιπὸν BA εἶναι ἐφαπτομένη (πρ. 8.)

Σχόλιον. Ἀπὸ δεδομένου σημείου A μία μόνη ἐφαπτομένη AA' εἰς τὴν περιφέρειαν δύναται νὰ ἀχθῇ· διότι ἔμν. ἦτον δυνατόν νὰ ἀχθῇ μία ἄλλη, αὕτη δὲν ἔθελεν εἶναι πλὴν κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα GA' · λοιπὸν ὡς πρὸς τὴν νέαν ταύτην ἐφαπτομένην, ἡ ἀκτίς GA ἔθελεν εἶναι πλαγία, καὶ ἡ κάθετος, ἡγμένη ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ ταύτης τῆς ἐφαπτομένης, ἔθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς GA' · λοιπὸν ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἔθελεν εἰσέρχεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἔθελεν εἶναι διατέμνουσα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Δύο παράλληλοι AB, DE , χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφέρειας τόξα ἴσα MN, PK . σχ. 55.

Τρεῖς περιπτώσεις δυνατόν νὰ ἀπολουθῶσιν.

1.^α Ἐάν αἱ δύο παράλληλοι ᾖναι διατέμνουσαι, ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτίς $ΓΘ$ κάθετος εἰς τὴν χορδὴν $ΜΠ$, εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν παράλληλόν τῆς $ΠΚ$ (24, 1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον $Θ$ θέλει εἶναι ἐνταῦθα τὸ μέσον τοῦ τόξου $ΜΘΠ$ καὶ τοῦ τόξου $ΝΘΚ$ (πρ. 6.)· λοιπὸν θίλομεν ἔχει τὸ τόξον $ΜΘ = ΘΠ$, καὶ τὸ τόξον $ΝΘ = ΘΚ$: ἐκ τούτου ἔπεται $ΜΘ - ΝΘ = ΘΠ - ΘΚ$, τουτίσι $ΜΝ = ΠΚ$.

2.^α Ἐάν ἐκ τῶν δύο παράλληλων AB, DE , ἡ μία ᾖναι διατέμνουσα, καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη· εἰς τὴν συμῆν τῆς ἀφ᾽ ἧς $Θ$ ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτίς $ΓΘ$ · αὕτη θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἐφαπτομένην $ΔΕ$ (πρ. 9.) καὶ εἰς τὴν παράλληλόν τῆς $ΜΠ$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $ΓΘ$ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν $ΜΠ$, τὸ σημεῖον $Θ$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου $ΜΘΠ$ · λοιπὸν τὰ τόξα $ΜΘ, ΘΠ$ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων AB, DE εἶναι ἴσα.

3.^{ον} Τέλος εἰάν αἱ δύο παράλληλοι ΔΕ, ΕΑ ἦναι ἰσαπτόμεναι, ἡ μὲν εἰς Θ, ἡ δὲ εἰς Κ', ὥς ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα παράλληλος ΑΒ, θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων $ΜΘ \equiv ΟΠ$ καὶ $ΜΚ' \equiv Κ'Π'$ λοιπὸν τὸ ὅλον τοξοῦ $ΟΜΚ' \equiv ΟΠΚ'$, καὶ περιπλέον βλέπομεν ὅτι ἕκαστον τούτων τῶν τοξῶν εἶναι ἡμιπερίφερα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΑ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εάν δύο περιφέρειαι τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, ἡ διερχομένη γραμμὴ ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ἣτις ἐνώνει τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς, καὶ θέλει τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἡ ἐνόνουσα τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς, εἶναι κοινὴ χορδὴ εἰς τοὺς δύο κύκλους. Τώρα εἰάν εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς ὑψωθῇ μία κάθετος, αὕτη πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ καθὲν τῶν δύο κέντρων Γ καὶ Δ. (πρὸ. 6.) Ἀλλ' ἐκ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα δύναται νὰ ἀχθῇ· λοιπὸν ἡ διερχομένη εὐθεῖα ἀπὸ τὰ κέντρα, θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εάν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ακτίνων, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικροτέρας καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων, αἱ δύο περιφέρειαι θέλει τέμνονται. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι διὰ νὰ ἔχῃ χώραν ἡ κοινὴ τομὴ, πρέπει τὸ τρίγωνον ΓΑΔ νὰ ὑπάρχῃ· πρέπει λοιπὸν ὅχι μόνον ΓΔ νὰ ἦναι $< ΑΓ + ΑΔ$ σχ. 57. ἀλλὰ ἀκόμη καὶ ἡ μεγαλη-

τῆς ἑκτῆς $\Lambda\Delta$ νὰ ᾖναι $\angle \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta$. σχ. 58. Τώρα ὁσάκις τὸ τρίγωνον $\Gamma\Lambda\Delta$ ἡμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ, φανερόν εἶναι ὅτι αἱ γραμμῆναι περιφέρεται ἐκ τῶν κέντρων Γ καὶ Δ , θέλει τέμνονται εἰς A καὶ B .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν τὸ ἀπόστημα $\Gamma\Delta$ τῶν κέντρων δύο κύκλων ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἀθροίσμα τῶν ἀκτίνων των $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἄπτονται ἐξωτερικῶς.

Φανερόν εἶναι ὅτι ὁδῶν ἔχει τὸ σημεῖον A κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἔπρεπε τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων νὰ ᾖναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων (πρό. 12.)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν τὸ ἀπόστημα $\Gamma\Delta$ τῶν κέντρων δύο κύκλων ᾖναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἄπτονται ἐσωτερικῶς. σχ. 60.

Φανερόν εἶναι ὅτι ἔχουν τὸ σημεῖον A κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ νὰ ἔχουν ἓν ἄλλο, ἔπρεπε ἡ μεγαλύτερα ἀκτὶς $\Lambda\Delta$ νὰ ᾖναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀκτίνος $\Lambda\Gamma$ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων $\Gamma\Delta$ (πρό. 12.) τὸ ὅποιον δὲν ὑπάρχει.

Πόρισμα. Λοιπὸν ἐὰν δύο κύκλοι ἄπτονται, εἴτε ἐσωτερικῶς, εἴτε ἐξωτερικῶς, τὰ κέντρα καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Σχόλιον. Οἱ οἱ κύκλοι οἵτινες ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$, καὶ διέρχονται ἐκ τῆς σιγμῆς A , ἄπτονται μεταξύ των, καὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον παρὰ τὸ A . Εὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου A ἀγῶν

ΑΕ κάθετος εις τὴν ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θέλει εἶναι κοινή
φαπτομένη εις ὅλους τοὺς κύκλους. σγ. 59 καὶ 60.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΕ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, αἱ ἴσαι
γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς τὸ
κέντρον, χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΑΒ, ΔΕ.

Αντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ, ᾖναι ἴσα, αἱ γω-
νίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι. σγ. 61.

Διότι 1.^{ον} ἐὰν ἡ γωνία ΑΓΒ ᾖναι ἴση τῇ ΔΓΕ, ἡ
μία δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευ-
ραί των εἶναι ἴσαι, φανερόν εἶναι ὅτι τὸ σημεῖον Α θέλει
πίσει εἰς Δ, καὶ τὸ σημεῖον Β εἰς Ε. Ἀλλὰ τότε τὸ
τόξον ΑΒ πρέπει ὁμοίως νὰ πῖσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ·
διότι ἐὰν τὰ δύο τόξα δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθελον ὑπάρχει
εἰς τὸ ἓν ἢ εἰς τὸ ἄλλο σημεῖον ἀνισάκως ἀπέχοντα ἀπὸ
τὸ κέντρον, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΒ = ΔΕ,

2.^{ον} Ἐὰν ὑποτεθῇ ΑΒ = ΔΕ, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ
θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΓΕ· διότι ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται δὲν
ᾖναι ἴσαι, ἔσῃ ΑΓΒ ἡ μεγαλητέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΓΙ =
ΔΓΕ· θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ΑΙ = ΔΕ·
ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τόξον ΑΒ = ΔΕ· λοιπὸν ἠθέλα-
μεν ἔχει ΑΙ = ΑΒ, ἢ τὸ μέρος ἴσον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύ-
νατον· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΒ = ΔΓΕ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΣ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐὰν δύο
γωνίαι εἰς τὸ κέντρον ΑΓΒ, ΔΓΕ ᾖναι μεταξύ των ὡς
δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὰ περιεχόμενα τόξα μεταξύ των
πλευρῶν των ΑΒ, ΔΕ, θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αὗ

αὐτοὶ ἀριθμοὶ, καὶ θέλομεν ἔχει ταύτην τὴν ἀναλογίαν
γωνία $\Lambda\Gamma\text{Β}$: γωνία $\Delta\Gamma\text{Ε}$:: τόξον $\Lambda\text{Β}$: τόξον $\Delta\text{Ε}$. σγ. 62.

Ὡς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι αἱ γωνίαι
 $\Lambda\Gamma\text{Β}$, $\Delta\Gamma\text{Ε}$, εἶναι μεταξὺ των ὡς 7 πρὸς 4, ἢ, τὸ ὅποιον
εἶναι τὸ αὐτὸ, ὅτι ἡ γωνία Μ κοινὸν μέτρον τῶν δύο
γωνιῶν, περιέχεται εἰς μὲν τὴν γωνίαν $\Lambda\Gamma\text{Β}$ ἑπτάκις,
εἰς δὲ τὴν $\Delta\Gamma\text{Ε}$ τετράκις. Ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ γωνίαι $\Lambda\Gamma\mu$,
 $\mu\Gamma\nu$, $\nu\Gamma\Pi$, κ. τ. λ., $\Delta\Gamma\chi$, $\chi\Gamma\psi$, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξὺ
των, τὰ μερικὰ τόξα $\Lambda\mu$, $\mu\nu$, $\nu\pi$, κ. τ. λ., $\Delta\chi$, $\chi\psi$ κ.τ.λ.
εἶναι παρομοίως ἴσα μεταξὺ των. (Πρὸ 15.) Λοιπὸν τὸ
ὅλον τόξον $\Lambda\text{Β}$ θέλει εἶναι εἰς τὸ ὅλον τόξον $\Delta\text{Ε}$ ὡς
7 πρὸς 4. Τώρα φανερόν ἐστίν ὅτι ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς
ἔχει χώραν, ὅταν ἀντὶ 7 καὶ 4 λάβωμεν ὅποιονδήποτε
ἄλλους ἀριθμοὺς· λοιπὸν ἐάν ὁ λόγος τῶν γωνιῶν $\Lambda\Gamma\text{Β}$,
 $\Delta\Gamma\text{Ε}$ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὰ
τόξα $\Lambda\text{Β}$, $\Delta\text{Ε}$ θέλουσι εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ γωνίαι
 $\Lambda\Gamma\text{Β}$, $\Delta\Gamma\text{Ε}$.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐάν τὰ τόξα $\Lambda\text{Β}$, $\Delta\text{Ε}$ ᾖσαν
μεταξὺ των ὡς δύο ἀκεραῖοι ἀριθμοί, αἱ γωνίαι $\Lambda\Gamma\text{Β}$,
 $\Delta\Gamma\text{Ε}$, ᾔθελον εἶναι μεταξὺ των ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ
πάντοτε ᾔθελαμεν ἔχει $\Lambda\Gamma\text{Β} : \Delta\Gamma\text{Ε} :: \Lambda\text{Β} : \Delta\text{Ε}$ · διότι ἔπει-
δὴ τὰ μερικὰ τόξα $\Lambda\mu$, $\mu\nu$, κ. τ. λ., $\Delta\chi$, $\chi\psi$, κ. τ. λ.
εἶναι ἴσα, αἱ μερικαὶ γωνίαι $\Lambda\Gamma\mu$, $\mu\Gamma\nu$, κ. τ. λ. εἶναι
παρομοίως ἴσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΖ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ὅποιονδήποτε λόγον ἔχωσι αἱ δύο γωνίαι $\Lambda\Gamma\text{Β}$, $\Lambda\Gamma\Delta$,
πάντοτε θέλουσι εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ τόξα $\Lambda\text{Β}$, $\Lambda\Delta$, τὰ
περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν καὶ γεγραμμένα
ἐκ τῶν κορυφῶν των ὡς ἐκ κέντρων μὲ ἴσας ἀκτῖνας.

Ας υποθέσωμεν τὴν μικροτέραν γωνίαν ἐντὸς τῆς μεγαλύτερας: ἐὰν ἡ ἐκφωνηθεῖσα ἀναλογία δὲν ὑπάρξη, ἡ γωνία ΑΓΒ , θέλει εἶναι εἰς τὴν γωνίαν ΑΓΔ ὡς τὸ τόξον ΑΒ εἰς ἐν τόξον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ ΑΔ . Ας υποθέσωμεν τοῦτο τὸ τόξον μεγαλύτερον, καὶ ἅς τὸ παράσῃσωμεν διὰ ΑΟ , οὕτω θελομέν ἔχει.

γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΑΓΔ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΑΟ .

Ας ἐννόησωμεν τώρα τὸ τόξον ΑΒ διηρημένον εἰς μέρη ἴσα ἕκασον τῶν ὑποίων νὰ ᾔηται μικρότερον τοῦ ΑΟ . θέλει ὑπάρχει τοῦλάχιστον ἐν σημείον διαιρέσεως μεταξύ Δ καὶ Ο : ἔστω Ι τοῦτο τὸ σημεῖον, ἅς ἐπιζευχθῇ ΓΙ . Τὰ τόξα ΑΒ , ΑΙ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ κατὰ τὸ προλαβὼν θεώρημα θελομέν ἔχει:

γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΑΓΙ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΑΙ .

Συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, βλέπομεν ὅτι αἱ ἡγούμεναι εἶναι: οἱ αὐτοὶ λοιπὸν οἱ ἐπόμενοι σχηματίζουν ἀναλογίαν. καὶ ἔχομεν

γωνία ΑΓΔ : γωνίαν ΑΓΙ : : τόξον ΑΟ : τόξον ΑΙ .

Ἀλλὰ τὸ τόξον ΑΟ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου ΑΙ : ἔπρετε λοιπὸν διὰ νὰ ὑπάρξη ἡ ἀναλογία, ἡ γωνία ΑΓΔ νὰ ᾔηται μεγαλύτερα τῆς γωνίας ΑΓΙ . ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερα· λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ γωνία ΑΓΒ νὰ ᾔηται πρὸς τὴν γωνίαν ΑΓΔ ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς τὸν τόξον μεγαλύτερον τοῦ ΑΔ .

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ᾗθελαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας δὲν δύναται νὰ ᾔηται μικρότερος τοῦ ΑΔ . λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ ΑΔ . ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν:

γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΑΓΔ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΑΔ .

Πάρισμα. Ἐπειδὴ ἡ γωνία εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τὸ περιεχόμενον τόξον μεταξύ τῶν πλειούων

της ἔχουν τριαύτην σχέσιν, ὥς·ε ὅταν ἡ γωνία αὐξάνη ἢ σμικρύνῃ, νὰ αὐξάνη ἢ νὰ σμικρύνῃ τὸ τόξον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δικαίως ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν μίαν τούτων τῶν ποσοτήτων ὡς μέτρον τῆς ἄλλης: διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἐξῆς λαμβάνομεν τὸ τόξον AB ὡς μέτρον τῆς γωνίας AGB . Πρέπει μόνον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὴν πρὸς ἀλλήλας σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦσιν αὐτάς, πρέπει νὰ ᾖναι γεγραμμένα μὲ ἴσας ἀκτῖνας· διότι τοῦτο ὑποθέτουσιν αἱ προηγούμεναι προτάσεις.

Σχόλιον. Α'. Φαίνεται φυσικώτερον νὰ μετρηταί μία ποσότης διὰ μιᾶς ἄλλης τοῦ ἰδίου εἶδους, καὶ κατ' αὐτὴν τὴν ἀρχὴν ἐπρεπε νὰ ἀναφερθῶσιν ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὴν ὀρθήν: διὰ τοῦτο λαμβανομένης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος τοῦ μέτρου, ἡ ὀξεία γωνία ἤθελεν ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ 0 καὶ 1, καὶ ἡ ἀμβλεία δι' ἀριθμοῦ μεταξὺ 1 καὶ 2. Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἐκφράζειν τὰς γωνίας δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ ἐπιτηδαιότερος εἰς τὴν χρῆσιν. Εὐρίθη ἀπλούτερον νὰ μετρῶνται αἱ γωνίαι διὰ τόξων κύκλων, διὰ τὴν εὐκολίαν τοῦ κατασκευάζειν τόξα ἴσα μὲ δεδομένα, καὶ δι' ἄλλους πολλοὺς λόγους. Ἐλέος, ἐὰν καὶ τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν διὰ τῶν τόξων κύκλου ᾖναι τρόπον τινα ἑμμεσον, μὲ εὐκολίαν ὅμως διὰ μέσου αὐτῶν συνάγομεν τὸ ἄμεσον καὶ ἀπόλυτον· διότι ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ τόξον τὸ ὅποιον μετρεῖ μίαν γωνίαν μὲ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, ὁλομεν ἔχει τὸν λόγον τῆς δεδομένης γωνίας πρὸς τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἀπόλυτον μέτρον.

Σχόλιον. Β. Ὅτι ἀπεδείχθη εἰς τὰς τρεῖς προηγούμενας προτάσεις διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν μὲ τὰ τόξα, ὑπάρχει ἐπίσης διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τομέων μὲ τὰ τόξα: διότι οἱ τομεῖς εἶναι ἴσοι ὅταν αἱ γωνίαι ᾖναι ἴσαι, καὶ ἐν γένει εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς γωνίας· λοιπὸν

δύο τομείς $ΑΓΒ$, $ΑΓΔ$, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα $ΑΒ$, $ΑΔ$, βάσεις τῶν ἰδίων τομείων.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ τόξα τοῦ κύκλου τὰ ὅποια μετροῦν τὰς γωνίας, ἢμποροῦν ὁμοίως νὰ χρησιμεύσουν ὡς μέτρον τῶν διαφορῶν τομείων τοῦ ἰδίου κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Η'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ ἰσγγεγραμμένη γωνία $ΒΑΔ$ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου $ΒΔ$ περιχομένου μεταξύ τῶν πλευρῶν της. σχ. 64. καὶ 65.

Ἀς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὐρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας $ΒΑΔ$: ἄγωμεν τὴν διάμετρον $ΑΕ$ καὶ τὰς ἀκτῖνας $ΓΒ$, $ΓΔ$. Ἡ ἐκτὸς γωνία $ΒΓΕ$, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς $ΓΑΒ$, $ΑΒΓ$. (πρ. 19, 1): ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $ΒΑΓ$ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ γωνία $ΓΑΒ = ΑΒΓ$: λοιπὸν ἡ γωνία $ΒΓΕ$ εἶναι διπλασία τῆς $ΒΑΓ$. Ἡ γωνία $ΒΓΕ$, ὡς γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον $ΒΕ$: λοιπὸν ἡ γωνία $ΒΑΓ$ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ $ΒΕ$. Αἰὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία $Γ'ΑΔ$ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ $ΕΔ$: λοιπὸν $ΒΑΓ + Γ'ΑΔ$ ἢ $ΒΑΔ$ θέλει μετρεῖται ἀπὸ τὸ ἥμισυ τοῦ $ΒΕ + ΕΔ$ ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $ΒΔ$. σχ. 64.

Ἀς ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ κέντρον $Γ$ εὐρίσκεται ἐκτὸς τῆς γωνίας $ΒΑΔ$, τότε εἰάν ἄγωμεν τὴν διάμετρον $ΑΕ$, ἡ γωνία $ΒΑΕ$ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ $ΒΕ$, ἡ γωνία $ΔΑΕ$ τὸ ἥμισυ τοῦ $ΔΕ$: λοιπὸν ἡ διαφορὰ των $ΒΑΔ$ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ $ΒΕ$ μῖνον τὸ ἥμισυ τοῦ $ΕΔ$, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $ΒΔ$. σχ. 65.

Λοιπὸν καθὼς ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχόμενου τόξου μεταξύ τῶν πλευρῶν της.

Πόρισμα. Α'. Οἱ αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα καθὼς ΒΑΓ, ΒΔΓ κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἰδίου τόξου ΒΟΓ. σχ. 66.

Β'. καθὼς γωνία ΒΑΔ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον εἶναι γωνία ὀρθή, ὡς ἔχουσα διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφέρειας ΒΟΔ, ἢ τὸ τέταρτον τῆς περιφέρειας σχ. 67.

Διὰ τὰ δεῖξωμεν τὸ αὐτὸ μὲ ἄλλον τρόπον, ὥς ἐπιζητήσῃ ἡ ἀκτίς ΑΓ· τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὅθεν ἡ γωνία ΒΑΓ = ΑΒΓ· τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι παρομοίως ἰσοσκελές· λοιπὴν ἡ γωνία ΓΑΔ = ΑΔΓ· ἀπομένως ΒΑΓ + ΓΑΔ ἢ ΒΑΔ = ΑΒΔ + ΑΔΒ. Αλλ' ὅταν αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Δ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ κάμνουν ὁμοῦ τὴν τρίτην ΒΑΔ, φανερόν εἶναι ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο φορές τὴν γωνίαν ΒΑΔ· αὗται δὲ ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή.

Γ'. Καθὼς γωνία ΒΑΓ ἐγγεγραμμένη εἰς τμήμα μείζον τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ὑψεία· διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΟΓ ἐλάσσονος ἡμιπεριφέρειας. σχ. 66.

Καὶ καθὼς γωνία ΒΟΓ ἐγγεγραμμένη εἰς τμήμα ὀλίσσον τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ἀμβλεία· διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΓ μείζονος ἡμιπεριφέρειας.

Δ'. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Γ ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· διότι ἡ γωνία ΒΑΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓΔ, ἡ γωνία ΒΓΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΔ· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ, ΒΓΔ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἔχουν διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς περιφέρειας· λοιπὸν τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 68.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΘ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ'Α.

Ἡ σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ ἀπὸ μίαν χορδὴν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜΔΓ περιεχομένου μεταξύ τῶν πλευρῶν της. σχ. 6η.

Εἰς τὴν σιγμὴν τῆς ἀφῆς Α ἅς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ· ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή, (πρ. 9) καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ, ἡ γωνία ΔΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ· λοιπὸν ΒΑΔ + ΔΑΓ ἢ ΒΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΜΔ, πλεον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου ΑΜΔΓ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία ΓΑΕ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ περιεχομένου μεταξύ τῶν πλευρῶν της.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

ΕΙΣ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑ ΒΙΒΛΙΑ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Π Ρ Ω Τ Ο Ν.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 7ο.

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, μετὰ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀλλὰ μεγαλητέραν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ἅς γραφθῶσι δύο τόξα, τὰ ὅποια τέμνονται εἰς Δ. Τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν σημείων Α καὶ Β· ἅς σημειωθῇ παρομοίως ἄνω ἢ κάτω τῆς γραμμῆς ΑΒ ἐν

δεύτερον σημείον E ισάκεις απέχον τῶν σημείων A καὶ B , ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ γραμμὴ ΔE . λέγω ὅτι ἡ ΔE τέμνει τὴν AB εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν σιγμὴν Γ .

Διότι ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν σημείων Δ καὶ E ισάκεις ἀπέχει τῶν ἁκρῶν A καὶ B , πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς AB . Ἀλλὰ διὰ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεΐα εἶναι δυνατόν νὰ διελθῇ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΔE εἶναι αὐτὴ ἡ ἰδίᾳ κάθετος τέμνουσα τὴν AB εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν σιγμὴν Γ .

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

Εξ ἑνὸς σημείου A , δεδομένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς $B\Gamma$, νὰ ὑψώσωμεν κάθετον εἰς ταύτην τὴν γραμμὴν. σχ. 71.

Ἀς ληφθῶσι τὰ σημεῖα B καὶ Γ ὥστε ισάκεις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ A , ἀκολουθῶς ἐκ τῶν σημείων B καὶ Γ , ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν ἀλλὰ μείζονα τῆς BA , ἃς γραφθῶσι δύο τόξα τὰ ὑποῖα τέμνονται εἰς Δ . ἃς ἐπιζευχθῇ ΔA καὶ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος.

Διότι ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ ισάκεις ἀπέχει τοῦ B καὶ Γ , ἀνήκει εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς $B\Gamma$. λοιπὸν ΔA εἶναι αὐτὴ ἡ κάθετος.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κάμνομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν BAD , εἰς δεδομένον σημεῖον A , ἐπὶ δεδομένης γραμμῆς $B\Gamma$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Γ'.

Εξ ἑνὸς σημείου A , ἐκτὸς τῆς εὐθείας BA δεδομένου, νὰ κατεβάσωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 72.

Εκ τοῦ σημείου A ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, ἃς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν BA εἰς δύο σημεῖα B καὶ Δ . ἃς σημειωθῇ ἀκολουθῶς σημείον τι E ισάκεις ἀπέχον ἀπὸ B καὶ Δ , καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ AE ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος.

Διότι ἕκαστον τῶν δύο σημείων A καὶ E ἰσάκεις ἀπέχει ἀπὸ B καὶ Δ · λοιπὸν ἡ AE εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς BD .

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Δ'.

Εἰς τὴν σιγμὴν A τῆς γραμμῆς AB , νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ K' . σχ. 73.

Εκ τῆς κορυφῆς K' , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν, ἃς γραφθῇ τὸ τόξον IA περατούμενον εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας. Εκ τῆς σιγμῆς A ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα AB ἴσην τῇ $K'I$, ἃς γραφθῇ τὸ ἀπρὸς-διόριστον τόξον BO · ἃς ληφθῇ ἀκολουθῶς μία ἀκτίς ἴση τῇ χορδῇ AI . Εκ τῆς σιγμῆς B ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ταύτην τὴν ἀκτῖνα, ἃς γραφθῇ τόξον τὸ ὅποιον τέμνει τὸ ἀπρὸςδιόριστον BO εἰς Δ · ἃς ἐπιτευχθῇ AD , καὶ ἡ γωνία ΔAB θέλει εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ K' .

Διότι τὰ δύο τόξα BD , AI , ἔχουν ἀκτῖνας καὶ χορδὰς ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα (πρ. 4, 2.)· ἐπομένως ἡ γωνία $BAD = IK'A$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ε'.

Νὰ διαιρέσωμεν γωνίαν ἢ τόξον δεδομένον εἰς δύο ἴσα μέρη σχ. 74.

1.^{ον} Εἰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον AB εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐκ τῶν σημείων A καὶ B ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὅποια τέμνονται εἰς Δ . Διὰ τῆς σιγμῆς Δ καὶ τοῦ κέντρου Γ ἄγομεν τὴν GD , ἥτις θέλει τέμνει τὸ τόξον AB εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν σιγμὴν E .

Διότι ἕκαστον τῶν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἰσάκεις ἀπέχει τῶν ἄκρων A καὶ B τῆς χορδῆς AB , λοιπὸν ἡ GD , εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς· ἐπομένως διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ τόξον AB εἰς τὴν σιγμὴν E . (προ. 6, 2).

2.^α Εάν δι' ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, γράφομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, τὸ τόξον ΑΒ, ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· φανερόν εἶναι ὅτι ἡ ΓΔ θέλει διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καθε ἑμισυ ΔΕ, ΕΒ, εἰς δύο ἴσα μέρη· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διὰ διαδοχικῶν υποδιαιρέσεων, γωνία ἡ τόξον δεδομένον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα, ὀκτὼ, δεκαεῖς, κ. τ. λ. ἴσα μέρη.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ζ'.

Απὸ δεδομένον σημεῖον Α, νὰ ἀξώμεν εὐθεῖαν παράλληλον ἄλλῃς δεδομένης ΒΓ. σχ. 75.

Ἐκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, γράφομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΕΟ' ἐκ τοῦ σημείου Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν τὸ τόξον ΔΖ, λαμβάνομεν ΕΔ = ΑΖ, καὶ ἐπιζευγνύοντες τὴν ΑΔ θέλομεν ἔχει τὴν ζητούμενην παράλληλον.

Διότι ἐνόνοντες τὴν ΑΕ, βλέπομεν ὅτι αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΔΔ, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΕΖ εἶναι παράλληλοι. (24, 1.).

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ζ'.

Δεδομένων δύο γωνιών Α καὶ Β ἐνὸς τετραγώνου, νὰ εὗρωμεν τὴν τρίτην. σχ. 76.

Ας ἔχθῃ ἡ ἀπροσδιόριστος γραμμὴ ΔΕΖ, ἥ κατασκευασθῇ εἰς τὴν σχημὴν Ε, ἡ γωνία ΔΕΓ = Α, καὶ ἡ ΓΕΘ = Β· ἡ γωνία ΘΕΖ θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη τρίτη· διότι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι δίδουν δι' ἀθροισμα δύο ὀρθάς.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Η'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας Α, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον σχ. 77.

Αχθείσας τῆς ἀπροσδιορίστου ΔΕ, ἃς κατασκευασθῇ εἰς τὴν σιγμὴν Δ ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ δεδομένῃ Α' ἃς ληφθῇ ἀκολουθῶς ΔΗ=Β, καὶ ΔΘ=Γ, ἃς ἐπιζευχθῇ ΗΘ καὶ ΔΗΘ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Θ'.

Δεδομένων μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Η καὶ αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι πρέπει νὰ ᾔναι προσκειμέναι εἰς τὴν δεδομένην πλευράν, ἢ ἡ μία προσκειμένη, καὶ ἡ ἄλλη ἀπέναντι: εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν, ζητοῦμεν τὴν τρίτην (πρόβ. 7), καὶ οὕτως ἔχομεν τὰς δύο προσκειμένας. Τούτου σθέντος, ἀγομεν τὴν εὐθείαν ΔΕ ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ, κἀμένομεν εἰς τὴν σιγμὴν Δ τὴν γωνίαν ΕΔΖ ἴσην μετὰ τὴν μίαν τῶν προσκειμένων γωνιῶν, καὶ εἰς τὴν σιγμὴν Ε τὴν ΔΕΗ ἴσην μετὰ τὴν ἄλλην· αἱ δύο γραμμαὶ ΔΖ, ΕΗ, θέλουσι πέμνεσθαι εἰς Θ, καὶ ΔΕΘ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον σχ. 78.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ι'.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Ας ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἴση τῇ πλευρᾷ Α' ἐκ τῆς σιγμῆς Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μετὰ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δευτέρᾳ πλευρᾷ Β, ἃς γραφθῇ τόξον ἐκ τῆς σιγμῆς Δ ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μετὰ ἀκτῖνα ἴσην τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ' ἃς γραφθῇ ἄλλο τόξον, τὸ ὅποιον θέλει τέμνει τὸ πρῶτον εἰς Ζ' ἃς ἐπιζευχθῶσι ΔΖ, ΕΖ, καὶ ΔΕΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 79.

Σχόλιον. Εάν μία τῶν πλευρῶν ἦτον μεγαλητέρα τοῦ ἄθροισματος τῶν δύο ἄλλων, τὰ τόξα δὲν ἔθελον τέμνεσθαι· ἀλλ' ὡςάκις τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν λαμβανόμενον ὥπωςδῆποτε· εἶναι μεγαλητέρον τῆς τρίτης, ἡ λύσις εἶναι πάντοτε δυνατή.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΑ'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν Α καὶ Β ἐνὸς τριγώνου, καὶ τῆς γωνίας Γ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς Β, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον. σχ. 80.

Δύο περιπτώσεις υπάρχουν. 1.^{ον} Εάν ἡ γωνία Γ ᾖναι ὀρθή ἢ ἀμβλεία, ἃς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ Γ· ἃς ληθῇ ΔΕ = Α· ἐκ τῆς σιγμῆς Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ Β, ἃς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει εἰς Ζ τὴν ΔΖ· ἃς ἐπιζευχθῇ ΕΖ, καὶ ΔΕΖ· ὁδεῖ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην περίστασιν πρέπει ἡ πλευρὰ Β νὰ ᾖναι μεγαλητέρα τῆς Α, διότι ἡ γωνία Γ οὔτα ὀρθή ἢ ἀμβλεία εἶναι ἢ μεγαλητέρα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· λοιπὸν ἡ ἀπέναντι πλευρὰ πρέπει ὁμοίως νὰ ᾖναι ἢ μεγαλητέρα.

2.^{ον} Εάν ἡ γωνία Γ ᾖναι ὀξεῖα, καὶ Β μεγαλητέρα τῆς Α ἢ αὐτὴ κατασκευὴ ἔχει χώραν, καὶ ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 81.

Ἀλλ' ἐὰν ἐν τῇ Γ εἶναι ὀξεῖα, ἡ πλευρὰ Β ᾖναι μείζων τῆς Α, τότε τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τοῦ κέντρου Ε μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΖ = Β, ὁδεῖ τέμνει τὴν πλευρὰν ΔΖ εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Η· θεμελίω ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ Α· θέλουν ὑπάρχει λοιπὸν δύο τρίγωνα ΔΕΖ, ΔΕΗ, ἐπίσης πληροῦντα εἰς τὸ πρόβλημα ὡς ἔχοντα τὰ αὐτὰ δοθέντα. σχ. 82.

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα ἔθελεν εἶναι ἀδύνατον εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ἐὰν ἡ πλευρὰ Β ᾖτον μικροτέρα τῆς φερομένης καθέτου ἐκ τῆς σιγμῆς Ε ἐπὶ τῇ ΔΖ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΒ'.

Δεδομένων τῶν προσκειμένων πλευρῶν Α καὶ Β ἐνὸς παραλληλογράμμου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας Γ, νὰ γράψωμεν τὸ παραλληλόγραμμον. σχ. 83.

Λοιπὸν τὴν $\Delta\text{E} = \text{A}$, κἀμνημεν εἰς τὴν σιγμὴν Δ τὴν γωνίαν $\text{Z}\Delta\text{E} = \Gamma$, λαμβάνομεν $\Delta\text{Z} = \text{B}$ · γράφομεν δύο τόξα, τὸ μὲν ἐκ τῆς σιγμῆς Ζ ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα $\text{Z}\text{H} = \Delta\text{E}$, τὸ δὲ ἐκ τῆς σιγμῆς Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα $\text{E}\text{H} = \Delta\text{Z}$ · ἐνόνομεν τὴν σιγμὴν Η, ὅπου τὰ δύο ταῦτα τόξα τέμνονται, μὲ τὰς Ζ καὶ Ε, διὰ τῶν ΖΗ, ΕΗ· καὶ $\Delta\text{E}\text{H}\text{Z}$ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὸ γεγραμμένον σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον (3ο, 1)· καὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο περιέχει τὰς δεδομένας πλευρὰς καὶ τὴν δεδομένην γωνίαν.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ᾖ ὀρθή, τὸ σχῆμα θέλει εἶναι ὀρθογώνιον· ἂν, περιπλέον, καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι, θέλει εἶναι τετράγωνον.

Π Α Ο Β Λ Η Μ Α ΙΓ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου δεδομένου. σχ. 84.

Ἀς ληφθῶσι κατ' ἀρέσκειαν εἰς τὴν περιφέρειαν ἢ εἰς τὸ τόξον τρία σημεῖα Α, Β, Γ· ἃς ἐπιτευχθῶσιν αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ, ἃς τεμηθῶσι δίχα αἱ γραμμαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ. Ἡ σιγμὴ Ο, ὅπου αὗται αἱ καθέτοι συναπαντῶνται, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

Σχόλιον. Ἡ αὕτῃ κατασκευὴ χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ κἀμωμεν νὰ διέλθῃ περιφέρεια ἀπὸ τρεῖς δεδομένας σιγμῶν Α, Β, Γ, καὶ παρομοίως εἰς τὸ νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν εἰς δεδομένον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

Ἐκ τῷ δεδομένον σημείον νὰ ᾄξωμεν ἐφαπτομένην εἰς δεδομένον κύκλον.

Ἐάν τὸ δεδομένον σημείον A ᾖ ἐπὶ τῆς περιφέρειας, ὡς ἐπιζευχθῇ ἡ ἀκτίς IA , καὶ ὥς ἀγθῇ AD κάθετος εἰς τὴν IA , AD θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη. (9, 2) σχ. 85.

Ἐάν δὲ τὸ σημείον A ᾖ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὡς ἐνωθῇ μὲν τὸ κέντρον διὰ τῆς εὐθείας IA ὡς τμηθῇ δίχα ἡ IA εἰς τὴν τμηθῇ O ἐκ τοῦ O , ὡς ἐκ κέντρον, καὶ μὲν τὴν ἀκτὶνα OI , ὡς γραφθῇ περιφέρεια ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην εἰς τὴν τμηθῇ B ὡς ἐπιζευχθῇ AB , καὶ αὕτη θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη. σχ. 86.

Διδότι ἰάν ἐπιζευχθῇ ἡ GB , ἡ γωνία $ΓΒΑ$ εἶναι ὀρθή ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ (18, 2)· λοιπὸν AB εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος GB , ἀκολουθῶς εἶναι ἐφαπτομένη.

Σχόλιον. Ὅταν τὸ σημείον A ᾖ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε δύο ἐφαπτόμεναι ἴσαι AB , AD αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ A · ἴσαι, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΓΒΑ$, $ΓΔΑ$, ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν $ΓΑ$ κοινὴν, καὶ τὴν πλευρὰν $ΓΒ = ΓΔ$ · λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1) ἵπομένως $AD = AB$, καὶ ἐνταύτῃ ἡ γωνία $ΓΑΔ = ΓΑΒ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

Νὰ ἐγγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δεδομένον τρίγωνον $ABΓ$. σχ. 87.

Ὡς τμηθῶσι δίχα αἱ γωνίαι A καὶ B ὑπὸ τῶν γραμμῶν AO καὶ BO αἵτινες συναπάντωνται εἰς O . Ἐκ τῆς τμηθῆς O ὡς καταβασθῶσιν αἱ κάθετοι OD , OE , OZ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου· λέγω ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι μεταξὺ τῶν· διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γωνία $ΔΑΟ = ΟΑΖ$, ἡ ὀρθὴ γωνία $ΔΑΟ = ΑΖΟ$ · λοι-

πὸν ἢ τρίτη $\Delta O \Delta$ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ $\Delta O Z$. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἢ πλευρὰ AO εἶναι κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα $\Delta O \Delta$, $\Delta O Z$, καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι εἰς τὴν ἴσην πλευρὰν εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα· ἐπομένως $\Delta O = O Z$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεκνύομεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα $\Delta O \Delta$, $\Delta O E$, εἶναι ἴσα· λοιπὸν $O \Delta = O E$, λοιπὸν αἱ τρεῖς κάθετοι $O \Delta, O E, O Z$, εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Τώρα ἴαν ἐκ τῆς σιγμῆς O , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μετὴν ἀκτῖνα $O \Delta$, γραφθῇ περιφέρεια, φανερόν εἶναι ὅτι θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ · διότι ἡ πλευρὰ AB κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος $O \Delta$, εἶναι ἐφαπτομένη· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς πλευρὰς $B\Gamma$, $A\Gamma$.

Σχόλιον. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αὗτινες τέμνουσι δίχα τὰς τρεῖς γωνίας ἑνὸς τριγώνου, συντρέχουσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΖ'.

Επὶ τῆς δεδομένης εὐθείας AB , νὰ γράψωμεν τμήμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν δεδομένην γωνίαν Γ , τευτέσι, τμήμα τοιοῦτον ὥστε ὅλαι αἱ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι νὰ ἦναι ἴσαι μετὰ τὴν δεδομένην Γ . σχ. 88 καὶ 89.

Ἀς προεκβληθῇ AB πρὸς τὸ Δ , ἃς γάνῃ εἰς τὴν σιγμὴν B ἡ γωνία $\Delta BE = \Gamma$, ἃς ὑψωθῇ ἡ BO κάθετος εἰς τὴν BE καὶ HO κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς AB · ἐκ τῆς σιγμῆς τῆς συναπαντήσεως O , ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μετὴν ἀκτῖνα OB , ἃς γραφθῇ κύκλος, τὸ ζητούμενον τμήμα θέλει εἶναι AMB .

Διότι ἐπειδὴ BZ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος OB , εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ἡ γωνία ABZ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου $AK'B$ (19, 2)· ἀπὸ ἄλλο μέρος ἢ γωνία AMB , ὡς ἐγγεγραμμένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου $AK'B$, λοιπὸν ἡ γωνία $AMB = ABZ = EBA = \Gamma$ · λοιπὸν ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ τμήμα AMB εἶναι ἴσαι μετὰ τὴν δεδομένην Γ .

Σχόλιον. Εάν ἡ δεδομένη γωνία ᾗτον ὀρθή, τὸ ζήτημένον τμήμα ἤθελεν εἶναι τὸ γεγραμμένον ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΖ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον δύο δεδομένων εὐθειῶν AB, ΓΔ, ἐάν ὅμως ἔχωσι κοινὸν μέτρον μεταξὺ των. σχ. 90.

Φέρομεν τὴν μικροτέραν ΓΔ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας AB τοσάκις ὡσάκις εἶναι δυνατόν νὰ περιέχεται· παραδείγματος χάριν, δις, μὲ τὸ ὑπόλοιπον BE.

Φέρομεν τὸ ὑπόλοιπον BE ἐπὶ τῆς ΓΔ, τοσάκις ὡσάκις εἶναι δυνατόν νὰ περιέχεται, μίαν φοράν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΔZ.

Φέρομεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ΔZ ἐπὶ τοῦ πρώτου BE, τοσάκις ὡσάκις εἶναι δυνατόν νὰ περιέχεται, μίαν φοράν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον BH.

Φέρομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον BH ἐπὶ τοῦ δευτέρου ΔZ, τοσάκις ὡσάκις εἶναι δυνατόν νὰ περιέχεται.

Εἰς ἀκολουθοῦμεν οὕτως ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον τὸ ὅποιον ἀκριβῶς νὰ περιέχεται εἰς τὸ προηγούμενον.

Τότε τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν, καὶ θεωροῦντές το ὡς μονάδα, εὐρίσκομεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν προηγούμενων ὑπολοίπων καὶ τέλος τὰς τῶν δεδομένων γραμμῶν, διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον των ἢ τὸν λόγον των ἐκφραζόμενον δι' ἀριθμῶν.

Εάν, π. χ., εὕρωμεν ὅτι HB περιέχεται ἀκριβῶς δις εἰς ZΔ, BH θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν. Ἐστω $BH = 1$, θέλομεν ἔχει $ZΔ = 2$ · ἀλλὰ EB περιέχει μίαν φοράν ZΔ πλεον HB· λοιπὸν $EB = 3$. ΓΔ περιέχει μίαν φοράν EB πλεον ZΔ· λοιπὸν $ΓΔ = 5$ · τέλος AB περιέχει δις τὴν ΓΔ πλεον EB· λοιπὸν $AB = 13$ · διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν AB, ΓΔ εἶναι ὁ

τοῦ 13 πρὸς 5. Ἐὰν ἡ ΓΔ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι $\frac{13}{5}$, ἴαν δὲ ἡ ΑΒ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΓΔ ἤθελεν εἶναι $\frac{5}{13}$.

Σχόλιον. Ἡ ἐκ τεθεῖσα μέθοδος εἶναι ἡ αὐτὴ μετὰ ἐκείνην τὴν ὁποίαν δίδει ἡ Αριθμητικὴ διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο δὲν ἔχει χρείαν ἄλλης ἀποδείξεως.

Δυνατὸν ὅσον μακρὰν καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἐργασίαν, νὰ μὴ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ ὅποιον ἀκριβῶς νὰ περιέγεται εἰς τὸ προηγούμενον. Τότε αἱ δύο γραμμαὶ δὲν ἔχουν μέτρον, καὶ λέγονται ἀσύμμετροι (incommensurables): ἐντὸς ὀλίγου θελομεν ἰδεῖ ἐν παρδείγματι εἰς τὸν λόγον τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Τότε λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκριβῆ λόγον δι' ἀριθμῶν· ἀλλὰ παραβλέποντες τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, εὕρισκομεν λόγον περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντα εἰς τὸν ἀληθινόν, καθὼς ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσύτερον ἢ ὀλιγώτερον.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΗ'.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Β καὶ Α, νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον των, ἔαν ἔχωσι, καὶ ἐκ τούτου τὸν λόγον των εἰς ἀριθμοὺς. σχ. 91.

Ας γραφθῶσι μετὰ ἴσας ἀκτῖνας τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ, τὰ ὅποια μετροῦσι ταύτας τὰς γωνίας· ἀκολουθῶς πράττομεν διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα· διότι ἐν τόξον δύναται νὰ φερθῇ ἐπὶ ἄλλου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος, καθὼς εὐθεία ἐπὶ εὐθείας. Οὕτω θέλομεν φθάσει εἰς τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ἔαν ἔχωσι, καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν των λόγον. Ὁ λόγος οὗτος θέλει εἶναι ὁ αὐτὸς μετὰ ἐκείνον τῶν δεδομένων γωνιῶν

(17, 2) καὶ ἐὰν $\Delta\Omega$ ᾖναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων, $\Lambda\Delta\Omega$ θέλει εἶναι τὸ τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα παρομοίως νὰ εὐρωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν μιᾶς γωνίας συγκρίνοντας τὸ τόξον ὅπου μετρεῖ αὐτὴν μὲ ὅλην τὴν περιφέρειαν: ἐὰν π. χ. τὸ τόξον $\Gamma\Delta$ ᾖναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ὡς β πρὸς 2β , ἡ γωνία Λ θέλει εἶναι τὰ $\frac{\beta}{2}$ τεσσαρσὺν ὁρθῶν, ἢ τὰ $\frac{\beta}{4}$ τῆς ὁρθῆς.

Δυνατὸν νὰ ἀκλουθήσῃ ὅπου τὰ συγκρινόμενα τόξα νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν μέτρον: τότε διὰ τὰς γωνίας ὁλομεν ἔχει λόγους περισσύτερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντας εἰς τὸν ἀληθινόν, καθὼς ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσότερο ἢ ὀλιγώτερον.

B I B Λ Ι Ο Ν Ι'.

ΛΙ ΑΝ Λ Α Ο Γ Ι Α Ι Τ Ω Ν Σ Χ Η Μ Α Τ Ω Ν.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Ι.

Α'. **Κ**ΑΛΩ σχήματα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι.

Δύο σχήματα ἤμπορουν νὰ ᾖναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ πολλὰ ἀνόμοια: κύκλος, παραδείγματος χάριν, ἤμπορεῖ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τετράγωνον, τρίγωνον μὲ ὀρθογώνιον κ.τ.λ.

Τὴν ὀνομασίαν ἴσα σχήματα θέλω ἀποδίδει εἰς ἐκεῖνα τὰ ὅποια ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσιν εἰς ὅλα τῶν τὰ σημαῖα: τοιαῦτα εἶναι δύο κύκλοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς πλευраὶ εἶναι ἴσαι ἢ καθεὶ μία μὲ τὴν καθεὶ μίαν κ. τ. λ.

Β'. Δύο σχήματα είναι ὁμοία, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μετὰ τὴν κάθε μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Δι' ὁμολόγους πλευρὰς ἐννοοῦμεν ἐκείνας αἵτινες ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο σχήματα, ἢ πρόσκεινται εἰς ἴσας γωνίας. Αὗται δὲ αἱ γωνίαι καλοῦνται ὁμοίως γωνίαι ὁμόλογοι.

Δύο σχήματα ἴσα εἶναι πάντοτε ὁμοία· ἀλλὰ δύο σχήματα ὁμοία ἢμποροῦν νὰ ἦναι πολλὰ ἄνισα.

Γ'. Εἰς δύο διαφρητικούς κύκλους, καλοῦνται τόξα ὁμοία, τομεῖς ὅμοιοι, τμήματα ὁμοία, τὰ ἀνταποκρινόμενα εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον ἴσας.

Οὕτως οὕσης τῆς γωνίας Λ ἴσης μετὰ τὴν Θ , τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ὁμοίον μετὰ τὸ τόξον $\Delta\text{Ε}$, ὁ τομεὺς ΑΒΓ μετὰ τὸν τομεῖα ΟΔΕ , κ. τ. λ. σχ. 92.

Δ'. Τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἡ κάθετος ΕΖ ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ , ΓΔ , λαμβανομένων ὡς βάσεων. σχ. 93.

Ε'. τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας Λ ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ λαμβανομένης ὡς βάσεως. σχ. 94.

ΣΤ'. Τὸ ὕψος τοῦ τραπέζιου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΕΖ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν τοῦ ΑΒ , ΓΔ . σχ. 95.

Ζ'. Τὸ ἔμβαδὸν ἢ ἐπιφάνεια ἐνὸς σχήματος εἶναι σχεδὸν λέξεις συνώνυμοι. Ἡ λέξις ἔμβαδόν· σημειώνει μερικώτερον τὴν ποσότητα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος καθ' ὅσον μετρεῖται ἢ συγκρίνεται μετὰ ἄλλας ἐπιφανείας.

Σ. Κ. Πρὸς κατάληψιν τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τῶν ἀκολουθῶν, πρέπει ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐνθυμηται καλῶς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, διότι τὴν ὁποίαν παραπέμπεται εἰς τὰς κοινὰς πραγματείας τῆς Αριθμητικῆς καὶ Ἀλγεβρας. Ἡμεῖς δὲ μόνον μίαν παρατήρησιν θέλομεν κάμει,

ἥτις θέλει χρησιμεύει διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς ἀληθινῆς ἐννοίας τῶν προτάσεων, καὶ τὴν διάλυσιν κάθε δυσκολίας ἢ ἀσφαλείας, ἥτις ἤμποροῦσε νὰ ἀπαντηθῇ εἴτε εἰς τὴν ἐκφώνησιν, εἴτε εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων.

Εἰν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $A:B::\Gamma:\Delta$, γνωστὸν εἶναι ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων $A \times \Delta$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων $B \times \Gamma$.

Ἡ ἀλήθεια αὕτη εἶναι ἀναντίρρητος διὰ τοὺς ἀριθμούς· ἀλλ' ὅχι ὀλιγώτερον ὑπάρχει δι' ὅποιαςδήποτε ποσότητας, φθάνει μόνον νὰ ἐκφράζωνται ἢ νὰ τὰς ἐννοῶμεν ἐκφραζόμενας δι' ἀριθμῶν· καὶ τοῦτο πάντοτε δυνάμεθα νὰ υποθέσωμεν· ἰάν, παραδείγματος χάριν, A, B, Γ, Δ ἦναι γραμμαί, ἤμποροῦμεν νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι μία τούτων τῶν τεσσάρων γραμμῶν ἢ, ἂν θελωμεν, μία πέμπτη εἶναι κοινὸν μέτρον τούτων καὶ λαμβάνεται ὡς μονάς. Τότε ἕκασον τῶν συχρίων A, B, Γ, Δ παριστάνει ἀριθμὸν τινὰ μονάδων, ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, συμμετρικόν ἢ ἀσύμμετρον, καὶ ἡ μεταξὺ τῶν γραμμῶν A, B, Γ, Δ ἀναλογία τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν γραμμῶν A καὶ Δ , τὸ ὅποιν καλεῖται καὶ ὀρθογώνιον τῶν ἀλλότι δὲν εἶναι παρὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶν μονάδων (unités linéaires) τῶν περιχομένων εἰς A , πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μονάδων τῶν περιχομένων εἰς B · καὶ εὐκόλως ἐννοεῖται ὅτι τοῦτο τὸ γινόμενον δύναται καὶ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ προκύπτον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ τὰς γραμμάς B καὶ Γ .

Αἱ ποσότητες A καὶ B ἤμποροῦν νὰ ἦναι ἐνὸς τινὸς εἶδους, παραδείγματος χάριν, γραμμαί, καὶ αἱ ποσότητες Γ καὶ Δ ἄλλου διαφορητικοῦ, παραδείγματος χάριν, ἐπιφάνειαι. Τότε πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῶμεν ταύτας τὰς ποσότητας ὡς ἀριθμούς· αἱ μὲν A καὶ B θελοῦν ἐκφρά-

ζεσθαι διὰ γραμμικῶν μονάδων, αἱ δὲ Γ καὶ Δ διὰ μονάδων ἐπιφανείας, καὶ τὸ γινόμενον $A \times \Delta$ καθὼς καὶ τὸ $B \wedge \Gamma$ θέλουν εἶναι ἀριθμοί.

Ὡς γένει, εἰς ὅλας τὰς ἐργασίας τὰς ὁποίας θελομεν ἐκτελεῖ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν, πάντοτε πρέπει νὰ θεωρῶνται οἱ ὅροι αὐτῶν ὡς τόσοι ἀριθμοί, κατὰ τὸ εἶδος εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστος ἀνήκει, καὶ καμμία δυσκλία δὲν θέλει ἀπαντᾶται εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἐργασιῶν τούτων καὶ τῶν ἀπὸ αὐτὰς συναγομένων συνεπειῶν.

Νομίζομεν χρεὸς μας νὰ εἰδοποιήσωμεν προσέτι ὅτι πολλάι τῶν ἀποδείξεών μας θεμελιοῦνται ἐπὶ μερικῶν κανόνων τῆς Ἀλγεβρας τῶν ἀπλουστέρων, οἱ ὅποιοι καὶ αὐτῇ ἐπιτελεῖσθαι ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀξιωμάτων: οὕτως ἔαν ἔχωμεν $A=B+\Gamma$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέλος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα M , συνάγομεν $A \times M = B \times M + \Gamma \times M$ · παρομοίως ἔαν $A=B+\Gamma$ καὶ $\Delta=E-\Gamma$, καὶ προσθεῶσιν αἱ ἴσαι ποσότητες, ἐξαλειφθέντων τῶν $+\Gamma$ καὶ $-\Gamma$, συνάγομεν $A+\Delta=B+E$, καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων. ταῦτα εἶναι οἰκοθεν σαφῆ. Ἀλλὰ, τυχοῦσης δυσκολίας, καλὸν θέλει εἶναι νὰ συμβουλευέται τινὰς τὰ βιβλία τῆς Ἀλγεβρας, καὶ οὕτω νὰ μιγνύῃ τὴν σπουδὴν τῶν δύο τούτων ἐπιτημάτων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα βέβαις ἔχοντα καὶ ἰσοϋψῆ ὄντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐστω AB , σχ. 96. ἡ κοινὴ βάσις τῶν δύο παραλληλογράμμων $ABFA$, $ABEZ$ · ἵπαιδὴ ὑποτίθενται ἰσοϋψῆ, αἱ ἄνω βάσεις $\Delta\Gamma$, ZE , πρέπει νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου τῆς AB . Τώρα ἐκ τῆς φύσεως τῶν παραλληλογράμμων $AD=BF$, καὶ $AZ=BE$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\Delta\Gamma=AB$, καὶ $ZE=AB$ · λοιπὸν

$\Delta\Gamma = ZE$ ὅθεν, ἂν ἀφαιρεθῶσι $\Delta\Gamma$ καὶ ZE ἀπὸ τῆν αὐτὴν γραμμὴν $ΔΕ$, τὰ ὑπόλοιπα $ΓΕ$ καὶ ΔZ θέλουσιν εἶναι ἴσα.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα $\Delta\Delta Z$, $ΓΒΕ$, εἶναι ἰσοπλευρά μεταξὺ των, καὶ ἰσομένως ἴσα.

Ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ τετραπλεύρου $ΑΒΕΔ$ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον $\Delta\Delta Z$, μένει τὸ παραλληλόγραμμον $\DeltaΒΕΖ$ · καὶ ἂν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου $ΑΒΕΔ$ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον $ΓΒΕ$, μένει τὸ παραλληλόγραμμον $\DeltaΒΓΔ$ · λοιπὸν τὰ δύο παραλληλόγραμμα $\DeltaΒΓΔ$, $\DeltaΒΕΖ$, τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ἔχοντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Κάθε παραλληλόγραμμον $\DeltaΒΓΔ$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον $\DeltaΒΕΖ$ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 97.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε τρίγωνον $\DeltaΒΓ$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου $\DeltaΒΓΔ$ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 98.

Διότι τὰ τρίγωνα $\DeltaΒΓ$, $\DeltaΓΔ$ εἶναι ἴσα (πρ. 28, 1)

Πόρισμα. Α'. Λοιπὸν ἓν τρίγωνον $\DeltaΒΓ$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου $ΒΓΕΖ$ τῆς αὐτῆς βάσεως $ΒΓ$ καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους $\DeltaΟ$. διότι τὸ ὀρθογώνιον $ΒΓΕΖ$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον $\DeltaΒΓΔ$.

Πόρισμα. Β'. Ὅλα τὰ τρίγωνα τὰ ἴσα βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοῦψῃ ὄντα εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἰσοῦψῃ ὀρθογώνια εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ βάσεις των.

Ἐστωσαν $\DeltaΒΓΔ$, $\DeltaΕΖΔ$ δύο ὀρθογώνια τοῦ ἰδίου ὕψους $\DeltaΔ$ · λέγω ὅτι εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ βάσεις των $\DeltaΒ$, $\DeltaΕ$. σχ. 99.

Ἀς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς βάσεις AB, AE συμμετρικὰς, καὶ ὅτι εἶναι μεταξὺ των, παραδείγματος χάριν, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 4: ἔὰν AB διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη, AE θέλει περιέχει 4 ἐκ τούτων· ἀπὸ κάθε τεγμῆν διαιρέσεως ἅς ὑφωθῇ μία κάθετος εἰς τὴν βάσιν, θέλουν σχηματισθῇ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἴσα μεταξὺ των, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ἐὸ ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ θέλει περιέχει ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἐν ᾗ τὸ $AEZ\Delta$ τέσσαρα· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AEZ\Delta$ ὡς 7 πρὸς 4, ἢ ὡς AB πρὸς AE . Ο αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς κάθε ἄλλον λόγον διαφορετικὸν ἀπὸ τὸν τοῦ 7 πρὸς 4· λοιπὸν ὅποιοςδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡναι ὁ λόγος οὗτος, φθάνει νὰ ᾖναι συμμετρικὸς, ὁλοκλήρως ἔχει.

$$AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AE.$$

Ἀς ὑποθέσωμεν, δεύτερον, ὅτι αἱ βάσεις AB, AE εἶναι ἀσύμμετροι μεταξὺ των· λέγω ὅτι ἀκόμη θέλουμεν ἔχει. σλ. 100.

$$AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AE.$$

Διότι ἔὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ᾖναι ἀληθὴς, τῶν τριῶν πρώτων ὅρων μενόντων τῶν αὐτῶν, ὁ τέταρτος θέλει εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ AE . Ἀς τὸν ὑποθέσωμεν μεγαλύτερον καὶ ὅτι ἔχουμεν,

$$AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AO$$

Ἀς διαιρεθῇ ἡ AB εἰς μέρη ἴσα μικρότερα ἀπὸ EO , τοῦλάχιστον θέλει ὑπάρχει ἐν σημείον διαιρέσεως I μεταξὺ E καὶ O : ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἅς ὑφωθῇ ἐπὶ τῆς AI ἡ κάθετος IK : αἱ βάσεις AB, AI , θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τὰ ἀποδεδειγμένα θέλομεν ἔχει

$$AB\Gamma\Delta : AIK'\Delta :: AB : AI.$$

ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $AB\Gamma\Delta : AEZ\Delta :: AB : AO$.

Ἐς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἴσοι·
 ἵστων οἱ ἐπόμενοι σχηματίζουσι ἀναλογίαν, καὶ συνάγομεν·

$$ΑΙΚ'Α : ΑΕΖΔ :: ΑΙ : ΑΘ.$$

Ἀλλὰ ΑΘ εἶναι μείζων ΑΙ' ἔπρεπε λοιπὸν διὰ τὴν
 ὑπέρχουσαν ἢ τοιαύτη ἀναλογία τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ νὰ ᾔηται
 μείζον τοῦ ΑΙΚ'Α· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον·
 λοιπὸν ἡ ἀναλογία εἶναι ἀδύνατος. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα
 ΑΒΓΔ δὲν δύναται νὰ ᾔηται πρὸς τὸ ΑΕΖΔ ὡς ΑΒ πρὸς
 γινόμενον μείζονα τῆς ΑΕ.

Αἱ ὁμοίου συλλογισμοὶ, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ τέ-
 τартος ὅρος τῆς ἀναλογίας δὲν ἔμπορεῖ νὰ ᾔηται ἐλάσ-
 σων τῆς ΑΕ'· λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ ΑΕ.

Οποιοσδήποτε ἄρα καὶ ᾗ ᾔηται ὁ λόγος τῶν βάσεων,
 δύο ὀρθογώνια ἰσοϋψῆ ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ, εἶναι μετὰξὺ των
 ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ.

$$Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.$$

$$Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.$$

Δύο ὑπὸ καθέκατε ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΗΖ εἶναι με-
 ταξὺ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων πολλαπλασιαζο-
 μένων ἐπὶ τὰ ὕψη, εἰς τρόπον ὅτε ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ ::
 ΑΒΧΔΔ : ΑΕΧΔΖ. σχ. 101.

Ἀφ' οὗ τὰ δύο ὀρθογώνια διαταχθῶσιν εἰς τρόπον ὅτε
 αἱ γωνίαι εἰς Α νὰ ᾔηται κατὰ κορυφὴν, ὥς παρεκδραγθῶσιν
 αἱ πλευраὶ ΗΕ, ΓΔ, εἰς εὐ νὰ συνεχισθῶσιν εἰς Θ.
 Τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΘΔ, ἔχουσι τὸ ἴδιον ὕψος
 ΑΔ· εἶναι λοιπὸν πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ·
 ὡσαύτως, τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΕΘΔ, ΑΕΗΖ, ἔχουσι τὸ
 αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι λοιπὸν πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις
 των ΑΔ, ΑΖ· οὕτω θελομεν εἶναι τὰς δύο ἀναλογίας.

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ :: ΑΒ : ΑΕ$$

$$ΑΕΘΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΔ : ΑΖ$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ παρατηροῦντες ὅτι ὁ μέσος ὁρος ΑΕΘΑ ὡς κοινὸς πολλαπλασιασθῆς εἰς τὸν ἡγούμενον καὶ ἐπόμενον ἡμπορεῖ νὰ ἐξαλειφθῇ, θελομεν ἔχει,

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΒ \times ΑΔ : ΑΕ \times ΑΖ.$$

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ἐνὸς ὀρθογωνίου τὸ γινόμενον τῆς βάσεως του, κατὰ τοῦ ὕψους του, φθάνει μόνον διὰ τοῦτου τοῦ γινομένου νὰ ἐννοῶμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὴν βάσιν, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὸ ὕψος.

Τὸ μέτρον ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι ἀπόλυτον, ἀλλὰ σχετικόν· προϋποθέτει τὴν ἐκτίμησιν ἄλλου ὀρθογωνίου διὰ τῆς καταμετρήσεως τῶν πλευρῶν του μὲ τὴν αὐτὴν γραμμικὴν μονάδα· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιορίζεται ἐν δεύτερον γινόμενον καὶ ὁ λόγος τῶν δύο γινόμενων θελεῖ εἶναι ἴσος μὲ τὴν τῶν ὀρθογωνίων, κατὰ τὴν ἀποδειγθεῖσαν πρότασιν.

Ἐάν παράδειγματος χάριν ἡ βᾶσις τοῦ ὀρθογωνίου Α εἶναι τριῶν μονάδων καὶ τὸ ὕψος του ἑξέκα, τὸ ὀρθογώνιον θελεῖ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3×10 ἢ 30, ἀλλ' αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς οὕτω μεμονωμένος δὲν σημαίνει τίποτε· ἐάν ὅμως ἔχωμεν ἐν δεύτερον ὀρθογώνιον Β ἡ βᾶσις τοῦ ὁποίου νὰ ᾖναι δώδεκα μονάδων, καὶ τὸ ὕψος ἐπτὰ, τὸ δεύτερον ὀρθογώνιον θελεῖ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7×12 , ἢ 84· ἐνταῦθεν θελομεν συμπεράνει ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια Α καὶ Β εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς 30 πρὸς 84. Ἐάν λοιπὸν ἐκ συνθήκης ἐλαμβάναμεν τὸ ὀρθογώνιον Α διὰ τὴν μονάδα τοῦ μέτρου εἰς τὰς ἐπιφανείας, τὸ ὀρθογώνιον Β ἔοικεν ἔχει τότε διὰ μέτρον

ἄπλοτον ⁷² ταυτέρῃ ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲν ⁷⁴ μονά-
δος ἱπικνείας.

Κοινώτερον καὶ ἁπλούτερον εἶναι νὰ λαμβάνεται ὡς
μονὰς ἐπιφανείας τὸ τετράγωνον, καὶ ἐκλέγεται τὸ τε-
τράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους·
τάτε τὸ μέτρον τὸ ὅποιον ἁπλῶς θεωρήσαμεν ὡς σχε-
τικὸν γίνεται ἄπλοτον· ὁ ἀριθμὸς, παραδείγματος χάριν,
30 διὰ τοῦ ὁποίου ἐμετρήσαμεν τὸ ὀρθογώνιον Α, πα-
ριστάνει 30 μονάδας ἐπιφανείας, ἢ 30 τετράγωνα ἢ πλευρὰ
τῶν ὀρθῶν εἶναι ἡ μονὰς· τοῦτο γίνεται ἐπαισθητὴν
διὰ τοῦ σχ. 102.

Συχνάκις εἰς τὴν ἱεωμετρίαν συγγέεται τὸ γινόμενον
ἑνὸς γραμμῶν μὲ τὸ ὀρθογώνιον των, καὶ ἡ ἐκφρασις
αὕτη μετέβη καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σημειοῦνσα τὸ
γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν, καθὼς ἡ τοῦ τετρα-
γώνου πρὸς παρὰ τῶν τοῦ γινομένου ἑνὸς ἀριθμοῦ
ἐφ' ἑαυτὸν.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, κ. τ. λ. εἶναι
1, 4, 9, κ. τ. λ. Οὗτοι βλέπομεν ὅτι τὸ κατασκευαζό-
μενον τετράγωνον ἐπὶ γραμμῆς διπλασίας εἶναι τετρα-
πλάσιον, ἐπὶ τριπλασίας ἐννιπλασίον, καὶ ἐφεξῆς σχ. 103.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε', Θ Ε Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἐμβαδὸν ὁποιοῦδήποτε παραλληλογράμμου εἶναι
ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον
μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒ καὶ
τοῦ ἰδίου ὕψους ΒΕ (πρὸς 1)· ἀλλὰ τοῦτο ἔχει διὰ
μέτρον, $AB \times BE$ (πρὸς 1)· λοιπὸν $AB \times BE$ ἰσοῦται
μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, σχ. 97.

Π Ὁ ρ ι σ μ ο ς. Τὰ παραλληλόγραμμα τῆς αὐτῆς βάσεως
εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ παραλληλό-

γραμμά' τοῦ ἰδίου ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· διότι ἰάν A, B, Γ παριστάνωσιν ὁποιαδήποτε ποσότητας, ἔχομεν ἐν γένει $A \times \Gamma : B \times \Gamma :: A : B$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου $AB\Gamma E$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν $B\Gamma$ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος AA (πρό. 2)· ἀλλὰ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου $= B\Gamma \times AA$ (πρό. 5)· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγώνου $= \frac{1}{2} B\Gamma \times AA$ ἢ $B\Gamma \times \frac{1}{2} AA$ σχ. 104.

Πόρισμα. Δύο τρίγωνα ἰσοῦσθ' εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου $AB\Gamma A$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος του EZ , πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων βάσεων, $BB, \Gamma A$. σχ. 105.

Ἐκ τῆς σιγμῆς I , μέσου τῆς πλευρᾶς ΓB , ἄς ἀχθῇ ἡ $K'A$ παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς AA , καὶ ἄς προεκβληθῇ $\Delta I'$ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν $K'A$.

Εἰς τὰ τρίγωνα $IBA, I\Gamma K'$, ἔχομεν τὴν πλευρὰν $IB = I\Gamma$ ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν γωνίαν $AIB = I\Gamma K'$, καὶ τὴν $IBA = I\Gamma K'$, ὅτι καὶ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλοι (πρό. 24, 1)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρ. 7, 1)· τὸ τραπέζιον ἄρα $AB\Gamma A$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλογράμμον $AAK'A$, καὶ ἔχει διὰ μέτρον $EZ \times AA$.

Αλλ' έχομεν $ΑΔ = ΔΚ'$, καὶ διὰ τὴν ἰσότητά τοῦ
 τριγώνου $ΗΔ$ μετὰ τὸ $Κ'ΓΙ$, ἡ πλευρὰ $ΒΔ = ΓΚ'$. λοιπὸν
 $ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΔΚ' = 2ΑΔ$, καὶ οὕτως $ΔΔ$ εἶναι
 τὸ ἡμισθροίσμα τῶν βάσεων $ΑΒ, ΓΔ$. λοιπὸν τέλος τὸ
 ἑμβάδον τοῦ τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος $ΕΖ$
 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ἡμισθροίσματος τῶν βάσεων
 $ΑΒ, ΓΔ$, ἢ $ΑΒΓΔ = ΕΖ \times (\frac{ΑΒ + ΓΔ}{2})$.

Σχόλιον. Εἰάν ἀπὸ τῆς εἰγμένης I , μέσον τῆς $ΒΓ$,
 ἀχθῇ ἡ $ΙΘ$, παραλλήλος τῆς βάσεως $ΑΒ$, ἡ εἰγμένη $Θ$
 θάλει εἶναι παρὰμοίως τὸ μέσον τῆς $ΑΔ$ · διότι τὸ σχή-
 μα $ΑΘΙΑ$ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ τὸ $ΔΘΙΚ'$,
 ὥς ἔχοντα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· έχομεν
 λοιπὸν $ΑΘ = ΙΑ$ καὶ $ΔΘ = ΙΚ'$ · ἀλλὰ $ΙΑ = ΙΚ'$, ἐξ
 αἰτίας τῆς ἰσότητος τῶν δύο τριγώνων $ΒΙΑ, ΓΙΚ'$,
 λοιπὸν $ΑΘ = ΔΘ$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ $ΘΙ = ΑΔ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.
 λοιπὸν τὸ ἑμβάδον τοῦ τραπέζιου ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ
 ὁμοίως διὰ $ΕΖ \times ΘΙ$: ἀπομένως ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ
 τραπέζιου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἥτις ἐνόνει
 τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Θ Ε Λ Ψ Η Μ Α.

Εἰάν γραμμὴ τις $ΑΓ$ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη $ΑΒ, ΒΓ$,
 τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὅλης $ΑΓ$ θάλει
 πλεονεῖ τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τοῦ μέρους
 $ΑΒ$, πλέον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους
 $ΒΓ$, πλέον δις τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενόν ὑπὸ
 τῶν δύο μέρων $ΑΒ, ΒΓ$: τοῦτο δὲ ἐκφράζεται οὕτως,
 $ΑΓ ἢ (ΑΒ + ΒΓ) = ΑΒ + ΒΓ + 2ΑΒ \times ΒΓ$. σχ. 106.

Ας κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον $ΑΓΔΕ$, ὡς ληρθῇ $ΑΖ = ΑΒ$, ὡς ἀχθῇ $ΖΗ$ παράλληλος τῆς $ΑΓ$, καὶ $ΒΘ$ τῆς $ΑΕ$.
 Δι' αὐτῆς τῆς κατασκευῆς τὸ τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ δι-
 κριῖται εἰς τέσσαρα μέρη: τὸ πρῶτον $ΑΒΙΖ$ εἶναι τὸ
 κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς $ΑΒ$, ἐπειδὴ ἐλήφθη
 $ΑΖ = ΑΒ$: τὸ δεύτερον $ΙΗΔΘ$ εἶναι τὸ κατασκευαζόμε-
 νον τετράγωνον ἐπὶ τῆς $ΒΓ$: διότι ἐπειδὴ $ΑΓ = ΑΕ$,
 καὶ $ΑΒ = ΑΖ$, ἡ διαφορὰ $ΑΓ - ΑΒ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν
 διαφορὰν $ΑΕ - ΑΖ$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἵπεται ὅτι $ΒΓ = ΕΖ$:
 ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων $ΙΗ = ΒΓ$, καὶ $ΔΗ =$
 $ΕΖ$: λοιπὸν $ΘΙΗΔ$ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς $ΒΓ$.
 Τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀφαιρέθιντα ἀπὸ τὸ ὅλον τετράγωνον
 ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα: τὰ δύο ὀρθογώνια $ΒΓΗΙ$, $ΕΖΙΘ$,
 ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει διὰ μέτρων $ΑΒ \times ΒΓ$: λοιπὸν τὸ
 κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς $ΑΓ$, κ. γ. λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν εἰς
 τὴν Αλγεβραν ἀποδεικνυομένην διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ
 τετραγώνου ἐνός ὁμωνύμου, καὶ ἡ ὁποία ἐκφράζεται
 οὕτω: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ξ Θ',
 Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Εὰν ἡ γραμμὴ $ΑΓ$ ᾖναι ἡ διαφορὰ δύο ἄλλων $ΑΒ$,
 $ΒΓ$, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ ὅσκι
 περιέχει τὸ τετράγωνον τῆς $ΑΒ$, πλεον τὸ τετράγωνον
 τῆς $ΒΓ$, μείον δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευαζόμενον
 ἐπὶ τῆς $ΑΒ$ καὶ $ΒΓ$: τοῦτέστι $ΑΓ^2$ ἢ $(ΑΒ - ΒΓ)^2 = ΑΒ^2 -$
 $- ΒΓ^2 - 2ΑΒ \times ΒΓ$, σλ. 107.

Ας κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον $ΑΒΙΖ$, ὡς ληρθῇ
 $ΑΕ = ΑΓ$, ὡς ἀχθῇ $ΓΗ$ παράλληλος τῆς $ΒΙ$, καὶ $ΘΚ$
 τῆς $ΑΒ$, καὶ ὡς ἐληρωθῇ τὸ τετράγωνον $ΕΖΔΚ$.

Εκαστον τῶν δύο ὀρθογώνιων ΓΒΠ, ΗΑΚ'Α ἔχει διὰ μέτρον $AB \times B\Gamma$: ἂν ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸ ἔλον σχῆμα

ΑΠΗΑΚ'ΕΑ, τοῦ ὑπολοίτου ἡ τιμὴ εἶναι $AB + B\Gamma$, φανερόν εἶναι ὅτι μένει τὸ τετράγωνον ΑΓ'ΔΕ, λοιπὸν κ.τ.λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὸν τύπον τῆς Αλγεβρας $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Π Ρ Ο Τ Α Ξ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α:

Τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο γραμμῶν, ἴσoustαι μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων: ὁμοίως $(AB + B\Gamma) \times$

$(AB - B\Gamma) = AB^2 - B\Gamma^2$ σχ. 106.

Ας κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ τὰ τετράγωνα ΑΒΙΖ, ΑΓΔΕ: ἂς προσεβληθῇ ἡ ΑΒ πησύτητα τινὰ ΒΚ' ΒΓ, καὶ ἂς πληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΚ'ΔΕ.

Ἡ βᾶσις ΑΚ' τοῦ ὀρθογώνιου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΒΓ, τὸ ὕψος τοῦ ΑΕ εἶναι ἡ διαφρὰ τῶν ἰδίων: λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΚ'ΔΕ $= (AB + B\Gamma)(AB - B\Gamma)$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον σύγκειται ἀπὸ τὰ δύο μέρη ΑΒΘΕ + ΒΘΑΚ' καὶ τὸ μέρος ΒΘΑΚ' ἴσoustαι μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΔΗΖ, διότι ΒΘ $=$ ΔΕ καὶ ΒΚ' $=$ ΕΖ: λοιπὸν ΑΚ'ΔΕ $=$ ΑΒΘΕ + ΕΔΗΖ.

Τώρα τὰ δύο ταῦτα μέρη σχηματίζουν τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, μείον τὸ τετράγωνον ΔΘΗ, τὸ ὑπολοίον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ' λοιπὸν τέλος $(AB + B\Gamma) \times (AB - B\Gamma) = AB^2 - B\Gamma^2$.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τύπον τῆς Αλγεβρας $(x + \beta)(x - \beta) = x^2 - \beta^2$.

Τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσ-
κης ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἀθροισμα
τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν ἄλλων
δύο πλευρῶν.

Εἶπω τρίγωνον τὸ $ABΓ$ ὀρθογώνιον. εἰς A : Μετὰ τὴν
κατασκευὴν τῶν τετραγώνων ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν, ἅς
κατεβασθῇ ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας
ἢ κάθετος AD ἥτις ἅς προεκβληθῇ ἔως εἰς τὸ E ἅς
ἐπιτευχθῶσιν. ἔπειτα αἱ διαγώνισαι AZ , BE σχ. ιαθ.

Ἡ γωνία ABZ σύγκειται ἀπὸ τὴν $ABΓ$ καὶ τὴν ὀρ-
θὴν $ΓBZ$: ἡ γωνία $ΓBΘ$ σύγκειται ἀπὸ τὴν αὐτὴν
γωνίαν $ABΓ$ καὶ τὴν ὀρθὴν $ABΘ$: λοιπὸν ἡ γωνία $ABZ =$
 $ΘBΓ$. Ἀλλὰ $AB = BΘ$ ὡς πλευραὶ τοῦ ἴσου τετραγώνου,
καὶ $BZ = BΓ$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν τὰ τρίγωνα
 ABZ , $ΘBΓ$, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιχομένην με-
ταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν εἶναι ἴσα. (πρ. 6, 1).

