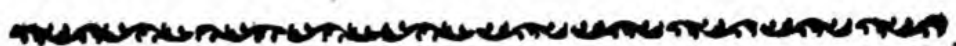


ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΚ
ΠΑΛΑΙΩΝ & ΝΕΩΤΕΡΩΝ
ΣΥΝΕΡΑΝΙΘΕΝΤΩΝ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ
ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ
ΠΡΩΗΝ ΑΣΤΡΑΧΑΝΙΟΥ
ΚΤΡΙΟΥ ΝΙΚΗΦΟΡΟΥ,

Φιλότητι δὲ δαπάνη ἐκδοθέντων,
Ὅπως δωρεὰν διανέμονται τοῖς ἐν τοῖς
Ἑλληνομυσείοις φοιτῶσιν,
ΥΠΟ ΤΩΝ ΤΙΜΙΩΤΑΤΩΝ & ΦΙΛΟΓΕΝΩΝ
ΑΥΤΑΔΕΛΦΩΝ

Ζ Ω Σ Ι Μ Α
Τ Ο Μ Ο Σ Τ Ρ Ι Τ Ο Σ,
περιέχων τὰ περὶ τὴν
Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Ν.



ΕΝ ΜΟΣΧΑΙ
Ἐν τῷ τῆς Κοιότητος Τυπογραφίᾳ παρὰ
Γρηγόριον & Κλαυδίον.
Ἔτει 1799.



ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΩΤΟΥ Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Σ.

Κ Ε Φ. Α΄.

Ἐν ᾧ οἱ ὅρισμοί.



§. 1.

Ἡ

ΟΡΙΣΜΟΣ Α΄.

καλεσμένη Ἀλγεβρα, ἡ
Ἀνάλυσις, μέθοδος ἐστὶ
τῆ, δοθέντων τινῶν, εὐρεῖν τὰ
ζητούμενα.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν

§. 2. Ὁ μὲν Ἀναλύσεως μέρος περὶ ὁρισμένων δια-
λαμβάνει ποσοτήτων Ἀλγεβρα, ἡ Ἀριθμητικὴ
Καρτεσιανή, ἡ Ἀριθμητικὴ Εἰδική (1) καλεῖ-
ται

Α 2

ται

(1) Καρτεσιανὴ μὲν, ἀπὸ Καρτεσίου τῷ Ευκλείδει ἀντιᾶ· εἰδικὴ δὲ,
ὅτι τοῖς γράμμασιν, οἷον ἀδελφῶν, χρῆται. ἀπὸ τούτου δ' ἂν καὶ
Ἀριθμητικὴ συμβολικὴ καλεῖται. γράμματα γὰρ ἢ σημά-
τοι τισὶν συμβολικῶς ἰσχυρίζονται τὰ πράγματα. ἰσχύον δὲ, ὅτι ἢ
οἱ παλαιοὶ τοῖς γράμμασιν οἷον ἀριθμοῖς ἰσχυρίζοντο, ὡς ἐκ τῆς τῶ
Διοφάντου Ἀριθμητικῆς δέχονται.

1002

§. 8. Νόμος το ἰσὺν ἀποφαινον, ἐκφαιμενος
 τὸν ἐκείνῃ Χαννὴν δὲκα ἐβόλῃ, δὲκα ἐφαιν, ἡδ-
 να ἔτος ἐχῃ, τὸ δὲχον, ἐβῆν ἡ τὸν Χαννὸν αὐ-
 τὸ ποσὸν τὸν ἐβῆν ἡ δὲκα ἡδὲ τὸν δὲκα Χαννὸν ἐβ-
 ὄν, μετῆκιδῶν ἐφαιν, δὲχον, ἐβῆν ἡ τὸν Χαννὸν.

3 X 0 V O I N

RECEIVED 10/10/50

§. 7. Καταφαιτικοί ήντ' η Γραικική ήλυσεν, το τ
ήντ' ηδονα αποφατικόν ηρ' η αποδοτικόν, το τ

OWEN J.

[illegible]

313613 W H S

§ 5. Εμφανίτωσαν πάλιν ἡ γένεσις, ὡς ἔστιν ἐν τῇ
 ἀρχῇ, καὶ ἡ ἀνάστασις, καὶ ἡ ἀποκατάστασις.

0 p 0 0

[illegible]

3 X 0 V I O N

§. 3. Αριθμοί, ποσότητες, μέγεθος αβυσσόν εστιν, η ἀριθμητικὴ καὶ τὰς ἀριθμητικὰς καὶ ἀλογον, τὸ διακρινόμενον τῶν ἀλογον, τὸ φανερὸν.

041810 ZOW 24

τα. ε. δ. μετ' ἀποδοχῆς καὶ ἀποχρῆσιν
ἀλλ' ἐστὶν ὁ λόγος (2) ἡ λογισμὸς ὁ
καὶ ἡ λογισμὸς διαφορικός.

των αὐτῇ προσέτης ἐλάσσων τῷ ἑδενός ἐστι πέντε ὀβολός· ὅπερ ἐστὶ, λείπῃσι τῇ τῶν χρημάτων αὐτῇ προσέτητι πέντε ὀβολοί, ὥστε ἴσην αὐτὴν εἶναι τῷ ἑδενί ἢ καὶ ἄλλως. Κεῖθω δὲν ἀπὸ τῇ 9, ἀφολῶν τὸν 12, εἴταν τὸν 9 σὺν τῷ 3. ἐπεὶ ἂν ἀφαιρεθῆντος τῇ 9 ἀπὸ τῇ 9, τὸ λοιπὸν ἐστὶ τὸ ἑδὲν καὶ ὁ 3. ἕτος ὁ 3, ὅς τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν λοιπὸν ἐστὶ, καταφατικὸς μὲν ἔκ· ἐπὶ καταφατικὸν γὰρ ἐστὶ τὸ λοιπὸν, τῇ ἐλάττωτος ἀπὸ τῇ μείζονος ἀφαιρεθῆντος· ἡδὲ δὴ τῷ ἑδενί ἴσος ἐστὶν· ἴσον γὰρ τῷ ἑδενί τὸ λοιπὸν, ἴση ὄντας τῇ ἀφαιρεθῆντος τῷ ἀφ' ἧ ἀφύνηται. ἐλάσσων ἄρα τῷ ἑδενός ὁ ἱναπολειφθεὶς 3. ὅπερ δὴ σημαίνει, ὅτι ὁ 3 λείπει τῷ 9, ὥστε τῇ 12 ἀπ' αὐτῇ ἀφαιρεθῆντος, τὸ λοιπὸν ἴσον εἶναι τῷ ἑδενί. Καταφατικὸν δὲ καὶ ἀποφατικὸν ἐπὶ τῶν μεγεθῶν νεύσεις ἔχουσιν· ἰάν τῆς ΑΒ (α) εὐθείας τὸ ΓΑ μέρος, τὸ ἐπὶ τὰ Α μέρη καταφατικὸν ἐκλάβης, τὸ ΓΒ, τὸ ἐπὶ τὰ Β μέρη, τὰ κατὰ διάμετρον ἱναντία, ἀποφατικὸν ἔσται· ἰάν δὲ τὸ ΓΒ καταφατικὸν, τὸ ΓΑ ἀποφατικόν.

Ο Ρ Ο Σ Β'.

§. 9. Προτιθίτω ἐκάτω τῶν γραμμάτων ἢ τῶν δε τῶν σημείων· +, —, ±, ∓.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 10. Τὸ μὲν +, καταφατικὸν εἶναι δηλοῖ τὸ ὑπὸ τῶν γραμμάτων ἐμφαινόμενον· τὸ δὲ —, ἀποφατικόν· τὸ δὲ ±, ἄγνοιαν τῇ τί ἐστὶ τὸ ἐμφαινόμενον, καταφατικόν, ἢ ἀποφατικόν. τὸ αὐτὸ δὲ σημαίνει καὶ τὸ ∓, ἐπὶ δὲ τὸ μὲν + καὶ προδήκην ἐμφαίνει, εἶεν τὸ α + β, τὸ α σὺν τῷ β. τὸ δὲ —, καὶ ἀφαίρεσιν, εἶεν τὸ β — γ, τὸ β ἀφαιρεθῆντος τῷ γ. τὸ δὲ γ ± δ, ἄγνοιαν τῇ πότερόν προτιθίναται δὲ, ἢ ἀφολῶν τὸ δ

Α 3

ἀπὸ

ἀπὸ τῆ γ, ὁμοίως καὶ τὸ γ $\mp$ δ. καλῶσι δὲ τὸ μὲν +, μᾶλλον· τὸ δὲ -, ἥττον· (1) τὸ δὲ $\pm$, μᾶλλον ἢ ἥττον· τὸ δὲ =, ἥττον ἢ μᾶλλον. διὸ τότε, α + β - γ + δ, ἀπαγγέλλεσθαι ἔσται α, μᾶλλον β, ἥττον γ, μᾶλλον δ. ἢ καὶ ἄλλως· α σὺν β, ἀφαιρεθέντος τῆ γ, καὶ προσεθέντος τῆ δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 11. Εἰδὲναι δεῖ, ὅτι τὰ γράμματα, τὰ μηδὲν ἔχοντα τῶν εἰρημένων σημείων, οἷον τὰ, α, β, ἢ τὰ α + β, καταφατικὰ σημαίνει μεγέθη, καὶ τὸ + προσγεγραμμένον αὐτῶν νοεῖται. τότε δὲ μόνον καταλιμπάνειν αὐτὸ ἔξεστιν, ὅτε τὸ γράμμα ἦται μόνον κῆται, ὡς τὸ β, ἢ πρῶτον τῶν στοιχείων αὐτῶ συγγεγραμμένων, οἷον τὸ α + β - γ $\pm$ ε.

ΟΡΟΣ Ι'.

§. 12. Τὸ μὲν = ἰσότητα ἐμφανέτω· τὸ δὲ <, καὶ τὸ >, πολλαπλασιασμόν· τὸ δὲ :, διαίρεσιν· τὸ δὲ $\sqrt{\quad}$, ῥίζην, ὀνομαζομένην ἀπὸ τῆ ἐπὶ αὐτῆς τιθεμένης ἀριθμοῦ. οἷον ἀπὸ μὲν τῆ 2, τετραγωνικὴν ἀπὸ δὲ τῆ 3, κυβικὴν ἀπὸ δὲ τῆ 4, τετραγωνοτετραγωνικὴν ἀπὸ δὲ τῆ 5, τετραγωνοκυβικὴν, καὶ ἀπὸ τῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν ὁσαύτως. καλεῖσθαι δὲ ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς, ὀνομαζήσθαι τῆς ῥίζης.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 13. Οἷον τὸ α = β, δηλοῖ ὅτι τὸ α ἴσον ἐστὶ τῷ β· ὁσαύτως τὸ α + β = γ - ε, τὸ α σὺν τῷ β ἴσον τῷ γ, ἀφαιρεθέντος τῆ ε· τὸ δὲ α < β, ὁμοίως καὶ

(1) Οἱ παλαιοὶ τὸ μὲν, ὑπαρξίν· τὸ δὲ, λῆξιν ἐκάλεον. λῆξις γὰρ φησιν ὁ Διόφαντος ἐπὶ λῆξιν πολλαπλασιασθῆσα ποιεῖ ὑπαρξίν. λῆξις δὲ ἐπὶ ὑπαρξίν, ποιεῖ λῆξιν. καὶ ἐλλείψαι σημαίνει ὑ ἐλλείπει κατὰ νοῦν· Τ. ὁρίσ. 9. σελ. 7.

καὶ τὸ $\alpha. \beta.$, τὸ γινόμενον ἐκ τῶ α καὶ β . διὸ δὴ τὸ
 $\alpha. \beta. + \gamma \chi \delta = \beta. \epsilon - \gamma$ ἐμφαίνει τὸ γινόμενον ἐκ τῶ
 α καὶ β σὺν τῷ γινόμενῳ ἐκ τῶ γ καὶ δ ἴσον τῷ γι-
 νόμενῳ ἐκ τῶ β καὶ ϵ , ἀφαιρεθέντος τῶ γ . ἐκφωνε-
 ται δὲ ἔτω α ἐν β σὺν γ ἐν δ , ἢ μάλλον γ ἐν δ
 ϵ ἐν ϵ , ἀφαιρεθέντος τῶ γ , ἢ ἦττον γ . τὸ δὲ
 $\alpha:$ σημαίνει τὸ α διαιρεμένον διὰ τῶ β , ἢ τὸ ἐκ
 τῶ β διαιρεθέντος πηλίκον. διὸ τὸ $\alpha:\beta =$
 γ σημαίνει ὅτι τὸ ἐκ τῶ α διὰ τῶ β διαιρεθέντος πη-
 λ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τῶ γ διὰ τῶ δ . καὶ τὸ μὲν $\sqrt{\alpha}$
 τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶ α · τὸ δὲ $\sqrt[3]{\alpha}$, τὴν κυβι-
 κήν· τὸ δὲ $\sqrt[4]{\alpha}$, τὴν τετραγωναυτετραγωνικήν· τὸ δὲ $\sqrt[5]{\alpha}$,
 τὴν πενταγωνοκυβικήν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 14. Ἰστέον, ὅτι τὸ ἐκ τῶν γραμμάτων γινόμενον
 ἐμφαίνεται καὶ μνησθὲν τῶν εἰρημένων σημείων μεταξὺ
 αὐτῶν παρεντιθεμένων. ὅθεν τὸ $\alpha \beta$ ταυτοσήμαντον τῷ
 $\alpha. \beta.$, καὶ τῷ $\alpha \chi \beta$. ὡσαύτως τὸ $\alpha \beta \gamma$ τῷ $\alpha. \beta. \gamma$, καὶ τῷ
 $\alpha \chi \beta \chi \gamma$. ἡ δὲ διαίρεσις δηλεῖται, ὑπὸ τὸν διαιρετίον
 ἀχθείσης ἐνθείας καὶ ὑπ' αὐτὴν γραφέντος τῶ διαι-
 ρέτη. διόπερ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ταυτοσήμαντον τῷ $\alpha:\beta$, ὁμοίως τὸ
 $\frac{\alpha \beta}{\epsilon \zeta}$ τῷ $\alpha \beta \gamma$: εἰ. ὑπὸ δὲ τῆς ρίζης, ἐφ' ἧς ἀριθμὸς ἐπὶ
 ἐπιτίθεται, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐμφαίνεται. διὸ ἡ $\sqrt{\alpha}$
 ταυτοσήμαντος τῷ $\sqrt[2]{\alpha}$, καὶ ἡ $\sqrt{\gamma \delta}$ τῷ $\sqrt[2]{\gamma \delta}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 15. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τὸ $\alpha : \beta$ κλάσμα ἐμφαίνει, ἕτινος ἀριθμητῆς μὲν τὸ α , ὀνομαστῆς δὲ τὸ β .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 16. Ἐτι ἰστέον, ὡς καὶ εὐθεῖα τοῖς γράμμασιν ἐπιτίθεται, ὡς $\alpha + \beta$. δ, δηλοῦσα ὅτι ἅπαντα τὰ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὡς τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β πολλαπλασιάσαι χρὴ διὰ τῆ δ ὁμοίως τὸ $\alpha + \beta$. $\gamma + \delta$, τὸ ἐκ τῶν α καὶ β κεφάλαιον διὰ τῆ ἐκ τῶν γ καὶ δ κεφαλαίῳ. εἰ γὰρ εὐθεῖα μὴ ἐπιτεθῇ, γραφῇ δ ἔτω $\alpha + \beta$. δ, σημαίνει τὸ β μόνον διὰ τῆ δ πολλαπλασιάσαι χρὴν, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προδῆναι τὸ α ὡσαύτως εἰν ἔτω γραφῇ, $\alpha + \beta$. $\gamma + \delta$, μόνον τὸ β διὰ τῆ γ πολλαπλασιάσαι, τῷ δ' ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προδῆναι τό τε α καὶ τὸ δ. τὸ αὐτὸ δὲ ἰσητέον καὶ περὶ τῶν διαιρετέων γραμμάτων. οἷον, ὅτι τὸ μὲν $\alpha + \beta : \gamma + \delta$ σημαίνει τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β διαιρεθσόμενον διὰ τῆ τῶν γ καὶ δ κεφαλαίῳ· τὸ δὲ $\alpha + \beta : \gamma + \delta$, τὸ β μόνον διὰ τῆ γ , τῷ δ' προκύπτοντι πηλίκῳ προδῆσόμενον τὸ ἐκ τῶν α καὶ δ κεφάλαιον. διὸ τὸ $\alpha + \beta : \gamma + \delta = \beta + \alpha + \delta$.

ΟΡΟΣ Δ'.

§. 17. Τὸ μὲν πολλαπλάσιον τῶν γραμμάτων, ἀριθμὸς ὁλόκληρος ἐμφαινέτω ἐν τῷ ἀριστερῷ μέρει κείμενος· τὰ δὲ μέρη αὐτῶν, κεκλασμένοις. καλείδω δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔτος **Συμπράκτωρ**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 18. Τὸ μὲν 2α , τὸ διπλάσιον τῆ α ἐμφαίνει· τὸ δὲ 5β , τὸ πενταπλάσιον τῆ β · τὸ δὲ $\frac{2}{3}\alpha\gamma$, δύο τριτημόρια

τῷ γινόμενῳ ἐκ τῶν α καὶ γ . ἀπαγγέλλομεν δὲ ταῦτα ἔτω δύο α , πέντε β , δύο τριτημόρια τῷ $\alpha\gamma$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 19. Εἶδέναι δὲ, ὅτι μηδενὸς συμπράκτερος προσκειμένῳ τοῖς γράμμασιν, ὡς τῷ α , καὶ τῷ $\alpha\beta$, ἡ μοιάς ἐννοῖται, ἐμφαίνοντα ἅπαξ ἐκλαμβάνόμενα τὰ προσκείμενα γράμματα.

ΟΡΟΣ Ε'.

§. 20. Τὸ τετράγωνον, ὁ Κύβος, τὸ τετραγωνο-τετράγωνον, καὶ τὰ ἄλλα ἐφεξῆς, τὰ ἐξ ὑποκειν-μεγέθους, ἐφ' ἑαυτὸ καὶ διὰ τῶν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθέντες, γινόμενα, **Δυνάμεις** καλεῖσθωσαν· δευτέρα μὲν, ἡ ἐξ ἐνὸς πολλαπλασιασμῶν προκύπτουσα· τρίτη δὲ, ἡ ἐκ δύο· τετάρτη, ἡ ἐκ τριῶν· πέμπτη, ἡ ἐκ τεσσάρων, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· πρώτη δὲ Δύναμις, τὸ ὡς ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν ἐκλαμβάνόμενον.

ΟΡΟΣ Σ'.