Τὸ τρίγωνον ABZ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου
 $BΔEZ$, (ἢ διὰ συντομίαν BE) τὸ ὁπεῖθον ἔχει τὴν αὐ-
τὴν ἐκείνην BZ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος BA (πρ. 2). Τὸ τρίγωνον
 $ΘBΓ$ εἶναι παρομοίως τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου $ΑΘ$.
διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $BAΓ$, $BAΘ$ εἶναι ὀρθαί, αἱ εὐ-
θεῖαι $ΑΓ$ καὶ $ΑΑ$ μίαν μόνην σχηματίζουσιν εὐθείαν
παράλληλον τῆς $ΘB$ · λοιπὸν τὸ τρίγωνον $ΘBΓ$ καὶ τὸ
τετράγωνον $ΑΘ$, ἐκτὸς τῆς κοινῆς ἐκείνης $ΒΘ$, ἔχουν
καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος AB · τὸ τρίγωνον ἄρα εἶναι τὸ ἥμισυ
τοῦ τετραγώνου.

Ἀπεδείξαμεν ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ABZ εἶναι ἴσον
μὲ τὸ $ΘBΓ$ · λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $BΔEZ$ διπλάσιον
τοῦ τριγώνου ABZ , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τετράγωνον $ΑΘ$
διπλάσιον τοῦ τριγώνου $ΘBΓ$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον

ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΙ· ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια ΗΔΕΖ, ΓΔΕΗ, ὡσεὶ λαμβανόμενα, κáμνουν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ: λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον ἴσεται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΗΘΑ, ΑΓΙΚ· τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἢ, μὲ ἄλλους ὅρους,

$$BI^2 = AB^2 + AI^2.$$

Πόρισμα. Α'. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσῶται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης μείον τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης πλευρᾶς, τὸ ὅποιον ἐκφράζεται οὕτω: $AB^2 = BI^2 - AI^2$.

Πόρισμα. Β'. Ἐξω ΑΒΓΔ ἐν τετράγωνον, ΒΓ ἡ διαγωνίός του· τὸ τρίγωνον ΑΒΕ' ὡς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς δίδει $AI^2 = AB^2 + BE^2 = 2AB^2$ · λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΑΒ· σ. 118.

Ἡ ἰδιότης αὕτη καταρτίζεται ἐποικιστῇ εἰάν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἀχθῶσι παράλληλοι τῆς ΒΔ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Δ παράλληλοι τῆς ΑΓ: κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται νέον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσον μὲ τὸ τῆς ΑΓ. Τώρα βλέπομεν ὅτι ΕΖΗΘ περιέχει ὡς τὴν τριῶνα ἴσα μὲ ΑΒΕ, καὶ ΑΒΓΔ περιέχει ἀπὸ αὐτὰ τέσσαρα· ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ $AF:AB::2:1$, ἔχομεν, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, $AF:AB::\sqrt{2}:1$ · λοιπὸν ἡ διαγωνίος ἐνὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν πλευράν του.

Τούτο θέλομεν αναπτύξει περισσότερον εἰς ἄλλην εὐ-
καιρίαν.

Πόρισμα. Γ'. Απεδείχθη ὅτι τὰ τετράγωνον ΑΘ ἰσο-
δυναμῇ μετὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ· τώρα, ἐξ αἰτίας τοῦ
κοινοῦ ὕψους ΒΖ, τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ εἶναι πρὸς τὸ ὀρ-
θογώνιον ΒΔΕΖ ὡς ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ· λοιπὸν;

$$\frac{ΒΓ}{ΒΔ} :: \frac{ΒΓ}{ΒΔ}.$$

Ὅθεν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας εἶναι
πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς
ὀρθῆς γωνίας ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προ-
σκειμενον εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμήμα.

Εἰδὼ ὀνομάζομεν τμήμα τὸ μέρος τῆς ὑποτείνουσας
τὸ ὁποῖον προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν κάθετον ἥτις κατε-
βάλλεται ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Οὕτως ΒΔ εἶναι τὸ
προσκειμενον τμήμα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ ΔΓ τὸ
προσκειμενον τμήμα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Παρομοίως

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} :: \frac{ΒΓ}{ΓΔ}.$$

Πόρισμα. Δ'. Τὰ ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΔΓΗΕ ἔχοντα
τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΒΔ,
ΓΔ. Τώρα, τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι μετὰ τὰ

τετράγωνα ΑΒ, ΑΓ ἄρα

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} :: \frac{ΒΔ}{ΔΓ}.$$

Λοιπὸν τὰ τετράγωνα τῶν δύο πλευρῶν τῆς
ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ προ-
σκειμενα εἰς ταύτας τὰς πλευρὰς τμήματα
τῆς ὑποτείνουσας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ᾖναι ὀξεύσα, τὸ
τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς θέλει εἶναι μικρότερον

τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἰτίνες
περιέχουσι τῇ γωνίᾳ Γ' καὶ ἐὰν κατεβασθῇ ἡ κάθετος
ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ διπλά-
σιον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓ × ΓΔ, εἰς τρεῖς ὥστε, σχ. 110.

$$AB^2 = AI'^2 + BI'^2 - 2BI' \times \Gamma\Delta.$$

Δύο περιπτώσεις ὑπάρχουσι. 1. ἢ ἔάν ἡ κάθετος πέραν
ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλωμεν ἔχει $BD = BI' - \Gamma\Delta$,

καὶ ἰσομένως (πρό. 9) $BD^2 = BI'^2 - \Gamma\Delta^2 - 2BI' \times \Gamma\Delta$ προ-

σθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΑΔ, καὶ παρατηροῦντες

ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, δίδουν $AD^2 +$

$BD^2 = AB^2$ καὶ $AD^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2$, συναγομέν $AB^2 - BI'^2 +$

$A\Gamma^2 - 2BI' \times \Gamma\Delta$

2. ἢ ἔάν δὲ ἡ κάθετος ΑΔ πέραν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου

ΑΒΓ, θέλωμεν ἔχει $BD = \Gamma\Delta - BI'$, ἰσομένως (πρό. 9)

$BD^2 = \Gamma\Delta^2 + BI'^2 - 2\Gamma\Delta \times BI'$. προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ

δύο μέρη ΑΔ, συναγομέν παρομοίως

$$AB^2 = BI'^2 + A\Gamma^2 - 2BI' \times \Gamma\Delta.$$

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ II'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐάν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ᾖ ἀμβλεία,

τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι με-

γαλλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν

αἰτίνες περιέχουσι τὴν γωνίαν Γ, καὶ ἐὰν κατεβασθῇ

ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει εἶναι ἴση μὲ

τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓ × ΓΔ, εἰς τρεῖς ὥστε,

$$AB^2 = AI'^2 + BI'^2 - 2BI' \times \Gamma\Delta.$$

Ἡ κάθετος δὲν εἶναι δυνατόν νὰ πείσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου· διότι ἐὰν ἐπιπτεῖ, παραδείγματος χάριν, εἰς E , τὸ τρίγωνον AFE ἤθελόν ἔχει ἐνταύτῃ τὴν ὀρθὴν γωνίαν E καὶ τὴν ἀμβλείαν Γ , ὅπερ ἀδύνατον (19, 1)· πίπτει λοιπὸν ἐκτὸς, καὶ ἔχομεν $BA = BG + GA$. Ἐκ τούτου

ἔπεται (πρό. 8)· $BA = BG + GA + 2BG \times GA$. Προσθέ-

τοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη AD καὶ κίμωντες τὰς ἀνα-

γωγὰς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, εὐρίσκομεν $AB =$

$BG + AG + 2BG \times GA$.

Σχόλιον. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ μόνον εἰς τὸ ὅποιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διότι ἐὰν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων ᾖναι ὀξεύα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των θάλει εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἀμβλεία μικρότερον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς ὅποιονδήποτε τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἀχθῇ ἡ γραμμὴ AE ,

λέγει δτι θέλομεν ἔχει $AB + AG = 2AE + 2BE$. σχ. 112.

Ἀς κατεβασθῇ ἡ κάθετος AD ἐπὶ τῆς βάσεως $B\Gamma$ · τὸ τρίγωνον AEG κατὰ τὸ ID θεώρημα δίδει,

$$AG = AE + EG - 2EG \times ED.$$

Τὸ τρίγωνον ABE κατὰ τὸ ID θεώρημα δίδει,

$$AB = AE + EB + 2EB \times ED.$$

Λοιπὸν προσθέτοντες καὶ παρατηροῦντες, ὅτι $EB =$
 EF , συνάγομεν

$$\overline{AB} + \overline{AF} = 2\overline{AE} + 2\overline{EB}.$$

Πόρισμα. Βίς κάθε ἄρα παραλληλόγραμ-
 μον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευ-
 ρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων
 τῶν διαγωνίων.

Δίδει αἱ διαγωνιοὶ AF , BD , τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς
 δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν σημὴν E (πρό. 31, 1). Οὕτω
 τὸ τρίγωνον ABF δίδει, σχ. 113.

$$\overline{AB} + \overline{BF} = 2\overline{AE} + 2\overline{BE}.$$

Τὸ τρίγωνον ADF δίδει παρομοίως,

$$\overline{AD} + \overline{DF} = 2\overline{AE} + 2\overline{DE}.$$

Προσθέτοντες μέλος εἰς μέλος, καὶ παρατηροῦντες ὅτι
 $BE = DE$, συνάγομεν

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AF} + \overline{BF} = 4\overline{AE} + 4\overline{DE}.$$

Ἀλλὰ $4\overline{AE}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς AF .

Διότι $AF = 2\overline{AE}$ παρομοίως $4\overline{DE}$ εἶναι τὸ τετράγωνον
 τῆς BD . λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευ-
 ρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δια-
 γωνίων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ 1Β'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ γραμμὴ DE , παραλλήλως τῆς βάσεως τριγώνου τινὸς
 ABF ἀγομένη διαιρεῖ τὰς πλευρὰς AB , AF , ἀναλόγως
 εἰς τρόπον ὥς $AD : BD :: AE : EF$. σχ. 114.

Ἀν ἐκτεταχθῶσιν αἱ BE , DF , τὰ δύο τρίγωνα BDE ,
 DEF ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν DE , καὶ τὸ ἴδιον ὕψος,

διότι αἱ κορυφαί των Β καὶ Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῆς βάσεως· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα (πρό. 2).

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι Ε, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις των ΑΔ, ΒΔ (πρό. 6)· διὰ τοῦτο,

$$ΑΔΕ : ΒΔΕ :: ΑΔ : ΒΔ$$

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι Δ, ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις των ΑΕ, ΕΓ· ἄρα,

$$ΑΔΕ : ΔΕΓ :: ΑΕ : ΕΓ.$$

Αλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΔΕ=ΔΕΓ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, συνάγομεν $ΑΔ : ΒΔ :: ΑΕ : ΕΓ$.

Πόρισμα. Α'. Ἐντεῦθεν συνάγομεν συνθέτοντες $ΑΔ + ΒΔ : ΑΔ :: ΑΕ + ΕΓ : ΑΕ$, ἢ $ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ$, καὶ παρομοίως $ΑΒ : ΒΔ :: ΑΓ : ΓΕ$.

Πόρισμα. Β'. Ἐάν μεταξὺ δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἀγθῶσιν ὅσαιδήποτε παράλληλοι ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ, ΒΔ, κ. τ. λ. αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουν τμηθῇ ἀναλόγως, καὶ θέλομεν ἔχει

$$ΑΕ : ΓΖ :: ΕΗ : ΖΘ :: ΗΒ : ΘΔ, \text{σχ. ιε}.$$

Διότι ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ· εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γραμμὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΕΖ, θέλομεν ἔχει ΟΕ : ΑΕ :: ΟΖ : ΓΖ ἢ ΟΕ : ΟΖ :: ΑΕ : ΓΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΗΘ, θέλομεν ἔχει παρομοίως ΟΕ : ΕΗ :: ΟΖ : ΖΘ, ἢ ΟΕ : ΟΖ :: ΕΗ : ΖΘ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΟΕ : ΟΖ, αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι δίδουν ΑΕ : ΓΖ :: ΕΗ : ΖΘ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ΕΗ : ΖΘ :: ΗΒ : ΘΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· αἱ γραμμαὶ ἄρα ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ἀναλόγως ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΕΖ, ΗΘ κ.τ.λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀντιτρόπως ἂν αἱ πλευραὶ AB, AG , τμηθῶσιν ἀναλόγως ὑπὸ τῆς γραμμῆς AE , εἰς τρόπον ὥστε $AA:AB::AE:EI$, λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ AE θέλει εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως BF .

Διότι ἂν AE δὲν ᾖναι παράλληλος τῆς BF , ἅς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ AO τότε, κατὰ τὸ προλαβόν θεώρημα, θέλομεν ἔχει $AA:BA::AO:OF$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, $AA:AB::AE:EI$ λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει $AO:OF::AE:EI$ ἀναλογία ἀνύπαρκτος· διότι ἀπὸ τὸ ἐν μέρος ὃ ἡγούμενος AE εἶναι μείζων τοῦ AO , ἀπὸ τὸ ἄλλο ὃ ἐπόμενος EI εἶναι ἐλάσσων τοῦ OF . ἂν λοιπὸν διὰ τῆς σιγμῆς A ἀχθῇ παράλληλος τῆς BF , αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατόν νὰ διαφέρῃ τῆς AE · ἡ AE ἄρα εἶναι ἡ τοιαύτη παράλληλος.

Σχόλιον. Ἡ ἰδία συνέπεια ἠθέλεν ἔχει χώραν ἂν ὑποτίθετο ἡ ἀναλογία $AB:AA::AG:AE$. διότι ἐκ ταύτης ἠθέλει συναχθῇ ἡ $AB-AA:AA::AG-AE:AE$ ἢ $BA:AA::GE:AE$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ γραμμὴ AD , ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν BAG ἐνὸς τριγώνου, διαιρεῖ τὴν βάσιν BF εἰς δύο τμήματα BA, AG , ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν AB, AG · εἰς τρόπον ὥστε $BA:AG::AB:AG$. σχ. 117.

Ἐκ τῆς σιγμῆς G ἅς ἀχθῇ ἡ GE παράλληλος τῆς AD ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν BA προεκβαλλομένην.

Εἰς τὸ τρίγωνον BGE , ἡ AD εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως GE · οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν (προ. 15),

$$BA:AG::AB:AE,$$

Αλλὰ τὸ τρίγωνον $\Lambda Γ Ε$ εἶναι ἰσοσκελές· διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων $\Lambda Δ$, $Γ Ε$, ἡ γωνία $\Lambda Γ Ε = Δ \Lambda Γ$, καὶ ἡ γωνία $\Lambda Ε Γ = Β \Lambda Δ$ (πρό. 24, 1)· Τώρα, ἐξ ὑποθέσεως $\Delta \Lambda Γ = Β \Lambda Δ$ · ἡ γωνία ἄρα $\Lambda Γ Ε = \Lambda Ε Γ$. καὶ ἀκολουθῶς $\Lambda Ε = \Lambda Γ$ (πρό. 13, 1)· ἀντεισάγοντες λοιπὸν $\Lambda Γ$ ἀντὶ $\Lambda Ε$ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, συνάγομεν

$$Β Δ : Δ Γ :: Α Β : Α Γ.$$

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Η'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Η.

Δύο τρίγωνα ἰσογώνια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους καὶ εἶναι ὅμοια.

Ἐσσαν $\Lambda Β Γ$, $Γ Δ Ε$, δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν, δηλαδὴ $\Lambda Β Γ = Γ Δ Ε$, $\Lambda Β Γ = Δ Γ Ε$, καὶ $\Lambda Γ Β = Δ Ε Γ$ · λέγω ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἢ προσκείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἀνάλογοι, εἰς τρόπον ὥστε $Β Γ : Γ Ε :: Α Β : Γ Δ :: Α Γ : Δ Ε$. σχ. 119.

Ἀς τιθῶσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ $Β Γ$, $Γ Ε$ εἰς τὴν αὐτὴν διευθύνσιν, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ $\Lambda Β$, $\Lambda Γ$, ἕως οὐ νὰ συναπάντηθῶσιν εἰς $Ζ$.

Ἐπειδὴ $Β Γ Ε$ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, καὶ ἡ γωνία $\Lambda Β Γ = Γ Δ Ε$, ἔπεται ὅτι ἡ $\Lambda Γ$ εἶναι παράλληλος τῆς $\Delta Ε$ (24, 1). Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Lambda Β Γ = Δ Γ Ε$, ἡ $\Lambda Β$ εἶναι παράλληλος τῆς $\Delta Γ$ · λοιπὸν τὸ σχῆμα $\Lambda Γ Δ Ζ$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Εἰς τὸ τρίγωνον $Β Ζ Ε$ ἡ $\Lambda Γ$ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως $Ζ Ε$, ὅθεν $Β Γ : Γ Ε :: Β \Lambda : \Lambda Ζ$ (πρό. 15). Ἀντὶ $\Lambda Ζ$ θέτοντες τὴν ἴσην τῆς $\Gamma Δ$, ἔχομεν,

$$Β Γ : Γ Ε :: Β \Lambda : \Gamma Δ.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον $Β Ζ Ε$, εἰάν ἡ $Β Ζ$ θεωρηθῇ ὡς βᾶσις, ἡ $\Gamma Δ$ εἶναι παράλληλος αὐτῆς, καὶ ἐκ τούτου $Β Γ : Γ Ε :: Ζ Δ : Δ Ε$. Ἀντὶ $Ζ Δ$ θέτοντες τὴν ἴσην τῆς $\Lambda Γ$ ἔχομεν

$$Β Γ : Γ Ε :: \Lambda Γ : Δ Ε.$$

Τέλος ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν εἰς τὰς ὁποίας
4 λόγος ΒΓ : ΓΕ εἶναι κοινός, συνάγομεν ὡσαύτως,

$$ΑΓ : ΔΕ :: ΒΑ : ΓΔ.$$

Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΔΕ ἔχουν τὰς
ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους : ἀλλὰ κατὰ τὸν Β'. Ορι-
σμῷ, δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν ἐνταύτῃ τὰς
γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν, καὶ τὰς
ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα τὰ ἰσογώνια τρίγωνα
ΒΑΓ, ΓΔΕ, εἶναι δύο σχήματα ὅμοια.

Πόρισμα. Διὰ νὰ ᾖναι δύο τρίγωνα ὅμοια, ἀρκεῖ νὰ
ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν,
διότι τότε ἡ ἰσότης τῆς τρίτης ἔπεται, καὶ τὰ δύο τρί-
γωνα θέλουσι εἶναι ἰσογώνια.

Σχόλιον. Ἀς σημειώσωμεν ὅτι, εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα,
αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν· οὕτως
οὔσης τῆς γωνίας ΔΓΒ ἴσης μὲ τὴν ΔΕΓ, ἡ πλευρὰ ΑΒ
εἶναι ὁμολογὸς τῆς ΔΓ· ὡσαύτως ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι ὁμό-
λογοι ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ : ἀφ' οὗ
γινώσκωμεν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, εὐθὺς σχηματίζομεν
τῆς ἀναλογίας : ΑΒ : ΔΓ :: ΑΓ : ΔΕ :: ΒΓ : ΓΕ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΘ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α,

Δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς
ἀναλόγους, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ΒΓ : ΕΖ :: ΑΒ : ΔΕ :: ΑΓ : ΔΖ· λέ-
γω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλουσι εἶναι τὰς γωνίας
ἴσας, δηλαδή, Α = Δ, Β = Ε, Γ = Ζ. σχ. 120.

Εἰς τὴν σιγμὴν Ε ἄς γένῃ ἡ γωνία ΖΕΗ = Β, καὶ
εἰς τὴν σιγμὴν Ζ ἡ γωνία ΕΖΗ = Γ, ἡ τρίτη Η θάλει
εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ Α, καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ,
θέλουσι εἶναι ἰσογώνια· λοιπὸν κατὰ τὸ πρόληβὸν θεώρημα
ΒΓ : ΕΖ :: ΑΒ : ΕΗ. Ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓ : ΕΖ ::

$AB:AE$ · ἄρα $EH = AE$. Κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα, $BΓ: EZ :: AΓ: HZ$ · ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, $BΓ: EZ :: AΓ: ΔZ$, ἄρα $ZH = ΔZ$. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα EHZ , $ΔEZ$, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν νάθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν ἄρα εἶναι ἴσα (πρό. 11, 1). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ τρίγωνον EHZ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ τρίγωνον $ΑΒΔ$ · λοιπὸν ὡσαύτως τὰ τρίγωνα $ΔEZ$, $ΑΒΓ$ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Σχόλιον. Α'. Ἀπὸ τὰς δύο ταύτας τελευταίας προτάσεις, βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τρόπον ὥστε μία τούτων τῶν συνθηκῶν ἀρκεῖ πρὸς διεκρίσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Δὲν ὑπάρχει τὸ αὐτὸ εἰς τὰ σχήματα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι περισσότεραι ἀπὸ τρεῖς· διότι, ἐὰν ὁ λόγος ᾖ μόνον περὶ τετραπλεύρων, ἡμποροῦμεν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας, νὰ μεταβάλλωμεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, ἢ χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὰς πλευρὰς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας. Οὕτως ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ᾖ συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, καὶ τ' ἀντίπαλιν. Βλέπομεν, παραδείγματι χάριν, ὅτι ἐὰν ἀχθῇ ἡ EZ παράλληλος τῆς $BΓ$, αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου $ΔΕΖΔ$ εἶναι μὲν ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$ · ἀλλ' ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν διαφέρει· ὡσαύτως χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς τέσσαρας πλευρὰς $ΑΒ$, $BΓ$, $ΓΔ$, $ΑΔ$ ἡμποροῦμεν νὰ μεταβάλλωμεν τὰς γωνίας πλησιάζοντες ἢ ἀποκρύνοντες τὸ σημεῖον B ἀπὸ τὸ $Δ$. σχ. 122.

Σχόλιον. Β'. Αἱ δύο προηγούμεναι προτάσεις αἱ ποταὶ κυρίως δὲν κάμνουν παρὰ μίαν, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποθετιμύσης εἶναι αἱ ἀξιολογότεραι καὶ γονιμώτεραι προτάσεις τῆς Γεωμετρίας· ἀρκουσι σχεδὸν μόναι δι' ἅλας τὰς ἐφαρμογὰς καὶ τὴν λύσιν ὄλων τῶν

προβλημάτων· ὁ λόγος εἶναι ὅτι ὅλα τὰ σχήματα ἔμπο-
ρῶν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τρίγωνα, καὶ ὅποιονδήποτε τρί-
γωνον εἰς δύο τρίγωνα ὀρθογώνια. Οὕτως αἱ γενικαὶ ιδιό-
τητες τῶν τριγώνων περιέχουσι συνεπτυγμένως (impli-
citment) τὰς ιδιότητες ὅλων τῶν σχημάτων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Λ.

Δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περι-
γεγραμένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια.

Ἐστω ἡ γωνία $\Lambda = \Delta$, καὶ ὥς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν
 $\Lambda\text{B}:\Delta\text{E}::\Lambda\Gamma:\Delta\text{Z}$, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον $\Lambda\text{B}\Gamma$ εἶναι
ὅμοιον μὲ τὸ $\Delta\text{E}\text{Z}$. σγ. 122.

Ὡς ληρῶς $\Lambda\text{H} = \Delta\text{E}$ καὶ ὥς ἀγῶς ἡ $\text{H}\Theta$ παράλληλος
τῆς $\text{B}\Gamma$, ἡ γωνία $\Lambda\text{H}\Theta$ θέλει εἶναι ἴση τῇ $\Lambda\text{B}\Gamma$ (πρὸς
24, 1)· καὶ τὸ τρίγωνον $\Lambda\text{H}\Theta$ ἰσογώνιον μὲ τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma$.
Θέλωμεν ἔχει λοιπὸν $\Lambda\text{B}:\Lambda\text{H}::\Lambda\Gamma:\Lambda\Theta$. Ἀλλ' ἐξ ὑπο-
θέσεως, $\Lambda\text{B}:\Delta\text{E}::\Lambda\Gamma:\Delta\text{Z}$, καὶ, ἐκ τῆς κατασκευῆς,
 $\Lambda\text{H} = \Delta\text{E}$, λοιπὸν $\Lambda\Theta = \Delta\text{Z}$. Τὰ δύο τρίγωνα $\Lambda\text{H}\Theta$,
 $\Delta\text{E}\text{Z}$ ἔχουν λοιπὸν μίαν γωνίαν ἴσην περιγεγραμμένην μεταξὺ
πλευρῶν ἴσων· ἄρα εἶναι ἴσα. Τώρα τὸ τρίγωνον $\Lambda\text{H}\Theta$
εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma$ · λοιπὸν $\Delta\text{E}\text{Z}$ εἶναι ὡσαύτως
ὅμοιον μὲ τὸ $\Lambda\text{B}\Gamma$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΑ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Λ.

Δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς
παράλληλους, ἡ καθέτως τὴν καθὲ μίαν εἰς τὴν καθὲ μίαν,
εἶναι ὅμοια.

Διότι, ἰὰν ἡ πλευρὰ AB ᾖναι παράλληλος τῆς ΔE ,
καὶ $\text{B}\Gamma$ τῆς EZ , ἡ γωνία $\Lambda\text{B}\Gamma$ θέλει εἶναι ἴση τῇ $\Delta\text{E}\text{Z}$
(27, 1)· ἰὰν περὶ πλὴν $\text{A}\Gamma$ ᾖναι παράλληλος τῆς ΔZ ,
ἡ γωνία $\text{A}\Gamma\text{B}$ θέλει εἶναι ἴση τῇ $\Delta\text{Z}\text{E}$ καὶ ὡσαύτως· ἡ

ΒΑΓ' τῇ ΕΔΖ: τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, ΔΗΖ' εἶναι ἰσογώνια· ἄρα καὶ ὁμοία. σγ. 123.

2.^α Ἐξω ἡ πλευρὰ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΔΖ εἰς τὴν ΑΓ· εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΙΔΘ αἱ δύο γωνίαι Ι καὶ Θ θέλουν εἶναι ὀρθαί· αἱ τέσσαρες γωνίαι ἰσοδυναμοῦν ὁμοῦ μετ' ἑσπάρας ὀρθᾶς (20, 1)· λοιπὸν αἱ δύο ὑπολοίποι ΙΑΘ, ΙΔΘ, ἰσοδυναμοῦν μετ' ἑσπάρας. Ἀλλ' αἱ δύο γωνίαι ΕΔΖ, ΙΔΘ ἰσοδυναμοῦν ὡσαύτως μετ' ἑσπάρας· λοιπὸν ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση τῇ ΙΑΘ ἢ τῇ ΒΑΓ· παρομοίως ἔαν ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ ᾖ καθετὸς εἰς τὴν τρίτην ΒΓ, ὁλομὲν δείξει ὅτι ἡ γωνία ΔΖΕ=Γ, καὶ ΔΕΖ=Β· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὅποια ἔχουν τὰς πλευρὰς κάθετους τὴν καθ' ἑμὴν μίαν εἰς τὴν καθ' ἑμὴν μίαν, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὁμοία. σγ. 124.

Σχόλιον. Εἰς τὴν πρώτην περίεσιν αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι· εἰς τὴν δευτέραν, εἶναι αἱ κάθετοι. Οὕτως εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίεσιν, ΑΓ εἶναι ὁμολογος τῇ ΑΒ, ΔΖ τῇ ΑΓ, καὶ ΕΖ τῇ ΒΓ,

Εἰς τὴν περίεσιν καθ' ἣν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι τὰ δύο τρίγωνα δυνατόν νὰ ἔχῃται μίαν ἢ εἰς διαφορετικὴν τῆς ὑποθεθείσης εἰς τὸ σχῆμα 124, ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν πάντοτε ἤθελεν ἀποδειχθῇ εἴτε διὰ τετραπλεύρων τοιούτων ὡς ΑΙΔΘ, τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, εἴτε διὰ τῆς συγκρίσεως δύο τριγώνων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκτὸς τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, ἤθελεν ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν: ἔπειτα, πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ ὑποθέσωμεν ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευασμένον τρίγωνόν τι ΔΕΖ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ᾖναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν τοῦ συγκρινομένου τριγώνου μετ' ἑσπάρας ΑΒΓ, καὶ τότε ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς εἰς τὴν περίεσιν τοῦ 124' σχήματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εάν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τριγώνου τινὸς ἀχθῶσιν εἰς τὴν ὀπίσθιον ὀπίσθια πρὸς εὐθείαι ὡς ΔΖ, ΔΗ, κ. τ. λ. αὐτὰν βέλουν· διαιρεθὲ τὴν βᾶσιν ΒΓ· καὶ τὴν παράλληλόν τῆς ΔΕ ἀναλόγως, εἰς τὸν ὅσον, ὥστε ΔΙ : ΒΖ :: ΙΚ' : ΖΗ :: Κ'Λ : ΗΘ, κ. τ. λ. σχ. 126.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΖ, τὸ τρίγωνον ΔΔΙ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ ΑΒΖ, καὶ ἔχον τὴν ἀναλογίαν ΔΙ : ΒΖ :: ΔΙ : ΔΖ· ὡσαύτως, ΙΚ' οὕτως παράλληλος τῆς ΖΗ, ἔχον ΔΙ : ΔΖ :: ΙΚ' : ΖΗ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου ΔΙ : ΔΖ, ΔΙ : ΒΖ :: ΙΚ' : ΖΗ· εὐρίσκειμα παρομοίως ΙΚ' : ΖΗ :: Κ'Λ : ΗΘ, κ. τ. λ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΔΕ διαιρεῖται εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ', Λ ὡς ἡ ὀπίσθιος ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ.

Πόρισμα. Ἄρα, ἐάν ΒΓ διαιρεθῇ εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς τιγμάς Ζ, Η, Θ, ἡ παράλληλος ΔΕ θέλει διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς τιγμάς Ι, Κ', Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εάν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου καταβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας, σχ. 126.

1. Ὁ Τα δύο μερικὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουν εἶναι ὅμοια ἀλλήλοις καὶ ὅμοια τῷ ὅλῳ ΑΒΓ.

2. Ὁ Ἐκάστη πλευρὰ ΑΒ ἢ ΑΓ θέλει εἶναι μέση ἀνὰ λόγος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος ΒΔ ἢ ΔΓ.

3. Ὁ Ἡ κάθετος ΑΔ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ.

Διότι, ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔχουν κοινὴν γωνίαν τὴν Β· περιπλέον ἡ ὀρθὴ ΒΔΑ· εἶναι

ἴση τῇ ὀρθῇ ΒΑΓ· λοιπὸν ἡ τρίτῃ γωνίᾳ ΒΑΔ τοῦ ἐνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην Γ· τοῦ ἄλλου· ἄρα τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια· ὡσαύτως θελομεν δείξει διὰ τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, εἶναι ὅμοιον μετὰ τὸ ΒΑΓ· λοιπὸν τὰ τρία τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια ἀλλήλοις.

2.^{ον} Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΓ, αἱ ὁμολογοί των πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοί. Τώρα, ἡ πλευρὰ ΒΔ εἰς τὸ μικρὸν τρίγωνον εἶναι ὁμολογὸς τῇ ΒΑ εἰς τὸ μέγαλον, διότι εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, ΒΑΔ, ΒΓΑ· ἡ ὑποτείνουσα ΒΑ τοῦ μικροῦ εἶναι ὁμολογὸς τῇ ὑποτείνουσῃ ΒΓ τοῦ μεγάλου· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν $ΒΔ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΓ$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθελामεν ἔχει $ΔΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΒΓ$ · λοιπὸν ἀν' ἐκδὴ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας καὶ τοῦ προσκειμένου εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμήματος.

3.^{ον} Τέλος, ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ δίδει, παραβαλλομένων πᾶν ὁμολόγων, πλευρῶν, $ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΔΓ$ · λοιπὸν, 3.^{ον} ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτείνουσας.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀναλογίαν $ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ$ ἐξισοῦντες τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μὲ τὸ τῶν μέσων

συνάγομεν $ΑΒ = ΒΔ \times ΒΓ$. Ἐχομεν παρομοίως $ΑΓ =$

$ΔΓ \times ΒΓ$,· λοιπὸν $ΑΒ + ΑΓ = ΒΔ \times ΒΓ + ΔΓ \times ΒΓ$ · τὸ δευτέρον μέλος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $(ΒΔ + ΔΓ) \times ΒΓ$ καὶ

ἄγεται εἰς $ΒΓ \times ΒΓ = ΒΓ^2$ · ἄρα $ΑΒ + ΑΓ = ΒΓ$ · λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀροῖσιμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Οὕτως ἐπικυερῶμεθα εἰς τὴν πρότασιν τοῦ τετραγώνου.

τῆς ὑποτεινούσης διὰ μιᾶς ὁδοῦ. πολλὰ διαφορετικῆς ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν· ὅθεν βλέπομεν ὅτι κυρίως ἡ πρότασις τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι σήμεπεια τῆς ἀναλογίας. τῶν πλευρῶν εἰς τὰ ἰσογώνια τρίγωνα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, αἱ ἡμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας ἀγονται, διὰ τὸ εἶπω οὕτω, εἰς ταύτην. μάλιστα, ὅτι τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Συχνάκις ἀκολουθεῖ, καθὼς εἶδομεν ἀνωτέρω, τοῦτου παραδείγμα, ἐξάγοντες συνεπείας ἀπὸ μίαν ἢ περισσότεράς προτάσεις, νὰ καταντῶμεν εἰς προτάσεις ἀποδεδειγμένας. Ἐν γένει, ἐκίνο τὸ ὁποῖον μάλιστα χαρακτηρίζει τὰ θεωρήματα τῆς γεωμετρίας, καὶ εἶναι δεῖξις ἰσχυρωτάτη τῆς βεβαιότητός των, εἶναι ὅτι συμπλέκοντες τὰ καθ' ὅποιονδήποτε τρόπον, φθάνει νὰ συλλογισθῶμεθα ὁρθῶς, πάντεστε καταντῶμεν εἰς ἀκριβῆ ἐξαγόμενα. Τοῦτο δὲν ἤθελεν ὑπάρχει εἰς καμμία πρότασις ἢ τὸν ψευδῆ, ἢ τὸν ἀληθῆ ὡς ἔγχεα, καὶ διὰ τῆς συμπλοκῆς τῶν προτάσεων πρὸς ἀλλήλας τὸ σφάλμα ἤθελεν, αὐξάνει καὶ καταστρεφῆ ἡ πεισθητότης. Τοῦτου δὲ βλέπομεν παραδείγματα εἰς ὅλας τὰς ἀποδείξεις εἰς τὰς ὁποίας μεταχειρίζομεθα τὴν εἰς τὸ ἄτοπον ἀπαγωγὴν (reduction à l'absurde). Διὰ τῶν τοιούτων ἀποδείξεων βεβαιόνομεν ἡ ἀλήθεια μιᾶς προτάσεως ἐκ τοῦ ἀτόπου, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἀκολουθῆσαι εἰς ὑπὲρ τὸ ἐναντίον, συνίστανται λοιπὸν αἱ ἀποδείξεις αὗται εἰς τὸ νὰ καταστήσουν φανερὸν τὸ τοιοῦτον ἄτοπον. Οὕτω, παραδείγματός χάριν, βεβαιόνομεν ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, ἀποδεικνύοντες ὅτι εἰς ὑπὲρ τῆς παραμικρᾶς ἀνισότητος μεταξύ αὐτῶν ἡθέλαμεν φθάσει διὰ μιᾶς σειράς συλλογισμῶν εἰς ἄτοπον φανερόν καὶ διὰ τὸ εἶπω οὕτω, ψηλαφητόν· ὅθεν ἀναγκάζομεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Εάν ἐξ ἑνὸς σημείου A τῆς περιφέρειας ἀχθῶσιν αἱ δύο χορδαὶ AB, AG εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου $BΓ$, τὸ τρίγωνον $BAΓ$ θελεῖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς A (18, 2). λοιπὸν ἔστω ἡ κάθετος AD εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων BD, DG , τῆς διαμέτρου, ἥ, τὸ ὅποιον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ τετράγωνον AD ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον $BD \times DG$.

2.^{ον} Ἡ χορδὴ AB εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου $BΓ$ καὶ τοῦ προσκειμένου

τμήματος BD , ἥ, $AB^2 = BD \times BΓ$. ἔχομεν παρομοίως

$AG^2 = GD \times BΓ$. λοιπὸν $AB : AG :: BD : DG$ ἑπειδὴ δὲ

$AB^2 = BD \times BΓ$, καὶ $AB \times BΓ = BD \times BΓ$ διὰ τοῦτο

$AB : BΓ :: BD : DG$ ὡσαύτως $AG : BΓ :: DG : BΓ$. Οἱ λόγοι οὗτοι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἴτε πρὸς ἄλληλα εἴτε πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας, ἰδόντες εἰς τὰ πορίσματα Γ' καὶ D' τῆς IA' προτάσεως,

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΔ',

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Λ,

Δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν αἱ ὅποιαι περιέχουσι τὴν ἴσην γωνίαν. Οὕτως τὸ τρίγωνον $ABΓ$ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ADE καθὼς τὸ ὀρθογώνιον $AB \times AG$ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον $AD \times AE$. σχ. 128.

Ἀς ἐπιτευχθῇ BE . Τὰ δύο τρίγωνα ABE, ADE , τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι E , ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν AB, AD (πρότ. 6) λοιπὸν, $ABE : ADE :: AB : AD$.

ἔχομεν ὡσαύτως, $ABΓ : ABE :: AG : AE$.

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀνα-
λογίας, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν ὅρον ABE , ἔχομεν

$$AB\Gamma : \Delta\Delta E :: AB \times \Delta\Gamma : \Delta\Delta \times \Delta E.$$

Πόρισμα. Ἀρα τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσοδύ-
ναμα, ἰὰν τὸ ὀρθογώνιον $AB \times \Delta\Gamma$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθο-
γώνιον $\Delta\Delta \times \Delta E$, ἢ ἰὰν ἔχωμεν $AB : \Delta\Delta :: \Delta E : \Delta\Gamma$, τὸ
ἄποϊον ἔχει χώραν ὅταν ἡ ΔE ᾖ παρὰλληλος τῆς BE .
(βλέπε τὸ β. τῶν δύο σημάτων, 128).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ε.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετρά- Δ.
γωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Εἰσω ἡ γωνία $\Lambda = \Delta$ καὶ ἡ $B = E$ κατὰ πρῶτον ἐξ
αἰτίας τῶν ἰσῶν γωνιῶν Λ καὶ Δ , ἔχομεν, κατὰ τὴν
προλαβοῦσαν πρότασιν, σχ. 122.

$$AB\Gamma : \Delta E Z :: AB \times \Delta\Gamma : \Delta E \times \Delta Z.$$

ἔπειτα, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων,

$$AB : \Delta E :: \Delta\Gamma : \Delta Z,$$

Καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν ἐπὶ
τὴν ταυτοσήμαντον

$$\Delta\Gamma : \Delta Z :: \Delta\Gamma : \Delta Z$$

ὅρον ἐπὶ ὅρον, συνάγομεν,

$$AB \times \Delta\Gamma : \Delta E \times \Delta Z :: \overline{\Delta\Gamma} : \overline{\Delta Z}$$

Ἀρα,

$$AB\Gamma : \Delta E Z :: \overline{\Delta\Gamma} : \overline{\Delta Z}.$$

Τὰ δύο λοιπὸν ὅμοια τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta E Z$, εἶναι πρὸς
ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν $\Delta\Gamma$,
 ΔZ , ἢ ὡς τὰ τετράγωνα δύο ἄλλων ὑπογωνοῦστος ὁμο-
λόγων πλευρῶν.

Δύο ὁμοία πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἃς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν Α εἰς τὰς ἄλλας γωνίας αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ. Εἰς τὸ ἄλλο πολύγωνον ΖΗΘΙΚ' ἃς ἀχθῶσι παρομοίως ἀπὸ τὴν γωνίαν Ζ τὴν ὁμολόγον τῇ Α, αἱ διαγώνιοι ΖΘ, ΖΙ εἰς τὰς ἄλλας γωνίας. σχ. 129.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὁμοία, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ὁμολόγῳ τῇ ΖΗΘ (ὁρ. 2), καὶ περιπλῖον αἱ πλευраὶ ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι μετὰς ΖΗ, ΗΘ· εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ : ΖΗ :: ΒΓ : ΗΘ. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεμένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὁμοία (πρό. 20)· ἡ γωνία ἄρα ΒΓΑ εἶναι ἴση τῇ ΗΘΖ. Ἐὰν αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς ἴσας ΒΓΔ, ΗΘΙ, τὰ ὑπόλοιπα ΑΓΔ, ΖΘΙ θέλουσιν εἶναι ἴσα· ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ εἶναι ὁμοία, ἔχομεν ΑΓ : ΖΘ :: ΒΓ : ΗΘ· ἀπὸ ἄλλο μέρος διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων (ὁρ. 2), ΒΓ : ΗΘ :: ΓΔ : ΘΙ· λοιπὸν ΑΓ : ΖΘ :: ΓΔ : ΘΙ· ἀλλ' εἶδομεν ἤδη ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ = ΖΘΙ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΖΘΙ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεμένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἄρα εἶναι ὁμοία. Μετὸν αὐτὸν τρόπον ἠθελαμεν ἀποδείξει τὴν ὁμοιότητα τῶν ἀκολουθῶν τριγώνων, ὅσας δὴποτε καὶ ἂν ἦτον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν προτεθέντων πολυγώνων· ἄρα δύο ὁμοία πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Σχόλιον. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις εἶναι ἐπίσης ἀληθής· ἐὰν δύο πολύγωνα συντίθενται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, θέλουσιν εἶναι ὁμοία.

Διότι ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ἔθιλα δώσει τὴν γωνίαν $\angle \text{ABΓ} = \angle \text{ZHΘ}$, $\angle \text{BΓA} = \angle \text{HΘZ}$, $\angle \text{ΓAΔ} = \angle \text{ZΘI}$. ἄρα $\angle \text{BΓA} = \angle \text{HΘI}$, ὡσαύτως $\angle \text{AΔE} = \angle \text{ΘIK'}$ κ. τ. λ. Περιπλέον, $\angle \text{B} : \angle \text{H} :: \angle \text{BΓ} : \angle \text{HΘ} :: \angle \text{AΓ} : \angle \text{ZΘ} :: \angle \text{ΓA} : \angle \text{ΘI}$, κ. τ. λ. λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

$\Pi \text{ P O T A Σ I Σ KZ'}$.

$\Theta \Sigma \Omega \text{ P H M A}$.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ· αἱ δὲ ἐπιφανείαι τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων πλευρῶν.

Διότι 1.^{ον} ἐπειδὴ, ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὁμοίων σχημάτων, ἔχομεν $\text{AB} : \text{ZH} :: \text{BΓ} : \text{HΘ} :: \angle \text{ΓA} : \angle \text{ΘI}$, κ. τ. λ. συνάγομεν ἐκ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων· Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων $\text{AB} + \text{BΓ} + \text{ΓA}$ κ. τ. λ., περίμετρος τοῦ πρώτου σχήματος, λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων περίμετρον τοῦ δευτέρου σχήματος, ὃν ἡγουμένος τις πρὸς τὸν ἴδιον ἐπόμενον, ἢ ὃν ἡ πλευρὰ AB πρὸς τὴν ὁμόλογόν της ZH . σχ. 129.

2.^{ον} Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ABΓ , ZHΘ εἶναι ὅμοια,

ἔχομεν (πρό. 25) $\text{ABΓ} : \text{ZHΘ} :: \text{AΓ} : \text{ZΘ}$ ὡσαύτως τὰ

ὅμοια τρίγωνα AΓA , ZΘI , δίδουν $\text{AΓA} : \text{ZΘI} :: \text{AΓ} : \text{ZΘ}$.

ἄρα ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου $\text{AΓ} : \text{ZΘ}$, ἔχομεν

$\text{ABΓ} : \text{ZHΘ} :: \text{AΓA} : \text{ZΘI}$

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν εὐρη.

$\text{AΓA} : \text{ZΘI} :: \text{AΔE} : \text{ZIK'}$.

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐὰν εἴχαμεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τριγώνων. Ἐκ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων συνάγομεν· Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων $\text{ABΓ} + \text{AΓA} + \text{AΔE}$, ἢ τὸ πολύγωνον ABΓAΔE , λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα

τῶν ἐπομένων $ZH\Theta + ZO\Gamma + ZIK'$, ἢ πρὸς τὸ πολυγώνιον $ZH\Theta IK'$, ὃν ἡγούμενός τις $AB\Gamma$ πρὸς τὸν ἰδίον ἐπο-

μενον, ἢ ὃν AB πρὸς ZH . Ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πόρισμα. Ἐὰν κατὰσκευασθῶσι τρία ὁμοία σχήματα τῶν ὁποίων αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ νὰ ᾖναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, τὸ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς κατασκευαζόμενον θελείσθεται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· διότι τὰ τρία ταῦτα σχήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των· ἀλλὰ τὸ τετράγωνόν τ' ἐς ὑποτείνουσας ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἄρα κ. τ. λ. (1).

(1) Ἐξωσαν AG, AB, BG αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου (κ τῶν ὁποίων AG εἶναι ἡ ὑποτείνουσα) τὸ X αἱ ἡμετέρας τὸ κατασκευαζόμενον σχῆμα ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας· AI' , ὁμοιον μὲ τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν AB, BG ὁμολόγων τῆς AG , καὶ παριστάμενα διὰ τῶν χαρακτέρων Ψ, Ω . Κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἔχομεν,

$$\Psi : \Omega :: AB : BG$$

Ὅθεν

$$\Psi + \Omega : \Omega :: AB + BG : BG$$

Ἀλλὰ

$$X : AI' :: \Omega : BG$$

Ἄρα

$$\Psi + \Omega : AB + BG :: X : AI'$$

Ἐπιτιθὲ δὲ

$$AI' = AB + BG \text{ ἄρα } X = \Psi + \Omega \text{ λοιπὸν}$$

κ. τ. λ.

$$O. M.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ μέρη δύο χορδῶν ΑΒ, ΓΔ, τεμνομένων εἰς κύκλον εἶναι ἀντιπεπονηδώς ἀνάλογα, τούτῃ ΑΟ:ΔΟ::ΓΟ:ΟΒ. σχ. 130. (1)

Ας ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ, ΒΔ· εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΟ, ΒΟΔ αἱ γωνίαι εἰς Ο εἶναι ἰσαὶ ὡς κατὰ κορυφήν· ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Δ, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα (18, 2)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία Γ=Β· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΟ:ΔΟ::ΓΟ:ΟΒ.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν συνάγομεν $ΑΟ \times ΟΒ = ΔΟ \times ΓΟ$: ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς μιᾶς χορδῆς ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο μερῶν τῆς ἄλλης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ἐκτὸς τοῦ κύκλου λαμβανόμενον, ἀχθῶσιν αἱ διατέμνουσαι ΟΒ, ΟΓ, περατούμεναι εἰς τὸ κοῖλον τόξον ΒΓ, αἱ δὲ διατέμνουσαι θέλουν εἶναι ἀντιπεπονηδώς ἀνάλογοι τῶν ἐκτὸς μερῶν των, τούτῃ ΟΒ:ΟΓ::ΟΔ:ΟΑ. σχ. 131.

Διότι, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν ΑΓ, ΒΔ, τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΒΔ, ἔχουν τὴν γωνίαν Ο κοινὴν· περιπλέον τὴν Β=Γ

(1) Πρὸς κατάληψιν τῆς ἐκφωνήσεως τῆς παρούσης προτάσεως καὶ τῆς ἀκολουθοῦς σημειώσιον εἶτι:

Δύο γραμμαὶ λέγεται ὅτι τέμνονται εἰς ἀντιπεπονηδὴ λόγον, ὅταν εἰς τὴν σχηματιζομένην ἀναλογίαν ἀπὸ τὰ μέρη των, τὰ δύο μέρη τῆς μιᾶς εἶναι τὰ ἄκρα, καὶ τὰ ἄλλα δύο τῆς ἄλλης τὰ μέσα.

Καὶ δύο γραμμαὶ λέγονται ἀντιπεπονηδώς ἀνάλογοι τῶν μερῶν των, ὅταν ἡ μία τεύτων τῶν γραμμῶν καὶ τὸ ἀντικείμενον μέρος τῆς σχηματίζουσιν τὰ ἄκρα, ἐν δὲ ἡ ἄλλη καὶ τὸ ἀντικείμενον μέρος τῆς σχηματίζουσιν τὰ μέσα— Ο. Μ.

(18, 2) ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια· καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν,

$$OB : OF :: OA : OD.$$

Πόρισμα. Ἀρα τὸ ὀρθογώνιον $OA \times OB$, ἰσοῦται μετὰ τὸ ὀρθογώνιον $OF \times OD$.

Σχόλιον. Δυσμέθας νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἔχει μεγάλην ἀναλογίαν μετὰ τὴν προλαβοῦσαν, καὶ δὲν διαφέρει ταύτης· εἰ μὴ καθ' ὅ,τι αἱ δύο χορδαὶ AB , GD ἀντὶ νὰ τέμνωνται ἐντὸς, τέμνονται ἐκτὸς τοῦ κύκλου· τῆς παρούσης προτάσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μερική περίσσεια ἢ ἀκόλουθος.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Α'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐάν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον O ἐκτὸς τοῦ κύκλου λαμβανόμενον, ἀχθῇ ἐφαπτομένη τις OA καὶ διατέμνουσα OF , ἡ ἐφαπτομένη θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διατεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους τῆς· εἰς τρόπον ὥστε θε-
λομεν ἔχει $OF : OA :: OA : OD$ · ἢ, ὅπερ ταῦτόν, $OA = OF \times OD$. σχ. 131.

Διότι ἐπιζευχθεῖσιν τῶν AD , AF , τὰ τρίγωνα OAD , OAF , ἔχουν τὴν γωνίαν O κοινὴν· περιπλέον ἡ γωνία OAD , σχηματιζομένη ἀπὸ ἐφαπτομένην καὶ χορδὴν (19, 2), ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου AD , καὶ ἡ F ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον· ἄρα ἡ γωνία $OAD = F$ · ἄρα τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν

$$OF : OA :: OA : OD.$$

ἐκ τῆς ὁποίας $OA = OF \times OD$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΑΑ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς ὁποιονδήποτε τρίγωνον ABF , ἐάν ἡ γωνία A τελεθῇ διχα ὑπὸ τῆς γραμμῆς AD , τὸ ὀρθογώνιον τῶν πλευρῶν

$AB, \Delta\Gamma$, ὅλῃσι ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων $BA, \Delta\Gamma$, πλὴν τὸ τετράγωνον τῆς διατεμνουσῆς AA . σχ. 133.

Διὰ τῶν τριῶν συγμῶν A, B, Γ ἄς διέλθῃ περιφέρειαν, ἃς προεκβληθῇ ἡ AA μέχρι τῆς περιφερείας, ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓE .

Τὸ τρίγωνον $BA\Delta$ εἶναι ὁμοιον μὲ τὸ $E\Delta\Gamma$ · διότι ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία $BA\Delta = E\Delta\Gamma$ · περιπλέον ἡ γωνία $B = E$, ἵπται δὲ καὶ αἱ δύο ἔχουν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τοξοῦ $A\Gamma$ · ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευраὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν,

$$BA : AE :: AA : A\Gamma.$$

ἐντεῦθεν προκύπτει $BA \times A\Gamma = AE \times AA$ · ἀλλὰ $AE = AA + \Delta E$, καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη

ἐπὶ AA , ἔχομεν $AE \times AA = AA + AA \times \Delta E$ · ἐξ ἄλλου μέρους $AA \times \Delta E = BA \times \Delta\Gamma$ (πρό. 28)· λοιπὸν τέλος

$$BA \times A\Gamma = AA + BA \times \Delta\Gamma.$$

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΑΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$, τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν $AB, A\Gamma$, ἰσοῦται μὲ τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΓE τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἀγομένης καθέτου AA ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς $B\Gamma$. σχ. 134.

Διότι, ἐπιζευχθείσης τῆς AE , τὰ τρίγωνα $AB\Delta, A\Delta\Gamma$, εἶναι ὀρθογώνια, τὸ μὲν εἰς Δ , τὸ δὲ εἰς A · περιπλέον ἡ γωνία $B = E$ · ἄρα εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν $AB : \Gamma E :: AA : A\Gamma$ · ἐκ τῆς ὁποίας $AB \times A\Gamma = \Gamma E \times AA$.

Πόρισμα. Εἰν αἱ ἴσαι αὗται ποσότητες πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τῆς ἰδίας ποσότητος $B\Gamma$, θέλομεν ἔχει $AB \times A\Gamma \times B\Gamma = \Gamma E \times AA \times B\Gamma$. Τώρα, $AA \times B\Gamma$ εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου (πρό. 6)· λοιπὸν

τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν καλεῖται ἐνίοτε *τερεθν*, δι' αἰτίας τὴν ὁποίαν ἀκολουθῶς θέλομεν ἰδεῖ. Εὐκόλως λαβάνομεν ἰδέαν τῆς τιμῆς του, ἐννοοῦντες ὅτι αἱ γραμμαὶ ἀνάγονται εἰς ἀριθμούς, καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς περὶ ὧν ὁ λόγος ἀριθμούς.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὡσαύτως ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Διότι τὰ τρίγωνα AOB , $BOΓ$, $AOΓ$ ἔχοντα τὴν κορυφήν των κοινὴν εἰς O , ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἄρα τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων AB , BG , AG , πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτίνος OA · λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου $ABΓ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. *σχ. 87.*

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Α Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς κάθε ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον $ABΓΔ$, τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο διαγωνίων AG , BD , εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἰς τρόπον ὡς, *σχ. 135.*

$$AG \times BD = AB \times ΓΔ + AD \times BG.$$

Ας ληρῶν τὸ τόξον $\Gamma\text{Ο} = \text{ΑΔ}$, καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ ΒΟ συναπαντῶσα τὴν διάμετρον ΑΓ εἰς Γ .

Ἡ γωνία $\text{ΑΒΔ} = \text{ΓΒΙ}$, ἐπειδὴ ἡ μὲν ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΔ , ἡ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ $\Gamma\text{Ο}$ ἴσου μὲ τὸ ΑΔ . Αἱ γωνίαι ΑΔΒ , ΒΓΙ εἶναι ἴσαι ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα ΑΟΒ . λοιπὸν τὰ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΙΒΓ , καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\text{ΑΔ} : \text{ΓΙ} :: \text{ΒΔ} : \text{ΒΓ}$. ὅθεν $\text{ΑΔ} \times \text{ΒΓ} = \text{ΓΙ} \times \text{ΒΔ}$. Λέγω τώρα ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΙ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΔΓ . διότι ὄντος τοῦ τόξου ΑΔ ἴσου μὲ τὸ $\Gamma\text{Ο}$, ἐὰν προσεθῇ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέρη ΟΔ , προκύπτει τὸ τόξον $\text{ΑΟ} = \text{ΔΓ}$. λοιπὸν ἡ γωνία $\text{ΑΒΙ} = \text{ΔΒΓ}$. περιπλέον ἡ γωνία $\text{ΒΑΙ} = \text{ΒΔΓ}$, ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τμήμα. λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΙ , ΔΒΓ εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογαι πλευраὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν $\text{ΑΒ} : \text{ΒΔ} :: \text{ΑΙ} : \text{ΓΔ}$. ὅθεν $\text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ} = \text{ΒΔ} \times \text{ΑΙ}$.

Προσθέτοντες τὰ δύο εὐρεθέντα ἐξαγόμενα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\text{ΑΙ} \times \text{ΒΔ} + \text{ΓΙ} \times \text{ΒΔ} = (\text{ΑΙ} + \text{ΓΙ})\text{ΒΔ} = \text{ΑΓ} \times \text{ΒΔ}$, θέλομεν ἔχει $\text{ΑΔ} \times \text{ΒΓ} + \text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ} = \text{ΑΓ} \times \text{ΒΔ}$.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἓν ἄλλο θεώρημα ἐπάνω εἰς τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὅμοιον μὲ τὸ ΒΙΓ , δίδει τὴν ἀναλογίαν $\text{ΒΔ} : \text{ΒΓ} : \text{ΑΒ} : \text{ΒΙ}$, ὅθεν ἔπεται $\text{ΒΙ} \times \text{ΒΔ} = \text{ΒΓ} \times \text{ΑΒ}$. Ἐὰν ἐνωθῇ $\Gamma\text{Ο}$, τὸ τρίγωνον ΙΓΟ , ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΙ , θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΔΓ , καὶ διὰ τοῦτο $\text{ΒΔ} : \text{ΓΟ} :: \text{ΔΓ} : \text{ΟΙ}$. ὅθεν προκύπτει $\text{ΟΙ} \times \text{ΒΔ} = \text{ΓΟ} \times \text{ΔΓ}$; ἢ, ἐπειδὴ $\text{ΓΟ} = \text{ΑΔ}$, $\text{ΟΙ} \times \text{ΒΔ} = \text{ΑΔ} \times \text{ΔΓ}$. Προσθέτοντες τὰ δύο ἐξαγόμενα, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\text{ΒΙ} \times \text{ΒΔ} + \text{ΟΙ} \times \text{ΒΔ}$ ἄγεται εἰς $\text{ΒΟ} \times \text{ΒΔ}$, θέλομεν ἔχει,

$$\text{ΒΟ} \times \text{ΒΔ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ} + \text{ΑΔ} \times \text{ΔΓ}.$$

Ἐάν ληθῇ $BH = AD$, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ $ΓΚ'Π$, θέλο-
μεν εὐρεῖν δι' ὁμοίων συλλογισμῶν,

$$ΓΠ \times ΓΑ = AB \times AD + BG \times ΓΔ. (1)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τόξον BH εἶναι ἴσον μὲ τὸ $ΓΟ$, ἐὰν
προσθεῖ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $ΒΓ$, θέλομεν ἔχει τὸ τόξον
 $ΓΒΠ = ΒΓΟ$. ἄρα ἡ χορδὴ $ΓΠ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν
 $ΒΟ$, καὶ ἐπομένως τὰ ὀρθογώνια $ΒΟ \times ΒΔ$ καὶ $ΓΠ \times$
 $ΓΑ$ εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς $ΒΔ$ πρὸς $ΓΑ$. ἄρα

$$ΒΔ : ΓΑ :: AB \times BG + AD \times ΔΓ : AD \times AB + BG \times ΓΔ.$$

Λοιπὸν αἱ δύο διαγωνιοὶ ἐγγεγραμμένου
τινὸς τετραπλεύρου εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ
ἄθροίσματα τῶν ὀρθογωνίων τῶν πλευρῶν αἵ-
τινες τελειοῦν εἰς τὰ ἄκρα των.

Τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα ἡμποροῦν νὰ χρησιμεύσουν
διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν διαγωνίων ὅταν αἱ πλευραὶ ἦναι γνωσταί.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΔΔ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐστὼ $Π$ σημεῖον δεδομένον ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐπὶ τῆς
ἀκτίνος $ΑΓ$, καὶ ἄς ληθῇ σημεῖόν τι $Κ$ ἐκτὸς ἐπὶ τῆς
προεκβολῆς τῆς ἰδίας ἀκτίνος εἰς τρόπον ὥστε $ΓΠ : ΓΑ ::$
 $ΓΑ : ΓΚ'$ ἐὰν ἀπὸ ὁποιανδήποτε σιγμῆν τῆς περιφερείας
 $Μ$ ἀγῶσιν εἰς τὰς δύο σιγμὰς $Π$ καὶ $Κ$ αἱ εὐθεῖαι $ΜΠ$,
 $ΜΚ$, λέγω ὅτι διὰ καθέ σιγμῆν τῆς περιφερείας ὁ λόγος

(1) Τὰ τρίγωνα $ΠΚ'Β$, $ΑΒΓ$ εἶναι ὁμοία· διότι ἡ γωνία $Α = Π$
ἡ γωνία $ΑΓΒ = ΠΒΔ$ · διότι ἡ μὲν ἔχει μέτρον τὸ ἡμισυ τοῦ τόξου
 $ΑΠΒ$ · ἡ δὲ τὸ ἡμισυ τοῦ τόξου $ΠΑΔ$ ἴσον μὲ τὸ $ΑΠΒ$ · λοιπὸν
καὶ ἡ τρίτη $ΠΚ'Β = ΑΒΓ$. ἄρα $ΠΒ : ΠΚ' :: ΑΓ : ΑΒ$ · ὅθεν $ΠΒ \times$
 $ΑΒ = ΑΔ \times ΑΒ = ΑΓ \times ΠΚ'$. πάλιν τὸ τρίγωνον $ΔΓΚ'$ εἶναι ὁμοίον μὲ
τὸ $ΑΒΓ$ · διότι ἡ γωνία $ΔΚ'Γ = ΠΚ'Β = ΑΒΓ$ · ἡ $Δ = Α$ · ἄρα καὶ
 $ΔΓΚ' = ΑΓΒ$ · διὰ τοῦτο $ΓΑ : ΓΚ' :: ΔΓ : ΒΓ$ · λοιπὸν $ΓΔ \times ΒΓ = ΓΚ' \times$
 $ΑΓ$ · προσθέτοντες τὰ ἐκείναις ἐξαχόμενα εὐρίσκομεν τὴν εἰς τὸ
καίμενον ἐξίσωσιν. $Ο$, $Μ$.

τῶν εὐθειῶν τούτων θέλει εἶναι ὁ αὐτός, καὶ θέλομεν ἔχει $ΜΠ : ΜΚ :: ΑΠ : ΑΚ$. σχ. 136.

Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἔχομεν, $ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ, ΓΚ :$
 ἀντὶ ΓΑ θέτοντες ΓΜ, θέλομεν ἔχει $ΓΠ : ΓΜ :: ΓΜ :$
 $ΓΚ$ · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΚΜ, ἔχουν μίαν γωνίαν
 ἴσην Γ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν
 εἶναι ὁμοία (20, 3)· ἄρα ἡ τρίτη πλευρὰ ΜΠ εἶναι
 πρὸς τὴν τρίτην ΜΚ ὡς ΓΠ πρὸς ΓΜ ἢ ΓΑ. ἀλλ' ἡ
 ἀναλογία $ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΚ$ δίδει, ἐν διαιρέσει,
 $ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ — ΓΠ : ΓΚ — ΓΑ$, ἢ $ΓΠ : ΓΑ :: ΑΠ : ΑΚ$
 λοιπὸν $ΜΠ : ΜΚ :: ΑΠ : ΑΚ$ · εἰς τὸν αὐτὸν λόγον με-
 τὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὑπάρχουν αἱ
 εὐθεῖαι $Μ'Π, Μ'Κ, Μ''Π, Μ''Κ$ κ. τ. λ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

Εἰς τὸ Γ'. ΒΙΒΛΙΟΝ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Π Ρ Ω Τ Ο Ν.

Νὰ διαιρέσωμεν εὐθεῖαν δεδομένην εἰς ὅσα ἴσα μέρη
 θέλομεν, ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων γραμμῶν.

1.ῃ· Ἀς προτεθῇ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς
 πέντε ἴσα μέρη· ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἄς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος
 ΑΗ, καὶ ἀπ' οὗ ληφθῇ ΑΓ ἴση μὲ ὅποιονδήποτε μέγεθος,
 ἃς φερθῇ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΗ. Ἀς ἐνωθῇ ἡ τελευταία στυ-
 μὴ διαιρέσεως Η καὶ τὸ ἄλλρον Β διὰ τῆς ΗΒ, ἔπειτα ἃς
 ἀχθῇ ἡ ΓΙ παράλληλος τῆς ΗΒ· λέγω ὅτι ΑΙ εἶναι το
 πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ, καὶ οὕτω φερθείσης τῆς ΑΙ πεν-
 τάκις ἐπὶ ΑΒ, ἡ ΑΒ θέλει διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη.
 σχ. 137.

Διότι, ἰπαιδὴ $ΓΙ$ εἶναι παράλληλος τῆς $ΗΒ$, αἱ πλευραὶ $ΑΗ$, $ΑΒ$ τέμνονται ἀναλόγως εἰς $Γ$ καὶ $Ι$ (πρό. 15). Ἀλλὰ $ΑΓ$ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς $ΑΗ$ · λοιπὸν $ΑΙ$ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς $ΑΒ$.

2.^{ον} Ἀς προτεθῇ νὰ διαιρεθῇ ἡ $ΑΒ$ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν $Π$, $Κ$, $Ρ$. Ἐκ τοῦ ἄκρου $Α$ ἄς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος $ΑΗ$, ἃς ληφθῇ $ΑΓ = Π$, $ΓΔ = Κ$, $ΔΕ = Ρ$, ἃς ἐνωθῶσι τὰ ἄκρα $Ε$ καὶ $Β$, καὶ διὰ τῶν σημείων $Γ$, $Δ$, ἃς ἀχθῶσιν αἱ $ΓΙ$, $ΔΚ'$ παράλληλοι τῆς $ΕΒ$ · λέγω ὅτι ἡ $ΑΒ$ διαιρεῖται εἰς μέρη $ΑΙ$, $ΙΚ'$, $Κ'Β$ ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν $Π$, $Κ$, $Ρ$. σχ. 138.

Διότι ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων $ΓΙ$, $ΔΚ'$, $ΕΒ$ τὰ μέρη $ΑΙ$, $ΙΚ'$, $Κ'Β$ εἶναι ἀνάλογα τῶν μερῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$ (πρό. 15)· ἐκ δὲ τῆς κατασκευῆς ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμάς $Π$, $Κ$, $Ρ$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

Νὰ εὕρωμεν τετάρτην ἀνάλογον τριῶν δεδομένων γραμμῶν $Α$, $Β$, $Γ$.

Ἀς ἀχθῶσιν αἱ δύο ἀπροσδιόριστοι $ΔΕ$, $ΔΖ$ ὑπὸ ὁποίανδήποτε γωνίαν. Ἐπὶ τῆς $ΔΕ$ ἄς ληφθῇ $ΔΑ = Α$ καὶ $ΔΒ = Β$, ἐπὶ τῆς $ΔΖ$ ἄς ληφθῇ $ΔΓ = Γ$, ἃς ἐνωθῇ $ΑΓ$, καὶ διὰ τῆς εἰγμῆς $Β$ ἄς ἀχθῇ ἡ $ΒΧ$ παράλληλος τῆς $ΑΓ$ · λέγω ὅτι $ΔΧ$ εἶναι ἡ ζητούμενη τετάρτη ἀνάλογος· διότι, οὔσης τῆς $ΒΧ$ παραλλήλου τῆς $ΑΓ$, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $ΔΑ : ΔΒ :: ΔΓ : ΔΧ$. Τώρα οἱ τρεῖς πρῶτοι ἔροι ταύτης τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μὲ τὰς τρεῖς δεδομένας γραμμάς· λοιπὸν $ΔΧ$ εἶναι ἡ ζητούμενη τετάρτη ἀνάλογος. σχ. 139.

Πέρισμα. Παρομοίως ἠθέλαμεν εὑρεῖν τρίτην ἀνάλογον δύο δεδομένων γραμμῶν $Α$, $Β$ · διότι αὕτη ἄλλο τι δὲν ἠθέλει εἶναι παρὰ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν $Α$, $Β$, $Β$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Γ'.

Νὰ ἔρωμεν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ δύο δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Β.

Επὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΔΖ ἃς ληθῇ ΔΕ = Α, καὶ ΕΖ = Β: ἐπὶ τῆς ὅλης ΔΖ ὡς διαμέτρου, ἃς γραφῇ ἡ ἡμιπερίφεια ΔΗΖ· εἰς τὴν σιγμὴν Ε ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς Η· λέγω ὅτι ΕΗ εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος. σχ. 140.

Διότι ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περιφέρειας ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου (πρὸς 23)· λοιπὸν ΗΕ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΔΕ, ΕΖ, ἀλλὰ τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς Α καὶ Β:

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Δ'.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο μέρη ὥς· τὸ μεγαλύτερον νὰ ᾖναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης γραμμῆς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους. σχ. 141.

Εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς γραμμῆς ΑΒ ἃς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΒΓ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· ἐκ τῆς σιγμῆς Γ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΓΒ ἃς γραφῇ περίφεια· ἃς ἐπιζευχθῇ ΑΓ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Δ, καὶ ἃς ληθῇ ΑΖ = ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὴν σιγμὴν Ζ κατὰ τὸν ζητούμενον τρόπον, τουτέστι ὡς ΑΒ:ΑΖ :: ΑΖ:ΖΒ.

Διότι οὖσα ἡ ΑΒ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος ΓΒ εἶναι ἐραπτομένη· καὶ ἐὰν προεκβληθῇ ΑΓ ὥς οὗ νὰ συναπαντήσῃ ἐκ νέου τὴν περιφέρειαν εἰς Ε, ὁλομένῃ ἔχει ΑΕ:ΑΒ :: ΑΒ:ΑΔ (πρὸς 30)· λοιπὸν, ἐνδιαίρειται, ΑΕ—ΑΒ:ΑΒ :: ΑΒ—ΑΔ:ΑΔ. Αλλ' ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἡ διάμετρος ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, καὶ ἐπομένως ΑΕ—ΑΒ = ΑΔ = ΑΖ· ἔχομεν

ὡσάυτως, ἐπειδὴ $AZ = AD$, $AB = AD = ZB$ · λοιπὸν $AZ : AB :: ZB : AD$ ἢ AZ · λοιπὸν ἀντιστρέφοντες θέλομεν ἔχει $AB : AZ :: AZ : ZB$ · ἐπειδὴ δὲ $AB > AZ$, διὰ τοῦτο καὶ $AZ > ZB$ · λοιπὸν AZ εἶναι τὸ μείζον τμήμα καὶ ὡς ἐλέπομεν εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξύ τῆς ὅλης AB καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος ZB .

Σχόλιον. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς AB καλεῖται διαιρέσεις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· θέλομεν ἰδεῖ τὰς χρήσεις τῆς. Ἡμποροῦμεν δὲ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ διατέμνουσα AE διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὴν σιγμὴν Δ · διότι, ἐπειδὴ $AB = DE$, ἔχομεν $AE : DE :: DE : AD$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ε'.

Απὸ δεδομένον σημεῖον A ἐντὸς δεδομένης γωνίας $B\Gamma A$, νὰ ἀχθῇ ἡ BA εἰς τρόπον ὥστε τὰ μέρη AB , AD τὰ περιεχόμενα μεταξύ τοῦ σημείου A καὶ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας νὰ ἦναι ἴσα. σχ. 142.

Διὰ τῆς σιγμῆς Λ ἃς ἀχθῇ ἡ AE παράλληλος τῆς ΓA , ἃς ληφθῇ $BE = GE$, καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ $BA\Delta$, ἥτις εἶναι ἡ ζητούμενη γραμμὴ.

Διότι, οὕτως τῆς AE παραλλήλου τῆς ΓA , ἔχομεν $BE : EG :: BA : AD$ · τώρα $BE = EG$ · λοιπὸν $BA = AD$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Σ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ παραλληλόγραμμον ἢ δεδομένον τρίγωνον.

1.^{ον} Ἐστω $AB\Gamma A$ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, AB ἡ βᾶσις του, AE τὸ ὕψος του· ἃς ζητηθῇ μέση ἀνάλογος $X\psi$ μεταξύ AB καὶ AE (πρόβλ. 3)· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $X\psi$ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς $X\psi$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma A$. Διότι ἐκ τῆς κατα-

σκευῆς ἔχομεν $AB : X\psi :: X\psi : AE$ · λοιπὸν $X\psi = AB \times$

ΔΕ· ἀλλὰ $AB \times \Delta E$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ $X\Psi$ τὸ τοῦ τετραγώνου· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα. σχ. 143.

2.^α Ἐς $\Delta B\Gamma$ τὸ δεδομένον τρίγωνον, $B\Gamma$ ἡ βᾶσις του, $\Delta\Delta$ τὸ ὕψος του· ἄς ληθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ $B\Gamma$ καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς $\Delta\Delta$, καὶ ἔσω $X\Psi$ ἡ μέση αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς $X\Psi$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον $\Delta B\Gamma$. σχ. 144.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν $B\Gamma : X\Psi :: X\Psi : \frac{1}{2}\Delta\Delta$, ἔπεται ὅτι $X\Psi = AB \times \frac{1}{2}\Delta\Delta$ · λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς $X\Psi$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ζ'.

Επὶ τῆς δεδομένης γραμμῆς $\Delta\Delta$ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον $\Delta\Delta E\chi$ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον $\Delta B\Gamma\Gamma$. σχ. 145.

Ἀς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν $\Delta\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$, καὶ ἔσω $\Delta\chi$ ἡ τετάρτη αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ $\Delta\Delta$ καὶ $\Delta\chi$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον $\Delta B\Gamma\Gamma$.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν $\Delta\Delta : \Delta B :: \Delta\Gamma : \Delta\chi$, ἀκολουθεῖ ὅτι $\Delta\Delta \times \Delta\chi = \Delta B \times \Delta\Gamma$ · λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $\Delta\Delta E\chi$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον $\Delta B\Gamma\Gamma$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Η'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ ὀρθογωνίου δύο δεδομένων γραμμῶν A καὶ B πρὸς τὸ ὀρθογώνιον δύο δεδομένων γραμμῶν Γ καὶ Δ . σχ. 148.

Ἐς X τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν B, Γ, Δ · λέγω ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν A καὶ X εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν δύο ὀρθογωνίων $A \times B, \Gamma \times \Delta$.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν $B:Γ::Δ:X$, ἔπεται ὅτι $Γ \times Δ = B \times X$. λοιπὸν $A \times B:Γ \times Δ::A \times B:B \times X::A:X$.

Πόρισμα. Εἰς εὗρεσιν λοιπὸν τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων τῶν δεδομένων γραμμῶν A καὶ $Γ$, ἃς ζητήσωμεν τρίτην ἀνάλογον X τῶν γραμμῶν A καὶ $Γ$, εἰς τὸν τρόπον

ὥστε $A:Γ::Γ:X$, καὶ θέλωμεν ἔχει $A:Γ::A:X$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Θ'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ γινομένου τριῶν δεδομένων γραμμῶν $A, B, Γ$, πρὸς τὸ γινόμενον τριῶν ἄλλων ἐπίσης δεδομένων $Π, K, P$. (1).

Ἀς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος X τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν $Π, A, B$ ὥς ζητηθῇ ἐπίσης τετάρτη ἀνάλογος $Ψ$ τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν $Γ, K, P$. Αἱ δύο γραμμαὶ $X, Ψ$ θέλουσι εἶναι μετὰξὺ τῶν ὡς τὰ γινόμενα $A \times B \times Γ, Π \times K \times P$.

Διότι, ἐπειδὴ $Π:A::B:X$, ἔχομεν $A \times B = Π \times X$, καὶ, πολλαπλασιασθέντων τῶν δύο μερῶν ἐπὶ $Γ$, $A \times B \times Γ = Π \times Γ \times X$ ὡσαύτως, ἐπειδὴ $Γ:K::P:Ψ$, ἔπεται ὅτι $K \times P = Γ \times Ψ$ καί, μετὰ τὸν πολλαπλασιασμόν τῶν δύο μερῶν ἐπὶ $Π$, ἔχομεν $Π \times K \times P = Π \times Γ \times Ψ$. λοιπὸν τὸ γινόμενον $A \times B \times Γ$ εἶναι πρὸς τὸ γινόμενον $Π \times K \times P$ ὡς $Γ \times Π \times X$ πρὸς $Π \times Γ \times Ψ$, ἢ ὡς X πρὸς $Ψ$.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ι'.

Νὰ εὕρωμεν τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον παλύνον.

(1) Ἐπειδὴ ὡς ἄλλοι θέλωμεν εἶδει τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν παριστάνει ἓν σκεῖν διὰ τοῦτο ἡ ἐκφώνησις τοῦ παρόντος προβλήματος δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀκολουθοῦσαν, Δεδομένων τῶν τριῶν διατάσεων δύο σκευῶν νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τούτων εἰς γραμμὰς O, M .

Πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ τρίψωμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾷ πλευρᾷ ὀλιγώτερον τοῦ δεδομένου, καὶ τοῦτο πάλιν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾷ πλευρᾷ ὀλιγώτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ τελευταῖον νὰ καταστήσωμεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐστω λοιπὸν $ΑΒΓΔΕ$ τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἀς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος $ΓΕ$, ἥτις ἀφαιρεῖ τὸ τρίγωνον $ΓΔΕ$ ἐκ τῆς σιγμῆς $Δ$ ἃς ἀχθῇ ἡ $ΔΖ$ παράλληλος τῇ $ΓΕ$ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν $ΑΕ$ προεκβαλλομένην· ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ $ΓΖ$, καὶ τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕ$ θέλει ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΖ$ τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Διότι τὰ τρίγωνα $ΓΔΕ$, $ΓΖΕ$ ἔχουν κοινὴν θάσιν τὴν $ΓΕ$ · ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαίτων $Δ$, $Ζ$, κεῖνται ἐπὶ μιᾷ γραμμῆς $ΔΖ$, παράλληλου τῆς βάσεως· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα. Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ σχῆμα $ΑΒΓΕ$, ἔχομεν ἐξ ἑνὸς μέρους τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕ$, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΖ$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα.

Παρομοίως δυναμέθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν $Β$ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ τὸ ἰσοδύναμον $ΑΗΓ$, καὶ οὕτως τὸ πεντάγωνον $ΑΒΔΕ$ θέλει τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον $ΗΓΖ$. σχ. 146.

Ο αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς κάθε ἄλλο σχῆμα· διότι ὀλιγουσεύοντες κάθε φοράν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ὁλομεν καταστήσει τέλος εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Σχόλιον. Εἶδομεν (πρὸβ. 6) ὅτι κάθε τρίγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Οὕτω πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ εὕρεθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μετὰ δεδομένον εὐθύγραμμον σχῆμα· τοῦτο δὲ καλεῖται τε-

τραγωνίζειν τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, ἢ εὐρίσκειν τὸν τετραγωνισμόν αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὑρεσιν τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ κύκλου δεδομένης διαμέτρου.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΑ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων.

Εἴωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων.

1.^{ον} Εὰν πρέπη νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τετραγώνων, ἃς φερθῶσι πρὸς ὀρθὴν αἱ ἀπρὸςδιόριστοι ΕΔ, ΕΖ· ἃς ληθῇ ΕΔ = Α καὶ ΕΗ = Β, ἃς ἐπιζυγῇ ΔΗ, καὶ ΔΗ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. σχ. 147.

Διότι ὄντος τοῦ τριγώνου ΔΕΗ ὀρθογωνίου, τὸ ἐπὶ τῆς ΔΗ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ ΕΔ καὶ ΕΗ κατασκευαζομένων.

2.^{ον} Εὰν δὲ πρέπη νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δεδομένων τετραγώνων, ἃς σχηματισθῇ ὡσαύτως ἡ ὀρθὴ γωνία ΖΕΘ, ἃς ληθῇ ΗΕ ἴση μὲ τὴν μικροτέραν τῶν πλευρῶν Α καὶ Β· ἐκ τῆς σιγμῆς Η ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΗΘ ἴση μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν, ἃς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει ΕΘ εἰς Θ· λέγω δὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν Α καὶ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΗΕΘ εἶναι ὀρθογωνιον, ἡ ὑποκαίνουσα ΗΘ = Α, καὶ ἡ πλευρὰ ΗΕ = Β· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ κ. τ λ.

Σχόλιον. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅσων θελωμεν τετραγώνων· διότι μὲ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν μὲ τὴν

ὅποιαν ἀνάγομεν δύο εἰς ἓν, ἀνάγομεν τρία εἰς δύο, καὶ τὰ δύο ταῦτα εἰς ἓν, καὶ οὕτω διὰ τὰ ἄλλα. Τὸ αὐτὸ ἤθελεν ὑπάρχει εἰν μερικὰ τῶν τετραγώνων ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΒ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον τὸ ὅποιον νὰ ἔχη λόγον πρὸς τὸ δεδομένον ΑΒΓΔ, ὃν ἡ γραμμὴ Μ πρὸς τὴν γραμμὴν Ν. σχ. 150.

Επὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΕΗ, ἃς ληφθῇ ΕΖ=Μ καὶ ΖΗ=Ν· ἐπὶ τῆς ΕΗ ὡς διαμέτρου, ἃς γραφθῇ ἡμικυκλίω, καὶ εἰς τὴν σιγμὴν Ζ ἃς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΖΘ. Ἀπὸ τὴν σιγμὴν Θ ἃς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΗΘ, ΘΕ αἵτινες ἃς προεκβληθῶσιν ἀπροσδιορίστως· ἐπὶ τῆς πρώτης ἃς ληφθῇ ΘΚ' ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Κ' ἃς ἀχθῇ ἡ Κ'Ι παράλληλος τῆς ΕΗ. λέγω ὅτι ΟΙ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Κ'Ι, ΗΕ, ἔχομεν

$$\frac{ΟΙ}{ΘΚ'} : \frac{ΘΕ}{ΘΗ} :: \frac{ΟΙ}{ΘΚ'} : \frac{ΘΕ}{ΘΗ} :: \frac{ΟΙ}{ΘΚ'} : \frac{ΘΕ}{ΘΗ} :: \frac{ΟΙ}{ΘΚ'} : \frac{ΘΕ}{ΘΗ}$$
 αἱ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ (πρό. 23), τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ ὡς τὸ τμήμα ΕΖ πρὸς τὸ τμήμα ΖΗ, ἢ ὡς Μ πρὸς Ν, λοιπὸν

$$\frac{ΟΙ}{ΘΚ'} : \frac{ΘΕ}{ΘΗ} :: \frac{Μ}{Ν}$$
 Ἀλλὰ ΘΚ' = ΑΒ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΟΙ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ὡς Μ πρὸς Ν.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΓ'.

Επὶ τῆς πλευρᾶς ΖΗ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, νὰ γράψωμεν πολύγωνον ὁμοιον τῷ δεδομένῳ ΑΒΓΔΕ. σχ. 129.

Εἰς τὸ δεδομένον πολύγωνον ἃς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, εἰς τὴν σιγμὴν Ζ ἃς γένῃ ἡ γωνία

$\text{ZH}\Theta = \text{BA}\Gamma$, καὶ εἰς τὴν εἰγμὴν H ἡ γωνία $\text{ZH}\Theta = \text{AB}\Gamma$. αἱ γραμμαὶ $\text{Z}\Theta$, $\text{H}\Theta$, τέμνονται εἰς Θ , καὶ $\text{ZH}\Theta$ εἶναι τρίγωνον ὅμοιον μὲ τὸ $\text{AB}\Gamma$: ὡσαύτως ἐπὶ τῆς $\text{Z}\Theta$, ὁμολόγου τῇ $\text{A}\Gamma$, ἃς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ZIO ὅμοιον τῷ $\text{A}\Delta\Gamma$, καὶ ἐπὶ τῆς ZI ὁμολόγου τῇ $\text{A}\Delta$, ἃς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ZIK' ὅμοιον τῷ $\text{A}\Delta\text{E}$. Τὸ πολύγωνον $\text{ZH}\Theta\text{IK'}$ εἶναι τὸ ζητούμενον ὅμοιον τῷ $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}$.

Διότι τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρό. 26).

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΔ'.

Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων, νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν.

Ἐσσαν A καὶ B δύο ὁμολογοὶ πλευραὶ τῶν δεδομένων σχημάτων, ἃς ζητηθῇ τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν A καὶ B . ἔσω X ἡ πλευρὰ τοῦτου τοῦ τετραγώνου, X θέλει εἶναι εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα ἡ ὁμολογὸς πλευρὰ τῇ A καὶ B εἰς τὰ δεδομένα σχήματα. Ακολουθῶς τὸ σχῆμα κατασκευάζεται διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος.

Διότι τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Τώρα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς X εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν A καὶ B . λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς X εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων ὁμοίων σχημάτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν A καὶ B .

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΕ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον, καὶ τὸ ὅποιον νὰ ἔχη πρὸς τοῦτο τὸ σχῆμα λόγον δεδομένον M πρὸς N .

Εξω Α μία τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου σχήματος, Χ ἡ ὁμολόγος πλευρὰ εἰς τὸ ζητούμενον· ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα σχήματα πρέπει νὰ ᾖναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· διὰ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῆς Χ ἀνάγκη νὰ ᾖναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Α ὡς Μ πρὸς Ν· εὐρίσκομεν λοιπὸν Χ διὰ τοῦ προβλήματος ΙΒ'. γνωστῆς τῆς Χ, τὸ ὑπόλοιπον ἐκτελεῖται διὰ τοῦ ΙΓ' προβλήματος.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΖ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὁμοῖον μὲ τὸ σχῆμα Π καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ· σχ. 151.

Ζητοῦμεν τὴν πλευρὰν Μ τοῦ ἰσοδυναμοῦ τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ τὴν πλευρὰν Ν τοῦ ἰσοδυναμοῦ τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα Κ· εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς μίαν τετάρτην ἀνάλογον Χ τῶν γραμμῶν Μ, Ν, ΑΒ αἵτινες εἶναι δεδομέναι· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, ἥς γραφθῇ σχῆμα ὁμοῖον μὲ τὸ σχῆμα Π· λόγῳ ὅτι θέλει εἶναι προσέτι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ.

Διότι καλοῦντες Ψ τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ ἀναγραφόμενον σχῆμα, ὁλομεν ἔχει $\Pi : \Psi :: AB : X$ ἀλλ' ἐκ τῆς

κατασκευῆς, $AB : X :: M : N$, ἢ $AB : X :: M : N$ · λοιπὸν $\Pi : \Psi :: M : N$. Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν $M =$

Π καὶ $N = K$ · λοιπὸν $\Pi : \Psi :: \Pi : K$ · λοιπὸν $\Psi = K$ · ἄρα τὸ σχῆμα Ψ εἶναι ὁμοῖον μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΖ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὑποῖου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ καίνουον δεδομένον ἄθροισμα ΑΒ. σχ. 152.

Επὶ τῆς AB , ὡς διαμέτρου, ἄς γραφθῇ ἡμικυκλίω· ἐκ τῆς κυκλῆς A ἄς ὑψωθῇ μία κάθετος ἐπὶ τὴν AB , καὶ ἀπ' οὗ ληφθῇ ἐπὶ τῆς κάθετου ἡ AD ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ , ἄς ἀχθῇ ἡ DE παράλληλος τῇ AB . Ἀπὸ τὴν κυκλῆν E , ὅπου ἡ παράλληλος τέμνει τὴν περιφέρειαν ἄς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος EZ . λέγω ὅτι AZ καὶ ZB εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητούμενου ὀρθογωνίου· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ AB · καὶ τὸ ὀρθογωνίων των $AZ \times ZB$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς EZ (πρό. 23), ἢ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς AD · λοιπὸν τὸ ὀρθογωνίον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ .

Σχόλιον. Διὲ νὰ ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει τὸ διάστημα AD νὰ μὴ ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα, τουτέστιν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου Γ νὰ μὴ ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς γραμμῆς AB . (1).

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΗ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογωνίον ἰσοδύναμον μὲ τετράγωνον Γ , καὶ τοῦ ὑπολοίπου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχουν μεταξύ των τὴν δεδομένην διαφορὰν AB . σγ. 153.

Επὶ τῆς δεδομένης AB , ὡς διαμέτρου, ἄς γραφθῇ περικυκλίω· εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ἄς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη AD ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου Γ · ἄς ἐνωθῇ ἡ DO καὶ ἄς προεκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς E . λέγω ὅτι DE καὶ AZ εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητούμενου ὀρθογωνίου.

(1) Τὸ ἔριον λοιπὸν τοῦ προβλήματος εἶναι ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δεδομένου ἄθροισματος, καὶ τότε τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογωνίον εἶναι εἰς τὴν μεγίστην του κατασκευασίμην εἰς τὸ ὅριον τοῦτο ἡ φερεμένη παράλληλος τῇ AB ἀπτεται τῆς περιφέρειας. Πέραν τούτου τοῦ ὁρίου τὸ πρόβλημα καταλείνεται ἀνυπαρκτον, διότι δὲν ὑπάρχει πλέον κινὸν σχῆμα μὲ τὴν φερεμένην παράλληλον καὶ τὴν περιφέρειαν. Ο. Μ.

Διότι 1.^{ον} ἡ διαφορά τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον EZ ἢ AB . 2.^{ον} τὸ ὀρθογώνιον $\Delta E \times \Delta Z$

εἶναι ἴσον μὲ AD (πρό. 3ο). λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ .

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α ΙΘ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον, ἐὰν ὑπάρχη, μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Εἰω $AB\Gamma H$ ὁποιοῦνδήποτε τετράγωνον, AG ἡ διαγωνίος του. σχ. 154.

Επειδὴ AG ὡς πλάγια εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓB ὡς καθέτου, πρέπει νὰ φέρωμεν ΓB ἐπὶ GA τοσάκις ὡσάκις εἶναι δυνατόν νὰ περιέχεται (προβλ. 17· βιβλ. 2), καὶ πρὸς τοῦτο ἄς γραθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Γ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓB τὸ ἡμικύκλιον ABE , βλέπομεν ὅτι ΓB περιέχεται μίαν φοράν εἰς AG μὲ τὰ ὑπόλοιπον AD τὸ ἐξαχγόμενον λοιπὸν τῆς πρώτης ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 1 μὲ τὸ ὑπόλοιπον AD , τὸ ὅποιον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ $B\Gamma$ ἢ μὲ τὴν ἴσην τῆς AB .

Ἡμποροῦμεν νὰ λάβωμεν $AZ = AD$, καὶ νὰ φέρωμεν AZ ἐπὶ AB ἢ θέλαμεν εὕρῃ ὅτι περιέχεται δις μὲ ὑπόλοιπον: πλὴν ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ τὰ ἀκόλουθα προβαίνουν σμικρύνοντα, καὶ διὰ τὴν σμικρότητα των ἀμέσως ἤθελον γένῃ ἀνεπαίσθητα, ἢ ἀνωτέρω πρᾶξις δὲν ἤθελεν εἶναι παρὰ ἀτελεῖς μηχανικὸν μέσον, ὅθεν τίποτε δὲν ἤθελαμεν ἡμπορέσει νὰ συμπεράνωμεν ὥστε νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν αἱ γραμμαὶ AG , ΓB ἔχουν ἢ δὲν ἔχουν μεταξὺ των κοινὸν μέτρον: ἀλλ' ὑπάρχει μέσον ἀπλούςατον νὰ ἀποφύγωμεν τὰς μειουμένας γραμμὰς, καὶ νὰ μὴ ἔχωμεν νὰ ἐργαζώμεθα παρὰ ἐπὶ γραμμῶν αἱ ὁποῖαι μένουν πάντοτε τοῦ ἰδίου μεγέθους.

Τῷ ὄντι, οὗσης τῆς γωνίας $AB\Gamma$ ὀρθῆς, AB εἶναι ἰφαπτομένη, καὶ AE διατέμνουσα ἡγμένη ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου, εἰς τρόπον ὥστε ἔχομεν (πρὸς 3ο) $AD : AB :: AB : AE$. Οὕτως· εἰς τὴν δευτέραν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ συγκρίνωμεν AD μὲ AB , ἡμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ λόγου τῆς AD πρὸς AB , νὰ λάβωμεν τὸν τῆς AB πρὸς AE . Τώρα AB ἢ ἴση τῆς $ΓΔ$ περιέχεται δις εἰς AE μὲ τὸ ὑπόλοιπον AD · λοιπὸν τὸ ἐξαγόμενον τῆς δευτέρας ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 2 μὲ τὸ ὑπόλοιπον AD τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ AB .

Ἡ τρίτη ἐργασία, ἥτις συνίσταται εἰς τὴν σύγκρισιν τῆς AD μὲ AB , ἄγεται ὡσαύτως εἰς τὴν σύγκρισιν τῆς AB ἢ τῆς ἴσης τῆς $ΓΔ$ μὲ AE , καὶ ἀκόμη ἔχομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον AD .

Τώρα ἐπειδὴ εἰς ὅλας ταύτας τὰς ἐργασίας καὶ τὰς ἀκολουθοῦσας ἐργαζόμεθα ἐπὶ τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, διὰ τοῦτο θέλομεν ἔχει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον δηλαδὴ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον AD , καὶ ὅσον καὶ ἂν προσκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν πάντοτε τὸ αὐτὸ πηλίκον καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον AD εὐρίσκομεν· ἐπειδὴ λοιπὸν πάντοτε εὐρίσκομεν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἰδίου μεγέθους, ἡ ἐργασία δὲν τελεῖται ποτὲ· διότι ποτὲ δὲν εὐρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδὲν. Δικαίως λοιπὸν ἡμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξύ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου· ἀλήθεια γνωστὴ καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς (διότι αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι μεταξύ των $\sqrt{2} : 1$ ἔχουν εἰς λόγον ἀσύμμετρον (πρ. 11)), πλην ἀποκαθίσταται σαφεστάτη διὰ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως.

Σχόλιον. Ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι νὰ εὕρωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὸν ἀκριβῆ λόγον τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου· ἀλλ' ἡμποροῦμεν νὰ πλησιάσωμεν τοσοῦτον ὅσον θέλωμεν διὰ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος τὸ ὁποῖον

217

είναι ἴσον μὲ τοῦτον τὸν λόγον. Ἡ πρώτη ἐργασία ἔδωκε
διὰ πηλίκον 1° ἢ δευτέρᾳ καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἐπ' ἄπειρον
δίδουν 2: Οὕτως τὸ περί οὗ ὁ λόγος κλάσμα εἶναι

1 + $\frac{1}{2}$

+ $\frac{1}{4}$

+ $\frac{1}{8}$

+ $\frac{1}{16}$

+ $\frac{1}{32}$ + κ. τ. λ. ἐπ' ἄπειρον.

Παραδείγματος χάριν, ἐκμ λογαριάσωμεν τοῦτο τὸ
κλάσμα μέχρι τοῦ τετάρτου ὅρου, εὐρίσκομεν ὅτι ἡ
τιμὴ του εἶναι $1\frac{11}{16}$ ἢ $\frac{27}{16}$ εἰς τρόπον ὥστε ὁ ὡς ἔγγιστα λό-
γος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου εἶναι ::
41:29. Πῶς λαμβάνεται εὐρη πλέον ὡς ἔγγιστα λόγον λογα-
ριαζόντες μεγαλύτερον ἀριθμὸν ὅρων.

B I B Λ Ι Ο Ν Δ.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ.

Τὸ πολὺγωνον τὸ ὑποῖον ἐνταύτῳ εἶναι ἰσογώνιον καὶ
ἰσόπλευρον, καλεῖται κανονικόν. πολὺγωνον.

Υπάρχουν κανονικὰ πολύγωνα καὶ τοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.
Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ κανονικόν πολὺγωνον
τρίων πλευρῶν καὶ τὸ τετράγωνον, τὸ τῶν τεσσάρων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο κανονικά πολύγωνα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι δύο ὅμοια σχήματα. σχ. 155.

Ἐξωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ δύο κανονικά, ἐξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αβγδεζ· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, ἰσοῦται δὲ μὲ ὀκτὼ γωνίας ὀρθάς (28 1). Ἡ γωνία Α εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τοῦ-του τοῦ ἄθροίσματος ὡς καὶ ἡ γωνία α· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι· ἐπομένως τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας Β καὶ β, Γ καὶ γ κ.τ.λ.

Περιπλέον, ἐπεὶ δὲ ἐκ τῆς φύσεως τῶν πολυγώνων τούτων αἱ πλευраὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ., εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ αβ, βγ, γδ κ.τ.λ. φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχομεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ:αβ :: ΒΓ:βγ :: ΓΔ:γδ κ.τ.λ. λοιπὸν τὰ δύο σχήματα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· εἶναι λοιπὸν ὅμοια (ὁρ 2 βιβ. 3).

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμολόγοι πλευραὶ, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων πλευρῶν (27, 3).

Σχόλιον. Ἡ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ὡς ἡ τοῦ ἰσογώνιου πολυγώνου (20, 1).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ, καὶ νὰ περιγρῶθῇ εἰς τὸν κύκλον.

Ἐξω ΑΒΓΔΕ κ.τ.λ., τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον· ἄς φαντασθῶμεν ὅτι διέρχεται περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς, καὶ ΟΠ ἡ φε-

εργμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ὅς ἐπιτε-
χθεῖσιν αἱ ΛΟ, ΟΔ.

Τὰ τετράπλευρα ΟΠΓΔ, ΟΠΒΑ ἡμποροῦν νὰ ἐπιτε-
θῶσι· τῶ ὄντι ἡ πλευρὰ ΟΠ εἶναι κοινὴ, ἡ γωνία ΟΠΓ—
ΟΠΒ, διότι εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΠΓ θέλει ἐφαρ-
μῇσαι μὲ τὴν ἴσην τῆς ΠΒ, καὶ τὸ σημεῖον Γ θέλει πέσει
εἰς τὸ Β· περιπλέον ἐκ τῆς φύσεως τοῦ πολυγώνου, ἡ
γωνία ΠΓΔ—ΠΒΑ, λοιπὸν ΓΔ θέλει λάβει τὴν διέσθυν-
σιν ΒΑ, καὶ ἰσοδὴ ΓΔ—ΒΑ, ἡ σιγμὴ Δ θέλει πέσει εἰς
Λ, καὶ τὰ δύο τετράπλευρα ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμῇσαι.
Τὸ ἀπόρημα λοιπὸν ΟΔ εἶναι ἴσον μὲ ΛΟ, καὶ ἐπομένως
ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων Λ, Β, Γ
θέλει διελθῇ, ὡσαύτως, διὰ τοῦ Δ· ἀλλὰ, δι' ὁμοίου συλλο-
γισμοῦ, δείξομεν ὅτι ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν
τριῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ, θέλει διελθῇ διὰ τῆς ἀκολουθοῦ-
σης Ε, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἡ αὐτὴ λοιπὸν περιφέρεια
ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Λ, Β, Γ, διέρχεται δι' ὅλων
τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ τὸ πολύ-
γωνον ἐγγράφεται εἰς ταύτην τὴν περιφέρειαν.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτά-
σεως, ὅς παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,
κ. τ. λ. ὡς πρὸς τὴν εἰρημένην περιφέρειαν εἶναι χορδαὶ
ἴσαι· ἰσάκως λοιπὸν ἀπέχουσι τοῦ κέντρου (8, 2)· ἐὰν
λοιπὸν ἐκ τῆς σιγμῆς Ο, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα τὴν
ΟΠ, γραφθῇ περιφέρεια, αὕτη θέλει ἀπτεταί τῆς πλευρᾶς
ΒΓ καὶ ἐκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, εἰς
τὴν σιγμὴν τῆς ἡμισείας, καὶ θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη
εἰς τὸ πολύγωνον, ἢ τοῦτο περιγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Σχόλιον Α'. Ἡ σιγμὴ Ο, κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγε-
γραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου, ἡμπορεῖ νὰ θεω-
ρηθῇ ὁμοίως ὡς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦτο
καλεῖται γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἡ γωνία ΛΟΒ' σχη-

ματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο ἀκτῖνας ἡγμένης εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἰδίας πλευρᾶς AB.

Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ χορδαὶ AB, BG κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, φανερόν ἐστιν ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι, καὶ οὕτως ἡ τιμὴ ἐκάστης εὐρίσκεται διαιρουμένων τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον Β'. Διὰ τὴν ἐγγραφὴν κανονικοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ τινὸς πλευρῶν εἰς δεδομένην περιφέρειαν, ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται παρὰ ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πολύγωνον· διότι, ὅταν τὰ τόξα ᾖναι ἴσα, αἱ χορδαὶ AB, BG, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ABO, BOΓ, ΓΟΔ κ. τ. λ. ὡσαύτως θέλουν εἶναι ἴσα, ὡς ἰσόπλευρα μεταξὺ τῶν· λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι ABΓ, BΓΔ, ΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ σχῆμα ἄρα ABΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλει ἵνα κανονικὸν πολύγωνον. σχ. 158.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ἀς ἄξωμεν πρὸς ὀρθὰς δύο διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ· ὥς ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα Α, Β, Γ, Δ, καὶ τὸ σχῆμα ABΓΔ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον· διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι AOB, BOΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, αἱ χορδαὶ AB, BG, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι. σχ. 157.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον BOΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἔχομεν (11, 3) $BG:BO::\sqrt{2}:1$ · λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Να ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἐξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ας ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λυμένον, καὶ ἐξω ΑΒ μία πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐξαγώνου· ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΟ, ΟΒ, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶνα ἰσόπλευρον. σχ. 158.

Διότι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν· οὕτω λαμβάνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα, ἔχομεν $\angle AOB = \frac{1}{6} = 30^\circ$ · αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι ΑΒΟ, ΒΑΟ, τοῦ ἰδίου τριγώνου κάμνουν ἑαυτὰς $2 - 30^\circ = 60^\circ$, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι ἐκάστη τούτων εἶναι 60° · τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΟ εἶναι ἰσόπλευρον· ἡ ἀκτίς ἄρα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐξαγώνου εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἀκτίνα.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἐξάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν, πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτίνα ἐξάκις ἐπὶ τῆς περιφέρειας, καὶ οὕτω θελομεν ἐπιστρέφει εἰς τὴν σιγμὴν ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεχωρήσαμεν.

Ἀφ' οὗ ἐγγραφθῇ τὸ ἐξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ἔχῃ ἐνώσωμεν ἐναλλάξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν, θελομεν σχηματίσει τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Σχόλιον. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΟ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐνταύτῳ ῥομβοειδές, διότι $AB = BG = GO = AO$ · τὸ ἄθροισμα λοιπὸν $(14, 3)$ τῶν τετραγώνων τῶν $\triangle ABO$ καὶ $\triangle GBO$, εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν $\triangle ABO$ καὶ $\triangle GBO$ · τετραγώνων τῶν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $4AB^2$ ἢ $4BO^2$ · ἀφαιρεθέντος καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη BO^2 , μένει $AG^2 = 3BO^2$ · λοιπὸν $AG : BO :: \sqrt{3} : 1$, ἢ $AG : BO :: \sqrt{3} : 1$ · λοιπὸν ἡ

πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 πρὸς τὴν μονάδα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον δεδομένον κανονικὸν δεκάγωνον, ἀκολουθῶς πεντάγωνον καὶ δεκαπεντάγωνον.

Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΟ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (προβ. 4 βιβ. 3) εἰς τὴν σιγμὴν Μ, λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὸ μείζον τμήμα ΟΜ· λέγω ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τὴν ὑποίαν πρέπει νὰ φέρωμεν δεκάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας. σχ. 159.

Διότι ἐπιζευγνύοντες τὴν ΜΒ, ἔχομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς $ΑΟ:ΟΜ::ΟΜ:ΑΜ'$ ἢ, ἐπειδὴ $ΑΒ=ΟΜ$, $ΑΟ:ΑΒ::ΑΒ:ΑΜ'$ λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΑΜΒ ἔχουν μίαν κοινὴν γωνίαν Α περιεχομένην μεταξύ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (20, 3). Ἐὐ τριγώνων ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελεῖς· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΜΒ εἶναι παραμοίως, καὶ ἔχομεν $ΑΒ=ΒΜ$ · ἄλλως $ΑΒ=ΟΜ$ · λοιπὸν ὡσαύτως $ΜΒ=ΟΜ$ · ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΜΟ εἶναι ἰσοσκελεῖς.

Ἡ ἐκτὸς γωνία ΑΜΒ εἶναι διπλασία τῆς ἐντὸς Ο (19, 1)· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ=ΜΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἐκάστη τῶν γωνιῶν πρὸς τὴν θάσιν, ΟΑΒ ἢ ΟΒΑ εἶναι διπλασία τῆς εἰς τὴν κορυφὴν Ο· ἄρα αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι κάμνουν ὁμοῦ πεντάκις τὴν γωνίαν Ο, καὶ οὕτως ἡ Ο εἶναι τὸ πέμπτον μέρος δύο ὀρθῶν, ἢ τὸ δέκατον τεσσαέρων· ἄρα τὴ τῶζον ΑΒ εἶναι τὸ δέκατον μέρος τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Πόρισμα Α'. Εάν ανά δύο δύο ενώσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ὁλοσμεν σχηματίζει τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΓ.

Πόρισμα Β'. Ὅσης πάντοτε ΑΒ τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου, ἔστω ΑΔ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐξαγώνου· τότε τὸ τόξον ΒΔ θέλει εἶναι, ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{15}$ · λοιπὸν ἡ χορδὴ ΒΔ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαπενταγώνου ἢ κανονικοῦ πολυγώνου 15 πλευρῶν. Βλέπομεν ἐνταύτῳ ὅτι τὸ τόξον ΓΔ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΒ.

Σχόλιον. Ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, εἰν τὰ ὑποτείνόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν του τόξα τμηθῶσι δίχα, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων, θέλει σχηματισθῇ νέον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν· Οὕτως βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ἡμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 8, 16, 32, κ. τ. λ. πλευρῶν. Ὡσαύτως τὸ ἐξάγωνον διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 12, 24, 48, κ. τ. λ. πλευρῶν· τὸ δεκαπεντάγωνον διὰ τὴν τῶν πολυγώνων 30, 60, 120 κ. τ. λ. πλευρῶν (1).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Δεδομένου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔ κ.τ.λ., νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν ὁμοῖον πολύγωνον. σλ. 160.

(1) Ἐπὶ πολλὴ ἐνέκλιση ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα ἦσαν τὰ μόνα τὰ ἐπὶ ταῖς ἡμπορεῖν νὰ ἐγγραφθῶν διὰ τῶν διδασκαλιῶν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας, ἢ, ὅπερ ταῦτέν, διὰ τῆς λύσεως τῶν πρωτεβλαθμίων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων· ἀλλ' ὁ K. Gauss ἰδρυξεν, εἰς σύγγραμμά τι ἐπιγραφόμενον Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae, 1801 ὅτι δυνατόν ἐστι ἐγγραφθῇ δι' ὁμοίων μέσων τὸ κανονικὸν πολύγωνον

δικαιπτά πλευρῶν, καὶ ἐν γένει τὸ τῶν 2^{n+1} πλευρῶν, φθάνει μόνον 2^{n+1} νὰ ᾖ καὶ ἀριθμὸς πρῶτος. Ο. Σ.

Εἰς τὴν σιγμὴν T , μέσον τοῦ τόξου AB , ἃς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη $HΘ$ ἣτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ AB (πρό. 10, 2) ἃς γένηται τὸ αὐτὸ εἰς τὸ μέσον ἑκάστου τῶν ἄλλων τόξων $BΓ$, $ΓΔ$, κ. τ. λ. αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται θέλουν σχηματίσει διὰ τῶν κοινῶν τομῶν τῶν τὸ κανονικὸν περιγεγραμμένον πολύγωνον $HΘIK'$ κ. τ. λ., ὁμοιον μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον.

Εὐκόλως βλέπομεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ τρία σημεῖα O , B , $Θ$ εἶναι ἐπ' εὐθείας· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΟΤΘ$, $ΟΘΝ$, ἔχουν κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν $ΟΘ$, καὶ τὴν πλευρὰν $ΟΤ=ΟΝ$ · λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1)· ἐπομένως ἡ γωνία $ΤΟΘ=ΘΟΝ$, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ $ΟΘ$ διέρχεται διὰ τῆς σιγμῆς B μέσου τοῦ τόξου TN : διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ σιγμὴ I εἶναι ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς $ΟΓ$, κ. τ. λ. Ἀλλ' ἐπειδὴ $HΘ$ εἶναι παράλληλος τῇ AB καὶ $ΘΙ$ τῇ $BΓ$, ἡ γωνία $HΘΙ=ABΓ$ (26, 1)· ὡσαύτως $ΘΙΚ'=BΓΔ$, κ. τ. λ. λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἔχομεν $HΘ:AB::ΟΘ:OB$, καὶ $ΘΙ:BΓ::ΟΘ:OB$ · λοιπὸν $HΘ:AB::ΘΙ:BΓ$ · ἀλλὰ $AB=BΓ$, ὅρα $HΘ=ΘΙ$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $ΘΙ=ΙΚ'$, κ. τ. λ. ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι· δέδεικται δὲ ὅτι καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· κανονικὸν ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο καὶ ὁμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.

Πόρισμα Α'. Ἀντιστρόφως, εἰάν ἐδίδοτο τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον $HΘIK'$, κ. τ. λ., καὶ ἐπρεπε διὰ μέσου τούτου νὰ διαγράψωμεν τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον $ABΓ$, κ. τ. λ., βλέπομεν ὅτι ἀρκοῦσε νὰ ἀζώμεν εἰς τὰς κορυφὰς H , $Θ$, I κ. τ. λ. τοῦ δεδομένου πολυγώνου τὰς γραμμὰς $ΟΗ$, $ΟΘ$ κ. τ. λ., αἱ ὑποταί ἤθελον συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰς σιγμὰς $A, B, Γ$, κ. τ. λ.

να ἐνώσωμεν ἀκολουθῶς ταύτας τὰς σιγμάς διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι ἤθελον σχηματίσει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. Ἡμποροῦσαμεν ὡσαύτως, εἰς τὴν ἰδίαν περίσσειαν, νὰ ἐνώσωμεν ἀπλῶς τὰς σιγμάς τῆς ἀφῆς, Τ, Ν, Π, κ. τ. λ. διὰ τῶν χορδῶν ΤΝ, ΝΠ, κ. τ. λ. καὶ ἐπίσης ἠθέλαμεν ἔχει ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῇ περιγεγραμμένῳ.

Πόρισμα. Β'. Ἡμποροῦμεν ἄρα νὰ περιγράψωμεν εἰς δεδομένον κύκλον ὅσα κανονικὰ πολύγωνα ἠξούρομεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τοῦτον τὸν κύκλον, καὶ ἀντιστρόφως.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἐξω, παραδείγματος χάριν, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΗΘΙΚ', κ. τ. λ. Τὸ τρίγωνον ΗΘΘ ἔχει διὰ μέτρον ΗΘ Χ ½ΟΤ, τὸ τρίγωνον ΟΘΙ ἔχει μέτρον ΘΙ Χ ½ΟΝ· ἀλλὰ ΟΝ = ΟΤ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ὁμοῦ ἔχουν μέτρον (ΗΘ + ΘΙ) Χ ½ΟΤ· ἐξακολουθοῦντες οὕτω διὰ τὰ ἄλλα τρίγωνα, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, ἢ τὸ ὅλον πολύγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσσεων ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ', κ. τ. λ. ἢ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ ½ΟΤ. σχ. 160.

Σχόλιον. Ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ΟΤ ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν· ἐνίοτε καλεῖται ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν

περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων· αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἀκτίνων.

Ἐστω AB μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐνὸς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος πολυγώνων, O τὸ κέντρον του, καὶ ἐπομένως OA ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ OD κάθετος ἐπὶ τὴν AB , ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου· ἔστω παρομοίως $\alpha\beta$ ἡ πλευρὰ ἐνὸς ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου, O τὸ κέντρον του, oa καὶ od αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων περιγεγραμμένου τε καὶ ἐγγεγραμμένου. Αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ AB καὶ $\alpha\beta$ · ἀλλ' αἱ γωνίαι A καὶ α εἶναι ἴσαι· διότι ἐκαστὴ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας B καὶ β · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ABO , $\alpha\beta o$ εἶναι ὅμοια, καθὼς καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ADO , $\alpha d o$ · ἄρα $AB : \alpha\beta :: AO : ao :: DO : do$ · ἄρα αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες AO , ao , τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες DO , do τῶν ἐγγεγραμμένων.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἰδίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν AB , $\alpha\beta$ · ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων AO , ao , ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων OD , od · ἔπεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων AO , ao , ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων OD , od .

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Λ Η Μ Μ Α.

Κάθε καμπύλη ἢ πολύγωνος γραμμὴ ἥτις περικυκλοῖ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου τὴν κυρτὴν γραμ-

μὴν ΛMB · εἶναι μακρύτερα τῆς περικυκλουμένης γραμμῆς ΛMB .

Εἰπομεν ἴδη ὅτι διὰ κυρτὴν γραμμὴν ἐννοοῦμεν καμπύλην ἢ πολύγωνον. γραμμὴν, ἥ μέρος καμπύλης καὶ μέρος πολύγωνον, τοιαύτην ὥστε εὐθεῖα γραμμὴ νὰ μὴ ἡμπορῇ νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΛMB εἴχῃ μέρη εἰσέχοντα ἢ ἐσώχας, δὲν ἤθελον εἶναι πλέον κυρτὴ, διότι εὐκόλον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι εὐθεῖα γραμμὴ ἡμπορεῖ νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Τὰ τόξα τοῦ κύκλου εἶναι οὐσιωδῶς κυρτά· διότι εὐθεῖα γραμμὴ δὲν ἡμπορεῖ νὰ τέμνῃ τόξον κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα· ἀλλ' ἡ προκειμένη πρότασις ἐκτείνεται εἰς ὑποιανδήποτε γραμμὴν ἥτις πληροῖ εἰς τὴν ἀπαιτουμένην συνθήκην.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ γραμμὴ ΛMB δὲν ᾖναι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας τὰς περικυκλούσας αὐτὴν, πρέπει μεταξὺ τούτων νὰ ὑπάρχῃ γραμμὴ βραχύτερα ὅλων τῶν ἄλλων, ἡ ὅποια νὰ ᾖναι μικρότερα τῆς ΛMB , ἢ τὸ πολὺ ἴση μετὰ τὴν ΛMB . Ἐστω $\Lambda Γ Δ Ε Β$ ἡ περικυκλούσα αὕτη γραμμὴ· μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν ὅπου θελομεν ὡς ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΠK , ἥτις νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν ΛMB , ἢ τοῦλάχιστον νὰ ἄπτεται αὐτῆς· ἡ εὐθεῖα ΠK εἶναι βραχύτερα τῆς $\Pi Γ Δ Ε Κ$ · ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ τῆς $\Pi Γ Δ Ε Κ$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΠK , θελομεν εἶχει τὴν περικυκλούσαν $\Lambda \Pi K B$ βραχύτεραν τῆς $\Lambda \Pi Δ K B$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη πρέπει νὰ ᾖναι βραχύτερα ἀπὸ ὅλας· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις δὲν ἡμπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν ὅλαι αἱ περικυκλοῦσαι γραμμαὶ εἶναι μακρύτεραι τῆς ΛMB . σγ. 162.

Σχόλιον. Μετὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν δεῖξει ὅτι μίᾳ κυρτῇ καὶ πανταχόθεν κεκλεισμένη γραμμῇ ΛMB , εἶναι βραχύτερα κάθε γραμμῆς ἥτις ἤθελε τὴν περικυκλοῦ

ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, εἴτε ἡ περικυκλοῦσα $ZH\Theta$ ἄπτεται τῆς AMB εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, εἴτε δὲν ἔχει κἀνὲν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν. (1) σγ. 163.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι΄.

Λ Η Μ Μ Α.

Δεδομένων δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν, δυνατόν εἶναι πάντοτε νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μικροτέραν, καὶ ὡσαύτως νὰ περιγραφῇ εἰς τὴν μικροτέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μεγαλητέραν· εἰς τὸν τρόπον ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιφέρειαις αἱ πλευραὶ τοῦ γεγραμμένου πολυγώνου νὰ περικλείωνται μεταξύ τῶν δύο περιφερειῶν.

Εἴπωσαν $ΓΑ, ΓΒ$ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν· εἰς τὴν σιγμὴν A ἅς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη $ΔΕ$ περατομένη εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν εἰς $Δ$ καὶ $Μ$ · ἅς ἐγγραφῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν περιφέρειαν ἓν ἐκ τῶν κανονικῶν πολυγώνων ὅσα εἶναι δυνατόν νὰ ἐγγραφῶσι διὰ τῶν προηγουμένων προβλημάτων· ἀκολουθῶς ἅς τμηθῶσι διόχα τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν τόξα, καὶ ἅς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων· οὕτω θέλει σχηματισθῇ κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευ-

(1) Δὲν πρέπει νὰ θαυμάζῃ τινὰς εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἅπαντὰ ἀπεδείξει ἐκείνων τῶν ἀληθειῶν τὰς ὁποίας εἰ μόνει τοῦ κοινοῦ αἰσθημάτων ἐκρημνίσει ἡμπορεῖν νὰ ἀντιθεῖν. Ο Εὐκλείδης ἠναγκάστηκε νὰ εὐρίσκη ἀπεδείξεις τῶν τοιούτων ἀληθειῶν διὰ τὴν καταπίδιν τούτου πεισματώδεις ἐκρίνους σοφιστὰς εἰ ὅποιοι ἐνόμιζον ὅτι τὸν νὰ ἐναντιώνονται καὶ εἰς αὐτὰς τὰς αὐτοφανεῖς ἀληθείας. Τίς, παραδείγματός χάριν, δὲν εἶναι ἰσχυρικῶς πειπεισμένος ὅτι τὸ περιέχον δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι μικρότερον τοῦ περιεχομένου; καὶ μ' ὅλον τούτο εἶναι χρεῖα ἀποδείξεως διὰ τοῦ ἀρνημένου τοιαύτην ἀλήθειαν ἔχον τὸς ἐκρημνίους τοῦ κοινῆς αἰσθημάτων ἀγκυλὰς αἱ τοιούτου εἶδους ἀλήθειαι μᾶλλον σκοτίζονται ἀπὸ τὰς ἀπεδείξεις παρ' ὅτι διασαφίζονται. — Ο. Μ.

ρδιν. Ας συνεχισθῇ ἡ διχοτομὴ τῶν τόξων ἕως οὗ νὰ πρὸςψῃ πολύγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ὑποτείνῃ τόξον μικρότερον τοῦ ΔΒΕ. Ἐστω ΜΒΝ τὸ τόξον τοῦτο (τοῦ ὁποίου ἡ σιγμὴ τῆς ἡμισείας ὑποτίθεται εἰς Β)· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ χορδὴ ΜΝ θέλει ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου παρὰ τὴν ΔΕ, καὶ οὕτω τὸ κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου ΜΝ εἶναι ἡ πλευρὰ, δὲν ἔμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς. σγ. 164.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἅς ἐπιζευχῶσιν αἱ ΓΜ, ΓΝ αἵτινες συναπαντοῦν τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ εἰς Η καὶ Κ· ΗΚ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὴν μικρὰν περιφέρειαν, ὁμοίου μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγάλην, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ΜΝ. Τώρα φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ΗΚ, δὲν ἔμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν μεγάλην περιφέρειαν, διότι ΓΗ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΜ.

Διὰ τῆς αὐτῆς λοιπὸν κατασκευῆς ἔμποροῦμεν νὰ γράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν, καὶ ὁμοῖον περιγεγραμμένον εἰς τὴν μικρὰν πολύγωνον, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των περιχομένας μεταξύ τῶν δύο περιφερειῶν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἔχωμεν δύο συγκεντρικοὺς τομεῖς ΖΓΗ, ΙΓΘ, ἔμποροῦμεν παρομοίως νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν μεγαλύτερον μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου, ἢ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὸν μικρότερον μερίδα ὁμοίου πολυγώνου, εἰς τρόπον ὥστε αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων νὰ περιέχωνται μεταξύ τῶν δύο περιφερειῶν: ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΖΒΗ διαδοχικῶς εἰς 2, 4, 8, 16 κ.τ.λ. ἕτα μέρη ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς μέρος μικρότερον τοῦ ΔΒΕ.

Ἐνταῦθα καλοῦμεν μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου τὸ περατούμενον σχῆμα ἀπὸ σειρὰν ἴσων χορδῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τόξον ΖΗ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου.

Ἡ μερίς αὕτη ἔχει τὰς ἀρχικὰς ιδιότητες, τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἔχει τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας, εἶναι εἰς τὸν καιρὸν ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος εἰς τὸν κύκλον· Μ' ὅλον τοῦτο δὲν κάμνει μέρος ἑνὸς κυρίως κανονικοῦ πολυγώνου, παρὰ ὃ σάκεις τὸ ὑποτεινόμενον ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς τόξον εἶναι πηλίκον μέρος τῆς περιφερείας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Α'.

Θ Ε Ω Η Μ Α.

Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ας σημειώσωμεν, χάριν συντομίας, διὰ περιφ. ΓΑ τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΒ :: ΓΑ : ΟΒ. σχ. 165.

Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἔχη χώραν, ΓΑ θέλει εἶναι πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς τέταρτον τινὰ ὅρον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ περιφ. ΟΒ : ἅς τὸν ὑποθέσωμεν μικρότερον, καὶ ἔσω, εἰ δυνατόν, ΓΑ : ΟΒ :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ.

Ας ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΟΒ εἶναι ἡ ἀκτίς κανονικὸν πολύγωνον ΕΖΗΚ'ΑΕ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΟΔ εἶναι ἡ ἀκτίς (πρό. 10)· ἅς ἐγγράψωμεν ὁμοιον ΜΝΤΞΜ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτίνος ΓΑ.

Τούτου τεθέντος, ἵπαιδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὁμοια, αἱ περιμέτροί των ΜΝΠΞΜ, ΕΖΗΚ'Ε εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΟΒ, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων (πρό. 8), καὶ οὕτως ΜΝΠΞΜ : ΕΖΗΚ'Ε :: ΓΑ : ΟΒ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΓΑ : ΟΒ :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ. λοιπὸν ΜΝΠΞΜ : ΕΖΗΚ'Ε :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ. Τώρα ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι

ἡ περίμετρος ΜΝΠΞΜ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΑ (πρόβ. 9), καὶ ἐξ ἐναντίας ΕΖΗΚ'Ε εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περιφ. ΟΔ' ἀδύνατον λοιπὸν ΓΑ νὰ ᾔῃαι πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΟΒ, ἢ, μὲ λείξεις γενικωτέρας, ἀδύνατον εἶναι ἀκτὶς πρὸς ἀκτῖνα ὡς ἡ γεγραμμένη περιφέρεια μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα πρὸς μίαν περιφέρειαν μικροτέραν παρὰ τὴν γεγραμμένην μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα.

Εντεῦθεν συνάγω ὅτι οὐδὲ εἶναι δυνατόν νὰ ἔχωμεν, ΓΑ πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μεγαλητέραν τῆς περιφ. ΟΒ· διότι τούτου δοθέντος, ἠθέλαμεν ἔχει ἀντιστρέφοντες τοὺς λόγους: ΟΒ πρὸς ΓΑ ὡς περιφέρεια μεγαλητέρα τῆς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφ. ΓΑ, ἢ, ὅπερ ταῦτόν, ὡς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΓΑ· λοιπὸν ἀκτὶς ἤθελεν εἶναι πρὸς ἀκτῖνα ὡς ἡ γεγραμμένη περιφέρεια μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν τῆς γεγραμμένης περιφερείας μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα, τὸ ὅποιον ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

Ἐπειδὴ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας $\Gamma\Lambda : \text{ΟΒ} :: \text{περιφ. } \Gamma\Lambda : \text{Χ}$ οὔτε μικρότερος οὔτε μεγαλητέρος ἀπὸ περιφ. ΟΒ ἢμπορεῖ νὰ ᾔῃαι, πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ περιφ. ΟΒ· λοιπὸν αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ καὶ κατασκευῆς ἠθέλαμεν δεῖξει ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Δὲν λέγομεν τίποτε περισσότερον ἐπάνω εἰς ταύτην τὴν πρότασιν, ἥτις ἄλλως εἶναι πόρισμα τῆς ἀκολουθοῦ.

Πόρισμα. Τὰ ὅμοια τόξα ΑΒ, ΔΕ, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν ΑΓ, ΔΟ, καὶ οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ταύτων ἀκτίνων. σχ. 166.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ο (ὁρ. 3. βιβλ. 3)· ἀλλ' ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ (17, 2), καὶ ἡ γωνία Ο εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΔΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτίνος ΟΔ· λοιπὸν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν ὁμοίων κάμνουں μέρος· αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΔΟ, λοιπὸν τόξον ΑΒ : τόξον ΔΕ :: ΑΓ : ΔΟ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ὡς οἱ ὅλοι κύκλοι, οὗτοι δὲ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων

λοιπὸν τομ. ΑΓΒ : τομ. ΔΟΕ :: ΑΓ : ΔΟ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφέρειας τοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος.

Ας σημειώσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΑ· λόγῳ ὅτι θέλομεν ἔχει ἐπιφ. ΓΑ = $\frac{1}{2}$ ΓΑ × περιφ. ΓΑ.

Διότι ἐὰν $\frac{1}{2}$ ΓΑ × περιφ. ΓΑ δὲν ᾔηται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς, ἡ ποσότης αὕτη θέλει εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου κύκλου. Ας ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι εἶναι τὸ μέτρον κύκλου μεγαλητέρου, καὶ ἔσω, εἰ δυνατόν, $\frac{1}{2}$ ΓΑ × περιφ. ΓΑ = ἐπιφ. ΓΒ. σχ. 167.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΑ ἃς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον ΔΕΖΗ κ. τ. λ, αἱ πλείυραι τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΒ (πρό. 10)· ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + κ. τ. λ. ἐπὶ $\frac{1}{2}$ ΑΓ (πρό. 7)· ἀλλ' ἡ περίμετρος τοῦ πο-

λυγώνου είναι μεγαλητέρα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφέρειας, διότι τὴν περικυκλοῖ πανταχόθεν· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ.τ.λ., εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ $\frac{1}{2}$ ΑΓΧ περιφ. ΑΓ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κύκλου τῆς ἀκτίνος ΓΒ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρον τοῦ κύκλου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον ὡς περιεχόμενον· ἀδύνατον λοιπὸν $\frac{1}{2}$ ΓΑΧ περιφ. ΓΑ νὰ ᾖναι μεγαλητέρον ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ, ἢ, μεῖναι ἄλλας λέξεις, ἀδύνατον ἡ περιφέρεια ἐνὸς κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του νὰ μετρή κύκλον μεγαλητέρον.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου· καὶ, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξω σχῆμα, ὑποθέτω ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΒ. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{1}{2}$ ΓΒΧ περιφ. ΓΒ δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή κύκλον μικρότερον, παραδείγματος χάριν, τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι ΓΑ. Τῷ ὄντι, ἔξω εἰ δυνατόν, $\frac{1}{2}$ ΓΒΧ περιφ. ΓΒ $\Rightarrow$ ἐπιφ. ΓΑ.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ.τ.λ. θέλει ἔχει μέτρον $(ΔΕ + ΕΖ + \kappa.τ.λ.) \times \frac{1}{2}$ ΓΑ· ἀλλ' ἡ περίμετρος ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + κ.τ.λ. εἶναι μικρότερα ἀπὸ περιφ. ΓΒ ἥτις τὴν περικυκλόνει πανταχόθεν· λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{2}$ ΓΑΧ περιφ. ΓΒ, καὶ πολὺ περισσότερον ἀπὸ $\frac{1}{2}$ ΓΒΧ περιφ. ΓΒ. Ἡ τελευταία αὕτη ποσότης, ἐξ ὑποθέσεως, μετρεῖ τὸν κύκλον τῆς ἀκτίνος ΓΑ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ περιφέρεια ἐνὸς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του, νὰ ᾖναι τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ περιφέρεια ἐνὸς κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του εἶναι τὸ μέτρον τούτου τοῦ ἰδίου κύκλου.

Πόρισμα Α'. Η επιφάνεια ενός τομέως είναι ἴση με τὸ τόξον τούτου τοῦ τομέως πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος. σχ. 168.

Διότι ὁ τομεὺς ΑΓΒ εἶναι πρὸς τὸν ὅλον κύκλον ὡς τὸ τόξον ΑΜΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ΑΒΔ (17, 2) ἢ ὡς $ΑΜΒ \times \frac{1}{2} ΑΓ$ πρὸς $ΑΒΔ \times \frac{1}{2} ΑΓ$. Ἀλλ' ὁ ὅλος κύκλος = $ΑΒΔ \times \frac{1}{2} ΑΓ$. λοιπὸν ὁ τομεὺς ΑΓΒ ἔχει μέτρον $ΑΜΒ \times \frac{1}{2} ΑΓ$.

Πόρισμα Β'. Ἀς καλέσωμεν π τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μονάς· ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ἢ ὡς αἱ διάμετροι, ἡμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν· ἡ διάμετρος 1 εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειάν της π ὡς ἡ διάμετρος 2ΓΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ. εἰς τρόπον ὧς εἶ
 $1 : π :: 2ΓΑ : \text{περιφ. } ΓΑ$ · λοιπὸν $\text{περιφ. } ΓΑ = 2π \times ΓΑ$ · πολλαπλασιάζοντε, ἀμφότερα τὰ μέρη ἐπὶ $\frac{1}{2} ΓΑ$, ἔχομεν
 $\frac{1}{2} ΓΑ \times \text{περιφ. } ΓΑ = π \times ΓΑ$, ἢ ἐπιφ. $ΓΑ = π \cdot ΓΑ$.
 λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴση με τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτίνος του ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ π, ὅστις παριστάνει τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 1, ἢ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. σχ. 165.

Παρομοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ὅστις ἔχει ἀκτῖνα
 ΟΒ θέλει εἶναι ἴση με $π \times ΟΒ$. Τώρα $π \times ΓΑ : π \times ΟΒ ::$
 $ΓΑ : ΟΒ$ · λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ με τὸ προλαβὸν θεώρημα.

Σχόλιον. Εἵπομεν ἤδη ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγώνισμου τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὑρεσιν τετραγώ-

του Ἰσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ κύκλον γνωστῆς ἀκτίνος. Τώρα ἐδείξαμεν ὅτι ὁ κύκλος ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτίνος, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο μετατρέπεται εἰς τετράγωνον ἐὰν ληφθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο του διαστάσεων (προβ. 6. βιβλ. 3). Οὕτως τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμού τοῦ κύκλου ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς περιφερείας ὅταν ἡ ἀκτίς ᾖ γινωστή, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἡ γινῶσις τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Εἰς τοῦ νῦν δὲν ἐξάθη δυνατόν νὰ προσδιορισθῇ ὁ λόγος οὗτος παρὰ ὡς ἔγγιστα· πλὴν ἡ προσέγγισις τόσον μακρὰν προεκτάθη, ὥστε ἡ γινῶσις τοῦ ἀκριβοῦς λόγου δὲν ἤθελεν ἔχει τι πλέον ἀπὸ τὴν τοῦ ὡς ἔγγιστα. Οὕτως τὸ ζήτημα τοῦτο, τὸ ὅποιον τοσοῦτον ἐνσχόλησε τοὺς Γεωμέτρους ὅταν ὀλίγον ᾗσαν γνωσταὶ αἱ μέθοδοι τῆς προσεγγίσεως, ἐξωρίσθη τώρα καὶ κατετάχθη μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιττῶν ζητημάτων εἰς τὰ ὅποια εἰς ἄλλους δὲν εἶναι συγχωρημένον νὰ ἐνασχολῶνται, παρὰ εἰς τοὺς μύλις τὰς πρώτας ιδέας τῆς Γεωμετρίας ἔχοντας.

Ο Ἀρχιμήδης ἔδειξεν ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον περιέχεται μετξὺ $3\frac{10}{70}$ καὶ $3\frac{10}{71}$ · οὕτως $3\frac{1}{7}$ ἢ $3\frac{22}{7}$ εἶναι πολλὰ προσεγγίζουσα τιμὴ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ὅποιον ἐπαραστήσαμεν διὰ π , καὶ ἡ πρώτη αὕτη προσέγγισις εἶναι κατὰ πολλὰ ἐν χρήσει διὰ τὴν ἀπλοτητά της. Ο Μέτιος εὗρε διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολὺ πλέον προσεγγίζουσαν τιμὴν $\frac{355}{113}$. Τέλος ἡ τιμὴ τοῦ π , ἀναπτυχθεῖσα μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, εὗρέθη ὑπὸ ἄλλων ὑπολογιστῶν (calculateurs) 3,1415926535897932 κ. τ. λ. καὶ ἔλαβον τὴν ὑπομονὴν νὰ προεκτείνουν τὰ δεκαδικὰ ταῦτα μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ εἰκοστοῦ ἐβδόμου ἢ

μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ τεσσαρακοστοῦ. Φανερόν ὅτι τοιαύτη προσέγγις ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὴν ἀλκθειαν, καὶ ἄλλως δὲν γνωρίζομεν τὰς ρίζας τῶν ἀτελῶν δυνάμεων.

Εἰς τὰ ἀκόλουθα προβλήματα θέλομεν ἐξηγήσει δύο ἀπὸ τὰς ἀπλουσιέρας στοιχειώδεις μεθόδους διὰ τὴν εὕρεσιν τούτων τῶν προσεγγίσεων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Γ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Δεδομένων τῶν ἐπιφανειῶν κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ εὐρεθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένου τε καὶ περιγεγραμμένου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Εἷω AB ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, EZ παράλληλος τῇ AB , ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, Γ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ γωνία AM , καὶ ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι AP , BK , ἡ γωνία AM θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, καὶ PK διπλασία τῆς PM θέλει εἶναι ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου πολυγώνου (πρό. 6). Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ θέλει ἔχει χώραν εἰς τὰς διαφόρους ἴσας γωνίας μετὰ τὴν AGM , ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὴν γωνίαν AGM , καὶ τὰ εἰς αὐτὴν περιεχόμενα τρίγωνα θέλουν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα πολύγωνα. Εἷω A ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ὁποῦ AB εἶναι ἡ πλευρὰ, B ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, A' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποῦ AM εἶναι ἡ πλευρὰ, B' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου· A καὶ B εἶναι γνωστὰ, καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῶσι A' καὶ B' . σχ. 169.

1.^{ον} Τὰ τρίγωνα AGD , AGM τῶν ὁποίων A εἶναι κοινὴ κορυφή, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των GD , GM .

ἄλλως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α καὶ Α', διότι εἶναι ὅμοια μέρη τούτων, καὶ τὰ ὅμοια μέρη δύο ποσότητων εἶναι ὡς αὐταὶ αἱ ποσότητες· λοιπὸν $A : A' :: ΓΔ : ΓΜ$. Τὰ τρίγωνα ΓΑΜ, ΓΜΕ, τῶν ὁποίων Μ εἶναι κοινὴ κορυφή, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις τῶν ΓΑ, ΓΕ· τὰ ἴδια τρίγωνα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α' καὶ Β διὰ τὸν εἰρημένον λόγον· λοιπὸν $A' : B :: ΓΑ : ΓΕ$. Ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΜΕ, ἔχομεν $ΓΔ : ΓΜ :: ΓΑ' : ΓΕ'$ · λοιπὸν $A : A' :: A' : B'$ · λοιπὸν τὰ πολύγωνα Α' καὶ Β διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ζητουμένων, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν πολυγώνων Α καὶ Β, καὶ ἐπομένως ἔχομεν $A' = \sqrt{(A \times B)}$.

2.^η Εξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΓΜ, τὸ τρίγωνον ΓΠΜ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΠΕ ὡς ΠΜ πρὸς ΠΕ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΓΠ τέμνει διχα τὴν γωνίαν ΜΓΕ, ἔχομεν (17, 3) $ΠΜ : ΠΕ :: ΓΜ : ΓΕ :: ΓΔ : ΓΑ :: A : A'$ · λοιπὸν $ΓΠΜ : ΓΠΕ :: A : A'$, καὶ ἀκολουθῶς, $ΓΠΜ : ΓΠΜ + ΓΠΕ$, ἢ $ΓΜΕ :: A : A + A'$. Ἀλλὰ $ΓΜΠΑ$ ἢ $2ΓΠΜ$ καὶ $ΓΜΕ$ ὡς ὅμοια μέρη τῶν πολυγώνων Β' καὶ Β εἶναι ἀναμεταξύ των ὡς τὰ ἴδια πολύγωνα· λοιπὸν $B' : B :: 2A : A + A'$. Ἡδὴ ἐπροσδιωρίσθη Α' διὰ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας προσδιορίζεται Β, καὶ ἔχομεν $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$ · λοιπὸν διὰ μέσου τῶν πολυγώνων Α καὶ Β εὐκολον εἶναι νὰ εὑρεθῶσι τὰ πολύγωνα Α' καὶ Β' τὰ ὅποια ἔχουν διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Δ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Εστω ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου $\equiv 1$, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θέλει εἶναι $\sqrt{2}$ (πρό. 3), ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἴση μὲ τὴν διάμετρον 2· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου $\equiv 2$, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου $\equiv 4$. Τώρα εἰν κάμωμεν $A \equiv 2$ καὶ $B \equiv 4$, θέλομεν εὑρεῖν διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον $A' \equiv \sqrt{2} \equiv$

$$2,8284271, \text{ καὶ τὸ περιγεγραμμένον } B' \equiv \frac{16}{2 + \sqrt{2}} \equiv$$

3,3137085. Γνωρίζοντες οὕτω τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον ὀκτάγωνον, εὐρίσκομεν διὰ μέσου τούτων τὰ πολύγωνα διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν· πρέπει ἐκ νέου νὰ ὑποθέσωμεν $A \equiv 2,8284271$, $B \equiv 3,3137085$, καὶ θέλομεν ἔχει

$$A' \equiv \sqrt{A \times B} \equiv 3,0614674, \text{ καὶ } B' \equiv \frac{2A \times B}{A + A'} \equiv$$

3,1825979. Ακολουθῶς διὰ τῶν πολυγώνων τούτων προσδιορίζομεν τὰ 32 πλευρῶν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω ἕως οὗ νὰ μὴ ὑπάρχῃ πλέον διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τοῦλάχιστον εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκαδικῶν εἰς τὴν ὁποίαν μένομεν, καὶ ἦτις εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα εἶναι ἡ ἐβδόμη. Φθάσαντες εἰς ταύτην τὴν σιγμὴν λέγομεν οὕτως: ὁ κύκλος πάντοτε περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου· εἰν λοιπὸν ταῦτα δὲν διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, ὁ κύκλος βέβαια δὲν θέλει διαφέρει ἀπὸ ταῦτα μέχρι τῆς ἰδίας τάξεως. Οὕτω ἤμποροῦμεν νὰ λάβωμεν τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Ἰδού ὁ ὑπολογισμὸς τούτων τῶν πολυγώνων προεκταθείς ἕως οὗ νὰ μὴ διαφέρουν πλέον εἰς τὴν ἐβδόμην δεκαδικὴν τάξιν.

Αριθμός τῶν πλευρῶν.	Εγγεγραμμένον πολύγωνον.	Περιγεγραμμένον πολύγωνον.
4 . . .	2,0000000 . . .	4,0000000
8 . . .	2,8284271 . . .	3,3137085
16 . . .	3,0614674 . . .	3,1825979
32 . . .	3,3214451 . . .	3,1517249
64 . . .	3,1365485 . . .	3,1441184
128 . . .	3,1403311 . . .	3,1422236
256 . . .	3,1412572 . . .	3,1417504
512 . . .	3,1415138 . . .	3,1416321
1024 . . .	3,1415729 . . .	3,1416025
2048 . . .	3,1415877 . . .	3,1415951
4096 . . .	3,1415914 . . .	3,1415933
8192 . . .	3,1415923 . . .	3,1415928
16384 . . .	3,1415925 . . .	3,1415927
32768 . . .	3,1415926 . . .	3,1415926

Εντεῦθεν συνάγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου $\approx 3,1415926$. Δυνατὸν νὰ ἀμφιβάλλῃ τινὰς διὰ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ἐξ αἰτίας τῶν σφαλμάτων τὰ ὅποια προέρχονται ἀπὸ τὰ παραληφθέντα μέρη· πλὴν ὁ ὑπολογισμὸς ἔγινε μὲ ἐν δεκαδικὸν περισσύτερον, διὰ νὰ ἤμεθα βέβαιοι διὰ τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὅποιον εὐρήκαμεν μέχρι τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Επειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν πολλαπλασθεῖσαν ἐπὶ τῆς ἀκτίνος, οὗσης τῆς ἀκτίνος 1, ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι $3,1415926$ ἢ τῆς διαμέτρου οὗσης 1, ἡ περιφέρεια εἶναι $3,1415926$ · λοιπὸν ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἀνωτέρω σημειωθείς διὰ π εἶναι $\approx 3,1413926$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ε'.

Λ Η Μ Μ Α.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ,

τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ, καὶ τοῦ ὁποῖου ἡ πλευρὰ ΓΕ ἴση τῇ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ. Περιπλέον, εἰν ἡ γωνία ΓΑΒ ἦναι ὀρθή, ἡ φερομένη κάθετος ΓΖ ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΓΑ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ.

Διότι 1.^{ον} ἐξ αἰτίας τῆς κοινῆς γωνίας Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι πρὸς τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ ὡς $ΑΓ \times ΓΒ$ πρὸς

$ΔΓ \times ΓΕ$ ἢ $ΔΓ$ (24, 3)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέ-

λουν εἶναι ἰσοδύναμα, ἐν $ΔΓ = ΑΓ \times ΓΒ$, ἢ ἐὰν $ΔΓ$ ᾖ μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΑΓ, ΓΒ. σγ. 170.

2.^{ον} Επειδὴ ἡ κάθετος ΓΗΖ τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, ἔχομεν (17, 3) $ΑΗ : ΗΒ :: ΑΓ : ΓΒ$, ὅθεν ἔπεται, ἐν συνθέσει, $ΑΗ : ΑΗ + ΗΒ$ ἢ $ΑΒ :: ΑΓ : ΑΓ + ΓΒ$ · ἀλλὰ ΑΗ εἶναι πρὸς ΑΒ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἢ 2ΓΔΖ· ἄλλως, εἰν ἡ γωνία Α ᾖ ὀρθή, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΗ, ΓΔΖ,

θέλουν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δώσει $ΑΓΗ : ΓΔΖ :: ΑΓ$

$ΓΖ$ · λοιπὸν,

$$ΑΓ : 2ΓΖ :: ΑΓ : ΑΓ + ΓΒ.$$

Εἰν πολλαπλασιασθῇ ὁ δεύτερος λόγος ἐπὶ ΑΓ, οἱ ᾗγούμενοι ἀποβαίνουν ἴσοι, καὶ ἐπομένως $2ΓΖ = ΑΓ \times$

$(ΑΓ + ΓΒ)$, ἢ $ΓΖ = ΑΓ \times \frac{(ΑΓ + ΓΒ)}{2}$ · λοιπὸν 2.^{ον} ἐὰν

ἡ γωνία Α ᾖ ὀρθή, ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΓ, καὶ ΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νά εὐρωμεν κύκλον διαφέροντα ὅσον θέλομεν κανονικοῦ δεδομένου πολυγώνου.

Εἶω, παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἄς κατεβάσωμεν τῇ κάθετον ΓΑ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΜΒ, καὶ ἄς ἐνώσωμεν ΓΒ. σχ. 171.

Ὁ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφόμενος κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ περιγεγραμμένος εἰς τὸ ἴδιον· ὁ πρῶτος εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλήτερος· ἀλλὰ πρόκειται νὰ πλησιάσωμεν ταῦτα τὰ ὅρια.

Ἀς λάβωμεν ἐκάστην τῶν ΓΔ, ΓΕ ἴσην μὲ τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξύ ΓΑ καὶ ΓΒ, καὶ ἄς ἐνώσωμεν ΕΔ· τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΑΒ (προ. 15)· ἄς κἀμωμεν τὸ αὐτὸ δι' ἐκάστην τῶν ὀκτώ γωνιῶν τοῦ τετραγώνου, θέλομεν σχηματίσει οὕτω κανονικὸν ὀκτάγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ. Ὁ γραφόμενος κύκλος μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ, μέσην ἀνάλο-

γον μεταξύ ΓΑ καὶ $\frac{\Gamma\Delta + \Gamma\Gamma}{2}$, εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ

ὀκτάγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΔ περιγεγραμμένος· οὕτως ὁ πρῶτος θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ δεδομένου τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλήτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα μεταξύ των παρ' ὅτι ἦσαν τὰ δύο πρῶτα· διότι ἡ διαφορὰ μεταξύ τῶν ἀκτίνων των ἦτις εἶναι δ' ὅλων των τὰ σημεία ἢ αὐτὴ, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξύ τῶν ἀκτίνων των πρῶτων.

Εἰάν τρέψωμεν κατὰ τὴν αὐτὸν τρόπον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΖ εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελὲς, θέλομεν σχηματίσει κανονικὸν πολύγωνον δεκαεῖς πλευρῶν, ἰσοδύναμον

μέ τὸ δεδομένον τετράγωνον. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τοῦτο τὸ πολύγωνον εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δὲ περιγεγραμμένος μεγαλύτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα παρὰ τὰ πρῶτα. Ἡμποροῦμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἕως οὗ ὁ λόγος μεταξὺ τῆς ἀκτίνος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νὰ διαφέρει ὅσον θέλομεν ἀπὸ τὸν τῆς ἰσότητος. Τότε οἱ δύο κύκλοι ἡμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἰσοδύναμοι μέ τὸ δεδομένον τετράγωνον.

Σχόλιον. Ἰδοὺ εἰς τί ἄγεται ἡ ζήτησις τῶν διαδοχικῶν ἀκτίνων· ἔσω α ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ἓν τῶν εὐρεθέντων πολυγώνων, εἰς τὸν περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἴδιον πολύγωνον· ἔσωσαν α' καὶ β' αἱ ὁμοίαι ἀκτῖνες διὰ τὸ ἀκόλουθον πολύγωνον τὸ ὑπαῖον ἔχει διπλάσιον ἵπθμόν πλευρῶν. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, β' εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, καὶ α' μεταξὺ α καὶ $\frac{\alpha + \beta}{2}$ · εἰς τρόπον ὥστε $\beta' = \sqrt{(\alpha \times \beta)}$, καὶ $\alpha' = \sqrt{(\alpha \times \frac{\alpha + \beta}{2})}$. ἔαν λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες α καὶ εἰς ἐνὸς πο-

λυγώνου ἦναι γνωσταί, εὐκόλως προσδιορίζομεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἀκολουθοῦ· καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω ἕως οὗ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀκτίνων νὰ γένη ἀναιπαίσθητος· Τότε ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη τούτων τῶν ἀκτίνων θέλει εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ ἰσοδύναμου κύκλου μέ τὸ τετράγωνον ἢ μέ τὸ προτεθεῖν πολύγωνον.

Ἡ μέθοδος αὕτη εὐκόλον εἶναι νὰ βαλθῇ εἰς πρᾶξιν διὰ γραμμῶν, διότι ἄγεται εἰς τὴν εὐρεσιν μέσων διαδοχικῶν ἀναλόγων μεταξὺ γνωστῶν γραμμῶν· ἀλλ' ἡ ἐφαρμογήτης εἰς ἀριθμοὺς ἀποβαίνει ἐπιτυχέστερα, καὶ χορηγεῖ μίαν τῶν ἐπιτηδειοτέρων ἀπὸ ὅσας ἡ στοιχειώδης Γεωμετρία δύναται νὰ δώσῃ μεθόδων πρὸς εὐρεσιν τοῦ ὡς

ἔγγιστα λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον: Ἐξω ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ≈ 2 , ἡ πρώτη ἐγγεγραμμένη ἀκτὺς ΓΑ θέλει εἶναι 1, καὶ ἡ πρώτη περιγεγραμμένη ΓΒ, $\sqrt{2}$ ἢ 1, 4142136. Κάμνοντες λοιπὸν $\alpha \approx 1$, $\beta \approx 1$, 4142136, εὐρίσκομεν $\beta' \approx 1$, 1892071, καὶ $\alpha' \approx 1$, 0986841. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀκροσφύων κατὰ τὸν τῆς συνεχείας νόμον.

Ἰδοὺ τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου μέχρι ἐπτά ἡ ὀκτὼ ψηφίων διὰ τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

Ακτῖνες τῶν περιγεγραμ-
μένων κύκλων.

Ακτῖνες τῶν ἐγγεγραμ-
μένων κύκλων.

1,4142136		1,0000000.
1,8992071		1,0986841.
1,1430500		1,1210863.
1,1320149		1,1265639.
1,1292862		1,1279257.
1,1286063.		1,1282657.

Τώρα ὁποῦ ἡ πρώτη ἡμίσεια τῶν ψηφίων εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, ἡμποροῦμεν ἀντὶ τῶν μέσων γεωμετρικῶν νὰ λάβωμεν τοὺς μέσους ἀριθμητικοὺς, οἵτινες δὲν διαφέρουν ἀπὸ τοὺς γεωμετρικοὺς παρὰ εἰς τὰ ὑπερὰ δεκαδικά. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἐργασία ἐπιτέμενται πολὺ, καὶ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι.

1,1284360		1,1283508.
1,1283934		1,1283721.
1,1283827		1,1283774.
1,1283801		1,1283787.
1,1283794		1,1283791.
1,1283792		1,1283792.

Λοιπὸν 1,1283792 εἶναι περίπου ἡ ἀκτὺς τοῦ ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μετὰ τὸ δεδομένον τετράγωνον κύκλου τοῦ

ὁποίου τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2. Ἐντεῦθεν εὐκόλουν εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος τοῦ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ π · εἰς λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν 4 διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,1283792, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τοῦ π , τὴν ὁποίαν εὕρισκουμεν διὰ τούτου τοῦ ὑπολογισμοῦ ἴσῃν μὲ 3,1415926 κ. τ. λ, ὡς τὴν εὕρομεν δι' ἄλλης μεθόδου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Δ'.

B I B Λ Ι Ο Ν.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Ι.

Α'. **Κ**αλεῖται μέγιστον (maximum) ἡ μεγαλύτερα ποσότης ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας τοῦ ἰδίου εἶδους· ἐλάχιστόν (minimum) ἡ μικροτέρα.

Οὕτως ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέγιστόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν γραμμῶν αἵτινες ἐνόνουν δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, καὶ ἡ κάθετος εἶναι ἐλάχιστόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν ἀπὸ δεδομένου σημεῖον εἰς δεδομένην εὐθεῖαν φερομένων εὐθειῶν.

Β'. Καλοῦνται σχήματα ἰσοπερίμετρα τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α:

Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, τὸ μέγιστον εἶναι ἑκείνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο ἀπρὸςδιώριστοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Εξω $ΑΓ=ΓΒ$, καὶ $ΑΜ+ΜΒ=ΑΓ+ΓΒ$ λέγω
ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $ΑΓΒ$ εἶναι μεγαλῆτερον τοῦ
τριγώνου $ΑΜΒ$ τὸ ὅποιον ἔχει τὴν αὐτὴν βᾶσιν καὶ τὴν
αὐτὴν περίμετρον. σλ. 172.

Εκ τῆς σιγμῆς $Γ$, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα $ΓΑ=$
 $ΓΒ$, ἃς γραφθῇ περιφέρεια συναπαντῶσα τὴν $ΓΑ$ προεκ-
βαλλομένην εἰς $Δ$ · ἃς ἐπιζευχθῇ $ΔΒ$ · ἡ γωνία $ΔΒΑ$, ἐγγε-
γραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ θέλει εἶναι ὀρθή (15, 2). Ἀς
προεκβληθῇ ἡ κάθετος $ΔΒ$ πρὸς τὸ $Ν$, ἃς γένη $ΜΝ=$
 $ΜΒ$, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ $ΑΝ$. Τέλος ἐκ τῶν σιγμῶν $Μ$ καὶ
 $Γ$ ἃς κατασθῶσιν αἱ κάθετοι $ΜΠ$ καὶ $ΓΗ$ ἐπὶ τῆς $ΔΝ$.
Επειδὴ $ΓΒ=ΓΔ$ καὶ $ΜΝ=ΜΒ$, ἔχομεν $ΑΓ+ΓΒ=$
 $ΑΔ$, καὶ $ΑΜ+ΜΒ=ΑΜ+ΜΝ$. Ἀλλὰ $ΑΓ+ΓΒ=$
 $ΑΜ+ΜΒ$ · λοιπὸν $ΑΔ=ΑΜ+ΜΝ$ · λοιπὸν $ΑΔ>ΑΝ$.
Τώρα ἐπειδὴ ἡ πλαγία $ΑΔ$ εἶναι μεγαλῆτέρα τῆς πλαγίας
 $ΑΝ$, πρέπει νὰ ἀπομακρύνεται τῆς καθέτου περισσότερον·
λοιπὸν $ΔΒ>ΒΝ$ · ἄρα $ΒΗ$, ἡμίσεια τῆς $ΒΔ$ (12, 1) εἶναι
μεγαλῆτέρα τῆς $ΒΠ$ ἢ μισείας τῆς $ΒΝ$. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα
 $ΑΒΓ$, $ΑΒΜ$, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $ΑΒ$, εἶναι
πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των $ΒΗ$, $ΒΠ$ · λοιπὸν, ἐπειδὴ
 $ΒΗ>ΒΠ$, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $ΑΒΓ$ εἶναι μεγαλῆτερον
τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς $ΑΜΒ$ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐ-
τῆς περιμέτρου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων καὶ τοῦ
αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μέγιστον ἔχει τὰς πλευράς
τοῦ ἴσας.

Διότι ἔσω $ΑΒΓΔΕΖ$ τὸ μέγιστον πολύγωνον· ἐὰν ἡ
πλευρὰ $ΒΓ$ δὲν ᾖ ἴση τῇ $ΓΔ$, ἃς κατασκευασθῇ ἐπὶ
τῆς βάσεως $ΒΔ$ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ΒΟΔ$ ἰσοπερίμετρον

μὲ τὸ ΒΓΔ· τὸ τρίγωνον ΒΟΔ θέλει εἶναι μείζον τοῦ ΒΓΔ (πρό. 1), καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΟΔΕΖ μείζον τοῦ ΑΒΓΔΕΖ· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν ἦθελον εἶναι τὸ μέγιστον ἀπὸ ὅσα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Πρέπει λοιπὸν $ΒΓ = ΓΔ$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $ΓΔ = ΔΕ$, $ΔΕ = ΕΖ$ κ.τ.λ. λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. σχ. 173.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ΄.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Απὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ποιούσας μεταξύ των γωνίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον εἶναι εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ κάμνουν ὀρθὴν γωνίαν.

Εἰςωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν, καὶ τὴν $ΑΓ = ΑΔ$ · ἔαν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ θέλει εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΒΑΔ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν Α γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεία. σχ. 174.

Διότι ἐπειδὴ ἡ βᾶσις ΑΒ εἶναι ἡ αὐτὴ, τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, εἶναι ὡς τὰ ὕψη ΑΓ, ΔΕ· ἀλλ' ἡ κάθετος ΔΕ εἶναι σιμωτινωτέρα τῆς πλαγίας ΑΔ ἢ τῆς ἰσῆς μὲ αὐτὴν ΑΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΑΓ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ΄.
Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Απὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον πρέπει νὰ ᾖναι τοιοῦτον ὥςτε ὅλας τοι αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφονται εἰς ἡμιπερίφειραν τῆς ὁποίας ἡ ἀγνώστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος.