§. 21. Νοεῖσθω ὑπεράνω παντὸς γράμματος μοιάς καταφατική, τὸ σοιχεῖον, μηδέπαξ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν ἐμφαίνοντα, ἧτις δὲ **Ἐκθέτης** καλεῖσθω, ἡ **Δείκτης**, ἡ **Ἐπίσημον**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 22. Τὸ α νοεῖται ὡς τὸ α^1 , ὡσαύτως τὸ $\alpha\beta$, ὡς τὸ $\alpha^1\beta^1$, καὶ τὸ $\alpha + \beta$ ὡς τὸ $\alpha^1 + \beta^1$, ἢ τὸ $\alpha + \beta^1$.

ΟΡΟΣ Ζ'.

§. 23. Ἐμφανίστω τὴν ὅποιανδήποτε ἐκ γράμματος δύναμιν αὐτὸ τὸ γράμμα, ἀριθμὸν ἔχον ὑπεράνω αὐτῷ ἴσον

τῷ κεφαλῷ τῶν τῆς ρίζης ἐκθέτων, Ἐκθέτην καλέ-
μενον, ἢ Δείκτην, ἢ Ἐπίσημον τῆς Δυνάμεως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§ 24. Τὸ α² τὴν δευτέραν ἐμφαίνει Δύναμιν τῷ α.
καὶ γὰρ α. α ἡ δευτέρα Δύναμις ἐστὶ τῷ α, (§. 20.)
οἱ δὲ τῆς ρίζης α ἐκθέται, μονάδες δύο, (§. 2.)
α³ ἴσος ὁ δὲ τῷ α⁴ ἐκθέτης· τὸ δὲ α³, τὴν τρίτην
Δύναμιν τῷ α. ἐστὶ γὰρ ααα ἡ τρίτη τῷ α Δύναμις,
τρεῖς δὲ μονάδες εἰσὶν οἱ τῆς ρίζης α ἐκθέται, ὧν τὸ
κεφάλαιον ἴσον τῷ τῆς α³ Δυνάμεως ἐκθέτη. ὡσαύ-
τως τὸ μὲν α⁴ τετάρτη δύναμις ἐστὶ τῷ α, τὸ δὲ α⁵,
πέμπτη, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 25. Οἱ μὲν α² α τῆς δευτέρας Δυνάμεως α² ἐκ-
θέτης διπλάσιος ἐστὶ τῷ τῆς ἐκθέτης ρίζης α¹ ἐκθέτη·
ὁ δὲ τῆς τρίτης α³, τριπλάσιος· ὁ δὲ τῆς τετάρτης
α⁴, τετραπλάσιος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 26. Οὐκ ἔνν ὁ τῆς ρίζης ἐκθέτης ἐυρεθήσεται,
εἰάν ὁ μὲν τῆς δευτέρας Δυνάμεως διὰ τῷ 2 διαιρεθῇ,
οἷον ὁ τῆς α² διὰ τῷ 2, προκύπτει γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1$.
ὁ δὲ τῆς τρίτης, διὰ $\frac{3}{3}$ τῷ 3· οἷον ὁ τῆς α³ διὰ τῷ 3,
προκύπτει γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{3}{3}} = \alpha^1$. ὁ δὲ τῆς τετάρτης, διὰ
τῷ 4, οἷον ὁ τῆς α⁴ διὰ τῷ 4, προκύπτει γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha^1$.
καὶ ὁ τῆς Δυνάμεως α^ν, τῷ ν τὸν ὅποιον ἂν ἀριθμὸν
ἐμφαίνοντος, διὰ τῷ ν. ἔσται γὰρ τὸ $\alpha^{\frac{\nu}{\nu}} = \alpha^1$.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 27. Οποιασὺν Δυνάμεως διὰ Δυνάμεως τῆ αὐτῆ γράμματος διαιρεθῆσμενης τὸ πηλίκον εὐρεθήσεται, εἰὰν ἀπὸ τῆ ἐκθίτε τῆς διαιρετέας ἀφαιρεθῇ ὁ τῆς διαιρέτης ἐκθίτης· ἔσται ἔστω τὸ πηλίκον τῆς $a^5 : a^2 = a^3$ ὡσαύτως τὸ τῆς $a^2 : a^1 = a^1$. καὶ γενικῶς δὲ τὸ τῆς $a^n : a^m = a^{n-m}$. — Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκθίτης τῆ γινομένης ἐκ παντὸς γράμματος ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος ἴσος τῷ κεφαλῷ τῶν τῆς ῥίζης ἐκθετῶν (§. 23.) ἔστι δὲ ἡ διαίρεσις πρᾶξις τῆ πολλαπλασιασμῶ ἐναντία, ὁ ἄρα ἐκθίτης τῆ πηλίκου ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τῆς διαιρετέας καὶ διαιρέτης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 28. Ἐμφαίνει ἄρα ὁ ἐκθίτης, ὁλόκληρος ὢν ἀριθμὸς καταφατικός, τοσάκις ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν τὸ γράμμα, ὅσας αὐτὸς, μονάδι ἐλαττωθείς, τὴν μονάδα περιέχει. οἷον τὸ μὲν 1, τὸ ἐπὶ τῆ a^1 , μηδὲν τὸ a ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν σημαίνει· ὁ δὲ 2, ὁ ἐπὶ τῆ a^2 , ἄπαξ· ὁ δὲ 3, ὁ ἐπὶ τῆ a^3 , δις· ὁ δὲ 4, ὁ ἐπὶ τῆ a^4 , τρίς· ὁ δὲ 5, ὁ ἐπὶ τῆ a^5 , τετράκις, καὶ γενικῶς ὁ n , ὁ ἐπὶ τῆ a^n , $n-1$, ἔσται τοσάκις τὸ a πολλαπλασιασθὲν, ὅσας ἡ μονάς ὑπὸ τῆ n περιέχεται, μονάδος ἀφαιρεθείσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

§. 29. Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἢδε ἡ Σειρὰ, $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$, κτ. μεγέθη ἐμφαίνει ἐκ τῆ πολλαπλασιασμῶ γεγενημένης τῆ πρώτης ἔξω a^1 , πρώτον μὲν ἐφ'

ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθέντος, ἵτα ἐν τῷ γινομένῳ α', καὶ αὖθις ἐν τῷ ἑξῆς γινομένῳ α', καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, διὸ δὴ δῆλον, ὅτι ἡ προκειμένη σειρά γεωμετρική ἐστιν, ἥς οἱ μὲν ὅροι λόγον ἔχουσιν πρὸς ἀλλήλους συνεχῇ γεωμετρικόν· οἱ δὲ ἐκθίται αὐτῶν, συνεχῇ ἀριθμητικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5'.

§. 30. Πάν ὃν γράμμα ἐκθίτην ἔχον ἀριθμὸν ὁλόκληρον καταφατικόν ἰμφαίνει καὶ ὅρον γεωμετρικῆς συνεχῆς Σειρᾶς, τοῖον δὲ τὴν τάξιν, τιτύνει πρῶτον, ἢ δεύτερον, ἢ τρίτον, οἷος ὁ ἑαυτῷ ἐκθίτης, ἑκάστῃ τῶν ὅρων αὐτῆς ἐκ τῷ αὐτῷ συνισταμένην γράμματος.

ΣΤΗΝΕΨΙΑ Α'.

§. 31. Ἐκ τῶν εἰρημένων ὑπὸ πάνυ δυσχερεῖς κατιδεῖν, ὅτι πᾶν γράμμα ἐκθίτην ἔχον ὁλόκληρον ἀριθμὸν ἀποφατικόν, κλάσμα παρίστησιν, ὃ ἀριθμητὴς μὲν ἢ μονάς, ὀνομαστὴς δὲ τὸ αὐτὸ γράμμα μετὰ τῷ αὐτῷ ἐκθίτῃ, καταφατικῷ δὲ, καὶ ἐχὶ ἀποφατικῷ, οἷον τὸ α ἴσον ἐστὶ τῷ α'. κείῳ γὰρ διηλεῖν χρῆναι τὸ α διὰ τῷ α. ἔκῃν τὸ πληκτικὸν ἔσται $\alpha = \alpha^0$. (§. 27.) ἔκῃ α = 1. τὸ ἄρα α' = 1. κείῳ πάλιν δεῖν διηλεῖν τὸ α⁰ διὰ τῷ α. ἔκῃν τὸ πληκτικὸν ἔσται α⁰⁻¹, ἦσαν α⁻¹. ἔκῃ α⁰ = 1, ὡς δὲ δεικται. τὸ ἄρα α⁰ = 1. ἔκῃ α⁰ = α⁻¹. τὸ ἄρα α = α. διὰ ταῦτα αὐτὰ δὴ ἔσται τὸ μὲν α⁻² = $\frac{1}{\alpha^2}$, τὸ δὲ α⁻³ = $\frac{1}{\alpha^3}$, τὸ δὲ α⁻⁴ = $\frac{1}{\alpha^4}$. ὁμοίως τὸ α + β⁻² = $\frac{1}{\alpha + \beta^2}$ καὶ γονικῶς τὸ α = α¹.

ΣΥ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Β'.

§. 32. Ἦδε ἄρα ἡ Σειρά $\alpha^0, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \alpha^{-4},$
 α^{-5} , κτ, Σειράν ἐμφαίνει γεωμετρικῶν ῥαυ συνεχῶς
 ἀναλόγων, ὧν πρῶτος ἡ μονάς, ἑκάστος δὲ τῶν ἄλλων
 ἀριθμητὴν μὲν ἔχει τὴν μονάδα, ὀνομασίην δὲ τὸ αὐτὸ
 γράμμα μετὰ τῷ αὐτῷ ἐκθέτῃ καταφατικῷ δ', καὶ
 ἔχει ἀποφατικῷ. ἴση γὰρ ἡ ἐκθέσις Σειρᾷ τῇ δε, 1,
 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\alpha^4}, \frac{1}{\alpha^5}$ κτ.

ΣΤΗΝΕΠΕΙΑ Γ'.

§. 33. Καταμαθὼν δὲ ἐκ τῶν ἀξημένων ρῆδων τι
 σημαίνει τὸ γράμμα τὸ $\alpha^{\frac{2}{3}}$ ἐκθέτην ἔχον κεκλιμένον κα-
 ταφατικόν, οἷον τὸ $\alpha^{\frac{2}{3}}$. ῥῆδαν γὰρ ἐμφαίνει συνεκα-
 μένην μὲν ἐξ αὐτῶν τῶν γραμμάτων, ἔκθετης οὖν τῇ
 κλάσματος ἀριθμητῆς, ἔχουσαν δὲ τὸν αὐτὸν τῷ κλάσ-
 ματι ὀνομασίην· εἶπεν τὸ $\alpha^{\frac{2}{3}}$ ἐμφαίνει τὴν $\sqrt[3]{\alpha^2}$. ἐπεὶ
 γὰρ διὰ τῆς 3 διαιρεθέντος τῆς τῆς Δυνάμεως ἐκθέτης,
 ὁ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐκθέτης προκύπτει, (§. 20.) ὁ
 ἄρα ἐκθέτης $\frac{2}{3}$ κυβικὴν σημαίνει ρίζαν τῷ φέροντος αὐ-
 τὸν γραμματος, ἐκθέτην ἔχοντος τὸν 2. διὰ τὰ αὐ-
 τὰ δὴ τὸ μὲν $\alpha^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^3}$, τὸ δὲ $\alpha^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\alpha^5}$, τὸ δὲ
 $\alpha^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\alpha^4}$, καὶ γενικῶς τὸ $\alpha^{\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$, ὁμοίως τὸ
 $\sqrt[\nu]{\alpha + \beta^{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha + \beta^{\nu}}$.

ΣΥ-

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Δ'.

§. 34. Τα δὲ ἐκθέτης ἔχοντα ἀριθμὸν κοκλασμένον ἀποφατικόν, μονάδα παρίστησι διαιρεμένην διὰ τῶν αὐτῶν γκαρμάγων μετὰ τῶν ἐαυτῶν ἐκθετῶν, καταφατικῶν δὲ

ἢ ἐχὶ ἀποφατικῶν, οἷον τὸ a^3 μφαίνει τὸ $a^{\frac{1}{3}}$ (§. 31.), ὅπερ τὸ αὐτὸ ἴσι τῷ $\sqrt[3]{a^3}$ ὁμοίως δὴ τὸ $a^8 = a^{\frac{8}{2}} = \sqrt[2]{a^8}$. καὶ γενικῶς $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a^n}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

§. 35. Α' παγγέλλομεν τὰ μὲν ἐκθέτας ἔχοντα καταφατικὰς ὁλοκλήρεις ἀριθμούς, ἔγω· τὸ μὲν a^2 , α ὑψωθὲν ἐν τοῖς δυσίν, ἢ τὸ τετράγωνον τῆ α' τὸ δὲ a^3 , τὸ α ὑψωθὲν ἐν τοῖς τρισίν, ἢ ὁ κύβος τῆ α, ἢ ἡ τρίτη Δύναμις τῆ α' καὶ γενικῶς τὸ a^n , α ὑψωθὲν ἐν τῷ ν, ἢ ἡ ν Δύναμις τῆ α. ὁμοίως τὸ $\frac{1}{a^2}$, α μᾶλλον β, ὑψωθέντα ἐν τῷ ν, ἢ τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β, ὑψωθὲν ἐν τῷ ν, ἢ ἡ ν Δύναμις τῶν α καὶ β· τὰ δὲ ἀποφατικὰς ὁλοκλήρεις ἔγω· τὸ μὲν a^{-1} , α ὑψωθὲν ἐν τῷ ἥττον ἐνί τ δὲ a^{-2} , α ὑψωθὲν ἐν τοῖς ἥττον δυσίν, καὶ γενικῶς τὸ a^{-n} , α ὑψωθὲν ἐπὶ τὸ ἥττον ν· ὁμοίως τὸ $\frac{1}{a^2}$, α συν β ὑψωθέντα ἐν τῷ ἥττον ν. τὰ δὲ κοκλασμένους ἀποφατικὰς ἔγω· τὰ μὲν $a^{\frac{1}{2}}$, α ὑψωθὲν ἐν ἡμίσει· τὸ δὲ $a^{\frac{2}{3}}$, α ὑψωθὲν ἐν δυσὶ τρίτημορίοις· τὸ δὲ $a^{\frac{1}{3}}$, α ὑψωθὲν ἐν τίσ-

σαρσι

σαρσι πεμπτημορίοις. τὰ δὲ ἀποφατικὲς κυκλασμέ-
νως ἔτω· τὸ μὲν $\frac{a}{5}$, α ὑψωθὲν ἐν τοῖς ἥττον δυοῖ
πεμπτημορίοις· τὸ δὲ $\frac{a+\beta}{3}$, α εὖν β ὑψωθύνια
ἐν τοῖς ἥττον δυοῖς τριτημορίοις.

ΟΡΙΣΜΟΣ Δ'.

§. 36. Γράμματα ἢ γραμματικὴ ἐκθέσεις ὁμοσι-
δεῖς μὲν εἰσιν αἱ συγκκείμεναι ἐκ τῶν αὐτῶν γισμα-
μάτων, τῆς αὐτῆς ἐχόντων ἐκθέτας· ἑτεροσιδεῖς
δὲ, αἱ καθ' ἐκάτερα τέτων, ἢ κατὰ τὸ ἕτερον ἀλ-
λήλων διαφέρουσαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 37. Οἷον, ὁμοσιδεῖς μὲν αἶδε· $3\alpha\beta^2$, $5\alpha\beta^2$ —
 $\alpha\alpha\beta^2$, ὡσαύτως αἱ ἐξῆς· $2\beta\gamma$, — $4\beta\gamma$, — $\frac{2}{3}\beta\gamma$.
Ἑτεροσιδεῖς δὲ αὐταὶ· $3\alpha\gamma$, — $3\alpha^2\delta$. διαφέρουσι γὰρ
ἀλλήλων κατὰ τοὺς γράμματα καὶ τὰς ἐκθέτας· ὁ-
μοίως καὶ αὐταὶ — $2\beta^2\gamma$, $3\beta\gamma^2$. ἔχουσι γὰρ τὰ αὐ-
τὰ γράμματα, ἀλλ' ὃ τῆς αὐτῆς ἐκθέτας. καὶ αἱ
ἐξῆς δὲ ἑτεροσιδεῖς, $5\beta^2\gamma^2$, $2\alpha^2\gamma^2$. ἔχουσι γὰρ τὰς
αὐτὰς ἐκθέτας, ἀλλ' ὃ τὰ αὐτὰ γράμματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ε'.

§. 38. Ὅμοσιδεῖς μὲν εἶναι εἰσὶν αἱ τῆς αὐτῆς ὀνο-
μασίας ἔχουσαι, καὶ συγκκείμεναι ἐκ τῶν αὐτῶν γραμ-
μάτων τῆς αὐτῆς ἐχόντων ἐκθέτας, καὶ ἐκ τῶν αὐ-
τῶν συμπρακτόρων καὶ σημάτων· ἑτεροσιδεῖς δὲ αἱ, ἥτοι
κατὰ πάντα τὰ εἰρημένα, ἢ καθ' ἓν μόνον τέτων
ἀλλήλων διαφέρουσαι.

ΣΧΟ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 39. Οἷον ὁμοειδῆς μὲν εἰσιν αἰδε, $\sqrt[3]{2\alpha^3}$, $\sqrt[3]{2\alpha^3}$,
 καὶ αἰδε, $\sqrt[3]{3\gamma\alpha^4}$, $\sqrt[3]{3\gamma\alpha^4}$, καὶ αἰδε, $\sqrt[5]{\gamma\alpha+\beta^4}$, $\sqrt[5]{\gamma\alpha+\beta^4}$,
 ὁμοίως καὶ αὐται, $3\sqrt[5]{2\alpha^2}$, $-\frac{5}{6}\sqrt[5]{2\alpha^2}$, $\beta\sqrt[5]{2\alpha^2}$.
 οἱ γὰρ ἐκτὸς τῆς ῥίζης συμπράκτορες καὶ τὰ σημεῖα
 τὸ ὁμοειδῆς ἔμεταβιβάλλουσιν. ἑτεροειδῆς δὲ εἰσιν αὐται,
 $\sqrt[3]{2\alpha^3}$, $\sqrt[3]{2\alpha^3}$ ἔχει τὰς αὐτὰς ὀνομαζάδας
 καὶ αὐται, $\sqrt[3]{\alpha^3}$, $\sqrt[3]{\beta^3}$, ἔχει τὰ αὐτὰ
 γράμματα καὶ αὐται, $\sqrt[5]{\gamma^2}$, $\sqrt[5]{\gamma^5}$, ἔχει τὰς αὐ-
 τὰς ἐκθέτας ἔχει τὰ ἑαυτῶν γράμματα καὶ αὐται,
 $\sqrt[4]{2\alpha^2}$, $\sqrt[4]{3\alpha^2}$. ἔχει τὰς αὐτὰς συμπράκ-
 τος τὰ γράμματα καὶ αὐται, $\sqrt[5]{2\delta^3}$, $\sqrt[5]{-2\delta^3}$. ἔ-
 χει τὰ αὐτὰ σημεῖα καὶ αὐται, $\sqrt[3]{2\alpha}$,
 $\sqrt[3]{-3\beta^4}$. κατὰ πάντα γὰρ τὰ ὠρημένα ἀλλήλων
 διαφέρουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

§. 40. Τὸ μὲν ἐκ καταφατικῶν γραμμάτων γινόμε-
 νον καταφατικόν ἐστιν, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐξ ἀποφα-
 τικῶν· τὸ δὲ ἐκ καταφατικῶν καὶ ἀποφατικῶν, ἀποφα-
 τικόν. οἷον τὸ μὲν ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $+\beta$ γινόμενον ἐστὶ
 τὸ $+\alpha\beta$, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐκ τῶν $-\alpha$, καὶ $-\beta$ ἐστὶ
 τὸ $+\alpha\beta$. τὸ δὲ ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $-\beta$, ἢ $-\alpha$, καὶ $+\beta$,
 ἀποφατικόν, τῷ $-\alpha\beta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιασὴν λο-
 γον ἔχει, ὃν ὁ πολλαπλασιαστέος, πρὸς τὸ γινόμενον,
 ἔσται

ἔσαι ὡς $1 : +\beta :: +\alpha$, πρὸς τὸ γινόμενον. καταφατικῶς ἔν ὅντις τῷ β , καταφατικὸν ἔσαι καὶ τὸ ἐμλογον αὐτῷ, ὅπερ ἐστὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν α καὶ β . τὸ ἄρα ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $+\beta$ γινόμενον, ἐστὶ τὸ $+\alpha\beta$. ἔτω μὲν γὰρ ἔσαι ὡς $1 : +\beta :: +\alpha : +\alpha\beta$.