Εἶω $ΑΒΓΔΕΖ$ τὸ μεγαλύτερον τῶν σχηματιζομένων πολυγώνων μὴ τὰς δεδομένας πλευρὰς $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΖ$, καὶ μίαν τελευταίαν $ΑΖ$ κατ' ἀρίσκειαν ὥς ἐπιζευχῶσιν αἱ διαγώνιοι $ΑΔ, ΔΖ$. Ἐὰν ἡ γωνία $ΑΔΖ$ δὲν ᾖ ὀρθή, ἡμποροῦσαμεν, φυλάττοντες τὰ μέρη $ΑΒΓΔ, ΔΕΖ$ ὡς ὑπάρχουν, νὰ αὐξήσωμεν τὸ τρίγωνον $ΑΔΖ$, καὶ ἐπομένως τὸ ὅλον πολύγωνον, ἀποκαθιζόντες τὴν γωνίαν $ΑΔΖ$ ὀρθήν, κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν· ἀλλὰ τὸ πολύγωνον τοῦτο δὲν ἡμπορεῖ πλέον νὰ αὐξηθῇ, διότι ὑποτίθεται ὅτι ἐφθασεν εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν· λοιπὸν ἡ γωνία $ΑΔΖ$ εἶναι ἤδη ὀρθή. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας $ΑΒΖ, ΑΓΖ, ΑΕΖ$ · λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι $Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ$ τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριστος πλευρὰ $ΑΖ$ εἶναι ἡ διάμετρος. σχ. 175.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη διδει χώραν εἰς τι ζήτημα· τουτέστιν ἔάν ὑπάρχουν πολλοὶ τρόποι τοῦ σχηματίζειν πολύγωνον μὲ δεδομένας πλευρὰς, καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωστον ἥτις νὰ ᾖ ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφέρειᾶς εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι· δηλαδὴ ἔάν ᾖ δυνατόν ἀφ' οὗ εὗρεθῇ πολύγωνον τὸ ὅποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ιδιότητα ὥς ὅλαι του αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφονται εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος, ἔάν, λέγω, τὸ πολύγωνον τοῦτο ᾖ δυνατόν νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἄλλην ἡμιπεριφέρειαν διαφορετικὴν· διότι ἔάν τοῦτο ᾖ δυνατόν τότε ἤθελον ὑπάρχει ἄπειρα πολύγωνα ἔχοντα τὴν ἀπαιτουμένην ιδιότητα τοῦ μεγίστου, καὶ ἐπομένως πολλὰ μέγιστα πολύγωνα, τὸ ὅποῖον εἶναι ἀδύνατον. Πρὶν νὰ εἴπωμεν τι ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἔάν μία καὶ ἡ αὐτὴ χορδὴ ὑποτείνῃ τόξα γεγραμμένα μὲ διαφόρους ἀκτῖνας $ΑΓ, ΑΔ$, ἢ εἰς τὸ κέντρον γωνίᾳ ἐπι-

σηριζομένη ἐπὶ ταύτης τῆς χορδῆς θέλει εἶναι μικροτέρα εἰς τὸν κύκλῳ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὺς εἶναι ἡ μεγαλητέρα· οὕτως $\angle \Gamma \text{Β} < \angle \Delta \text{Β}$. Τῷ ὄντι ἡ γωνία $\angle \Delta \text{Ο} = \angle \Gamma \Delta + \angle \Delta \text{Α} \text{ (} 27, 2 \text{)}$ · λοιπὸν $\angle \Gamma \Delta < \angle \Delta \text{Ο}$, καὶ διπλασιάζοντες ἀμφοτέρω τὰ μέρη θελομεν ἔχει $\angle \Gamma \text{Β} < \angle \Delta \text{Β}$. σχ. 176.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς μόνος τρόπος ὑπάρχει τοῦ σχηματίζειν τὸ πολυγώνον ΑΒΓΔΕΖ , μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωστον ἥτις νὰ ᾖ ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφέρειας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι.

Διότι, ὥς ὑποθέσωμεν ὅτι εὗρήκαμεν κύκλον πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα· ἐὰν λάβωμεν κύκλον μεγαλήτερον, αἱ χθρδαὶ ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , κ. τ. λ. θέλουσι ἀντιστοιχεῖν εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον μικροτέρας. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν εἰς τὸ κέντρον τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθάς. Οὕτως· τὰ ἄκρα τῶν δεδομένων πλευρῶν δὲν φθάνουν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου· ἐὰν δὲ λάβωμεν κύκλον μικρότερον, τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὸ κέντρον γωνιῶν ἤθελεν εἶναι μείζον δύο ὀρθῶν, καὶ οὔτε πλεον αἱ δεδομέναι πλευραὶ ἤθελον τελειοῦναι ἐπὶ τῶν ἁκρῶν τῆς διαμέτρου· ἄρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολυγώνον δὲν ἡμπορεῖ νὰ ἐγγραφῇ παρὰ εἰς ἓνα μόνον κύκλον. σχ. 175.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἀλλάζωμεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν τάξιν τῶν πλευρῶν ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , κ. τ. λ., καὶ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτή, καθὼς καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου· διότι ὅποιαδήποτε καὶ ᾖ ἡ τάξις τῶν τόξων ΑΒ , ΒΓ , κ. τ. λ., ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμά των νὰ κάμνη τὴν ἡμιπερίφειαν, καὶ τὸ πολυγώνον θέλει ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, διότι θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμικύκλιον μείον

τὰ τμήματα $AB, B\Gamma$, κ. τ. λ. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Απὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένης πλευρᾶς, τὸ μίγιστον εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον.

Εἶω $AB\Gamma\Delta EZH$ τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ αβγδεζη τὸ μὴ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ σχηματισμένον μὲ ἴσας πλευρὰς, εἰς τρόπον ὥστε $AB = \alpha\beta$, $B\Gamma = \beta\gamma$, κ.τ.λ. λέγω ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου ἢς φερθῇ ἡ διάμετρος EM , ἢς ἐπιζευχθῶσι AM, MB ἐπὶ τῆς $\alpha\beta = AB$ ἢς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ ἴσον μὲ τὸ ABM , καὶ ἢς ἐπιζευχθῇ εμ. σλ. 177.

Δυνάμει τῆς Δ' προτάσεως, τὸ πολύγωνον $EZHAM$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\epsilon\zeta\eta\alpha\mu$, ἐκτὸς ἐὰν τὸ πολύγωνον τοῦτο ἤμπορῇ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμιπερίφειραν, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εμ ἦτοίεν εἶναι ἡ διάμετρος· πλὴν ἐπειδὴ, τούτου δοθέντος, ἡ ἡμιπερίφεια αὕτη δὲν ἠμπορεῖ οὔτε ἐλάσσων οὔτε μείζων νὰ ᾖ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς ὁποίας EM εἶναι ἡ διάμετρος κατὰ τὴν Ε' πρότασιν, μένει νὰ ᾖ ἴση· ἀλλὰ τότε τὰ δύο πολύγωνα ἦτοίεν εἶναι ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ πολύγωνον $E\Delta\Gamma BM$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\epsilon\delta\gamma\beta\mu$, ἐξαιρουμένης τῆς περιστάσεως καθ' ἣν ἦτοίεν εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὸ ὅλον πολύγωνον $EZHAMB\Gamma\Delta E$ εἶναι μείζον τοῦ $\epsilon\zeta\eta\mu\beta\gamma\delta$, ἐκτὸς ἐὰν ᾖ ἴσα· ἀλλὰ δὲν εἶναι· διότι τὸ ἐν ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ τὸ ἄλλο ὑπατίθεται μὴ ἐγγράψιμον· λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον εἶναι τὸ μεγαλύτερον. Εἰς καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα τρίγωνα $ABM, \alpha\beta\mu$, μένει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον $AB\Gamma\Delta EZH$ μεγαλύτερον τοῦ μὴ ἐγγραψίμου $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$.

Σχόλιον. Καθώς εἰς τὴν Ε' πρότασιν ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι δὲν ἡμπορεῖ νὰ ὑπάρχῃ παρὰ εἰς μόνος κύκλος, καὶ ἐπομένως ἐν μόνον μέγιστον πολύγωνον τὸ ὅποιον νὰ πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα· καὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, καθ' ὅποιον τρόπον καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν πλευρῶν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι μέγιστον μεταξύ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Διότι, κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα, τὸ μέγιστον πολύγωνον ἔχει ὅλας τοὺς πλευρὰς ἴσας· καὶ, κατὰ τὸ προλαβόν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς τὸν κύκλον· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Λ Η Μ Μ Α.

Δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον, μετρούμεναι εἰς δύο διαφορετικοὺς κύκλους, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ περιεχόμενα τόξα διαιρούμενα διὰ τῶν ἀκτίνων.

Οὕτως ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τὴν γωνίαν Ο ὡς ὁ λόγος $\frac{AB}{AT}$ πρὸς τὸν λόγον $\frac{AE}{AO}$. σχ. 178.

Μὲ ἀκτῖνα ΟΖ ἴσην τῇ ΑΓ ἃς γραφθῇ τὸ τόξον ΖΗ περιεχόμενον μεταξύ τῶν πλευρῶν ΟΔ, ΟΕ παρεκβαλλομένων· ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων ἀκτίνων ΑΓ, ΟΖ, θέλομεν ἔχει κατὰ πρῶτον $\Gamma : O :: AB : ZH$ (πρ. 17, 2) ἢ $AB : ZH :: \frac{AB}{AT} : \frac{ZH}{ZO}$

ἔπειτα, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τόξων ΖΗ, ΔΕ, $ZH : \Delta E :: ZO : \Delta O$ (πρό. 11)· λοιπὸν ὁ λόγος $\frac{ZH}{ZO}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν

λόγον $\frac{AE}{AO}$, καὶ ἐπομένως $\Gamma : O :: \frac{AB}{AT} : \frac{AE}{AO}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

Ἐστω ΔΕ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἐνὸς τῶν πολυγώνων, Ο τὸ κέντρον του, ΟΕ τὸ ἀπόσημά του· ἔστω ΑΒ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἄλλου πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του, ΓΒ τὸ ἀπόσημά του. Ὑποθέτομεν τὰ κέντρα Ο καὶ Γ ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων ὅποιονδήποτε διάστημα ΟΓ, καὶ τὰ ἀποσήματα ΟΕ, ΓΒ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΓ: οὕτως ΔΟΕ καὶ ΑΓΒ θέλουσιν εἶναι αἱ εἰς τὸ κέντρον ἡμιγωνίαι τῶν πολυγώνων, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, αἱ γραμμαὶ ΓΑ, ΟΔ προεκβληθεῖσαι θέλουσιν συναπαντηθῆναι εἰς σιγμὴν τινὰ Ζ: ἐκ ταύτης ἃς καταβασθῇ ἐπὶ τῆς ΟΓ ἡ κάθετος ΖΗ· ἐκ τῶν σιγμῶν Ο καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, ἃς γραφθῶσι τὰ τόξα ΗΙ, ΗΘ περατούμενα εἰς τὰς πλευρὰς ΟΖ, ΓΖ. σχ. 179.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν κατὰ τὸ προλαβόν λήμμα
 $O : \Gamma :: HI : HO$ ἀλλὰ ΔΕ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ
 ΟΗ ΓΗ

πρώτου πολυγώνου ὡς ἡ γωνία Ο εἰς τέσσαρας ὀρθάς, καὶ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου ὡς ἡ γωνία Γ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι, ΔΕ: ΑΒ :: Ο: Γ, ἢ ΔΕ: ΑΒ :: ΠΙ: ΗΘ· πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἡγουμένους ἐπὶ ΟΗ καὶ ΟΗ ΓΗ

τοὺς ἐπομένους ἐπὶ ΓΗ, θέλομεν ἔχει ΔΕ×ΟΗ: ΑΒ×ΓΗ:: ΗΙ: ΗΘ. Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΔΕ, ΟΖΗ, δίδουσι ΟΕ: ΟΗ:: ΔΕ: ΖΗ, ὅθεν ἔπεται ΔΕ×ΟΗ= ΟΕ×ΖΗ· θέλομεν ἔχει παρομοίως ΑΒ×ΓΗ= ΓΒ×ΖΗ· λοιπὸν ΟΕ×ΖΗ: ΓΒ×ΖΗ:: ΗΙ: ΗΘ, ἢ ΟΕ: ΓΒ:: ΗΙ: ΗΘ. Ἐὰν λοιπὸν δείξωμεν ὅτι τὸ τόξον ΗΙ εἶναι

μεγαλύτερον τοῦ τόξου $H\Theta$, θέλει ἀκολουθήσει ὅτι τὸ ἀπόστημα OE εἶναι μεγαλύτερον τοῦ GB .

Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς $I\Gamma$ ἅς γένῃ τὸ σχῆμα $ΓΚ'χ$ ἴσον μὲ τὸ σχῆμα $ΓΗχ$, εἰς τρόπον ὥστε $ΓΚ' = ΓΗ$, ἡ γωνία $\Theta ΓΚ' = \Theta ΓΗ$, καὶ τὸ τόξον $Κ'χ = χΗ$ · ἡ καμπύλη $Κ'χΗ$ περικυκλοῖ τὸ τόξον $Κ'ΘΗ$, καὶ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ αὐτὸ (πρό. 9)· ἄρα $Ηχ$ ἡμίσεια τῆς καμπύλης, εἶναι μεγαλύτερα τοῦ $H\Theta$ ἡμίσειας τοῦ τόξου· λοιπὸν, πολὺ περισσότερον, $ΗΙ$ εἶναι μείζον τοῦ $H\Theta$.

Ἐκ τούτου ἐπεταὶ ὅτι τὸ ἀπόστημα OE εἶναι μείζον τοῦ GB · ἀλλὰ τὰ δύο πολύγωνα ὡς ἰσοπερίμετρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀποστήματά των (πρό. 7)· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον ἡμιπλευρὰν ΔE εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἔχοντος ἡμιπλευρὰν AB · τὸ πρῶτον ἔχει περισσοτέρας πλευράς, διότι ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία του εἶναι μικροτέρα· ἄρα ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον περισσοτέρας πλευράς εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ο κύκλος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἰσοπερίμετρον πολύγωνον.

Ἀπεδείχθη ἤδη ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλύτερον· οὕτως ἄλλο δὲν πρόκειται παρὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸν κύκλον μὲ ὁποιοδήποτε κανονικὸν ἰσοπερίμετρον πολύγωνον. Ἐστω AI ἡ ἡμιπλευρὰ τούτου τοῦ πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του. Ἐστω εἰς τὸν ἰσοπερίμετρον κύκλον ἡ γωνία $\Delta OE = \Delta \Gamma I$, καὶ ἐπομένως τὸ τόξον ΔE ἴσον μὲ τὴν ἡμιπλευρὰν AI . Τὸ πολύγωνον Π εἶναι πρὸς τὸν κύκλον K ὡς τὸ τρίγωνον $\Delta \Gamma I$ πρὸς τὸν τομέα ΔOE · οὕτως ἔχομεν $\Pi : K :: \frac{1}{2} \Delta \Gamma I \times \Gamma I : \frac{1}{2} \Delta E \times$

ΟΕ : ΓΙ : ΟΕ, Ας ἀχθῇ εἰς τὴν σιγμὴν Ε ἡ ἰφαπτομένη ΕΗ ἥτις συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς ΟΔ εἰς Η. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΙ, ΗΟΕ, δίδουν τὴν ἀναλογίαν, ΓΙ : ΟΕ :: ΑΙ ἢ ΔΕ : ΗΕ· λοιπὸν Π : Κ :: ΔΕ : ΗΕ· ἢ ὡς ΔΕ Χ ἰ ΟΕ μέτρον τοῦ τομέως ΔΟΕ πρὸς ΗΕ Χ ἰ ΟΕ μέτρον τοῦ τριγώνου ΗΟΕ· ἀλλ' ὁ τομεὺς εἶναι μικρότερος τοῦ τριγώνου· λοιπὸν Π εἶναι μικρότερον τοῦ Κ, ὥρα ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε πολυγώνων ἰσοπερίμετρον. σγ. 180.

Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Ε'.

ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ

Γ Ω Ν Ι Α Ι.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Ι.

Α'. **Ε**ὐθεῖα γραμμὴ εἶναι κάθετος ἐν ἐπιπέδῳ ὅταν ᾗναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς τῆς εἰς τὸ ἐπίπεδον (πρό. 4). Ἀντι-
 τρώφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν.

Ο ποῦς τῆς κάθετου εἶναι ἡ σιγμὴ τῆς συναπαντή-
 σεώς τῆς μετ' τὸ ἐπίπεδον.

Β'. Εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδου ὅταν δὲν ἡμπαρῇ νὰ τὸ συναπαντήσῃ ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῇ. Ἀν-
 τιστρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς.

Γ'. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα μεταξὺ των, ὅταν
 δὲν ἡμποροῦν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

Δ'. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 3) ὅτι ἡ κοινὴ ταμὴ δύο
 ἐπιπέδων τὰ ὅποια συναπαντῶνται· εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ·
 τούτου τεθέντος, ἡ γωνία ἢ ἀμοιβαία κλίσις δύο ἐπι-

πέδιω είναι ή ποσότης μᾶλλον ἢ ἥττον μεγάλη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπέχουσι ἀπ' ἀλλήλων· ή ποσότης αὕτη μετρεῖται ἀπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των δύο καθετοι ηγμέναι εἰς ἕκαστον τούτων τῶν ἐπιπέδων εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς· (βλέ. πρό. 7).

Η γωνία αὕτη ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι ὀξεία, ὀρθή, ἢ ἀμβλεία.

Ε'. Εὰν ᾖναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα πρὸς τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο.

Ζ'. Γωνία στερεᾶ εἶναι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα πολλῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι ἐνοῦνται εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν.

Οὕτως ἡ στερεὰ γωνία Σ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἔνωσιν τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΒ, ΔΣΑ. σχ. 199.

Τούλάχιστον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν στερεᾶς γωνίας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ μέρος ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι, κατὰ τὸν ὀρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου, ἅμα εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ ἐπίπεδόν τι, εὐρίσκεται ὅλη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Σχόλιον. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν εἴαν ἐπιφανείᾳ τις ᾖναι ἐπίπεδος, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εὐθείαν γραμμὴν εἰς διάφορα μέρη αὐτῆς καὶ νὰ ἴδωμεν εἴαν ᾗναι ὅλη εἰς τὴν ἐπιφανείαν καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ προσδιορίζουν τὴν θέσιν του.

Εξωσαν AB, AG , δύο εὐθείαι αἵτινες τέμνονται εἰς A : ἡμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εὑρίσκεται ἡ εὐθεῖα AB . ἔὰν ἀκολουθῶς στρέψωμεν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ὁλόγυρα τῆς AB , ἕως οὐ νὰ διέλθῃ διὰ τῆς σιγμῆς Γ , τότε ἡ γραμμὴ AG , ἔχουσα δύο τῶν σημείων τῆς A καὶ Γ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, θέλει εὑρίσκειται ὅλη εἰς αὐτό· λοιπὸν ἡ θέσις τούτου τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζεται ἀπὸ μόνην τὴν συνθήκην τὸ νὰ περιέχῃ τὰς δύο εὐθείας AB, AG . σχ. 181

Πόρισμα Α'. Τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, ἢ τρία σημεία A, B, Γ , μὴ ἐπ' εὐθείας προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου.

Πόρισμα Β'. Λοιπὸν ὡσαύτως δύο παράλληλοι $AB, \Gamma\Delta$ προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου· διότι ἔὰν ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα EZ , τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν AE, EZ θέλει εἶναι τὸ τῶν παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα τέμνονται, εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Διότι ἔὰν μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα ᾗτον δυνατόν νὰ εὑρεθῶσι τρεῖς μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων δὲν ἤηelon σχηματίζει παρὰ ἓν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (πρό. 2), τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ AP ᾗναι κάθετος εἰς δύο ἄλλας $PB, \Pi\Gamma$, αἵτινες διασφαυρῶνται εἰς τὸν πύδα τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ MN , θέλει εἶναι κάθετος εἰς ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν HK ἡγμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ οὕτω θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον MN . σχ. 183.

Ας ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΠΚ σημείον τι κατ' ἀρέσκειαν Κ, ὥς
 ἂν ᾖ ἡ ΒΓ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΠΓ, εἰς τρόπον ὥστε ΒΚ =
 ΚΓ (προβ. 5. βιβλ. 3)· ὥς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΑΚ, ΑΓ.

Επειδὴ ἡ ἑξῆς ΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς
 τὴν σιγμὴν Κ, τὸ τρίγωνον ΒΠΓ δίδει (14, 3),

$$\overset{-2}{\text{ΠΓ}} + \overset{-2}{\text{ΠΒ}} = \overset{-2}{2\text{ΠΚ}} + \overset{-2}{2\text{ΚΓ}}.$$

Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ δίδει παρομοίως,

$$\overset{-2}{\text{ΑΓ}} + \overset{-2}{\text{ΑΒ}} = \overset{-2}{2\text{ΑΚ}} + \overset{-2}{2\text{ΚΓ}}.$$

Εὰν ἀπὸ τὴν δευτέραν ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώ-
 την, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΠΓ, ΑΠΒ,

καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς Π, δίδουν ΑΓ = ΠΓ = ΑΠ, καὶ

ΑΒ = ΠΒ = ΑΠ· θέλωμεν ἔχει,

$$\overset{-2}{\text{ΑΠ}} + \overset{-2}{\text{ΑΠ}} = \overset{-2}{2\text{ΑΚ}} - \overset{-2}{2\text{ΠΚ}}.$$

Λοιπὸν, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη διὰ 2, συνάγο-

μεν ΑΠ = ΑΚ - ΠΚ, ἢ ΑΚ = ΑΠ + ΠΚ. Τώρα ἐπει-
 δὴ εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν
 τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον
 τῆς τρίτης· διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον ΑΠΚ εἶναι ὀρθογώ-
 νιον εἰς Π· λοιπὸν ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΠΚ.

Σχόλιον. Εντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ὅχι μόνον εἶναι
 δυνατόν εὐθεῖα γραμμὴ νὰ ᾖ καθετος εἰς ὅλας τὰς δι-
 ερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ὅτι
 τοῦτο συμβαίνει ὁσάκις αὕτη ἡ γραμμὴ εἶναι κάθετος
 εἰς δύο εὐθείας ἡγμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ τοῦτο θε-
 βαιώνει τὸν Α' ὀρισμὸν.

Πόρισμα Α'. Ἡ κάθετος ΑΠ εἶναι σιμοτινωτέρα ἀπὸ
 ὅποιανδήποτε πλαγίαν ΑΚ· λοιπὸν μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν
 ἀπόστασιν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ.

Πόρισμα Β'. Από δεδομένον σημείον Π ἐπὶ ἐπιπέδου, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατόν νὰ ὑψωθῇ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διότι, εἰ δυνατόν, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡμπορεῖ νὰ ὑψωθοῦν δύο· ἄς φαντασθῶμεν ὅτι διὰ τῶν δύο τούτων καθέτων διέρχεται ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ MN κατὰ τὴν PK · τότε αἱ δύο κάθετοι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς HK εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

Αδύνατον εἶναι παρομοίως ἀπὸ δεδομένον σημείον ἐκτὸς ἐπιπέδου νὰ κατεβασθῶσι δύο κάθετοι εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διότι ἔςωσαν AP , AK , αἱ δύο αὗται κάθετοι· τότε τὸ τρίγωνον APK ἤθελον ἔχει δύο ὀρθὰς γωνίας APK , AKP , ὅπερ ἀδύνατον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Αἱ πλάγιοι αἱ ἰσάκεις ἀπέχουσαι τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι· καὶ ἐκ δύο πλαγίων αἵτινες ἀνισάκεις ἀπέχουσι τῆς καθέτου, ἡ περισσότερον ἀπέχουσα εἶναι ἢ πλεον μακρυνὴ ἢ μεγαλητέρα.

Διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι APB , APG , APD εἶναι ὀρθαί, ἐὰν τὰ διαστήματα PB , PG , PD ὑποτεθῶσιν ἴσα πρὸς ἀλλήλα, τὰ τρίγωνα APB , APG , APD , θέλουσι εἶναι μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν θέλουσι εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ ὑποτείνουσαι ἢ αἱ πλάγιοι AB , AG , AD , θέλουσι εἶναι ἴσαι μετὰξὺ των. Παρομοίως, ἐὰν τὸ διάστημα PE , ᾗναι μεγαλητέρον τοῦ PD ἢ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ PB , φανερόν ὅτι ἡ πλάγια AE θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς AB , ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν AD . σχ. 184.

Πόρισμα. Οἷαι αἱ ἴσαι πλάγιοι AB , AG , AD , κτλ τελειοῦν εἰς τὴν περιφέρειαν BGD , γεγραμμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου P ὡς ἐκ κέντρου· λοιπὸν δεδομένου

σημείου Α ἑκτός ἐπιπέδου, εἰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Π ὅπου ἤθελε πέσει ἢ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὸ Α, πρέπει νὰ σημειώσωμεν ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου τρία σημεῖα Β, Γ, Δ, τὰ ὅποια ἰσάκεις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν σιγμὴν Α, καὶ νὰ ζητήσωμεν ἀκολουθῶς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τούτων τῶν σημείων· τὸ κέντρον τοῦτο θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη σιγμή Π.

Σχόλιον. Ἡ γωνία ΑΒΠ καλεῖται κλίσις τῆς πλαγίας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· βλέπομεν ὅτι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ἴση δι' ὅλας τὰς πλαγίας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κ.τ.λ. αἱ ὅποια ἰσάκεις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· διότι ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΒΠ, ΑΓΠ, ΑΔΠ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εξω ΑΠ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ΒΓ εὐθεῖα κειμένη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· εἰν ἀπὸ τὸν πόδα Π τῆς καθέτου κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΠΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ ἐπιζευχθῇ ΑΔ, λέγω ὅτι ΑΔ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΓ. σχ. 185.

Ας ληφθῇ ΔΒ=ΔΓ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΠΒ, ΠΓ, ΑΒ, ΑΓ· ἐπειδὴ ΔΒ=ΔΓ, ἡ πλαγία ΠΒ=ΠΓ· καὶ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΑΠ, ἐπειδὴ ΠΒ=ΠΓ, ἡ πλαγία ΑΒ=ΑΓ (πρ. 5)· λοιπὸν δύο σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΔ ἰσάκεις ἀπέχουσι τῶν ἄκρων Β καὶ Γ· λοιπὸν ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Πόρισμα. Βλέπομεν ἐνταύτῃ ὅτι ΒΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΔΠ, ὡς κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΔ, ΠΔ.

Σχόλιον. Αἱ δύο γραμμαὶ ΑΕ, ΒΓ παρῴσκειάζουσι τὸ παράδειγμα δύο γραμμῶν αἱ ὅποια δὲν συναπαντῶνται, ὡς μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ σιμοτινώτερον δι᾽ ἑστῆμα τούτων τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΔ, κάθετος ἐνταύτῃ εἰς τὴν ΑΠ καὶ τὴν ΒΓ. Τὸ δι᾽ ἑστῆμα ΠΔ

είναι τὸ σιμοτινιώτερον μεταξύ τῶν δύο τούτων γραμμῶν· διότι ἐὰν ἐνώσωμεν δύο ἄλλα σημεία, ὡς Α καὶ Β, θέλομεν ἔχει $AB > AD$, $AD > PD$ · λοιπὸν πολὺ περισσώτερον, $AB > PD$.

Αἱ δύο γραμμαὶ ΑΕ, ΓΒ, ἂν καὶ δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, θεωροῦνται ὅμως ὅτι κἀμνον μεταξὺ των γωνίαν ὀρθήν· διότι ΑΕ καὶ ἡ ἡγμένη παράλληλος ἐξ ἐνὸς τῶν σημείων τῆς τῇ ΒΓ, ἤθελον κάμει μεταξὺ των γωνίαν ὀρθήν. Ὡσαύτως αἱ γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΠΔ, αἵτινες παριστάνουν δύο ὁποιασδήποτε εὐθείας μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ κειμένας, θεωροῦνται ὡς ποιοῦσαι μεταξὺ των τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν ἤθελε κάμει μὲ τὴν ΑΒ ἡ παράλληλος τῇ ΠΔ ἡγμένη ἀπὸ ἐν σημείου τῆς ΑΒ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν ἡ γραμμὴ ΑΠ ᾖ καθετός εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, καὶ ἡ γραμμὴ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΠ θέλει εἶναι καθετός εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. σχ. 186.

Διὰ τῶν παραλλήλων ΑΠ, ΔΕ, ἃς διέλθῃ ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ κοινὴ τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει εἶναι ΠΔ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἃς ἀχθῇ ΒΓ καθετός εἰς τὴν ΠΔ, καὶ ἃς ἐπιζευχθῇ ΑΔ.

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ΒΓ εἶναι καθετός εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΠΔΕ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΔΕ εἶναι ὀρθή· ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΠ εἶναι ὡσαύτως ὀρθή, διότι ΑΠ εἶναι καθετός εἰς τὴν ΠΔ, καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ· λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι καθετός εἰς τὰς δύο εὐθείας ΔΠ, ΔΒ· ἄρα εἶναι καθετός εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΜΝ.

Πόρισμα Α'. Εὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΔΕ ᾖναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι ἄλλως, ἡμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν διὰ τοῦ σημείου Α πα-

ράλληλον τῇ ΑΠ, ἥτις ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἤθελεν εἶναι ἄρα δυνατόν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ, νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

Πόρισμα Β'. Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β, παράλληλοι μιᾶς τρίτης Γ εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι· διότι ἅς φαντασθῶμεν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν Γ· αἱ γραμμαὶ Α καὶ Β, παράλληλοι ταύτης τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν πόρισμα, θέλουν εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Εννοεῖται ὅτι αἱ τρεῖς γραμμαὶ δὲν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἄλλως ἢ πρώτασις ἤθελεν εἶναι γνωστὴ (25, 1).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ ᾖναι παράλληλος εὐθείας τινὸς ΓΔ ἠχμῆνης εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι παράλληλος τούτου τοῦ ἐπιπέδου. σχ. 187.

Διότι ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἥτις εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ ᾗτον δυνατόν νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ συναπάντησις αὕτη θὰ ἐγένετο εἰς κἀνὲν σημεῖον τῆς ΓΔ, κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων· Ὡς, ΑΒ δὲν ἔμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ ΓΔ, ὡς παράλληλος αὐτῆς· λοιπὸν οὐδὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει συναπαντήσῃ· ἄρα εἶναι παράλληλος αὐτοῦ (ὕρ. 2).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, κάθετα εἰς εὐθεῖαν τινὰ ΑΒ, εἶναι παράλληλα μεταξύ των. σχ. 188.

Διότι ἅς ὑποθέσωμεν ὅτι συναπαντῶνται· ἐξῶ Ο ἐν τῶν κοινῶν σημείων τῶν· ἅς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος

εἰς τὴν εὐθείαν $ΟΑ$ ἠγμένην ἀπὸ τὸν πόδα τῆς εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $ΑΒ$ εἶναι κάθετος εἰς τὴν $ΒΩ$ · λοιπὸν $ΟΑ$, $ΟΒ$ ἤθελον εἶναι δύο κάθετοι κατεβασμένοι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον $Ο$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα $ΜΝ$, $ΠΚ$ δὲν ἤμπορουν νὰ συναπαντηθοῦν· λοιπὸν εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ κοίται τοιαὶ $ΕΖ$, $ΗΘ$, δύο παραλλήλων ἐπιπέδων $ΜΝ$, $ΠΚ$, ὑφ' ἑνὸς τρίτου $ΖΗ$, εἶναι παράλληλοι. σχ. 189.
Διότι ἐὰν αἱ γραμμαὶ $ΕΖ$, $ΗΘ$, εὐρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν εἶναι παράλληλοι, προεκβληθεῖσαι θέλουσιν συναπαντηθῆ· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα $ΜΝ$, $ΠΚ$, εἰς τὰ ὅποια εὐρίσκονται, ὁμοίως ἤθελον συναπαντηθῆ· λοιπὸν δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ γραμμὴ $ΑΒ$, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΜΝ$, εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΠΚ$ παράλληλον τοῦ $ΜΝ$. σχ. 189.

Ληθεύσης κατ' ἀρίσκειαν τῆς $ΒΓ$ εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΠΚ$, διὰ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἅς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ $ΑΒΓ$, τὸ ὅποιον τέμνει τὸ $ΜΝ$ κατὰ τὴν $ΑΔ$, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ $ΒΓ$ (πρ. 10)· ἀλλ' ἡ $ΑΒ$ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΜΝ$ εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν $ΑΔ$ · λοιπὸν θέλει εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν παράλληλον αὐτῆς $ΒΓ$ · καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΒ$ εἶναι κάθετος εἰς καθὲ γραμμὴν $ΒΓ$ ἠγμένην ἀπὸ τὸν πόδα τῆς εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΠΚ$, ἔπεται ὅτι εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΠΚ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ παράλληλοι $ΕΗ$, $ΖΘ$, περιεχόμεναι μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων $ΜΝ$, $ΠΚ$ εἶναι ἴσαι. σχ. 189.

Διὰ τῶν παραλλήλων $ΕΗ, ΖΘ$, ἃς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον $ΕΗΘΖ$, τὸ ὑποῖον θὰ συναπαντήσῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατὰ τὰς $ΕΖ, ΗΘ$. Αἱ κοιναὶ τομαὶ $ΕΖ, ΗΘ$, εἶναι παράλληλοι μεταξὺ τῶν (πρὸς 10), καθὼς καὶ αἱ $ΕΗ, ΖΘ$. ἄρα τὸ σχῆμα $ΕΗΘΖ$ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα $ΕΗ = ΕΘ$.

Πόρισμα. Εντεῦθεν ἔπεται ὅτι δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἰσάκις ἀπέχουσι καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν· διότι ἐὰν $ΕΗ$ καὶ $ΖΘ$ ἦναι κάθετοι εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα $ΜΝ, ΠΚ$, θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξὺ τῶν (πρ. 7)· λοιπὸν εἶναι ἴσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν δύο γωνίαι $ΓΑΕ, ΔΒΖ$ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἔχουν τὰς πλευράς των παράλληλους, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἑννοίαν, αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα, σχ. 190.

Ἄς ληφθῇ $ΑΓ = ΒΔ, ΑΕ = ΒΖ$, καὶ ἃς ἐπέκλυσθωσιν αἱ $ΓΕ, ΔΖ, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ$. Ἐπειδὴ $ΑΓ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΒΔ$, τὸ σχῆμα $ΑΒΓΔ$ εἶναι παραλληλόγραμμον (11, 3)· λοιπὸν $ΓΔ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΑΒ$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $ΕΖ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΑΒ$ · λοιπὸν ὡσαύτως $ΓΔ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΕΖ$ · τὸ σχῆμα ἄρα $ΓΕΖΔ$ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ οὕτως ἡ πλευρὰ $ΓΕ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΔΖ$ · ἄρα τὰ τρίγωνα $ΓΑΕ, ΔΒΖ$, εἶναι ἰσόπλευρα μεταξὺ τῶν· ἄρα ἡ γωνία $ΓΑΕ = ΔΒΖ$.

Ἀέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἐπίπεδον $ΑΓΕ$ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπίπεδου $ΒΔΖ$ · διότι, ἃς ὑποθίσωμεν ὅτι τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῦ $ΒΔΖ$, ἡγμέμενον ἐκ τῆς εἰγμένης $Α$ συναπαντᾷ τὰς γραμμὰς $ΓΔ, ΕΖ$, εἰς διαφορετικὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ $Γ$ καὶ $Ε$, φερ' εἰπεῖν, εἰς $Η$ καὶ $Θ$. Τότε, κατὰ τὴν $ΙΒ$

πρώτασιν, αἱ τρεῖς γραμμαὶ AB, HA, ZO θέλον εἶναι ἴσαι· ἀλλ' αἱ τρεῖς γραμμαὶ $AB, ΓΔ, EZ$ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν θέλω λαμβάνειν $ΓΔ = HA$, καὶ $ZO = EZ$, ὅπερ ἄτοπον· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον AGE εἶναι παράλληλον τοῦ BDZ .

Πόρισμα. Εάν δύο παράλληλα ἐπίπεδα $MN, ΠΚ$, συναπαντῶνται ἀπὸ δύο ἄλλα $ΓΑΒΔ, ΕΑΒΖ$, αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι $ΓΑΕ, ΔΒΖ$ ἀπὸ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θέλουν εἶναι ἴσαι· διότι ἡ κοινὴ τομὴ $ΑΓ'$ εἶναι παράλληλος τῇ $ΒΔ$ (πρό. 10), ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΒΖ$ · λοιπὸν ἡ γωνία $ΓΑΕ = ΔΒΖ$.

Π' Ρ' Ο' Τ' Α' Σ' Ι' Σ' ΙΔ'.

Θ Ε Ρ Η Μ Α.

Εάν τρεῖς εὐθεῖαι $AB, ΓΔ, EZ$, μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι, ᾗναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα AGE, BDZ ἀπὸ τὴν ἔνωσην τῶν ἄκρων τούτων τῶν εὐθειῶν, θέλουν εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Ἀντί· οὕσης τῆς AB ἴσης καὶ παραλλήλου τῇ $ΓΔ$, τὸ σχῆμα $ABΔΓ'$ εἶναι παραλλόγραμμον· λοιπὸν ἡ πλευρὰ $ΑΓ'$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $ΒΔ$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ AE, BZ , εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ $ΓΕ, ΔΖ$ · λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα AGE, BDZ , εἶναι ἴσα· ἄλλως θέλω λαμβάνειν ἀποδείξει, ὡς καὶ εἰς τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, ὅτι τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΕ'.

Θ Ε Ρ Η Μ Α.

Δύο εὐθεῖαι περιεχόμεναι μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἀς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ AB συναπαντᾷ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα $MN, ΠΚ, ΡΣ$, εἰς A, E, B , καὶ ὅτι ἡ $ΓΔ$ συναπαντᾷ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα εἰς $Γ, Z, Δ$ · λέγω ὅτι θελεῖ εἶναι ὡς $AE:EB::ΓZ:ZΔ$. σχ. 191.

Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ συναπέντωσα τῷ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς Η. καὶ ἄς ἐνωθῶσιν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ΗΖ, ΒΔ· αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΗ, ΒΔ, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ, ΡΣ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, εἶναι παράλληλοι (πρό. 10)· λοιπὸν ΑΕ: ΕΒ:: ΑΗ: ΗΔ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΑΓ, ΗΖ, εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΑΗ: ΗΔ:: ΓΖ: ΖΔ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΑΗ: ΗΔ, θέλομεν ἔχει ΑΕ: ΕΒ:: ΓΖ: ΖΔ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ζ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐστω ΑΒΓΔ ὅποιονδήποτε τετράπλευρον κείμενον ἢ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (1)· ἔαν τμηθῶσιν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἀναλόγως ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, εἰς τρόπον ὥστε ΑΕ: ΕΒ:: ΔΖ: ΖΓ, καὶ ΒΗ: ΗΓ:: ΑΘ: ΘΔ· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ θέλουσι τέμνεσθαι εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν Μ, εἰς τρόπον ὥστε θέλομεν ἔχει ΘΜ: ΜΗ:: ΑΕ: ΕΒ, καὶ ΕΜ: ΜΖ:: ΑΘ: ΘΔ. σχ. 192.

Διὰ τῆς ΑΔ ἄς διέλθῃ ἐπίπεδον ὅποιονδήποτε ΑΒΘΓΔ τὸ ὅποιον δμως νὰ μὴ διέρχεται διὰ τῆς ΗΘ· ἐκ τῶν σιγμῶν Ε, Β, Γ, Ζ ἄς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΗΘ αἱ Εε, Ββ, Γγ, Ζζ, αἵτινες συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον εἰς ε, β, γ, ζ. Ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Ηβ, Ηω, Γγ (15, 3), θέλομεν ἔχει βθ: θγ:: ΒΗ: ΗΓ:: Αθ: θδ·

(1) Διὰ τριῶν σημείων πάντοτε εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ ἐπίπεδον· ἔαν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προεκτελλόμενον ὑπερῶν καὶ ἀπο τῆτα τῶν, τότε τὰ τέσσαρα σημεῖα εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ διούσης αὐτὰ ἀπὸ δύο σχηματίζομεν τετράπλευρον τὸ εἶναι διὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐξ ἑναντίας ἔαν τὸ ἐπίπεδον δὲν διέλθῃ ὑπὸ τὸ τέταρτον, τὸ σχηματίζομενον τετράπλευρον εὐρίσκεται μισρασμένον εἰς δύο ἐπίπεδα, καὶ τότε λέγεται, ὅτι δὲν κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ τετράπλευρον τοῦτο καλεῖται ἀπὸ τοῦ ἑλλῆος quadrilatère gauche· οἱ ἡμέτεροι δὲ τὸ ἐνιμέσιον ὅπως ἀγαποῦν. Εἰς τοιοῦτου εἶδους τετράπλευρον λοιπὸν ἄς φαντασθῇ ἡ συναρπύζουσα τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν καὶ ἀποδείξιν. Θ. Μ.

λοιπὸν (20, 3) τὰ τρίγωνα $\Lambda\Theta\beta$, $\Delta\Theta\gamma$, εἶναι ὁμοία. Ἀκο-
 λούθως θέλομεν ἔχει $\Lambda\epsilon : \epsilon\beta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\beta$, καὶ $\Delta\zeta : \zeta\gamma :: \Delta\zeta : \zeta\gamma$.
 $\Lambda\epsilon : \epsilon\beta :: \Delta\zeta : \zeta\gamma$, ἢ, ἐν συνθέσει, $\Lambda\epsilon : \Delta\zeta ::$
 $\Lambda\epsilon : \Delta\gamma$. ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Lambda\Theta\beta$, $\Delta\Theta\gamma$,
 ἔχομεν $\Lambda\beta : \Delta\gamma :: \Lambda\Theta : \Theta\Delta$. λοιπὸν $\Lambda\epsilon : \Delta\zeta :: \Lambda\Theta : \Theta\Delta$.
 ἄλλως τὰ τρίγωνα $\Lambda\Theta\beta$, $\gamma\Theta\Delta$ ἐπειδὴ εἶναι ὁμοία, ἡ γω-
 νία $\Theta\Lambda\epsilon = \Theta\Delta\zeta$. λοιπὸν τὰ τρίγωνα $\Lambda\Theta\epsilon$, $\Delta\Theta\zeta$, εἶναι
 ὁμοία (20, 3)· λοιπὸν ἡ γωνία $\Lambda\Theta\epsilon = \Delta\Theta\zeta$. Ἐκ τούτου
 ἔπεται κατὰ πρῶτον ὅτι $\epsilon\Theta\zeta$ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, καὶ
 οὕτως αἱ τρεῖς παράλληλοι $\epsilon\epsilon$, $\eta\Theta$, $\zeta\zeta$ κείνται εἰς τὸ
 αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ ὑποῖον περιέχει καὶ τὰς δύο εὐθείας $\epsilon\zeta$,
 $\eta\Theta$. λοιπὸν αὗται πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς μίαν
 σιγμὴν M . Ἐπειτα ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων $\epsilon\epsilon$, $\eta\Theta$,
 $\zeta\zeta$, θέλομεν ἔχει $\epsilon M : M\zeta :: \epsilon\Theta : \Theta\zeta :: \Lambda\Theta : \Theta\Delta$.
 Ἐὰν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν ἀναφέρωμεν εἰς τὴν πλω-
 ρὴν $\Lambda\beta$, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι $\Theta M : M\eta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\beta$. (1).

(2) Όταν τὸ τετράπλευρον ἐβρίσκειται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, οὐδαμῶς
 ἀμφισβητῶν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι αἰτῆς τέμνουν τὴν ἀπέναντι αὐτοῦ
 πλευρὰ ἀνάλογως, τέμνονται εἰς μίαν σιγμὴν M . Τὰς ἀναλογίας ὁμοίως
 $\epsilon M : M\zeta :: \Lambda\Theta : \Theta\Delta$ καὶ $\Theta M : M\eta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\beta$, ἀποδεικνύμεν ὡς ἀνω-
 τέρως.

Γενόμενος τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν,
 τὰ ἐκείνη τρίγωνα $\Lambda\eta\beta$, $\Delta\epsilon\eta$ θέλουν δοῖσαι $\Lambda\epsilon : \epsilon\beta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\beta$ πα-
 ρομοίως καὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα $\Delta\eta\gamma$, $\Delta\zeta\gamma$, $\Delta\zeta : \zeta\gamma :: \Delta\zeta : \zeta\gamma$. ἀλλ' ἐξ
 ὑποθέσεως, $\Lambda\epsilon : \epsilon\beta :: \Delta\zeta : \zeta\gamma$. λοιπὸν $\Lambda\epsilon : \epsilon\beta :: \Delta\zeta : \zeta\gamma$ καὶ ἐν συν-
 θέσει $\Lambda\beta : \epsilon\beta :: \Delta\gamma : \zeta\gamma$ (1). ἄλλως $\beta\eta : \eta\gamma :: \beta\Theta : \Theta\gamma$, καὶ $\Lambda\Theta :$
 $\Theta\Delta :: \beta\eta : \eta\gamma$. λοιπὸν $\Lambda\Theta : \Theta\Delta :: \beta\Theta : \Theta\gamma$, καὶ, ἐν μεταθέσει, $\Lambda\Theta :$
 $\beta\Theta :: \Theta\Delta : \Theta\gamma$. ὅθεν, ἐν διακρίσει, $\Lambda\Theta - \beta\Theta$ ἢ $\Lambda\epsilon : \epsilon\Theta :: \Theta\Delta - \Theta\gamma$ ἢ
 $\gamma\Theta : \Theta\gamma$. Ἐκ τῆς νίκης ταύτης ἀναλογίας καὶ τῆς (1) συνάγεται $\epsilon\beta :$
 $\Theta\beta :: \zeta\gamma : \Theta\gamma$. ὅθεν ἐν συνθέσει $\epsilon\beta + \Theta\beta$ ἢ $\epsilon\Theta : \Theta\beta :: \zeta\gamma + \Theta\gamma$ ἢ
 $\Theta\zeta : \Theta\gamma$, καὶ ἐν μεταθέσει $\epsilon\Theta : \Theta\zeta :: \Theta\beta : \Theta\gamma$. ἀλλὰ $\epsilon\Theta : \Theta\zeta ::$
 $\epsilon M : M\zeta$. λοιπὸν $\epsilon M : M\zeta :: \Theta\beta : \Theta\gamma$. ἐπειδὴ δὲ $\beta\Theta : \Theta\gamma :: \beta\eta :$
 $\eta\gamma :: \Lambda\Theta : \Theta\Delta$ διὰ τοῦτο καὶ $\epsilon M : M\zeta :: \Lambda\Theta : \Theta\Delta$ ἀναφέροντες τὴν
 αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὴν πλευρὰν $\Lambda\beta$, καὶ ὁμοίως συλλογισμένοι δο-
 κούμεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι $\Theta M : M\eta :: \Lambda\epsilon : \epsilon\beta$. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ περιεχομένη γωνία μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων MAN καὶ MAH , ἢμπορεῖ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν, νὰ μετρηθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν NAH τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των αἱ δύο κάθετοι AN , AH ἡγμέναι εἰς ἕκαστον τούτων τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς AM . σχ. 193.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ νόμιμον τούτου τοῦ μέτρου, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, 1.^{ον} ὅτι εἶναι σταθερὸν, ἢ ὅτι ἔσται εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὁποιαδήποτε στιγμήν τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ δύο κάθετοι.

Τῶν ὄντι, ἐὰν ληθῇ ἄλλη στιγμή M , καὶ ἀχθῇ ἡ μὲν MF εἰς τὸ ἐπίπεδον MN κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς AM , ἡ δὲ MB εἰς τὸ ἐπίπεδον MH κάθετος ἐπὶ τῆς ἰδίας κοινῆς τομῆς· αἱ εὐθεῖαι MB καὶ AF ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς AM , θάβουν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ MF θάβει εἶναι παράλληλος τῇ AN · λοιπὸν ἡ γωνία $BMF = \angle AN$ (πρό. 13)· ἀδιάφορον λοιπὸν εἶναι νὰ ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ἐκ τῆς στιγμῆς M ἢ ἐκ τῆς στιγμῆς A · ἡ περιεχομένη γωνία πάντοτε θάβει εἶναι ἡ αὐτή.

2.^{ον} Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἐὰν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων αὐξάνῃ ἢ ὀλιγοσέσῃ κατὰ τινα λόγον, κατὰ τοῦ αὐτοῦ θέλει αὐξάνει ἢ ὀλιγοσέσει ἡ γωνία $\angle PAN$.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον PAN ἐκ τοῦ κέντρου A καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν ἄς γραθῇ τὸ τόξον NAH · ἐκ τοῦ κέντρου M καὶ μὲ ἴσην ἀκτῖνα ἄς γραθῇ τὸ τόξον PEB , ἃς ἀχθῇ ἡ AD κατ' ἀρέσκειαν· ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα PAN , BMF εἶναι κάθετα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν MA , εἶναι διὰ τοῦτο παράλληλα (πρό. 9)· λοιπὸν αἱ κοιναὶ τομῆς των AD , ME ὑπὸ τρίτου τινὸς AMA , εἶναι παράλληλοι· λοιπὸν ἡ γωνία BME εἶναι ἴση τῇ $\angle PAD$ (πρό. 13).

Ας καλέσωμεν πρὸς ὀλίγον ἀγκωνήν· (1) τὴν σχημα-
 τίζομένην γωνίαν ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα $M\Pi$, MN · τούτου
 τοθέντος, ἐὰν ἡ γωνία $\Delta A\Pi$ ᾖ ἰση μὲ τὴν $\Delta A N$, φα-
 νερὸν ὅτι καὶ ἡ ἀγκωνὴ $\Delta A M\Pi$ θέλει εἶναι ἰση μὲ τὴν
 ἀγκωνήν $\Delta A M N$ · διότι ἡ βᾶσις $\Pi A \Delta$ ἀκριβῶς ἡμπορεῖ
 νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἰσης μὲ αὐτὴν $\Delta A N$, τὸ δὲ ὕψος $A M$
 εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ· λοιπὸν αἱ δύο ἀγκωναὶ ἐντελῶς
 θέλουν ἐφαρμόσει. Πλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐὰν ἡ γωνία
 $\Delta A\Pi$ περιέχεται ἀριθμὸν τινὰ φορῶν εἰς τὴν γωνίαν $\Pi A N$,
 ἡ ἀγκωνὴ $\Delta A M\Pi$ ἤθελε περιέχεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν
 φορῶν εἰς τὴν ἀγκωνήν $\Pi A M N$ · λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν
 δύο γωνιῶν $\Delta A\Pi$, $\Pi A N$ ἐκ φράζεται δι' ἀκεραίων ἀριθ-
 μῶν, ὁ λόγος τῶν δύο ἀγκωνῶν $\Delta A M\Pi$, $\Pi A M N$ θέλει
 ἐκ φράζεται διὰ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν· καὶ ἐπομένως γωνία
 $\Delta A\Pi$ γωνίαν $\Pi A N$ · ἀγκωνὴ $\Delta A M\Pi$ · ἀγκωνήν $\Pi A M N$.
 Ἀλλὰ καθὼς καὶ εἰς ἄλλην παρομοίαν περίστασιν (17, 2),
 οὕτως καὶ ἐνταῦθα ἡμποροῦμεν νὰ δείξωμεν ὅτι ὅποιος δὴ ὅ-
 ποτε καὶ ἂν ᾖ ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν $\Delta A\Pi$, $\Pi A N$,
 αὗται θέλουν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντικειμένων ἀγκωνῶν·
 λοιπὸν ὅποιος δὴ ὅποτε καὶ ἂν ᾖ ὁ λόγος τῆς γωνίας $\Delta A\Pi$
 πρὸς τὴν γωνίαν $\Pi A N$, ἡ ἀγκωνὴ $\Delta A M\Pi$ θέλει εἶναι εἰς
 τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὴν ἀγκωνήν $\Pi A M N$ · λοιπὸν ἡ γω-
 νία $N A\Pi$ ἡμπορεῖ νὰ ληθῇ ὡς μέτρον τῆς ἀγκωνῆς
 $\Pi A M N$, ἢ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξὺ τῶν
 τὰ δύο ἐπίπεδα $M A\Pi$, $M A N$.

Σχόλιον. Ὅτι ὑπάρχει διὰ τὰς σχηματιζομένας γω-
 νίας ἀπὸ δύο εὐθείας, ὑπάρχει καὶ διὰ τὰς σχηματιζο-
 μένας γωνίας ἀπὸ δύο ἐπίπεδα. Οὕτως ὅταν δύο ἐπίπεδα
 ἀμοιβαίως τὸ ἐν διαπερᾷ τὸ ἄλλο, αἱ ἀπέναντι εἰς τὴν

(1) Πόλλαι αὐτῶν ἀγκωνῶν τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει κοινῶς ἐπειδὴ
 μὲ φαίνεται ὅτι ἡ λέξις αὕτη εἶναι εἰς ὅλους μας ἐβληπτοῦς.

κορυφῇ γωνία εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ προσκείμεναι κάμνου
ὁμοῦ δύο ὀρθάς· ἴαν λοιπὸν ἐπίπεδον ἦναι κάθετον εἰς
ἄλλο, τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἐκείνο. Παράμοιος εἰς τὴν
συναπάντησιν παραλλήλων ἐπιπέδων μὲ τρίτον ἐπίπεδον,
υὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ἰσότητες καὶ αἱ αὐταὶ ιδιότητες ὅπου
καὶ εἰς τὴν συναπάντησιν δύο παραλλήλων γραμμῶν μὲ
τρίτην τινά.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΗ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εάν ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε ἐπί-
πεδον ΑΠΒ δι' αὐτῆς διερχόμενον, θέλει εἶναι κάθετον
εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Εἶω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· ἴαν
εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ὀρθῇ ἡ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΒΓ,
ἡ ΑΠ, οὕσα κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι κά-
θετος εἰς κάθε μίαν τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ· ἀλλ' ἡ
γωνία ΑΠΔ, σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο κάθετους ΠΑ,
ΠΔ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, μετρᾷ τὴν γωνίαν τῶν
δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη
εἶναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των (ὁρ. 5).

Σχόλιον. Όταν τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς ΑΠ, ΒΠ, ΔΠ, ἦναι
κάθετοι μεταξύ των, ἐκάστη τρῦτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ
ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι κά-
θετα μεταξύ των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΘ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εάν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου
ΜΝ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ὀρθῇ ἡ ΠΑ κάθετος ἐπὶ
τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, λέγω δτι ἡ ΠΑ θέλει εἶναι κάθε-
τος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Διότι, ἴαν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ὀρθῇ ἡ ΠΔ κάθετος
ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ τὴ

δύο επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ των· λοιπὸν ἡ $\Lambda\Gamma$ εἶναι κάθετος εἰς καὶ δύο εὐθείας $\Pi\Delta$, $\Pi\Delta'$ · λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των MN .

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον AB ᾖ καθετόν εἰς πρὸς ἐπίπεδον MN , καὶ ἐκ μιᾶς τυχμῆς Π τῆς κοινῆς τομῆς ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον MN , λόγῳ ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θέλει εὐρίσκειται ἐν τῷ ἐπίπεδῳ AB · διότι, ἀλλίως, ἡμπορούσαμεν νὰ ἀξώμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον AB μίαν κάθετον $\Lambda\Pi$ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς $D\Pi$, ἥτις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον MN · λοιπὸν εἰς τὴν αὐτὴν τυχμὴν Π ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον MN · ὑπερδύνατον (πρό. 4).

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν δύο επίπεδα AB , AD ᾖναι κάθετα εἰς ἀλλὸ τρίτον MN , ἡ κοινὴ τομὴ των $\Lambda\Pi$ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ τρίτον τοῦτο ἐπίπεδον· σγ. 194.

Διότι ἔὰν ἐκ τῆς τυχμῆς Π ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον MN , ἡ κάθετος αὕτη πρέπει ἐνταύτῳ νὰ εὐρεθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον AB καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον AD (πορ. 19)· λοιπὸν εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ των $\Lambda\Pi$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΛ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν μία ἑστὴ γωνία ᾖναι σχηματισμένη ἀπὸ τρεῖς ἐπίπεδους γωνίας, τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιοῦνδήποτε τούτων τῶν γωνιῶν, θέλει εἶναι μείζον τῆς τρίτης· σγ. 195.

Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαὶ ᾖναι ἴσαι μεταξύ των, φανερόν ἐστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μείζον τῆς τρίτης. Ἐὰν δὲ ἄνισοι καὶ ἐκάστη τῶν δύο μείζων τῆς τρίτης, φανερόν ἐκόμῃ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μείζον τῆς τρίτης. Ἡ μόνη λοιπὸν περίστασις καθ' ἣν ἡ ἐκφρασηθεῖσα

πρότασις ἔχει χρεία ἀποδείξεως, εἶναι ἰσὺν εἰς τὴν ὑποῖαν ἡ παραβαλλομένη ἐπίπεδος γωνία μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων εἶναι μείζων ἐκάστης τούτων. Ἐστω λοιπὸν ἡ σκευὴ γωνία Σ σχηματιζομένη ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἐπίπεδους $\Lambda\Sigma\text{B}$, $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\text{B}\Sigma\Gamma$, καὶ ὥς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\text{B}$ εἶναι μείζων τῶν ἄλλων δύο· λέγω ὅτι θέλει εἶναι $\Lambda\Sigma\text{B} < \Lambda\Sigma\Gamma + \text{B}\Sigma\Gamma$.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Lambda\Sigma\text{B}$ ὥς γένη ἡ γωνία $\text{B}\Sigma\Delta \equiv \text{B}\Sigma\Gamma$, ὥς ἀγθῇ κατ' ἀρίσκειαν ἡ εὐθεῖα ΛAB : καὶ, ληφθεὶς τῆς $\Sigma\Gamma \equiv \Sigma\Delta$, ἐπιζευχθήτωσαν αἱ $\text{A}\Gamma$, $\text{B}\Gamma$.

Αἱ δύο πλευραὶ $\text{B}\Sigma$, $\Sigma\Delta$, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο $\text{B}\Sigma$, $\Sigma\Gamma$, ἡ γωνία $\text{B}\Sigma\Delta \equiv \text{B}\Sigma\Gamma$: λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $\text{B}\Sigma\Delta$, $\text{B}\Sigma\Gamma$ εἶναι ἴσα· λοιπὸν $\text{B}\Delta \equiv \text{B}\Gamma$. Ἀλλ' ἔχομεν $\text{AB} < \text{A}\Gamma + \text{B}\Gamma$: ἀφαιρέσεισθε ἀπὸ τὸ ἐν μέρος τῆς $\text{B}\Delta$, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν $\text{B}\Gamma$, μένει $\text{A}\Delta < \text{A}\Gamma$. Αἱ δύο πλευραὶ $\text{A}\Sigma$, $\Sigma\Delta$, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο $\text{A}\Sigma$, $\Sigma\Gamma$, ἡ τρίτη $\text{A}\Delta$ εἶναι μικρότερα τῆς τρίτης $\text{A}\Gamma$: λοιπὸν (10, 1) ἡ γωνία $\text{A}\Sigma\Delta < \text{A}\Sigma\Gamma$. Προσθήσει τῆς $\text{B}\Sigma\Delta \equiv \text{B}\Sigma\Gamma$, προκύπτει $\text{A}\Sigma\Delta + \text{B}\Sigma\Delta$ ἢ $\text{A}\Sigma\text{B} < \text{A}\Sigma\Gamma + \text{B}\Sigma\Gamma$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπίπεδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν σκευὴν, εἶναι πάντοτε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἀς τεκθῇ ἡ σκευὴ γωνία Σ ἀπὸ ὁποιοῦνδήποτε ἐπίπεδον $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\text{E}$: εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὥς ληφθῇ σημείον τι O , καὶ ἐξ αὐτοῦ ὥς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς γωνίας αἱ γραμμαὶ OA , OB , OC , OD , OE σχ. 196.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων $\Lambda\Sigma\text{B}$, $\text{B}\Sigma\Gamma$, κ. τ. λ. τὰ ὑποῖα σχηματίζονται ἐλγύρου τῆς κορυφῆς Σ , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ΛOB , $\text{BO}\Gamma$, κ. τ. λ. τὰ ὑποῖα σχημα-

τίζονται ολόγυρα τῆς κορυφῆς O . Ἀλλ' εἰς τὴν σιγμὴν
 B αἱ γωνίαι $\Delta BO, OBI'$, ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμνουν τὴν
 γωνίαν ABI' μικροτέραν τοῦ ἄθροίσματος τῶν γωνιῶν
 $\Delta B\Xi, \Xi BI'$ (πρό. 21)· ὡσαύτως εἰς τὴν σιγμὴν I' ἔχομεν
 $BI'O + OI'A < BI'X + XI'A$ καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας
 γωνίας τοῦ πολυγώνου $\Delta B\Gamma\Delta E$. Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι εἰς
 τὰ τρίγωνα τῶν ὑποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς O , τὸ ἄθροισμα
 τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροί-
 σματος τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἰς τὰ τρίγωνα τῶν
 ὑποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς Σ . Ἐώρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν
 γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὑποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς Σ
 μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν
 ὑποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς Σ , καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα
 τῶν γωνιῶν τῶν ὑποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώ-
 νου $\Delta B\Gamma\Delta E$ καλοῦντες A τὸ πρῶτον καὶ B τὸ δεύτερον,
 ἔχομεν διὰ τὸ ἄθροισμα τούτων $A + B$ παρομοίως τὸ
 ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὑποίων ἡ κορυφή
 εἶναι εἰς O μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γω-
 νιῶν τῶν ὑποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς O , καὶ εἰς τὸ
 ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὑποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ
 πολυγώνου $\Delta B\Gamma\Delta E$ καλοῦντες τὸ πρῶτον ἄθροισμα A'
 καὶ τὸ δεύτερον B' , ἔχομεν $A' + B'$ διὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων
 τούτων τῶν γωνιῶν· ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ἄθροίσματα $A + B$
 καὶ $A' + B'$ πρέπει νὰ ᾖναι ἴσα· διὰ τοῦτο $A + B =$
 $A' + B'$ · ἀλλὰ δίδειται ὅτι $B > A$ · λοιπὸν ἀναγκαίως
 $A < B'$ · λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν
 ολόγυρα τῆς σιγμῆς O , εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροί-
 σματος τῶν γωνιῶν ολόγυρα τῆς σιγμῆς Σ . Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα
 τῶν ολόγυρα τῆς σιγμῆς O γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας
 ὀρθὰς (5, 1)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν
 αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν Σ εἶναι μικρό-
 τερον ἀπὸ τέσσαρας ὀρθὰς.

Σχόλιον. Η απόδειξις αὕτη προϋποθέτει ὅτι ἡ σερρα γωνία εἶναι κυρτή, ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδον μίᾳ ἰδρας πρὸς καλλόμενον δὲν ἢμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὴν σερραν γωνίαν. Ὡς ἄλλως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δὲν ἦθελεν ἔχει ὅρια, καὶ ἢμποροῦσε νὰ ᾖναι ὅποιουδήποτε μεγέθους.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΓ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν δύο σερραὶ γωνίαι σύγκαινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι νὰ ᾖναι ἴσαι· ἢ καὶ μίᾳ μὲ τὴν καθ' ἑμῖαν, τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκεις θέλουσιν κλίνειν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἐστω ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\Gamma \equiv \Delta\Gamma\text{Z}$, ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\text{B} \equiv \Delta\Gamma\text{E}$, καὶ ἡ γωνία $\text{B}\Sigma\Gamma \equiv \text{E}\Gamma\text{Z}$. λέγω ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\Lambda\Sigma\text{B}$, θέλουσιν ἔχει μετὰξὺ τῶν κλίσεων ἴσιν μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων $\Delta\Gamma\text{Z}$, $\Delta\Gamma\text{E}$. σχ. 197.

Ληφθείσης τῆς ΣB κατ' ἀρίσκειαν, ἃς ἀχθῇ ἡ BO κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Lambda\Sigma\Gamma$ ἐκ τῆς στιγμής O , ὅπου αὕτη ἢ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, ἃς ἀχθῶσιν αἱ OA , OG κάθετοι, ἢ μὲν ἐπὶ τῆς ΣA , ἢ δὲ ἐπὶ τῆς $\Sigma\Gamma$. ἃς ἐπιζυγῶσιν αἱ AB , BG . ἃς ληφθῇ ἀκολουθῶς $\text{TE} \equiv \Sigma\text{B}$ ἃς ἀχθῇ ἡ EP κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Delta\Gamma\text{Z}$ ἐκ τῆς στιγμής P ἃς ἀχθῶσιν αἱ PA , PZ κάθετοι ἐπὶ τῶν ΔA , ΔZ τέλος ἃς ἐνωθῶσιν αἱ ΔE , EZ .

Τὸ τρίγωνον ΣAB εἶναι ὀρθογώνιον εἰς A , καὶ τὸ τρίγωνον ΔAE εἰς Δ (πρό. 6), καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\text{B} \equiv \Delta\Gamma\text{E}$, ἔχομεν ὡσαύτως $\Sigma\text{BA} \equiv \Gamma\text{EA}$. Ἀλλως $\Sigma\text{B} \equiv \text{TE}$ λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΣAB εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔAE (5, 1)· λοιπὸν $\Sigma\text{A} \equiv \Delta\text{A}$, καὶ $\text{AB} \equiv \Delta\text{E}$. Ομοίως θέλομεν δεῖξαι ὅτι $\Sigma\Gamma \equiv \Delta\text{Z}$, καὶ $\text{BG} \equiv \text{EZ}$. Τοῦτου τιθέντος, τὸ τετράπλευρον ΣAOG εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράπλευρον ΔAIEZ διότι τιθείσης τῆς γωνίας $\Lambda\Sigma\Gamma$ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ

αὐτὴν $\Delta\Gamma Z$, ἐπειδὴ $\Sigma A = TA$ καὶ $\Sigma I = TZ$, ἡ σιγμὴ Λ θέλει πέσει εἰς Δ καὶ ἡ I εἰς Z . Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ΛO , καθέτος εἰς τὴν ΣA , θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΔI καθέτου εἰς τὴν TA , καὶ παρμολοῶς OI ἐπὶ τῆς IZ . λοιπὸν ἡ σιγμὴ O θέλει πέσει ἐπὶ τῆς σιγμῆς I , καὶ θέλομεν ἔχει $\Lambda O = \Delta I$. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα $\Lambda O B$, $\Delta P E$ εἶναι ὀρθογώνια εἰς O καὶ I , ἡ ὑποτείνουσα $\Lambda B = \Delta E$, καὶ ἡ πλευρὰ $\Lambda O = \Delta I$. λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18, 1). λοιπὸν ἡ γωνία $OAB = IAE$. Ἡ γωνία OAB εἶναι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda \Sigma B$, $\Lambda \Sigma I$. ἡ γωνία IAE εἶναι ἡ τῶν δύο ἐπιπέδων $\Delta T E$, $\Delta T Z$. λοιπὸν αἱ δύο αὐταὶ κλίσεις εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Πρέπει ἡμῶς νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γωνία Λ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΛAB δὲν εἶναι κυρίως ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda \Sigma B$, $\Lambda \Sigma I$, παρ' ὅταν ἡ καθέτος B πίπτῃ, ὡς πρὸς τὴν ΣA , ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος ὑποῦ καὶ ἡ ΣI . ἔνν δὲ ἐπιπτῇ ἀπὸ τῆς ἄλλου μέρους, τότε ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ἠθέλει εἶναι ἀμβλύται, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Λ ἠθέλει κάμνει δύο ὀρθάς. Ἀλλ' εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων $\Gamma \Delta E$, $\Gamma \Delta Z$ ἠθέλει εἶναι παρμολοῶς ἀμβλύται, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου $\Delta P E$, ἠθέλει κάμνει δύο ὀρθάς. λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία Λ πάντοτε ἠθέλει εἶναι ἴση τῇ Δ , ὡσαύτως ἠθέλομεν συμπεράνει ὅτι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda \Sigma B$, $\Lambda \Sigma I$, εἶναι ἴση μετὰ τὴν τῶν δύο ἐπιπέδων $\Gamma \Delta E$, $\Gamma \Delta Z$.

Σχόλιον. Ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τριῶν ἐπιπέδου γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμῶν μίαν μετὰ τὴν καθ' ἑμῶν μίαν, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ ἴσαι ἢ ὁμόλογοι γωνίαι ἦναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας, τότε αἱ γωνίαι αὗται θέλουσι εἶναι ἴσαι, καὶ ἔαν τεθῶσιν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης θέλουσι ἐφαρμόσει. Τῷ ὅτι εἶδομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον $\Sigma A \Theta \Gamma$ ἡμπορεῖ νὰ

τιθῇ ἐπὶ τοῦ ἰσού μὲ αὐτὸ $\Gamma\Delta\Pi\Z'$ οὕτως ταθείσῃ τῆς $\Sigma\Delta$ ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$, ἢ $\Sigma\Gamma$ πίπτει ἐπὶ τῆς $\Gamma\Z$, καὶ ἡ σιγμὴ O ἐπὶ τῆς σιγμῆς Π . Ἀλλὰ, διὰ αἰτίας τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων AOB , $\Delta\Pi E$, ἡ κάθετος OB εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Lambda\Sigma\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον ΠE εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta\Z'$ περιπλῖον αἱ κάθετοι αὗται διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν· λοιπὸν ἡ σιγμὴ B θέλει πέσει ἐπὶ τῆς σιγμῆς E , ἡ γραμμὴ ΣB ἐπὶ τῆς TE , καὶ αἱ δύο σεριαὶ γωνίαι κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην.

Ἡ ἐφαρμοσις δυνάμει αὕτη δὲν ἔχει χώραν παρ' ὁσάκις ὑποτίθεται, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο σεριὰς γωνίας· διότι ἐν αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι ἦσαν διατεταγμέναι εἰς τὰξιν ἀντίστροφον, ἢ, ὅπερ ταυτὸν, ἐὰν αἱ κάθετοι OB , ΠE ἀντὶ νὰ διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\Delta\Gamma\Z$, ἰδιουθύνοντο κατ' ἐναντίας, τότε ἀδύνατον ἦν εἶναι νὰ γίνῃ ἡ ἐφαρμοσις τῶν δύο σεριῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ὅχι· ἀληγώτερον ἦν εἶναι ἀληθές, κατὰ τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὅποια εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἦθελον κλίνει ἰσάκις τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο σεριαὶ γωνίαι ἦθελον εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα των τὰ συστατικά μέρη, χωρὶς μ' ὅλον τοῦτο νὰ ἠμποροῦν νὰ ἐπιταυθῶσι. Τοῦ εἶδους τοῦτο τῆς ἰσότητος, ἥτις δὲν εἶναι ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως πρέπει νὰ διακριθῇ μὲ μερικὴν τινὰ ὀνομασίαν· θέλωμεν τὴν ὀνομάζει ἰσότητα ἐκ συμμετρίας.

Οὕτως αἱ δύο σεριαὶ γωνίαι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, αἱ ὅποιαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τριῶν ἐπιπέδου γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν μίαν, ἀλλὰ διατεταγμέναι κατ' ἀντίστροφον τὰξιν θέλουν ὀνομαζέσθαι γωνίαι ἴσαι ἐκ συμμετρίας ἢ ἀπλῶς γωνίαι συμμετρικαί.

II αὐτὴ σημεῖωσις ἐφαρμόζεται εἰς τὰς τερεὰς γωνίας καὶ ὅποια εἶναι σχηματισμένη ἀπὸ περισσύτερας παρὰ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας: οὕτως τερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας $\Lambda, \text{B}, \Gamma, \Delta, \text{E}$, καὶ μία ἄλλη τερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας εἰς τᾶξιν ἀντίστροφον $\Lambda, \text{E}, \Delta, \Gamma, \text{B}$, ἡμποροῦν νὰ ᾖναι τοιαῦται ὥστε τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὅποια εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ κλίνουν ἰσάκως τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Αἱ δύο αὗται τερεαὶ γωνίαι, αἵτινες ἤθελον εἶναι ἴσαι χωρὶς ἡ ἐπιθέσις νὰ ᾖναι δυνατὴ, θέλουσιν ὀνομάζεσθαι γωνίαι τερεαὶ ἴσαι ἐκ συμμετρίας, ἡ γωνίαι τερεαὶ συμμετρικαί.

Εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα δὲν ὑπάρχει κυρίως ἰσότης ἐκ συμμετρίας, καὶ ὅσας ἤθελε τις ὀνομάσει οὕτως ἤθελον εἶναι ἀπόλυτοι ἰσότητες ἡ ἐπιθέσεις: ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἐπίπεδον σχῆμα ἡμπορεῖ νὰ ἀναποδογυρισθῇ, καὶ νὰ ληφθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἄνω διὰ τὸ κάτω. Ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰς τερεὰς ὅπου ἡ τρίτη διάστασις ἡμπορεῖ νὰ ληφθῇ κατὰ δύο διαφορετικὰς ἐννοίας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΔ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες σχηματίζουν τερεὰν τινὰ γωνίαν, νὰ εὕρωμεν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξὺ τῶν.

Εἰς Σ ἡ προτεθεισα τερεὰ γωνία, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γινωσθαὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι $\Lambda \Sigma \text{B}$, $\Lambda \Sigma \Gamma$, $\text{B} \Sigma \Gamma$. Ζητεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξὺ τῶν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων, παραδείγματος χάριν, τὰ ἐπίπεδα $\Lambda \Sigma \text{B}$, $\Lambda \Sigma \Gamma$. σ.χ. 198.

Ας φαντασθῶμεν ὅτι ἐκμάκωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὁποῦ καὶ εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία OAB ἤθελεν

είναι ἡ ζητούμενη. Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὐρωμεν τὴν αὐτὴν γωνίαν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἢ ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐκτελουμένης.

Πρὸς τοῦτο ἄς γένουν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς αἱ γωνίαι $B'ZA$, ASZ , $B''Z\Gamma$, ἵσαι μὲ τὰς γωνίας BZA , $AS\Gamma$, $BZ\Gamma$, εἰς τὸ σφαιρὸν σχῆμα· ἄς ληφθῇ ἐκάστη τῶν $B'Z$, $B''Z$ ἴση μὲ τὴν BZ τοῦ σφαιροῦ σχήματος· ἐκ τῶν σιγμῶν B' καὶ B'' ἄς κατεβῶσιν αἱ $B'A$, $B'\Gamma$ κάθετοι ἐπὶ τῶν ZA καὶ $Z\Gamma$, αἱ ὁποῖαι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς σιγμὴν τινὰ O . Ἐκ τῆς σιγμῆς A ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα AB' ἄς γραφθῇ ἡ ἡμιπερίφεια $B'BE$ · εἰς τὴν σιγμὴν O ἄς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς $B'E$ ἡ κάθετος OB , συναπαντῶσα τὴν περιφέρειαν εἰς B , ἃς ἐπιζευχθῇ AB , καὶ ἡ γωνία EAB θελεῖ εἶναι ἡ ζητούμενη κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ASZ , ASB , εἰς τὴν σφαιρὴν γωνίαν.

Τὸ πᾶν συνίσταται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνον AOB τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον AOB τοῦ σφαιροῦ. Τώρα τὰ δύο τρίγωνα $B'ZA$, BZA εἶναι ὀρθογώνια εἰς A , αἱ ἐν Z γωνίαι εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ ἐν B καὶ B' γωνίαι εἶναι παρομοίως ἴσαι. Ἀλλ' ἡ ὑποτείνουσα AB' εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσαν AB · λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ZA τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ZA τοῦ σφαιροῦ, καὶ ὁμοίως AB' , ἢ ἴση μὲ αὐτὴν AB εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι ἴση μὲ τὴν AB εἰς τὸ σφαιρὸν. Ὡσαύτως θέλωμεν δείξει ὅτι $Z\Gamma$ εἶναι ἴση καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· ὅθεν ἔπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον $ZAOG$ εἶναι ἴσον καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, οὕτως AO τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν AO τοῦ σφαιροῦ· λοιπὸν καὶ εἰς τὰ δύο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα AOB , AOB' , ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ ἡ γωνία EAB , εὐρεθεῖσα διὰ τῆς ἐπιπέδου κατασκευῆς, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ASB , ASZ , εἰς τὴν σφαιρὴν γωνίαν.

Όταν τὸ σημεῖον O πῶς μεταξὺ A καὶ B' εἰς τὸ ἐπιπέδον σχῆμα, ἡ γωνία $ΕΑΒ$ ἀποβαίνει ἀμβλεία, καὶ μετρεῖ πάντοτε τὴν ἀληθινὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων: ἰδοὺ διατὶ ἐσημειώσαμεν διὰ $ΕΑΒ$, καὶ ὅχι διὰ $ΟΑΒ$ τὴν ζητούμενην κλίσιν, διὰ τὰ ἀνήκη ἡ αὐτὴ λύσις εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἀνευ ἐξαίρετως.

Σχόλιον. Ἡμπορεῖ νὰ ζητηθῇ ἐὰν μὲ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας εἰλημμένας κατ' ἀρίσκειαν, ἦναι δυνατόν νὰ σχηματισθῇ ἑρεῖα γωνία.

Κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· διότι χωρὶς ταύτης τῆς συνθήκης δὲν ἡμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἡ ἑρεῖα γωνία (πρό. 22).

Πρέπει περιπλέον ἀφ' οὗ ληφθῶσι δύο τῶν γωνιῶν κατ' ἀρίσκειαν $B'ΣΑ$, $ΑΣΓ$, ἡ τρίτη $ΓΣΒ''$ νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥστε ἡ κάθετος $B'Γ$ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΣΓ$ νὰ συναπαντᾷ τὴν διάμετρον $B'E$ μεταξὺ τῶν ἄκρων B' καὶ E . Οὕτως τὰ ὅρια τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας $I'ΣB''$ εἶναι ἰκτεῖνα εἰς τὰ ὅποια ὅταν φθάσῃ, ἡ κάθετος $B'Γ$ τελειάνει εἰς τὰς σιγμὰς B' καὶ E . Ἐκ τῶν σιγμῶν τούτων ἅς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τῆς $ΣΓ$ αἱ κάθετοι $B'I$, EK' , συναπαντῶσαι εἰς I καὶ K' τὴν γεγενημένην περιφέρειαν μὲ τὴν ἀκτῖνα $ΣB''$, καὶ τὰ ὅρια τῆς $ΓΣB''$ θέλουν εἶναι αἱ γωνίαι $ΓΣI$, $ΓΣK'$.

Ἀλλ' εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $B'ΣI$, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ $ΣΓ$ προεκβληθεῖσα συναπαντᾷ κατὰ κάθετον τὴν βάσιν $B'I$, ἔχομεν τὴν γωνίαν $ΓΣI = ΓΣB' = ΑΣΓ + ΑΣB'$. Καὶ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $EΣK'$, ἐπειδὴ ἡ $ΣΓ$ εἶναι κάθετος εἰς τὴν EK' , ἔχομεν τὴν γωνίαν $ΓΣK' = ΓΣE$. Ἀλλως ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων $ΑΣE$, $ΑΣB'$, ἡ γωνία $ΑΣE = ΑΣB'$ · λοιπὸν $ΓΣE$ ἢ $ΓΣK' = ΑΣΓ + ΑΣB'$.

Ἐντεῦθεν ἔπεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν ὁσάκις ἡ τρίτη γωνία $ΓΣB''$ εἶναι μικρότερη τοῦ ἁθροίσματος

τῶν δύο ἄλλων $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\Lambda\Sigma\beta'$, ἀλλὰ μεγαλύτερα τῆς διαφορᾶς των: συνθήκη ἥτις συμφωνεῖ μὲ τὸ $\text{ΚΑ}'$ θεώρημα· διότι, δυνάμει τοῦτου τοῦ θεωρήματος, πρέπει νὰ ᾖναι $\Gamma\Sigma\beta'' < \Lambda\Sigma\Gamma + \Lambda\Sigma\beta'$ · πρέπει ὡσαύτως $\Lambda\Sigma\Gamma < \Gamma\Sigma\beta'' + \Lambda\Sigma\beta'$, ἢ $\Gamma\Sigma\beta'' > \Lambda\Sigma\Gamma - \Lambda\Sigma\beta'$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ε'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Δεδομένων δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν σφαιρὴν γωνίαν, μετὰ τῆς γωνίας τὴν ὑποῖαν τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Εἰωσαν $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\Lambda\Sigma\beta'$ αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, καὶ ᾗς ὑποθέσωμεν πρὸς ὀλίγον ὅτι $\Gamma\Sigma\beta''$ εἶναι ἡ τρίτη ζητούμενη γωνία· τότε γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα, ἡ περιεχομένη γωνία μεταξύ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο πρώτων ἔσται εἶναι ΕΑΒ . Τώρα καθὼς προσδιορίζεται ἡ γωνία ΕΑΒ διὰ μέσου τῆς $\Gamma\Sigma\beta''$ δεδομένων τῶν δύο ἄλλων· οὕτω δυνατόν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία $\Gamma\Sigma\beta''$ διὰ μέσου τῆς ΕΑΒ , καὶ μὲ τοῦτον τὴν τρόπον, θελεῖ λυθῇ τὸ προτεθὲν πρόβλημα.

Ληφθεῖσης τῆς $\Sigma\beta'$ κατ' ἀρέσκειαν, ᾗς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς $\Sigma\Lambda$ ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος $\beta'\text{Ε}$, ᾗς γένη ἡ γωνία ΕΑΒ ἴση μὲ τὴν τῶν δύο δεδομένων ἐπιπέδων ἀπὸ τὴν τριγμὴν Β ὅπου ἡ πλευρὰ ΑΒ συναπαντᾷ τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν ἐκ τοῦ κέντρου Λ μὲ τὴν ακτῖνα ΑΒ , ᾗς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡ κάθετος $\beta\text{Ο}$, καὶ ἀπὸ τὴν τριγμὴν Ο ᾗς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς $\Sigma\Gamma$ ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος $\text{ΟΓΒ}''$, ἥτις ᾗς περατωθῇ εἰς β'' ὥστε $\Sigma\beta'' = \Sigma\beta'$ ἡ γωνία $\Gamma\Sigma\beta''$ θελεῖ εἶναι ἡ τρίτη ἐπίπεδος ζητούμενη γωνία.

Διότι ἐὰν σχηματισθῇ σφαιρὴ γωνία μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας $\beta'\Sigma\Lambda$, $\Lambda\Sigma\Gamma$, $\Gamma\Sigma\beta''$, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων

ὅπου εὐρίσκονται αἱ δεδομέναι γωνίαι $\Lambda\Xi\Delta'$, $\Lambda\Xi\Gamma$ θέλει εἶναι ἰση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν $\text{ΕΛ}\delta$. σ. 198.

Σχόλιον. Εάν μία σεριὰ γωνία ᾖ τετραπλῆ, ἢ σχηματισμένη ἀπὸ τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας $\Lambda\Xi\Delta$, $\text{Β}\Sigma\Gamma$, $\Gamma\Xi\Delta$, $\Delta\Xi\Lambda$, ἡ γνώσις τῶν γωνιῶν τούτων δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἁμοιβαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων τῶν· διότι μὲ τὰς αὐτὰς ἐπιπέδους γωνίας δυνατόν νὰ σχηματισθῇ ἄπειρά σεριῶν γωνιῶν. Ἀλλ' εἰν προσεθῇ μία συνθήκη, εἰν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda\Xi\Delta$, $\text{Β}\Sigma\Gamma$, τότε ἡ σεριὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη, καὶ δυνατόν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ κλίσις δύο ὑποινδθήποτα τῶν ἐπιπέδων τῆς. Τῷ ὄντι ἂν φαντασθῶμεν σεριὰν τριπλῆν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας $\Lambda\Xi\Delta$, $\text{Β}\Sigma\Gamma$, $\Lambda\Xi\Gamma$ · αἱ δύο πρῶται γωνίαι εἶναι δεδομέναι, καθὼς καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων τῶν· δυνατόν λοιπὸν νὰ προσδιορισθῇ, διὰ τοῦ λυθέντος προβλήματος, ἡ τρίτη γωνία $\Lambda\Xi\Gamma$. Ἀκολουθῶς, εἰν θεωρήσωμεν τὴν τριπλῆν σεριὰν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας $\Lambda\Xi\Gamma$, $\Gamma\Xi\Delta$, $\Delta\Xi\Gamma$, βλέπομεν ὅτι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι εἶναι γνωσταί· οὕτως ἡ σεριὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη. Ἀλλ' ἡ σεριὰ τετραπλῆ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἔνωσιν τῶν εἰρημένων δύο σεριῶν τριπλῶν γωνιῶν· λοιπὸν ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ αὗται γωνίαι εἶναι γνωσταὶ καὶ προσδιωρισμέναι, ἡ ὅλη γωνία εἶναι πορομοίως γνωστὴ καὶ προσδιωρισμένη.

Ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda\Xi\Delta$, $\Delta\Xi\Gamma$, εὐρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας μερικῆς σεριᾶς γωνίας. Ὅσον διὰ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων $\text{Β}\Sigma\Gamma$, $\Gamma\Xi\Delta$, πρέπει εἰς μίαν σεριὰν μερικὴν γωνίαν νὰ ζητηθῇ ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda\Xi\Gamma$, $\Delta\Xi\Gamma$, καὶ εἰς ἄλλην ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda\Xi\Gamma$, $\text{Β}\Sigma\Gamma$ · τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ

περιεχομένη μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ΒΖΓ, ΔΣΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν εὐρῇ ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν σφαιρᾶς πενταπλῆς γωνίας, πρέπει νὰ ἦναι γνωσταὶ ἐκ τῶς τῶν πέντε ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες τὴν συνθέτουν δύο ἀμοιβαῖαι κλίσεις τῶν ἐπιπέδων τῶν· ἠθελον χρειασθῇ τρεῖς εἰς τὴν ἑξαπλὴν σφαιρὴν γωνίαν καὶ οὕτως ἐφελξῆς. σχ. 199.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ.

ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλεῖται σφαιρὸν πολυέδρον, ἡ ἀπλῶς πολυέδρον, κάθε σφαιρὸν περατούμενον ἀπὸ ἐπίπεδα ἢ ἑδράς ἐπιπέδους. (Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀναγκασίως περατοῦνται ἀπὸ εὐθείας γραμμᾶς). Ἐν μέρει καλεῖται τετράεδρον τὸ ἔχον τέσσαρας ἑδράς σφαιρὸν· ἑξάεδρον τὸ ἔχον ὀκτώ· δωδεκάεδρον τὸ δώδεκα· εἰκοσάεδρον τὸ εἴκοσι κ. τ. λ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἀπλούστερον τῶν πολυέδρων· διότι τοῦλάχιστον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὴν σχηματισμὸν σφαιρᾶς γωνίας, καὶ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἀφίνουσι κενόν τι, τὸ ὅποιον διὰ νὰ κλεισθῇ, ἀπαιτεῖ τοῦλάχιστον τέταρτον ἐπίπεδον.

Β'. Ἡ καινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν πολυέδρου τινὸς καλεῖται πλευρὰ ἢ κόψις (1) τοῦ πολυέδρου.

(1) Κόψιν ἀνόμενα τὴν ἐπίαν δ συγγραμμῶς λέγουσι (arête)· διότι ἡ λέξις αὕτη μὲ ἐφάνη καναληκτὴ καὶ συνήθως εἰς τὴν γλῶσσάν μας.

Γ'. Καλεῖται κανονικὸν πολυέδρον τοῦ ὁποίου εἶναι αἱ ἔδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ εἶναι αἱ γωνίαι, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐὰ πολυέδρα ταῦτα εἶναι πάντες τὸν ἀριθμὸν. Ὅρα τὸ παράρτημα εἰς τὰ βιβλία ζ' καὶ ζ' .

Δ'. Πρίσμα εἶναι τὸ περιχόμενον στερεὸν ὑπὸ πολλῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων, περατουμένων ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ἀπὸ δύο ἐπίπεδα πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα.

Πρὸς κατασκευὴν τούτου τοῦ στερεοῦ, ἔστω $AB\Gamma\Delta E$ ὁποῖονδήποτε πλῆγνον· ἔὰν εἰς ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ $AB\Gamma$, ἄχθωσιν αἱ γραμμαὶ $ZH, H\Theta, \Theta I$, κ. τ. λ. ἴσαι καὶ παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$, κ. τ. λ. θέλει σχηματισθῇ τὸ πολύγνον $ZH\Theta I K'$ ἴσον μὲ τὸ $AB\Gamma\Delta E$ · ἔὰν ἀκολουθῶς ἐνωθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἕως τοῦ ἄλλου αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων γωνιῶν διὰ τῶν εὐθειῶν $AZ, BH, \Gamma\Theta$, κ. τ. λ. αἱ ἔδραι $ABHZ, B'\Theta Z$, κ. τ. λ. θέλουσιν εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ τὸ οὕτως σχηματιζόμενον στερεὸν $AB\Gamma\Delta E ZH\Theta I K'$ θέλει εἶναι πρίσμα. γλ. 200.

Ε'. Ἐὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E, ZH\Theta I K'$, καλοῦνται βάσεις τοῦ πρίσματος· τὰ ἄλλα παραλληλόγραμμα ἐπίπεδα ὅμοῦ λαμβανόμενα συνιστοῦν τὴν παράπλευρον (laterale) ἢ κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι $AZ, BH, \Gamma\Theta$, κ. τ. λ., καλοῦνται πλευραὶ τοῦ πρίσματος.

Ζ'. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο του. βάσεων, ἢ ἡ ἠγμένη κάθετος ἀπὸ ἑνὸς σημείου τῆς ἑνὸς βάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω.

Ζ'. Τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθὸν ὅταν αἱ πλευραὶ AZ, BH , κ. τ. λ. ᾗναι κάθετοι εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων· τότε ἐκείνη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· εἰς καθὰ ἄλλην περίεχσιν τὸ πρίσμα εἶναι πλάγιον, καὶ

τὸ ὕψος εἶναι μικρότερον τῆς πλευρᾶς· διότι ἐκεῖνο μὲν εἶναι κάθετος, αὕτη δὲ πλαγία.

Η'. Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικόν, ἑξαγωνικόν, κ. τ. λ, καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον, κ.τ.λ.

Θ'. Τὸ πρίσμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, ἔχει ὅλας τοῦ τὰς ἰδρᾶς παραλληλογραμμικᾶς· καλεῖται δὲ παραλληλεπίπεδον. σχ. 106.

Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν ὅλαι τοῦ αἱ ἰδραὶ ᾖναι ὀρθογώνια.

Ι'. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων διακρίνεται ὁ κύβος ἢ τὸ κανονικόν ἑξάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ἑξ ἴσων τετραγώνων.

ΙΑ'. Πυραμῖς εἶναι τὸ σχηματιζόμενον στερεόν ὅταν πολλὰ τριγωνικὰ ἐπίπεδα ἀναχωροῦντα ἀπὸ τὴν αὐτὴν σιγμὴν Σ, τελειοῦν εἰς τὰς διαφόρους πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ πολυγωνικοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ. σχ. 106.

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, ἡ σιγμὴ Σ κορυφή, καὶ ἡ ἑσῶσις τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κ. τ. λ, σχηματίζει τὴν κυρτὴν ἢ παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

ΙΒ'. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, εἶναι ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, προεκβαλλομένου ὅν ᾖναι ἀναγκαῖον.

ΙΓ'. Ἡ πυραμῖς εἶναι τριγωνικὴ, τετραγωνικὴ, κ.τ.λ, καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον (εἰς γενικὴν σημασίαν). κ. τ. λ.

ΙΔ'. Ἡ πυραμῖς εἶναι κανονικὴ, ὅταν ἡ βάσις ᾖναι κανονικόν πολύγωνον, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν κατὸν ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ταύτης τῆς βάσεως· ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται τότε ἄξων τῆς πυραμίδος.

ΙΕ. Διαγώνιος ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ἡ εὐθεῖα ἥτις διένει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων στερεῶν γωνιῶν.

ΙΣ. Καλῶ συμμετρικὰ πολυέδρα δύο πολυέδρα τὰ ὅποια, ἔχοντα μίαν κοινὴν βάσιν, εἶναι ὁμοίως κατασκευασμένα, τὸ μὲν ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως, τὸ δὲ ὑποκάτω, μὲ ταύτην τὴν συνθήκην, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν νὰ κείνται εἰς ἴσα διαστήματα ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως, μετρούμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθετοῦ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Εάν, παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα ΣΤ ᾗναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ εἰς τὴν σιγμὴν Ο, ὅπου συναπαντᾷ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ, αἱ ὅποια ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΒΓ, θέλουν εἶναι δύο συμμετρικὰ πολυέδρα. σχ. 202.

ΙΖ. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες λέγονται ὁμοίαι ὅταν ἔχουν δύο ἰδρας ὁμοίας τὴν καθ' ἑμὴν μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκεις κλινούσας.

Οὕτως, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ—ΔΕΖ, ΒΑΓ—ΕΔΖ, ΑΒΣ—ΔΕΤ, ΒΑΣ—ΕΔΤ, εἰν περιπλάν η κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ΑΒΣ, ΑΒΓ, ᾗναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των ΔΤΕ, ΔΕΖ, αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, θέλουν εἶναι ὁμοίαι. σχ. 203.

ΙΗ. Αφ' οὗ σχηματισθῇ τρίγωνον μὲ τὰς κορυφὰς τριῶν γωνιῶν ἐκλεμμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἰδρας ἢ βάσεως ἑνὸς πολυέδρου, ἡμπορεῖ τις νὰ φαντασθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν διαφόρων στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, τῶν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως κειμένων, εἶναι κορυφαὶ τῶσιν τριγωνικῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ σημειωθὲν τρίγωνον· ἐκάστη δὲ τούτων τῶν πυραμίδων θέλει προσδιορίζει τὴν θέσιν καθεμιάς στερεᾶς γωνίας τοῦ πολυέδρου ὡς πρὸς ταύτην τὴν ἐκείνην. Τούτου τεθέντος:

Δύο πολυέδρα είναι ὁμοία ὅταν ἐν ᾧ ἔχουν βάσεις ὁμοίας, αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων ῥεσιῶν γωνιῶν, ἑκτὸς τούτων τῶν βάσεων, προσδιορίζονται ἀπὸ τριγωνικὰς πυραμίδας ὁμοίας τὴν καθὲς μίαν μὲ τὴν καθὲς μίαν.

ΙΘ'. Καλῶ κορυφὰς ἐνὸς πολυέδρου τὰς σιγμὰς αἱ ὁποῖαι καίονται εἰς τὰς κορυφὰς τῶν διαφορῶν ῥεσιῶν γωνιῶν τοῦ.

Σ. Κ. Οἱ αὐτὰ πολυέδρα τὰ ὁποῖα θεωρεῖται εἶναι πολυέδρα μὲ γωνίας ἐξιχεύσας ἢ κυρτὰ πολυέδρα. Καλεῖται οὕτως ἐκεῖνα τῶν ὁμοίων ἢ ἱσοπρόσθια· δὲν ἔμπορεῖ νὰ συναπαντηθῇ ἀπὸ εὐθείαν γραμμὴν εἰς περισσώτερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Εἰς τοιοῦτου εἶδους πολυέδρα τὸ ἐπίπεδον μὲν ἔδρας εἶναι πρὸς ἐκβληθῇ, δὲν ἔμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὸ πολυέδρον· ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι μέρος τοῦ πολυέδρου νὰ εὐρίσκηται ἄνω τοῦ ἐπίπεδου μὲν ἔδρας, καὶ μέρος ὑποκάτω· τὸ πολυέδρον εἶναι ἕλκεν ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦτου τοῦ ἐπίπεδου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η. Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α:

Δύο πολυέδρα δὲν ἔμπορδύν νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς χωρὶς νὰ ἐφαρμόζεται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ἐν τῶν πολυέδρων κατασκευασμένον. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἐν ἄλλο τὸ ὑποῖον νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς, πρέπει τὰ ἐπίπεδα τοῦτου νὰ μὴ διέρχωνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχονται τὰ ἐπίπεδα τοῦ πρώτου· διότι ἄλλως δὲν ἔθελε διαφέρει τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο· πλὴν τότε φανερόν εἶναι ὅτι μερικὰ τῶν νέων ἐπιπέδων ἔθελον τέμνει τὸ πρῶτον πολυέδρον· ἔθελον ὑπάρχει κορυφαὶ ἄνω τούτων τῶν ἐπιπέδων, καὶ κορυφαὶ ὑποκάτω, τὸ ὁποῖον δὲν ἔμπορεῖ νὰ ἀνήκῃ εἰς κυρτὸν πολυέδρον· λοιπὸν εἰὰν δύο πολυέδρα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο.

Σχόλιον. Δεδομένων κατὰ θέσιν τῶν σημείων A, B, Γ, K' , κ.τ.λ, τὰ ὑποῖα πρέπει νὰ χρησιμεύσουν ὡς κορυφαὶ ἐνὸς πολυέδρου, εὐκόλον εἶναι νὰ διηγραψῶμεν τὸ πολυέδρον.

Εκλέγομεν τρία πλησίον σημεῖα Δ, E, Θ , τοιαῦτα ὥς τὸ ἐπίπεδον $\Delta E \Theta$ νὰ διέρχεται, ἐὰν τοῦτο ἔχη χώραν, διὰ νέων σημείων K', Γ , ἀλλ' ὅλα τὰ ἄλλα νὰ ἀφίνη ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ ὅλα ἄνω τοῦ ἐπίπεδου ἢ ὅλα ὑποκάτω· τὸ ἐπίπεδον $\Delta E \Theta$ ἢ $\Delta E \Theta K' \Gamma$, οὕτω προσδιωρισμένον, θέλει εἶναι μία ἔδρα τοῦ στερεοῦ. Διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ $E \Theta$ περνοῦμεν ἐπίπεδον τὸ ὅποιον περιστρέφομεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ νέαν κορυφὴν Z , ἢ πολλὰς ἐνταύτῃ Z, I' . Θέλομεν ἔχει μίαν δευτέραν ἔδραν τὴν $ZK \Theta$ ἢ $ZE \Theta I'$. ἐξακολουθοῦμεν νὰ περνοῦμεν ἐπίπεδα διὰ τῶν εὐρημμένων πλευρῶν, ἕως οὗ τὸ στερεὸν νὰ περατωθῇ πανταχόθεν· τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πολυέδρον, διότι δὲν ὑπάρχουν δύο τὰ ὑποῖα νὰ ἡμποροῦν νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς κορυφάς. σχ. 204.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς δύο συμμετρικὰ πολυέδρα αἱ ὁμολογοὶ ἔδραι εἶναι ἴσαι ἢ καθεμία μὲ τὴν καθεμίαν, καὶ ἡ κλίσις δὴ προσκείμενων ἑδρῶν εἰς τὸ ἐν τούτων τῶν στερεῶν, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίτιν τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Ἐστω $AB \Gamma \Delta E$ ἡ κοινὴ βᾶσις εἰς τὰ δύο πολυέδρα, ἔσωσαν M καὶ N αἱ κορυφαὶ δύο ὁποιωνδήποτε στερεῶν γωνιῶν τοῦ ἐνὸς πολυέδρου, M' καὶ N' αἱ ὁμολογοὶ κορυφαὶ τοῦ ἄλλου· πρέπει κατὰ τὸν ὅρισμὸν, αἱ εὐθεῖαι MM', NN' , νὰ ᾖναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον $AB \Gamma$, καὶ νὰ διαιρῶνται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὰς σιγμὰς μ καὶ ν ὅπου συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον. Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι τὰ διίστημα MN εἶναι ἴσον μὲ τὸ $M'N'$. σχ. 205.

Διότι ἐὰν γραφῇ τὸ τραπέζιον $\mu\mu'N'$ ὁλόγραμμα τῆς μνω, οὐ τὸ ἐπίπεδόν του νὰ καθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου $\mu MN\nu'$ ἐξ αἰτίας τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς μ καὶ εἰς ν , ἡ πλευρὰ $\mu\mu'$ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἰσῆς με αὐτὴν $\mu\mu$, καὶ ἡ $\nu N'$ ἐπὶ τῆς νN . λοιπὸν τὰ δύο τραπέζια θέλουν ἴσαρμόσει, καὶ θέλει εἶναι $MN = M'N'$.

Ἐξω II μία τρίτη κορυφή τοῦ ἄνω πολυέδρου, καὶ II' ἡ ὁμολογος αὐτῇ εἰς τὸ κάτω, ὡσαύτως θέλει εἶναι $MII = M'II$ καὶ $NIH = N'II'$. λοιπὸν τὸ τρίγωνον MNI , τὸ ὁποῖον ἐνόνει τρεῖς ὁποιαιδήποτε κορυφαί τοῦ ἄνω πολυέδρου, εἶναι ἴσον με τὸ τρίγωνον $M'N'II'$ τὸ ὁποῖον ἐνόνει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφαί τοῦ κάτω πολυέδρου.

Ἐὰν μεταξὺ τούτων τῶν τριγώνων θεωρήσωμεν μόνον τὰ σχηματιζόμενα εἰς τὴν ἐπιφανείαν τῶν πολυέδρων, ἡμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ ἐπιφανεῖαι τῶν δυο πολυέδρων σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων τὰ ὅποια εἶναι ἴσα τὸ καθεὶν με τὸ καθεὶν.

Λέγω τώρα ὅτι ἐὰν τινὰ ἐκ τούτων τῶν τριγώνων εὐρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας καὶ σχηματίζουν τὴν αὐτὴν πολύγωνον ἔδραν, τὰ ὁμολόγα τρίγωνα θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας καὶ σχηματίζει μίαν ἰσὴν πολύγωνον ἔδραν.

Τῷ ὄντι, ἔξωσαν MII , NIK , δύο προσκείμενα τρίγωνα τὰ ὅποια ὑποτίθενται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἔξωσαν $M'II'N'$, $N'II'K'$ τὰ ὁμολόγα τῶν. ἔχομεν τὴν γωνίαν $MNI = M'N'II'$, τὴν γωνίαν $INK = I'N'K'$ καὶ ἐὰν ἐπιξυγῶσιν αἱ MK , $M'K'$, τὸ τρίγωνον MNK θέλει εἶναι ἴσον με τὸ $M'N'K'$, οὕτως ἡ γωνία $MNK = M'N'K'$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $MINK$ εἶναι ἐν μόνον ἐπίπεδον, ἔχομεν τὴν γωνίαν $MNK = MNI + INK$ λοιπὸν ὡσαύτως $M'N'K' = M'N'II' + I'N'K'$. Τώρα, ἐὰν τὰ τρία

ἐπίπεδα $M'N'I'$, $Π'N'K'$, $M'N'K'$ δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθε-
λον σχηματίζει σφραῖν γωνίαν, καὶ ἤθελεν εἶναι (20, 5)
 $M'N'K' < M'N'I' + Π'N'K'$ · λοιπὸν, ἐπειδὴ αὕτη ἡ συν-
θήκη δὲν ἔχει χώραν, τὰ δύο τρίγωνα $M'N'I'$, $I'N'K'$,
εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἐνταῦθεν ἔπεται ὅτι καθε ἑδρα, εἴτε τριγωνικὴ εἴτε
πολύγωνος· εἰς τὸ ἐν πολυέδρον, ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἴσην
ἑδραν εἰς τὸ ἄλλο, καὶ οὕτως τὰ δύο πολυέδρα περιέχονται
ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι ἴσα τὸ
κάθε ἐν μὲ τὸ κάθε ἐν.

Μένει νὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποιοῦνδήποτε προσ-
κειμένων ἑδρῶν εἰς τὸ ἐν πολυέδρον εἶναι ἴση μὲ τὴν
κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Ἐςωσαν $MII\Lambda$, $NI\Lambda K$, δύο τρίγωνα σχηματισμένα ἐπὶ
τῆς κοινῆς κόψως NI εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων
ἑδρῶν· ἔςωσαν $M'Π'N'$, $N'Π'K'$, τὰ ὁμολογὰ των· ἔμπο-
ροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν εἰς N γωνίαν σφραῖν σχηματίζο-
μένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας MNK , MNI , INK ,
καὶ εἰς N' γωνίαν σφραῖν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς
 $M'N'K'$, $M'N'Π'$, $Π'N'K'$. Τώρα, εἰδείξαμεν ὅτι αἱ ἐπίπε-
δοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ καθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν·
λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων MNI , NIK , εἶναι
ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των $M'N'I'$, $Π'N'K'$ (22, 5).

Λοιπὸν εἰς τὰ συμμετρικά πολυέδρα, αἱ ἑδραι εἶναι
ἴσαι ἢ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰ ἐπίπεδα δύο
ὁποιοῦνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν σφραῖν,
ἔχουν μεταξύ των τὴν αὐτὴν κλίσιν τὴν ὁποίαν τὰ ἐπί-
πεδα τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τοῦ ἄλλου.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ σφραῖαι
γωνίαι τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι αἱ συμμετρί-
και τῶν σφραῖν γωνιῶν τοῦ ἄλλου· διότι ἐὰν ἡ
σφραῖα γωνία N σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα MNI ,

ΗΝΚ, ΚΝΡ κ. τ. λ. ἡ ὁμολογος αὐτῇ Ν' σχηματίζεται ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Μ'Ν'Π', Π'Ν'Κ', Κ'Ν'Ρ', κ. τ. λ. Ταῦτα φαίνονται διατεταγμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ὥς καὶ τὰ ἄλλα· πλὴν ἐπειδὴ αἱ δύο σφαιραὶ γωνίαι εἶναι εἰς θέσιν ἀντίστροφον ἢ μία ὥς πρὸς τὴν ἄλλην, ἔπεται ὅτι ἡ πραγματικὴ διάταξις τῶν ἐπιπέδων τὰ ὅποια σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν Ν' εἶναι ἀντίστροφος τῆς διατάξεως ἣτις ὑπάρχει εἰς τὴν ὁμολογον γωνίαν Ν. Ἀλλως ἡ κλίσις τῶν προσεγῶν ἐπιπέδων εἶναι ἴση εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην σφαιρὴν γωνίαν· λοιπὸν αἱ σφαιραὶ αὗται γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἢ μία τῆς ἄλλης. Βλέπε τὸ σχόλιον τῆς ΚΓ' προτάσεως, βιβλ. Ε'.

Ἡ σημείωσις αὕτη δεικνύει ὅτι ὁποῖον δὴ ποτε πολύεδρον ἐν μόνον συμμετρικὸν δύναται νὰ ἔχῃ. Διότι ἐὰν ἐπὶ ἄλλης βάσεως κατασκευασθῇ νέον πολύεδρον συμμετρικὸν μὲ τὸ δεδομένον, αἱ σφαιραὶ τοῦ γωνίαι πάντοτε θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου τοῦ ἐπὶ τῆς πρώτης βάσεως κατασκευασμένου. Ἀλλως αἱ ὁμολογοὶ ἔδραι θέλουν εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα συμμετρικὰ πολύεδρα ἐπὶ μιᾶς ἢ ἄλλης βάσεως κατασκευασμένα θέλουν ἔχει τὰς ἔδρας καὶ τὰς σφαιρὰς γωνίας ἴσας· λοιπὸν θέλουν ἐφαρμόσει διὰ τῆς ἐπιθέσεως, καὶ σχηματίσει ἐν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ πολύεδρον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν μίαν σφαιρὴν γωνίαν περιεχομένην μεταξὺ τριῶν ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι ἴσα τὸ καθέ ἐν μὲ τὸ καθέ ἐν καὶ ὁμοίως καίμενα.

Ἐστω ἡ βᾶσις ΑΒΓΔΕ ἴση μὲ τὴν θάσιν αβγδε, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗΖ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον

αβηζ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΘΗ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον Εγβη· λέγω ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΙ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρίσμα αβγι. σχ. 200.

Διότι ἂς τοῦ ἡ βάσεις ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν αβγδε, αἱ δύο αὗται ἐάσεις ὁδούν· ἐφαρμόσει· ἀλλ' αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν Β εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπίπεδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν Ε, ἡ καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, τοῦτέστι, ΑΒΓ = αβγ, ΑΒΗ = αβη, καὶ ΗΒΓ = ηβγ· περιπλέον αἱ γωνίαι αὗται κεῖνται ὁμοίως· λοιπὸν αἱ σφαιραὶ γωνίαι Β καὶ Ε εἶναι ἴσαι, καὶ ἐπομένως ἡ πλευρὰ ΒΗ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν βη. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐξ αἰτίας τῶν ἰσῶν παραλληλογράμμων ΑΒΗΖ, αβηζ, ἡ πλευρὰ ΗΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ηζ, καὶ ὁμοίως ἡ ΗΘ ἐπὶ τῆς ηθ· λοιπὸν ἡ ἄνω βάσις ΖΗΘΙΚ' θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ τὴν ἴσην μὲ αὐτὴν ζηθικ', καὶ τὰ δύο σφαιρὰ ὁδούν ταυτισθῆ· διότι ὁδούν ἔχει τὰς αὐτὰς κορυφὰς (πρόβ. 1).

Πόρισμα. Δύο ὁρθὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἴσα. Διότι οὕσης τῆς ΑΒ ἴσης μὲ τὴν αβ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΗ ἴσου μὲ τὸ βη, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον αβηζ· τὸ αὐτὸ θέλει ὑπάρχει διὰ τὰ ὀρθογώνια ΒΗΘΙ', βηθγ. Οὕτως τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν Β εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν Ε. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Λ.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα εἶναι ἴσα καὶ παραλληλα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτου τοῦ ᾠρεοῦ, αἱ βάσεις $ABΓΔ$, $EZHΘ$, εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα, καὶ αἱ πλευραῖταιν εἶναι παράλληλοι: μένει λοιπὸν νὰ δειξωμεν ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ἀπέναντι παραπλεύρους ἰδρας, ὡς $ΔΕΘΔ$, $BZHΓ$. Τώρα $ΑΔ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $BΓ$: διότι τὸ σχῆμα $ABΓΔ$ εἶναι παραλληλόγραμμον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $ΑΕ$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $BΖ$: λοιπὸν ἡ γωνία $ΔΑΕ$ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ $ΓΒΖ$ (13, 5), καὶ τὸ ἐπίπεδον $ΔΑΕ$ παράλληλον τοῦ $ΓΒΖ$: λοιπὸν ὡσαυτως τὸ παραλληλόγραμμον $ΔΑΕΘ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον $ΓΒΖΗ$. Ομοίως θέλομεν δειξέι ὅτι τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα $ΑΒΖΕ$, $ΔΓΗΘ$, εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. σχ. 206.

Πόρισμα. Επειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ᾠρεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἑξ ἐπιπέδων ἐκ τῶν ὁποίων τὰ ἀπέναντι εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, ἔπεται ὅτι μία ὁποιαδήποτε ἰδρα καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἡμποροῦν νὰ ληφθοῦν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Σχόλιον. Διδομένων τριῶν εὐθειῶν AB , AE , AD αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς σιγμῆς A , καὶ κἀμινουν μεταξύ των γωνίας δεδομένας, δυνατόν εἶναι ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον· πρὸς τοῦτο πρέπει ἀπὸ τὸ ἄκρον ἐκείτης εὐθείας νὰ ἄχθῃ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων· τούτῳ ἀπὸ τὴν σιγμὴν B ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ $ΔΑΕ$, ἀπὸ τὴν σιγμὴν A ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ $ΒΑΕ$ · καὶ ἀπὸ τὴν σιγμὴν E ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ $ΒΑΔ$ · αἱ ἀμοιβαῖαι συναπαντήσεις τούτων τῶν ἐπιπέδων θίλουν σχηματίζει τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Θ Ε Μ Ρ Η Μ Ι Α.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον αἱ ἀπέναντι ᾠρεῖαι γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἢ μία τῆς ἄλλης· καὶ αἱ ἄγμέναι δια-

γωνίοι ἀπὸ τὰς κορυφᾶς τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ὡς συγκρίνωμεν, παρδείγματος χάριν, τὴν σερεάν γωνίαν Λ μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς H · ἡ γωνία EAB , ἴση τῇ EZB , εἶναι ὁμοίως ἴση τῇ OHG , ἡ γωνία $\Delta\text{AE} = \Delta\text{OE} = \Gamma\text{HZ}$, καὶ ἡ γωνία $\Delta\text{AB} = \Delta\text{GB} = \text{OHZ}$ · λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὑποῖαι σχηματίζουν τὴν σερεάν γωνίαν Λ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν σερεάν γωνίαν H , ἡ καὶ ἑκάστη μὲ τὴν καθ᾽ ἑμῶν· ἄλλως· εὐκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ διάταξις τῶν διαφέρει εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην· λοιπὸν 1.^{ον} αἱ δύο σερεαὶ γωνίαι Λ καὶ H εἶναι συμμετρικαὶ ἢ μία τῆς ἄλλης (23, 5).

Ὡς φαντασθῶμεν τώρα δύο διαγωνίους EF , AH , ἡγμένους ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφᾶς· ἐπειδὴ AE εἶναι ἴση καὶ παραλλήλος τῇ GH , τὸ σχῆμα AEHG εἶναι παραλληλόγραμμον· λοιπὸν αἱ διαγώνιοι EF , AH , τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Ὁμοίως θέλωμεν δεῖξει ὅτι ἡ διαγώνιος EF καὶ μία ἄλλη ΔZ τέμνονται ὡσαύτως εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν 2.^{ον} αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη, εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν ἣτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἐπίπεδον $\text{B}\Delta\text{OZ}$, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι παραλλήλων κόψεων BZ , ΔO , διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον AH εἰς δύο πρίσματα τριγωνικὰ $\text{AB}\Delta\text{O}\text{EZ}$, $\text{HOZB}\Gamma\Delta$, συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου. σγ. 207.

Κατὰ πρῶτον τὰ δύο ταῦτα σερεὰ εἶναι πρίσματα· διότι τὰ τριγωνα $\text{AB}\Delta$, EZO , ἔχοντα τὰς πλευράς τῶν ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι ἴσα, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν

αὶ παράπλευροι ἔδραι $ABZE$, $ΑΔΘΕ$, $ΒΔΘΖ$, εἶναι παραλληλόγραμμα· λοιπὸν τὸ στερεὸν $ΑΒΔΘΕΖ$ εἶναι πρίσμα· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ στερεὸν $ΗΘΖΒΓΔ$ · λέγω τώρα ὅτι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου.

Επὶ τῆς βάσεως $ΑΒΔ$ ἅς γίνῃ τὸ πρίσμα $ΑΒΔΕΖ'Θ'$ τὸ ὁποῖον νὰ ἦναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος $ΑΒΔΕΖΘ$. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρό. 2) τὸ ἐπίπεδον $ΑΒΖ'Ε'$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον $ΑΒΖΕ$, καὶ τὸ ἐπίπεδον $ΑΔΘ'Ε'$ ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον $ΑΔΘΕ$ · ἀλλ' ἡ σύγκαισις τοῦ πρίσματος $ΗΘΖΒΓΔ$ μὲ τὸ πρίσμα $ΑΒΔΘΕΖ'$, δεικνύει ὅτι ἡ βᾶσις $ΗΘΖ$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $ΑΒΔ$ · τὸ παραλληλόγραμμον $ΗΘΔΓ$, ἴσον μὲ τὸ $ΑΒΖΕ$, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ $ΑΒΖ'Ε'$, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον $ΗΖΒΓ$, ἴσον μὲ τὸ $ΑΔΘΕ$, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ $ΑΔΘ'Ε'$ · λοιπὸν τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὅποια σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν $Η$ εἰς τὸ πρίσμα $ΗΘΖΒΓΔ$, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὅποια σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν $Α$ εἰς τὸ πρίσμα $ΑΒΔΘΕΖ'$ · τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν· ἄλλως εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα· λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρό. 3), καὶ ἡμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσιν. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα $ΑΒΔΘΕΖ'$ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος $ΑΒΔΘΕΖ$ · λοιπὸν καὶ τὸ πρίσμα $ΗΘΖΒΓΔ$, εἶναι ὡσαύτως τὸ συμμετρικὸν τοῦ $ΑΒΔΘΕΖ$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Α Η Μ Μ Α.

Εἰς κάθε πρίσμα $ΑΒΓΙ$, αἱ γινόμεναι τομαὶ $ΝΟΠΚΡ$ $ΣΤΦΧΨ$ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι πολύγωνα ἴσα. σχ. 201.

Διότι αἱ πλευραὶ $ΝΟ$, $ΣΤ$, εἶναι παράλληλοι, ὥς κοινὰ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου $ΑΒΗΖ$ · αἱ ἰδίαι πλευραὶ $ΝΟ$, $ΣΤ$ περιέχονται μεταξύ τῶν παραλλήλων $ΝΣ$, $ΟΤ$ αἵτινες εἶναι πλευραὶ τοῦ πρίσματος· λοι-

τὸν ΝΟ εἶναι ἴση τῇ ΣΤ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΟΠ, ΠΚ, ΚΡ, κ. τ. λ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΤΦ, ΦΧ, ΧΨ κ.τ.λ. τῆς τομῆς ΣΤΦΧΨ. Ἀλλως ἐπειδὴ αἱ ἴσαι πλευραὶ εἶναι καὶ παράλληλοι, ἴπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΝΟΠ, ΟΠΚ, κ. τ. λ. τῆς πρώτης τομῆς, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΣΤΦ, ΤΦΧ, κ.τ.λ. τῆς δευτέρας. Λοιπὸν αἱ δύο τομαὶ ΝΟΠΚΡ, ΣΤΦΧΨ, εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Πόρισμα. Κάθε τομὴ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν τὴν βάση.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Τὰ δύο συμμετρικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ, ΒΓΔΖΗΘ, εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 208.

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Ζ ἄς ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα Βαδγ, Ζεθὴ κάθετα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΖ, τὰ ὁποῖα ἀναγκαστοῦν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος εἰς α, δ, γ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο εἰς ε, θ, η, τὰς τρεῖς ἄλλας πλευρὰς ΑΕ, ΔΘ, ΓΗ τοῦ ἰδίου παραλληλεπίπεδου· αἱ τομαὶ Βαδγ, Ζεθὴ εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα. Αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι, ὡς τομαὶ ὑπὸ ἐπικέδων καθέτων εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ὁπομένως παραλλήλων (πρό. γ)' εἶναι παραλληλόγραμμα, διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ τῆς αὐτῆς τομῆς αβ, δγ, εἶναι αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐκπέδων ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐκπίπεδου.

Διὰ λόγον παρόμοιον, τὸ σχῆμα Βαεζ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι παράπλευροι ἴδραι ΒΖηγ, γδθη, αδθε, τοῦ στεροῦ ΒαδγΖεθὴ· λοιπὸν τὸ στερόν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὁρ. 4)' καὶ τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι ὀρθόν, διότι ἡ πλευρὰ ΒΖ εἶναι κάθετὸς εἰς τὸ ἐκπίπεδον τῆς βάσεως.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τοῦ ἐπιπέδου $BZ\Theta\Delta$ μοιρασθῇ τὸ ὀρθὸν πρίσμα $B\Theta$ εἰς δύο τριγωνικὰ ὀρθὰ πρίσματα $\alpha B\delta\epsilon Z\theta$, $B\delta\gamma Z\theta\eta$ · λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα $AB\Delta E Z\Theta$, θελεῖ ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ τριγωνικὸν ὀρθὸν $\alpha\beta\delta\epsilon Z\theta$.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ἔχουν κοινὸν τὸ στερεὸν $AB\Delta\theta\epsilon Z$, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη, δηλαδὴ, τὰ στερεὰ $B\alpha A\Delta\delta$, $Z\epsilon E\Theta\theta$ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των.

Τώρα, ἐξ αἰτίας τῶν παραλληλογράμμων $ABZE$, αBZe , αἱ πλευραὶ AE , αe , ἴσαι μετὰ τὴν παράλληλόν των BZ , εἶναι καὶ μεταξὺ των ἴσαι· οὕτω, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κοινοῦ μέρους Ae , μένει $A\alpha = Ee$. Ομοίως δείξομεν ὅτι $\Delta\delta = \Theta\theta$.

Ἦδη, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο στερεῶν $B\alpha A\Delta\delta$, $Z\epsilon E\Theta\theta$, ἅς θέσωμεν τὴν βάσιν $Z\epsilon\theta$ ἐπὶ τῆς ἴσης μετὰ αὐτὴν $B\alpha\delta$ · τότε ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ e πίπτει εἰς α , καὶ ἡ θ εἰς δ , αἱ πλευραὶ eE , $\Theta\theta$, θέλουν πέσει ἐπὶ τῶν ἴσων μετὰ αὐτὰς αA , $\Delta\delta$, διότι εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον $B\alpha\delta$ · λοιπὸν τὰ δύο στερεὰ περὶ τῶν ὁμοίων ὁ λόγος κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει τὸ $\epsilon\eta$ μετὰ τὸ ἄλλο· λοιπὸν τὸ πλάγιον πρίσμα $BA\Delta ZE\Theta$ ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ ὀρθὸν $B\alpha\delta Z\epsilon\theta$.

Μετὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θέλομεν δεῖξαι ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα $BA\Gamma Z\Theta\eta$ ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ ὀρθὸν $B\delta\gamma Z\theta\eta$. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα $B\alpha\delta Z\epsilon\theta$, $B\delta\gamma Z\theta\eta$ εἶναι ἴσα μεταξὺ των, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος BZ καὶ αἱ βάσεις των $B\alpha\delta$, $B\delta\gamma$ εἶναι ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου (πρόβ. 3. πρό.). Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα $BA\Delta ZE\Theta$, $BA\Gamma Z\Theta\eta$, ἰσοδύναμα μετὰ ἴσα πρίσματα, εἶναι καὶ μεταξὺ των ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα $AB\Delta\Theta EZ$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου $A\eta$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς στερεῆς γωνίας A , μετὰς αὐτὰς κορυφαίαι AB , AD , AE κατασκευαζομένου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν δύο παραλληλεπίπεδα $ΑΗ$, $ΑΛ$, ἔχουν μίαν κοινὴν βάσιν $ΑΒΓΔ$, καὶ αἱ ἄνω ἐσῆεις των $ΕΖΗΘ$, $ΙΚ'ΑΜ$, περιέχωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων $ΕΚ'$, $ΘΛ$, τὰ δύο ταῦτα παραλληλεπίπεδα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των. σχ. 209.

Τρεῖς περιστάσεις δυνατόν νὰ ἀκολουθήσουν, καθὼς ἡ $ΕΙ$ εἶναι μείζων, μικρότερη ἢ ἴση τῇ $ΕΖ$: πλὴν ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας: καὶ κατὰ πρῶτον λέγω ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $ΑΕΙΔΘΜ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριγωνικὸν $ΒΖΚ'ΓΗΛ$.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ $ΑΕ$ εἶναι παράλληλος τῇ $ΒΖ$ καὶ ἡ $ΘΕ$ τῇ $ΗΖ$, ἡ γωνία $ΑΕΙ = ΒΖΚ'$, $ΘΕΙ = ΗΖΚ'$, καὶ $ΘΕΛ = ΗΖΒ$. Ἀπὸ τὰς ἑξ' ταύτῃς γωνίας αἱ τρεῖς πρῶται σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν $Ε$, αἱ τρεῖς ἄλλαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν $Ζ$: λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ καθε μίᾳ μὲ τὴν καθε μίαν, καὶ ὁμοίως διατεταγμέναι, ἔπεται ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι $Ε$ καὶ $Ζ$ εἶναι ἴσαι. Ἡδὴ, ἐὰν τεθῇ τὸ πρίσμα $ΑΕΜ$ ἐπὶ τοῦ πρίσματος $ΒΖΛ$, καὶ κατὰ πρῶτον ἡ βᾶσις $ΑΕΙ$ ἐπὶ τῆς βᾶσεως $ΒΖΚ$, αἱ δύο αὗται ἐσῆεις ὡς ἴσαι θέλουν ἐφαρμόσει· καὶ ἐπειδὴ ἡ στερεὰ γωνία $Ε$ εἶναι ἴση τῇ στερεᾷ γωνίᾳ $Ζ$, ἡ πλευρὰ $ΕΘ$ θέλει πίσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν $ΖΗ$: ἀλλὰ δὲν εἶναι χρεῖα περισσότερον διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δύο πρίσματα θέλουν ἐφαρμόσει καθ' ὅλην των τὴν ἑκτασιν· διότι ἡ βᾶσις $ΑΕΙ$ καὶ ἡ κόψις $ΕΘ$ προσδιορίζουν τὸ πρίσμα $ΑΕΜ$, ὡς ἡ βᾶσις $ΒΖΚ'$ καὶ ἡ κόψις $ΖΗ$ προσδιορίζουν τὸ πρίσμα $ΒΖΛ$ (πρό. 3): λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τὸ στερεὸν $ΑΛ$ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα $ΑΕΜ$, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον $ΑΙΛ$ · καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸ αὐτὸ

τμητὸν $\Lambda\Lambda$ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα $\Delta\Gamma\Lambda$, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον $\Delta\epsilon\eta$ · λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα $\Lambda\Gamma\Delta$, $\Delta\epsilon\eta$, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των.

Εἷς $\Lambda\beta\Gamma\Delta$ ἡ κοινὴ βάση. εἰς τὰ δύο παραλληλεπίπεδα $\Lambda\eta$, $\Lambda\Lambda'$ ἐπειδὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω βάσεις των $\epsilon\zeta\eta\Theta$, $\iota\kappa'\Lambda\mu$, θίλει εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Περιπλῖον αἱ πλευραὶ $\epsilon\zeta$ καὶ $\Lambda\beta$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς $\iota\kappa'$ καὶ $\Lambda\beta'$ λοιπὸν $\epsilon\zeta$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $\iota\kappa'$ · διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\eta\zeta$ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ $\Lambda\kappa'$. Ἀς προσεβληθῶσιν αἱ πλευραὶ $\epsilon\zeta$, $\eta\Theta$, καθὼς καὶ αἱ $\Lambda\kappa'$, $\iota\mu$, ἕως $\sigma\delta$ καὶ αἱ πρῶται καὶ αἱ δεύτεραι μὲ τὰς συναπαντήσεις των νὰ σχηματίσουν τὸ παραλληλόγραμμον $\nu\omicron\pi\kappa'$ · φανερόν εἶναι ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο θίλει ἰσοῦται μὲ καθε μίαν τῶν βάσεων $\epsilon\zeta\eta\Theta$, $\iota\kappa'\Lambda\mu$. Τώρα ἐὰν φαντασθῶμεν τρίτον παραλληλεπίπεδον τὸ ὅποιον μὲ τὴν αὐτὴν κάτω βάση $\Lambda\beta\Gamma\Delta$, νὰ ἔχη δι' ἄνω βάση $\nu\omicron\pi\kappa'$, τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον $\Lambda\eta$ (πρό. θ), διότι ἐν ᾧ ἔχουν τὴν αὐτὴν κάτω βάση, αἱ ἄνω βάσεις περιέχονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων $\eta\kappa$, $\zeta\eta$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον $\Lambda\Lambda'$ · λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα $\Lambda\eta$, $\Lambda\Lambda'$, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν αὐτὴν βάση καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ τριεφθῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ὅποιον νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἰσοδύναμον.

Εἰς ΛH τὸ προτεθὲν παραλληλεπίπεδον· ἐκ τῶν εἰρημῶν $\Lambda, \text{B}, \Gamma, \Delta$, ἄς ἀχθῶσιν αἱ $\text{AI}, \text{BK}', \Gamma\Lambda, \Delta\text{M}$ κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Οὕτω θέλῃ σχηματισθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον $\Lambda\Lambda'$ ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΛH , καὶ τοῦ ὁποῖου αἱ παράπλευροι ἴδραι $\Lambda\text{K}', \text{B}\Delta$, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ὀρθογώνια. (σχ. 210). Εἰάν λοιπὸν ἡ ἑάσις $\text{AB}\Gamma\Delta$ ᾗναι ὀρθογώνιον, $\Lambda\Lambda'$ θέλῃ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἰσοδύναμον μὲ τὸ προτεθὲν ΛH (σχ. 211). Ἀλλ' εἰάν $\text{AB}\Gamma\Delta$ δὲν ᾗναι ὀρθογώνιον, ἄς ἀχθῶσιν AO καὶ BN κάθετοι ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$, ἀκολουθῶς OK καὶ NP κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως· θέλῃ προκύψῃ τὸ στερεὸν ABNOIK'PK τὸ ὅποιον θέλῃ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ βᾶσις ABNO καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς IK'PK εἶναι ὀρθογώνια· αἱ παράπλευροι ἴδραι εἶναι ὁμοίως, διότι αἱ κόψεις AI, OK κ. τ. λ. εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· λοιπὸν τὸ στερεὸν $\Lambda\text{Π}$ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα $\Lambda\text{Π}, \Lambda\Lambda'$ ἡμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βᾶσιν ABK'I καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος AO · λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα· λοιπὸν τὸ παραλληλεπίπεδον ΛH , τὸ ὅποιον κατὰ πρῶτον ἐτριεφθῇ (σχ. 210 καὶ 211) εἰς ἰσοδύναμον παραλληλεπίπεδον $\Lambda\Lambda'$, ἰσοδυναμεῖ τώρα μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον $\Lambda\text{Π}$, ὕψος τοῦ ὁποῖου εἶναι AI καὶ βᾶσις ABNO ἰσοδύναμος μὲ τὴν βᾶσιν $\text{AB}\Gamma\Delta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΙ.
σχ. 212.

Ας ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, παραδείγματος χάριν, ὡς 15 πρὸς 8. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων ΑΙ θέλει περιέχει 8, καὶ ἐκ τῶν σιγμῶν τῆς διαιρέσεως χ, ψ, ω, κ. τ. λ. ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα τῆς βάσεως. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουν μοιράσει τὸ στερεὸν ΑΗ εἰς 15 μερικὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ὅποια ὅλα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα· βάσεις ἴσας, διότι κάθε τομὴ ὡς ΜΙΚ' Μ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλληλῶς τῆς βάσεως τοῦ ΑΒΓΔ, εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν τὴν βάση (πρό. 7)· ὕψη ἴσα, διότι ταῦτα τὰ ὕψη εἶναι αἱ ἰδίαι διαιρέσεις Αχ, χψ, χω, κ. τ. λ. Τώρα, ἀπὸ ταῦτα τὰ 15 ἴσα παραλληλεπίπεδα, ὁκτὼ περιέχονται εἰς ΑΛ· λοιπὸν τὸ στερεὸν ΑΗ εἶναι πρὸς τὸ στερεὸν ΑΛ ὡς 15 πρὸς 8, ἢ ἐν γένει ὡς τὸ ὕψος ΑΕ πρὸς τὸ ὕψος ΑΙ.

Δεύτερον, ἐὰν ὁ λόγος τοῦ ὕψους ΑΕ πρὸς ΑΙ δὲν ἡμπορῇ νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμῶν, λέγω ὅτι ἐπίσης θέλομεν ἔχει στερ. ΑΗ : στερ. ΑΛ :: ΑΕ : ΑΙ. Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ὑπάρχῃ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι στερ. ΑΗ : στερ. ΑΛ :: ΑΕ : ΑΟ. Ας διαιρεθῇ ΑΕ εἰς ἴσα μέρη ἑκάστων τῶν ὁποίων νὰ ᾖναι μικρότερον παρὰ ΟΙ· τοῦλάχιστον θέλει ὑπάρχει ἐν σημείον διαιρέσεως μ μεταξύ Ο καὶ Ι. Ες ὧ Π τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ὅποιον ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓΔ καὶ ὕψος Αμ· ἐπειδὴ τὰ ὕψη ΑΕ, Αμ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, θέλομεν ἔχει στερ. ΑΗ : Π :: ΑΕ : Αμ.

ΑΛΛ' ΕΞ ὑποθέσεως, $\text{σερ. } \Lambda\text{H} : \text{σερ. } \Lambda\Lambda :: \text{AE} : \text{AO}$ ἐν-
 ταῦθεν ἔπεται $\text{σερ. } \Lambda\Lambda : \Pi :: \text{AO} : \text{Am}$. Αλλὰ $\text{AO} > \text{Am}$
 ἔπρεπε λοιπὸν, διὰ τὴν ὑπάρχην ἢ ἀναλογία, τὸ σερεὸν
 $\Lambda\Lambda$ νὰ ᾖναι $> \Pi$. Αλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον: ἀδύ-
 νατον λοιπὸν ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας $\text{σερ. } \Lambda\text{H} :$
 $\text{σερ. } \Lambda\Lambda :: \text{AE} : \chi$ νὰ ᾖναι γραμμὴ μείζων τῆς ΛI . Δι'
 ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν δεῖξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος
 δὲν ἤμπορεῖ νὰ ᾖναι γραμμὴ ἐλάσσων τῆς ΛI · λοιπὸν
 εἶναι ἴση μὲ ΛI · λοιπὸν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα
 τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΛH , $\Lambda\text{K}'$, τὰ ὑποῖα
 ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος AE , εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ βάσεις
 των $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta$, ΛMNO . σλ. 213.

Ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο σερεᾶ τὸ ἐν πλησίον τοῦ ἄλλου,
 ὡς τὸ σχῆμα τὰ παριστάνει, ἃς προσεβληθῇ τὸ ἐπίπεδον
 $\text{ONK}'\Lambda$, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον $\Delta\Gamma\text{H}\Theta$ κατὰ
 τὴν $\Pi\text{K}'$ θέλει προκύψῃ τρίτον παραλληλεπίπεδον ΛK ,
 τὸ ὑποῖον ἤμπορεῖ νὰ συγκριθῇ μὲ ἕκαστον τῶν παραλλη-
 λεπέδων ΛH , $\Lambda\text{K}'$. Τὰ δύο σερεᾶ ΛH , ΛK , ἔχοντα
 τὴν αὐτὴν βάσιν $\Lambda\text{E}\Theta\Delta$, εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των
 ΛB , ΛO . παρομοίως τὰ δύο σερεᾶ ΛK , $\Lambda\text{K}'$, ἔχοντα τὴν
 αὐτὴν βάσιν $\Lambda\text{O}\Delta\text{E}$, εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των
 $\Lambda\Delta$, ΛM . Οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας,

$$\text{σερ. } \Lambda\text{H} : \text{σερ. } \Lambda\text{K} :: \Lambda\text{B} : \Lambda\text{O},$$

$$\text{σερ. } \Lambda\text{K} : \text{σερ. } \Lambda\text{K}' :: \Lambda\Delta : \Lambda\text{M}.$$

Πολλὰ πλάσιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ
 τάξιν, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολ-
 λαπλασιασὴν $\text{σερ. } \Lambda\text{K}$, θέλομεν ἔχει,

$$\text{σερ. } \Lambda\text{H} : \text{σερ. } \Lambda\text{K}' :: \Lambda\text{B} \times \Lambda\Delta : \Lambda\text{O} \times \Lambda\text{M}.$$

Αλλὰ $AB \times AD$ παριστάνει τὴν βάσιν $ABGD$, καὶ $AO \times AM$ τὴν βάσιν $AMNO$. λοιπὸν δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Δ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων των ἐπὶ τῶν ὕψων των, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν διαστάσεων των.

Διότι ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο στερεὰ $AH, A\Omega$, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐπιφανεῖαί των νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν BAE , ἃς προσκβληθῶσι τὰ ἀναγκαῖα ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου παραλληλεπιπέδου AK' τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον AH . Κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, θέλομεν ἔχει,

$$\text{στερ. } AH : \text{στερ. } AK' :: ABGD : AMNO.$$

Αλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα $AK', A\Omega$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $AMNO$, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των AE, AX · οὕτως ἔχομεν,

$$\text{στερ. } AK' : \text{στερ. } A\Omega :: AE : AX.$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολλαπλασιασθῆν στερ. AK' , θέλομεν ἔχει,

$$\text{στερ. } AH : \text{στερ. } A\Omega :: ABGD \times AE : AMNO \times AX.$$

Ἀντὶ τῶν βάσεων $ABGD$ καὶ $AMNO$, δυνάμεθα νὰ οἰκώμεν $AB \times AD$ καὶ $AO \times AM$, καὶ οὕτως ἔχομεν,

$$\text{στερ. } AH : \text{στερ. } A\Omega :: AB \times AD \times AE : AO \times AM \times AX.$$

Λοιπὸν δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των, κ. τ. λ. σχ. 213.

Σχόλιον. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του, ἢ τὸ γινόμενον

τῶν τριῶν του διασάσεων. Καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς ἀρχῆς
θελομεν ἐκτιμήσαι ὅλα τὰ ἄλλα σεριά.

Πρὸς κατὰληψιν τοῦτου τοῦ μέτρου πρέπει νὰ ἐνθυ-
μηθῶμεν ὅτι διὰ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων γραμμῶν,
ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν ὅσινες παριστάνουν
ταύτας τὰς γραμμὰς, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ
τὴν γραμμικὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἡμποροῦμεν νὰ λά-
βωμεν κατ' ἀρέσκειαν: τοῦτου τεθέντος, τὸ γινόμενον τῶν
τριῶν διασάσεων ἐνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀριθμὸς ὅστις
καθ' αὐτὸν δὲν σημαίνει τίποτε, καὶ ὅστις ἤθελέν εἶναι
διαφορετικὸς ἐὰν ἐλαμβάνετο μία ἄλλη γραμμικὴ μονάς.
Ἀλλ' ἐὰν ὁμοίως πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς διασάσεις
ἄλλου παραλληλεπιπέδου, ἐκτιμῶντες αὐτὰς μὲ τὴν αὐτὴν
γραμμικὴν μονάδα, τὰ δύο γινόμενα θέλουν εἶναι μετα-
ξύ των ὡς τὰ σεριά, καὶ θέλουν δύισαι τὴν ιδέαν τοῦ σχε-
τικοῦ μεγέθους των.

Τὸ μέγεθος ἐνὸς σεριοῦ, ὁ ὄγκος του ἢ ἡ ἔκτασις του
συνιστοῦν τὴν σεριότητά του, καὶ τὴν λέξιν ταύτην μάλι-
σα μεταχειρίζομεθα διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ μέτρον ἐνὸς σερι-
οῦ: οὕτω λέγομεν ὅτι ἡ σεριότης ἐνὸς παραλληλεπιπέδου
ὀρθογωνίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ
ὕψους τοῦ ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διασάσεων.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς διασάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μετα-
ξύ των, ἐὰν ἡ πλευρὰ ᾖναι 1, ἡ σεριότης θέλει εἶναι
 $1 \times 1 \times 1$ ἢ 1· ἐὰν ἡ πλευρὰ ᾖναι 2, ἡ σεριότης θέλει
εἶναι $2 \times 2 \times 2$, ἢ 8· ἐὰν δὲ 3, ἡ σεριότης θέλει εἶναι
 $3 \times 3 \times 3$, ἢ 27, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὅθεν ἐὰν αἱ πλευραὶ
τῶν κύβων ᾖναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ. τ. λ., οἱ κύβοι
ἢ αἱ σεριότητές των εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 8, 27, κ.τ.λ.
Ἐκ τούτου προῆλθε νὰ ὀνομάζεται εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν
κύβος ἐνὸς ἀριθμοῦ τὸ πρυκύπτον γινόμενον ἀπὸ τρεῖς
ἴσους πρᾶγοντας μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν·

Εάν ἐπροτείνετο νὰ κατασκευασθῇ κύβος διπλάσιος δεδομένου, ἔπρεπεν ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου νὰ ᾔηται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου ὡς ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα. Ἐώρα εὐκόλως εὐρίσκεται, διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2· πλὴν δὲν εἶναι δυνατόν ὡσαύτως νὰ εὐρεθῇ ἡ κυβικὴ του, τοῦλάχιστον διὰ τῶν ἀπλῶν ἐργασιῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι συνίστανται εἰς τὴν χρῆσιν εὐθεῶν γραμμῶν τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὰ δύο σημεία, καὶ κύκλων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι προσδιορισμένα.

Διὰ τὴν δυσκολίαν ταύτην τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ἐσχάθῃ περίφημον παρὰ τοῖς ἀρχαίοις γεωμέτραις, ὡς τὸ τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον εἶναι σχεδὸν τῆς αὐτῆς κατηγορίας. Ἀλλὰ πρὸ πολλοῦ εἶναι γνωστὰ αἱ λύσεις τῶν ὁποίων τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἶναι δεκτικά, αἱ ὁποῖαι ἐὰν καὶ δὲν φέρουσι τὴν ἀπλότητα τῶν κατασκευῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, δὲν εἶναι ὁμως ὀλιγώτερον ἀκριβεῖς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ σφαιρότης ἐνδὲς παραλληλεπίπεδου, καὶ ἐν γένει ἡ σφαιρότης ὑποιοιδήποτε πρίσματος, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι 1.^{ον} ὑποιοιδήποτε παραλληλεπίπεδον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ ἰσοδυνάμου βάσεως (πρό. κ ι)· ἀλλ' ἡ σφαιρότης τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν καὶ ἡ σφαιρότης ἐκείνου ἰσοῦται παρομοίως μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

2.^{ον} Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλεπίπεδου εἰς τὸν τρόπον ὡς νὰ ἔχη

τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρὸς Β). Ἀλλ' ἡ σερειότης τούτῃ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του, ἡμισείας τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

3.^{ον} Οποιονδήποτε πρίσμα ἔμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους ὅσα τρίγωνα εἶναι δυνατόν νὰ σχηματισθοῦν εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον χρησιμεύει εἰς αὐτὸ ὡς βάση. Ἀλλ' ἡ σερειότης ἐκάστου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ὕψους του· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισματῶν θάλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων τὰ ὅποια χρησιμεύουν εἰς αὐτὰ ὡς βάσεις, πολλαπλασιασθέν ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ὕψους· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισματῶν συγκροτεῖ τὸ ὅλον πρίσμα· ἄρα ἡ σερειότης ὁποιοῦδήποτε πολυγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα. Ἐὰν παραβληθῶσι δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τῶν ὕψων θάλαυν εἶναι ὡς αἱ βάσεις· λοιπὸν δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς αἱ βάσεις τῶν· διὰ λόγον παρόμοιον, δύο πρίσματα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς τὰ ὕψη των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΖ'.

Λ Η Μ Μ Λ.

Ἐὰν μία πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεώς της. σγ. 214.

1.^{ον} αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, . . . καὶ τὸ ὕψος ΣΟ, θέλουν διαιρεθῇ ἀναλόγως εἰς α, β, γ, . . . καὶ ο.

2.^{ον} ἡ τομὴ αβγδε θάλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ.

Διότι 1.^{ον} ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα $AB\Gamma$, $\alpha\beta\gamma$, εἶναι παράλληλα, αἱ κοιναὶ τομαῖ των AB , $\alpha\beta$, ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣAB , εἶναι παράλληλοι (10, 5)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΣAB , $\Sigma\alpha\beta$ εἶναι ὁμοία, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν $\Sigma A : \Sigma\alpha : : \Sigma B : \Sigma\beta$ · ὡσαύτως $\Sigma B : \Sigma\beta : : \Sigma\Gamma : \Sigma\gamma$ · καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΣA , ΣB , $\Sigma\Gamma$, κ. τ. λ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς α , β , γ , κ. τ. λ. Τὸ ὕψος ΣO τέμνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν σιγμὴν o · διότι BO καὶ bo εἶναι παράλληλοι, καὶ οὕτως $\Sigma O : \Sigma o : : \Sigma B : \Sigma\beta$.

2.^{ον} Ἐπειδὴ $\alpha\beta$ εἶναι παράλληλος τῇ AB , ἡ $\beta\gamma$ τῇ $B\Gamma$, ἡ γὰρ τῇ ΓA , κ. τ. λ., ἡ γωνία $\alpha\beta\gamma = AB\Gamma$, ἡ γωνία $\beta\gamma\delta = B\Gamma\Delta$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣAB , $\Sigma\alpha\beta$, ἔχομεν $AB : \alpha\beta : : \Sigma B : \Sigma\beta$ · καὶ ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Sigma B\Gamma$, $\Sigma\beta\gamma$, $\Sigma B : \Sigma\beta : : B\Gamma : \beta\gamma$ · λοιπὸν $AB : \alpha\beta : : B\Gamma : \beta\gamma$. Ὁσαύτως $B\Gamma : \beta\gamma : : \Gamma\Delta : \gamma\delta$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$, $\alpha\beta\gamma\delta e$, ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμῖαν μὲ τὴν καθ' ἑμῖαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· λοιπὸν εἶναι ὁμοία.

Πόρισμα. Ἐςωσαν $\Sigma AB\Gamma\Delta E$, $\Sigma\chi\psi\omega$, δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι κοινὴ, καὶ τὸ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἢ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἂν αἱ πυραμίδες αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, καὶ προκύψωσιν αἱ τομαὶ $\alpha\beta\gamma\delta e$, $\chi\psi\omega$ · λέγω ὅτι αἱ τομαὶ $\alpha\beta\gamma\delta e$, $\chi\psi\omega$, θέλουν εἶναι μετὰξὺ των ὡς αἱ βάσεις $AB\Gamma\Delta E$, $\chi\psi\omega$.

Διότι ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$, $\alpha\beta\gamma\delta e$, εἶναι ὁμοία, αἱ ἐπιφανείαι των εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν AB , $\alpha\beta$ · ἀλλὰ $AB : \alpha\beta : : \Sigma A : \Sigma\alpha$ · λοιπὸν $AB\Gamma\Delta E : \alpha\beta\gamma\delta e : : \Sigma A : \Sigma\alpha$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\chi\psi\omega : \chi\psi\omega : : \Sigma\chi : \Sigma\chi$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\alpha\beta\gamma\chi\psi\omega$ εἶναι ἐν μόνον ἐπίπεδον, ἔπεται

ὅτι AX καὶ $αχ$ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ $ΣΛΧ$. λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $ΣΛΧ$, $Σαχ$ εἶναι ὁμοία καὶ δίδουν $ΣΑ : Σα :$

$ΣΧ : Σχ$ ἐπομένως $ΧΨΩ : χψω :: ΣΑ : Σα$ καὶ ἐπειδὴ

ὡσαύτως $ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: ΣΑ : Σα$ ἄρα $ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: ΧΨΩ : χψω$ λοιπὸν αἱ τομαὶ $αβγδε$, $χψω$, εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ βάσεις $ΑΒΓΔΕ$, $ΧΨΩ$. Ἐὰν λοιπὸν αἱ ἐξαις $ΑΒΓΔΕ$, $ΧΨΩ$ ᾖναι ἰσοδύναμοι, αἱ γινόμεναι τομαὶ εἰς ἴσον ὕψος εἶναι παραμοίως ἰσοδύναμοι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΖ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες βάσεις ἔχουσαι ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐζωσαν $ΣΑΒΓ$, $σαβγ$ αἱ δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων αἱ βάσεις $ΑΒΓ$, $αβγ$, τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος $ΤΑ$. Ἐὰν οἱ πυραμίδες αὗται δὲν ᾖναι ἰσοδύναμοι, ἔζω $σαβγ$ ἢ μικροτέρα καὶ $ΑΧ$ τὸ ὕψος ἐνὸς πρίσματος, τὸ ὁποῖον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς βάσεως $ΑΒΓ$, ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν των (1). σχ. 215.

(1) Τοῦτο πάντοτε ἡμποροῦμαι νὰ ὑποθέσωμεν διότι δε παριστάνει α τὸν ἀριθμὸν τῶν φερῶν ὅπου εἰς προσδιορισμένης ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα· β τὸν ἀριθμὸν τῶν φερῶν ἐπεὶ ἡ αὐτὴ ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν δευτέραν τὴν ἐξ ὑποθέσεως μικροτέραν· α—β παριστάνει τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δύναμιθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ ἐξ ὧν παρέρχεται τὴν βάσιν καὶ ἐνὶ ἄλλου ὅροι προσδιορίζεται· τὰρα ἴαν δάσωμεν εἰς πρίσμα διὰ βάσιν τὴν βάσιν τῶν πυραμίδων, καὶ διὰ ὕψος τὸν δευτέρον παράγοντα, ὁ ὄγκος τοῦτου τοῦ πρίσματος εἶναι ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων. Ο. Μ.

Ας διαιρεθῇ τὸ κοινὸν ὕψος ΑΤ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ Αχ, καὶ ἐς α καὶ ἐν ταύτων τῶν μερῶν· ἐκ τῶν σιγμῶν τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους, ἃς διέλθωσιν ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων· αἱ γινόμεναι τομαὶ ἀπὸ καθέν τούτων τῶν ἐπιπέδων, θέλουσιν εἶναι ἰσοδύναμοι (πρό. 16. περ.), ὥς, παραδείγματος χάριν, ΔΕΖ καὶ δεζ, ΗΘΙ καὶ ηθι κ. τ. λ. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ, κ. τ. λ. λαμβανομένων ὡς βάσεων, ἃς κατασκευασθῶσιν ἐξωτερικὰ πρίσματα τὰ ὅποια νὰ ἔχουν διὰ κοψίς τὰ μέρη ΑΔ, ΔΗ, ΗΚ', κ. τ. λ. τῆς πλευρᾶς ΣΑ' ὡσαύτως ἐπὶ τῶν τριγώνων δεζ, ηθι, κλμ, κ. τ. λ. ὡς βάσεων λαμβανομένων, ἃς κατασκευασθῶσιν εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα πρίσματα ἐσωτερικὰ τὰ ὅποια νὰ ἔχουν διὰ κοψίς τὰ ἀντιστοιχοῦντα μέρη τῆς πλευρᾶς Σα' ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ πρίσματα θέλουσιν ἔχει διὰ κοινὸν ὕψος κ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισματίων, εἶναι μείζον ταύτης τῆς πυραμίδος· τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρισματίων εἶναι μικρότερον ταύτης τῆς πυραμίδος· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τοῦτους λόγους ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἄθροισμάτων τῶν πρισματίων πρέπει νὰ ἦναι μεγαλῆτέρα τῆς μεταξὺ τῶν δύο πυραμίδων.

Τώρα ἐὰν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὰς βάσεις ΑΒΓ, αβγ ἀπαντῶμεν τὸ δευτέρον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΔΕΖΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν δεζα, διότι αἱ βάσεις τῶν ΔΕΖ, δεζ, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος κ' διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἰσοδύναμα τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΗΘΙΚ' καὶ τὸ δευτέρον ἐσωτερικὸν ηθιδ, τὸ τέταρτον ἐξωτερικὸν καὶ τὸ τρίτον ἐσωτερικὸν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου τῶν πρώτων, καὶ τοῦ τελευταίου τῶν δευτέρων. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρίσματα, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου ΑΒΓΔ,

ἔχουν τὰ ἰσοδύναμά των εἰς τὰ ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρίσματα. Λοιπὸν τὸ πρίσμα $ABΓΔ$ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος $ΣΑΒΓ$ πρισμάτων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πυραμίδων· ἔπρεπε λοιπὸν τὸ πρίσμα $ABΓΔ$ νὰ ᾔηται μεγαλητέρον τοῦ πρίσματος $ABΓΧ$ · ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· διότι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βᾶσιν εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ ὕψη των $κ$ καὶ $Λχ$ · ἀλλὰ $κ$ εἶναι ἑλασσον τοῦ $ΛΧ$ · ἄρα τὸ πρίσμα $ABΓΔ$ εἶναι ἑλασσον τοῦ πρίσματος $ABΓΧ$ · λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀναχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες $ΣΑΒΓ$, σαβγ τῶν ὑποίων αἱ βᾶσεις εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὰ ὕψη ἴσα, δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἄρα ἰσοδυναμοῦσι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Η'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημέριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Ἐστω $ΣΑΒΓ$ τριγωνικὴ πυραμὶς, $ABΓΔΕΣ$ τριγωνικὸν πρίσμα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημέριον τοῦ πρίσματος.

Αφαιρεθεὶς ἀπὸ τὸ πρίσμα τῆς πυραμίδος $ΣΑΒΓ$, μένει τὸ στερεὸν $ΣΑΓΔΕ$ τὸ ὁποῖον ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι $Σ$ καὶ ἡ βᾶσις τὸ παραλληλόγραμμον $ΑΓΔΕ$ · ἃς ἐπιζευχῇ ἡ διαγώνιος $ΓΕ$, καὶ ἃς ἀχθῇ τὴ ἐπίπεδον $ΣΓΕ$ τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικάς $ΣΑΓΕ$, $ΣΔΓΕ$. Αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν κατεβαζομένην κάθετον ἀπὸ τὴν κορυφὴν $Σ$ ἐπὶ τοῦ

ἐπιπέδου $\Lambda\Gamma\Delta\epsilon$ ἔχουν βάσεις ἰσας, διότι τὰ τρίγωνα $\Lambda\Gamma\epsilon$, $\Delta\Gamma\epsilon$, εἶναι τὰ δύο ἡμίσεια τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες $\Sigma\Lambda\Gamma\epsilon$, $\Sigma\Delta\Gamma\epsilon$, εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξὺ τῶν· ἀλλ' ἡ πυραμὶς $\Sigma\Delta\Gamma\epsilon$ καὶ ἡ πυραμὶς $\Sigma\Lambda\beta\Gamma$ ἔχουν βάσεις ἰσας $\Lambda\beta\Gamma$, $\Delta\epsilon\zeta$ · ἔχουν ὁμοίως τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων $\Lambda\beta\Gamma$, $\Delta\epsilon\zeta$. λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες $\Sigma\Lambda\beta\Gamma$, $\Sigma\Delta\Gamma\epsilon$ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἀλλ' ἀπεδείχθη δτι ἡ πυραμὶς $\Sigma\Delta\Gamma\epsilon$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα $\Sigma\Lambda\Gamma\epsilon$ · λοιπὸν αἱ τρεῖς πυραμίδες $\Sigma\Lambda\beta\Gamma$, $\Sigma\Delta\Gamma\epsilon$, $\Sigma\Lambda\Gamma\epsilon$ αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ πρίσμα $\Lambda\beta\Delta$ εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξὺ τῶν. λοιπὸν ἡ πυραμὶς $\Sigma\Lambda\beta\Gamma$ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος $\Lambda\beta\Delta$ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα. Ἡ σιρεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τοῦ ὕψους της.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΘ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε πυραμὶς $\Sigma\Lambda\beta\Gamma\Delta\epsilon$ ἔχει μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της $\Lambda\beta\Gamma\Delta\epsilon$ ἐπὶ τοῦ ὕψους της $\Delta\omicron$. σχ. 214.

Διότι εἰάν διὰ τῶν διαγωνίων $\epsilon\beta$, $\epsilon\Gamma$ διελθῶσι τὰ ἐπιπίδα $\Sigma\epsilon\beta$, $\Sigma\epsilon\Gamma$, ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma\Lambda\beta\Gamma\Delta\epsilon$, θέλει μοιρασθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι ὅλαι θέλουν ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος $\Sigma\omicron$. Ἀλλὰ, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ἐκάστη τούτων μετρεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον κάθε μιᾶς τῶν βάσεων $\Lambda\beta\epsilon$, $\beta\Gamma\epsilon$, $\Gamma\Delta\epsilon$, ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους της $\Sigma\omicron$ · λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἢ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma\Lambda\beta\Gamma\Delta\epsilon$ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων $\Lambda\beta\epsilon$, $\beta\Gamma\epsilon$, $\Gamma\Delta\epsilon$ ἢ τὸ πολύγωνον $\Lambda\beta\Gamma\Delta\epsilon$, πολλαπλασιασθὲν

ἐπὶ τῷ $\Sigma\Theta$ · λοιπὸν κάθε πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὸ τρίτημόριον τοῦ γινόμενου τῆς βάσεως τῆς ἐπὶ τοῦ ὕψους τῆς.