Πάλιν ἐπειδὴ ὡς $1 : -\beta :: -\alpha$, πρὸς τὸ γινόμενον, ἐστὶ δὲ ὁ ἕτερος τῶν ὄρων τῷ πρώτῳ λόγῳ, εἶπεν ἢ 1 , καταφατικῇ καὶ τὸν ἕτερον ἄρα τῶν ὄρων τῷ δευτέρῳ λόγῳ καταφατικὸν δεῖ εἶναι. ἐπεὶ δὲ ὁ μὲν τῶν τῷ δευτέρῳ λόγῳ ὄρων, εἶπεν ὁ $-\alpha$ ἀποφατικός ἐστιν, ἐξ ἀνάγκης ἄρα ὁ ἕτερος, τῷ τῷ γινόμενον ἐκ τῶν $-\beta$, καὶ $-\alpha$, καταφατικὸς εἶσαι, εἶπεν $+\alpha\beta$. ἔτω γὰρ ἔσαι ὡς $1 : -\beta :: -\alpha : +\alpha\beta$.

Καὶ ἐπειδὴ δὲ, ὡς $1 : -\alpha :: +\beta$, πρὸς τὸ γινόμενον, ἐστὶ δὲ τὸ ἐπόμενον τῷ πρώτῳ λόγῳ ἀποφατικόν, εἶπεν τὸ $-\alpha$, ἀποφατικὸν ἄρα ἔσαι καὶ τὸ τῷ δευτέρῳ λόγῳ ἐπόμενον. ἀλλὰ τὸ ἐπόμενον τῷ δευτέρῳ λόγῳ ἐστὶ τὸ ἐκ τῶν $-\alpha$, καὶ $+\beta$ γινόμενον. τὸ ἄρα ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἀποφατικὸν ἐστιν, εἶπεν τὸ $-\alpha\beta$. ἔτω γὰρ ἔσαι ὡς $1 : -\alpha :: +\beta : -\alpha\beta$.

Δείκνυται δὲ καὶ ἄλλως τὸ ἐκ τῶν ἀποφατικῶν $-\alpha$ καὶ $-\beta$ γινόμενον, καταφατικόν. κείῳ γὰρ δεῖν πολλαπλασιάσαι τὸ $\alpha - \beta$ διὰ τῷ $\gamma - \delta$. πολλαπλασιάζοντος ἔν πρώτῳ τῷ $\alpha - \beta$ διὰ τῷ γ , ἔσαι τὸ μὲν ἐκ τῶν α καὶ γ γινόμενον τὸ $+\alpha\gamma$, τὸ δὲ ἐκ τῶν $-\beta$ καὶ $+\gamma$, τὸ $-\gamma\beta$. τὸ ὅλον ἄρα γινόμενον ἐστὶ τὸ $\alpha\gamma - \gamma\beta$. τῷτο δὲ μεζόν ἐστι τῷ ζητούμενῳ. ἔγὰρ πρόκειται πολλαπλασιάζεται τὸ $\alpha - \beta$ δι' ὅλες τῷ γ , ἀλλὰ διὰ τῷ γ ἐλαττωθέντος τὸ δ , ὅπερ ἐστὶ διὰ τῆς διαφορᾶς τῶν γ καὶ δ . ἀφελεῖν ἄρα δεῖ τι ἀπὸ τῷ $\alpha\gamma - \gamma\beta$, ὅπως προκύψῃ τὸ ζητούμενον. εἰάν ἔν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῷ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν $+\alpha$ καὶ $-\delta$,

δ, ἤτοι τὸ—αδ, ὥστε εἶναι τὸ λοιπὸν αὐ—βγ—αδ, δῆλον ὅτι πλεόν τῷ δέοντος ἀφῆρηται. ἡ γὰρ τὸ+α διὰ τῷ—δ πολλαπλασιασάσαι πρόκειται, ἀλλὰ τὸ+α ἐλαττωθὲν τὸ β, ὅπερ ἐστὶ τὴν διαφορὰν τῶν+α, καὶ δ. τοσούτον δὲ πλεόν τῷ δέοντος ἀφῆρηται, ἔσον μᾶλλον τῷ μηδενὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν—β καὶ—δ. προσθετέον ἄρα τῷ αὐ—βγ—αδ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν—β καὶ—δ, ὥστε εἶναι τὸ ἔλεον καὶ δέον ζητούμενον τὸ+αὐ—βγ—αδ+βδ. ἐξ ἧ δῆλον, ὅτι τὸ ἐκ τῶν ἀποφατικῶν—β καὶ—δ γινόμενον, καταφατικόν ἐστιν, ἥτοι τὸ+βδ.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Α'.

§. 41. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἀρτίως μὲν ὄντες τῷ ἀριθμῷ τῶν πολλαπλασιασθησμένων μεγεθῶν, τὸ γινόμενον καταφατικόν ἐστὶ, καὶν τε καταφατικά, καὶν τε ἀποφατικά ἢ τὰ μεγέθη οἷον τὸ ἐκ τῶν+α+α=+α², καὶ τὸ ἐκ τῶν—α.—α=+α², ὁμοίως καὶ τὸ ἐκ τῶν α. α. α. α=+α⁴, καὶ τὸ ἐκ τῶν—α.—α.—α.—α=+α⁴. περιττῷ δὲ ὄντος, καταφατικὸν μὲν, τὸ ἐκ καταφατικῶν ἀποφατικόν δὲ, τὸ ἐξ ἀποφατικῶν. οἷον τὸ μὲν ἐκ τῶν α. α. α=+α³, τὸ δὲ ἐκ τῶν—α.—α.—α=—α³. ὡσαύτως τὸ μὲν ἐκ τῶν α. α. α. α. α=+α⁵, τὸ δὲ ἐκ τῶν—α.—α.—α.—α.—α=—α⁵.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Β'.

§. 42. Ἐντεῦθεν κατιδέειν βέβαιον, ὅτι αἱ ἀποφατικαὶ Δυναμεις, ὧν ἀρτίως ὁ ἐκθέτης, ἀνύπαρκτοί εἰσι καὶ ἐπίπλαστοι, ὁμοίως καὶ αἱ αὐτῶν ῥίζαι. Εἰν ἡ—α² ἐπίπλαστός ἐστι. τὸ γὰρ α² τὸ γινόμενον ἐστὶν ἥτοι ἐκ τῶν+α+α, ἢ ἐκ τῶν—α.—α. εἴτε ἐν καταφατικά, εἴτε ἀποφατικά ταῦτα ὡσι, τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον καταφατικόν ἐστιν, (§. 41.) εἴτεν τὸ α², εἰμὴν ἀποφα.

Φατικόν. ἡ ἄρα— α^2 Δύναμις, καὶ ἡ ρίζα αὐτῆς ἀνυπαρκτοί. ὁμοίως καὶ ἡ— α^4 , καὶ ἡ— α^6 , καὶ αἱ ρίζαι αὐτῶν. ὧν δὲ Δυνάμεων ἀποφατικῶν περιττοὶ εἰσιν οἱ ἐκδίδται, ἀποφατικῇ μὲν εἰσιν ἐκτὴν καὶ αἱ ρίζαι αὐτῶν, ἐμὴν δὲ ἐπιπλαττοίτε καὶ ἀνυπαρκτοί. τοιαύτη εἶναι ἡ— α^3 . γίνεται γὰρ ἐκ τῆς ρίζης— α δις πολλαπλασιασθείσης. ὡσαύτως καὶ ἡ— α^5 , ρίζαν ἔχει τὸ— α .

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 43. Τὸ μὲν ἐκ τῆς τῶν καταφατικῶν γραμμάτων διαιρέσεως προκύπτει πηλίκον, καταφατικὸν εἶναι ὡσαύτως καὶ τὸ ἐξ ἀποφατικῶν· τὸ δὲ ἐξ εἰσῆς μὲν καταφατικῆς, τῆς ἐτέρης δὲ ἀποφατικῆς, ἀποφατικόν. οἷον τὸ μὲν $\tau\alpha : +\alpha : +\alpha$ πηλίκον εἰς τὸ $+1$, ὡσαύτως τὸ $\tau\alpha : -\alpha : -\alpha$ εἰς τὸ $+1$ · τὸ δὲ $\tau\alpha : +\alpha : -\alpha$, τὸ -1 , ὁμοίως τὸ $\tau\alpha : +\alpha : +\alpha$, τὸ -1 .

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ διαιρέτης, πρὸς τὸν διαιρετὸν λόγον ἔχει, ὅν ἡ μονάς, πρὸς τὸ πηλίκον, ἔσται ὡς $+ \alpha : + \alpha : : + 1$, πρὸς τὸ πηλίκον. καταφατικῆς δὲ ὄντος $\tau\alpha$ ἐπομένῃ $\tau\alpha$ πρώτῳ λόγῳ, ἥτοι $\tau\alpha : + \alpha$, καταφατικὸν ἔσται καὶ τὸ $\tau\alpha$ δευτέρῳ λόγῳ ἐπόμενον. ἀλλὰ τὸ $\tau\alpha$ δευτέρῳ λόγῳ ἐπόμενον εἰς τὸ ἐκ $\tau\alpha : + \alpha : \alpha$ πηλίκον, καταφατικὸν ἄρα ἔσται τὸ ἐξ αὐτῶν πηλίκον, ἥτις τὸ $+1$. ἔτω μὲν γὰρ ἔσται ὡς $+ \alpha : + \alpha : : + 1 : + 1$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δευχθήσεται, ὅτι τὸ μὲν ἐκ $\tau\alpha : - \alpha : - \alpha$ πηλίκον εἰς τὸ $+1$ · τὸ δὲ ἐκ $\tau\alpha : + \alpha : - \alpha$, ἢ $- \alpha : + \alpha$, τὸ -1 . καὶ ἄλλως δὲ τὸ αὐτὸ δευχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ τοιοῦτον εἶναι διὰ τὸ πηλίκον, ὥστε τὸ ἐξ αὐτῶν καὶ $\tau\alpha$ διαιρέτω γινόμενον ταυτὸν εἶναι τῷ διαιρετῷ, τοιοῦτον δὲ τὸ γινόμενον προκύπτει, τηρεθέντων τῶν ἐν τῷ θεωρήματι ὀριζόντων, ἀληθῆ ἄρα τὰ ἐν τῷ θεωρήματι.

Κ Ε Φ. Β'.

Περὶ προθέσεως τῶν ὀλοκλήρων γραμμα-
τικῶν ἐκθέσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 44. Τὰς ἐν τῷ Α (β) δοθείσας ἑτεροειδῆς ὀλο-
κλήρας γραμματικὰς ἐκθέσεις ἐπισυνάψαι.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐτέρως μετὰ τὴν ἐτέραν κατὰ σειρὰν γραφείσης τοῖς ἰδίαις σημείοις καὶ συμπράκτοσι καὶ γραμμασι καὶ ἐκδίταις, ὡς ἐν τῷ Β, γεγενὸς ἀνέη τὸ ἐπιταχθεῖν.
δὲ λόγος ἐκ τῆς πράξεως ἐπιδόηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 45. Τὰς ἐν τῷ Γ δοθείσας ὁμοειδῆς ὀλοκλήρας γραμματικὰς ἐκθέσεις ἐπισυνάψαι.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐτέρως ὑπὸ τὴν ἐτέραν βαρβοδοιδῶς γραφείσης, ὡς ἐν τῷ Δ, καὶ εὐθείας ὑπ' αὐταῖς ἀχθείσης, ἐπισυνάψον μὲν τὰς συμπράκτορας κατὰ τὰς τῆς ἀριθμητικῆς κανόνας, πρόσγραψον δὲ τῷ 13 κεφαλαίῳ μίαν τῶν προκειμένων γραμματικῶν ἐκθέσεων. καὶ ἔσται δὴ τὸ ἐν τῷ Ε τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

Ὅμοίως τὰς ἐν τῷ Ζ τάξας ὥσπερ ἐν τῷ Η κῆνται, ἐυρήσεις κεφάλαιον αὐτῶν τὸ ἐν τῷ Θ ὀρώμενον. ἀπὸ γὰρ τῆς — 12 ἀφαιρεθείσης τῆς 1, τὰ λοιπά εἰσιν — 11. Καὶ τὰς ἐν τῷ Ι δὲ τάξας ὡς ἐν τῷ Κ κῆνται, ἐπισυνάψεις ἕτω μᾶλλον 6 καὶ ἥττον 4, ὅπερ εἰν. ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆς 6 καταφατικῆς τῆς 4 ἀποφατικῆς, τὰ λοιπά εἰσι μᾶλλον 2· μᾶλλον δὲ 2 καὶ μᾶλλον 1, μᾶλλον 3 εἰσὶ μᾶλλον δὲ 3 καὶ ἥττον 8, (ὅπερ εἰσὶ 3 θετικῶν κειμένων, καὶ 5 ἀποθετικῶν.

5 μόνον ἀποθετικά εἰσι τὰ λοιπά.) ἦττον 5 εἰς ἑν' ἦττον δὲ 5 καὶ ἦττον 2, ἦττον 7 συγκροτεῖ. τὸ ἄρα ζητούμενον κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Λ ἐστὶ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 46. Τῶν ἐν τοῖς Μ καὶ Ν δοθεῖσων ὁμοειδῶν το καὶ ἑτεροειδῶν ὁλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων τὸ κεφάλαιον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τεθάρχθωσαν αἱ ὁμοειδεῖς ὑπὸ τὰς ὁμοειδεῖς ὡς ἐν τῷ Ξ ἐρῶνται, καὶ συνήφθωσαν, ὡς ἀνωτέρω (§. 45.) ἐρήται καὶ ἔσται τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τὸ ἐν τῷ Ο.

Κ Ε Φ. Γ'.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν ὁλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 47. Τῶν δοθεῖσων ὁμοειδῶν ὁλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων, τῶν ἐν τοῖς Π, Ρ, Σ, Τ, τὴν διαφορὰν εὐρεῖν.

Ἔστω ἀφορατείας ἡ μὲν ἐν τῷ Ρ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Π, ἡ δὲ ἐν τῷ Τ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Σ.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Μεταβεβλήθω τὸ τῆς ἀφορατείας ἐκθέσεως σημεῖον καὶ ἡ μὲν καταφατικὸν εἴη, ὡς τῆς ἐν τῷ Ρ, ἀποφατικὸν γιγνέσθω· αὐτὸ δὲ ἀποφατικόν, ὡς τῆς ἐν τῷ Τ, καταφατικόν. καὶ συναφθῇτω ἡ μὲν ἐν τῷ Ρ τῇ ἐν τῷ Π, ἡ δὲ ἐν τῷ Τ τῇ ἐν τῷ Σ. λέγω δὴ ὅτι τὸ μὲν ἐν τῷ Φ κεφάλαιον τῶν ἐν τῷ Υ, ἡ διαφορὰ ἐστὶ τῶν Π καὶ Ρ· τὸ δὲ ἐν τῷ Ψ, τὸ κεφάλαιον τῶν ἐν τῷ Χ, ἡ διαφορὰ τῶν Σ καὶ Τ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰ τῶν ἀφαιρετίων σημεῖα μεταβέβληται, ἡ διαφορὰ τῶν ἐκθέσεων ἐπὶ τὸ ἐαυτῶν κεφάλαιον. ὁπλον γὰρ, ὅτι τὸ μὲν 6 α τὰ 4 α διαφέρει· αὐτὸ δὲ 5 γ διαφέρει τῷ - 5 γ κατὰ τὸ 13 γ. οὕτως γὰρ τῷ - 5 γ προσέθηναι 13 γ, ὥπως αὐτὸς ἴσεν ἢ τῷ 8 γ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς - 4 β γ ἀπὸ τῆς - 10 β γ, λοιπὸν ἔσται ἡ - 6 β γ, καὶ τῆς 2 δ ἀπὸ τῆς - 20 δ, λοιπὸν ἔσται ἡ - 28 δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 48. Τῶν ἐν τοῖς Α (γ) καὶ Β δοθείσων ἑτεροειδῶν οὐκ ἐπὶ ὁμοίων γραμματικῶν ἐκθέσεων τὴν διαφορὰν προσεργεῖν. Ἐξωσαν ἀφαιρετίαι αἱ ἐν τῷ Β ἀπὸ τῶν ἐν τῷ Α.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γραφήτωσαν ταῖς ἐν τῷ Α αἱ ἐν τῷ Β ἀφαιρετίαι κατὰ σειράν μεταβληθέντων τῶν ἐαυτῶν σημείων, τῶν μὲν καταφατικῶν εἰς ἀποφατικά, τῶν δὲ ἀποφατικῶν εἰς καταφατικά. καὶ ἔσται δὴ ἡ ἐν τῷ Γ ἐκθεσις ἡ τῶν προκειμένων διαφορὰ, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων ὁπλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 49. Αἱ μὲν ὁμοειδῆς γραμματικαὶ ἐκθέσεις ἐνεργεῖα ἀφαιρῶνται καὶ συνάπτονται· αἱ δὲ ἑτεροειδῆς, δύναται.

Κ Ε Φ. Δ΄.

Περὶ πολλαπλασιασμῶ τῶν ὁλοκλήρων.
γραμματικῶν ἐκθέσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 50. Ταῖς δοθείσας ὁλοκλήρας γραμματικὰς ἐκθέσεις πολλαπλασιάσαι.

Ἔστω

(γ) πλ. η.