Πόρισμα Α'. Κάθε πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτημόριον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Πόρισμα Β'. Δύο πυραμίδες τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο πυραμίδες τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν σφαιρότητα κάθε πολυέδρου σώματος ἀναλύοντες το εἰς πυραμίδας, καὶ ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἡμπορεῖ νὰ γένη κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ὁ ἀπλούστερος συνίσταται εἰς τὸ νὰ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς αὐτῆς σφαιρῆς γωνίας, ἢ, τὸ ὁπῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ ἐκθῇ ἡ κορυφὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σφαιρῆς γωνίας μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἄλλων σφαιρῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου· τότε θέλουσι προκύψει τύποι μερικαὶ πυραμίδες ὅσας ἔδρας ἔχει τὸ πολυέδρον, ἐκτὸς ἐκείνων αἱ ὅποιαὶ σχηματίζουν τὴν σφαιρὴν γωνίαν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀναχωροῦσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Δύο συμμετρικὰ πολυέδρα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των ἢ ἴσα κατὰ τὴν σφαιρότητα.

Διότι 1.^{ον} δύο τριγωνικαὶ συμμετρικαὶ πυραμίδες, ὡς $\Sigma\Delta\Gamma$, $\Gamma\Lambda\Gamma$ ἔχουν κοινὸν μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως $\Delta\Gamma$ ἐπὶ τοῦ τρίτημορίου τοῦ ὕψους $\Sigma\Theta$ ἢ $\Gamma\Theta$ · λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των. σχ. 202.

2.^{ον} Ἐὰν καθ' ὅποιονδήποτε τρόπον μοιρασθῇ ἓν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, τὸ ἄλλο πολυέδρον ἡμπορεῖ ὡσαύτως νὰ μοιρασθῇ εἰς συμμετρικὰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Τώρα αἱ συμμετρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι ἢ καθὲ μίᾳ μὲ τὴν

κάθε μίαν· λοιπὸν τὰ ὅλα πολυέδρα θαλοὺν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξὺ των ἢ ἴσα κατὰ τὴν στέρεότητα.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη φαίνεται ὅτι προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὴν Β' πρότασιν, ὅπου δεικνύεται ὅτι εἰς δύο συμμετρικὰ πολυέδρα, ὅλ' αὐτὰ συζυγῆ μέρη τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα μὲ τὰ συζυγῆ μέρη τοῦ ἄλλου· πλὴν δὲν ἦτον ὀλιγώτερον ἀναγκαῖον νὰ ἀποδειχθῇ μὲ τρόπον ἀκριβῆ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΑ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς βάσεώς της, ὁ ἀναπομένων κορμὸς ἀφαιρεθείσης τῆς μικρᾶς πυραμίδος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων κοινὸν μὲν ὕψος ἔθελον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, αἱ δὲ ἡ κάτω βᾶσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βᾶσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μίση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων.

Εἰς τὴν ΣΑΒΓΔΕ μία πυραμὶς ἣ ὁποία ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεως· εἰς τὴν ΤΖΗΘ μία τριγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ βᾶσις καὶ τὸ ὕψος εἴπωσαν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα μὲ τὰ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ. Ἡμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν τὰς δύο βάσεις κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· καὶ τότε τὸ ἐπίπεδον αβδ προεκβαλλόμενον θίλει προσδιορίσει εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα μίαν τομὴν ζηθ ἀπέχουσαν τὸ αὐτὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ κοινὸν ἐπίπεδον τῶν βάσεων· ὅθεν ἔπεται ὅτι ἡ τομὴ ζηθ εἶναι πρὸς τὴν τομὴν αβδ, ὡς ἡ βᾶσις ΖΗΘ πρὸς τὴν βᾶσιν ΑΒΑ (πρόβ. 16)* καὶ ἐπειδὴ αἱ βᾶσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, ἔπεται ὅτι καὶ αἱ τομαὶ εἶναι παρεμφερεῖς ἰσοδύναμοι. Αἱ πυραμίδες λοιπὸν Σαβγδε, Τζηθ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσιν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βᾶσεις ἰσοδύναμους. Αἱ ὅλαι πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, ΤΖΗΘ, εἶναι ἰσοδύναμοι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν οἱ κορμοὶ ΑΒΓΔθβ,

$ZH\Theta\zeta\eta$, είναι ισοδύναμοι, και επομένως αρκεί νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν διὰ τὸν κορμὸν τριγωνικῆς πυραμίδος. σχ. 217.

Ἐξω $ZH\Theta\zeta\eta$ κορμὸς τριγωνικῆς πύραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις: διὰ τῶν τριῶν σημείων Z, η, Θ , ἃς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον $Z\eta\Theta$, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν κορμὸν τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα $\eta ZH\Theta$. Ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν κάτω βάσιν $ZH\Theta$ τοῦ κορμοῦ, διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφή ἡ εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄνω βάσεως $\zeta\eta\theta$. σχ. 218.

Ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἡ πυραμὶς, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς $\eta\zeta\theta Z$, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι η καὶ ἡ βάσις $\zeta\theta Z$. Διὰ τῶν τριῶν σημείων ζ, η, Θ ἃς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον $\zeta\eta\Theta$, τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς $\eta Z\zeta\Theta$, $\eta\zeta\theta\Theta$. Ἡ τελευταία αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν ἄνω βάσιν $\eta\zeta\theta$ τοῦ κορμοῦ, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ ἰδίου, ἐπειδὴ ἡ κορυφή τῆς Θ ἀνήκει εἰς τὴν κάτω βάσιν: οὕτως ἔχομεν δύο τῶν τριῶν πυραμίδων αἵτινες πρέπει νὰ συγκροτήσουν τὸν κορμὸν.

Μένει νὰ θεωρήσωμεν τὴν τρίτην $\eta Z\zeta\Theta$: τώρα, ἐὰν ἄξωμεν $\eta K'$ παράλληλον τῇ ζZ , καὶ φαντασθῶμεν νέαν πυραμίδα $\zeta Z\Theta K'$, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι K' καὶ ἡ βάσις $Z\zeta\Theta$, αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουσι ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν $Z\zeta\Theta$. θέλουσι ἔχει ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ η καὶ K' εὐρίσκονται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς $\eta K'$ παραλλήλου τῇ $Z\zeta$, καὶ επομένως παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, καὶ τὰ σημεῖα εὐθείας παραλλήλου ἐνὸς ἐπιπέδου ἰσάκεις ἀπέχουσιν ἀπ' αὐτοῦ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται πυραμίδες εἶναι ισοδύναμοι. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς $\zeta Z K'\Theta$ ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα τὴν κορυφήν τῆς εἰς ζ , καὶ οὕτως θέλει ἔχει τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ· ὅσον διὰ τὴν βάσιν τῆς $ZK'\Theta$, λόγῳ ὅτι εἶναι μισὴ ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων $ZH\Theta$, $\zeta\eta\theta$.

Τῶ ὄντι τὰ τρίγωνα ZOK' , $\zeta\eta\theta$, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην $\angle\alpha$, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην $ZK' = \zeta\eta$. ἔχομεν λοιπὸν (24, 3) $ZOK' : \zeta\eta\theta :: ZO : \zeta\theta$. ἔχομεν ὡσαύτως $Z\eta\theta : ZOK' :: ZH : ZK'$ ἢ $\zeta\epsilon$. Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα $Z\eta\theta$, $\zeta\eta\theta$, διδουν $ZH : \zeta\eta :: ZO : \zeta\theta$. λοιπὸν $Z\eta\theta : ZOK' :: ZOK' : \zeta\eta\theta$ καὶ οὕτως ἡ ῥάσις ZOK' εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων $Z\eta\theta$, $\zeta\eta\theta$. Ἀκριπὲν κορυφὴς τριγωνικῆς πυραμίδος, μὲ παραλλήλους βάσεις, ἰσοδυναμεῖ μὲ τρεῖς πυραμίδας, τῶν ὁποίων κοινὸν μὲν ὕψος εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κορυμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ κάτω βάση τοῦ κορυμοῦ, ἡ ἄνω βάση τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τοῦτων βάσεων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν τριγωνικὸν πρίσμα τοῦ ὁποίου $AB\Gamma$ εἶναι ἡ βάση τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου $\Delta E\Xi$ κλίνοντος (1) πρὸς ταύτην τὴν βάση, τὸ προκύπτον στερεὸν ἀπὸ ταύτης τὴν τομὴν $\Lambda B\Gamma\Delta E\Xi$, θάλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι Δ , E , Ξ , καὶ βάσεις κοινὴ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ σχ. 216.

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Δ , Λ , Γ , ἃς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον $\Sigma\Lambda\Gamma$, τὸ ὁποῖον ἀφαιρᾷ ἀπὸ τοῦ κολοβῶν πρίσματος (*Prisme tronquée*) $\Lambda B\Gamma\Delta E\Xi$ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα $\Sigma\Lambda B\Gamma$: ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει διὰ βάσην $AB\Gamma$ καὶ κορυφὴν τὴν σιγμὴν Σ .

Ἀφαιρουμένης ταύτης τῆς πυραμίδος, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma\Lambda\Gamma\Delta E$, τῆς ὁποίας Σ εἶναι ἡ κορυφή καὶ

(1) Τὸ τέμνου ἐπίπεδον θεωρεῖται ὅτι κλίνει πρὸς τὴν βάση· διότι ἴαν δύο ἐκλίνονι ἄλλων δὲν ἦσαν παράλληλον, τὸ προκύπτον στερεὸν ἔδεικνεν εἶναι ἐπίσιον πρίσμα καὶ τοῦ σώματος τούτου ἡ ἐξέρχουσα νύ ἐκτιμώμενον τὴν στερότητα. Ο. ΚΙ.

ΑΓΔΕ ἡ βάσις. Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Σ, Ε, Γ ἄς ἀχθῇ προσέτι τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ΣΑΓΕ, ΣΓΔΕ.

Ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ, ἥτις ἔχει διὰ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΕΓ καὶ διὰ κορυφὴν τὴν σιγμὴν Σ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μιάν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἥτις ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν σιγμὴν Β. Διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΒΣ, ὡσα-παράλληλος ἐκάστης τῶν γραμμῶν ΑΕ, ΓΔ εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΓΕ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἡ ὅποια ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα διὰ βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν σιγμὴν Ε.

Ἡ τρίτη πυραμὶς ΣΓΔΕ ἡμπορεῖ νὰ τριεθῇ κατὰ πρῶτον εἰς ΑΣΓΔ· διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΣΓΔ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι ΑΕ εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΣΓΔ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ΑΣΓΔ· ἀκολουθῶς ἡ πυραμὶς ΑΣΓΔ ἡμπορεῖ νὰ τριεθῇ εἰς ΑΒΓΔ, διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΓΔ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Σ καὶ Ε κινῶνται ἐπὶ μιᾷ παράλλῳ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ, ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΣΓΔ, εἶναι ὡσαύτως ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΒΓΔ· ἀλλ' αὕτη ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα διὰ βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν σιγμὴν Δ.

Λοιπὸν τέλος τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀθροισμὰ τριῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουν διὰ κοινὴν βάσιν ΑΒΓ, καὶ αἱ κορυφαί των εἶναι διαδοχικῶς Δ, Ε, Σ.

Πόρισμα. Ἐὰν αἱ κορυφαί ΑΕ, ΒΣ, ΓΔ, ᾗναι κείμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, θέλουσιν εἶναι ἐνταύτῃ τὰ ὕψη τῶν τριῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ κολοβὸν πρίσμα· εἰς τρόπον ὥστε ἡ σκευή τοῦ κολοβοῦ

πρίσματος, θέλει εκφράζεται διὰ $\frac{1}{2} AB\Gamma \times AE + \frac{1}{2} AB\Gamma \times B\Xi + \frac{1}{2} AB\Gamma \times \Gamma\Delta$, ποσότης ἥτης ἄγεται εἰς $\frac{1}{2} AB\Gamma \times (AE + B\Xi + \Gamma\Delta)$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Γ',

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ὁμοίαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας, καὶ τὰς ὁμολόγους σφαιρὰς γωνίας ἴσας.

Κατὰ τὸν ὀρισμὸν, αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, εἶναι ὁμοίαι, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ, ΑΒΓ, ᾗναι ὁμοία μὲ τὰ δύο ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ ὁμοίως κείμενα, τοῦτέστιν ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΣ = ΔΕΤ, ἡ ΒΑΣ = ΕΔΤ, ἡ ΑΒΓ = ΔΕΖ, ἡ ΒΑΓ = ΕΔΖ, καὶ προσέτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ, ᾗναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΔΕΖ: τοῦτον τελέντος, λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν ὅλας τὰς ἑδρας ὁμοίας τὴν καθ' ἑκάστη μίαν μὲ τὴν καθ' ἑκάστη μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους σφαιρὰς γωνίας ἴσας. σχ. 203.

Ας ληφθῶσι ΒΗ = ΕΔ, ΒΘ = ΕΖ, ΒΙ = ΕΤ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΗΙ, ΙΘ. Ἡ πυραμὶς ΤΔΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν πυραμίδα ΙΗΒΘ· διότι, ἐπειδὴ αἱ πλευраὶ ΗΒ, ΒΘ, ἐλήφθησαν ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΗΒΘ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ, τὸ τρίγωνον ΗΒΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ· λοιπὸν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο πυραμίδων, ἡμποροῦμεν κατὰ πρόβ. τον νὰ θέσωμεν τὴν βάσιν ΔΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΗΒΘ· ἀκολουθῶς, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΔΤΕ κλίνει ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ ὥσον τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, φανερόν εἶναι ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΔΕΤ θέλει πᾶσαι ἀπροσδιορίζως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΣ. Ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΔΕΤ = ΗΒΙ, λοιπὸν ΕΤ θέλει πᾶσαι ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΒΙ· καὶ ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Τ, ἐφαρμόζουσι μὲ τὰ τέσσαρα Η, Β, Θ, Ι, καὶ δύο πολύεδρα τὰ ὁμοῖα

ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐφαρμύζουσιν· ἔπεται ὅτι καὶ ἡ πυραμὶς $\Gamma\Delta\epsilon\zeta$ ἐφαρμύζει μὲ τὴν πυραμίδα $\Gamma\eta\theta\omega$.

Τώρα, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων $\Delta\epsilon\zeta$, $\Gamma\eta\theta\omega$, ἔχουμεν τὴν γωνίαν $\beta\eta\theta = \epsilon\Delta\zeta = \beta\alpha\Gamma$ · λοιπὴν $\eta\theta$ εἶναι παράλληλος τῇ $\alpha\Gamma$. Διὰ λόγον παρόμοιον $\eta\iota$ εἶναι παράλληλος τῇ $\alpha\sigma$ · λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\eta\theta$ εἶναι παράλληλον τοῦ $\Sigma\alpha\Gamma$ (13, 5). Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον $\Gamma\eta\theta$, ἢ τὸ ἴσον του $\Gamma\Delta\zeta$, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ $\Sigma\alpha\Gamma$ (πρό. 15), καὶ τὸ τρίγωνον $\Gamma\theta\omega$, ἢ τὸ ἴσον του $\Gamma\epsilon\zeta$, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ $\Sigma\beta\epsilon$ · λοιπὸν αἱ δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες $\Sigma\alpha\beta\Gamma$, $\Gamma\Delta\epsilon\zeta$, ἔχουν τὰς τέσσαρας ἑδρας ὁμοίας τὴν καθ' ἑμὴν μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν· περιπλέον ἔχουσι καὶ τὰς ὁμολόγους σεριὰς γωνίας ἴσας.

Διότι ἡ σεριὰ γωνία ϵ ἐτίθη ἤδη ἐπὶ τῆς ὁμολόγου τῆς β , καὶ τὸ αὐτὸ ἠμποροῦσε νὰ γένη διὰ δύο ἄλλας ὁμολόγους σεριὰς γωνίας· πλὴν βλέπομεν ἀμέσως ὅτι δύο ὁμόλογοι σεριαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι Γ καὶ Σ , διότι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν καὶ ὁμοίως κειμένας.

Λοιπὸν, δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους σεριὰς γωνίας ἴσας.

Πόρισμα Α. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἰς τὰς δύο πυραμίδας δίδουν τὰς ἀναλογίας $\alpha\beta:\Delta\epsilon::\beta\Gamma:\epsilon\zeta::\alpha\Gamma:\Delta\zeta::\alpha\sigma:\Delta\tau::\Sigma\beta:\Gamma\epsilon::\Sigma\Gamma:\Gamma\zeta$ · λοιπὸν εἰς τὰς ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας, αἱ ὁμολόγοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.

Β. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι σεριαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε ἑδρῶν τῆς μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τῆς ὁμοίας πυραμίδος.

Γ'. Εάν τμήθῃ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου ΗΙΘ παραλλήλου μίᾳς τῶν ἰδρῶν ΣΑΓ, ἡ μερικὴ πυραμὶς ΒΗΙΘ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην πυραμίδα ΒΑΣΓ: διότι τὰ τρίγωνα ΒΗΙ, ΒΗΘ εἶναι ὁμοία μὲ τὰ τρίγωνα ΒΑΣ, ΒΑΓ, αὐτὰς ἐν μὲ τὸ καθεῖν, καὶ ὁμοίως κείμενα· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων τῶν εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὁμοίαι.

Δ'. Εν γένει, ἐὰν τμήθῃ ὅποιαδήποτε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδου αβγδε παραλλήλου τῆς βάσεως, ἡ μερικὴ πυραμὶς Σαβγδε θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην ΣΑΒΓΔΕ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὁμοίαι, καὶ, ἐπιζυχθεῖσάν τῶν ΑΓ, αγ, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πυραμίδα Σαβγ (πόρι. Γ').· λοιπὸν ἡ εἰγμὴ Σ προσδιορίζεται ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ ὡς ἡ εἰγμὴ Σ' ὡς πρὸς τὴν βάσιν αβγ (ὁρ. 18)· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε, εἶναι ὁμοίαι. σγ. 214.

Σχόλιον. Ἀντὶ τῶν πέντε δεδομένων τὰ ὅποια ἀπαιτοῦνται ἀπὸ τὸν ὀρισμὸν διὰ νὰ ᾖναι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ὁμοίαι, δυνατόν νὰ ἀντικατασταθῶσι πέντε ἄλλα, κατὰ διαφόρους συνδυασμοὺς, καὶ ἥθειον προκύψει τόσα θεωρήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἡμπορεῖ νὰ διακριθῇ τὸ ἀκόλουθον: Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὁμοίαι ὅταν ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Διότι, ἐὰν ἔχωμεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ:ΔΕ::ΒΓ:ΕΖ::ΑΓ:ΔΖ::ΑΣ:ΔΓ':::ΣΒ:ΓΕ::ΣΓ:ΓΖ, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι πέντε συνθέκας, τὰ τρίγωνα ΑΣΒ, ΑΒΓ θέλουσι εἶναι ὁμοία μὲ τὰ τρίγωνα ΔΕΤ, ΔΕΖ καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΣΒΓ θέλει εἶναι ὁμοιον μὲ τὸ ΓΕΖ· λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπιπέδαι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν τριεὴν γωνίαν Β, θέλουσι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν τριεὴν γωνίαν Ε; ἡ καθε

μία μὲ τὴν καθὲς μίαν· ἐκ τοῦ ὁποῖου ἐπεται ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων τῶν ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ οὕτως αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι. σγ. 203.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΔ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ὅμοια πολυέδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἐδρας ὅμοιας, καὶ τὰς ὁμολόγους ὑπερᾶς γωνίας ἴσας.

Ἐστω ΑΒΓΔΕ ἡ ἐκείνη τοῦ ἐνὸς πολυέδρου· ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο ὑπερῶν γωνιῶν, ἐκτός ταύτης τῆς βάσεως, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ', τῶν ὁποῶν ἡ κοινὴ βᾶσις εἶναι ΑΒΓ'. Ἐστωσαν εἰς τὸ ἄλλο πολυέδρον, αβγδε ἡ ὁμολόγος βᾶσις ἡ ὁμοία μὲ τὴν ΑΒΓΔΕ, μ καὶ ν αἱ ὁμολόγοι κορυφαὶ τῶν Μ καὶ Ν, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τῆς πυραμίδας μαβγ, ναβγ, ὁμοίας μὲ τὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ', ΝΑΒΓ'. Ἄγω κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ διαστήματα ΜΝ, μν, εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΒ, αβ. σγ. 119.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΜΑΒΓ', μαβγ, εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΜΑΓ', ΒΑΓ', εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων μαγ, βαγ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΝΑΒΓ', ναβγ, εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ', ΒΑΓ', εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ναγ, βαγ· λοιπὸν, ἐὰν αἱ πρῶται κλίσεις ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς δευτέρας, μένει ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ', ΜΑΓ' ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ναγ, μαγ. Ἀλλὰ, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν αὐτῶν πυραμίδων, τὸ τρίγωνον ΜΑΓ' εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ μαγ, καὶ τὸ τρίγωνον ΝΑΓ' ὅμοιον μὲ τὸ ναγ· λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΜΝΑΓ', μναγ, ἔχουν δύο ἴδρας ὁμοίας τὴν καθὲς μίαν μὲ τὴν καθὲς μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκως κλινούσας μεταξύ τῶν λοιπῶν

αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ὅμοιαι (πρό. 21), καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ τῶν δίδουν τὴν ἀναλογίαν $MN : μν :: AM : αμ$. Ἀλλως $AM : αμ :: AB : αβ$ λοιπὸν $MN : μν :: AB : αβ$.

Εἰς τὴν Π καὶ π δύο ἄλλαι ὁμολογοὶ κορυφαὶ τῶν αὐτῶν πολυέδρων, καὶ ὁμοίως θέλομεν ἔχει $PN : πν :: AB : αβ$, $PM : πμ :: AB : αβ$. Λοιπὸν $MN : μν :: PN : πν :: PM : πμ$. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον PNM τὸ ὁποῖον ἐνόνει τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφαὶ τοῦ ἐνὸς πολυέδρου εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον $πμν$ τὸ ὁποῖον ἐνόνει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφαὶ τοῦ ἄλλου πολυέδρου.

Εἰς τὴν προσέτι K καὶ $κ$ δύο ὁμολογοὶ κορυφαὶ, καὶ τὸ τρίγωνον PKN θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ $πκν$ · λέγω περιπλὸν ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων PKN , PMN , εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων $πκν$, $πμν$.

Διότι ἐὰν ἐνώσωμεν KM καὶ $κμ$, πάντοτε θελομεν ἔχει τὸ τρίγωνον KNM ὅμοιον μὲ τὸ $κνμ$, καὶ ἐπομένως τὴν γωνίαν KNM ἴσην μὲ τὴν $κνμ$. Ἀς φαντασθῶμεν εἰς N στερεὰν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας KNM , $KNΠ$, PNM , καὶ εἰς $ν$ στερεὰν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας $κνμ$, $κνπ$, $πνμ$ · ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ καθὲς μία μὲ τὴν καθὲς μίαν, ἐπεταὶ ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων PNK , PNM εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων τῶν $πνκ$, $πνμ$ · λοιπὸν, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα PNK , PNM , ᾗσαν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἰς τὴν ὁποίαν περίεσιν ᾗθελον εἶναι ἡ γωνία $KNM = KNΠ + PNM$, ᾗθελον εἶναι ὡσαύτως ἡ γωνία $κνμ = κνπ + πνμ$, καὶ τὰ δύο τρίγωνα $κνπ$, $πνμ$ ᾗθελον σχηματίζειν ἐν μόνον ἐπίπεδον.

Τὰ ἀποδειχθέντα ἔχουν χώραν, ὅποισι καὶ ἂν ᾖναι αἱ γωνίαι $M, N, Π, K$, περὶ αὐτὰς ἀλλομέναι μὲ τὰς ὁμολόγους $μ, ν, π, κ$.

Ας υποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐνὸς πολυέδρου εἶναι μοιρασμένη εἰς τρίγωνα $\Lambda\text{Β}\Gamma$, $\Lambda\Gamma\Delta$, $\text{Μ}\Pi\text{Ν}$, $\text{Ν}\Pi\text{Κ}$, κ. τ. λ. βλέπομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἄλλου πολυέδρου θέλει περιέχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma\delta$, $\mu\nu\pi$, $\nu\pi\kappa$, κ. τ. λ. ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων· καὶ ἔαν πολλὰ τρίγωνα, ὡς $\text{Μ}\Pi\text{Ν}$, $\text{Ν}\Pi\text{Κ}$, κ. τ. λ. ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἑδραν, καὶ εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὰ ὁμολόγα τῶν $\mu\pi\nu$, $\nu\pi\kappa$, κ. τ. λ. θέλει εὐρίσκονται παρῳκίως· εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Λοιπὸν καθε πολύγωνος ἑδρα εἰς τὸ ἐν πολυέδρον θέλει ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ὁμοίαν πολύγωνον ἑδραν εἰς τὸ ἄλλο πολυέδρον· λοιπὸν τὰ δύο πολυέδρα θέλει περιέχονται ὑπὸ τὴν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐπιπέδων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων. Ἄγω περὶ τὸν ὅτι αἱ ὁμολόγοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἔαν, φερ' εἰπεῖν, ἡ γωνία Ν σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας $\text{Κ}\text{Ν}\Pi$, $\Pi\text{Ν}\text{Μ}$, $\text{Μ}\text{Ν}\rho$, $\text{Κ}\text{Ν}\Lambda$ ἡ ὁμολόγος γωνία ν θέλει σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας $\kappa\nu\pi$, $\pi\nu\mu$, $\mu\nu\rho$, $\kappa\nu\lambda$. Τώρα, αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ καθε μία μὲ τὴν καθε μίαν, καὶ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐπιπέδων εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων τῶν· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς δυνάμεναι νὰ ἐπιτεθῶσι.

Λοιπὸν τίλος δύο ὁμοια πολυέδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἑδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας.

Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν προλαβούσαν ἀπόδειξιν ἔπεται ὅτι ἔαν, μὲ τέσσαρας κορυφὰς ἐνὸς πολυέδρου, σχηματισθῇ τριγωνικὴ πυραμὶς, καὶ μὲ τὰς τέσσαρας ὁμολόγους κορυφὰς ἐνὸς ὁμοίου πολυέδρου μία δευτέρα πυραμὶς, αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουν εἶναι ὁμοιαί· διότι θέλουν ἔχει τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους (πρό. 21. σχολ.).

Βλέπομεν ἐνταῦτῃ ὅτι δύο ὁμολόγοι διαγώνιοι, πρᾶ-δείγματὸς χάριν, $\text{Α}\text{Ν}$, $\alpha\nu$, εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ὁμολόγοι πλευραὶ $\text{Α}\text{Β}$, $\alpha\beta$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΕ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ὅμοια πολυέδρα ἢμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι νὰ ᾖναι ὅμοιαι ἢ καθε μίᾳ μὲ τὴν καθε μίαν, καὶ ὁμοίως κείμεναι.

Διότι εἶδομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων ἢμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων τῷ καθε ἓν μὲ τὸ καθε ἓν, καὶ ὁμοίως κείμενων. Ἀς θεωρήσωμεν ὅλα τὰ τρίγωνα τοῦ ἐνὸς πολυέδρου, ἐκτὸς ἐκείνων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν περιὰν γωνίαν Α, ὡς βάσεις τέσων τριγωνικῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων ἡ κορυφή εἶναι εἰς Α· αἱ πυραμίδες αὗται ὁμοῦ λαμβανόμεναι συγκριτοῦν τὸ πολυέδρον· ἂς μοιράσωμεν παρόμοιως τὸ ἄλλο πολυέδρον εἰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας α ὁμολόγοι τῇ Α· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἐνόνουσα πυραμὶς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ ἐνὸς πολυέδρου θέλει εἶναι ὅμοια μὲ τὴν πυραμίδα τὴν ἐνόνουσαν τὰς τέσσαρας ὁμολόγους τοῦ ἄλλου πολυέδρου. Λοιπὸν δύο ὅμοια πολυέδρα, κ. τ. λ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΖ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι ἐπεὶδὴ αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἡ μικροτέρα ἢμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας, ὥστε νὰ ἔχουν τὴν περιὰν γωνίαν Σ κοινὴν. Ἐντὸς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι, ἐπεὶδὴ αἱ ὁμολόγοι ἔδραι εἶναι ὅμοιαι (πρός 22), ἡ γωνία Σαβ εἶναι ἴση τῇ ΣΑΒ, καθὼς καὶ ἡ Σβγ τῇ ΣΒΓ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον αβγ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ (13, 5). Τούτου τελέντος, ἔστω ΣΟ ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ

τὴν καρτερὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\text{Β}\Gamma$, καὶ ὁ ἡ τετραγ. ὅρου αὕτη ἢ κάθετος συναπνντᾷ τὸ ἐπίπεδον $\alpha\beta\gamma$ κατὰ τὰ ἀποδείκνυντα (πρ. 15), θέλομεν ἔχει, $\Sigma\text{Ο}:\Sigma\alpha::\Sigma\Lambda:\Sigma\alpha$: $\Lambda\text{Β}:\alpha\beta$, καὶ ἐπὶ μὲνως,

$$\frac{1}{2}\Sigma\text{Ο}:\frac{1}{2}\Sigma\alpha::\Lambda\text{Β}:\alpha\beta,$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ βῆσεις $\Lambda\text{Β}\Gamma\Delta\text{Ε}$, $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$, εἶναι ὅμοια σχήματα, διὰ τοῦτο,

$$\Lambda\text{Β}\Gamma\Delta\text{Ε}:\alpha\beta\gamma\delta\epsilon::\Lambda\text{Β}:\alpha\beta.$$

Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν ὅρου ἐπὶ ὅρου, δίδει τὴν ἀναλογίαν,

$$\Lambda\text{Β}\Gamma\Delta\text{Ε}\times\frac{1}{2}\Sigma\text{Ο}:\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\times\frac{1}{2}\Sigma\alpha::\Lambda\text{Β}:\alpha\beta.$$

Τώρα, $\Lambda\text{Β}\Gamma\Delta\text{Ε}\times\frac{1}{2}\Sigma\text{Ο}$ εἶναι ἡ τετράτης τῆς πυραμίδος $\Sigma\Lambda\text{Β}\Gamma\Delta\text{Ε}$ (πρ. 18), καὶ $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\times\frac{1}{2}\Sigma\alpha$ εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος $\Sigma\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ λοιπὸν δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν. σχ. 214.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΖ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι δύο ὅμοια πολύεδρα ἡμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὅποῃαι νὰ ἦναι ὅμοιαι ἢ καθε μία μὲ τὴν καθε μίαν (πρ. 25). Τώρα αἱ δύο ὅμοιαι πυραμίδες $\Lambda\text{Π}\text{Ν}\text{Μ}$, $\alpha\pi\nu\mu$, εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν $\Lambda\text{Μ}$, $\alpha\mu$, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν $\Lambda\text{Β}$, $\alpha\beta$. Ὁ αὐτὸς λόγος ἔχει χώραν μεταξὺ δύο ἄλλων ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων πυραμίδων· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πυραμίδων αἱ ὅποῃαι συγκροτοῦν τὸ ἓν πολύεδρον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύεδρον, εἶναι πρὸς τὸ ἄλλο πολύεδρον, ὡς ὁ κύβος

μῆκος ὑποκείσθῃποτε πλευρᾶς τοῦ πρώτου εἶναι πρὸς τὴν κύβον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου.

Γενικὸν Σχόλιον.

Ἡμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἀλγεβρικῶν ὄρων, τοῦτέστι, μὲ τὸν πλέον σύντομον τρόπον, τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν ἀρχικῶν προτάσεων τούτου τοῦ βιβλίου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰς σφαιρότητας τῶν πολυέδρων.

Ἐστω B ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος, Y τὸ ὕψος τοῦ ἢ σφαιρότης τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι $B \times Y$ ἢ BY .

Ἐστω B ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος, Y τὸ ὕψος τῆς ἢ σφαιρότης τῆς πυραμίδος θέλει εἶναι $B \times \frac{1}{3} Y$, ἢ $Y \times \frac{1}{3} B$, ἢ $\frac{1}{3} BY$.

Ἐστω Y τὸ ὕψος κορμοῦ πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις, ἔστωσαν A καὶ B αἱ βάσεις τοῦ $\sqrt{(AB)}$ θέλει εἶναι μίᾳ μέσῃ ἀνάλογος μεταξὺ τούτων, καὶ ἡ σφαιρότης τοῦ κορμοῦ θέλει εἶναι $\frac{1}{3} Y (A + B + \sqrt{(AB)})$

Ἐστω B ἡ βάσις κορμοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, Y, Y', Y'' , τὰ ὕψη τῶν τριῶν ἄνω κορυφῶν τοῦ, ἡ σφαιρότης τοῦ κορυφοῦ πρίσματος θέλει εἶναι $\frac{1}{3} B (Y + Y' + Y'')$

Ἐστωσαν τέλος Π καὶ π αἱ σφαιρότητες δύο ὁμοίων πολυέδρων, A καὶ a δύο πλευραὶ ἢ δύο ὁμολογοὶ διαγώνιοι τούτων τῶν πολυέδρων, θέλει εἶναι $\Pi : \pi :: A : a$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

Η ΣΦΑΙΡΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. **Η** σφαῖρα εἶναι στερεὸν περατούμενον ἀπὸ καμπύλην ἐπιφανείαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἰσάκεις ἀπέχουσιν ἀπὸ ἑν ἐντὸς σημείου καλούμενον κέντρον.

Γεννᾶται δὲ ἡ σφαῖρα ἀπὸ τὴν περιστροφῆν ἡμικυκλίου ὡς τοῦ ΔΑΕ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ: διότι τὰ σημεῖα τῆς εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἀπὸ τὴν καμπύλην ΔΑΕ-γραφομένης ἐπιφανείας ἰσάκεις θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου Γ. σλ. 240.

Β΄. Ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς μίαν τυχμὴν τῆς ἐπιφανείας· διάμετρος δὲ ἡ ἄξων ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη γραμμὴ, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν ἐπιφανείαν περατομένη.

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διαμέτροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Γ΄. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 1) ὅτι κάθε τομὴ τῆς σφαίρας, ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος: τούτου τεθέντος, καλεῖται μέγιστος κύκλος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τομὴ· μικρὸς δὲ κύκλος ἡ μὴ διερχομένη.

Δ΄. Ἐπίπεδον ἄπτεται τῆς σφαίρας ὅταν ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχῃ μετὰ τὴν ἐπιφανείαν τῆς.

Ε΄. Πόλος ἐνὸς κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι ἐν σημείον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἰσάκεις ἀπέχον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τούτου τοῦ κύκλου. Θέλωμεν ἶδει (πρό. 6) ὅτι κάθε κύκλος, μέγιστος ἢ μικρὸς, ἔχει πάντοτε δύο πόλους.

Ζ'. Τρίγωνον σφαιρικὸν εἶναι μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Τὰ τόξα ταῦτα, τὰ ὅποια καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τριγώνου, πάντοτε ὑποτίθενται μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

Ζ'. Ἐν σφαιρικῶν τριγώνων ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ἰσοσκελές, ἰσόπλευρον, εἰς τὰς αὐτάς περιπτώσεις ὅπου καὶ ἔν εὐθύγραμμον.

Η'. Σφαιρικὸν πολύγωνον εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Θ'. Ἀτρακτος (Fuseau) εἶναι τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξύ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων αἱ ὁποῖοι τελειοῦν εἰς μίαν κοινὴν διάμετρον.

Ι'. Καλῶ σφῆνα ἢ ὀνυχά σφαιρικὸν (coîne, onglet sphérique) τὸ μέρος τοῦ σφαιροῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῶν αὐτῶν ἡμιμεγίστων κύκλων, καὶ εἰς τὸ ὅποιον ὁ ἀτρακτος χρησιμεύει ὡς βάσις.

ΙΑ'. Πυραμὶς σφαιρικὴ εἶναι τὸ μέρος τοῦ σφαιροῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξύ τῶν ἐπιπέδων μιᾶς σφαιρῆς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι εἰς τὸ κέντρον. II. Βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ἀποχωρίζον ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων.

ΙΒ'. Καλεῖται Ζώνη τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ ὅποιον περιέχεται μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης. Τὸ ἔν ἀπὸ αὐτὰ δυνατόν νὰ ἄπτεται τῆς σφαίρας, καὶ τότε ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΓ'. Ὑμῆμα σφαιρικὸν εἶναι τὸ μέρος τοῦ σφαιροῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι αἱ βάσεις τοῦ.

Τὸ ἐν ἀπὸ αὐτὰ δυνατόν νὰ ἀπτεται τῆς σφαίρας, καὶ τότε τὸ σφαιρικὸν τμήμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΔ'. Τὸ $\psi\psi$ σ. μιᾶς. ζώνης ἢ ἐνὸς τμήματος εἶναι τὸ ἀπόστημα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὅποια εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος. σχ. 220.

ΙΕ'. Ἐν ᾧ τὸ ἡμικύκλιον ΔΛΕ σρεφόμενον ὀλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γράφει τὴν σφαῖραν, κάθε κυκλικὸς τομεύς, ὡς ΔΓΖ ἢ ΖΓΘ γράφει σρερον τὸ ὅποιον καλεῖται σφαιρικὸς τομεύς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α:

Κάθε τομή τῆς σφαίρας, ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος.

Ἐστω ΛΜΒ ἡ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς τὴν σφαῖραν τομή, τὸ κέντρον τῆς ὁποίας σφαίρας εἶναι Γ. Ἀπὸ τὴν σιγμὴν Γ ἄς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΟ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΛΜΒ, καὶ διάφοροι γραμμαὶ ΓΜ, ΓΜ, εἰς διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης ΛΜΒ ἥτις περατόναι τὴν τομήν. σχ. 221.

Αἱ πλάγαι ΓΜ, ΓΜ, ΓΒ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας· ἰσάκως λοιπὸν ἀπέχουσι τῆς καθέτου ΓΟ (5, 5)· ὅλαι λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΟΜ, ΟΜ, ΟΒ εἶναι ἴσαι· ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ἥτις περατόναι τὴν τομήν, ἰσάκως ἀπέχουσι ἀπὸ ἐν ἐντὸς αὐτῆς σημείου Ο' ἡ καμπύλη λοιπὸν αὕτη εἶναι κύκλου περιφέρεια τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Ο' ἡ τομή λοιπὸν ΛΜΒ εἶναι κύκλος.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν ἡ τομή διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτίς της θέλει εἶναι ἡ τῆς σφαίρας· ὅλοι λοιπὸν οἱ μέγιστοι κύκλοι εἶναι ἴσοι μεταξὺ τῶν.

Β'. Δύο μέγιστοι κύκλοι πάντοτε εἰμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπειδὴ πρέπει νὰ εὕρεσκαται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πρώτου, καὶ ἐπὶ τοῦ

ἐπιπέδου τοῦ δευτέρου, ἀναγκαίως εἶναι ἀπὸ τῆς σημείας τῆς κοινῆς τομῆς τῶν· ἡ κοινὴ τῶν λοιπὸν τομῆ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· εἶναι λοιπὸν διάμετρος· ἀλλὰ καὶ διὰ μέτρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν κ.τ.λ.

Γ'. Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφανείαν τῆς εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἐάν, ἀφ' οὗ χωρίσωμεν τὰ δύο ἡμισφαίρια, θέσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως ἑστρόντες τὴν κυρτότητά των κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ δύο ἐπιφανεῖαι θέλουν ἐφαρμόζει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην· διότι ἄλλως ἂν ἔλθον ὑπάρχει σημεία ἀνισάκως ἀπέχοντα τοῦ κέντρου.

Δ'. Τὸ κέντρον ἐνὸς μικροῦ κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας· εὐρίσκονται ἐπὶ μιᾷ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου. σχ. 221.

Ε'. Οἱ μικροὶ κύκλοι τόσον εἶναι μικρότεροι, ὅσον περισσότερον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι ὅσον περισσότερον τὸ ἀπόστημα ΓΟ εἶναι μεγαλύτερον, τόσον περισσότερον ἢ χορδὴ ΑΒ εἶναι μικρότερα, διάμετρος τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΜΒ.

Ζ'. Δύο δεδομένων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, εἶναι δυνατόν νὰ διέλθῃ τύξον μεγίστου κύκλου· διότι τὰ δύο δεδομένα σημεία καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι τρία σημεία προσδιορίζοντα τὴν θέσιν ἐπιπέδου· ἐάν ὁμοίως τὰ δύο δεδομένα σημεία τύχῃ νὰ ἦναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, τότε τὰ δύο ταῦτα σημεία καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας, καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι δυνατόν νὰ διέλθωσι· διότι ἄπειρα ἐπίπεδα διὰ δύο σημείων δυνατόν νὰ διέλθωσι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Εἰς κάθε σφαιρικὴν τρίγωνον ΑΒΓ, ὅποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. σχ. 222.

Εξω Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθῆτωσαν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ ἐπίπεδα ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ, ταῦτα σχηματίζουν εἰς τὴν σιγμὴν Ο γωνίαν σφραῖαν, καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ, μετροῦνται ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τώρα, ἐκάστη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὴν σφραῖαν γωνίαν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (21, 5)· λοιπὸν ὅποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Ο πλέον σιμοτινὲς δρόμος ἀπὸ ἐν σημείου εἰς ἄλλο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον ἐνώνει τὰ δύο δεδομένα σημεία.

Εξω ΑΝΒ τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον ἐνώνει τὰ σημεία Α καὶ Β, καὶ ἐξω ἐκτὸς τούτου τοῦ τόξου, εἰ δυνατόν, Μ ἐν σημείον τῆς πλέον σιμοτινῆς γραμμῆς μεταξὺ Α καὶ Β. Διὰ τῆς σιγμῆς Μ ἔς ἐχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΜΑ, ΜΒ, καὶ ἄς ληθῇ ΒΝ—ΜΒ.

Κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα τὸ τόξον ΑΝΒ εἶναι σιμοτινώτερον τοῦ ΑΜ + ΜΒ· ἀφαιρέσει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ΒΝ—ΜΒ, μένει ΑΝ < ΑΜ. Τώρα τὸ διάστημα ἀπὸ Β εἰς Μ, εἴτε ταυτίζεται μὲ τὸ τόξον ΒΜ, ἢ εἶναι ὅποιαδήποτε ἄλλη γραμμὴ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάστημα ἀπὸ Β εἰς Ν· διότι σφραφόντες τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΒΜ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ Β, δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν σιγμὴν Μ εἰς τὴν σιγμὴν Ν, καὶ τότε ἡ πλέον σιμοτινὴ γραμμὴ ἀπὸ Μ εἰς Β, ὅποια καὶ ἂν ᾖναι, θέλει ταυτισθῇ μὲ τὴν πλέον σιμοτινὴν γραμμὴν ἀπὸ Ν εἰς Β· λοιπὸν οἱ δύο δρόμοι ἀπὸ Α εἰς Β, ἢ τῶν ὁποίων ὁ μὲν θίρεται διὰ Μ,

ὁ δὲ διὰ N , ἔχουν ἐν μέρος ἴσον ἀπὸ M εἰς B καὶ ἀπὸ N εἰς B . Ὁ πρῶτος δρόμος εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ὁ σιμοτινώτερος· λοιπὸν τὸ διάστημα ἀπὸ A εἰς M εἶναι σιμοτινώτερον τοῦ διαστήματος ἀπὸ A εἰς N , τὸ ὅποιον ἤθελεν εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ τόξον AM εἶναι μείζον τοῦ AN · λοιπὸν κἀνὲν σημεῖον τῆς πλέον σιμοτινῆς γραμμῆς μεταξὺ A καὶ B δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾔηται ἐκτὸς τοῦ τόξου ANB · λοιπὸν αὐτὸ τὸ τόξον εἶναι ἡ σιμοτινωτέρα γραμμὴ μεταξὺ τῶν ἄκρων του. σγ. 223.

Σημείωσις τοῦ Μεταφραστοῦ. Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν κατάληψιν εἰς τὸν ἀναγνώστην ταύτης τῆς προτάσεως, ἔκρινα εὐλογον, χωρὶς νὰ ἀπομακρυνθῶ ἀπὸ τὸν συγγραφεᾶ, νὰ τὴν ἐκθίσω ὡς ἀκολουθῶς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ.

Μεταξὺ δύο σιγμῶν ἐπὶ τῆς ἰδίας σφαίρας, τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν ἰδίων σιγμῶν, ὡς τὸ AB τόξον.

Ἐπειδὴ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ A καὶ B εἶναι μία ἄλλη καμπύλη γραμμὴ ὡς ἡ AMB : δηλαδή $AMB < AB$, καὶ κάθε ἄλλης καμπύλης διαρχομένης διὰ A καὶ B . Τώρα εἰάν ἐκ τῆς B καὶ M φέρωμεν τὸ τόξον μεγίστου κύκλου MB , καὶ παρομοίως ἐκ τῆς A καὶ M τὸ τόξον μεγίστου κύκλου AM , καὶ λήβωμεν τὸ τόξον BN ἴσον μὲ τὸ τόξον MB · τότε τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ B καὶ N θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μεταξὺ B καὶ M · ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ὑπάγωμεν ἀπὸ B εἰς A ἢ διατρέχοντες τὴν καμπύλην AMB , ἢ τὸ διάστημα μεταξὺ B καὶ N , καὶ τὸ διάστημα μεταξὺ N καὶ A , καὶ ὁ πρῶτος δρόμος, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι σιμοτινώτερος τοῦ δευτέρου, ἔπεται, ἐξ αἰτίας ὅπου τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα ἀπὸ B εἰς M εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλέον

σιμοτινὸν διάστημα ἀπὸ B εἰς N, ὅτι τὸ διάστημα μεταξὺ A καὶ M ἐκτιμώμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης AMB ἀπὸ A ἕως M, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ διάστημα μεταξὺ A καὶ N. Τώρα ἐπειδὴ τὸ τόξον AM πλέον τὸ MB εἶναι μείζον τοῦ τόξου AB, καὶ ἐλήφθη $MB = BN$, διὰ τοῦτο τὸ τόξον AM εἶναι μείζον τοῦ AN· λοιπὸν λαμβάνοντες ἐπὶ τοῦ τόξου AB ἓν τόξον ἴσον μὲ τὸ AM, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ σιγμὴ M πρέπει νὰ εὐρεθῇ ὑπὸ τῆς N μεταξὺ N καὶ B. Ἡ σιγμὴ λοιπὸν αὕτη ἀπέχει ἐκ τῆς σιγμῆς A, περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι ἀπέχει ἡ σιγμὴ N· ἀλλ' ὅσον ἀπέχει ἡ σιγμὴ ἡ μεταξὺ τῆς N καὶ B ἀπὸ τῆς A, τόσον ἀπέχει καὶ ἡ M ἀπὸ τῆς A· λοιπὸν τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ M, εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς N καὶ B· ὅταν λοιπὸν τὸ τόξον AM πέσῃ ἐπὶ τοῦ AB, τότε ἡ σιγμὴ M πίπτει ἐπὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς N καὶ B· καὶ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ N, ταυτίζεται μὲ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς N καὶ B. Τώρα ἐπειδὴ ἡ N εἶναι πλησιέστερα εἰς τὴν A παρὰ ἡ μεταξὺ τῆς N καὶ B σιγμὴ, ἔπεται ὅτι τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ A καὶ N, εἶναι μικρότερον τοῦ πλέον σιμοτινοῦ διαστήματος μεταξὺ A καὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ N καὶ B, ἢ μικρότερον τοῦ πλέον σιμοτινοῦ διαστήματος μεταξὺ τῆς A καὶ M.

Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς A καὶ N πλέον τὸ σιμοτινώτερον διάστημα μεταξὺ N καὶ B, εἶναι μικρότερον τοῦ σιμοτινωτέρου διαστήματος μεταξὺ A καὶ M πλέον τοῦ σιμοτινώτερου διαστήματος μεταξὺ M καὶ B, δηλαδὴ τῆς καμπύλης AMB· ψευδὲς λοιπὸν ὅτι τὸ σιμοτινώτερον διάστημα μεταξὺ A καὶ B, εἶναι ἡ καμπύλη AMB. Κατὰ τὸν αὐτὸν

τρόπον δικνύομεν, ὅτι καθε ἄλλη καμπύλη, ἥτις ἐνώνει τὴν σιγμὴν Α καὶ Β, καὶ δὲν ἔχει ὅλας τὰς σιγμάς τῆς ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, δὲν εἶναι ἐκείνη ἥτις παριστάνει τὸ πλεον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ Α καὶ Β· ἀλλὰ μεταξὺ τῆς Α καὶ Β εὐρίσκεται τὸ ζητούμενον σιμοτινώτερον διάστημα· λοιπὸν ἡ καμπύλη ἥτις ἐκφράζει αὐτὸ, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου δηλαδὴ τὸ ΑΒ· ἐπειδὴ εἰς τὰς σιγμάς τούτου, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν· καὶ λοιπὸν δὲν δυνάμεθα νὰ δειξώμεν ὅτι ὑπάρχει μία καμπύλη ἥτις ἐνώνει τὴν Α καὶ Β μικρότερα τοῦ τόξου ΑΒ. Ὅπερ εἶδει ἀποδείξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἐστω ΑΒΓ ὁποιοῦνδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον· ὥς προεβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν ἐκ νέου εἰς Δ. Τὰ τόξα ΑΒΔ, ΑΓΔ, θέλουσι εἶναι ἡμιπεριφέρειαι, διότι δύο μέγιστοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη (πρό. 1)· ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ < ΒΔ + ΓΔ (πρό. 2)· προσθήσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ ΑΒ + ΑΓ, προκύπτει ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ < ΑΒΔ + ΑΓΔ, τοῦτέστι μικρότερον περιφερείας. σχ. 224.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν καθε σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.

Ἐστω, παραδείγματος χάριν, τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ ὥς προεβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ζ· ἐπειδὴ ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΖ + ΓΖ, ἡ περίμετρος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικρο-

τέρα τῆς τοῦ τετραπλεύρου $\Lambda\epsilon\Delta\text{Z}$. Ἀς προεκβληθῶσιν ἐκ νύου αἱ πλευραὶ $\Lambda\epsilon$, $\text{Z}\Delta$, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς H . ὁφθαί εἶναι $\epsilon\Delta < \epsilon\text{H} + \text{H}\Delta$. λοιπὸν ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου $\Lambda\epsilon\Delta\text{Z}$ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ τριγώνου $\Lambda\text{Z}\text{H}$. αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου. λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου $\Lambda\text{B}\Gamma\Delta\epsilon$ εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου. σχ. 225.

Σχόλιον. Ἡ πρότεσις αὕτη εἶναι τῶ ὄντι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν KB τοῦ ϵ' βιβλίου· διότι ἐὰν O ᾖ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν εἰς τὴν σιγμὴν O , γωνίαν σφαιρὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΛOB , $\text{BO}\Gamma$, ΓOD , κ. τ. λ. τὴν ἑκάστην τούτων τῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου· λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου, ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν πρέπει νὰ ᾖ μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν. Ἡ ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἰδῶκαμεν εἶναι διαφορετικὴ τῆς τοῦ ϵ' βιβλίου· ἀλλὰ καὶ αἱ δύο προϋποθέτουσιν ὅτι τὸ πολύγωνον $\Lambda\text{B}\epsilon\Delta\text{E}$ εἶναι κυρτόν, ἢ ὅτι οὐδεμία πλευρὰ προεκβαλλομένη τέμνει τὸ σχῆμα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ζ' .

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Λ.

Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΛMB ἀχθῇ κάθετος ἡ διάμετρος $\Delta\epsilon$, τὰ ἄκρα Δ καὶ ϵ ταύτης τῆς διαμέτρου ὕψουν εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΛMB , καὶ ὅλων τῶν μικρῶν κύκλων, ὡς ZNH , τῶν παραλλήλων μὲ αὐτόν. σχ. 220.

Διότι οὐσα ἡ $\Delta\Gamma$ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΛMB , εἶναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας $\Gamma\Lambda$, ΓM , ΓB , κ. τ. λ. ἡγμένης ἀπὸ τὸν πόδον τῆς εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν

ὅλα τὰ τόξα ΔA , ΔM , ΔB , κ. τ. λ. εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας τοῦ αὐτοῦ ὑπάρχει διὰ τὰ τόξα EA , EM , EB , κ. τ. λ. λοιπὸν ἕκαστον τῶν σημείων Δ καὶ E ἰσάκως ἀπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεία τῆς περιφερείας AMB · λοιπὸν εἶναι οἱ πόλοι ταύτης τῆς περιφερείας. (ὁρ. 5).

Δεύτερον, ἡ ἀκτίς $\Delta\Gamma$, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον AMB , εἶναι καὶ κάθετος εἰς τὸ παράλληλον αὐτοῦ ZNH · λοιπὸν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου ZNH (πρό. 1)· λοιπὸν ἰὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ πλάγιαί DZ , ΔN , ΔH , αἱ πλάγιαί αὗται ἰσάκως θέλουν ἀπέχει τῆς καθέτου ΔO καὶ θέλουν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ὅταν αἱ χορδαὶ ᾖναι ἴσαι, τὰ τόξα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα DZ , ΔN , ΔH , κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅθεν ἡ σιγμὴ Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ZNH , καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ σιγμὴ E εἶναι ὁ ἄλλος πόλος.

Πόρισμα Α'. Κάθε τόξον ΔM ἡγμένον ἀπὸ μίαν σιγμὴν τόξου μεγίστου κύκλου AMB εἰς τὸν πόλον του εἶναι ἐν τέταρτον περιφερείας, τὸ ὅποιον διὰ συντομίαν θελομεν ὀνομάζει τεταρτημόριον (quadrant), καὶ τὸ τεταρτημόριον τοῦτο κάμνει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὀρθὴν γωνίαν μὲ τὸ τόξον ΔM . Διότι, οὕτως τῆς γραμμῆς $\Delta\Gamma$ καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον $AM\Gamma$, κάθετος ἐπίπεδον $\Delta M\Gamma$ δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $AM\Gamma$ (18, 6)· λοιπὸν ἡ γωνία τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἢ κατὰ τὸν 5' ὀρισμὸν, ἡ γωνία $\Delta M\Delta$ εἶναι ὀρθή.

Β'. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸν πόλον δεδομένου τόξου ΔM , ἄγομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον $M\Delta$ κάθετον εἰς ΔM , λαμβάνομεν $M\Delta$ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, καὶ ἡ σιγμὴ Δ θέλει εἶναι εἰς τῶν πόλων τοῦ τόξου ΔM · ἡ ἄγομεν εἰς τὰς δύο σιγμάς A καὶ M τὰ τόξα ΔA καὶ ΔM κάθετα εἰς ΔM , ἡ σιγμὴ τῆς συνδρομῆς Δ τῶν δύο ταύτων τόξων θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος πόλος.

Γ'. Αντιστρόφως, εάν τὸ ἀπόστημα τῆς σιγμῆς Δ ἀπὸ καθέν τῶν σημείων A καὶ M ᾖ ἰσον μὲ τεταρτημόριον, λέγω ὅτι ἡ σιγμὴ Δ θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου AM , καὶ ἐνταύτῃ αἱ γωνίαι ΔAM , AMA θέλουν εἶναι ὀρθαί.

Διότι ἔσω Γ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ὥς ἀγούσιν αἱ ἀκτίνες ΓA , $\Gamma \Delta$, ΓM · ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\Lambda \Gamma \Delta$, $M \Gamma \Delta$ εἶναι ὀρθαί, ἡ γραμμὴ $\Gamma \Delta$ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓA , ΓM · λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των· λοιπὸν ἡ σιγμὴ Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου AM , καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι ΔAM , AMA , εἶναι ὀρθαί.

Σχόλιον. Διὰ τῶν ιδιοτήτων τῶν πόλων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τόξα κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μὲ τὴν αὐτὴν εὐκολίαν μὲ τὴν ὅποιαν γράφομεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι· εάν γράψωμεν τὸ τόξον ΔZ ἢ καὶ ἄλλην γραμμὴν τοῦ αὐτοῦ διαστήματος ὁλόγυρα τῆς σιγμῆς Δ , τὸ ἄκρον Z θέλει γράψαι τὸν μικρὸν κύκλον ZNH · καὶ εάν γράψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔZA ὁλόγυρα τῆς σιγμῆς Δ , τὸ ἄκρον A θέλει γράψαι τόξον μεγίστου κύκλου τὸ AM .

Εάν λάβωμεν χρεῖαν νὰ προσεβάλλωμεν τὸ τόξον AM , ἢ εάν δὲν ἔχωμεν δεδομένης παρὰ μόνον τῆς σιγμῆς A καὶ M διὰ τῶν ὁποίων τὸ τόξον τοῦτο πρέπει νὰ διέλθῃ, κατὰ πρῶτον προσδιορίζομεν τὸν πόλον Δ διὰ τῆς κοινῆς τομῆς δύο τόξων γεγραμμένων ἐκ τῶν σιγμῶν A καὶ M ὥς ἐκ κέντρων μὲ διάστημα ἰσον μὲ τεταρτημόριον· εὐρεθέντος τοῦ πόλου Δ , γράφομεν ἐκ τῆς σιγμῆς Δ ὥς ἐκ κέντρου καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάστημα τὸ τόξον AM καὶ τὴν προσεβολὴν του.

Τέλος, εάν λάβωμεν χρεῖαν ἀπὸ δεδομένην σιγμὴν Π νὰ κτερέσῃμεν τόξον κάθετον ἐπὶ τοῦ δεδομένου AM , προσεβάλλομεν τοῦτο εἰς Σ ὥς οὗ τὸ διάστημα $\Pi \Sigma$ νὰ ᾖ ἰσον μὲ τεταρτημόριον· ἀκολουθῶς ἐκ τοῦ πόλου Σ

καὶ μὴ τὴ αὐτὸ διάστημα γράφομεν τὸ τόξον ΠΜ, τὸ ὅποιον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κάθετον τὸξον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν. σχ. 226.

Ἦστω ΖΑΗ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος ΟΑ· ἴαν ληθῇ ὅποιονδήποτε σημεῖον Μ ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἐπιζευχθῇ ΟΜ καὶ ΑΜ, ἡ γωνία ΟΑΜ θέλει εἶναι ὀρθή, καὶ οὕτως τὸ διάστημα ΟΜ θέλει εἶναι μείζον τοῦ ΟΑ. Ἡ σιγμὴ Μ εἶναι λοιπὸν ἐκτὸς τῆς σφαίρας· καί, ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ΖΑΗ, ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν δὲν ἔχει παρὰ μόνον τὸ Α· λοιπὸν ἄπτεται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (ὁρ. 4).

Σχόλιον. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ δειξώμεν ὅτι δύο σφαῖραι ἐν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν, καὶ ἐπομένως ἀπτονται ἀλλήλων· ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἀθροισμὸν ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν· τότε τὰ κέντρα καὶ ἡ σιγμὴ τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπ' εὐθείας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ γωνία ΒΑΓ τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξὺ τῶν δύο τόξα μεγίστων κύκλων ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΖΑΗ, τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τούτων τῶν τόξων εἰς τὴν σιγμὴν Α· ἔχει ὁμοίως διὰ μέτρον τὸ τόξον ΔΕ, γραφόμενον ἐκ τῆς σιγμῆς Α ὡς ἐκ πόλου μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, πρὸς ἐκβαλλομένων ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον. σχ. 226.

Διότι ἡ ἐφαπτομένη ΑΖ, ἡγμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου ΑΒ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΑΟ· ἡ ἐφαπτο-

μένη $\Lambda\text{Η}$, ἡ γμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου $\Lambda\Gamma$, εἶναι κάθετος εἰς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα $\Lambda\text{Ο}$. λοιπὴν ἡ γωνία $\angle\Lambda\text{Η}\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων $\text{Ο}\Lambda\text{Β}$, $\text{Ο}\Lambda\Gamma$ (17, 5), ἥτις εἶναι ἡ τῶν τόξων $\Lambda\text{Β}$, $\Lambda\Gamma$, καὶ σημειοῦται διὰ $\text{Β}\Lambda\Gamma$.

Παρομοίως, ἂν τὸ τόξον $\Lambda\Delta$ ᾖναι ἴσον μὲ τετάρτημόριον, καθὼς καὶ $\Lambda\text{Ε}$, αἱ γραμμαὶ $\text{Ο}\Delta$, $\text{Ο}\text{Ε}$, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς $\Lambda\text{Ο}$, καὶ ἡ γωνία $\angle\text{Ο}\Delta\text{Ε}$ θέλει εἶναι ἀκόμη ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων $\text{Α}\text{Ο}\Delta$, $\text{Α}\text{Ο}\text{Ε}$. λοιπὴν τὸ τόξον $\Delta\text{Ε}$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἢ τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\Gamma\Lambda\text{Β}$.

Πόρισμα. Αἱ γωνίαι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἡμποροῦν νὰ παραβάλλωνται μεταξύ των διὰ τῶν τόξων μεγίστων κύκλων γεγραμμένων ἐκ τῶν κορυφῶν των, ὡς ἐκ πόλων καὶ μεταξύ τῶν πλευρῶν των περιεχομένων: ὅθεν εὐκόλον εἶναι νὰ κάμωμεν γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην.

Σχόλιον. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὡς $\Lambda\Gamma\text{Ο}$ καὶ $\text{Β}\Gamma\text{Ν}$ εἶναι ἴσαι· διότι ἡ ἢ μία ἢ ἡ ἄλλη πάντοτε εἶναι ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα $\Lambda\Gamma\text{Β}$, $\text{Ο}\Gamma\text{Ν}$.

Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι εἰς τὴν συνάπαντησιν δύο τόξων $\Lambda\Gamma\text{Β}$, $\text{Ο}\Gamma\text{Ν}$, αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι $\Lambda\Gamma\text{Ο}$, $\text{Ο}\Gamma\text{Β}$ ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσχυνομένου πάντοτε μὲ δύο ὁρθάς. σγ. 238.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου $\Lambda\text{Β}\Gamma$, ἂν ἐκ τῶν σημείων Λ , Β , Γ , ὡς ἐκ πόλων, γραφθῶσι τὰ τόξα $\text{Ε}\text{Ζ}$, $\text{Ζ}\Delta$, $\Delta\text{Ε}$, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὸ τρίγωνον $\Delta\text{Ε}\text{Ζ}$. ἀντιθέτως αἱ τρεῖς σημεῖα Δ , Ε , Ζ , θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τῶν πλευρῶν $\text{Β}\Gamma$, $\Lambda\Gamma$, $\Lambda\text{Β}$. σγ. 227.

Διότι ἐπειδὴ ἡ σημὴ Λ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου $\text{Ε}\text{Ζ}$, τὸ διέστημα $\Lambda\text{Ε}$ εἶναι τεταρτημόριον ἐπειδὴ ἡ σημὴ

Γ είναι ὁ πῶλος τοῦ τόξου ΔΕ, τὸ διάστημα ΓΕ εἶναι πα-
ρομοίως τεταρτημόριον· λοιπὸν ἡ σιγμὴ Ε ἀπέχει τεταρτη-
μόριον ἀπὸ καθέν τῶν σημείων Α καὶ Γ· εἶναι λοιπὸν ὁ
πῶλος τοῦ τόξου ΑΓ (6, πρό. 3). Ομοίως δεῖξομεν ὅτι
Δ εἶναι ὁ πῶλος τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ Ζ ὁ τοῦ τόξου ΑΒ.

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ
γραφῇ διὰ τοῦ ΔΕΖ, ὡς τὸ ΔΕΖ διὰ τοῦ ΑΒΓ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐκάζη γωνία ἐνὸς τῶν τριγώνων
ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἡμιπερίφειραν μείον
τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸ ἄλλο τρίγωνον. σλ. 227.

Ας προεκβληθῶσιν, ἐν ᾗναι ἀναγκαῖον, αἱ πλευραὶ ΑΒ,
ΑΓ, ὥς οὐ νὰ συναπαντήσωσι τὴν ΕΖ εἰς Η καὶ Θ·
ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ Α εἶναι ὁ πῶλος τοῦ τόξου ΗΘ, ἡ γωνία
Α ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΘ, ὡς καὶ
τὸ ΗΖ, εἶναι τεταρτημόριον, ἐπειδὴ Ε εἶναι ὁ πῶλος τοῦ
ΑΘ, καὶ Ζ ὁ πῶλος τοῦ ΑΗ· λοιπὸν ΕΘ + ΗΖ ἰσοῦται
μὲ ἡμιπερίφειραν. Τώρα ΕΘ + ΗΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ
ΕΖ + ΗΘ· λοιπὸν τὸ τόξον ΗΘ μέτρον τῆς γωνίας Α
εἶναι ἴσον μὲ ἡμιπερίφειραν μείον τὴν πλευρὰν ΕΖ·
ὡσαύτως ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}$ περ. — ΔΖ, καὶ ἡ γω-
νία Γ, $\frac{1}{2}$ περ. — ΔΕ.

Ἡ ιδιότης αὕτη πρέπει νὰ ᾖναι ἀντίστροφος μεταξὺ
τῶν δύο τριγώνων, διότι γράφονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρό-
πον τὸ ἐν διὰ μέσου τοῦ ἄλλου. Οὕτω θάλομεν εὔρη ὅτι
αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ μετροῦνται διαδο-
χικῶς ὑπὸ $\frac{1}{2}$ περ. — ΒΓ, $\frac{1}{2}$ περ. — ΑΓ, $\frac{1}{2}$ περ. — ΑΒ. Τῶν ὄντι
ἡ γωνία Δ, παραδείγματος χάριν, ἔχει μέτρον τὸ τόξον
ΜΙ. Τώρα ΜΙ + ΒΓ = ΜΓ + ΒΙ = $\frac{1}{2}$ περ.· λοιπὸν τὸ
τόξον ΜΙ, μέτρον τῆς γωνίας Δ, = $\frac{1}{2}$ περ. ΒΓ, καὶ οὕ-
τω διὰ τὰς ἄλλας.

Σχόλιον. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐκτὸς τοῦ τοιῶν γωνίαν ΔΕΖ δυνατόν νὰ σχηματισθῶσι τρία ἄλλα ἀπὸ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν τριῶν τόξων ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ. Ἀλλ' ἡ παρῶσα πρότασις δὲν ἔχει χώραν παρὰ διὰ τὸ κεντρικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον διακρίνεται ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα ἐκ τούτου ὅτι αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Δ καίονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Ε ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ, καὶ αἱ δύο γωνίαι Γ καὶ Ζ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ. (σχ. 228 καὶ 227).

Διάφορα ὀνόματα δίδονται εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ· ἡμεῖς θέλομεν τὰ ὀνομάζει τρίγωνα πολικὰ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Α'.

Α Π Μ Μ Α.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Α καὶ μὲ τὸ διάστημα ΑΓ γραφῇ τὸ τόξον τοῦ μικροῦ κύκλου ΔΕΓ· ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Β καὶ μὲ τὸ διάστημα ΒΓ γραφῇ παρομοίως τὸ τόξον ΔΖΓ, καὶ ἐκ τῆς σημῆς Δ, ὅπου τὰ τόξα ΔΕΓ, ΔΖΓ τέμνονται, ἀγῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΑΔ, ΑΒ· λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΒ θέλει ἔχει ὅλα του τὰ μέρη ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. σχ. 229.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΑΓ, ΑΒ=ΒΓ, ΑΒ εἶναι κοινὴ· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μίαν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν μίαν. Λέγω τώρα ὅτι αἱ ἀπέναντι εἰς τὰς ἴσας πλευράς γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Τῷ ὅτι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἰς Ο, ἡμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν γωνίαν σφαιρὴν σχηματιζομένην εἰς τὴν σημῆν Ο ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΒΟΓ· ἡμποροῦμεν ὡσαύτως νὰ φαντασθῶμεν μίαν δευτέραν γωνίαν σφαιρὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς

ἐπιπέδου γωνίας $\Delta O B$, $\Delta O \Delta$, $\Delta O \Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $\Delta B \Gamma$ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου $\Delta \Delta B$, ἔπεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὅποιαι σχηματίζουν τὴν μίαν τούτων τῶν σφαιρῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδου γωνίας αἱ ὅποιαι σχηματίζουν τὴν ἄλλην σφαιρὴν γωνίαν, ἢ καὶ μία μὲ τὴν καὶ μία· ἀλλ' εἰς ταύτην τὴν περίεσιν ἀπεδείχθη (23, 5) ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὅποια εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκεις κλίνουν μεταξὺ τῶν· λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου $\Delta \Delta H$ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου $\Gamma \Delta B$, τουτέστι $\Delta \Delta B = \Delta \Delta \Gamma$, $\Delta \Delta \Gamma = \Delta \Delta B$, καὶ $\Delta \Delta B = \Delta \Delta \Gamma$ · λοιπὸν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $\Delta \Delta B$ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου $\Delta \Gamma B$.

Σχόλιον. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων τούτων δὲν εἶναι ὁμῶς ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως ἰσότης, διότι ἀδύνατον ἦν εἶναι νὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς τὰ δύο τρίγωνα, ἐκτὸς εἰς τὴν περίεσιν καθ' ἣν ἤθελον εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἡ περὶ τῆς ὁλόγης ἰσότητος εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν ἰσότητα ἐκ συμμετρίας, καὶ δι' αὐτὸν τὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα $\Delta \Gamma B$, $\Delta \Delta B$ ὀνομαζομεν ὀνομάζει τρίγωνα συμμετρικὰ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλε των τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσιν περιχομένην μεταξὺ πλευρῶν αἱ ὅποιαι νὰ ἦναι ἴσαι ἢ καὶ μία μὲ τὴν καὶ μία.

Ἦστω ἡ πλευρὰ $\Delta B = E Z$, ἡ πλευρὰ $\Delta \Gamma = E H$, καὶ ἡ γωνία $\Delta \Delta \Gamma = Z E H$ · τὸ τρίγωνον $E Z H$ ἢ μπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου $\Delta B \Gamma$, ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ $\Delta \Delta B$, καθ' ὃν τρόπον ἐπιτίθεται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα

ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων. Λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου EZH θέλουν εἶναι ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου $ABΓ$, τοῦτέστιν ἐκτὸς πῶν τριῶν μερῶν τῶν ὑποτιθεμένων ἴσων, θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ $BΓ = ZH$, ἡ γωνία $ABΓ = EZH$, καὶ ἡ γωνία $ΑΓΒ = BHZ$. σχ. 23ο.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα τὰ μέρη, ἔταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν.

Διότι δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἐν τούτων τῶν τριγώνων ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του, ὡς ἐκάμαμεν εἰς παρομοίαν περίστασιν διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα. Βλέπε προτ. Ζ'. βιβλ. Α'.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ἐάν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, ᾗναι ἰσόπλευρα μεταξὺ των, θέλουν εἶναι ὡσαύτως καὶ ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι θέλουν εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Τοῦτο εἶναι φανερόν ἐκ τῆς ΙΑ' προτάσεως, ὅπου εἶδομεν ὅτι μὲ τρεῖς δεδομένας πλευρὰς AB , $ΑΓ$, $BΓ$ δύο μόνον τρίγωνα $ΑΓΒ$, $ΑΒΔ$ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν, διαφορητικῶς μὲν ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῶν μερῶν, ἀλλ' ἴσα ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν ἰδίων τούτων μερῶν. Λοιπὸν δύο τρίγωνα ἰσόπλευρά μεταξὺ τῶν εἶναι ἢ ἀπολύτως ἴσα, ἢ τοῦλάχιστον ἴσα ἐκ συμμετρίας· καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν. σχ. 229.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο γωνίαι ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ᾖναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

1.^{ον} Ἐξω ἡ πλευρὰ $AB = AG$ · λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία $\Gamma = B$: διότι, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἀχθῇ εἰς τὴν σιγμὴν Δ , μέσον τῆς βάσεως, τὸ τόξον AD , τὰ δύο τρίγωνα ABD , AGD , θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν· τοῦτέστι, AD κοινὴν, $BD = DG$, καὶ $AB = AG$: λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὴν θεωρήμα, τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, καὶ θέλει εἶναι $B = \Gamma$. σλ. 231.

2.^{ον} Ἐξω ἡ γωνία $B = \Gamma$ · λέγω ὅτι θέλει εἶναι $AG = AB$: διότι ἐὰν ἡ πλευρὰ AB δὲν ᾖναι ἴση τῇ AG , ἔξω AB ἡ μεγαλητέρα τῶν δύο, ὥς λαμβῇ $BO = AG$, καὶ ᾗ ἐπιχειρῇ OI . Αἱ δύο πλευραὶ BO , BG , εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο AI , BG · ἡ περιεχομένη γωνία OIG ἀπὸ τὰς πρώτας εἶναι ἴση μὲ τὴν περιεχομένην ἀπὸ τὰς δευτέρας AGB . Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα BOG , AGB , ἔχουσιν καὶ τὰ ἄλλα τῶν μέρη ἴσα (πρό. 21), ἐπομένως ἡ γωνία $OIB = ABG$: ἀλλὰ, ἢ ὑποθέσωμεν, ἡ γωνία $ABG = AGB$ · λοιπὸν ἔοικεν εἶναι $OIB = AGB$, ὅπερ ἀδύνατον· ἀδύνατον λοιπὸν νᾶ ὑποθεθῇ ἡ AB διαφορετικὴ τῆς AG · αἱ πλευραὶ ἄρα AB , AG , ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν B καὶ Γ , εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι ἡ γωνία $BAG = DAG$, καὶ ἡ γωνία $BAG = ADG$ · λοιπὸν αἱ δύο αὗται τελευταὶ εἶναι ὀρθαί· ἄρα τὸ ἐγόμενον τόξον ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐνὸς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του εἶναι

παύσεται εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ τέμνεται διὰ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΓ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ $\Delta B\Gamma$, εἴαν ἡ γωνία A ᾖ μείζων τῆς γωνίας B , ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ ἀπέναντι τῆς γωνίας A θέλει εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ ἀπέναντι τῆς γωνίας B · ἀντιστρόφως, εἴαν ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἴσται μείζων τῆς $A\Gamma$, ἡ γωνία A θέλει εἶναι μείζων τῆς γωνίας B . σχ. 232.

1.^{ον} Ἐξω ἡ γωνία $A > B$, ἃς γένη ἡ γωνία $B\Delta\Delta = B$, θέλει εἶναι $A\Delta = \Delta B$ (πρό. 15): ἀλλὰ $A\Delta + \Delta\Gamma$ εἶναι μείζων ἀπὸ $A\Gamma$ ἀντὶ τῆς $A\Delta$ τεθείσης τῆς ΔB , θέλει εἶναι $\Delta B + \Delta\Gamma$ ἢ $B\Gamma > A\Gamma$.

2.^{ον} Ὑποθετίσθης τῆς $B\Gamma > A\Gamma$, λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία $B\Delta\Gamma$ μείζων τῆς $\Delta B\Gamma$: διότι, εἴαν $B\Delta\Gamma$ ᾖ ἴση μὲν $\Delta B\Gamma$, ἤθελεν εἶναι $B\Gamma = A\Gamma$ · εἴαν δὲ $B\Delta\Gamma < \Delta B\Gamma$, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, ἤθελεν εἶναι $B\Gamma < A\Gamma$ · ὅπερ ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Λοιπὸν ἡ γωνία $B\Delta\Gamma$ εἶναι μείζων τῆς $\Delta B\Gamma$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΖ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἴαν αἱ δύο πλευραὶ $AB, A\Gamma$, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma$ ᾖναι ἴσαι μὲν τὰς δύο πλευρὰς $\Delta E, \Delta Z$, τοῦ τριγώνου ΔEZ ἐπὶ μιᾷ ἴσῃ σφαίρᾳ χαραγμένου, εἴαν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία A ᾖ μείζων τῆς γωνίας Δ , λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ $B\Gamma$ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μείζων τῆς τρίτης EZ τοῦ δευτέρου. σχ. 233.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία μὲν τὴν τῆς προτάσεως Ι', βιβλ. Α'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εάν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἰσῶν σφαιρῶν χαραγμένα ἦναι ἰσογώνια μεταξύ των, θέλουν εἶναι καὶ ἰσόπλευρα.

Εἰωσαν Α καὶ Β τὰ δύο δεδομένα τρίγωνα, Π καὶ Κ τὰ πολιχάτων· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ τῶν πολιχῶν Π καὶ Κ θέλουν εἶναι ἴσαι (πρό. 10): ἀλλ' ἐκ τοῦ ὅτι τὰ τρίγωνα Π καὶ Κ εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, ἔπεται ὅτι εἶναι καὶ ἰσογώνια (πρό. 14)· τέλος, ἐκ τοῦ ὅτι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων Π καὶ Κ εἶναι ἴσαι, ἔπεται (πρό. 10) ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν πολιχῶν Α καὶ Β εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα Α καὶ Β εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν καὶ ἰσόπλευρα μεταξύ των.

Ἡμποροῦμεν ἀκόμη νὰ ἀποδείξωμεν τὴν αὐτὴν πρότασιν χωρὶς νὰ συνδράμωμεν εἰς τὰ πολιχὰ τρίγωνα κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Εἰωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ, δύο τρίγωνα ἰσογώνια μεταξύ των, εἰς τρόπον ὥστε $A \equiv \Delta$, $B \equiv E$, $\Gamma \equiv Z$: λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ $AB \equiv DE$, $AG \equiv \Delta Z$, $B\Gamma \equiv EZ$. σχ. 234.

Επὶ τῆς προεκβολῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ἃς ληθῇ $AH \equiv DE$, καὶ $A\Theta \equiv \Delta Z$: ἃς ἐπιζευχθῇ ΗΘ καὶ ἃς προβληθῶσι τὰ τόξα ΒΓ, ΗΘ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ι καὶ Κ'.