Ἔσω πρῶτον ἑκατέρα τῶν δοθεσῶν μονομερῆς, οἷα αὐτὰ ἐν τῷ Δ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Πρῶτον μὲν πολλαπλασιασθήτω ὁ συμπράκτωρ 4 διὰ τῆς συμπράκτορος 3, τηρηθέντος τῆς λόγου τῶν σημείων, (φ. 40.) καὶ τῆς τῆς κοινῆς ἀριθμητικῆς κανόνος· Β'. δὲ τὰ γράμματα διὰ τῶν γραμμάτων, καὶ εἰ μὲν ἔσται αὐτὰ εἰς ἕντε τῇ πολλαπλασιαστῇ καὶ τῇ πολλαπλασιαζέσῃ ἐκθίσει, ὡς τὰ τῶν προκειμένων, προσγραφῆτω τῷ ἐκ τῶν συπρακτόρων γινομένῳ πάντα τὰ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐκθέσεων γράμματα, ἐν μετὰ τὸ ἕτερον ἀναλλοίωτα· εἰ δὲ τὰ αὐτὰ, ὡς ἐν ταῖς ἐν τῷ Ζ ἐκθέσει, προσγραφῆτω τῷ ἐκ τῶν συπρακτόρων γινομένῳ τὰ ὁποῖας γράμματα, οἷον τὰ αβ, ἐκθέτας ἔχοντα τὰ τῶν ἐκθετῶν κεφάλαια, οἷον τὸ μὲν α, τὸ 5· τὸ δὲ β, τὸ 2. καὶ ἔσται δὴ τὸ μὲν ἐκ τῶν ἐν τῷ Δ γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Ε· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ Ζ, τὸ ἐν τῷ Η. δῆλος δὲ ὁ λόγος ἕκτε τῆς κοινῆς ἀριθμητικῆς, καὶ ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν φ. 40, καὶ φ. 23.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται τὸ μὲν ἐκ τῶν ἐν τῷ Θ γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Ι· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ Κ, τὸ ἐν τῷ Λ· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τῷ Μ, τὸ ἐν τῷ Ν.

Ἔσω δὲ πολυμερῆς ἑκατέρα τῶν δοθεσῶν ἐκθέσεων, οἷα αὐτὰ ἐν τῷ Ξ.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Γυγραφέτω ἡ ἑτέρα ὑπὸ τὴν ἑτέραν, ὡς ἐν τῷ Ο, καὶ ἔσται ὑπὸ αὐταῖς εὐθεῖα.

Β'. Πολλαπλασιάσον ἕκαστον τῶν τῆς πολλαπλασιαστῆς μερῶν δι' ἑκάστη τῶν τῆς πολλαπλασιαζέσης κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα, (φ. 36.) ὅσα τῶν γινομένων ὁμοειδῆ εἰσὶ λαβέουσιν γράψας ἐν ὑπὸ τὸ ἕτερον. καὶ ἔσται δὴ τὰ μὲν ἐκ τῆς 4α καὶ ἐνὸς ἑκάστου

μέρος τῆς πολλαπλασιαστικῆς γινόμενα τὰ ἐν τῷ Π, τὰ δὲ ἐκ τῆς — 3β καὶ τῶν ἀρημικῶν μερῶν τὰ ἐν τῷ Ρ.

Γ'. Σύναψον τὰ γινόμενα, εὐθεῖαν ἐπ' αὐτὰ ἀγαγών. καὶ ἔσται δὴ τὸ ἐκ τῶν προκειμένων ἐκθέσεων γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Σ. ἡ δὲξις ἐκ τῆς πράξεως δέλη.

Κ Ε Φ. Ε'.

Περὶ τῆς τῶν ὁλοκλήρων γραμματικῶν ἐκθέσεων διαιρέσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 51. Τὴν ἐν τῷ Τ δεθεῖσαν γραμματικὴν μονομερῆ ὁλοκλήρον ἐκθέσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Υ μονομερῆς ὁλοκλήρου καὶ ἑτεροειδῆς διελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Γραφήτωσαν ἥτε διαιρετρία καὶ ἡ διαιρέσα ὡς ἐν τῷ Φ, ἡ ὡς ἐν τῷ Χ ὁράται. Τέτων δὲ ἐκάτερον πηλίκον λογιθήσεται τῶν προκειμένων ἐκθέσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 52. Τὰς ἑτεροειδῆς ἐκθέσεις πραγματικῶς διελεῖν ἀμύχανον, σημαίνεται δὲ μόνον ἡ διαίρεσις διττῶς, ὡς ἐν τῷ Φ, καὶ τῷ Χ ἰδὲν ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ τῶν πολυμερῶν ἑτεροειδῶν ἐκθέσεων πηλίκον, τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω, σημαίνεται διὰ τῆς ἐν τῷ 2Ψ, ἡ διὰ τῆς ἐν τῷ 2Ω ὁρωμένης ἐκθέσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§ 53. Τὴν ἐν τῷ Α (δ) δεθεῖσαν μονομερῆ ἐκθέσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Β μονομερῆς, τῆς ἐκ τῶν αὐτῶν γραμμάτων συγκειμένης διελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Διηγήθω ὁ συμπράκτωρ τῆς ἐν τῷ Α διαιρετέας διὰ τῆς τῆς διαιρέσεως, τῆς ἐν τῷ Β κατὰ τὸν
τῆς

τῆς κεινῆς Ἀριθμητικῆς κανόνα. καὶ ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν καταφατικός, καταφατικὸν ἀρα ἔσται καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν πεκύπτων πηλίκον, τῷ τε το 4.

Β'. Γεγραμμένον τὰ μὲν τῆς διαμετέας γραμματαὺς ἔχει, τὰ δὲ τῆς διαμέσεως μετὰ ἀποφατικῶν ἐκθετῶν, ὡς ἐν τῷ Γ ὁράται.

Γ'. Πολλαπλασιασθέντων τὰ ἐν τῷ Γ γραμματα, (ῥ. 50.) καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον αβ⁴ τῷ πηλίκῳ ⁴ προσγεγραφήτω.

Ἐσται δὴ ἔν η' ἐν τῷ Δ ἔκθεσις τὸ ζητούμενον πηλίκον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ σημεῖον + τῷ πηλίκῳ προσήκει. (ῥ. 43.) τὸ δὲ 4 πηλίκον ἔσται τῷ 12 διαμεθέντος δια τῷ 3 ἐκ τῆς κοινῆς Ἀριθμητικῆς ὁῦλον. ὅτι δὲ τὸ πηλίκον τῶν Δυναμέων, τετέστι τὸ πεκύπτειν ἐκ τῆς διαμέσεως τῶν αὐτῶν γραμμάτων, τῶν διαφόρων ἐχόντων ἐκθέτας, ἐκθέτην ἔχει ἴσον τῇ διαφορᾷ τῶν ἐκθετῶν τῶν διαμενέων Δυναμέων, οἰδεκται. (ῥ. 27.) ἐκ τούτων ἔν ὁῦλον, ὅτι τὸ ἐν τῷ Δ ἐστὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, τὸ μὲν τῶν ἐν τοῖς Ε καὶ Ζ πηλίκον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Η· τὸ δὲ τῶν ἐν τοῖς Θ καὶ Ι, τὸ ἐν τῷ Κ· τὸ δὲ ἐν τοῖς Λ καὶ Μ, τὸ ἐν τῷ Ν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

ῥ. 54. Ἰστέον, ὅτι διὰ τῆς 2 καὶ 3 τῶν εἰρημένων πράξεων ἀφαιρῶνται οἱ τῆς διαμέσεως ἐκθέται ἀπὸ τῶν τῆς διαμετέας, καὶ γεγράφεται τὰ γραμματα μετὰ ἐκθετῶν, ἴσων τῇ διαφορᾷ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

ῥ. 55. Τὴν ἐν τῷ Ζ δευθεσαν μονομερῇ ἔκθεσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Ο μονομερεῖς καὶ συγκειμένης ἔκπε τῶν αὐτῶν καὶ ἄλλων γραμμάτων διελθεῖν.

Τῶν ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι πραχθέντων,
 τὸ ἐν τῷ Π προκύψει πηλίκον. ἐπὶ δὲ τὸ $\bar{\mu} = \mu$, (δ.
 31.) ἴσται τὸ ἐν τῷ Π ἴσον τῷ ἐν τῷ Ρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

δ. 56. Τὴν ἐν τῷ Σ δοθεῖσαν πολυμερῇ ἐνθεσιν
 διὰ τῆς ἐν τῷ Γ πολυμερῆς, καὶ ἐκ τῶν αὐτῶν συγ-
 καμμένης γραμμάτων, διελῶν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Τετάρθῳ ἑκατέρᾳ τῶν ἐνθεσίων κατὰ τὸ μέ-
 γεστερον τῶν ἐν αὐταῖς Δυνάμεων ὅπερ ἐστὶ, πρῶτον μὲν
 γεγράφθω τὸ τὴν μείζονα ἐμφαίνειν Δύναμιν γραμμα,
 δεύτερον, δὲ τὸ τὴν τῆς πρώτης τῆ αὐτῆς γραμματος
 ἐλάσσονα, τρίτον τὸ τὴν τῆς δευτέρας, καὶ τὰ ἰφε-
 ξῆς ὁμοίως. ὅτως ἔν ταχθεῖσα ἡ μὲν ἐν τῷ Σ, γί-
 νεται ἡ ἐν τῷ Υ, ἡ δὲ ἐν τῷ Τ, ἡ ἐν τῷ Φ.

Β'. Διαιρεθῆτω διὰ τῆ α^2 τῆ πρώτης μέρους τῆς
 διαιρέσεως τὸ τῆς διαιρετέας πρῶτον μέρος, τὸ α^4 .
 (δ. 53.) δύο δὲ ἐνθεῶν περιεχουσῶν γωνίαν περὶ τὴν
 διαιρῶσαν Φ ἀχθεῖσῶν, γεγράφθω ὑπὸ τὴν ἑτέραν
 τὸ προκύψαν πηλίκον α^2 .

Γ'. Πολλαπλασιασθῆτω τὸ εὐρεθὲν πηλίκον α^2 δι'
 ἑκάστη τῶν τῆς διαιρέσεως μερῶν. καὶ ἑκάστον τῶν γινο-
 μένων ἀπὸ ἑκάστη μέρους τῆς διαιρετέας ἀφηρέθῳ γραφὲν
 ὡς ἐν τῷ Χ ὁράται.

Δ'. Γεγράφθω τὸ λοιπὸν σὺν ἅπασιν τοῖς μέρεσι τῆς
 διαιρετέας, ἀφ' ὧν ἐδὲν ἀφήρηται, κατὰ σειράν ὡς ἐν
 τῷ Ψ. καὶ διηρέθῳ πάλιν τὸ πρῶτον τῆς λοιπῆς μέρος --
 ααββ διὰ τῆ πρώτης μέρους α τῆς διαιρέσεως καὶ τὸ
 εὐρεθὲν πηλίκον -- ααββ κατὰ σειράν μετὰ τὸ α^2
 γκα-

ΚΕΦ. 5'. ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘ. ΑΦΑΙΡ. ΠΟΛΛ. ἢ ΔΙΑΙΡ. 27

γραφῖν, πολλαπλασιασθήτω δι' ἐκάστη τῶν τῆς διαίρεσης μερῶν ἀφαιρεθῶ δὲ καθάπερ καὶ πρότερον τὰ γινόμενα, τὰ ἐν τῷ Δ ἀπὸ τῶν ἐν τῷ Ψ. τὰ δὲ καταλειφθέντα σὺν τοῖς ἄλλοις μέρεσιν ἅπασι κατὰ σειράν γραφήτω, ὡς ἐν τῷ C.

Ε'. Τὰ αὐτὰ δὲ γιγνέσθω ἕως ἢ ἦτοι ἔθεν καταλειφθῇ, ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων ἐκθέσεων, τῶν ἐν τῷ D, ἢ μέρος τὶ ἀδιαίρετον.

Ἔσται δὲ ἔν τῷ E τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὡς ἐξ αὐτῆς τῆς πράξεως καὶ τῶν τῆς κοινῆς ἀριθμητικῆς κανόνων δῆλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 57. Τὸ μετὰ τὴν διαίρεσιν ἐκθέσθαι τινος, οἷον τῆς ἐν τῷ F διὰ τῆς ἐν τῷ G, καταλειφθὲν ἀδιαίρετον μέρος γ' τῷ πηλίκῳ προσγράφεται, ὡς ἐν τῷ L, ἢ ἐν τῷ Q ὁράται.

Κ Ε Φ'. 5'.

Περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, ἢ διαίρεσεως τῶν κεκλασμένων γραμματικῶν ἐκθέσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 58. Τῶν δοθεισῶν κεκλασμένων ἐκθέσεων εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐάν μιν αἱ δοθεῖσαι ἐκθέσεις τὲς αὐτὰς ἔχωσιν ὀνομασίας, ὥστε αἱ ἐν τῷ A, (x) συναψον τὲς ἀριθμητάς, (§. 44, 45.) ἢ ὑπὸ τὸ κεφάλαιον, ἐυθείας ἀχθείσης, τὸν κοινὸν ὀνομαστὴν γράψον. ἔσται δὲ ἔν τῷ ζητούμενον κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ B, ὁμοίως τὸ τῶν ἐν τῷ Γ, τὸ ἐν τῷ Δ.

Ἐάν

ΠΑΡΑΚΤΕΟΝ.

Πολλὰ λανθάνουσι αἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν, καὶ ὅπο
το γινώσκοντες, εὐθὺς ἀχθόμενοι, γινώσκουσιν τὸ γι
νώσκοντες τῶν οὐκ αἰσθάνων, καὶ διὰ τὸ ζητῶντες γι
νῶσκοντες τὸ ἐν τῷ Β. οὕτως διὰ τὸ ἐκ τῶν ἐν τῷ Γ. ἐκ
στῶν τὸ ἐν τῷ Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 61. Τὴν ἐν τῷ Ε. δοθένσαν κενόσχημιν ἐκδοῦν
διὰ τῆς ἐν τῷ Ζ. διδῶν.

ΠΑΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἀνεσφῶν ἡ ἐν τῷ Ζ. διαφῶσα, τῷτις οὐ μὴν
οὐκ αἰσθάνεται ἀριθμῶντες γινώσκοντες, οὐδὲ ἀριθμη
τῆς οὐκ αἰσθάνεται, καὶ ἡ ἐν τῷ Η. οὐκ αἰσθάνεται, καὶ
οὐκ αἰσθάνεται ἡ ἐν τῷ Η. διὰ τῆς ἐν τῷ Ε. διαφῶσας. καὶ
διὰ τὸ ἐκ αὐτῶν γινώσκοντες, τὸ ἐν τῷ Θ., τὸ ζητῶν
τον μᾶλλον, ὡσαύτως τῆς ἐν τῷ Ι. ἐκδοῦσας διὰ τῆς
ἐν τῷ Κ. διαφῶσας, τὸ μᾶλλον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 62. Ἰστέον ὅτι αἱ τῶν ἐκδοῦσων παραφῶσαι ἀποδο
ῖνται αἱ αὐταὶ εἰς ταύτας ἀριθμητικῶν κλάσματα.

Κ Ε Φ. Ζ'.

Περὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, καὶ διαφύσεως τῶν εἰδῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 63. Τὴν ἐν τῷ Μ. δοθένσαν ἐκδοῦσιν εἶδῶν
ἐκδοῦν τὸ κενόσχημον.

ΠΑΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἡ εἶδος μετὰ τὴν εἶδον καταστροφὰν γινώσκου
σα, ὡς ἐν τῷ Ν. κένεται, καὶ ἐστὶν διὰ τὸ ἐν τῷ Ν.
ἐκδοῦσιν τὸ ζητῶντες κενόσχημον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

Ἰστέον δὲ, ὅτι τινὲς τῶν ῥιζῶν ἑτεροειδέες δοκῶσι, καίπερ ὁμοειδέες ὦσαι. τοιαῦται δὲ εἰσιν αἱ ἐν τῷ Ξ καὶ Θ ὁρώμεναι. ἔστι δὲ ἡ μὲν ἐν τῷ Ξ ἴση τῇ ἐν τῷ Π . ἐπεὶ δὲ τὸ $16\alpha^4$ τετράγωνόν ἐστιν, ὅτινος ῥίζα τὸ $4\alpha^2$, τὸ ἄρα τὴν ἐκθεσιν ἀρρήτον ποιεῖν οὐκ ἔστι τὸ $16\alpha^4$, ἀλλὰ τὸ 2α , ὅτινος ἡ ῥίζα ἀρρήτος. γραφείσης ὅν τῆς $4\alpha^2$ ῥίζης ἐκτὸς τῆς τῆς ῥίζης σημείον ἐν τῷ τῆς ἐκτὸς συμπράκτορος τόπῳ, μεταβληθήσεται ἡ ἐν τῷ Ξ ῥίζα εἰς τὴν ἐν τῷ Γ . πάλιν ἡ ἐν τῷ Θ ἴση τῇ ἐν τῷ Σ . ἔστι δὲ ὁ 4 τετράγωνον, ὅτινος ἡ ῥίζα ὁ 2 . τοιγαρὲν ἡ ἐν τῷ Θ ἴση τῇ ἐν τῷ Γ . οὕτως αἱ ἐν τοῖς Ξ καὶ Θ δοκῶσαι ἑτεροειδέες πρότερον, εἰς τὰς ἐν τοῖς Γ καὶ Γ μεταβληθεῖσαι, ὁμοειδέες γεγένηασιν. (§. 38.) ὁμοίως δὲ αἱ ἐν τοῖς Υ καὶ Φ ἑτεροειδέες δοκῶσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν ἐν τῷ Υ ἴση τῇ ἐν τῷ X , ἡ δὲ ἐν τῷ Φ τῇ ἐν τῷ Ψ , ἡ τῇ ἐν τῷ Ω , ὁδὸν ἄρα ὅτι ὁμοειδέες εἰσιν αἱ ἐν τοῖς Υ καὶ Φ .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 64. Τὰς δοκῶσας ὅν ἑτεροειδέες ῥίζας διὰ τὰς διαφόρους τῶν γραμμάτων ἐκθέσεις, καὶ τὰς ἐντὸς τῆς σημείον συμπράκτορας, πολυπραγμονητέον πρὶν ἢ ἑτεροειδέες εἶναι ἀποφύνασθαι. ταῦτίσιν ευρετέον τὸ ἀρρήτον τὴν ἐκθεσιν ποιεῖν. τῷτο δὲ γίνεται, ἀναλυομένων τῶν γραμμάτων καὶ τῶν συμπράκτορων αὐτῶν εἰς τὰς πολλαπλασιασάς, ὧν γινόμενόν ἐστιν ἡ προκειμένη ὑπὸ τὸ τῆς ῥίζης σημείον ἐκθέσεις. καὶ εἰάν μὲν τετραγωνική ἡ ῥίζα ἢ, τετράγωνον ἐν τῇ ἐκθέσει ευρετέον, ὅπερ δὲ ἄλλων πολλαπλασιασθὲν τὴν προκειμένην πεποίηκεν ἐκθεσιν· εἰάν δὲ κυβική, κύβον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ῥιζῶν ὁμοίως. ὅπως ὅν ἀναλυθείσης τῆς ἐκθέσεως εἰς τὰς ἑαυτῆς πολλαπλασιασάς, ἐξάγεται ἡ ῥίζα τῆς
ἐν

ἐν τῇ ἐκθέσει εὐρεθείσης Δυνάμεως, ἢ ἐκτὸς τῆς σημείων γράφεται, ὡς ἐν τῷ ὑποδείγματι τῆς προλαβύσης σημειώσεως. ὁ δὲ ἕτερος πολλαπλασιαστῆς, δι' ἧς ἡ εὐρεθεῖσα Δύναμις πολλαπλασιαζομένη τὴν ἐκθεσιν ἱποίει, ἐκείνός ἐστιν ὁ τὴν ἐκθεσιν ἀρρήτον ποίων. διὸ καὶ ὑπὸ τὸ σημεῖον τῆς ῥίζης γράφεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 65. Τῶν ἐν τῷ C δοθεισῶν ὁμοειδῶν ριζῶν τὸ κεφάλαιον εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Τὰς ἐκτὸς τῶν σημείων τῆς ῥίζης συμπράκτορας συνάψας κατὰ τὰς τῆς προθέσεως κανόνας, καὶ τὸ κεφαλαίω αὐτῶν τὴν μίαν τῶν ριζῶν, ὡς ἔχει, προσγράψας, εὐρήσεις τὸ τῶν προκειμένων ριζῶν κεφάλαιον ἴσον τῷ ἐν τῷ D ἐρωμένῳ. ὁμοίως τὸ μὲν τῶν ἐν τῷ E ἐστὶ τὸ ἐν τῷ G· τὸ δὲ τῶν ἐν τῷ L, τὸ ἐν τῷ M· τὸ δὲ τῶν ἐν τῷ N καὶ Q, τὸ ἐν τῷ R.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 66. Ἀπὸ τῆς ἐν τῷ A (η) δοθείσης ῥίζης τὴν ἐν τῷ B ἑτεροειδῆ ἀφελεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Μεταβεβλήθω τὸ σημεῖον τῆς συμπράκτορος τῆς ἀφαιρετέας εἰς ἀποφατικόν, εἰ καταφατικόν ἐστιν, ἢ εἰς καταφατικόν εἰν ἀποφατικόν ἢ, καὶ κατὰ σειράν γεγραφθῶσαν αἱ δοθεῖσαι ῥίζαι, ὡς αἱ ἐν τῷ Γ. αἵτινες ἢ ζητούμενη διαφορὰ εἰσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 67. Σημαίνεται μὲν ἡ τῶν ἑτεροειδῶν ριζῶν ἀφαίρεσις, πραγματικῶς δὲ ἢ γίνεται, ὡσαύτως ὁ πολλαπλασιασμός καὶ ἡ διαίρεσις.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ V.