Αἱ δύο πλευραὶ ΑΗ, ΑΘ, εἶναι, ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι μὲν τὰς δύο ΔΖ, ΔΕ· ἡ περιεχομένη γωνία $H\Lambda\Theta \equiv B\Lambda\Gamma \equiv E\Delta Z$: λοιπὸν (πρό. 12) τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, λοιπὸν ἡ γωνία $A\Theta H \equiv \Delta Z E \equiv \Lambda \Gamma B$.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΗ, Κ'ΒΗ, ἡ πλευρὰ ΒΗ εἶναι κοινὴ, ἡ γωνία $I\Lambda B \equiv H\Lambda K'$ καὶ ἐπειδὴ $I\Lambda B + B\Lambda K' \equiv$ ἰσοῦται

μὲ δύο ὀρθὰς, καθὼς καὶ $HBK' + IBH$, ἔπεται ὅτι $BHK' = IBH$. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα IBH , HBK' , εἶναι ἴσα (πρό. 13)· ἄρα $IH = BK'$, καὶ $IB = HK'$.

Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία $A\Theta H = A\Gamma B$, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ τρίγωνα $I\Gamma\Theta$, $\Theta\Gamma K'$, ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα· ἄρα $I\Theta = \Gamma K'$, καὶ $\Theta K' = I\Gamma$.

Τώρα, ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων BK' , IH , ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα $\Gamma K'$, $I\Theta$, τὰ ὑπόλοιπα $B\Gamma$, $H\Theta$, θέλουσιν εἶναι ἴσα. Ἀλλως ἡ γωνία $B\Gamma A = A\Theta H$, καὶ ἡ γωνία $\Delta B\Gamma = \Delta H\Theta$. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα $\Delta B\Gamma$, $\Delta H\Theta$, ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον $\Delta E Z$ εἶναι ἴσον καθ' ὅλα τοῦ τὰ μέρη μὲ τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ · λοιπὸν εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ τρίγωνον $\Delta H\Theta$, καὶ θέλει εἶναι $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$, $B\Gamma = EZ$. Ἄρα, ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ᾖναι ἰσογώνια μεταξύ των, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουσιν εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὕτη δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅπου ἀπὸ τὴν ἰσότητά των γωνιῶν ἄλλότι δὲν συνάγεται παρὰ ἡ ἀναλογία των πλευρῶν. Ἀλλ' εὐκόλον εἶναι νὰ δώσωμεν λόγον τῆς τοιαύτης διαφορᾶς ἣτις κατὰ τοῦτο ὑπάρχει μεταξύ των εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων. Εἰς τὴν παρούσαν πρότασιν, καθὼς καὶ εἰς τὰς προτάσεις IB' , IG' , ID' καὶ IZ' , εἰς τὰς ὁποίας γίνεται λόγος περὶ τῆς συγκρίσεως των τριγώνων, λέγομεν ἐκπραστικῶς (expression) ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι χαραγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν. Τώρα τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα των ἀκτίων· λοιπὸν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν, δύο τρίγωνα δὲν ἡμποροῦν νὰ ᾖναι ὅμοια χωρὶς νὰ ᾖναι ἴσα. Δὲν εἶναι λοιπὸν θαυμάσιον ὅτι ἡ ἰσότης των γωνιῶν συνεπιφέρει τὴν ἰσότητά των πλευρῶν.

Δὲν ἤθελον εἶναι τὸ αὐτὸ ἐὰν τὰ τρίγωνα ἦσαν χαρταγμένα ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν. Τότε διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμολογοὶ πλευραὶ ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν. (1)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΘ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ 2π καὶ μεγαλύτερον ἀπὸ τέσσαρας ὀρθάς.

Διότι 1.ον κάθε γωνία ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ δύο ὀρθάς (βλέπε τὸ 1π της σχόλιον). λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ 2π ὀρθάς.

(1) Εἰς τὴν ΚΓ' πρότασιν τοῦ ε' βιβλίου ἀπεδείχθη ὅτι ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι σύγκηνται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδου γωνίας ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν, αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ἐπεία εὐρύνονται αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τώρα εἶναι ἀληθὲς καὶ ἡ ἀντίστροφος: δηλαδή, ἐὰν τὰ ἐπιπέδα δύο τριέδρων στερεῶν γωνιῶν ἴσας κλίνουν μεταξύ των, αἱ ἐπιπέδοι γωνίαι αἱ ἐπεία εὐρύνονται εἰς τὰς ἐπιπέδα τῶν ἐπειῶν ἡ κλίσεις εἶναι ἴση εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας, ὅπου εἶναι παρεμύως ἴσαι (βλέπε διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀντιστροφῆς ταύτης προτάσεως *les reciproques de la Geometrie par M. Garnier*). τούτου τεθέντος, ὅταν δύο τρίγωνα εἴη τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἦναι ἰσογώνια, ὅταν δηλαδή αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν ἐδρῶν τῶν πυραμίδων τῶν ἐπειῶν βάσεις εἶναι τὰ παραβαλλόμενα τρίγωνα ἦναι ἴσαι ἢ καθ' ἑμὴν μὲ τὴν καθ' ἑμὴν, τότε αἱ ἐπιπέδοι γωνίαι αἱ ἐπεία σχηματίζουσι τὴν πρώτην στερεὰν γωνίαν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ἐπεία σχηματίζουσι τὴν δευτέραν στερεὰν γωνίαν· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπιπέδοι γωνίαι ἦναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι τὰ τόξα τὰ ἐπεία μετροῦν ταύτας τὰς γωνίας ἢ αἱ πλευραὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἴσαι τὸ καθ' ἑμὴν μὲ τὸ καθ' ἑμὴν, ὅταν ἦναι χαρταγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν· ἀνάλογα δὲ τῶν ἀκτίνων ὅταν ἦναι χαρταγμένα ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν· διότι τότε μετροῦντα γωνίας εἰς τὸ κέντρον ἴσας εἶναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ ἀκτῖνες Ο, Μ.

2.^{οι} Τὸ μέτρον κάθε γωνίας ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν μείον ἢ ἀντιστοιχοῦσα πλευρὰ τοῦ πολικοῦ τριγώνου (πρό. 10)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον τρεῖς ἡμιπεριφέρειας μείον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολικοῦ τριγώνου. Τώρα τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι μικρότερον περιφέρειας (πρό. 4)· λοιπὸν, ἐὰν ἀφαιρίσωμεν τὴν τριῶν ἡμιπεριφέρειαν ἀπὸ τρεῖς ἡμιπεριφέρειας, ἐπεὶ δὲ ἀφαιρούμεν ποσότητες μικροτέραν περιφέρειας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶναι μείζον ἡμιπεριφέρειας, ἥτις εἶναι τὸ μέτρον δύο ὀρθῶν γωνιῶν· λοιπὸν 2.^{οι} τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μείζον δύο ὀρθῶν.

Πόρισμα Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου δὲν εἶναι σταθερὸν ὡς τὸ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων· ἀλλὰ μεταβάλλεται ἀπὸ δύο ὀρθὰς γωνίας ἕως 3ξ, χωρὶς οὔτε μὲ τὸ ἐν οὔτε μὲ τὸ ἄλλο ὅριον νὰ ἡμιπορῇ νὰ γένη ἴσον. Οὕτω δύο γωνίαι δεδομέναι δὲν καμνουν γνωστὴν τὴν τρίτην.

Πόρισμα Β'. Τρίγωνον σφαιρικὸν ἡμορεῖ νὰ ἔχῃ δύο ἢ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, δύο ἢ τρεῖς ἀμβλείας.

Ἐκν τὸ τρίγωνον ἦναι δισσορθογώνιον, τοὔτέστιν ἔχῃ δύο τῶν γωνιῶν τοῦ Β καὶ Γ ὀρθὰς, ἡ κορυφή Α θέλει εἶναι ὁ πόλος τῆς βάσεως ΒΓ (πρό. 6)· καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, θέλουν εἶναι τεταρτημόρια. σχ. 235.

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι τρισορθογώνιον, ὅλαι τοὶ αἱ γωνίαι θέλουν εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τεταρτημόρια. Τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὁκτὼ φορὰς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· τοῦτο γίνεται φανερόν ἀπὸ τὸ σχῆμα 236, ὑποτιθεμένου τοῦ τόξου ΜΝ ἴσου μὲ τεταρτημόριον.

Σχόλιον. Εἰς τὰ προηγούμενα, συμφώνως μὲ τὴν 5.^{ην} ὁρίσμεν, ὑποθέσαμεν ὅτι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχουν πᾶν

τοτε τὰς πλευράς των μικρότερας τῆς ἡμιπεριφερείας· τὸ ἐπεταὶ ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι πάντοτε μικρότεραι δύο ὀρθῶν διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ AB ᾖναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας, καθὼς καὶ ἡ AG , τὰ τόξα ταῦτα πρέπει νὰ προεκβληθοῦν καὶ τὰ δύο διὰ νὰ συναπαντηθοῦν εἰς Δ . Τὼρ αἱ δύο γωνίαι ABG , GBA , ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κἀμνουν δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ABG μόνη της εἶναι μικρότερη δύο ὀρθῶν. σχ. 224.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὑπάρχουν σφαιρικὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων μερικαὶ πλευραὶ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ μερικαὶ γωνίαι μεγαλύτεραι δύο ὀρθῶν διότι ἐὰν προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ AG ἀκερασίαν περιφέρειαν AGE , ὅ,τι μένει, ἀφ' οὗ ἀπὸ τὸ ἡμισφαίριον ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ABG , εἶναι νέον τρίγωνον, τὸ ὑποῖον ἡμικυκλίῳ νὰ σημειωθῇ ὡσαύτως διὰ ABG , καὶ τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ εἶναι AB , BG , $AEAG$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ $AEAG$ εἶναι μείζων τῆς ἡμιπεριφερείας $AE\Delta$ · ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ εἰς B ἀπέναντι γωνία ὑπερέχει δύο ὀρθὰς κατὰ τὴν ποσότητα $GB\Delta$.

Ο λόγος δὲ διὰ τὸν ὁποῖον ἀπεκλείσαμεν ἀπὸ τῶν ὁρισμὸν τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι τοιοῦτου μεγέθους, εἶναι ὅτι ἡ λύσις των ἢ ἡ προσδιορίσις τῶν μερῶν των ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν λύσιν τῶν τριγώνων τὰ ὑποῖα περικλείονται εἰς τὸν ὁρισμὸν. Τῷ ὄντι βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ABG ᾖναι γνωσταί, ἀμέσως γίνονται γνωσταὶ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰδίου ὀνόματος τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἡμισφαίριου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ο ἄτρακτος $AMBNA$ εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία MAN τούτου τοῦ ἀτράκτου εἶναι

πρὸς τέσσαρας ὀρθάς, ἢ ὡς τὸ τόξον MN μέτρον ταύτης τῆς γωνίας πρὸς τὴν περιφέρειαν. σχ. 236.

Ας υποθέσωμεν κατὰ πρόωτον ὅτι τὸ τόξον MN εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειαν $MNΠΚ$ εἰς λόγον συμμετρικόν, φερόμεν εἰπεῖν, ὡς 5 πρὸς 48. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν $MNΠΚ$ εἰς 48 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων MN θέλει περιέχει 5· ἐνόνοντες ἔπειτα τὸν πόλον A καὶ τὰ σημεῖα τῇ διαιρέσει διὰ τεταρτημορίων περιφέρειας, θέλομεν ἔχει 48 τρίγωνα εἰς τὸ ἡμισφαίριον $AMNΠΚ$, τὰ ὅποια θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα ὅλα των τὰ μέρη ἴσα. Ἡ ὅλη σφαῖρα θέλει περιέχει λοιπὸν 96 τοιαῦτα μερικὰ τρίγωνα, ὁ δὲ ἄτρακτος $AMBNA$ 10· λοιπὸν ὁ ἄτρακτος εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς 10 πρὸς 96, ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέστιν ὡς τὸ τόξον MN πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Ἐὰν τὸ τόξον MN δὲν ᾖ συμμετρικόν μετὰ τὴν περιφέρειαν, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ τοῦ ὁποίου ἤδη εἶδομεν πολλὰ παραδείγματα, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ ἄτρακτος εἶναι πάντοτε πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς τὸ τόξον MN πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Πόρισμα Α'. Δύο ἄτρακτοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἰδιεῖς των γωνίαι.

Πόρισμα Β'. Εἶδομεν ἤδη ὅτι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μετὰ ὀκτὼ τρισαρθογώνια τρίγωνα (πρό. 19)· ἂν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τούτων τῶν τριγώνων ληφθῇ ὡς μονάς, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θέλει παρέρησιασθῇ διὰ 8, Τούτου τεθέντος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἄτρακτου τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι A θέλει ἐκφρασθῇ διὰ $2A$ (ἐννοουμένου ὅμως ὅτι ἡ γωνία A ἐκτιμᾶται ἐπὶ τῆς ὀρθῆς λαμβανομένης ὡς μονάδος)· διότι ἔχομεν $2A : 8 :: A : 4$. Ἐδῶ λοιπὸν εἶναι δύο διαφορετικαὶ μονάδες· ἡ μία διὰ τὰς γωνίας, καὶ εἶναι ἡ ὀρθή· ἡ ἄλλη διὰ τὰς ἐπιφυνείας, καὶ εἶναι τὸ τρις-

σφαιρογώνιον τρίγωνον, ἢ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ αἱ πλευраὶ τεταρτημόρια περιφερείας.

Σχόλιον. Ὁ σφαιρικὸς ὄνυχ ὁ περιεχόμενος ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων AMB, ANB , εἶναι πρὸς τὸ ὅλον σφαιρὸν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία A πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· διότι ὅταν οἱ ἄτρακτοι ᾖναι ἴσοι, οἱ σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι παρομοίως ἴσοι· λοιπὸν δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι μεταξὺ τῶν ὡς αἱ σχηματίζόμεναι γωνίαι ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ὁποῦ τοὺς περιέχουν. (1)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Α'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Λ.

Δύο σφαιρικὰ συμμετρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Εἰσωσαν $ABΓ, ΔΕΖ$ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα, τοῦτέστι δύο τρίγωνα τὰ ὅποια ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας, $AB = ΔΕ$,

(1) Ἡ αὐτὴ ἀναλογία ᾗτις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἄτρακτου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος καὶ τοῦ σφαιρογώνιου τῆς σφαίρας· διότι ἐν Φ , ὑποτιθεμένου τοῦ λόγου τοῦ τόξου $ΜΝ$ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ὡς 5 πρὸς 48, ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ὅλη σφαῖρα περιέχει 96 τρίγωνα, ἐν Φ 5 ἄτρακτοι 10, βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ ὅλον σφαιρὸν τῆς σφαίρας περιέχει 96 ἴσας σφαιρικὰς πυραμίδας, ἐν Φ ὁ σφαιρικὸς ὄνυχ τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ παραβαλλόμενος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἄτρακτος περιέχει 10· λοιπὸν ὁ σφαιρικὸς ὄνυχ ὅστις ἔχει διὰ βάσιν τοῦτον τὸν ἄτρακτον εἶναι πρὸς τὸ ὅλον σφαιρὸν τῆς σφαίρας ὡς 10 πρὸς 96 ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τοῦτέστιν ὡς ἡ γωνία A πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ ἡ αὐτὴ ἡ ἀναλογία ὑπάρχει ἐὰν ἡ γωνία A δὲν ᾖναι εἰς λόγον συμμετρικὴν μὲ τὰς τέσσαρας ὀρθάς· ἀπὸ ἄλλου μέρους εἶδμεν ὅτι τὸ τρισσφαιρογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὅκτω σφαῖραις εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ἀλλ' ἰσχυρῶς βλέπομεν ἀκόμη ὅτι ἡ πυραμὶς ᾗτις ἔχει διὰ βάσιν τὸ τρισσφαιρογώνιον τρίγωνον περιέχεται εἰς τὸ ὅλον σφαιρὸν τῆς σφαίρας ὅκτω σφαῖραις· ἐὰν λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη ληθῇ ὡς μὴ ὄν, τὸ σφαιρὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 8. Ἀρα ὁ σφαιρικὸς ὄνυχ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι A ἐκφράζεται διὰ 8. Καὶ εἰς ἄλλος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι B θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 24· λοιπὸν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον : $A : B$. Ο. Μ.

$\Lambda\Gamma = \Delta Z$, $\Gamma B = EZ$, και τῶν ὁποίων ὁμοίως εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπιθέσις· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $\Lambda B\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔEZ . σχ. 237.

Εἰσω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ὅστις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B, Γ (1)· ἀπὸ τὴν σιγμὴν ταύτην ἄς ἀχθῶσι τὰ ἴσα τόξα (πρό. 6) $\Pi A, \Pi B, \Pi \Gamma$ · εἰς τὴν σιγμὴν Z ἄς γένῃ ἡ γωνία $\Delta ZK = \Lambda \Gamma \Pi$, τὸ τόξον $ZK = \Gamma \Pi$, καὶ ἄς ἐνωθῶσι $\Delta K, EK$.

Αἱ πλευραὶ $\Delta Z, ZK$, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς $\Lambda \Gamma, \Gamma \Pi$, ἡ γωνία $\Delta ZK = \Lambda \Gamma \Pi$ · λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $\Delta ZK, \Lambda \Gamma \Pi$ εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη (πρό. 12)· λοιπὸν ἡ πλευρὰ $\Delta K = \Lambda \Pi$, καὶ ἡ γωνία $\Delta KZ = \Lambda \Pi \Gamma$.

Εἰς τὰ πρότεθέντα τρίγωνα $\Delta ZE, \Lambda B\Gamma$ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\Delta ZE, \Lambda \Gamma B$, ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν $\Delta E, \Lambda B$ εἶναι ἴσαι, (πρό. 11), ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτὰς αἱ γωνίαι $\Delta ZK, \Lambda \Gamma \Pi$ ἴσαι ἐκ τῆς κατασκευῆς, μένει ἡ γωνία KZE ἴση μὲ τὴν $\Pi \Gamma B$. Ἀλλως αἱ πλευραὶ KZ, ZE , εἶναι ἴσαι

(1) Ο κύκλος ὅστις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B, Γ , ἡ ἑστὶς περιγράφεται εἰς τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$, δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾖ παρὰ μικρὰς ἀκτίος τῆς σφαίρας· διότι, ἐὰν ᾖ τὸν μέγιστος, αἱ τρεῖς πλευρὰς $\Lambda B, B\Gamma, \Lambda \Gamma$, ἤθελον κείνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τὸ τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ ἦτορ ἀχθῆ εἰς μίαν τῶν πλευρῶν των. (Σημείωσις τοῦ Συγγραφέως).

Ο λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ἐταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ τῶν τριῶν σημείων A, B, Γ εἶναι μέγιστος αἱ τρεῖς πλευραὶ $\Lambda B, B\Gamma, \Lambda \Gamma$, εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ὁ ἀκολουθεῖς.

Ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ A, B, Γ εἶναι μέγιστος, τὸ κέντρον τοῦ τοῦ κύκλου εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ἐπειδὴ τὸ κέντρον τοῦτο εὐρίσκεται εἰς καθὴν τῶν ἐπιπέδων τὰ ὅποια περιέχουσιν τὰς πλευρὰς $\Lambda B, B\Gamma, \Lambda \Gamma$ · ἐπεται ὅτι καθὴν τούτων τῶν ἐπιπέδων ἔσται εἰς τρία κοινὰ σημεία μὴ ἐπιπέδου μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ A, B, Γ · καὶ ἐπειδὴ ἐταν ἐν ἐπίπεδον εἶναι τρία κοινὰ σημεία μὲ ἐν ἄλλο ταυτιζέται μὲ αὐτὸ, ἐπεται ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὅποια περιέχουσιν τὰς τρεῖς πλευρὰς $\Lambda B, B\Gamma, \Lambda \Gamma$ ἔσθαι ὁμοῦ σχηματίζου ἐν μόνον ἐπίπεδον μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ A, B, Γ · αἱ τρεῖς λοιπὸν πλευραὶ $\Lambda B, B\Gamma, \Lambda \Gamma$ ἔσθαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπίπεδον· εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· πλὴν τότε δὲν σχηματίζουσιν τρίγωνον O, Λ, Γ .

μέ τας πλευράς $\Pi\Gamma$, $\Gamma\text{B}'$. λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ZKE , $\Pi\Gamma\text{B}$, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη· λοιπὸν ἡ πλευρὰ $\text{KE} = \text{PB}$, καὶ ἡ γωνία $\text{ZKE} = \Gamma\text{PB}$.

Ἐὰν τῶρα παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΔZK , $\text{A}\Gamma\text{Π}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν καθ' ἑμὴν μὴ τὴν καθ' ἑμὴν μίαν, εἶναι ἐνταυτῷ ἰσοσκελῆ, βλέπομεν ὅτι ἡμῶν νὰ ἐπιτεθῶσι καὶ ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσωσι· διότι, ὡς οὐ τεθῇ ἡ $\Pi\Gamma$ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν KZ , ἡ πλευρὰ ΠA θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν KA , καὶ οὕτω τὰ δύο τρίγωνα θέλουν ταυτισθῇ εἰς ἓν μόνον· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια $\Delta\text{KZ} = \text{A}\Pi\Gamma$. Διὰ λόγον παρόμοιον ἡ ἐπιφάνεια $\text{ZKE} = \Gamma\text{PB}$, καὶ ἡ ἐπιφάνεια $\Delta\text{KE} = \text{A}\Pi\text{B}$. λοιπὸν ἔχομεν $\Delta\text{KZ} + \text{ZKE} = \Delta\text{KE} = \text{A}\Pi\Gamma + \Gamma\text{PB} = \text{A}\Pi\text{B}$ ἢ $\Delta\text{ZE} = \text{A}\text{B}\Gamma$. λοιπὸν τὰ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$, ΔEZ , εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. (1)

Σχόλιον. Δυνατὸν εἶναι οἱ πόλοι Π καὶ K νὰ εὐρεθοῦν ἐντὸς τῶν τριγώνων $\text{AB}\Gamma$, ΔEZ . τότε πρέπει νὰ προσεθεῖν τὰ τρία τρίγωνα ΔKZ , ZKE , ΔKE , διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΔEZ , καὶ παραμῖως τὰ τρία τρίγωνα $\text{A}\Pi\Gamma$, ΓPB , $\text{A}\Pi\text{B}$, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$. ἄλλως ἡ ἀπόδειξις καὶ ἡ συνέπεια ἤθελον εἶναι αἱ αὐταί.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΒ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἦν δύο μέγιστοι κύκλοι AOB , $\Gamma\text{O}\Delta$ τέμνωνται ὅπως-δηποτε εἰς τὸ ἡμισφαίριον $\text{AO}\Gamma\text{B}\Delta$, τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων $\Delta\text{O}\Gamma$, $\text{BO}\Delta$, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποῖου ἡ γωνία εἶναι $\text{BO}\Delta$. σχ. 238.

(1) Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι ἡ πυρρὴς ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ εἶναι ἴση κατὰ τὴν εἰρησότητα μὲ τὴν πυρρὴν τῆς ἑνείας· βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΔEZ . Ο. Μ.

Διότι, προεκβληθέντων τῶν τόξων OB, OA , εἰς τὸ ἄλλο ἡμισφαίριον ὥς οὐ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς N , OB, N , καθὼς καὶ AOB , θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια· μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς OB , θέλει προκύψει $BN = AO$. Διὰ λόγον παρόμοιον $AN = BO$, καὶ $BA = AG$. λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα AOG, BAN , ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἄλλως ἢ θέσις των εἶναι τοιαύτη ὥστε εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου· λοιπὸν εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (πρό. 21), καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων AOG, BOA , ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον $OBNAO$ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι BOA .

Σχόλιον. Φανερόν εἶναι ὅτι αἱ δύο σφαιρικαὶ πυραμίδες βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα AOG, BOA , ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχά τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι BOA . (1)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΓ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Η ἐπιφάνεια ὁποιοῦδήποτε σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἄθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του ἐπὶ πλὴν εἰς δύο ὀρθάς.

Εἰς ABG τὸ προτεθέν τρίγωνον· ἃς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ του ὥς οὐ νὰ συναπαντήσωσι τὸν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ὅπως δὴ ποτε ἡγμένον μέγιστον κύκλον $AEZH$. Δυνάμει τοῦ προληβόντος θεωρήματος, τὰ δύο τρίγωνα

(1) Ο σφαιρικὸς ὄνυχς τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι BOA μοιράζεται εἰς δύο σφαιρικὰς πυραμίδας βάσεις των ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα BOA, BAN . τῶρα ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον BAN ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁείας βάσεως εἶναι τὸ τρίγωνον AOG (βλέπε τὴν ἐνωτέρω σημείωσιν)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα των δύο πυραμίδων αἱ ἵσται συγκροτεῦν τὸν σφαιρικὸν ὄνυχά ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα των πυραμίδων βάσεις των ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα AOG, BOA . Ο. Μ.

ΑΔΕ, ΑΗΘ, ὁμοῦ ληφθέντα, ἰσοδυναμοῦν μετὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, καὶ ὅστις ἔχει μέτρον $2A$ (πρό. 20): οὕτω θέλει εἶναι $ΑΔΕ + ΑΗΘ = 2A$. διὰ λόγον παρόμοιον $ΒΗΖ + ΒΙΔ = 2B$, $ΓΙΘ + ΓΖΕ = 2Γ$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων ὑπερέχει τὸ ἡμισφαίριον τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἄλλως τὸ ἡμισφαίριον παριστάνεται διὰ 4· λοιπὸν τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μετὰ $2A + 2B + 2Γ - 4$, καὶ ἐπομένως $ΑΒΓ = A + B + Γ - 2$. λοιπὸν καθὲ σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ μεῖον δύο ὀρθῶς γωνίας. σχ. 239.

Πόρισμα Α'. Ὅσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἰς τοῦτο τὸ μέτρον περιέχονται, ἄλλα τόσα τριςσφαιρικὴ τρίαγωνα ἢ ὀγδοα μέρη τῆς σφαίρας τὰ ὅποια εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας (πρό. 20), τὸ προτεθὲν τρίγωνον περιέχει. Ἐάν, φερέειπεν, ἐκάστη τῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς, τότε αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μετὰ 4 ὀρθῶς, καὶ τὸ προτεθὲν τρίγωνον παριστάνεται διὰ $4 - 2$ ἢ 2· λοιπὸν θέλει εἶναι ἴσον μετὰ δύο τριςσφαιρικὴ τρίαγωνα.

Πόρισμα Β'. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι $\frac{A+B+Γ-1}{2}$.

ὁμοίως ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς, τῆς ὁποίας ἡ βᾶσις εἶναι ΑΒΓ, ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι $\frac{A+B+Γ-1}{2}$. (1)

(1) Εἰς τὸ σχῆμα τῆς παραβύσεως προτάσεως ἐπαρκεῖται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποῖαι ἔχουν διὰ βάσεις τὰ κατὰ κερυκὲν τρίαγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὅταν δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται εἰς τὸ ἡμισφαίριον, ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχά τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἡ κατὰ κερυκὲν γωνία τῶν τριγώνων· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐκείνη τοῦ ὄνυχος ἐκφράζεται διὰ τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας τοῦ, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκκενμένων πυραμίδων ἔχει μέτρον τὸ

Σχόλιον. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὅπου παραβάλλεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ μὲ τὸ τρισσορθογώνιον, ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν $AB\Gamma$ παραβάλλεται μὲ τὴν τρισσορθογώνιον πυραμίδα, καὶ προκύπτει ἡ αὐτὴ ἀναλογία. **II** *Σφαιρὰ γωνία* εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος παραβάλλεται ὡσαύτως μὲ τὴν *Σφαιρὰν γωνίαν* τῆς τρισσορθογωνίου πυραμίδος: τῶ ὄντι ἡ σύγκρισις *Σφαιρόνεται* διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μερῶν. Ἰώρα ἐὰν αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ἐφαρμόζωσι, φανερόν ὅτι καὶ αὐταὶ αἱ πυραμίδος ἐφαρμόζουσι, καθὼς καὶ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν των *Σφαιρὰν γωνίαι* ἐνταῦθεν προκύπτουσι πολλὰ συνέπειαι.

1.^{ον} Δύο σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξὺ των ὡς αἱ βάσεις των· καὶ ἐπειδὴ πολυγωνικὴ πυραμὶς ἡμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς πολλὰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐπαταὶ ὅτι δύο ὅποιαιδέποτε σφαιρικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξὺ των ὡς τὰ πολύγωνα τὰ ὅποια χρησιμεύουν εἰς αὐτὰς ὡς βάσεις.

2.^{ον} Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν τῶν ἰδίων πυραμίδων *Σφαιρὰν γωνίαι* εἶναι ἐπίσης εἰς τὴν ἀναλογίαν τῶν βάσεων· λοιπὸν διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ὅποιαςδὲποτε *Σφαιρὰς γωνίας*, πρέπει νὰ θέσωμεν τὰς κορυφὰς των εἰς τὸ κέντρον δύο ἴσων σφαιρῶν, καὶ αἱ *Σφαιρὰν γωνίαι* αὗται θέλουσι εἶναι με-

διπλάσιον τῆς ἰδίας γωνίας. Τούτου τεθέντος διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ *Επιφάνεια* ἐνὶ τριγώνῳ ἔχει μίτρον τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἑξῆς ὡς ἑξῆς: τῶν γωνιῶν των ἐπὶ τῶν εἰς δύο ὁρθὰς ἀποδεικνύεται ἐνταῦθα ὅτι ἡ *Σφαιρὸς* τῆς πυραμίδος ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει μίτρον τὴν ἰδίαν πρὸς τὴν π . Ἡ μόνη διαφορά εἶναι ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐκτρέχει εἰς τὴν πρώτην περίεσιν μονάδας τρισσορθογωνίου τριγώνου, καὶ εἰς τὴν δευτέραν μονάδας *Σφαιρῶν*. Ζητοῦντες τώρα μὲ πάλιν *Δύο* αἱ πυραμίδες $AB\Gamma$ ἰσοδυναμοῦνται πρὸς νὰ κέκωμεν τὴν ἀναλογίαν $A+B+\Gamma=2:8::X:4$. Ἰδὲν $X=4A+4B+4\Gamma-8=4A+4B+4\Gamma-1$. Ο. Μ.

ταῦτων ὡς τὰ πολύγωνα τὰ ἀποχωρίζόμενα μεταξύ τῶν ἐπιπέδων ἢ ἐδρῶν των.

Ἡ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρία ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των· ἡ γωνία αὕτη ἥτις ἡμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ ὀρθὴ σφαιρική γωνία, εἶναι πολλὰ ἀρμοδία διὰ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μέτρου εἰς τὰς σφαιρὰς γωνίας. Τοῦτου τεθέντος, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅστις δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου θέλει δώσει τὸ μέτρον τῆς ἀντικειμένης σφαιρᾶς γωνίας. Ἐάν, φερ' εἰπεῖν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ᾖναι i , τοὔτέστι τὰ i τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, ἡ ἀντικειμένη σφαιρὰ γωνία θέλει εἶναι ὡσαύτως τὰ i τῆς ὀρθῆς σφαιρᾶς γωνίας.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΑ΄.

Θ Ε Ν Η Μ Α.

Ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μείον τὸ γινόμενον δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μείον δύο.

Ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν A ἄς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αἱ διαγώνιοι $ΑΓ, ΑΔ$ τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕ$ θέλει μοιρασθῇ εἰς τόσα τρίγωνα ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ μείον δύο. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια καθὲς τριγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μείον δύο ὀρθῆς, καὶ φανερόν εἶναι ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μείον τοσάκις δύο ὀρθῆς γωνίας ὅσαι πλευραὶ ἔχει παρὰ 2.

Σχόλιον. Ἐστω σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου, n ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ὑποτεθείσῃ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου θέλει ἔχει μέτρον $\sigma - 2(n - 2)$ ἢ $\sigma - 2n + 4$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εστω Σ ὁ ἀριθμὸς τῶν στερεῶν γωνιῶν ἐνὸς πολυέδρου, Θ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν του, Λ ὁ ἀριθμὸς τῶν κόψων του· λίγω ὅτι πάντοτε θέλει εἶναι $\Sigma + \Theta = \Lambda + 2$.

Δ ς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ πολυέδρου μία σιγμὴ ἐκ τῆς ὁποίας ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὰς κυρτάς ὁλων τῶν στερεῶν γωνιῶν τ.υ. ἂς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς ὅτι ἀπὸ τὴν αὐτὴν σιγμὴν ὥς ἀπὸ κέντρον γράφεται σφαιρικὴ ἐπιφανεία ἥτις νὰ συναπαντᾶται ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς γραμμάς εἰς τόσας σιγμάς ἂς ἐνωθῶσι ταῦτα τὰ σημεῖα διὰ τόξων μεγίστων κύκλων, ὥστε νὰ σχηματισθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πολύγωνα ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἑδρας τοῦ πολυέδρου καὶ ἰσάριθμα μὲ αὐτάς. Εστω $ΑΒΓΔΕ$ ἐν τούτων τῶν πολυγώνων (σχ. 240) καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι $\sigma + \nu + 4$ ὅπου σ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $Α, Β, Γ, Δ, Ε$. Εὰν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτιμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου τῶν ἄλλων σφαιρικῶν πολυγώνων, καὶ προσεθῶσιν ὅλας ὁμοῦ, θέλει συναχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας παριστανομένη διὰ 8, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὁλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων, μείον δύο φορές ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν των, πλέον 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσας ἑδρας ἔχει τὸ πολυέδρον. Τώρα, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι συνέρχονται ὁλόγυρα τῆς ἰδίας σιγμῆς Δ ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὁλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσον μὲ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ στερεαὶ γωνίαι· εἶναι λοιπὸν ἴσον μὲ 4Σ . Ακολουθῶς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$. κ. τ. λ. εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόψων ἢ $= 4\Lambda$, ἐπειδὴ ἡ

αὐτὴ κόψις χρησιμεύει ὡς πλευρὰ εἰς δύο ἑδρας· λοιπὸν θέλει εἶναι $8 = 4\Sigma - 4\Lambda + 4\Theta$. ἢ, διαιρεθέντων τῶν δύο μελῶν διὰ 4, $2 = \Sigma - \Lambda + \Theta$. λοιπὸν $\Sigma + \Theta = \Lambda + 2$.

Πόρισμα. Εντεῦθεν ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς σφαιρὰς γωνίας ἐνὸς πολυέδρου εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις τέσσαρας ὀρθὰς, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς $\Sigma - 2$, ὅντος Σ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σφαιρῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου.

Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἑδραν τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι n , τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ταύτης τῆς ἑδρας θέλει εἶναι $2n - 4$ ὀρθαὶ γωνίαι (25, 1). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν $2n$, ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν ἐδρῶν, $= 4\Lambda$, καὶ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ ἑδραι, $= 4\Theta$. λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἐδρῶν $= 4\Lambda - 4\Theta$. Τώρα, κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, $\Lambda - \Theta = \Sigma - 2$, καὶ ἐπομένως $4\Lambda - 4\Theta = 4(\Sigma - 2)$. λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κ. τ. λ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΚΖ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ΓΒ, ΓΑ, καὶ μίαν τρίτην κατ'ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλύτερον ΑΒΓ εἶναι ἐκείνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιεχομένη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς γωνία Γ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Α καὶ Β. σχ. 272 καὶ 273.

Ἀς προεκβληθῶσιν αἱ δύο πλευραὶ ΔΓ, ΔΒ, ὥς οὐ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ· θέλει προκύψει σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ΔΒΓ θέλει εἶναι ὁμοίως ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ΒΔΓ, ΒΕΔ:

Διότι $BΓΔ + BΓΑ$ ἵππειδὴ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ὡς καὶ $ΓΒΑ + ΓΒΔ$, ἔχομεν $BΓΔ + BΓΑ = ΓΒΑ + ΓΒΔ$. προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τῆς $BΔΓ = ΒΑΓ$, προκύπτει $BΓΔ + BΓΑ + BΔΓ = ΓΒΑ + ΓΒΔ + ΒΑΓ$. Τώρα, ἐξ ἐπεθέσεως, $BΓΑ = ΓΒΑ + ΒΑΓ$. λοιπὸν $ΓΒΔ = BΓΔ + BΔΓ$.

Ας ἐχθῇ τὸ τόξον $BΙ$ ὥς νὰ κάμνη τὴν γωνίαν $ΓΒΙ = BΓΔ$, καὶ ἱπομένως $ΙΒΔ = BΔΓ$. τὰ δύο τρίγωνα $ΙΒΓ, ΙΒΔ$, θέλουν εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ θέλει εἶναι $ΙΓ = ΙΒ = ΙΔ$. Λοιπὸν ἡ σιγμὴ $Ι$ μέσον τῆς $ΔΙ$, ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ τὰ τρία σημεία $B, Γ, Δ$: διὰ λόγον παρόμοιον ἡ σιγμὴ $Ο$, μέσον τῆς $ΑΒ$, ἰσάκις θέλει ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς σιγμάς $A, B, Γ$.

Εἰς τὴν τῶρα $ΓΑ' = ΓΑ$ καὶ ἡ γωνία $BΓΑ' > BΓΑ$. ἐὰν ἐπιζυχθῇ ἡ $A'B$, καὶ προσεκληθῶσι τὰ τόξα $A'Γ, A'B$, ὥς οὐ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς A' , τὸ τόξον $Δ'ΓΑ'$ θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια καθὼς καὶ $ΔΓΑ'$. λοιπὸν ἵππειδὴ $ΓΑ' = ΓΑ$, θέλει εἶναι καὶ $ΓΔ' = ΓΔ$. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον $ΓΙΔ'$, ἔχομεν $ΓΙ + ΙΔ' > ΓΔ'$. λοιπὸν $ΙΔ' > ΓΔ - ΓΙ$, ἢ $ΙΔ' > ΙΔ$. σχ. 272.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $ΓΙΒ$ ἄς διαιρεθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς $Ι$ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ τόξου $ΕΙΖ$ τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ $BΓ$. Ἐὰν ληφθῇ μία σιγμὴ $Λ$ μεταξὺ $Ι$ καὶ $Ε$, τὸ διάστημα $ΒΛ$, ἴσον μὲ $ΔΓ$, θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ $ΒΙ$. διότι δυνατόν νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς εἰς τὴν Θ' πρότασιν τοῦ Α' Βιβλίου, ὅτι $ΒΛ + ΔΓ < ΒΙ + ΙΓ$. λοιπὸν μὲ τὰ τὴν διαίρεσιν τῶν δύο μερῶν διὰ δύο θέλει εἶναι $ΒΛ < ΒΙ$. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον $Δ'ΑΓ$ ἔχομεν $Δ'Α > Δ'Γ - ΓΔ$, καὶ πολὺ περισσότερον $Δ'Α > Δ'Γ - ΓΙ$, ἢ $Δ'Α > ΔΙ$, ἢ $Δ'Α > ΒΙ$. λοιπὸν $Δ'Α > ΒΛ$. Ἐκ τούτου ἴπεται ὅτι ἐὰν ἐπὶ τοῦ τόξου $ΕΙΖ$ ζητηθῇ, μία σιγμὴ ἰσάκις ἀπέχουσα τῶν τριῶν σημείων $B, Γ, Δ$, ἡ σιγμὴ αὕτη δὲν ἡμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ παρὰ ἐπὶ

τῆς προεκβολῆς τοῦ τόξου ΕΙ πρὸς τὸ Ζ. Εξω Γ' ἡ ζή-
τουμένη σιγμή, εἰς τρόπον ὥστε Δ'Γ'—ΒΓ'—ΓΓ'· ἐπειδὴ
τὰ τρίγωνα Γ'ΓΒ, Γ'ΓΔ', ΙΒΔ', εἶναι ἰσοσκελῆ, θέλομεν
ἔχει τὰς ἴσας γωνίας Γ'ΒΓ—Γ'ΓΒ, Γ'ΒΔ'—Γ'Δ'Β, Γ'ΓΔ'—
Γ'Δ'Γ. Ἀλλ' αἱ γωνίαι Δ'ΒΓ + ΓΒΔ' κάμνουν δύο ὀρθάς,
καθὼς καὶ Δ'ΓΒ + ΒΓΑ'· λοιπὸν

$$\Delta'ΒΓ + Γ'ΒΓ + Γ'ΒΔ' = 2,$$

$$ΒΓΓ'—Γ'ΓΔ' + ΒΓΔ' = 2.$$

Προσθέτοντες τὰ δύο ἀθροίσματα καὶ παρατηροῦντες
ὅτι Γ'ΒΓ—ΒΓΓ' καὶ Δ'ΒΓ—Γ'ΓΔ'—ΒΔ'Γ'—Γ'Δ'Γ—
ΓΔ'Β = ΓΑ'Β, θέλομεν ἔχει

$$2\Gamma'ΒΓ + \Gamma\Delta'Β + \GammaΒΔ' + ΒΓΑ' = 4.$$

Λοιπὸν $\Gamma\Delta'Β + \GammaΒΔ' + ΒΓΑ' = 2$ (μέτρον τοῦ ἑμ-
βαδοῦ τοῦ τριγώνου Α'ΒΓ) = $2 - 2\Gamma'ΒΓ$ · εἰς τρόπον ὥστε
ἑμβადὸν Α'ΒΓ = $2 - 2$ γωνία Γ'ΒΓ· ὁμοίως εἰς τὸ τρί-
γωνον ΑΒΓ, ἑμβადὸν ΑΒΓ = $2 - 2$ γωνία ΙΒΓ. Τώρα,
ἀπεδείχθη ὅτι ἡ γωνία Γ'ΒΓ εἶναι μείζων τῆς ΙΒΓ (1),
· λοιπὸν τὸ ἑμβადὸν Α'ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒΓ.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις καὶ ἡ αὐτὴ συνέπεια ἤθελον ἔχει
χώραν ἔαν λαμβάνοντες πάντοτε τὸ τόξον ΓΑ'—ΓΔ,
ἐκάμναμεν τὴν γωνίαν ΒΓΑ' < ΒΓΑ· λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι
τὸ μεγαλύτερον τρίγωνον μεταξύ ὧν ἐκείνων τὰ ὅποια
ἔχουν δεδομένας τὰς δύο πλευράς καὶ τὴν τρίτην κατ'
ἀρέσκειαν. σχ. 273.

Σχόλιον Α'. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ μεγαλύτερον με-
ταξὺ ὧν ἐκείνων τὰ ὅποια ἔχουν δύο δεδομένας πλευράς

(1) Αὐτὴ ἔαν ἦτον ἴση τότε ἡ σιγμή Γ' ἔπρεπε νὰ πῶς εἰς Ι καὶ
ἡ ἀπέχουσα σιγμὴ ἰσάκως ἀπὸ Δ', Β, Γ ἤθελον εἶναι ἡ Ι τὰ ὅποιον
ἀπεδείχθη ἀδύνατον· ἔαν δὲ μικρότερα, ἡ σιγμή Γ' ἔπρεπε νὰ ᾔται
μεταξὺ Ι καὶ Ε τὸ ὅποιον εἶναι ἰσάκως ἀδύνατον· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ
ἑντευμένη σιγμὴ Γ' εὐτε εἰς Ι εὐτε μεταξὺ Ι καὶ Ε, εὐρίσκεται,
ἔπεται ὅτι ἡ γωνία Γ'ΒΓ > ΙΒΓ. Ο. Μ.

ΓΑ, ΓΒ, ἢμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος. Διότι ἐὰν Ο ᾖ τὸ μέσον τῆς ΑΒ, εἶδομεν ὅτι τὰ δι-
 σήματα ΟΓ, ΟΒ εἶναι ἴσα· ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ μι-
 κροῦ κύκλου τοῦ ἐκ τῆς σιγμῆς Ο ὡς ἐκ πόλου καὶ μὲ διά-
 σημα ΟΒ γραφομένου διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων
 Α, Β, Γ. Περιπλῖον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος
 τούτου τοῦ μικροῦ κύκλου· διότι τὸ κέντρον τὸ ὅποιον
 ἐνταύτῳ πρέπει νὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ
 κύκλου καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου
 ΒΟΑ (πρό. 1, πόρ. 4), ἀναγκαίως πρέπει νὰ εὐρίσκεται
 εἰς τὴν κοινὴν τομὴν τούτων τῶν δύο ἐπιπέδων ἧτις
 εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΑ, καὶ οὕτω ΒΑ εἶναι διάμετρος. σχ. 24γ.

Β'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση
 μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων Α καὶ Β, ἀκολουθεῖ ὅτι
 τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι διπλάσιον τῆς γωνίας Γ.
 Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον δύο
 ὀρθῶν (19)· λοιπὸν ἡ γωνία Γ εἶναι μεγαλητέρα ὀρθῆς.

Γ'. Ἐὰν προσεβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ ἕως οὗ νὰ
 συναπαντηθῶσιν εἰς Ε, τὸ τρίγωνον ΒΑΕ θέλει εἶναι ἴσον
 μὲ τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Διότι ἡ γω-
 νία $E = \Gamma = \text{ΑΒΓ} + \text{ΓΑΒ}$ · λοιπὸν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώ-
 νου ΒΑΕ γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰς τέσσαρας ΑΒΓ, ΑΒΕ,
 ΓΑΒ, ΒΑΕ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τέσ-
 σαρας ὀρθάς· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΒΑΕ (πρό. 24)
 $= 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2}$ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Δ'. Δὲν ἤθελεν ὑπάρχει μέγιστον ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν
 δύο δεδομένων πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ᾖ ἴσον ἢ μεγαλύτερον
 τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου. Διότι ἐπειδὴ τὸ τρί-
 γωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ ἐγγράφεται εἰς ἡμικύκλιον τῆς σφαί-
 ρας, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἀπαιτεῖται

νὰ ἦναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας BΓB (πρό. 3), καὶ ἐπομένως μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

Ο λόγος διὰ τὸν ὁποῖον δὲν ὑπάρχει μέγιστον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου, εἶναι ὅτι τότε τὸ τρίγωνον αὐξάνει μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀναλόγως ὑποῦ ἢ περιεχομένη γωνία ἀπὸ τῆς δεδομένης πλευρᾶς γίνεται μεγαλύτερα· τέλος ὅταν γένη ἴση μὲ δύο ὀρθάς, αἱ τρεῖς πλευραὶ θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ σχηματίζει ἀκέραιαν περιφέρειαν· τὸ τρίγωνον λοιπὸν θέλει γινῇ ἡμισφαίριον ἀλλὰ παύει ἀπὸ τὸ νὰ ἦναι τρίγωνον. (1)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Κ Ζ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δεδομένην πλευρὰν καὶ δεδομένην περίμετρον, τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο μὴ προσδιωρισμέναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

(1) Ἀφ' οὗ σχηματίζωμεν ἐν τρίγωνον μὲ τὰς δύο δεδομένας πλευρὰς διδόντες κλίσιν εἰς αὐτὰς κατ' ἀρέσκειαν, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦτου τοῦ τριγώνου αὐξάνει ἀναλόγως μὲ τὴν ἀκλίσιν τῆς περιεχομένης γωνίας ἀπὸ τῆς δύο δεδομένης πλευρᾶς, καὶ, κατὰ τὴν ἀποδείχθεισαν πρότασιν, τότε φθάνει εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν, ὅταν ἡ γωνία αὕτη γένη ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· καὶ εἰ τοιοῦτον τρίγωνον, ὡς ἀπεδείχθη, ἔχει τὴν ιδιότητα νὰ ἐγγράφηται εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ χορδὴ τῆς ἀπρὸς διερχέσης πλευρᾶς· ἐκ τοῦ ἐκείνου βουλόγηται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν πρέπει νὰ ἦναι ἐλαττωσεν ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου· ἔπεται λοιπὸν ὅτι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν εἶναι μᾶλλον ἡμιπεριφερείας, ὅσον καὶ ἐν αὐξησθῇ ἡ γωνία ἢ περιεχομένη ἀπὸ τῆς δεδομένης πλευρᾶς δὲν ἡμπερεῖ ποτὲ νὰ δώσῃ ἐν τριγωνοῖς τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν, εἰς τῆς ὅσον ὥστε τὸ τρίγωνον ἡμπορεῖ νὰ λάβῃ ὅποιονδήποτε μέγεθος· καὶ τὸ μέγεθος του κρέμεται ἀπὸ τὸ τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ἀπὸ τῆς δύο δεδομένων πλευρᾶς. Οὕθιν ἴαν αὕτη γένη ἴση μὲ δύο ὀρθάς, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ γίνεται ἴση μὲ τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου· διότι τότε τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ ἐπὶ ταῖς περιέχουσιν τὰς δεδομένας πλευρὰς ταυτίζονται εἰς ἓν, καὶ διὰ τοῦτο αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπε-

Εξω AB ἡ δεδομένη πλευρὰ κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα $ΑΓΒ$, $ΑΔΒ$, καὶ ἔξω $ΑΓ + ΓΒ = ΑΔ + ΔΒ$ · λέγω, ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $ΑΓΒ$, εἰς τὸ ὅποιον $ΑΓ = ΓΒ$, εἶναι μείζον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς $ΑΔΒ$. σχ. 242.

Διότι ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ $ΑΟΒ$, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον $ΒΟΔ$ εἶναι μικρότερον τοῦ $ΑΟΓ$. Ἡ γωνία $ΓΒΑ$ ἴση τῇ $ΓΑΒ$, εἶναι μεγαλύτερα τῆς $ΟΑΒ$ · οὕτως ἡ πλευρὰ $ΑΟ$ εἶναι μείζων τῆς $ΟΒ$ (πρό. 21)· ἄς ληφθῇ $ΟΙ = ΟΒ$ · ἄς γένη $ΟΚ = ΟΔ$, καὶ ἄς ἐπιτευχθῇ $ΚΓ$ · τὸ τρίγωνον $ΟΚΓ$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ $ΔΟΒ$. Εἰάν τώρα τὸ τρίγωνον $ΔΟΒ$ ἢ τὸ ἴσον τοῦ $ΚΟΙ$ δὲν ᾔηται μικρότερον τοῦ $ΟΑΓ$, πρέπει νὰ ᾔηται ἴσον ἢ μεγαλύτερον· καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ I εἶναι μεταξὺ τῶν σιγμῶν A καὶ O , πρέπει ἡ σιγμὴ K νὰ εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς $ΟΓ$, ἄλλως τὸ τρίγωνον $ΟΚΓ$ ἤθελε περιέχεται εἰς τὸ τρίγωνον $ΓΑΟ$, καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶναι μικρότερον. Γούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ σιμοτινιώτερος δρόμος ἀπὸ $Γ$ εἰς A εἶναι $ΓΑ$, ἔχομεν $ΓΚ + ΚΓ + ΓΑ > ΓΑ$. Ἀλλὰ $ΓΚ = ΟΔ - ΓΟ$, $ΑΓ = ΑΟ - ΟΒ$, $ΚΓ = ΒΔ$ · λοιπὸν $ΟΔ - ΓΟ + ΑΟ - ΟΒ + ΒΔ > ΓΑ$, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, $ΑΔ - ΓΒ +$

δ:ν· ἐπειδὴ δὲ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον ἀνάγκη νὰ ἐνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν δύο τεύτων πλευρῶν διὰ τῆς μείζονος κύκλου, ἔπεται ὅτι ὁ μέγιστος κύκλος θέλει συναπαρτῆ τὴν μέγιστον κύκλον τοῦ ἀπείρου μέρους τῆς περιφέρειας εἶναι τὸ ἀθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν, εἰς αὐτὰ τὰ δύο ἄκρα· ἀπὸ ἄλλο μέρος οἱ δύο οὗτοι μέγιστοι κύκλοι δὲν ἔμπορουν νὰ τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι τὸ δεδομένον ἀθροισμα μὲ τὸ νὰ ᾔηται μείζον ἡμιπεριφέρειας, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἐπιδείκνυ μέρους τοῦ ἐνὸς εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφέρειας. ἔπεται λοιπὸν ὅτι οἱ δύο κύκλοι οὗτοι ταυτίζονται· καὶ οὕτως ταυτιζομένης τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου μὲ μέγιστον κύκλον, ἡ ἐπιφανεία τοῦ ταυτίζεται μὲ τὴν τοῦ ἡμισφαίριου· εἰάν λάβῃ μίαν μεγαλητέραν ἀψήσιν ἢ γωνία τὸ τρίγωνον αὐξάνει παρομοίως· ὥς δὲ δύναται νὰ λάβῃ ἐπὶ ἐνθάποτε μέγιστος. Ο. Μ.

$BA > GA$, ἢ $AA + AB > AG + GB$. Τώρα ἡ ἀνισότης αὕτη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν $AA + BA = AG + GB$. λοιπὸν ἡ σιγμὴ K' δὲν ἔμπορεῖ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς OG . λοιπὸν πίπτει μεταξύ O καὶ G , καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον $K'OI$, ἢ τὸ ἴσόν του OAB , εἶναι μικρότερον τοῦ AGO . λοιπὸν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον AIB εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς AAB τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου.

Σχόλιον. Αἱ δύο αὗται τελευταῖαι προτάσεις εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς προτάσεις A' καὶ G' τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ' βιβλίον. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξάξωμεν, ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα, τὰς συναπτείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν χώραν διὰ τὰ εὐθυγράμμα πολύγωνα.

Ἰδοὺ αἱ ἀρχικαί:

1.^α Ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα σφαιρικὰ πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

Ἡ αὕτη ἀπόδειξις μὲ τὴν τῆς B' προτάσεως τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ' βιβλίον.

2.^α Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ πολύγωνα μὲ δεδομένης πλευρᾶς καὶ μίαν τελευταίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔμπορεῖ νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποῖου ἡ χορδὴ τῆς μὴ προσδιωρισμένης πλευρᾶς θελεῖ εἶναι ἡ διάμετρος.

Ἡ ἀπόδειξις συναγέται ἀπὸ τὴν πρότασιν $K\zeta'$, ὡς ἔδομεν εἰς τὴν E' πρότασιν τοῦ ῥηθέντος παραρτήματος. πρέπει διὰ τὴν ὑπαρξιν τοῦ μεγίστου, τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν νὰ ᾖναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

3.^α Τὸ μεγαλύτερον τῶν σχηματιζομένων σφαιρικῶν πολυγώνων μὲ δεδομένης πλευρᾶς, εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τῆς σφαίρας.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὁποῦ καὶ διὰ τὴν ϵ' πρότασιν τοῦ περὶ κερτῆματος εἰς τὸ Δ' βιβλίον ἐδώκαμεν.

4.^{τη} Τὸ μεγαλύτερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας τοῦ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἴσας.

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὰ προηγούμενα 1 καὶ 2 πορίσματα.

. Σημείωσις. Ὅλαι αἱ προτάσεις περὶ μεγίστου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἐφαρμόζονται εἰς τὰς σφαιρικοὺς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦσι ταῦτα τὰ πολύγωνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ Γ' .

ΚΑΙ $\mathbf{Z'}$.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.

Θ Ε Ρ Η Μ Α.

Πέντε μόνον κανονικὰ πολυέδρα ὑπάρχουσι.

Διότι κανονικὰ πολυέδρα ὠρίσαμεν ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἔδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ σφαιρικοὶ γωνίαί ἴσαι μεταξύ των. Αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς πολλὰ ὀλίγας περιπτώσεις ἔχουν χώραν.

1.^α Ἐὰν αἱ ἔδραι ᾖναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καθε σφαιρὴν γωνίαν τοῦ πολυέδρου μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας, ἢ μὲ πάντες γωνίας τούτων τῶν τριγώνων: ἐντεῦθεν γεννῶνται τρία κανονικὰ σώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι, τὸ τετραέδρον, τὸ ὀκταέδρον, καὶ τὸ εἰκο-

σάεδρον. Δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν περισσότερα μὲ ἰσοπλευρά τρίγωνα· διότι ὁ σχηματισμὸς γωνίας τριῶν μὲ ἕξ γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἐπειδὴ ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, εἶναι ἀδύνατος. (21, 5)

2.ον Ἐὰν αἱ ἑδραι ᾖναι τετράγωνα, δυνάμεθα νὰ ἐνῶσωμεν τὰς γωνίας των ἀνὰ τρεῖς· καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ ἑξάεδρον ἢ κύβος.

Τέσσαρες γωνίαι τετραγώνων ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, καὶ δὲν ἡμποροῦν νὰ σχηματίσουν γωνίαν τριᾶν.

3.ον Τέλος ἐὰν αἱ ἑδραι ᾖναι κανονικὰ πεντάγωνα, δυνατόν ἀκόμη νὰ ἐνῶσθῃ αἱ γωνίαι των ἀνὰ τρεῖς, τρεῖς, καὶ ἐκ τούτου προκύπτει τὸ κανονικὸν δωδεκάεδρον.

Δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάγωμεν περαιτέρω· διότι τρεῖς γωνίαι κανονικῶν ἑξαγώνων ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς, καὶ τρεῖς ἑπταγώνων μὲ ἑπταπεντάγωνα.

Λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάρχωσι παρὰ μόνον πέντε κανονικὰ πολυέδρα, τρία σχηματιζόμενα μὲ ἰσοπλευρά τρίγωνα, ἓν μὲ τετράγωνα, καὶ ἓν μὲ πεντάγωνα.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν θέλομεν δεῖξει ὅτι τὰ πέντε ταῦτα πολυέδρα πραγματικῶς ὑπάρχουν, καὶ ὅτι εἶναι δυνατόν, γνωστῆς μιᾶς τῶν ἐδρῶν των, νὰ προσδιορισθῶσιν ἅλαι των αἱ διαστάσεις.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Δεδομένης μιᾶς τῶν ἐδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου, ἢ μόνον τῆς πλευρᾶς του, νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολυέδρον.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο παρῆρσιάζει πέντε τὰ ὅποια διαδοχικῶς θέλομεν λύσει.

Κατασκευὴ τοῦ τετραέδρου.

Εἰς τὴν ΑΒΓ τὸ ἰσοπλευρὸν τρίγωνον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ᾖναι μία τῶν ἐδρῶν τοῦ τετραέδρου· εἰς τὴν ἐπιγμῆν Ο,

κέντρον τούτου τοῦ τριγώνου ἅς ὑψωθῇ $ΟΣ$ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $ΑΒΓ$ · ἅς περατωθῇ ἡ κάθετος αὕτη εἰς τὴν σιγμὴν $Σ$, ὥς $ΑΣ = ΑΒ$ · ἅς ἐπιζευχθῶσιν αἱ $ΣΒ, ΣΓ$, καὶ ἡ πυραμὶς $ΣΑΒΓ$ θελεῖ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράεδρον. σχ. 243.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων διασημάτων $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$, αἱ πλάγαι $ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ$, ἰσάκως ἀπομακρύνονται τῆς κορυφῆς $ΣΟ$ καὶ εἶναι ἴσαι. Ἡ μία τούτων $ΣΑ = ΑΒ$ λοιπὸν αἱ τέσσαρες ἔδραι τῆς πυραμίδος $ΣΑΒΓ$ εἶναι τρίγωνα ἴσα μετὰ τὸ δεδομένον $ΑΒΓ$. Ἀλλως αἱ σερραὶ γωνίαι ταύτης τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι μετὰξὺ των, ἐπεὶ δὴ ἡ καθὼς μία σύγκειται ἀπὸ τρία ἴσα ἐπίπεδα· λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

Κατασκευὴ τοῦ ἑξαέδρου.

Εἰς $ΑΒΓΔ$ δεδομένον τετράγωνον· ἐπὶ τῆς βάσεως $ΑΒΓΔ$ ἅς κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος $ΑΕ$ νὰ ᾖ ἴσον μετὰ τὴν πλευρὰν $ΑΒ$. Φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ ἔδραι τοῦ εἶναι τετράγωνα ἴσα, καὶ αἱ σερραὶ γωνίαι τοῦ εἶναι ἴσαι μετὰξὺ των ὡς συγκείμεναι ἀπὸ τρεῖς γωνίας ὀρθάς· λοιπὸν τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι κανονικὸν ἑξαέδρον ἡ κύβος. σχ. 244.

Κατασκευὴ τοῦ ὀκταέδρου.

Εἰς $ΑΜΒ$ δεδομένον τρίγωνον ἰσοπλευρον· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΑΒ$ ἅς γραφθῇ τὸ τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ · εἰς τὴν σιγμὴν $Ο$ κέντρον τούτου τοῦ τετραγώνου ἅς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἡ κάθετος $ΤΣ$, ἥτις ἅς περατωθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς $Τ$ καὶ $Σ$, εἰς τρόπον ὥς $ΟΤ = ΟΣ = ΑΟ$ · ἅς ἐπιζευχθῶσιν ἀκολουθῶν αἱ $ΣΑ, ΣΒ, ΓΑ, κ.τ.λ$, θελεῖ προκύψει τὸ σερρεὶον $ΣΑΒΓΔΤ$, σύνθετον ἀπὸ δύο τετραγωνικᾶς πυραμίδας $ΣΑΒΓΔ, ΤΑΒΓΔ$, αἱ ὁποῖαι ἐπισηρίζονται ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως $ΑΒΓΔ$ · τὸ σερρεὶον τοῦτο θελεῖ εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκταέδρον. σχ. 245.

Τῷ ὄντι, τὸ τρίγωνον $\Lambda\Omega\Sigma$, καθὼς καὶ τὸ τρίγωνον $\Lambda\Omega\Delta$, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Ω . αἱ πλευραὶ $\Lambda\Omega$, $\Omega\Sigma$, $\Omega\Delta$, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, διὰ τοῦτο $\Lambda\Sigma = \Lambda\Delta$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι τὰ ὅλα τὰ ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα $\Lambda\Omega\Gamma$, $\beta\Omega\Sigma$, $\Gamma\Omega\Gamma$, κ.τ.λ., εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνον $\Lambda\Omega\Delta$ · λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ $\Lambda\beta$, $\Lambda\Sigma$, $\Lambda\Gamma$, κ.τ.λ., εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ ἐπομένως τὸ στερεὸν $\Sigma\Lambda\beta\Gamma\Delta\Gamma$ περιέχεται ὑπὸ ὀκτῶ ἴσων τριγώνων μὲ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον $\Lambda\beta\Gamma\beta$. Λέγω περιπλέον ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ἡ γωνία Σ , φερ' εἰπεῖν, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ β .

Διότι τὸ τρίγωνον $\Sigma\Lambda\Gamma$ εἶναι φανερὰ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $\Delta\Lambda\Gamma$, καὶ οὕτως ἡ γωνία $\Lambda\Sigma\Gamma$ εἶναι ὀρθή· λοιπὸν τὸ σχῆμα $\Sigma\Lambda\Gamma\Gamma$ εἶναι τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον $\Lambda\beta\Gamma\Delta$. Ἀλλ' ἡ σύγκρισις τῆς πυραμίδος $\beta\Lambda\Sigma\Gamma\Gamma$ μὲ τὴν πυραμίδα $\Sigma\Lambda\beta\Gamma\Delta$, δεικνύει ὅτι ἡ θάσις $\Lambda\Sigma\Gamma\Gamma$ τῆς πρώτης ἢμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς θάσεως $\Lambda\beta\Gamma\Delta$ τῆς δευτέρας· τότε ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ Ω εἶναι κοινὸν κέντρον, τὸ ὕψος $\Omega\beta$ τῆς πρώτης θέλει ἐφαρμόσῃ μὲ τὸ ὕψος $\Omega\Sigma$ τῆς δευτέρας, καὶ αἱ δύο πυραμίδες θέλουσι ταυτισθῇ· λοιπὸν ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι ἴση μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν β · τὸ στερεὸν ἄρα $\Sigma\Lambda\beta\Gamma\Delta\Gamma$ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

Σχόλιον. Ἐὰν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι, $\Lambda\Gamma$, $\beta\Delta$, $\Sigma\Gamma$, εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνωνται εἰς τὴν σιγμὴν τῆς ἡμισείας των, τὰ ἄκρα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλουσι εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

Κατασκευὴ τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἦτω $\Lambda\beta\Gamma\Delta\epsilon$ δεδομένον κανονικὸν πεντάγωνον· ἔστωσαν $\Lambda\beta\eta$, $\Gamma\beta\eta$, δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν $\Lambda\beta\Gamma$ · μὲ ταύτας τὰς ἐπίπεδους γωνίας ἃς σχηματισθῇ ἡ στερεὰ γωνία β , καὶ ἃς προσδιορισθῇ διὰ τῆς $\kappa\Delta$ προτάσεως τοῦ

Ε' βιβλίου, ἡ ἀμμιβαία κλίσις δύο τῶν ἐπιπέδων τῆς, τὴν
 ὁποίαν κλίσιν καλῶς Κ. Ἀς σχηματισθῶσι παρομοίως εἰς
 τὰς σιγμὰς Γ, Δ, Ε, Α γωνίαι σεριαὶ ἴσαι μὲ τὴν σεριὰν
 γωνίαν Β, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κείμεναι: τὰ
 ἐπίπεδον ΓΒΠ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐπίπεδον
 ΒΓΗ, διότι καὶ τὰ δύο κλίνουν τὴν αὐτὴν ποσότητα
 Κ' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Δυνάμεθα λοιπὸν εἰς τὸ ἐπί-
 πεδον ΠΒΓΗ νὰ γράψωμεν τὸ πεντάγωνον ΒΓΗΖΠ ἴσον
 μὲ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν εἰς
 ἕκαστον τῶν ἄλλων ἐπιπέδων ΓΔΙ, ΔΕΛ, κ. τ. λ., θέλομεν
 εἶχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΠΖΗΘ, κ. τ. λ. σύνθετον
 ἀπὸ ἕξ κανονικὰ πεντάγωνα ἴσα καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων
 κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν αὐτὴν ποσότητα Κ.
 Εἰς πζηθ, κ. τ. λ., μία δευτέρα ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴν
 ΠΖΗΘ, κ. τ. λ. λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἤμπο-
 ροῦν νὰ ἐνωθῶν εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσουν μίαν μό-
 νην συνεχῆ κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Τῷ ὄντι ἡ γωνία οπζ, πα-
 ραδείγματος χάριν, ἠμπορεῖ νὰ ἐνωθῇ μὲ τὰς δύο γωνίας
 ΟΠΒ, ΒΠΖ, ὥστε νὰ γένῃ μία σεριὰ γωνία Π ἴση τῇ γω-
 νίᾳ Β' καὶ εἰς ταύτην τὴν ἐνωσιν οὐδαμῶς τροπὴ θέλει
 προξενηθῇ εἰς τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΒΠΖ, ΒΠΟ, διότι
 ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ὁποία πρέπει νὰ ᾔηται διὰ τὸν σχη-
 ματισμὸν τῆς σεριᾶς γωνίας. Ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ σεριὰ γωνία
 Π σχηματίζεται, ἡ πλευρὰ πζ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν
 ἴσην τῆς ΠΖ, καὶ εἰς τὴν σιγμὴν Ζ θέλουν εὐρεθῇ ἐνωμέναι
 τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΠΖΗ, πζε, εζη, αἱ ὁποῖαι θέλουν
 σχηματίσει γωνίαν σεριὰν ἴσην μὲ ἐκάστην τῶν ἤδη σχη-
 ματισμένων' ἡ ἐνωσις αὕτη θέλει γένῃ χωρὶς τὴν παραμι-
 κρὸν τροπὴν οὔτε τῆς γωνίας Π, οὔτε τῆς ἐπιφανείας εζηθ,
 κ. τ. λ. διότι τὰ ἐπίπεδα ΠΖΗ, εζπ ἤδη ἐνωθέντα εἰς Π,
 ἔχουν μεταξύ των τὴν ἀρμοδίαν κλίσιν Κ, καθὼς καὶ τὰ
 ἐπίπεδα εζη, εζπ. Εἰς αὐτοὺς οὕτω κατὰ διαδοχὴν

βλέπομεν ὅτι αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην ὥς νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν καὶ εἰς ἑαυτὴν ἐπανερχομένην· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θελεῖ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κανονικοῦ δωδεκαέδρου, ὡς σύνθετος ἀπὸ δώδεκα ἴσα κανονικὰ πεντάγωνα, καὶ ἐπειδὴ ὅλαι τοῦ αἱ σεριαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 246.

Κατασκευὴ τοῦ εἰκοσαέδρου.

Εἰς τὴν $AB\Gamma$ μίαν τῶν ἰδρῶν τοῦ· πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ σχηματισθῇ γωνία σεριὰ μὲ πέντε ἴσα ἐπίπεδα μὲ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$ καὶ ἕκασον τῶν ὁποίων ἰσάκις νὰ κλίνη ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του. Πρὸς τοῦτο, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, ἴσης μὲ τὴν $B\Gamma$, ἄς κατασκευασθῇ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον $B\Gamma\Theta\Gamma\Delta$. εἰς τὸ κέντρον τούτου τοῦ πενταγώνου ἄς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μία κάθετος, ἥτις ἄς περατωθῇ εἰς A' εἰς τρόπον ὥς $B'A' = B'\Gamma'$ · ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ $A'\Gamma'$, $A'\Theta'$, $A'\Gamma'$, $A'\Delta'$, καὶ ἡ σεριὰ γωνία A' σχηματισμένη ἀπὸ τὰ πέντε ἐπίπεδα $B'A'\Gamma'$, $\Gamma'A'\Theta'$ κ. τ. λ. θελεῖ εἶναι ἡ ζητούμενη σεριὰ γωνία. Διότι αἱ πλάγιοι $A'B'$, $A'\Gamma'$, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, καὶ μία τούτων $A'B'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ · λοιπὸν ὅλα τὰ τρίγωνα $B'A'\Gamma'$, $\Gamma'A'\Theta'$, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον $AB\Gamma$. σχ. 247.

Ἀλλως δὲ φανερόν εἶναι ὅτι ἕκασον τῶν ἐπιπέδων $B'A'\Gamma'$, $\Gamma'A'\Theta'$, κ. τ. λ. ἰσάκις κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του· διότι αἱ σεριαὶ γωνίαι B', Γ' , κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς σχηματισμέναι μὲ δύο γωνίας ἰσοπλευρῶν τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου. Ἀς καλέσωμεν K τὴν κλίσιν δύο ἐπιπέδων ὅπου εὐρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἡ ὁποία δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς $K\Delta'$ προτάσεως τοῦ E' βιβλίου· ἡ γωνία K θελεῖ εἶναι ἐνταῦθα ἡ κλίσιν ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων ἰὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν σεριαν γωνίαν A' ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν εἰς τὰς σιγμὰς A, B, Γ , κάμωμεν γωνίας σφαιρᾶς ἐκάστη τῶν ὁποίων νὰ ᾖται ἴση μὲ τὴν γωνίαν A' , θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΔEZH , κ. τ. λ. σύνθετον ἀπὸ δέκα ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων θέλει κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν ποσότητα K' καὶ αἱ γωνίαι Δ, E, Z , κ. τ. λ. τῆς περιμέτρου τῆς θέλουν ἐνόνει ἀλλήλο διαδόχως τρεῖς καὶ δύο γωνίας γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων. Ἀς φαντοθῶμεν μίαν δευτέραν ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔEZH , κ. τ. λ. αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἡμποροῦν ἀμοιβαίως νὰ ἐφαρμόσασιν, ἐνομένης ἐκάστης τριπλῆς γωνίας τῆς μιᾶς μὲ μίαν διπλὴν τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν τούτων ἔχουν ἤδη μεταξύ των τὴν ἀνγκαίαν κλίσιν διὰ τὸν σχηματισμὸν σφαιρᾶς πενταπλῆς γωνίας ἴσης μὲ A , οὐδαμιά μεταβολὴ εἰς ταύτην τὴν ἐνῶσιν θέλει προξενηθῇ εἰς ἐκάστην ἐπιφάνειαν κατὰ μέρος, καὶ αἱ δύο ὁμοῦ θέλουν σχηματίσει μίαν μὴν συνεχῇ ἐπιφάνειαν, σύνθετον ἀπὸ εἴκοσι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου, διότι περιπλέον ὅλαι αἱ σφαιραὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἡ κλίσις αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων· εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν $K\Delta'$ πρότασιν τοῦ E' βιβλίου, διὰ τῆς ὁποίας, δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν σφαιρὰν γωνίαν, προσδιορίζεται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των.

Εἰς τὸ τετράεδρον. Ἐκάστη σεριὰ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων· πρέπει λοιπὸν νὰ ζητηθῇ διὰ τοῦ ρηθέντος προβλήματος ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των· ἡ γωνία αὕτη θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ τετραέδρου. σχ. 243.

Εἰς τὸ ἐξέδρον. Ἡ γωνία δύο προσκειμένων ἐδρῶν εἶναι ὀρθή. σχ. 244.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον. Ἀς σχηματισθῇ γωνία σεριὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν ὀρθήν· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὅποια εὐρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ ὀκταέδρου. σχ. 245.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον. Ἐκάστη σεριὰ γωνία σχηματίζεται μὲ τρεῖς γωνίας κανονικῶν πενταγώνων. Οὕτως ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων δύο τούτων τῶν γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ τῶν δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου. σχ. 246.

Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον. Ἀς σχηματισθῇ γωνία σεριὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου· ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὰ ὅποια εὐρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἐδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου. σχ. 247.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ΄.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυέδρου, νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ ἐκείνην τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολυέδρον σφαίρας.

Πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι καθε κανονικὸν πολυέδρον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ νὰ περιγραφθῇ εἰς αὐτήν. σχ. 248.

Ἐξω AB ἡ κοινὴ πλευρὰ εἰς δύο προσκειμένας ἑδρας
 ἔξωσαν Γ καὶ E τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων ἐδρῶν, καὶ
 $\Gamma\Delta$, $E\Delta$ αἱ ἡγμέναι κάθετοι ἀπὸ ταῦτα τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς
 κοινῆς πλευρᾶς AB , αἱ ὅποια θέλουν πέσει εἰς τὴν σιγμὴν
 Δ , μέσον ταύτης τῆς πλευρᾶς. Αἱ δύο κάθετοι $\Gamma\Delta$, $E\Delta$,
 κάμνουν μεταξὺ τῶν μίαν γωνίαν γωνίαν ἥτις εἶναι ἴση
 μὲ τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἐδρῶν, προσδ. ὀριζομένην
 διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος. Τώρα ἐάν, εἰς τὸ
 ἐπίπεδον $\Gamma\Delta E$, κάθετον εἰς AB , ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$ καὶ
 $E\Delta$ αἱ ἀπροσδιόριστοι κάθετοι ΓO καὶ $E O$, αἱ ὅποια συνα-
 παντῶνται εἰς O , λέγω ὅτι ἡ σιγμὴ O θέλει εἶναι τὸ κέν-
 τρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας·
 οὕσης τῆς ἀκτίνος τῆς πρώτης $O\Gamma$, καὶ τῆς δευτέρας $O\Lambda$.
 Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὰ ἀποσήματα $\Gamma\Delta$, $E\Delta$, εἶναι ἴσα,
 καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΔO κοινὴ, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Gamma\Delta O$
 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $O\Delta E$ (18, 1), καὶ
 ἡ κάθετος $O\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον $O E$. Ἀλλ' ἐπειδὴ
 AB εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta E$, τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$
 εἶναι κάθετον εἰς $\Gamma\Delta E$, (17, 5), ἡ $\Gamma\Delta E$ εἰς $AB\Gamma$ περι-
 πλῆον ΓO , εἰς τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta E$, εἶναι κάθετος εἰς $\Gamma\Delta$,
 κοινήν τομὴν τῶν ἐπιπέδων $\Gamma\Delta E$, $AB\Gamma$ λοιπὸν ΓO (18, 5)
 εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον
 $E O$ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ABE · λοιπὸν αἱ δύο
 κάθετοι ΓO , $E O$ ἡγμέναι εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμέ-
 νων ἐδρῶν ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν ἰδίων, συναπαντῶνται εἰς
 τὴν αὐτὴν σιγμὴν καὶ εἶναι ἴσαι. Ἀς ὑποθέσωμεν τώρα
 ὅτι $AB\Gamma$ καὶ ABE παριστάνουν δύο ἄλλας ὁποιασδήποτε
 προσκειμένας ἑδρας, τὸ ἀπόστημα $\Gamma\Delta$ πάντοτε θέλει μένει
 τοῦ ἰδίου μεγέθους, καθὼς καὶ ἡ γωνία $\Gamma\Delta O$, ἡμίσεια τῆς
 $\Gamma\Delta E$ · λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Gamma\Delta O$ καὶ ἡ πλευ-
 ρὰ τοῦ ΓO θέλουν εἶναι ἴσα δι' ὅλας τὰς ἑδρας τοῦ πολυ-
 ἑδρου· ἐάν λοιπὸν ἀπὸ τὴν σιγμὴν O ὥς ἀπὸ κέντρον καὶ

μέ την ἀκτῖνα ΟΓ γράψωμεν μίαν σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη θέλει ἄπτεται ὅλων τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα των (διότι τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΑΒΕ, θέλουν εἶναι κάθετα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος), καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολυέδρον, ἢ τὸ πολυέδρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ας ἐνωθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἐπειδὴ $ΓΑ = ΓΒ$, αἱ δύο πλάγιαί ΟΑ, ΟΒ, μὲ τὸ νὰ ἀπομακρύνωνται ἰσάκεις τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ὁποιαδήποτε ἄλλας γραμμὰς ἡγμένας ἀπὸ τὸ κέντρον Ο εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς· ὅλαι λοιπὸν αὗται αἱ γραμμαὶ εἶναι ἴσαι μεταξὺ των· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν σιγμὴν Ο ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ γραφθῇ σφαιρική ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει διελθῇ διὰ τῶν κορυφῶν ὅλων τῶν σφαιρῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολυέδρον, ἢ τοῦτο ἐγγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Τούτου τεθέντος, ἡ λύσις τοῦ προτεθέντος προβλήματος δὲν ἔχει καμμίαν δυσκολίαν καὶ ἡμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ ὡς ἀκολούθως.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς μιᾶς ἑδρας τοῦ πολυέδρου, ἥ γραφθῇ αὕτη ἡ ἑδρα, καὶ ἔσω ΓΔ τὸ ἀπόστημά της. Ας ζητηθῇ διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἥ γένῃ ἡ γωνία ΓΔΕ ἴση μὲ ταύτην τὴν κλίσιν. Ας ληφθῇ ΔΕ ἴση μὲ ΓΔ, ἥς ἀχθῶσιν αἱ ΓΟ καὶ ΕΟ κάθετοι ἐπὶ ΓΔ καὶ ΕΔ· αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς μίαν σιγμὴν Ο, καὶ ΓΟ θέλει εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ πολυέδρον. σχ. 249.