§. 68. Ἀπο τῆς ἐν τῷ Δ δόξης γίγναι τὴν ἐν τῷ Ε ὁμοειδή ἀφάνειν.

ΠΑΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἀφελθὼς ὁ τῆς ἐν τῷ Ε ἀφαιρέτας συμπαραπῶς ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Δ, καὶ τῷ λοιπῷ προηγούμενῳ ἡ εἶδος τῶν γίγναι, ὡς ἔχει. ἔστω δὲ ἐν ἡ τῶν προειρημένων γίγναι διαφοράς ἡ ἐν τῷ Ζ. ὁμοίως ἡ διαφοράς τῶν ἐν τοῖς Η καὶ Θ εἶναι ἡ ἐν τῷ Ι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η.

§. 69. Τὴν ἐν τῷ Κ δόξαν γίγναι δια τῆς ἐν τῷ Α πολλαπλασιασμοῦ.

ΠΑΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἡ εἶδος μετα τὴν εἶργαν κατὰ σφραγὶς γυφθῆναι, καὶ μεταξὺ αὐτῶν τὸ εἶ πολλαπλασιασμοῦ γίγναι, ὡς ἐν τῷ Μ ὁράται. τῷτο δὲ ἐστὶ τὸ εἶ αὐτῶν γινόμενων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α.

§. 70. Ἰστέον, ὅτι ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῇ διαιρέσει αἱ τρεῖς αὐτὲς ὁμοιότητας ἔχουσιν γίγναι, ὡς ὁμοειδῆς ἐκκαταβάνονται, καὶ ἐν ἀλλήλων κατὰ τὰ ἀλλὰ διαφέρουσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β.

§. 71. Καὶ τῷτο δὲ εἶδεναι δὲ, ὡς αἱ μὴ τρεῖς αὐτὲς ὁμοιότητες ἔχουσιν γίγναι, οἷον αἱ ἐν τοῖς Ν καὶ Ξ, (διὰ τῶν Α καὶ Β εἰσέχουσιν ἡ ὁμοειδήποτε ἐμφανισθῆναι ἔχουσιν μεταβιβάζονται, ὅπως ἡ μὴ Ἀ =

Α', ἡ δὲ $\sqrt{B=B_3}$, (§. 33.) τῶν $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἰς τὰ $\frac{6}{3}$ καὶ $\frac{6}{2}$,

$\frac{2}{6}$, τὰ τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχοντα, μεταβληθέντων, ἔσεται τὸ μὲν $A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{3}{6}}$, τὸ δὲ $B^{\frac{1}{3}} = B^{\frac{2}{6}}$. ἀλλὰ τὸ μὲν $A^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{A^3}$, τὸ δὲ $B^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{B^2}$. ἄρα ἢ μὲν $\sqrt[6]{A} = \sqrt[6]{A^3}$, ἢ δὲ $\sqrt[6]{B} = \sqrt[6]{B^2}$. ἐκὼν αἱ $\sqrt[6]{A}$ καὶ $\sqrt[6]{B}$, αἱ μὴ τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχουσαι εἰς τὰς $\sqrt[6]{A^3}$ καὶ $\sqrt[6]{B^2}$ μεταβλήθησαν, τὰς ἴσας αὐταῖς, καὶ τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχούσας.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 72. Τὰς ὁποιασὺν ἄρα ρίζας ὡς ὁμοειδεῖς πολλαπλασιάζειν καὶ διαιρεῖν ἔξεσι. καὶ γὰρ μὴ τὲς αὐτὲς ἔχωσιν ὀνομασὰς, εἰς ἑτέρας μεταβάλλονταί τὲς αὐτὲς ὀνομασὰς ἔχούσας.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α 5'.

§. 73. Τὴν ἐν τῷ Ο δοθεῖσαν ρίζαν διὰ τῆς ἐν τῷ Π πολλαπλασιάσαι.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Ο Ν.

Πολλαπλασιασθήτωσαν οἱ ἐκτὸς τῶν ριζῶν συμπράκτορες, καὶ τῷ ἐξ αὐτῶν γινομένῳ προσγεγραφθῶ τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἐντὸς τῶν ριζῶν ἐκθέσεων σὺν τῷ τῆς ρίζης σημείῳ. ἔσται δὴ ἔν τὸ μὲν ἐκ τῶν ἐν τοῖς Ο καὶ Π, τὸ ἐν τῷ Ρ· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τοῖς Σ καὶ Τ, τὸ ἐν τῷ Υ· τὸ δὲ ἐκ τῶν ἐν τοῖς Φ καὶ Χ γινόμενον, τὸ ἐν τῷ Ψ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ζ'.

§. 74. Τὴν ἐν τῷ Ω δοθεῖσαν ρίζαν διὰ τῆς ἐν τῷ C διελαιν.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Διαιρεθῆτω ὁ συμπράκτωρ τῆς ἐν τῷ Ω διαιρέσεως, διὰ τῆς τῆς ἐν τῷ C διαιρέσεως καὶ τῷ πηλίκῳ προσγεγράφῃ τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ἐντὸς τῶν ῥιζῶν ἐκθέσεων προκύψαν πηλίκον μετὰ τῆς τῆς ῥίζης σημείας. καὶ ἔσται δὴ τὸ ζητούμενον πηλίκον τὸ ἐν τῷ D· ὁμοίως τὸ ἐκ τῶν F καὶ G, τὸ ἐν τῷ M.

Κ Ε Φ. Η'.

Περὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμῶ καὶ διαιρέσεως τῶν ὁλοκλήρων ἐκθέσεων διὰ τῶν κεκλασμένων, καὶ τῶν ῥιζῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 75. Τὴν ἐν τῷ Α (9) δοθεῖσαν ὁλόκληρον ἐκθεσιν τῇ ἐν τῷ Β ἐπισυνάψαι κεκλασμένην.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐυθείας ὑπὸ τὴν ὁλόκληρον ἀχθείσης, ἡ μονὰς γεγράφῃ ὑπ' αὐτήν. ὡς ἔν κεκλασμένη τῇ ὁλοκλήρῳ λογιθείσῃ ἐπισυνήφῃ ἡ ἐν τῷ Β κεκλασμένη. (§. 58.) ἔσται δὴ ἔν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Γ.

Τῶν αὐτῶν δὴ πραχθέντων, ἀφαιρεθήσεται μὲν ἡ ἐν τῷ Δ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Ε, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἴση ἔσται τῇ ἐν τῷ Ζ. (§. 59.) πολλαπλασιασθήσεται δὲ ἡ ἐν τῷ Η διὰ τῆς ἐν τῷ Θ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἔσται τὸ ἐν τῷ Ι. (§. 60.) διαιρεθήσεται δὲ ἡ ἐν τῷ Κ διὰ τῆς ἐν τῷ Λ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν προκύψαν πηλίκον ἔσται (§. 61.) τὸ ἐν τῷ Μ.

ΠΡΟΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 76. Τὴν ἐν τῷ Ν δοθεῖσαν ὁλόκληρον ἔκθεσιν τῇ ἐν τῷ Ξ δευτέρῃ ἐπισυνάψαι εἴζη.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἡ τε ὁλόκληρος ἔκθεσις καὶ ἡ ρίζα κατὰ σειρὰν γεγραφθῶ. καὶ ἔσται δὴ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν τὸ ἐν τῷ Ο. Ἀφαιρεθήτεται δὲ ἡ ἐν τῷ Ρ ρίζα ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Π ἐλοκλήρου ἔκθεσεως, εἰάν τὸ σημεῖον αὐτῆς μεταβληθῇ, καὶ κατὰ σειρὰν τῇ ἐλοκλήρῳ γραφῇ, ὡς ἐν τῷ Σ ὁράται. ἡ δὲ ἐν τῷ Υ ὁλόκληρος ἔκθεσις ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Γ ρίζης ἀφαιρεθήτεται, εἰάν μεταβληθῇ τὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ κατὰ σειρὰν τῇ εἴζη γραφῇ. ὡς ἐν τῷ Φ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.

§. 77. Τὴν ἐν τῷ Χ δευτέρῃ ὁλόκληρον ἔκθεσιν διὰ τῆς ἐν τῷ Ψ πολλαπλασιάσαι.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Πολλαπλασιασθήτω ἡ ὁλόκληρος ἔκθεσις διὰ τῆς ἐκ τῆς ρίζης συμπράκτορος, καὶ τῷ γινομένῳ προσγεγραφθῶ ἡ ρίζα ὡς ἔχει. καὶ ἔσται δὴ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον τὸ ἐν τῷ Ω.

Ὅμοιως δὲ τῆς μὲν ἐν τῷ C ἐλοκλήρου διὰ τῆς ἐν τῷ D ρίζης συμπράκτορος διαιρεθείσης, πηλίκον προκύψει τὸ ἐν τῷ Ε. τῆς δὲ ἐν τῷ F ρίζης συμπράκτορος διὰ τῆς ἐν τῷ G ἐλοκλήρου διαιρεθέντος, προκύψει τὸ ἐν τῷ L πηλίκον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 78. Ἰστέον δὲ, ὅτι καὶ ἄλλως πολλαπλασιάσαι καὶ διελθεῖν ἐνεσι διὰ τῶν ριζῶν τὰς ἐλοκλήρους ἐκθέσεις. ἐμφανέτω γὰρ τὸ μὲν Α τὴν ὁποιανῶν ὁλόκληρον ἔκ-

θεσιν· τὸ δὲ $\sqrt[n]{A}$, τὴν ἐπειανῆν ῥίζαν. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $A = A^1$, ἡ δὲ $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$, τῶν 1 καὶ $\frac{1}{n}$ μεταβληθείσων εἰς τὰ $\frac{n}{n}$ καὶ $\frac{1}{n}$, ἔσται τὸ $A^1 = A^{\frac{n}{n}}$. ἐμοιδοῖς ἔν ἔσται $A^{\frac{n}{n}}$, $A^{\frac{1}{n}}$, εἴτεν αἱ $\sqrt[n]{A^{\frac{n}{n}}}$, $\sqrt[n]{A^{\frac{1}{n}}}$, πολλαπλασιασθήσονται μὲν κατὰ τὴν τῆς πολλαπλασιασμῆ κανόνα, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἔσται τὸ $\sqrt[n]{A^{\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{A^{\frac{1}{n+1}}}$. διαιρεθήσονται δὲ τῷ τῆς διαιρέσεως κανόνι, καὶ ἔσται τὸ ἐξ αὐτῶν πηλίκον, τὸ $\sqrt[n]{A^{\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n-1}}} = \sqrt[n]{A^{\frac{1}{n-1}}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 79. Τῆς ἐν τῷ M δοθείσης κεκλασμένης ἐκθέσεως, καὶ τῆς ἐν τῷ N ῥίζης εὐρεῖν τὸ κεφάλαιον.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἐυθείας ὑπὸ τὸν τῆς ῥίζης συμπράκτορα ἀχθείσης γραφθῆτω ὑπ' αὐτὴν ἡ μονάς. ὡς κλάσματι δὲ τῷ τῆς ῥίζης συμπράκτορι ἐκληφθέντι, ἀχωρίσῃ διαμένοντι τῆς ῥίζης, συνήφθω ἡ κεκλασμένη ἐκθεσις. (§. 58.) καὶ ἔσται δὴ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν, τὸ ἐν τῷ Q.

Τῶν αὐτῶν πραχθέντων, ἡ μὲν διαφορὰ τῶν ἐν τοῖς R καὶ S ἔσται ἡ ἐν τῷ V· τὸ δὲ γινόμενον ἐκ τῶν ἐν τοῖς A καὶ B, (1) τὸ ἐν τῷ Γ· τὸ δὲ πηλίκον, τὸ ἐκ τῶν ἐν τοῖς Δ καὶ E, τὸ Ζ.

Κ Ε Φ. Θ'.

Περὶ τῆς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς.

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 80. Εἰδέναι δὲ ἐκ ποίων μερῶν πᾶσα Δύναμις σύγκεται. τέττα γὰρ γνωθέντος, ῥᾶον ἢ τῆς δοθείσης Δυναμέως ῥίζα εὐρεθήτεται. πολλαπλασιασθήτω ἔν τῷ $\alpha \pm \beta$ πρώτον μὲν ἐφ' ἑαυτὸ, ἔτα διὰ τῆς δευτέρας Δυναμέως, ἔτα διὰ τῆς τρίτης, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. ἔσαι δὴ ἔν τῷ μὲν ἐκ τῷ $\alpha \pm \beta$ τετράγωνον, τὸ ἐν τῷ H , ὁ δὲ κύβος, ὁ ἐν τῷ Θ , ἢ δὲ τετάρτη Δύναμις ἢ ἐν τῷ I . τὸ μὲν ἔν ἀπὸ τῆς διμερῆς ἐκθέσεως $\alpha \pm \beta$ τετράγωνον σύγκεται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν πρώτων τῆς ἐκθέσεως μερῶν, καὶ τῶν δις ὀρθογωνίων τῶν ὑπὸ τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων, καὶ ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν δευτέρων· ὁ δὲ κύβος, ἐκ τῶν κύβων τῶν ἀπὸ τῶν πρώτων μερῶν, ἐκ τῶν τριπλασίων τῶν γινομένων ἔκτε τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν πρώτων μερῶν καὶ ἐκ τῶν δευτέρων, ἐκ τῶν τριπλασίων τῶν γινομένων ἐκ τῶν πρώτων μερῶν καὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν δευτέρων, καὶ ἐκ τῶν κύβων τῶν ἀπὸ τῶν δευτέρων μερῶν· ἢ δὲ τετάρτη Δύναμις, ἐκ τῆς τετάρτης Δυναμέως τῆς ἀπὸ τῶν πρώτων μερῶν, ἐκ τῶν τετραπλασίων τῶν γινομένων ἔκτε τῶν κύβων τῶν ἀπὸ τῶν πρώτων μερῶν καὶ ἐκ τῶν δευτέρων μερῶν, ἐκ τῶν ἑξαπλασίων τῶν γινομένων ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν πρώτων καὶ δευτέρων μερῶν, ἐκ τῶν τετραπλασίων τῶν γινομένων ἐκ τῶν πρώτων μερῶν καὶ τῶν κύβων τῶν ἀπὸ τῶν δευτέρων, καὶ ἐκ τῆς τετάρτης Δυναμέως τῆς ἀπὸ τῶν δευτέρων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 81. Τέτων, ἔμην ἀλλὰ καὶ τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων, ἐξ ὧν πᾶσα Δύναμις σύγκεται εὐσόχως παρατηρηθέντων, ἢ ἐν τῷ K γενικῇ ἐκθεσις συνίσταται, πᾶσαν Δύναμιν ἐκ διμερῆς ἐκθέσεως γινομένην ἐμφανέουσα, εἰάν ἀντὶ τῶν ν ὅτῃς Δυναμέως ἐκθέτης ἐν αὐ-

τῇ τεθῇ. ἐπεὶ δὲ πᾶσα πολυμερὴς ἐκθεσις εἰς διμερὴ μεταβάλλεται, τῷ μὲν τῶν μερῶν αὐτῆς ἴση κειμένη τῷ πρώτῳ τῆς διμερῆς, οἷον τῷ α, τῶν δὲ λοιπῶν ἀπάντων ἴσων τῷ δευτέρῳ, οἷον τῷ β, ἡ ἄρα ἐν τῷ Κ ἐκθεσις πᾶσαν Δύναμιν ἐμφαίνει τῆς ἐξ ὁποιασθὲν ἐκθέσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 82. Ἐάν μὲν ἀποφατικός ἀριθμὸς ἢ τὸ ν ἢ ἐν τῷ Κ ἐκθεσις μονάδα ἐμφαίνει διὰ τῶν τῆς ἐκθέσεως μερῶν διηρημένην· ἐάν δὲ κεκλασμένος, μέρη ἀπειροσφίθμα τῆς ρίζης, τῆς ὑπὸ τῷ ὀνοματῷ τῷ κλάσματος δηλούμενης.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 83. Ἐάν μὲν τὸ $\nu = -2$, ἔσεται τὸ $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha \pm \beta}^2 = \frac{1}{\alpha \pm \beta}$, ὁμοίως ἐάν τὸ $\nu = -3$, ἔσεται $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha \pm \beta}^3 = \frac{1}{\alpha \pm \beta}$, (§. 31.) ἐάν δὲ τὸ $\nu = \frac{1}{2}$, ἔσεται τὸ $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha \pm \beta}^{\frac{1}{2}}$, ὅπερ ἴσον τῷ ἐν τῷ Λ σειρᾷ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 84. Ἡ ἄρα τετραγωνικὴ ρίζα τῷ μὴ ὄντος τετραγώνῳ ἐκ μερῶν σύγεται, ὧν ὁ ἀριθμὸς πέρας ἐκ ἔχει ὁμοίως καὶ ἡ κυβικὴ τῷ μὴ ὄντος κύβῳ, καὶ ἡ τῶν ἄλλων Δυνάμεων, τῶν μὴ τοιούτων ἔσῶν, εἴα ἡ ζητούμενη ρίζα. ὅπερ δὴ καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς δηλόν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 85. Αἱ μὲν τετραγωνικαὶ τῆς μονάδος ρίζαι δύο εἰσιν, αἱ ἐν τῷ Μ· ἐξ ἑκατέρας γὰρ ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, τὸ ἐκ μονάδος προκύπτει τετραγώνον· αἱ

αὶ δὲ κυβικαὶ τρεῖς, αἱ ἐν τῷ Ν' ἐξ ἑκάστης γὰρ αὐ-
τῶν δις πολλαπλασιασθείσης, ὁ ἐκ μονάδος γίνεται
κύβος· αἱ δὲ τῆς τετάρτης Δυνάμεως, αἱ ἐν τῷ Ξ δια-
τοὶ αὐτὴν λόγον· αἱ δὲ τῆς πέμπτης αἱ ἐν τῷ Ο. τί-
μι δὲ μεθεῶν ἔυρηται, κατωτέρω ἐρῶμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 86. Παῖσαν ρίζαν διὰ τῶν τῆς μονάδος ριζῶν
πολλαπλασιάζειν χρή. τὴν μὲν τετραγωνικὴν διὰ τῶν τε-
τραγωνικῶν, τὴν δὲ κυβικὴν διὰ τῶν κυβικῶν, τὴν δὲ
τῆς τετάρτης Δυνάμεως διὰ τῶν τῆς τετάρτης, καὶ
τὴν τῶν ἄλλων Δυνάμεων ὁμοίως. τῆς γὰρ $\sqrt{a^2}$ διὰ
τῶν ἐν τῷ Μ τετραγωνικῶν τῆς μονάδος ριζῶν πολλα-
πλασιασθείσης, περσκήπτεισιν αἱ $+1\sqrt{a^2}$, $-1\sqrt{a^2}$.
ἔτι δὲ ἡ μὲν $+1\sqrt{a^2} = +1. +a$ ἡ δὲ $-1\sqrt{a^2} =$
 $-1. +a = -a$. ἐξ ἑκατέρας δὲ τούτων ἐφ' ἑαυτὴν
πολλαπλασιασθείσης, τὸ a^2 γίνεται. ὁμοίως τῆς $\sqrt[3]{a^3}$
διὰ τῶν ἐν τῷ Ν κυβικῶν τῆς μονάδος ριζῶν πολλα-
πλασιασθείσης, τρεῖς προκύπτεισι ρίζαι, ἡ $1\sqrt[3]{a^3}$, ἡ
 $-1\sqrt[3]{a^3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{a^3}$, καὶ ἡ $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{a^3}$.
 $\sqrt[3]{a^3}$. ἐξ ἑκάστης δὲ αὐτῶν δις πολλαπλασιασθείσης,
γίνεται ἡ $\sqrt[3]{a^3}$, εἴτεν ὁ κύβος a^3 . τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
ἐπὶ τῆς ρίζης τῆς τετάρτης Δυνάμεως, καὶ τῆς πέμ-
πτῆς, καὶ τῶν ἄλλων ἐφεξῆς συμβαίνει διὰ τῶν ταυ-
τωνύμων τῆς μονάδος ριζῶν πολλαπλασιασθείσης. ἐπεὶ
ἐν τῇ μὲν τετραγώνῳ, οἷον τῇ a^2 ἡ ρίζα ἥτοι ἡ $+a$

εἶναι, ἢ ἡ — α, τῷ δὲ κύβῳ, οἷον τῷ α³, μία τῶν εἰρημένων τριῶν, διὰ τῷτο πᾶσαν ῥίζαν, ὡς μονάδι ἢ ἐν γράμματι ἴσιν ἐκλαμβάνομένην, πολλαπλασιάζειν καὶ διὰ τῶν ταυτωνύμων αὐτῇ μοναδικῶν ῥιζῶν. ἔτω μὲν γὰρ ὁ μόνον μίαν, ἀλλ' ἐκείνην τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης εὐρίσκομεν Δυνάμεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 87. Τῆς ἐν τῷ Α (κ) δοθείσης ἐκθέσεως τὴν τετραγωνικὴν εὐρεῖν ῥίζαν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Τετάρχωσαν τὰ τῆς ἐκθέσεως μέρη κατὰ τὸ μέγεθος τῶν Δυνάμεων, ὡς ἐν τῷ περὶ διακρίσεως κεφαλαίῳ εἴρηται, (§. 50.) καὶ τῷ Β ὁράται.

Β'. Εὐρεθῆτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῷ τῆς ἐκθέσεως πρώτῳ μέρει, ἥτις τῷ α². ἥτις δὲ εἶναι ἡ α²—α. (§. 20.) καὶ γράφῃτω ἐν τῷ Γ, ὡς πρώτον μέρος τῆς ζητεμένης ῥίζης. καὶ τῷ α' αὐτῆς τετραγώνῳ α² ἀπὸ τῷ προσεξημένῳ πρώτῳ τῆς ἐκθέσεως μέρει ἀφαιρεθέντος, τὰ λοιπὰ αὐτῆς μέρη γεγραφῶσαν ὡς ἐν τῷ Δ ὁράται.

Γ'. Διὰ τῷ διπλασίῳ τῆς εὐρεθείσης ῥίζης α, εἶπεν διὰ τῷ 2α διελὼν τὸ τῆς ἐν τῷ Δ ἐκθέσεως πρώτον μέρος, ἥτις τὸ 2αβ, τὸ πηλίκον β, ὃ εἶναι τὸ δεύτερον τῆς ζητεμένης ῥίζης μέρος, (§. 80.) γράψον ἐν τῷ Γ μετὰ τὸ εὐρεθὲν πρώτον μέρος α.

Δ'. Τὸ δις ἐξδογώνιον, τὸ ὑπὸ τῷ πρώτῳ τῆς ῥίζης μέρος α, καὶ τῷ δευτέρῳ β, σὺν τῷ ἀπὸ τῷ δευτέρῳ τετραγώνῳ β², εἶπεν τὸ 2αβ + β² ἀφηρήθω ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Δ ἐκθέσεως.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ δὲ τὸ λοιπὸν ἔδεν ἔστι, δῆλον ἄρα ὅτι ἡ προκειμένη ἐκθεσις τετράγωνόν ἐστιν, ἥς ἡ ρίζα ἡ εὐρεθεῖσα $\alpha + \beta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 88. Ἐάν τι μετὰ τὰς εἰρημένους πράξεις καταλειφθῇ. ἡ προκειμένη ἐκθεσις ἐκ ἑσὶ τετράγωνον. διὸ δὴ ἐδὲ ἔχον τὴν ἐπ' ἀκριβὲς τετραγωνικὴν αὐτῆς ρίζαν εὐρεῖν. σύγκειται γὰρ αὕτη ἐξ ἀπειροαριθμῶν μερῶν. (§. 54.) τὸ αὐτὸ δὲ σημειώτεον καὶ περὶ τῶν ριζῶν τῶν ἄλλων Δυνάμεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 89. Τὰ αὐτῶ δὴ τρόπῳ εὐρεθήσεται ἡ τῆ τετραγώνου ρίζα, καίπερ πολυμερὴς ἔσα. ταχθείσης γὰρ τῆς ἐν τῷ Ε. ἐκθέσεως ὡς ἔρηται ἐν (§. 56.) καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης Χ τῆ πρώτης αὐτῆς μέρης εὐρεθείσης, καὶ ἀφαιρεθέντος τῆ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου X^2 ἀπὸ τῆ προειρημένης τῆς ἐκθέσεως πρώτης μέρης, τὰ λοιπὰ, τὰ ἐν τῷ Η, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἐν τῷ Θ. διὸ τῆ πρώτης αὐτῶν μέρης $2X$. $\mu + \nu$ διὰ τῆ διπλασίως τῆς ἤδη εὐρεθείσης ρίζης, ἦταν διὰ τῆ $2X$, διαρεθέντος, τὸ πηλίκον $\mu + \nu$, τὸ δεύτερον τῆς ζητεμένης ρίζης μέρος ἐστὶ, καὶ ὡς ἐν μόνον λογίζεται. (§. 81.) τῆ ἔν δὲς ὁρθογωνίᾳ τῆ ὑπὸ τῆ πρώτης Χ καὶ τῆ δευτέρας μέρης $\mu + \nu$ σὺν τῷ ἀπ' αὐτῆς τῆ δευτέρας μέρης τετραγώνῳ ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Θ ἐκθέσεως ἀφαιρεθέντων, τὸ λοιπὸν ἔδεν ἐστίν. ἐξ ὧ δῆλον, ὅτι ἡ προκειμένη ἐν τῷ Ε. ἐκθεσις τετράγωνόν ἐστιν, ἥς ρίζα ἡ ἐν τῷ Ζ κειμένη. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τῶν ἄλλων Δυνάμεων πολυμερὴς ρίζα εὐρεθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 90. Τῆς ἐν τῷ Ι δοθείσης ἐκθέσεως τὴν κυβικὴν ρίζαν εὐρεῖν.

Α'. Τετάρχθω ἡ ἐκθεσις ὡς ἐν τῷ Κ ὁράται. §. 56.

Β'. Ἐυρεθῆτω ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς πρώτης τῆς ἐκθέσεως μέρους α³, ἥτις ἐστὶν $\alpha^3 = \alpha$. τῆτο δὲ πρῶτον τῆς ζητούμενης κυβικῆς ρίζης μέρος ἐστίν.

Γ'. Ὁ κύβος α³ τῆς ευρεθείσης ρίζης α ἀφηρήθω ἀπὸ τῆς περκειμένης ἐκθέσεως πρῶτε μέρος, τὰ δὲ λοιπὰ αὐτῆς μέρος γεγραφέω ὡς ἐν τῷ Μ.

Δ. Τὸ τῆς ἐν τῷ Μ ἐκθέσεως πρῶτον μέρος, εἶπεν τὸ 3α²β, διὰ τῆς τριπλασίως τῆς τετραγώνως τῆς ἀπὸ τῆς ἡδὴ ευρεθείσης ρίζης, ἥτοι διὰ τῆς 3α² διέλε. καὶ ἔστω δὴ τὸ πηλίκον β τὸ δεύτερον τῆς ζητούμενης ρίζης μέρος.

Ε'. Τὸ τριπλασίον τῆς γινομένης ἐκ τῆς τετραγώνως τῆς ἀπὸ τῆς πρώτης μέρος καὶ τῆς δευτέρας τῆς ευρεθείσης ρίζης, εἶπεν τὸ 3α²β, σὺν τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς τριπλασίως τῆς πρώτης καὶ τῆς τετραγώνως τῆς ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς ρίζης μέρος, ἥτοι τὸ 3αβ², σὺν τῷ ἀπ' αὐτῆς τῆς δευτέρας μέρος κύβῳ, τετέστι τὸ β³, ἀφῆλε ἀπὸ τῆς ἐν τῷ Μ ἐκθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ λοιπὸν ἔδεν ἐστὶ, δῆλον ὅτι ἡ δευτέρα ἐκθεσις κύβος ἐστίν, ὅτινος ρίζα ἡ ἐν τῷ Λ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

§. 91. Ἐὰν δὲ ἡ ἐκθεσις, ἥς ἡ ρίζα ζητεῖται, κεκλασμένη ᾖ, τὴν τε τῆς ἀριθμητῆς καὶ τῆς ὀνομαστῆς ρίζαν ευρετέον, καὶ τὴν ἐτέραν, τὴν τῆς ὀνομαστῆς, ὑπὲρ τὴν ἐτέραν, τὴν τῆς ἀριθμητῆς, γραπτέον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 92. Ἡ μὲν τετραγωνικὴ ρίζα τῆς ἐν τῷ Ν ἐκθέσεως ἐστὶν ἡ ἐν τῷ Ξ· ἡ δὲ κυβικὴ τῆς ἐν τῷ Ο, ἡ ἐν τῷ Π· ἡ δὲ τῆς τετάρτης Δυναμέως, τῆς ἐν τῷ Ρ, ἡ ἐν τῷ Σ.

ΚΕΦ.

Κ Ε Φ. Ι'.

Περὶ Ἐξισώσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 93. Ἐξισώσις ἐστὶν ἡ δύω ἴσων, ἅτε διὰ τῶν αὐτῶν, ἅτε διὰ διαφόρων γνησμάτων παρὰ τὰς αὐτῶν.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 94. Οἶον, καμίνος τῷ α ἴσος ἔσται τῷ β καὶ γ, καὶ παρὰ τὰς αμείνων τῷ α τοῖς β, γ, γίνεσθαι ἡ ἔξισωσις α = β + γ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 95. Παντὸς ἀριθμητικῆ τε καὶ γεωμετρικῆ πρόβληματος ἡ λύσις διὰ τῆς ἔξισώσεως πορίζεται. Τὰς τῆς γὰρ συνθεσίσεως, εἶδος διὰ τῶν καμένων ἔσται ἐν τῷ ζητούμενῳ.

Ο Ρ Ο Σ.

§. 96. Τὸς πρόβλησιν προβλήματος ἐν εἶν ἐπὶ λανθασ, πλὴν κατασκευασθῆ διὰ ἀκρίβειας ὁπλῶν μὴ τὸ ζήτημένον, τίνος δὲ τὰ διδόντα ἔσται τῷ ζητούμενῳ διῆς τῶν ἐκείνων εἰσέλων στήμεναι, τὸν γὰρ παύσας τὰς τῷ προβλήματος ἐπιδόσαντας συνδύκας, ἐξ αὐτῶν δύω τινὰ ἴσα συνθεσθῆσθαι, ἐκ παύτων τῶν διδόντων καὶ τῷ ζητούμενῳ συγκείμενα, τῷ τῶν διῆ παρὰ τὰς συνθεσθῆ τῶν ἔξισωσιν.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 97. Περὶ τοῦ παρὰ τὴν ματὸς τὸ διὰ τὸ πρόβλημα. α μὴ ἐβόλως, ἔφη τὸς πρὸς ἔσται, διελωκός με στήμεν τοῖς πέντεσιν, εἰ λοιποὶ ἐβόλοι ἦσαν κ β διῆ, εἰ λοιποὶ ἦσαν ζ. πόσοι ἔν αὐτῶν εἰ ἐλθὲν τῶν πρὸς τὸν ἔν στήμεν, ὅτι τὸ μὴ ζήτημένον, ὃ καλῶς χ, ἐστὶν ὁ τῶν ἐλθὲν πέντεσιν παρὰ τὸς ἀριθμὸς τὰ διῆ διδόντα ἔσται

οἷτος

οἷτε διανεμηθέντες ὀβολοὶ, καὶ οἱ αὐτῷ καταλειφθέν-
 τες. ἔτα τὰς τῷ προβλήματος ἀναλογιστάμενος συν-
 δήκας, Φημί, εἰ ἐνὶ τῶν πενήτων δέδωκεν ὀβολὸς α,
 πᾶσιν ἄρα ὁμῶς δέδωκεν αχ. ὡς γὰρ $1:α::χ:αχ$.
 ἀλλὰ δεδοκὸς αὐτῷ ἐνὶ ἐκάστῳ α, τὸ λοιπὸν ἦν κ,
 τὸ ἄρα αχ συν τῷ κ, ἦτοι τὸ $αχ+κ$, τὸν ἀριθ-
 μὸν δηλοῖ τῶν ὀβολῶν τῷ ἐλεήσαντος τὴν πένητας. πᾶ-
 λιν ἐπειδὴ, Φησὶν, ἐνὶ ἐκάστῳ τῶν πενήτων δέδωκε β,
 πᾶσιν ἄρα ὁμῶς δέδωκε βχ. ἐπεὶ δὲ δόντος αὐτῷ ἐκά-
 στῳ β, τὸ λοιπὸν ἦν ζ, ὅλος ἄρα ὁ τῶν ὀβολῶν, ὧν
 ἔχεν, ἀριθμὸς ἐμφαίνεται καὶ διὰ τῷ $βχ+ζ$. ἰδὲ
 ἔν δὲ ὅσω ἴσα, τὸ $αχ+κ$, καὶ $βχ+ζ$ (ἐκάτερον γὰρ
 τὸν αὐτὸν ἐμφαίνει τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸν) συγκεκρό-
 τηται ἐκ πάντων τῶν δοθέντων καὶ τῷ ζητούμενῳ συγ-
 κείμενα. ἐξ ὧν γίνεται ἡ ἐν τῷ Γ ἐξίσωσις. Τῷ αὐτῷ
 δὲ προβλήματος καὶ ἄλλως ἐνεστὶ τὴν λύσιν πορίσασθαι
 δι' ἄλλης ἐξισώσεως. ἐπεὶ γὰρ ὁ ζητούμενος τῶν πενή-
 των ἀριθμὸς γνωστὸς καθίσταται, τῷ τῶν ὀβολῶν ἀριθ-
 μῷ γνωσθέντος, κείδω ἔτος ἴσως τῷ γ. ἐπεὶ ἔν ὅλος
 ὁ τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς ἐστὶν γ, λοιπὸς δὲ, ὁ μετὰ τὴν
 χορηγίαν ἦν κ, τὸ ἄρα $γ-κ$ τὴν ὀβολὸν ἐμφαίνει
 τὴν πᾶσι δοθέντας τοῖς πένησιν. ἐπεὶ δὲ οἱ ἐνὶ τῶν
 πενήτων δοθέντες ὀβολοὶ, πρὸς πάντας τὴν δοθέντας
 λόγον ἔχουσιν, ἔν εἰς τῶν πενήτων πρὸς πάντας τὴν
 πένητας, εἴτεν ἐστὶν ὡς $α:γ-κ::1:γ-κ$, τὸ
 ἄρα $γ-κ$ τὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνει πάντων τῶν ἐλεηθέν-
 των πενήτων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $γ-ζ$ τὸν αὐ-
 τὸν τῶν πενήτων ἐμφαίνει ἀριθμὸν. ἐξ ἧς περὶ κῆπτε ἡ
 ἐν τῷ Γ ἐξίσωσις. πῶς δὲ ὁ ζητούμενος τῶν πενήτων
 ἀριθμ.