Επὶ τῆς προσκρούσας τῆς ΔΓ ἥς ληφθῇ ΓΑ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς μίαν ἑδραν τοῦ

πολύεδρον, καὶ OA θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολυέδρον σφαίρας.

Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\Gamma\Delta O$, $\Gamma\Lambda O$, τοῦ σχήματος 249, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρίγωνα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἰς τὸ σχῆμα 248: οὕτως, ἐν ᾧ $\Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma\Lambda$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς μίαν ἔδραν τοῦ πολυέδρου, $ΟΓ$ καὶ $ΟΑ$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολυέδρον.

Σχόλιον. Ἡμποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν ἀπὸ τὰς προηγουμένας προτάσεις πολλὰς συνεπείας.

1.^{ον} Κάθε κανονικὸν πολυέδρον ἡμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας ὅσας ἔδρας ἔχει τὸ πολυέδρον: ἡ κοινὴ κορυφή τούτων τῶν πυραμίδων θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ πολυέδρου, τὸ ὅποιον εἶναι ἐνταύτῃ ἐκεῖνο τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης.

2.^{ον} Ἡ σφαιρὴ ἐνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τὸ τρίτημόριον τῆς ἀκτίνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

3.^{ον} Δύο κανονικὰ πολυέδρα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἶναι δύο ὅμοια στερεὰ, καὶ αἱ ὁμολογοὶ διαστάσεις των εἶναι ἀνάλογοι: λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ πλευραὶ τούτων τῶν πολυέδρων.

4.^{ον} Ἐὰν ἐγγραφθῇ κανονικὸν πολυέδρον εἰς μίαν σφαῖραν, τὰ ἡγμένα ἐπίπεδα ἀπὸ τὸ κέντρον κατὰ τὰς διαφόρους πλευρὰς θέλουσι μοιράσει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τόσα ἴσα καὶ ὅμοια σφαιρικὰ πολύγωνα ὅσας ἔδρας ἔχει τὸ πολυέδρον.

ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΑ ΣΩΜΑΤΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. **Κ**αλεῖται κύλινδρος τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τῆν περιστροφῆν ἐνὸς ὀρθογωνίου $ΑΒΓΔ$, ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς $ΑΒ$. σχ. 250.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν αἱ πλευραὶ $ΑΔ$, $ΒΓ$, πάντοτε μένουσαι κάθετοι ἐπὶ τῆς $ΑΒ$, γράφουσιν ἴσα κυκλικὰ ἐπίπεδα $ΑΘΠ$, $ΓΗΚ$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται βάσεις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἡ πλευρὰ $ΓΔ$ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφανείαν τοῦ.

Ἡ ἀκίνητος γραμμὴ $ΑΒ$ καλεῖται ἄξων τοῦ κυλίνδρου.

Κάθε τομὴ $Κ'ΑΜ$, γινομένη εἰς τὸν κύλινδρον κατὰ κάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος ἴσος μὲ ἐκάστην τῶν βάσεων· διότι ἐν ᾧ τὸ ὀρθογώνιον $ΑΒΓΔ$ στρέφεται ὁλόγυρα τῆς $ΑΒ$, ἡ γραμμὴ $ΙΚ'$ κάθετος εἰς τὴν $ΑΒ$, γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον ἴσον μὲ τὴν βάση, καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ γινομένη τομὴ κατακάθετον τοῦ ἄξονος εἰς τὴν σιγμὴν $Ι$.

Κάθε τομὴ $ΠΚΘΗ$, γινομένη διὰ τοῦ ἄξονος, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος $ΑΒΓΔ$.

Β΄. Καλεῖται κῶνος τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀπὸ τῆν περιστροφῆν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ΣΑΒ$, ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς $ΣΑ$. σχ. 251.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἡ πλευρὰ $ΑΒ$ γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον $ΒΔΓΕ$, τὸ ὁποῖον καλεῖται βάση τοῦ κώνου,

καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΣΑ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.

Ἡ τριγμὴ Σ κλείται κορυφὴ τοῦ κώνου, ΣΑ ἄξων ἢ ὕψος, καὶ ΣΒ πλευρὰ ἢ ἀπόστημα.

Κάθε τομὴ ΘΚ'ΖΙ γινομένη κατακάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος· κάθε δὲ τομὴ ΣΔΕ διὰ τοῦ ἄξονος γινομένη εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΣΑΒ.

Γ'. Εἰάν ἀπὸ τὸν κώνον ΣΓΔΒ ἀφαιρεθῇ διὰ τομῆς παραλλήλου τῆς βάσεως, ὁ κώνος ΣΖΚ'Θ, τὸ ἑναπομένον τμήμα ΓΒΘΖ καλεῖται κολοβὸς κώνος ἢ κορμὸς κώνου.

Δυναμέθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι γράφεται ἀπὸ τὴν περιτροφὴν τοῦ τραπεζίου ΑΒΘΗ, τοῦ ὁποῖου αἱ γωνίαι Δ καὶ Η εἶναι ὀρθαί, ὁλόγυρα τῆς πλευρᾶς ΑΗ. Ἡ ἀκίνητος γραμμὴ ΑΗ καλεῖται ἄξων ἢ ὕψος τοῦ κορμοῦ, οἱ κύκλοι ΒΔΓ, ΘΖΚ', εἶναι αἱ βάσεις του, ἡ δὲ ΒΘ ἢ πλευρὰ του.

Δ'. Δύο κύλινδροι ἢ δύο κῶνοι εἶναι ὅμοιοι ὅταν οἱ ἄξονές των ᾖναι μεταξύτων ὡς αἱ διαμέτροι τῶν βάσεών των.

Ε'. Εἰάν εἰς τὸν κύκλον ΑΓΔ ὅσες χρησιμεύει ὡς βάσεις εἰς ἕνα κύλινδρον, ἐγγραφθῇ πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ὑψωθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοῦς μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἢ ὁ κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 252.

Φανερόν ὅτι ἐπειδὴ αἱ κόψεις ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ.τ.λ, τοῦ πρίσματος, εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, περιέχονται εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα καὶ ὁ κύλινδρος ἄπτονται κατὰ ταύτας τὰς κόψεις.

Ζ'. Παρομοίως, εἰάν ΑΒΓΔ ᾖναι πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς κυλίνδρου, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως

ΑΒΓΔ κατασκευασθῇ ὁρθὸν πρίσμα ἰσοῦς μετὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἢ ὁ κύλινδρος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 253.

Εςῶσαν Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ σιγμαὶ τῆς ἀφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. καὶ ἅς ὑψωθῶσιν ἀπὸ τὰς σιγμᾶς Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ κάθετοι ΜΧ, ΝΨ, κ. τ. λ. εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· φανερόν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται θέλουν εἶναι ἐνταύτῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καὶ εἰς τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος· λοιπὸν θέλουν εἶναι αἱ γραμμαὶ κατὰ τὰς ὁποίας ἄπτονται.

Σ. Κ. Ο κύλινδρος, ὁ κῶνος, καὶ ἡ σφαῖρα, εἶναι τὰ τρία σρογγύλα σώματα περὶ τῶν ὁποίων γίνεταί λόγος εἰς τὰ στοιχεῖα.

Προοιμιώδη λήμματα ἐπάνω εἰς τὰς ἐπιφανείας.

Α'.

Μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικρότερα ἀπὸ καθε ἀλλήν ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, ἥτις περατοῦται εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ. σχ. 254.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι τόσον φανερά ὥστε ἔπρεπε νὰ συγκαταριθμῇ μεταξὺ τῶν ἀξιωμάτων· διότι δυνατόν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν ὅ,τι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ μεταξὺ τῶν γραμμῶν· ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ σιμοτινωτέρα μεταξὺ δύο δεδομένων σημείων, ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἡ μικρότερα ἐπιφάνεια μεταξὺ ὁλῶν ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον· πλὴν ἐπειδὴ τὰ ἀξιώματα πρέπει νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὸν ὅσον τὸ δυνατόν μικρότερον ἀριθμὸν, ἰδοὺ εἰς συλλογισμὸς ὅστις κἄμμιάν ἀμφιβολίαν δὲν θέλει ἀφήσει ἐπάνω εἰς ταύτην τὴν πρότασιν.

Ἐπειδὴ μία ἐπιφάνεια εἶναι ἐκτασις μῆκος καὶ πλάτος ἔχουσα, ἀδύνατον νὰ νοηθῇ ὅτι μία ἐπιφάνεια εἶναι μεγα-

λητέρα μιᾶς ἄλλης, χωρὶς αἱ διαστάσεις τῆς πρώτης νὰ ὑπερέχῃσι κατὰ τινὰς ἐννοίας τὰς τῆς δευτέρας· καὶ ἐὰν ἀκυλουθῇσθι ὅτι αἱ διαστάσεις ἐπιφανείας τινὸς καθ' ὅλας τὰς ἐννοίας εἶναι μικρότεραι τῶν διαστάσεων ἄλλης ἐπιφανείας, φανερόν ὅτι ἡ πρώτη θέλει εἶναι ἡ μικρότερα τῶν δύο. Ἰώρα καθ' ὅποιαν ἐννοίαν καὶ ἂν διελθῇ τὸ ἐπίπεδον ΒΠΔ, τὸ ὅποσον τὴν μὲν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν θέλει τέμνει κατὰ τὴν ΒΔ, τὴν δὲ ἄλλην ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ΒΠΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΔ πάντοτε θέλει εἶναι μικρότερα τῆς ΒΠΔ· ἡ ἐπίπεδος λοιπὸν ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικρότερα τῆς περικυκλούσης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ.

Β'.

Καθε κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικρότερα ὅποι-
αςδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας ἣτις ἐπιστηριζομένη ἐπὶ τῆς
αὐτῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ ἤθελε περικυκλίνει τὴν πρώτην.
σχ. 255.

Ἐπαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα ὅτι διὰ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐννοοῦμεν ἐπιφάνειαν ἣτις δὲν δύναται νὰ συναπληρωθῇ ἀπὸ εὐθείαν γραμμὴν εἰς περισσύτερα ἀπὸ δύο σημεῖα· καὶ ὅμως δυνατόν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀκριβῶς νὰ ἐφαρμόζεται κατὰ τινὰ ἐννοίαν ἐπὶ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας· βλέπομεν τούτου παραδείγματα εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ κυλίνδρου. Παρατηροῦμεν προσέτι ὅτι ἡ ὀνόμασις κυρτὴ ἐπιφάνεια δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανείας· ἀλλὰ περιλαμβάνει καὶ τὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανείας ἢ συνθέτους ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα, καὶ, ὁμοίως τὰς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι εἶναι μέρος καμπύλης, καὶ μέρος πολυεδρικαί.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ δὲν ᾔῃαι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τὴν περικυκλόνουν, ἔστω μεταξὺ τούτων ΠΑΒΓΔ ἡ μικρότερα ἐπιφάνεια ἡ ὁποία τὸ πολὺ θέλει εἶναι ἴση μὲ ΟΑΒΓΔ. Δι' ὁποίαςδήποτε

ποτε συγκλῆς Ὁ ἄς διελθὼν ἐπὶ πῆδον τὸ ὁποῖον νὰ ἀπτεται τῆς ἐπιφανείας $OAB\Gamma$ χωρὶς νὰ τὴν τέμνῃ· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει συναπαντήσῃ τὴν ἐπιφάνειαν $\Pi AB\Gamma$, καὶ τὸ μέρος τὸ ὁποῖον ἀπ' αὐτὴν θέλει ἀφαιρέσει ὅλ' εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐπίπεδου τὸ ὁποῖον τελειώνει εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν (λῆμμ. A'): λοιπὸν, φυλαττομένου τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐπιφανείας $\Pi AB\Gamma$, δυνατόν ἀντὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μέρους νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ ἐπίπεδον, καὶ ἤθελε προκύψῃ νέα ἐπιφάνεια ἣτις ἤθελε περικυκλῶναι τὴν ἐπιφάνειαν $OAB\Gamma$, καὶ ἤθελεν εἶναι μικρότερα τῆς $\Pi AB\Gamma$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη εἶναι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας· τοιαύτη λοιπὴν ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· ὅθεν ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $OAB\Gamma$ εἶναι μικρότερα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἣτις τελεινύσῃ εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον $AB\Gamma$ ἤθελε περικυκλῶναι τὴν $OAB\Gamma$.

Σχόλιον. Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδείξῃ.

1.^{ον} ὅτι, ἐὰν μία κυρτὴ ἐπιφάνεια περατουμένη ἀπὸ δύο περιμέτρους $AB\Gamma$, $\Delta E\Z$, περικυκλοῦται ἀπὸ ὁποιανδήποτε ἄλλην ἐπιφάνειαν εἰς τὰς αὐτὰς περιμέτρους περατουμένην, ἢ περικυκλουμένη θέλει εἶναι ἡ μικρότερα τῶν δύο. σχ. 256.

2.^{ον} ὅτι, ἐὰν μία κυρτὴ ἐπιφάνεια AB περικυκλοῦται πανταχόθεν ἀπὸ μίαν ἄλλην MN , εἴτε ἔχουσι σημεῖα, γραμμὰς ἢ ἐπίπεδα κοινὰ, εἴτε δὲν ἔχουσι κανὲν κοινὸν σημεῖον, ἢ περικυκλουμένη πάντοτε θέλει εἶναι μικρότερα τῆς περικυκλούσης.

Διότι μεταξύ τούτων ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ καμμμία ἣτις νὰ ᾖναι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας, ἐπειδὴ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις δυνατόν νὰ ἴχθῃ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta$ ἐφαπτόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας $\Gamma M\Delta$ (λῆμμ. A') καὶ οὕτως ἡ ἐπιφάνεια $\Gamma N\Delta$ ὅλ' ἦτον μικρότερα τῆς MN , τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν

ὑπόθεσιν ὅτι ἡ MN εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὕψους. Ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια AB εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὰς ὁσας τὴν περικυκλόνουν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Π Ρ Ω Τ Η.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ σφαιρότης ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Εἶπω ΓA ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος του· ἃς παραστήσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓA τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓA · λογώ ὅτι ἡ σφαιρότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι ἐπιφ. $\Gamma A \times \Upsilon$. Διότι, ἐὰν ἐπιφ. $\Gamma A \times \Upsilon$ δὲν ἦναι τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, τὸ γινόμενον τοῦτο θέλει εἶναι τὸ μέτρον ἐνὸς κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου. Καὶ πρῶτον μὲν ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι τὸ μέτρον ἐνὸς κυλίνδρου μικροτέρου, φηρ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓA εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ας περιγραφῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓA , κανονικὴν πολύγωνον τὸ $H\Theta I\Pi$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓA εἶναι ἡ ἀκτὶς (10, 4). Ας ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς ὀρθὸν πρίσμα βάσει ἔχον τὸ πολύγωνον $H\Theta I\Pi$, καὶ ὕψος Υ , τὸ ὅποion πρίσμα θέλει εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓA . Τούτου τεθέντος, ἡ σφαιρότης τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν $H\Theta I\Pi$, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος Υ · ἡ βᾶσις $H\Theta I\Pi$ εἶναι μικροτέρα τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓA εἶναι ἡ ἀκτὶς· ἡ σφαιρότης λοιπὸν τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ἐπιφ. $\Gamma A \times \Upsilon$. Ἀλλὰ ἐπιφ. $\Gamma A \times \Upsilon$ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ σφαιρότης τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πρίσμα κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου.

τώρα, ἐξ ἐναντίας, ὁ κύλινδρος εἶναι μικρότερος τοῦ πρίσματος ὡς περιεχόμενος· ἀδύνατον λοιπὸν ἐπιφ. ΓΔΧΥ νὰ ᾖναι τὸ μέτρον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἄκτις τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος· ἢ, μὲ γενικωτέρους ὅρους, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὕψους του δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρῇ μικρότερον κύλινδρον.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρῇ μεγαλύτερον κύλινδρον· διότι, διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάσωμεν τὰ σχήματα, ἔσω ΓΔ ἡ ἄκτις τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ ἔτω, εἰ δυνατόν, ἐπιφ. ΓΔΧΥ τὸ μέτρον μεγαλύτερου κυλίνδρου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἄκτις τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος.

Εὰν γένη ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὴν πρώτην περίετασιν, τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν δεδομένον κύλινδρον πρίσμα θέλει ἔχει μέτρον ΗΘΙΠΧΥ: τὸ ἐμβαδὸν ΗΘΙΠ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ ἐπιφ. ΓΔ· λοιπὸν ἡ τρεῦτης τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος πρίσματος εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΔΧΥ: τὸ πρίσμα λοιπὸν ἤθελεν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἰσοῦψοῦς κυλίνδρου ὅστις ἔχει βάσιν ἐπιφ. ΓΑ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ πρίσμα, ὡς περιεχόμενον, εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ θάσις ἐνὸς κυλίνδρου πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ ὕψους του νὰ ᾖναι τὸ μέτρον ἐνὸς μεγαλύτερου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ τρεῦτης ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα Α'. Οἱ ἰσοῦψοι κύλινδροι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ οἱ κύλινδροι τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Πόρισμα Β'. Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὕψων, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων.

Διότι αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων τῶν· καὶ ἐπειδὴ οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων εἶναι ὡς τὰ ὕψη (ὁρ. 4.) λοιπὸν αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν· ὅθεν αἱ βάσεις πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τὰ ὕψη, ἢ οἱ ἴδιοι κύλινδροι, εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν.

Σχόλιον. Ἐστω A ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως ἐνὸς κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως θέλει εἶναι πA^2 (12, 4), καὶ ἡ σφαιρότης τοῦ κυλίνδρου $\pi A^2 \times \Upsilon$ ἢ $\pi A \Upsilon$. —

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Β'.

Λ Η Μ Μ Α.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων $AZHB$, $BH\Theta\Gamma$, $\Gamma\Theta\Delta$, κ.τ.λ. ἀτὼ τὰ ὅποια συγκροτεῖται· τώρα τὰ ὕψη AZ , BH , $\Gamma\Theta$, κ.τ.λ. τούτων τῶν ὀρθογωνίων εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· αἱ βάσεις τῶν AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ κ.τ.λ. ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν ὀρθογωνίων ἢ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του. σχ. 252.

Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο ὀρθῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περιμέτροι τῶν βάσεών των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ'.

Λ Η Μ Μ Α.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καθὲ ἐγγεγραμμένου πρίσματος,

ἀλλὰ μικρότερα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου.

Διότι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος $ΑΒΓΔΕΖ$ ἡμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μῆκος, διότι κάθε τομὴ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην παραλλήλως τῇ AZ γινομένη, εἶναι ἴση μὲ τὴν AZ . ἔὰν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῆς βάσεως ἢ καθέτων εἰς τὴν κόψιν AZ , αἱ προκύπτουσαι τομαὶ θέλουν εἶναι τὰ πλάτη τούτων τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ἴσαι, ἡ μὲν, μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, ἡ δὲ, μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔΕ$. μικρότεραν ταύτης τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἔχει μὲν μῆκος ἴσον μὲ τὴν πρισματικὴν, πλάτος δὲ μεγαλύτερον, ἔπεται ὅτι εἶναι μεγαλύτερα. σχ. 252.

Διὰ συλλυγισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῆναι ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικρότερα τῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου πρίσματος $ΒΓΔΚ'ΑΘ$. σχ. 253.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Δ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του πολλαπλασιασθεῖσαν.

Εἰς τὸ $ΓΑ$ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, $Υ$ τὸ ὕψος του· ἔὰν παραστήσωμεν διὰ περ. $ΓΑ$ τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα $ΓΑ$, λέγω ὅτι περ. $ΓΑ \times Υ$ θέλει εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου· διότι, ἔὰν τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ, πρέπει περ. $ΓΑ \times Υ$ νὰ ᾖναι ἢ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου μεγαλύτερου ἢ μικρότερου· καὶ πρῶτον μὲν ἂς υποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου μικρότερου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου $ΓΔ$ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ $Υ$ τὸ ὕψος. σχ. 254.

Ἀς περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι $\Gamma\Delta$ κανονικὸν πολυγώνον τὸ $\text{H}\Theta\text{I}\Pi$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα $\Gamma\Lambda$ ἃς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς ὀρθὸν πρίσμα ὕψος ἔχον Υ , καὶ βάσιν τὸ πολυγώνον $\text{H}\Theta\text{I}\Pi$. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου $\text{H}\Theta\text{I}\Pi$ ἐπὶ τοῦ ὕψους Υ πολλαπλασιασθεῖσαν (πρό. 2): ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφέρειας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι $\Gamma\Lambda$ · ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περι. $\Gamma\Lambda \times \Upsilon$. Ἀλλὰ περι. $\Gamma\Lambda \times \Upsilon$ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι $\Gamma\Delta$, καὶ ὁ ὁποῖος κύλινδρος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλητέρα (πρό. 3)· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεγερῆσαμεν, εἶναι ἄτοπος: λοιπὸν 1.^{ον} ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἐνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὕψους του πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κυλίνδρου.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου. Διότι, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔστω $\Gamma\Delta$ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ, εἰ δυνατόν, ἔστω περι. $\Gamma\Delta \times \Upsilon$ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κυλίνδρου ὅστις μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἤθελεν ἔχει βάσιν κύκλον μεγαλήτερον, φερ' εἰπεῖν, τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι $\Gamma\Lambda$. Ἐκτελεσθείσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι πάντοτε ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου $\text{H}\Theta\text{I}\Pi$ ἐπὶ τοῦ ὕψους Υ πολλαπλασιασθεῖσαν. Ἀλλ' ἡ περίμετρος αὕτη

εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΓΔ· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΓΔ × Υ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἰδίου ὕψους καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι ΓΑ. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τούτου τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸ πρίσμα ᾗτον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ ἐπιφάνειά του ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ κυλίνδρου (πρό. 3), πολὺ περισσότερον εἶναι μικροτέρα ὅταν τὸ πρίσμα διενέκτεινται μέχρι τοῦ κυλίνδρου. Καὶ ἡ δευτέρα ἀρα ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 2.^{ον} ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἐνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρηθῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ σφαιρότης ἐνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του.

Εἰσω ΣΟ τὸ ὕψος τοῦ δεδομένου κώνου, ΑΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· ἐὰν σημειωθῇ διὰ ἐπιφ. ΑΟ ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως, λέγω ὅτι ἡ σφαιρότης τούτου τοῦ κώνου θέλει εἶναι ἴση μὲ ἐπιφ. ΑΟ × $\frac{1}{3}$ ΣΟ. σχ. 259.

Τῷ ὄντι, ὥς ὑποθέσωμεν 1.^{ον} ὅτι ἐπιφ. ΑΟ × $\frac{1}{3}$ ΣΟ εἶναι ἡ σφαιρότης ἐνὸς μεγαλητέρου κώνου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ΣΟ εἶναι πάντοτε τὸ ὕψος· ἀλλὰ τοῦ ὁποίου ΟΒ, μεγαλητέρα ἀπὸ ΑΟ, εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΟ ὥς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΜΝΠΓ το ὁποῖον νὰ

μή συνάπνυνται τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι $OB(10, 4)$ · ἄς ἐννοηθῇ ἀκολουθῶς πυραμὶς βάσιν ἔχουσα τὸ πολυγώνον καὶ κορυφὴν τὴν σιγμὴν Σ . Ἡ σιερότης ταύτης τῆς πυραμίδος $(19, 6)$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου $MNPIT$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους ΣO . Ἀλλὰ τὸ πολυγώνον εἶναι μεγαλότερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὅστις παριστάνεται διὰ ἐπιφ. AO · λοιπὸν ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλότερα ἀπὸ ἐπιφ. $AUX \times \Sigma O$, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου Σ εἶναι ἡ κορυφή καὶ OB ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς ὡς περιεχομένη εἶναι μικρότερα τοῦ κώνου· λοιπὸν 1.^{ον} ἀδύνατον ἢ ἕκαστος ἐνὸς κώνου ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τοῦ πολλαπλασιασθεῖσα νὰ ᾖ τὸ μέτρον μεγαλότερου κώνου.

— Λέγω 2.^{ον} ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἔμπορεῖ νὰ ᾖ τὸ μέτρον κώνου μικρότερου. Διότι, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔσω OB ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώ-ου, καὶ, εἰ δυνατόν, ἔσω, ἐπιφ. $OB \times \Sigma O$ ἡ σιερότης τοῦ κώνου ὅστις ἔχει ὕψος ΣO καὶ βάσιν τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου AO εἶναι ἡ ἀκτίς. Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ πυραμὶς $\Sigma MNPIT$ θέλει ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν $MNPIT$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ ΣO . Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν $MNPIT$ εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ. OB · λοιπὸν ἡ πυραμὶς θέλει ἔχει μέτρον μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ. $OB \times \Sigma O$, καὶ ἐπομένως θέλει εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὸν κώνον τοῦ ὁποίου AO εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως καὶ ΣO τὸ ὕψος. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλότερα τοῦ κώνου, διότι οὗτος περιέχεται· λοιπὸν 2.^{ον} ἀδύνατον ἢ ἕκαστος ἐνὸς κώνου πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τοῦ νὰ ᾖ τὸ μέτρον μικρότερου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ σιερότης ἐνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα. Κῶνος εἶναι τὸ τριτημόριον κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· ὅθεν ἔπεται.

1.^{ον} Ὅτι οἱ ἰσοῦψεῖς κῶνοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

2.^{ον} Ὅτι οἱ κῶνοι ἴσων βάσεων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

3.^{ον} Ὅτι οἱ ὅμοιοι κῶνοι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων των, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὕψων των.

Σχόλιον. Ἐστω A ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου, Y τὸ ὕψος τοῦ· ἡ ὕψος τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi A \times \frac{1}{3} Y$ ἢ $\frac{1}{3} \pi AY$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ΄.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ὁ κολοβὸς κῶνος $A\Delta E B$, τοῦ ὁποίου AO , $\Delta\Pi$ εἶναι αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων καὶ PO τὸ ὕψος, ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\pi$.

—2 —2
 OP . ($AO + \Delta\Pi + AO \times \Delta\Pi$).

Ἐστω $TZH\Theta$ τριγωνικὴ πυραμὶς τοῦ αὐτοῦ ὕψους μετὸν κῶνον ΣAB , καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις $ZH\Theta$ νὰ ἰσοδυναμῇ μετὴν βάσιν τοῦ κώνου. Δυναμέθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο αὗται βάσεις εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· τότε αἱ κορυφαὶ Σ καὶ T ἰσάκεις θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, καὶ τὸ ἐπίπεδον $E\Pi\Delta$ προεκβληθὲν θέλει κάμει εἰς τὴν πυραμίδα τὴν τομὴν $IK'A$. Λέγω τώρα ὅτι ἡ τομὴ αὕτη $IK'A$ ἰσοδυναμεῖ μετὴν βάσιν ΔE · διότι αἱ βάσεις AB , ΔE , εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων AO , $\Delta\Pi$ (11, 4), ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὕψων ΣO , $\Sigma\Pi$ · τὰ τρίγωνα $ZH\Theta$, $IK'A$, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ὕψων (15, 6)· λοιπὸν οἱ κύκλοι AB , ΔE , εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τρίγωνα $ZH\Theta$, $IK'A$, Ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ

τρίγωνον $ZH\Theta$ είναι ισοδύναμον μὲ τὸν κύκλον AB · λοιπὸν τὸ τρίγωνον $IK'\Lambda$ εἶναι ισοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΔE .

Τώρα, ἡ βάσις AB πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}SO$ εἶναι ἡ σεριότης τοῦ κώνου ΣAB , καὶ ἡ βάσις $ZH\Theta$ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}SO$ εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος $ZH\Theta$ · λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τῶν ισοδυνάμων βάσεων, ἡ σεριότης τῆς πυραμίδος, εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κώνου. Διὰ λόγον παρόμοιον, ἡ πυραμὶς $\Gamma IK'\Lambda$ εἶναι ισοδύναμος μὲ τὸν κώνον $\Sigma \Delta E$ · λοιπὸν ὁ κορμὸς τοῦ κώνου $\Lambda \Delta E B$ ισοδυναμεῖ μὲ τὸν κορμὸν τῆς πυραμίδος $ZH\Theta IK'\Lambda$. Ἀλλ' ἡ βάσις $ZH\Theta$, ισοδυναμοῦσα μὲ τὸν κύκλον τοῦ ὁποῖου ἡ ἀκτίς εἶναι AO ,
 $\overset{-2}{\text{ἔχει μέτρον}} \pi \times \overset{-2}{AO}$ ὁμοίως ἡ βάσις $IK'\Lambda = \pi \times \overset{-2}{\Delta \Pi}$,
καὶ ἡ μείση ἀνάλογος μεταξὺ $\pi \times \overset{-2}{AO}$ καὶ $\pi \times \overset{-2}{\Delta \Pi}$ εἶναι
 $\pi \times \overset{-2}{AO} \times \overset{-2}{\Delta \Pi}$ · ἡ σεριότης λοιπὸν τοῦ κορμοῦ τῆς πυραμίδος, ἢ ἡ σεριότης τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου, ἔχει μέτρον
 $\frac{1}{3}O\Pi \times (\pi \times \overset{-2}{AO} + \pi \times \overset{-2}{\Delta \Pi} + \pi \times \overset{-2}{AO} \times \overset{-2}{\Delta \Pi})$ (20, 6),
τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $\frac{1}{3}\pi \times O\Pi \times (\overset{-2}{AO} + \overset{-2}{\Delta \Pi} + \overset{-2}{AO} \times \overset{-2}{\Delta \Pi})$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ'.

Θ Ε Ν Ρ Η Μ Α.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιασθεῖσαν.

Ἐστω AO ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, Σ ἡ κορυφή του, καὶ ΣA ἡ πλευρά του· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι περ. $AO \times \frac{1}{2}\Sigma A$. Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, περ. $AO \times \frac{1}{2}\Sigma A$, ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου ὅστις κατὰ

ρυφὴν μὲν ἔχει τὴν σιγμὴν Σ , βάσιν δὲ τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτὶνα OB μεγαλητέραν τῆς AO . σχ. 259.

Ἀς περιγραφῇ εἰς τὸν μικρὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον τὸ $\Pi\Lambda\Pi\Gamma$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτὶνα OB · καὶ ἔσω $\Sigma MN\Pi\Gamma$ κανονικὴ πυραμὶς, ἣτις βάσιν μὲν ἤθελεν ἔχει τὸ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὴν σιγμὴν Σ · τὸ τρίγωνον ΣMN ἐν ἀπὸ τὰ συγκροτοῦντα τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, ἔχει μέτρον τὴν βάσιν τοῦ MN ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους ΣA πολλαπλασιασθεῖσαν, τὸ ὁποῖον ὕψος εἶναι ἐνταύτῳ ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου κώνου· ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἴσον εἰς ὅλα τὰ ἄλλα τρίγωνα $\Sigma\Lambda\Gamma$, $\Sigma\Lambda K$, κ. τ. λ. ἔπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον $\Pi\Lambda\Gamma\Gamma M$ ἐπὶ τῇ ΣA πολλαπλασιασθεῖσαν· ἀλλ' ἡ περίμετρος $MN\Gamma\Gamma M$ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. AO · ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. $AO \times \Sigma A$, καὶ ἐπομένως μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ὅστις μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Σ ἤθελεν ἔχει βάσιν τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτὶνα OB . Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα ἐκείνης τῆς πυραμίδος· διότι ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως μιᾶς ἴσης πύραμίδος, καὶ τὸ αὐτὸ γένη ὡς πρὸς τὸν κώνον· ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο κώνων θέλει περικυκλώσει πανταχόθεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο πυραμίδων· ἡ πρώτη λοιπὸν ἐπιφάνεια θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας (λήμ. 2)· διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἣτις περιέχεται. Τὸ ἐναντίον ἤθελεν εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθέσεως μας· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀδύνατος· ἄρα ε. οὐ· ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς τοῦ πολλαπλασιασθεῖσιν δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κώνου.

Λέγω 2.^{ον} ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή-
τῃν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου. Διότι ἔσω ΒΟ ἡ ἀκτὶς
τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καὶ, εἰ δυνατόν, ἔσω
περ. $ΒΟ \times \frac{1}{2} ΣΒ$ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου Σ
εἶναι ἡ κορυφή, καὶ ΑΟ, μικρότερα τῆς ΟΒ, ἡ ἀκτὶς
τῆς βάσεως.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπι-
φάνεια τῆς πυραμίδος ΣΜΝΠΤ πάντοτε θέλει εἶναι ἴση
μὲ τὴν περίμετρον ΜΝΠΤ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ $\frac{1}{2} ΣΑ$.
Τώρα ἡ περίμετρος ΜΝΠΤ εἶναι μικρότερα τῆς περ. ΒΟ,
ΣΑ εἶναι μικρότερα ἀπὸ ΣΒ· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τού-
τους λόγους ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μι-
κρότερα ἀπὸ περ. $ΒΟ \times \frac{1}{2} ΣΒ$, τὸ ὅποιον γινόμενον, ἐξ
ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ΑΟ
εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυρα-
μίδος ἤθελεν εἶναι μικρότερα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου.
Τώρα, ἐξ ἐναντίας, εἶναι μεγαλητέρα· διότι ἐὰν τεθῇ ἡ
βάσις τῆς πυραμίδος ἐπὶ τῆς βάσεως μιᾶς ἴσης πυραμίδος
καὶ τὸ αὐτὸ γένη ὡς πρὸς τὸν κώνον, ἡ ἐπιφάνεια τῶν
δύο πυραμίδων πανταχόθεν θέλει περιτυλίσσει τὴν τῶν
δύο κώνων, καὶ ἐπομένως θέλει εἶναι μεγαλητέρα. Λοιπὸν
2.^{ον} ἀδύνατον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως δεδομένου κώνου
ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιασθεῖσα νὰ
μετρή τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου εἶναι ἴση
μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς
πλευρᾶς του πολλαπλασιασθεῖσαν.

Σχόλιον. Ἐσω Π ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, Α ἡ ἀκτὶς
τῆς βάσεώς του, ἡ περιφέρεια ταύτης τῆς βάσεως θέλει
εἶναι $2\pi Α$, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θέλει ἔχει μέτρον
 $2\pi Α \times \frac{1}{2} Π$ ἢ $\pi ΑΠ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἡμισφαιρίου τῶν περιφερειῶν τῶν δύο του βάσεων ΑΒ, ΔΕ πολλαπλασιασθεῖσαν. σχ. 261.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ ἃς ἀχθῇ ἡ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ, καὶ ἃς ληρῇ ἡ ΑΖ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα ΑΟ· ἃς ἐπιζευχθῇ ΣΖ καὶ ἃς ἀχθῇ ἡ ΔΘ παράλληλος τῇ ΑΖ.

Ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΑΟ, ΣΔΓ, ἔχομεν $ΑΟ:ΔΓ::ΣΑ:ΣΔ$, καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΣΑΖ, ΣΔΘ, ἔχομεν ὡσαύτως $ΑΖ:ΔΘ::ΣΑ:ΣΔ$ · λοιπὸν $ΑΖ:ΔΘ::ΑΟ:ΔΓ$, ἢ :: περ. ΑΟ: περ. ΔΓ (11, 4). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς $ΑΖ =$ περ. ΑΟ· λοιπὸν $ΔΘ =$ περ. ΔΓ. Τούτου τεθέντος, τὸ τρίγωνον ΣΑΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $ΑΖ \times \frac{1}{2} ΣΑ$, εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΣΑΒ, ἣτις ἔχει μέτρον περ. ΑΟ $\times \frac{1}{2} ΣΑ$. Διὰ λόγον παρόμοιον τὸ τρίγωνον ΣΔΘ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΣΔΕ· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ τραπέζιου ΑΔΘΖ· αὕτη ἔχει μέτρον (7, 3), $ΑΔ \times \frac{(ΑΖ + ΔΘ)}{2}$ · ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ

κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ἡμισφαιρίου τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του.

Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν σιγμὴν I, μέσον τῆς ΑΔ, ἃς ἀχθῇ ἡ ΙΚ' Α παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἡ ΙΜ παράλληλος τῇ ΑΖ· δεικνύομεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι $ΙΜ =$ περ. ΙΚ'. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον ΑΔΘΖ $= ΑΔ \times ΙΜ = ΑΔ \times$ περ. ΙΚ'. Ἡμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἰπώμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κωνικοῦ κορμοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν

τοῦ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας
μιας τομῆς γινομένης εἰς ἴσον ἀπόστημα ἀπὸ
τὰς δύο βάσεις.

Σχόλιον. Εἰν γραμμῆ τις ΑΔ, καθ' ὅλην τὴν τὴν ἔκ-
τασιν ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γραμμῆς ΟΓ καὶ ἐντῷ
αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμενη, περιστρέφεται ὁλόγυρα τῆς ΟΓ, ἡ
γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΔ θέλει ἔχει μέτρον $ΑΔ \times$
(περ. ΑΟ + περ. ΔΓ), ἡ $ΑΔ \times$ περ. ΙΚ· ὅπου αἱ γραμμαῖ

ΑΟ, ΔΓ, ΙΚ' εἶναι κάθετοι ἡγμένοι ἀπὸ τὰ ἄκρα καὶ ἀπὸ
τὸ μέσον τῆς γραμμῆς ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΓ.

Διότι εἰν προεβληθῶσιν αἱ ΑΔ, ΟΓ ἕως οὗ νὰ συνα-
παντηθῶσιν εἰς Σ, φανερόν ὅτι ἡ γραφομένη ἀπὸ τὴν ΑΔ
ἐπιφάνειαν εἶναι ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου τῶν βάσεων τοῦ
ὀπίου ΟΑ καὶ ΔΓ εἶναι αἱ ἀκτῖνες, ἔχοντος τοῦ ὅλου
κώνου κορυφὴν τὴν σιγμὴν Σ· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη
θέλει ἔχει τὸ εἰρημένον μέτρον.

Τὸ μέτρον τοῦτο ἤθελε πάντοτε εὑρῆσθαι, καὶ ὅταν ἡ
σιγμὴ Δ ἤθελε πέσει εἰς Σ, ἐκ τοῦ ὀπίου ἤθελε προκύψει
κῶνος, καὶ ὡσαύτως ὅταν ἡ γραμμὴ ΑΔ ἤθελεν εἶναι πα-
ράλληλος τοῦ ἄξονος, ἐκ τοῦ ὀπίου ἤθελε γεννηθῆ κύλιν-
δρος. Εἰς τὴν πρώτην περίεσιν ἡ ΔΓ ἤθελεν εἶναι μηδὲν,
εἰς τὴν δευτέραν ἴση μὲ τὴν ΑΟ καὶ μὲ τὴν ΙΚ'.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ'.

Λ Η Μ Μ Α.

Εἴπωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, πολλαὶ διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονι-
κοῦ πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγ-
γεγραμμένου κύκλου· ὑποτιθέντος ὅτι ἡ μερὶς τοῦ πολυ-
γώνου ΑΒΓΔ, ὅλη ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΖΗ
κείμενη, περιστρέφεται ὁλόγυρα ταύτης τῆς διαμέτρου, ἡ
γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΑΒΓΔ θέλει ἔχει μέτρον $ΜΚ \times$
περ. ΟΙ, ὄντος ΜΚ τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ἐπιφανείας

ἢ τοῦ περιεχομένου μέρους τοῦ ἄξονος μεταξὺ τῶν καθε-
των $AM, \Delta K$. σλ. 262.

Ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ I εἶναι τὸ μέσον τῆς AB , καὶ IK' κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἡγμένη ἀπὸ τὴν σιγμὴν I , ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν AB θέλει ἔχει μέτρον $AB \times$ περ. IK' (πρό. 8). Ὡς ἀχθῇ ἡ AX παράλληλος τοῦ ἄξονος· τὰ τρίγωνα ABX, OIK' ἔχουν τὰς πλευρὰς καθετους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ τὴν OI εἰς τὴν AB , τὴν IK' εἰς τὴν AX , καὶ τὴν OK' εἰς τὴν BX · εἶναι λοιπὸν ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν $AB:AX$ ἢ $MN::OI:IK'$, ἢ :: περ. OI : περ. IK' · λοιπὸν $AB \times$ περ. $IK' = MN \times$ περ. OI . Οὐδὲν βλέπομεν ὅτι ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν AB εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς MN ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολλαπλασιασθέν· ὡσαύτως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ $B\Gamma$, $= N\Pi \times$ περ. OI , ἡ γραφομένη ἀπὸ $\Gamma\Delta$, $= \Pi K \times$ περ. OI . Λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὴν μερίδα τοῦ πολυγώνου $AB\Gamma\Delta$ γραφομένη ἔχει μέτρον $(MN + N\Pi + \Pi K) \times$ περ. OI , ἢ $MK \times$ περ. OI · εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολλαπλασιασθέν.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ὅλον πολύγωνον ᾖναι ἀρτιόπλευρον, καὶ ὁ ἄξων ZH διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν Z καὶ H , ἡ ὅλη γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμιπολύγωνου $ZAGH$ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸν ἄξωνα ZH πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ὁ ἄξων ZH ἐνταύτῳ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς ἐπὶ τῆς περιφέρειας μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθεῖσαν.

Λέγω 1.^{ον} ὅτι ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας, ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς πολλαπλασιασθεῖσα, δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρας σφαίρας. Διότι ἔσω, εἰ δυνατόν, $AB \times$ περ. AG ἢ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἣτις ἔχει ἀκτῖνα GA . σχ. 263.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι GA , ἃς περιγραφθῇ ἀρτιόπλευρον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν ἣτις ἔχει ἀκτῖνα GA . ἔσωσαν M καὶ Σ δύο ἀπέναντι κορυφαὶ τούτου τοῦ πολυγώνου· καὶ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου $M\Sigma$ ἃς περιγραφῇ τὸ ἡμιπολύγωνον $M\Pi\Sigma$. H γραφομένη ἐπιφάνεια θέλει ἔχει μέτρον $M\Sigma \times$ περ. AG (πρό. 9.)· ἀλλὰ $M\Sigma$ εἶναι μεγαλητέρα τῆς AB · λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένη ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ $AB \times$ περ. AG , καὶ ἐπομένως μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀκτίς τῆς ὁποίας εἶναι GA . Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένης, ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιτυλίσσει πανταχόθεν τὴν δευτέραν. Λοιπὸν 1.^{ον} ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρας σφαίρας.

Λέγω 2.^{ον} ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἔμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρας σφαίρας. Διότι ἔσω, εἰ δυνατόν, $DE \times$ περ. GA ἢ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἣτις ἔχει ἀκτῖνα GA . Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίεσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ γεννωμένου σφαιροῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον θέλει εἶναι ἴση μὲ $M\Sigma \times$ περ. AG . Ἀλλὰ $M\Sigma$ εἶναι μικροτέρα τῆς DE , καὶ περ. AG μικροτέρα τῆς περ. GA · λοιπὸν, διὰ τοὺς δύο ταύτους λόγους, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένου σφαιροῦ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ $DE \times$ περ. GA καὶ ἐπομένως μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς εἶναι AG . Τώρα,

ἐξ ἐναντίας, ἡ γραφομένη ἀπὸ τὸ πολύγωνον ἐπιφάνεια, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὺς εἶναι ΓΑ, διότι ἡ πρώτη ἐπιφάνεια περιτυλίσσει τὴν δευτέραν· λοιπὸν α.εν ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρή τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρας σφαίρας.

Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν της ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς πολλαπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Ἡ ἐπιφάνεια μεγίστου κύκλου ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτίνος ἢ τοῦ τετάρτου τῆς διαμέτρου· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλασίη τῆς ἐπιφανείας μεγίστου κύκλου.

Σχόλιον. Αφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμετρήθη καὶ ἐσυγκρίθη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μὲ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, εὐκόλῳ νὰ προδιορισθῇ ἡ ἀπύλτος τιμὴ τῶν ἀτράκτων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων ἀνωτέρω ἐπροδιορίσθη ὁ λόγος μὲ τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Καὶ πρῶτον μὲν ὁ ἀτράκτος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, εἶναι πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς (20, 7), ἢ ὡς τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν Α πρὸς τὴν περιφέρειαν τούτου τοῦ ἰδίου μεγίστου κύκλου. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ταύτην τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν τούτου τοῦ ἀτράκτου ἐπὶ τὴν διάμετρον πολλαπλασιασθέν.

Δεύτερον δὲ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἀτράκτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ ἐκείνου

εἰς δύο ὀρθὰς (23, 7). Ἐξώσαν λοιπὸν Π, Κ, Ρ τὰ τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου. Ἐξω Γ ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου καὶ Δ ἡ διάμετρος του· τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον θέλει ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποῖου ἡ γωνία ἔχει μέτρον $\frac{\Pi + \text{Κ} + \text{Ρ} - \frac{1}{2}\Gamma}{2}$, καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι $\Delta \times \left(\frac{\Pi + \text{Κ} + \text{Ρ} - \frac{1}{2}\Gamma}{2} \right)$.

Οὕτως, ὅταν τὸ τρίγωνον ᾖ τρισορθογώνιον, ἔκαστον τῶν τόξων Π, Κ, Ρ, εἶναι ἴσον μετὰ $\frac{1}{2}\Gamma$, τὸ ἄθροισμά των μετὰ $\frac{1}{2}\Gamma$, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἁθροίσματος τούτου ἐπάνω εἰς $\frac{1}{2}\Gamma$, εἶναι $\frac{1}{2}\Gamma$, καὶ τὸ ἕμισυ ταύτης τῆς ὑπεροχῆς $= \frac{1}{4}\Gamma$ · ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου $= \frac{1}{2}\Gamma \times \Delta$, ἰσοῦται δηλαδὴ μετὰ τὸ ὀγδούον μέρος τῆς ὅλης σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Τὸ μέτρον τῶν πολυγώνων ἔπεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ τῶν τριγώνων, ἄλλως δὲ κατὰ πάντα ἐπροσδιορίσθη διὰ τῆς πρό. ΚΑ' βιβλ. Ζ', διότι ἡ μονὰς τοῦ μέτρου, ἣτις εἶναι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ἐκτιμήθη εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΑ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Ἡ ἐπιφάνεια ὁποιασδήποτε σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴση μετὰ τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέν.

Ἐξω ΕΖ ὁποιοιδήποτε τόξον ἔλασσαν ἢ μείζον τεταρτημορίου περιφερείας, καὶ ἄς καταβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΙ'· λέγω ὅτι ἡ μετὰ μίαν μόνην βάσιν ζώνη, ἡ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τόξου ΕΖ ὁλόγυρα τῆς ΕΙ' γραφομένη, θέλει ἔχει μέτρον ΕΗ × περ. ΕΙ'. σγ. 269.

Διότι ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἡ ζώνη αὕτη ἔχει μέτρον μικρότερον, καὶ, εἰ δυνατόν, ἔξω τὸ μέτρον

τοῦτο — $\text{EH} \times \text{περ. ΓΑ}$. Ἀς ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον EZ μερίς κανονικοῦ πολυγώνου EMNOΠΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ φθάνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφομένην, καὶ ἄς κατεβασθῇ ἡ ΓΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΜ · ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον ΕΜΖ ὁλόγυρα τῆς ΕΖ σρεφόμενον γραφομένη ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον $\text{EH} \times \text{περ. ΓΙ}$ (πρό. 9). Ἡ ποσότης αὕτη εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ $\text{EH} \times \text{περ. ΑΓ}$, τὴν, ἐξ ὑποθέσεως, μετροῦσαν τὴν ἀπὸ τὸ τόξον EZ γραφομένην ζώνην. Ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΕΜΝΟΠΖ γραφομένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὑπὸ τοῦ περιγεγραμμένου τόξου EZ γραφομένης ἐπιφανείας· τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ τελευταία αὕτη ἐπιφάνεια ὡς περιτυλίσσουσα τὴν πρώτην πανταχόθεν εἶναι μεγαλητέρα αὐτῆς· λοιπὸν 1.^{ον} τὸ μέτρον κάθε σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν μόνην βάσιν δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾔῃαι μικρότερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου παλλαπλασιασθέντος.

Λέγω, δεύτερον ὅτι τὸ μέτρον τῆς ἰδίας ζώνης δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾔῃαι μεγαλητέρον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου παλλαπλασιασθέντος. Διότι ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου AB ὁλόγυρα τῆς ΑΓ γραφομένης ζώνης, καὶ ἔσω, εἰ δυνατόν, ζώνη $\text{AB} > \text{ΑΔ} \times \text{περ. ΑΓ}$. Ἡ ὅλη τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἀπὸ δύο ζώνας AB , ΒΘ συνισταμένη, ἔχει μέτρον $\text{ΑΘ} \times \text{περ. ΑΓ}$ (πρό. 10), ἢ $\text{ΑΔ} \times \text{περ. ΑΓ} + \text{ΔΘ} \times \text{περ. ΑΓ}$ · ἐὰν λοιπὸν ζώνη $\text{AB} > \text{ΑΔ} \times \text{περ. ΑΓ}$, ἀναγκαίως ζώνη $\text{ΒΘ} < \text{ΔΘ} \times \text{περ. ΑΓ}$ · τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα. Λοιπὸν 2.^{ον} τὸ μέτρον μὲ μίαν μόνην βάσιν σφαιρικῆς ζώνης δὲν ἡμπορεῖ νὰ ᾔῃαι μεγαλητέρον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου παλλαπλασιασθέντος.

Λοιπὸν τέλος κάθε σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν μόνην βάσιν

ἔχει μέτρον τὸ ὕψος ταύτης τῇ ζώνῃ ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέντος.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ὅποιανδήποτε ζώνην, μὲ δύο βάσεις, ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τόξου ΖΘ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γραφομένην, καὶ ἄς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΟ, ΘΚ ἐπὶ ταύτης τῆς διαμέτρου. Ἡ ἀπὸ τὸ τῶξον ΖΘ γραφομένη ζώνη εἶναι ἡ διαφορὰ δύο ζωνῶν ἀπὸ τὰ τόξα ΔΘ καὶ ΔΖ γραφομένων· αὗται μετροῦνται ὑπὸ ΔΚ × περ. ΓΔ καὶ ΔΟ × περ. ΓΔ· ἐκείνη λοιπὸν ἔχει μέτρον (ΔΚ—ΔΟ) × περ. ΓΔ ἢ ΟΚ × περ. ΓΔ.

Ὅποιαδήποτε λοιπὸν σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις, ἔχει μέτρον τὸ ὕψος τῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέν. σχ. 220.

Πόρισμα. Δύο ζῶναι εἰς τὴν αὐτὴν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας λαμβανόμεναι, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ ὅποιαδήποτε ζώνη εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης πρὸς τὴν διάμετρον.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Β'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ταυτοχρόνως σρέφονται ὁλόγυρα τῆς κοινῆς βάσεως ΒΓ, τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου σφαιρὸν θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου κυλίνδρου. σχ. 264 καὶ 265.

Ἄς κατεβασθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξενος ἡ κάθετος ΑΔ· ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΒΔ γραφομένου κυλίνδρου (πρό. 5), ὡσαύτως ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΓΕ γραφομένου κυλίνδρου· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο κῶνων ἢ τὸ ἀπὸ

τὸ $\Lambda\text{ΒΓ}$ τρίγωνον γραφόμενον σφαιρὸν εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίνδρων ἢ τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ γραφομένου κυλίνδρου. σχ. 264.

Εὰν ἡ κάθετος $\Lambda\Delta$ πῖση ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὸ ἀπὸ τὸ $\Lambda\text{ΒΓ}$ γραφόμενον σφαιρὸν θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ $\Lambda\text{ΒΔ}$ καὶ $\Lambda\Gamma\Delta$ γραφομένων κώνων· ἀλλ' ἐνταύτῃ ὁ ἀπὸ ΒΓΕΖ γραφόμενος κύλινδρος θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΖΒΔ , ΑΕΓΔ γραφομένων κυλίνδρων. Ἡ σφαιρότης λοιπὸν τοῦ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου γραφομένου σφαιροῦ πάντοτε θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους γραφομένου κυλίνδρου. σχ. 265.

Σχόλιον. Ἡ ἐκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου ὅστις

ἔχει ἀκτῖνα $\Lambda\Delta$ εἶναι $\pi \times \overset{-2}{\Lambda\Delta}$ · λοιπὸν $\pi \times \overset{-2}{\Lambda\Delta} \times \overset{-2}{\text{ΒΓ}}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου κυλίνδρου ἀπὸ ΒΓΕΖ , καὶ $\frac{1}{3} \pi \times \overset{-2}{\Lambda\Delta} \times \overset{-2}{\text{ΒΓ}}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου σφαιροῦ ἀπὸ τὸ τρίγωνον $\Lambda\text{ΒΓ}$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Γ', Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α,

Υποθεθέντος ὅτι τὸ τρίγωνον $\Gamma\text{ΑΒ}$ σφάριται ὁλόγυρα τῆς γραμμῆς $\Gamma\Delta$, ἡγμένης ὡςδήποτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ Γ , νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ οὕτως γεννωμένου σφαιροῦ. σχ. 266.

Ας προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα $\Gamma\Delta$ εἰς Δ , ἀπὸ τὰς σιγμᾶς Α καὶ Β ὥς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΑΜ , ΒΝ .

Τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον $\Gamma\text{ΑΔ}$ ἔχει μέτρον (πρό. 12) $\frac{1}{3} \pi \times \overset{-2}{\text{ΑΜ}} \times \overset{-2}{\Gamma\Delta}$ · τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον $\Gamma\text{ΒΔ}$ ἔχει μέτρον $\frac{1}{3} \pi \times \overset{-2}{\text{ΒΝ}} \times \overset{-2}{\Gamma\Delta}$ · ἡ

διαφορὰ λοιπὸν τῶν σφαιρῶν τούτων ἢ τὸ ἀπὸ $AB\Gamma$ γρα-

—2 —2

φόμενον σφαιρὸν ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}\pi \cdot (MA - BN) \times \Gamma\Delta$.

Δυνατὸν νὰ δοθῇ εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν ἄλλη μορφή· ἀπὸ τὴν σιγμὴν I , μέσον τῆς AB , ἃς ἀχθῇ ἡ IK' κάθετος ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, καὶ διὰ τῆς σιγμῆς B ἃς ἀχθῇ ἡ BO παραλληλὸς τῇ $\Gamma\Delta$, θέλει εἶναι $AM + BN = 2IK'$ (7, 3) καὶ $AM - BN = AO$ · λοιπὸν $(AM + BN) (AM - BN)$

—2 —2

ἢ $AM - BN = 2IK' \times AO$ (10, 3). Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιροῦ ἐκφράζεται καὶ διὰ $\frac{1}{2}\pi \times IK' \times AO \times \Gamma\Delta$. Ἀλλ' ἐὰν κατεβασθῇ ἡ $\Gamma\Pi$ κάθετος ἐπὶ τὴν AB , τὰ τρίγωνα $ABO, \Delta\Pi\Gamma$, θέλουσι εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουσι δώσῃ τὴν ἀναλογίαν $AO : \Gamma\Pi :: AB : \Gamma\Delta$ · ὅθεν προκύπτει $AO \times \Gamma\Delta = \Gamma\Pi \times AB$ · ἄλλως $\Gamma\Pi \times AB$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ · οὕτως ἔχομεν $AO \times \Gamma\Delta = 2AB\Gamma$ · τὸ γραφόμενον λοιπὸν σφαιρὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει ὁμοίως μέτρον $\frac{1}{2}\pi \times AB\Gamma \times IK'$, ἢ, ὅπερ ταῦτόν, $AB\Gamma \times \frac{1}{2}$ περ. IK' (διότι περ. $IK' = 2\pi \cdot IK'$). Τὸ γραφόμενον λοιπὸν σφαιρὸν ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν τούτου τοῦ τριγώνου πολλαπλασιασθέν ἐπὶ τῶν δύο τρίτων τῆς περιφερείας τὴν ὑποίαν γράφει ἡ σιγμὴ I μέσον τῆς βάσεώς του.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ πλευρὰ $A\Gamma = \Gamma B$, ἡ γραμμὴ ΓI θέλει εἶναι κάθετος εἰς AB , τὸ ἐμβαδὸν $AB\Gamma$ θέλει ἰσαῦται μὲ $AB \times \frac{1}{2} \Gamma I$, καὶ ἡ σφαιρότης $\frac{1}{2}\pi \times AB\Gamma \times IK'$ ἀποβαίνει $\frac{1}{2}\pi \times AB \times IK' \times \Gamma I$. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα $ABO, \Gamma IK'$, εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν $AB : BO ἢ MN :: \Gamma I : IK'$ · λοιπὸν $AB \times IK' = MN \times \Gamma I$ · τὸ γραφόμενον λοιπὸν σφαιρὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$

—2

θέλει ἔχει μέτρον $\frac{1}{2}\pi \times MN \times \Gamma I$, σελ. 267.

Σχόλιον. Ἡ γενικὴ λύσις φαίνεται ὅτι ὑποθέτει τὴν συναπάντησιν μὲ τὸν ἄξονα τῆς γραμμῆς AB ὅταν προεκβληθῇ· ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα ἐπίσης ἤθελον εἶναι ἀληθῆ καὶ ὅταν ἡ AB ἤθελεν εἶναι παραλληλὸς τοῦ ἄξονος.

Τῷ ὄντι ὁ γραφόμενος κύλινδρος ἀπὸ $AMNB$ ἔχει
 $\frac{1}{2}$
 μέτρον $\pi \cdot AM \cdot MN$, ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ $AGM = \frac{1}{3} \pi \cdot$
 $\frac{1}{2}$
 $AM \cdot GM$, καὶ ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ $BGN = \frac{1}{3} \pi \cdot AM \cdot$
 GN . Ἡ πρόσθεσις τῶν δύο πρώτων σφαιρῶν καὶ ἡ ἀφαίρεσις
 ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ τρίτου, δίδει διὰ τὴν σφαιρότητα
 $\frac{1}{2}$
 τοῦ γραφομένου σφαιροῦ ἀπὸ ABG , $\pi \cdot AM \cdot (MN + \frac{1}{2} GM -$
 $\frac{1}{2} GN)$: καὶ ἐπειδὴ $GN - GM = MN$, ἡ ἔκφρασις αὕτη
 $\frac{1}{2}$
 ἄγεται εἰς $\pi \cdot AM \cdot MN$ ἢ $\frac{1}{3} \pi \cdot GP \cdot MN$, τὸ ὅποιον συμ-
 φωνεῖ μὲ τὰ ἤδη εὑρεθέντα ἐξαγόμενα. σχ. 268.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΙΔ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰωσαν AB, BG, GA , πολλὰι διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, O τὸ κέντρον του, καὶ OI ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ πολυγωνικός τομεὺς AOA , ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ZH κείμενος, σφίγγεται ὁλόγυρα αὐτῆς, τὸ γραφόμενον σφαιρὸν θέλει ἔχει
 $\frac{1}{2}$
 μέτρον $\frac{1}{3} \pi \cdot OI \cdot MK$, ἐνθα MK εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ὅποιον περνοῦται ἀπὸ τὰς ἀκρινὰς καθέτους AM, AK . σχ. 262.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν, ὅλα τὰ τρίγωνα AOB, BOG , κ. τ. λ. εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Τώρα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς προλαβούσης προτάσεως, τὸ παραγόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον AOB ἔχει

μέτρον $\frac{1}{3}$ π.ΟΙ.ΜΝ, τὸ γραφόμενον σρεὼν ἀπὸ τὸ τρί-
 γωνον ΒΟΓ ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}$ π.ΟΙ.ΝΠ, καὶ τὸ γραφόμενον
 σρεὼν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΟΔ ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}$ π.ΟΙ.ΠΚ· τὸ
 ἄθροισμα λοιπὸν τούτων τῶν σρεῶν, ἢ τὸ ὅλον σρεὼν
 τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ΑΟΔ, θέλει
 ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}$ π.ΟΙ. (ΜΝ + ΝΠ + ΠΚ) ἢ $\frac{1}{3}$ π.ΟΙ.ΜΚ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ε'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην τὴν χρη-
 σιμεύουσαν εἰς αὐτὸν ὡς βάσιν ἐπὶ τοῦ τρίτημορίου τῆς
 ἀκτίνος πολλαπλασιασθεῖσαν, καὶ ἡ ὅλη σφαῖρα ἔχει μέ-
 τρον τὴν ἐπιφάνειάν της ἐπὶ τοῦ τρίτημορίου τῆς ἀκτίνος
 πολλαπλασιασθεῖσαν.

Εἰω ΑΒΓ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅστις, μὲ τὴν περιγραφὴν
 του ὀλόγουρα τῆς ΑΓ, γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα. Οὔσης
 τῆς γραφομένης ἀπὸ ΑΒ ζώνης ἴσης μὲ ΑΔ Χ περ. ΑΓ ἢ
 2π.ΑΓ. ΑΔ (πρὸς 12), λέγω ὅτι ὁ σφαιρικὸς τομεὺς θέλει
 ἔχει μέτρον ταύτην τὴν ζώνην ἐπὶ $\frac{1}{3}$ ΑΓ πολλαπλασιασθεῖ-
 σαν, ἢ $\frac{2}{3}$ π.ΑΓ.ΑΔ. σχ. 269.

Τῷ ὄντι, ὥς ὑποθέτουμεν 1.^{ον}, εἰ δυνατόν, ὅτι ἡ πο-
 σότης αὕτη $\frac{2}{3}$ π.ΑΓ.ΑΔ εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου σφαι-
 ρικοῦ τομέως, φερ' εἰπεῖν, τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυ-
 κλικὸν τομέα ΕΓΖ ὁμοιον μὲ τὸν ΑΓΒ.

Ας ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον ΕΖ ἡ μερὶς κανονικοῦ πολυ-
 γώνου ΕΜΝΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ συναπαντοῦν
 τὸ τόξον ΑΒ. ἅς ἐνησηθῇ ἀκολουθῶς ὅτι ἐν ᾧ σρέφεται
 ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΕΓΖ, σρέφεται καὶ ὁ πολυγωνικὸς

ΕΝΖΓ ὁλόγουρα τῆς ΕΓ. Ἐστω ΓΙ ἡ ἀκτίς τοῦ εἰς τὸ πολυγώνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, καὶ ἅς κατεβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΓ. Τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τῶν

πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi \cdot \Gamma\Gamma \cdot \Gamma\Gamma$ (πρό. 14). Τώρα ΓΙ εἶναι μείζων τῆς ΑΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ΒΗ μείζων τῆς ΑΔ· διότι, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν ΑΒ, ΕΖ, τὰ τρίγωνα ΕΖΗ, ΑΒΔ, ὄντα ὁμοία, δίδουν τὴν ἀναλογίαν $\text{ΕΗ} : \text{ΑΔ} :: \text{ΖΗ} : \text{ΒΔ} :: \text{ΓΖ} : \text{ΓΒ}$ · λοιπὸν $\text{ΕΗ} > \text{ΑΔ}$.

Διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους $\frac{2}{3}\pi \cdot \Gamma\Gamma \cdot \Gamma\Gamma$ εἶναι μείζων

τοῦ $\frac{2}{3}\pi \cdot \Gamma\Gamma \cdot \text{ΑΔ}$ · ἡ πρώτη ἔκφρασις εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφόμενου σφαιροῦ ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα, ἡ δευτέρα, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ γραφόμενου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΕΓΖ· λοιπὸν τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μείζων τοῦ γραφόμενου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικόν. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρὸν εἶναι μικρότερον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὡς περιεχόμεσθον· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 1.^{ον} ἡ ζώνη ἢ βάσις σφαιρικοῦ τομέως ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρήῃ μεγαλύτερον σφαιρικὸν τομέα.

Λέγω 2.^{ον} ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἡμπορεῖ νὰ μετρήῃ μικρότερον σφαιρικὸν τομέα. Διότι ἔστω ΓΕΖ ὁ κυκλικὸς τομέας ὅστις μετὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ παράγει τὸν σφαιρικὸν δεδομένον τομέα, καὶ ἅς ὑπόθεθῇ, εἰ δυνατόν

ὅτι $\frac{2}{3}\pi \cdot \Gamma\Gamma \cdot \text{ΕΗ}$ εἶναι τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως, φερέειπεν, τοῦ ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΓΒ παραγομένου. Μενούσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνω-

τέρω, τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα

—₂

θέλει ἔχει πάντοτε μέτρον $\frac{2}{3}$ π.ΓΙ.ΕΗ. Ἀλλὰ ΓΙ εἶναι μικροτέρω τῆς ΓΕ· λοιπὸν τὸ σφαιρὸν εἶναι μικρότερον

—₂

τοῦ $\frac{2}{3}$ π.ΓΕ.ΕΗ, μέτρου, ἐξ ὑποθέσεως, τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΑΓΒ. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν σφαιρὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ ΑΓΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρὸν, ὡς περιέχον τὸν σφαιρικὸν τομέα, εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ αὐτόν. Λοιπὸν α.εν ἀδύνατον ἡ ζώνη σφαιρικοῦ τομέως πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτίνος νὰ ᾔηται τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως.

Κάθε λοιπὸν σφαιρικὸς τομέως ἔχει μέτρον τὴν ζώνην ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτίνος.

Κυκλικὸς τομέως ΑΓΒ ἡμπορεῖ νὰ αἰχλήσῃ ἕως οὗ νὰ γόνη ἴσος μετὰ τὸ ἡμικύκλιον· τότε ὁ γραφόμενός ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶναι ἡ ὅλη σφαῖρα. Ἡ σφαιρότης λοιπὸν τῆς σφαίρας ἰσοῦται μετὰ τὴν ἐπιφάνειάν τῆς ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτίνος τῆς πολλαπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν, αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ ἐπὶ τῶν ἀκτίνων πολλαπλασιασθεῖσαι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων. Λοιπὸν αἱ σφαιρότητες δύο σφαιρῶν εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων τῶν, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν.

Σχόλιον. Ἐστὼ Α ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς θέλει εἶναι $4\pi A$, καὶ ἡ σφαιρότης τῆς $4\pi A \times \frac{1}{3} A$,

304₃

ἢ $\frac{4}{3}\pi A$ · ἐὰν κληθῇ Δ ἡ διάμετρος, θέλει εἶναι $A = \frac{1}{3}\Delta$,
καὶ $A = \frac{1}{3}\Delta$ · ἡ τρευότης λοιπὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκ-
φρασθῇ καὶ διὰ $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{3}\Delta$, ἢ $\frac{4}{9}\pi\Delta$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Γ'.

Θ Ε Π Ρ Η Μ Α.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (περιλαμβανομένων τῶν βάσεων του) ὡς 2 πρὸς 3. Αἱ τρευότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Εἶω ΜΝΠΚ ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν ἐνταύτῳ περιστραφῶσι τὸ ἡμικύκλιον ΠΜΚ καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον ΠΑΔΚ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει γράψῃ τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν εἰς ταύτην περιγεγραμμένον κύλινδρον. σχ. 270.

Τὸ ὕψος ΑΔ τούτου τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ΠΚ, ἡ βᾶσις τοῦ κυλίνδρου ὡς ἔχουσα διάμετρον τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΜΝ, ἰσοῦται μὲ τὸν μέγιστον κύκλον· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια (πρό. 4) εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου του πολλαπλασιασθεῖσα. Τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (πρό. 10)· ὅθεν ἔπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους· ἐὰν προσθεῶσιν αἱ δύο βάσεις ἰσοδυναμοῦσαι μὲ δύο με-

γίςους κύκλους, ἡ ὅλη τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἐπιφάνεια θέλει εἶναι ἴση μὲ ἕξ μεγίστους κύκλους· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὡς 4 πρὸς 6, ἢ ὡς 2 πρὸς 3. Ἰδοὺ ἀποδεδειγμένον τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου, ἃς παρατηρηθῇ ὅτι ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ μέγιστον κύκλον καὶ τὸ ὕψος του μὲ τὴν διάμετρον, ἡ σφαιρότης του εἶναι ἴση μὲ τὸν μέγιστον κύκλον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν διάμετρον (πρό. 1). Ἀλλ' ἡ σφαιρότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίστους κύκλους πολλαπλασιασθέντας ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτίνος (πρό. 16), ἢ μὲ ἓνα μέγιστον κύκλον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τῶν $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτίνος, ἢ τῶν $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου. Ἡ σφαῖρα λοιπὸν εἶναι πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον ὡς 2 πρὸς 3, καὶ ἐπομένως αἱ σφαιρότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφάνειαι των.

Σχόλιον. Ἐὰν φαντασθῶμεν πολυέδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἑδραὶ νὰ ἄπτωνται τῆς σφαίρας, τὸ πολυέδρον τοῦτο ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς συνιστάμενον ἀπὸ πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ὅλαι ἔχουν διὰ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσεις τὰς διαφόρους ἑδρας τοῦ πολυέδρου. Τώρα εἶναι φανερόν· ὅτι ὅλαι αὗται αἱ πυραμίδες θέλουν ἔχει κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, εἰς τρόπον ὥστε καθε πυραμὶς θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἑδραν τοῦ πολυέδρου ἣτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς βᾶσις, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτίνος. Τὸ ὅλον λοιπὸν πολυέδρον θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτίνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας πολλαπλασιασθεῖσαν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ σφαιρότητες τῶν εἰς τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων πολυέδρων εἶναι μεταξύ των ὡς

αἱ ἐπιφάνειαι τῶν. Οὕτως ἡ ιδιότης τὴν ὁποίαν ἀπεδεί-
ξαμεν διὰ τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον εἶναι κοινὴ εἰς
ἀναρίθμητα ἄλλα σώματα.

Δυνατὸν νὰ σημειωθῇ ἐπίσης ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν
περιγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων εἶναι μεταξὺ
τῶν ὡς αἱ περίμετροί των.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ι Ζ'.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α.

Υποθεθέντος ὅτι τὸ κυκλικὸν τμήμα ΒΜΔ σφύεται
ὁλόγυρα μιᾶς διαμέτρου ἐκτὸς αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ
τοῦ γεννωμένου σφεροῦ. σχ. 271

Ας κατεβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΒΕ, ΔΖ·
ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΙ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν
ΒΔ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΒ, ΓΔ.

Τὸ γραφόμενον σφερόν ἀπὸ τὸν τομέα ΒΓΑ $\overset{-2}{=}$ $\frac{2}{3}\pi$ ·

ΓΒ.ΑΕ. (πρό. 15)· τὸ γραφόμενον σφερόν ἀπὸ τὸν το-

μέα ΔΓΑ $\overset{-2}{=}$ $\frac{2}{3}\pi$ ·ΓΒ.ΑΖ· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν δύο τού-
των σφερῶν, ἣ τὸ γραφόμενον σφερόν ἀπὸ τὸν τομέα

ΔΓΒ $\overset{-2}{=}$ $\frac{2}{3}\pi$ ·ΓΒ. (ΑΖ—ΑΕ) $\overset{-2}{=}$ $\frac{2}{3}\pi$ ·ΓΒ.ΕΖ. Ἀλλὰ τὸ γρα-
φόμενον σφερόν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΓΒ ἔχει μέ-

τρον $\frac{2}{3}\pi$ ·ΓΙ.ΕΖ (πρό. 14)· τὸ γραφόμενον λοιπὸν σφερόν

ἀπὸ τὸ τμήμα ΒΜΔ $\overset{-2}{=}$ $\frac{2}{3}\pi$ ·ΕΖ. (ΓΒ—ΓΙ). Τώρα εἰς

τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΙ ἔχομεν $\overset{-1}{\overset{-1}{\overset{-2}{ΓΒ—ΓΙ=ΒΙ=}}$ $\frac{1}{2}$

ΒΔ. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν σφερόν ἀπὸ τὸ τμήμα ΒΜΔ

θάλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi$ ·ΕΖ. $\frac{1}{2}$ ΒΔ, ἢ $\frac{1}{6}\pi$ ·ΒΔ.ΕΖ.

Σχόλιον. Τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸ τμήμα BMA εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ἥτις ἔχει διάμετρον BA , ὡς $\frac{1}{6}\pi$.

$BA.EZ$ πρὸς $\frac{1}{6}\pi.BA$, ἢ $:: EZ : BA$.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ. ΙΗ'.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Κάθε τμήμα σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ὕψους του, πλεον ἢ σφαιρότης τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει τὸ ἴδιον τοῦτο ὕψος διάμετρον. σλ. 271.

Εἰσωσαν $BE, \Delta Z$, αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ τμήματος, EZ τὸ ὕψος του, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τμήμα νὰ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυκλικοῦ χωρίου $BMAZE$ ὁλόγυρα τοῦ ἄξονος ZE . Τὸ γραφόμενον σφαιρὸν ἀπὸ τὸ τμήμα

BMA (πρό. 17) $= \frac{1}{6}\pi.BA.EZ$, ὁ ἠραφόμενος κορμὸς τοῦ κώνου ἀπὸ τὸ τραπεζίον ΔBZE (πρό. 6) $= \frac{1}{3}\pi.EZ$.

$(BE + \Delta Z + BE.\Delta Z)$. Τὸ τμήμα λοιπὸν τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων σφαιρῶν $= \frac{1}{6}\pi$.

EZ . $(2BE + 2\Delta Z + 2BE.BZ + BA)$. Ἀλλὰ, ἀχθείσης τῆς BO παραλλήλου τῇ EZ , θέλει εἶναι $\Delta O = \Delta Z - BE$,

$\Delta O = \Delta Z - 2\Delta Z.BE + BE$ (9, 3), καὶ ἐπομένως $BA = BO + \Delta O = EZ + \Delta Z - 2\Delta Z \times BE + BE$. Θέτοντες

ταύτην τὴν τιμὴν ἀντὶ τοῦ BA εἰς τὴν ἐκφρασιν τοῦ τμήματος, καὶ ἐκτελοῦντες πᾶσαν ἀναγωγὴν, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν σφαιρότητα τοῦ τμήματος,

$$\frac{1}{6}\pi.EZ. (3BE + 3\Delta Z + EZ).$$

Εκφρασις ἥτις ἀναλύεται εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν $\frac{1}{2}$ π. EZ.

($3BE + 3\Delta Z$), ἢ EZ. ($\frac{\pi \cdot BE + \pi \cdot \Delta Z}{2}$) εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα

τῶν βάσεων πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ὕψους· τὸ δὲ $\frac{1}{6}$ π.

EZ παριστάνει τὴν σφαῖραν τῆς ὁποίας EZ εἶναι ἡ διάμετρος (πρό. 15. σχολ.). λοιπὸν κάθε τμήμα σφαίρας, κτλ.

Πόρισμα. Εἰν μία τῶν βάσεων ἦναι μηδέν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος τμήμα ἀποβαίνει σφαιρικὸν τμήμα μὲ μίαν μόνην βάσιν· λοιπὸν κάθε σφαιρικὸν τμήμα μὲ μίαν μόνην βάσιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ιδίου ὕψους, πλεον ἢ σφαῖρα τῆς ὁποίας τοῦτο τὸ ὕψος εἶναι ἡ διάμετρος.

Γενικὸν σχόλιον.

Εἶω A ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως ἐνὸς κυλίνδρου, Y τὸ ὕψος του, ἡ σφαιρότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι $\pi A \cdot \frac{1}{2} Y$ ἢ $\frac{1}{2} \pi AY$.

Εἶω A ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου, Y τὸ ὕψος του, ἡ σφαιρότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi A \cdot \frac{1}{3} Y$, ἢ $\frac{1}{3} \pi AY$.

Εἶωσαν A καὶ B αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἐνὸς κολοβοῦ κώνου, Y τὸ ὕψος του, ἡ σφαιρότης του θέλει εἶναι $\frac{1}{3} \pi Y (A + B + AB)$.

Εἶω A ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας· ἡ σφαιρότης τῆς θέλει εἶναι $\frac{4}{3} \pi A$.

Εἶω A ἡ ἀκτίς σφαιρικοῦ τομέως, Y τὸ ὕψος τῆς ζώνης ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις· ἡ σφαιρότης του θέλει εἶναι $\frac{2}{3} \pi AY$.

Εξωσαν Π καὶ K αἱ δύο βάσεις ἐνὸς σφαιρικοῦ τμήματος, Υ τὸ ὕψος του, ἡ σφαιρότης τούτου τοῦ τμήματος θέλει εἶναι $(\frac{\Pi + K}{2}) \cdot \Upsilon + \frac{1}{6} \pi \Upsilon^2$.

Εὰν τὸ σφαιρικὸν τμήμα ἔχῃ μίαν βάσιν Π , ἐπειδὴ ἡ ἄλλη εἶναι μηδὲν, ἡ σφαιρότης του θέλει εἶναι $\frac{1}{2} \Pi \Upsilon + \frac{1}{6} \pi \Upsilon^2$.





