ἀριθμὸς χ , ἢ ὁ τῶν ἰσολῶν γ , τετέστι πῶς τὰ ἀγνώ-
στα σοιχεῖα χ καὶ γ , γνωστὰ γίνεται, κατωτέρω ἐρῶμεν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 98. Πρώτῃ μὲν βαθμῇ ἡ ἐξίσωσις λέγεται, εἰάν
τὸ ἐν αὐτῇ ἀγνοῶσιν γράμμα τὴν μονάδα ἔχη ἐκδέτην,
ὡς ἡ ἐν τῷ T , καὶ ἡ ἐν τῷ Υ . δευτέρῃ δὲ, εἰάν τὴν
δυάδα ὡς ἡ ἐν τῷ Φ , ἢ τὸ μὲν τὴν δυάδα, τὸ δὲ
τὴν μονάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ X . τῇ τρίτῃ δὲ, εἰάν τὴν
τριάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ Ψ , ἢ τὸ μὲν τὴν τριάδα, τὸ
δὲ τὴν δυάδα, τὸ δὲ τὴν μονάδα, ὡς ἡ ἐν τῷ Ω .
ὁμοίως τῇ τετάρτῃ, εἰάν τὴν τετράδα, καὶ τὰ ἐφεξῆς
ὡσαύτως. συνίσταται δὲ καὶ ἐξίσωσις, ἐν ἣ πολλὰ τὰ
ἀγνώστα, οἷα ἡ ἐν τῷ Λ . (λ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 99. Τὰ ιδιώματα εὑρεῖν τῆς τῇ δευτέρῃ βαθ-
μῇ ἐξισώσεως.

Ἔστω τὸ $\chi = \gamma$, καὶ τὸ $\chi = \beta$, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς
πρώτης ἐξισώσεως ἀφαιρεθέντος ἐκατέρωθεν τῷ γ , ἔσται
 $\chi - \gamma = 0$. ἀπὸ δὲ τῆς δευτέρας τῷ β , ἔσται $\chi - \beta = 0$.
ἐτέρας δὲ διὰ τῆς ἐτέρας πολλαπλασιασθείσης, τὸ γι-
νόμενον ἔσται τὸ ἐν τῷ B . ἔκῃν τὰ ιδιώματα τῆς τῇ
δευτέρῃ βαθμῇ ἐξισώσεως εἰσὶ τὰ ἐξῆς.

Α'. Τοσαυταὶ εἰσιν αἱ ρίζαι, αἱ τῷ ἀγνώστῳ χ ἴσαι,
ὅσαι αἱ μονάδες, αἱ ἐν τῷ μεγίστῳ αὐτῷ ἐκδέτη. ὁ μὲν
γὰρ μέγιστος ἐκδέτης τῇ χ ἐν τῇ προκειμένη ἐξισώσει
ἐστὶν ὁ 2. ἔχει δὲ τὸ χ δύο γνωστὰς ρίζας, τὸ γ , καὶ β .

Β'. Ὁ τῇ δευτέρῃ μέρης συμπράκτωρ τὸ κεφά-
λαιόν ἐστι τῶν ριζῶν, σημεῖον ἔχον ἐναντίον. αἱ μὲν γὰρ
ρίζαι εἰσὶν αἱ $+\gamma$, καὶ $+\beta$, ὁ δὲ συμπράκτωρ τῇ
δευτέρῃ τῆς ἐξισώσεως μέρης τὸ $-\gamma$, καὶ $-\beta$.

Γ'.

Γ'. Τὸ τῆς ἐξισώσεως τρίτον μέρος, εἶπεν τὸ +βγ, τὸ γινόμενόν ἐστιν ἐκ τῶν ριζῶν +γ, +β σὺν τῷ ἰδίῳ σημείῳ.

Δ'. Ἐὰν ἀντὶ τῆς χ ὁπότεραν θῇς τῶν ριζῶν, τὰ τῆς ἐξισώσεως μέρη ἐκλείψῃς, θατέρω ὑπὸ τῆς ἐτέρας ἀναιρεμένον. οἷον, εἰ μὲν τὸ β ἀντὶ τῆς χ τεθῇ, ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Γ μεταβληθήσεται· εἰ δὲ τὸ γ, εἰς τὴν ἐν τῷ Δ. ἑκατέρας δὲ τούτων τὰ μέρη ἀναιρέσιν ἀλλήλα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 100. Τὰ αὐτὰ μὲν ἰδιώματα ἔχει ἢ τῆς δευτέρας βαθμῆς ἐξίσωσις, καὶ ἀποφατικὴ ἢ ἑκατέρα τῶν ριζῶν, ἥτοι καὶ τὸ $\chi = -\gamma$, καὶ τὸ $\chi = -\beta$, καταφατικά δὲ εἰσιν ἅπαντα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέρη, ὡς περ τὰ τῆς ἐν τῷ Ε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 101. Ἐὰν δὲ ἡ μὲν τῶν ριζῶν καταφατικὴ ἢ, ἡ δὲ ἀποφατικὴ, οἷον εἰ μὲν τὸ $\chi = \gamma$, καὶ τὸ $\chi = -\beta$, τὰ αὐτὰ ἔχει ἰδιώματα ἢ ἐξίσωσις, οἷον ἡ ἐν τῷ Ζ. τὸ δὲ δευτέρον μέρος αὐτῆς καταφατικὸν μὲν εἶναι, εἰ μὲν ἡ ἀποφατικὴ $-\beta$ μείζων ἢ τῆς καταφατικῆς γ· ἀποφατικὸν δὲ, εἰ μὲν ἡ καταφατικὴ γ μείζων τῆς ἀποφατικῆς $-\beta$. ἡ μὲν γάρ καταφατικὴ γ μεταφερμένη, ἀποφατικὴ γίνεται, ἡ δὲ ἀποφατικὴ β, καταφατικὴ. τὸ δὲ τρίτον τῆς ἐξισώσεως μέρος ἀποφατικὸν εἶναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 102. Ἐὰν ἔν καταφατικὴ μὲν ἢ ἑκατέρα τῶν ριζῶν, τὰ σημεία τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν εἰσὶ τὰ ἐν τῷ Η· εἰ δὲ ἀποφατικὴ, τὰ ἐν τῷ Θ· εἰ δὲ θατέρω μὲν καταφατικὴ, ἡ ἑτέρα δὲ ἀποφατικὴ, τὰ ἐν τῷ Ι· ἥτοι τὰ ἐν τῷ Κ, εἰ μὲν ἡ ἀποφατικὴ μείζων τῆς

τῆς καταφατικῆς ἢ τὰ ἐν τῷ Λ, εἰάν ἡ καταφατικὴ μείζων τῆς ἀποφατικῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 103. Τὰ ἰδιώματα τῆς τῆ τρίτης βαθμῆ ἐξισώσεως ἔχουσιν οὗτω. Ἐστω $\chi = \alpha$. ἑκατέρωθεν δὲ τῆ α ἀφαιρέθéntος, ἔσται $\chi - \alpha = 0$. τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τῆς ἐν τῷ Β παλαιασιαδίσσης, ἢ ἐν τῷ Μ προκύψει τῆ τρίτης βαθμῆ ἐξίσωσις, ἥς ἰδιώματα τὰ ἐξῆς.

Α'. Τσαυταὶ εἰσιν αἱ ρίζαι, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ τῆ χ μεγίστῳ ἐκδέτη. τρεῖς γὰρ ἐν αὐτῷ αἱ μονάδες, τρεῖς δὲ εἰσι καὶ αἱ ρίζαι, εἴτεν, γ , β , α .

Β'. Ὁ τῆ δευτέρου μέρους συμπράκτωρ τὸ τῶν ριζῶν κεφάλαιόν ἐστι, σημεῖον ἔχον τῶν ριζῶν ἐναντίον.

Γ'. Ὁ τῆ τρίτης μέρους συμπράκτωρ τὸ κεφάλαιόν ἐστι τῶν γινόμενων ἐκ τῶν ριζῶν, ἀνὰ δύο παλαιασιαδισσῶν, τὸ τῶν ριζῶν ἔχον σημεῖον.

Δ'. Τὸ τῆς ἐξισώσεως τέταρτον μέρος τὸ γινόμενόν ἐστιν ἐκ πασῶν τῶν ριζῶν μετα ἐναντίον σημεῖον.

Ε'. Μίας τῶν ριζῶν ἵποισθῶν ἀντὶ τῆ χ ἐν τῇ ἐξισώσει τοθείσης, ἐκλείψουσιν ἅπαντα αὐτῆς τὰ μέρη, θατέρω ὑπὸ τῆ ἐτέρου ἀναιρεμένα. τῆ μὲν γὰρ γ τοθείσῃ ἀντὶ τῆ χ , ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Ν μεταβάλλεται τῆ β δὲ, εἰς τὴν ἐν τῷ Ζ· τῆ α δὲ, εἰς τὴν ἐν τῷ Ο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 104. Τὰ αὐτὰ μὲν ἔχει ἰδιώματα ἢ ἐξίσωσις, εἰάν ἅπασαι αἱ ρίζαι ἀποφατικαὶ ᾧσιν, εἴτεν εἰάν τὸ $\chi = -\gamma$, καὶ τὸ $\chi = -\beta$, καὶ τὸ $\chi = -\alpha$, τὰ δὲ τῶν μερῶν αὐτῆς σημεῖα καταφατικά εἰσιν ἅπαντα, ὡς τὰ τῆς ἐν τῷ Η.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 105. Ἐάν ἡ μὲν τῶν ριζῶν, οἷον ἡ γ καταφα-
τική ᾖ, αἱ δὲ δύο λοιπαί, α καὶ β ἀποφατικαί, τῷ
μὲν δευτέρῳ μέρει τῆς ἐξισώσεως, τῆς ἐν τῷ Γ , τὸ
σημεῖον, ἥτοι καταφατικὸν εἶναι ἡ ἀποφατικόν. κατα-
φατικὸν μὲν εἶναι ἡ καταφατικὴ ρίζα γ ἐλάττω ἢ τῷ
κεφαλαίῳ τῶν ἀποφατικῶν, ἵσταν εἶναι τὸ $\gamma < \alpha \beta$.
ἀποφατικὸν δὲ, εἶναι μείζων, ἥτοι εἶναι τὸ $\gamma > \alpha \beta$.
καὶ γὰρ αἱ ἀποφατικαὶ μεταφερόμεναι, καταφατικαὶ
γίνονται, ἡ δὲ καταφατικὴ, ἀποφατικὴ, ὡς ἐκ τῆς
προκειμένης ἐξισώσεως δῆλον. ὡσαύτως καὶ τὸ τῷ
μέρει σημεῖον καταφατικὸν μὲν εἶναι, εἶναι τὸ $\alpha\beta > \gamma$.

ἀποφατικὸν δὲ, εἶναι τὸ $\alpha\beta < \gamma$. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῷ τρί-
τῳ μέρει συμπράκτωρ εἶναι τὸ $\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma$, δῆλον
ὅτι εἶναι μὲν τὸ $\alpha\beta > -\alpha\gamma - \beta\gamma$, τὸ σημεῖον κατα-
φατικὸν εἶναι, εἶναι δὲ τὸ $\alpha\beta < -\alpha\gamma - \beta\gamma$, ἀποφα-
τικόν. εἶναι δὲ τὸ $\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\beta + \alpha + \beta - \gamma$.
ταῦτόν δὲ εἶναι ἀφελεῖν ἀπὸ τῷ $\alpha\beta$ τὸ γινόμενον ἐκ
τῶν $\alpha + \beta$ καὶ γ , τῷ ἀφελεῖν ἀπὸ τῷ $\alpha\beta$, δια-
φερέντος διὰ τῷ $\alpha + \beta$, τετέστιν ἀπὸ τῷ $\alpha\beta$ μόνον
τὸ γ . ἡ γὰρ διαφορὰ ἡ αὕτη εἶναι, ὡς καὶ ἐκ τῆς
ἀριθμητικῆς δῆλον. τὸ δὲ τῷ τετάρτῳ τῆς ἐξισώσεως
μέρει σημεῖον ἀποφατικὸν εἶναι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 106. Ἐάν δὲ ἡ μὲν τῶν ριζῶν, οἷον ἡ $-\gamma$ ἀπο-
φατικὴ ᾖ, αἱ δὲ δύο λοιπαί, α καὶ β , καταφατικαί,
τὸ

τὸ μὲν τῷ δευτέρῳ μέρει σημεῖον ἦτοι καταφατικόν, ἢ ἀποφατικόν ἔσται· καταφατικόν μὲν, εἰάν τὸ τῶν καταφατικῶν κεφάλαιον ἑλάττωσιν ἢ τῆς ἀποφατικῆς, εἴτεν εἰάν τὸ $\alpha + \beta < \gamma$ (ὄρα τὴν ἐν τῷ Σ ἐξίσωσιν) ἀποφατικὸν δὲ, εἰάν μείζων, ἦτοι εἰάν $\alpha + \beta > \gamma$. ὡσαύτως τὸ τῷ τρίτῳ, καταφατικόν μὲν, εἰάν τὸ $\alpha\beta > \gamma$, ἀποφατικὸν δὲ, εἰάν τὸ $\alpha\beta < \gamma$. τῷ δὲ τετάρτῳ τὸ σημεῖον καταφατικόν. $\overline{\alpha + \beta}$

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 107. Οὐκ ἐν κατὰφατικῶν μὲν ἔσων ἀπασῶν τῶν ριζῶν τῆς τῷ τρίτῳ βαθμῇ ἐξισώσεως, ἵα τῶν μερῶν αὐτῆς σημεῖα εἰσι τὰ ἐν τῷ Τ' ἀποφατικῶν δὲ, τὰ ἐν τῷ Υ'. εἰάν δὲ ἡ μὲν καταφατικὴ, αἱ δὲ δύο ἀποφατικαί, τὰ ἐν τῷ Φ. ἐξ ὧν γίνονται τὰ μὲν ἐν τῷ Χ, εἰάν τὸ $\gamma < -\alpha - \beta$, ἢ τὸ $\alpha\beta > \gamma$ τὰ δὲ ἐν τῷ Ψ, εἰάν τὸ $\gamma > -\alpha - \beta$, ἢ τὸ $\alpha\beta < \gamma$ τὰ δὲ ἐν τῷ Ω, εἰάν τὸ μὲν $\gamma > -\alpha - \beta$, τὸ δὲ $\alpha\beta > \gamma$ τὰ δὲ ἐν τῷ Λ. (μ) εἰάν τὸ $\gamma < -\alpha - \beta$, τὸ δὲ $\alpha\beta < \gamma$ εἰάν δὲ ἡ μὲν τῶν ριζῶν ἀποφατικὴ ἢ, αἱ δὲ δύο καταφατικαί, τὰ τῶν μερῶν τῆς ἐξισώσεως σημεῖα ἔσονται τὰ ἐν τῷ Β. ἐξ ὧν γίνονται τὰ μὲν ἐν τῷ Γ, εἰάν τὸ

Δ $\alpha + \beta$

$\alpha + \beta < -\gamma$, καὶ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \geq \gamma$ τὰ δὲ ἐν τῷ Δ, εἰάν
 τὸ μὲν $\alpha + \beta \geq \gamma$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \gamma$ τὰ δὲ ἐν τῷ Ε,
 εἰάν τὸ μὲν $\alpha + \beta \geq -\gamma$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \geq \gamma$ τὰ δὲ ἐν τῷ
 Ζ, εἰάν τὸ $\alpha + \beta < -\gamma$, καὶ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} < -\gamma$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 108. Ἐάν τεθῇ τὸ $\chi = \delta$, καὶ ἐκατέρωθεν τῷ
 δ ἀφαιρεθέντος, πολλαπλασιασθῇ τὸ $\chi - \delta = 0$ διὰ
 τῆς ἐν τῷ Μ ἐξισώσεως, (ν) τὸ δὲ γινόμενον πάλιν διὰ
 τῷ $\chi - \epsilon = 0$ πολλαπλασιασθῇ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως,
 ἐπιγνώσεται ἕκαστος ἰδίᾳ παρατηρήσει, ὅτι ἐν πάσῃ
 ἐξισώσει, αἱ μὲν ρίζαι τοσαῦται εἰσὶν, ὅσαι αἱ μονά-
 δες ἐν τῷ μεγίστῳ τῷ ἀγνώστῳ ἐκθίτῃ· ἡ δὲ συμπράκτωρ
 τῷ δευτέρῳ αὐτῆς μέρῳ, τὸ κεφάλαιον πασῶν τῶν ρι-
 ζῶν ἡ δὲ τῷ τρίτῳ μέρῳ συμπράκτωρ, ἅπαντα τὰ
 ἐκ τῶν ριζῶν γινόμενα, ἀνὰ δύο πολλαπλασιασθῶν
 ἡ δὲ τῷ τετάρτῳ, τὰ ἐξ ἀνὰ τριῶν τῶν ριζῶν γινό-
 μενα, οἱ δὲ ἐφεξῆς συμπράκτορες κατὰ τὸν αὐτὸν συ-
 νίσανται λόγον· τὰ δὲ τῶν συμπρακτόρων σημεῖα εἰσιν,
 ἅπερ εἴρηται (§. 107.) ἀνωτέρω.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ε'.

§. 109. Τὰ αὐτὰ δὲ ιδιώματα ἔχουσιν αἱ ἐξισώ-
 σεις, εἰάν αἱ ρίζαι πλασματικαὶ ᾧσι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 110. Τὴν ἐν τῷ Η δεθῆσαν ἐξίσωσιν (ξ) εἰς ἑτέραν
 μεταβαλεῖν, ἐν ᾗ αἱ ρίζαι μείζονες.

ΠΡΑΚ-

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Κρίθω το $y = x + \mu$. εκατέσθην ἄρα αψω-

ρεθίς το μ , ἔσται $x = y - \mu$.

Β'. Ὅσα αἱ x δύναται εἶναι τῇ προκειμένῃ ἔτι-

σως, τοσαῦτα γινώσκων καὶ τὸ $y - \mu$. ἔκει-

νεται τοῦ $x^2 = y^2 - 2\mu y + \mu^2$, τοῦ δὲ $\alpha x^2 =$

$\alpha y - \alpha \mu$.

Γ'. Ὅτις ἐν τῇ προκειμένῃ ἔτισθαι ἀντι τῶν x^2 , καὶ

τῶν αx τοὺς εὐρεθίς αὐτοῖς ἴσα ἔκείνῃ ἐν τῷ Η

μεταβληθῆναι εἰς τὴν ἐν τῷ Θ, ἐν ᾗ αἱ βίβαι μετρίσθαι

τῶν y καὶ $\mu = x + \mu$, εἴς ποσότητα, το x ἄρα

ἔλαττον εἰς τὸ y . εἴς δὲ ἄλλοι το προκειμένον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 111. Τὴν ἐν τῷ Η δόξαν ἔτισθαι εἰς ἑτέραν

μεταβληθῆναι, ἐν ᾗ αἱ βίβαι ἑκείσθαι.

Κρίθω το $x = y$. τὰν ἄρα ἀνωτέρω (§. 110.)

εἰρηκέντων μετρίσθων, ἢ ἐν τῷ Η μεταβληθῆναι

εἰς τὴν ἐν τῷ Ι, ἐν ᾗ αἱ βίβαι ἑκείσθαι, ὡς ἐκ τῆς

ὑποθέσεως ὁμῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 112. Τὴν ἐν τῷ Η δόξαν ἔτισθαι εἰς ἑτέραν

μεταβληθῆναι, ἐν ᾗ αἱ βίβαι πολλαπλάσιοι.

Κρίθω το $x = y$. ἐκεῖν τῶν εἰρηκέντων (§. 110.)

πρᾶχθέντων, ἢ προκειμένην ἔτισθαι εἰς τὴν ἐν τῷ Κ

μεταβληθῆναι, ἐν ᾗ ὁμῶς αἱ βίβαι πολλαπλάσιοι.

πρὸς καὶ $x = y$, τοῦ ἄρα $x = \mu y$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ'.

§. 113. Τὴν ἐν τῷ Η δόξαν ἔτισθαι εἰς ἑτέ-

ραν μεταβληθῆναι, ἐν ᾗ αἱ βίβαι ἑκείσθαι καὶ ἐν τῷ

Καί.

Δ 9

δόξαν.

Κείθω τὸ $\chi = y$. εἰάν ᾖν ὅσα ἀνωτέρω εἴρηται (§. 110.) ποιήσῃς, μ ἡ προκειμένη εἰς τὴν ἐν τῷ Λ μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ αἱ ρίζαι ὅμοια μέρη ταῖς ἐν τῇ προκειμένῃ. ἔστι γὰρ ἐξ ὑποθέσεως $\chi = \frac{y}{\mu}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 114. Τὴν ἐν τῷ H δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλὼν, ἐν ᾗ αἱ ρίζαι ἀνάλογοι τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ.

Κείθω τὸ $y = \sqrt{\mu\chi}$. ἔκδεν τὸ $y^2 = \mu\chi$. καὶ τὸ $\chi = \frac{y^2}{\mu}$. διὸ τὸ μὲν $\chi^2 = \frac{y^4}{\mu^2}$, τὸ δὲ $\alpha\chi = \frac{\alpha y^2}{\mu}$. ἡ ἄρα προκειμένη ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ M μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ αἱ ρίζαι μέσαι ἀνάλογοι τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ H . ἐπεὶ γὰρ $y = \sqrt{\mu\chi}$, ὡς ἄρα $\mu : y :: y : \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 115. Τὴν ἐν τῷ H ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβαλὼν, ἐν ᾗ αἱ ρίζαι λόγον ἔχουσιν ἀντιπεπονητότα τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ.

Κείθω τὸ $\chi = \frac{1}{y}$. ἔκδεν τὸ μὲν $\chi^2 = \frac{1}{y^2}$, τὸ δὲ $\alpha\chi = \frac{\alpha}{y}$. ἡ ἄρα ἐν τῷ H ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ N μεταβληθήσεται, ἐν ᾗ αἱ ρίζαι ταῖς ἐν τῇ δοθείσῃ ἀντιπεπονηθασιν. ἐπεὶ γὰρ $\chi = \frac{1}{y}$, ἔστιν ἄρα ὡς $\chi : 1 :: 1 : y$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 116. Συντελεῖσιν αἱ προδιαληφθεῖσαι μεταβολαὶ τῇ τῶν ριζῶν εὐρίσει. ἀμνηχανῶντες γὰρ πολλάκις τὰς ἐν τῇ προκειμένῃ ἡμῖν ἐξισώσεις ρίζας εὐρεῖν, διὰ τινος τῶν εἰρημένων μεταβολῶν αὐτὰς εὐρίσκομεν.

Κ Ε Φ'. ΙΑ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τῇ πρώτῃ βαθμῇ εὐρεῖν τὸ ἴσον τῷ ἀγνώστῳ διὰ γνωστῶν ἐμφαινόμενον, ὅπερ ἐστὶ γνωσ-
ναι τὸ ἀγνώστον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 117. Τὸ ἐν τῇ δεθείσῃ τῇ πρώτῃ βαθμῇ ἐξισώσει, τῇ κατὰ τὸ Ξ, ἀγνώστον χ εὐρεῖν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Ἐάν κλάσματα περιέχῃ ἡ ἐξίσωσις, πολλαπλασιασθῆτω ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτῆς δι' ἐκάστη τῶν ἐκμαστῶν τῶν ἐν αὐτῇ κλασματῶν. ἔκῃν διὰ μὲν τῇ β πολλαπλασιασθέντος ἐκάστη τῶν μερῶν, προκύπτει ἡ ἐν τῷ Ο ἐξίσωσις· διὰ δὲ τῇ δ, ἡ ἐν τῷ Π· διὰ δὲ τῇ α, ἡ ἐν τῷ Ρ. τῶν γὰρ ἴσων διὰ τῶν αὐτῶν πολλαπλασιασθέντων τὰ γινόμενα ἴσα εἰσίν.

Β'. Ὅσαι ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκθέσεις τὸ ἀγνώστον περιέχουσιν ἐπὶ τὸ ἕτερον τῶν μερῶν αὐτῆς μετενεχθῆ-
τωσαν, ὅσαι δὲ ἐκ γνωστῶν σύγκεινται ἐπὶ τὸ ἕτερον, μεταβληθέντων τῶν σημείων τῶν μετενεχθέντων, τῶν καταφατικῶν εἰς ἀποφατικά, καὶ τῶν ἀποφατικῶν εἰς καταφατικά. ὅπερ ταυτὸν ἐστὶ τῷ τὰς μετενεχ-
θείσας ἐκθέσεις ἀπὸ τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν ἀφελῆν. προκύψει τοιγαρὲν (ο) ἡ ἐν τῷ Σ, ἐξίσωσις.

Γ'. Δίελε ἅπαντα τὰ τῆς ἐξιτώσεως μέρη διὰ τῶν τῆ ἀγνώσε πολλοπλασιασῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ Σ ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ἐν τῷ Τ, προκύψει, (π) ἡ ἐν τῷ Υ ἐξιῶσις.

Τὸ ἄρα ἀγνωστον χ εὐρεται διὰ γνωστῶν ἐμφαινόμενον.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τῆς μὲν ἐν τῷ Φ ἐξιῶσεως (ὄρα §. 97.) τὸ ἀγνωστον χ εὐρεθήσεται ἴσον, ὡς ἐν τῷ Χ ὁράται· τῆς δὲ ἐν τῷ Ψ τὸ ἀγνωστον υ, ὡς ἐν τῷ Ω. ὁμοίως δὲ καὶ πάσης ἄλλης τῆ πρώτης βαθμ. μὲ ἐξιῶσεως εὐρεθήσεται τὸ ἀγνωστον.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 118. Ἐσὼ ἐν μὲν τῇ ἐξιῶσει, τῇ ἐν τῷ Τ τὸ μὲν $\alpha=5$, τὸ δὲ $\beta=2$, τὸ δὲ $\gamma=15$, τὸ δὲ $\delta=4$, καὶ τὸ $\epsilon=9$. ἔκβν τὸ $\chi=4$. ὡς ἐν τῷ Α (ρ) ὁράται· ἐν δὲ τῇ κατὰ τὸ Φ, (Πίν. ΧΙ.) καὶ τῇ κατὰ τὸ Ψ ἐξιῶσει ἔσὼ τὸ μὲν $\alpha=2$, τὸ δὲ $\kappa=60$, τὸ δὲ $\beta=6$, τὸ δὲ $\zeta=20$. ἔκβν τὸ μὲν χ , ἔστιν ὁ ζητούμενος τῶν πενήτων ἀριθμὸς ἴσος 10, ὡς ἐν τῷ Β ὁράται· (ρ) τὸ δὲ υ, ἦτοι ὁ τῶν ἐβολῶν ἀριθμὸς τῆ ἐλεήσαντος τῆς πένητας ἴσος 80, ὡς ἰδεῖν ἐστὶν ἐν τῷ Γ.

Κ Ε Φ'. ΙΒ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆ γνωστικῆς τὸ ἀγνωστον ἐν ταῖς τῆ δευτέρου βαθμ. ἐξιῶσεσι.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α'.

§. 119. Τὸ ἐν τῇ δευτέρῃ ἐξιῶσει τῆ δευτέρου βαθμ. μὲ, τῇ κατὰ τὸ Δ, ἀγνωστον διὰ γνωστῶν εὐρεῖν ἐμφαινόμενον.

ΠΡΑΚ.

(α) κατὰ τὸ η, Ἀξ. τῶ ι. θ.β.

(ρ) Πίν. ΧΙΙ.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Α'. Ἀ' πάντα ὅσα ἐν τῷ προλαβόντι εἴρηται προβλημάτι (§. 117.) πεπράχθω. ἔκ' ἐν τῷ μὲν πρώτῳ τελειώντος, προκύψει ἢ ἐν τῷ Ε' ἐξίσωσις· τῷ δὲ δευτέρῳ, ἢ ἐν τῷ Ζ', ἢ αὐτὴ ὅσα τῇ ἐν τῷ Η' τῷ δὲ τρίτῳ, ἢ ἐν τῷ Θ'.

Β'. Ἐκαστὸν ἐξαχθεῖσα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, διὰ τῶν τῆς μονάδος τετραγωνικῶν ριζῶν πολλαπλασιασθήτω. (§. 85.) ἔκ' ἐν τῷ Χ' ἴσον εἶναι, ὡς ἐν τῷ Ι' εἴρηται, ἢ ὡς ἐν τῷ Κ. §. 87.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

§. 120. Τὸ ἐν τῇ δοθείσῃ, τῷ δευτέρῳ βαθμῷ ἐξισώσαι, τῇ κατὰ τὸ Α', ἀγνώστον, τὸ διαφόρου ἔχον ἐκθέτας, εὐρεῖν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Α'. Πεπράχθω ὅσα προεῖρηται. (§. 117.) ἔκ' ἐν τῷ μὲν πρώτῳ τελειώντος, προκύψει ἢ ἐν τῷ Μ' ἐξίσωσις· τῷ δευτέρῳ δὲ, ἢ ἐν τῷ Ν', ἢ αὐτὴ ὅσα τῇ ἐν τῷ Ξ'.

Β'. Δίελε ἕκαστον τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν διὰ τῶν πολλαπλασιασῶν τῷ ἀγνώστῳ, τῷ ἐκθέτην ἔχοντος τὴν δυάδα τέττα ὅν γενομένης, προκύψει ἢ ἐν τῷ Ο' ἐξίσωσις.

Γ'. Τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τῷ ἡμίσεως τῷ συμπράκτορος τῷ ἀγνώστῳ Χ', τῷ τὴν μονάδα ἐκθέτην

$$α^2β^2γ^2$$

ἔχοντος, εἴπεν τὸ $\frac{α^2β^2γ^2}{2αγ-2βγ}$ προσκείθω ἐφ' ἐκάτερας

τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη. τέττα δὲ γενομένης, ἢ ἐν τῷ Π' ἐξίσωσις συσταθήτω.

Δ'. Ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν ἐφ' ἐκάτερον τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως ἐκθέσεων, πολλαπλασιασθήτω ἢ τὸ τῆς ρίζης σημεῖον ἔχουσα ἔκθεσις διὰ τῶν

τῆς μονάδος ῥιζῶν. (φ. 85.) ἐκὼν προκύψει ἡ ἐν τῷ Α ἑξίσωσις. (σ)

Γ'. Μετενεχθήτω ἡ μὴ τὸ ἀγνώστον περιέχουσα ἐκθεσις εἰς ὃ μέρος ἡ ῥίζα κεῖται, μεταβληθέντες τῷ ἑαυτῆς σημείῳ, ὅπερ ἐστίν, ἀφηγήσθω ἐκατέρωθεν ἡ μὴ τὸ ἀγνώστον περιέχουσα ἐκθεσις. ἔσαι δὲ ἔν τὸ ζητούμενον χ ἴσον, ὡς ἐν τῇ κατὰ τὸ Β ἑξίσώσει ὁράται.

Ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Β ἑξίσώσεως δύο προκύπτουσιν, ἥτε ἐν τῷ Γ, καὶ ἡ ἐν τῷ Δ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι δύο αἱ ἐν τῇ προκειμένη ἑξίσώσει ῥίζαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

121. Ἐυχερείας χάριν μετὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν προῶξιν ὃ τῷ ἀγνώστῳ χ συμπράκτωρ, οἷον ὃ ἐν τῷ Ο, (1) ἰάν ἐκ πολλῶν συγκείμεν γραμμάτων, ἐνὶ μόνῳ ἴσος τίθεται, ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ τῆς ἑξίσώσεως ἐκθέσεις, οἷον τίθεται τὸ μὲν $\alpha\beta\gamma = \pm 2\Lambda$ τὸ δὲ

$$\frac{\beta\gamma\delta - \gamma\delta\alpha^3}{\alpha\gamma - \beta\gamma} = \pm B^2. \text{ τέτυθ δὲ κείμενα, δῆλον ὅτι ἡ ἐν}$$

τῷ Ο ἑξίσωσις, εἰς τὴν ἐν τῷ Ε μεταβάλλεται. (υ) προσθέντος δὲ ἐκατέρωθεν τῷ Λ^2 τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῷ ἡμίσεως τῷ συμπράκτορος τῷ χ, ἡ ἐν τῷ Ζ ἑξίσωσις γίνεται. τῆς ῥίζης δὲ ἐκατέρωθεν ἐξαχθείσης, ἡ ἐν τῷ Η, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Θ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἥτε ἐν τῷ Ι, καὶ ἡ ἐν τῷ Κ. ἐν αἷς τεθέντων ἀντὶ τῷ Α καὶ Β τῶν ἴσων αὐτοῖς, προκύψουσιν αἱ πρότερον εὐρεθείσαι, τέτυθιν αἱ ἐν τοῖς Γ καὶ Δ κείμεναι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

φ. 122. Ἰστέον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῷ ἡμίσεως τῷ συμπράκτορος τῷ χ τετράγωνον προσιδέναι δὲ ἐφ' ἐκά-

τε-

τρεῖς τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη, καθάπερ διατέτακται, πρὸς ἀναπλήρωσιν τῆ ἀπὸ τῆς διμερῆς ἐκθέσεως $\chi \pm \Lambda$ τετραγώνου. τὸ μὲν γὰρ $\chi^2 \pm 2\Lambda\chi$, καὶ πᾶσα ἄλλη ὁμοία ἐκθεσις, τὸ τετράγωνόν ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆ πρώτης μέρους χ , καὶ τὸ δις ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆ πρώτης χ καὶ τῆ δευτέρας $\pm \Lambda$. ἔκθεν λείπει αὐτῶ πρὸς τὸ γινέσθαι τὸ ἀπὸ τῆ $\chi \pm \Lambda$ τετραγώνου τὸ ἀπὸ τῆ δευτέρας μέρους τετραγώνου, τῆτέστι τὸ Λ^2 . (§. 80.) τῇ ἔν Λ^2 προσεθέντος ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη, (ἡ ἐκατέρωθεν προσθήκη γίνεται διὰ τὴν τῆς ἐξισώσεως διατήρησιν.) τὸ ἀπὸ τῆ $\chi \pm \Lambda$ τετραγώνου ἀπαρτίζεται. ἐξ ἧς ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, τὸ ἴσον τῷ χ διὰ γνωστῶν ἐμφαίνεται γραμμάτων. καὶ ὁποῦσεν δὲ ἢ ὁ τῆ χ συμπράκτωρ, τὸ ἀπὸ τῆ ἡμίσεως αὐτῆς τετραγώνου προσθέν, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐξισώσεως τὰ μέρη. οἷον ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσιν, ἔπει ἡ μονὰς ἐστὶν ὁ τῆ χ συμπράκτωρ, προσίθεται τὸ ἀπὸ τῆ ἡμίσεως αὐτῆς τετραγώνου, εἴτεν τὸ $\frac{1}{4}$. ἔτω μὲν γὰρ ἡ ἐν τῷ M γίνεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ N , τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ρίζης· ἐξ αὐτῆς δὲ, ἡ ἐν τῷ Ξ , ἡ αὐτὴ ἔσα τῇ ἐν τῷ O .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 123. Εἰδέναι δεῖ, ὅτι καὶ ἄλλως ἐν ταῖς τοιαύταις τῆ δευτέρας βαθμῆς ἐξισώσεσιν εὐρεῖν ἔνεστι τὸ ἴσον τῷ ἀγνώστῳ, μεταβαλλεμένης δηλαδὴ τῆς ἐξισώσεως εἰς ἑτέραν, ἐν ἣ ἔκ ἔστιν ἡ ἐκθεσις ἡ περιέχουσα τὸ ἀγνῶστον τὸ τὴν μονάδα ἐκδίτην ἔχον. κείθω μὲν γὰρ τὸ χ , τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ E ἐξίσωσιν, ἴσον $y + \mu$, ἔκθεν τὸ μὲν $\chi^2 = y^2 + 2\mu y + \mu^2$, τὸ δὲ $\pm 2\Lambda\chi = \pm 2\Lambda y \pm 2\Lambda\mu$. ἡ ἄρα ἐν τῷ E ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Π μεταβληθήσεται. τεθέντος δὲ τῆ $2\mu y \pm 2\Lambda y = 0$, (τέτα γὰρ καμίνε μανθάνομεν τίνι ἴσον δεῖ γινέσθαι

τὸ ἄγνωστον, ὥπως ἂν ἐκλείψῃ ἢ ἐκθεσὶς ἢ περιέχουσα τὸ ἄγνωστον τὸ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχον, ὅπερ ἐστὶ τὸ σκοπούμενον.) ἔσεται τὸ $\mu \pm \Lambda = 0$. διὸ δὴ τὸ $\mu = \mp \Lambda$. ἔκῃν ἔάν τεθῇ τὸ $\chi = y \mp \Lambda$, ἔσεται τὸ μὲν $\chi^2 = y^2 \mp 2\Lambda y + \Lambda^2$, τὸ δὲ $\pm 2\Lambda \chi = \pm 2\Lambda y - 2\Lambda^2$. διὸ ἢ ἐν τῷ Ε ἰξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Ρ μεταβληθῆσθαι, ἥτις ἢ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ἐν τῷ Σ, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Τ γίνεται. ἰσαχθείσης δὲ ἐκατέρωθεν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἢ ἐν τῷ Υ προκύπτει. ἐπεὶ δὲ τὸ $y \mp \Lambda = \chi$, τὸ ἄρα $y = \chi \pm \Lambda$. ἔάν ὅν ἀντί τῷ y τεθῇ τὸ $\chi \pm \Lambda$ ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἰξισώσῃ, ἢ ἐν τῷ Φ γίνεται, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Χ. ἐξ ἧς δὴλον, ὅτι τὸ Χ ἴσον εὐρίσκει τῇ ἀνωτέρῳ εὐρεθείσῃ ἐκθέσει, τῇ κατὰ τὸ Θ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 124. "ἵνα ὅν ἢ προκειμένη ἰξίσωσις εἰς ἑτέραν μεταβληθῇ, ἐν ἣ ἔκ ἔσιν ἢ ἐκθεσὶς ἢ περιέχουσα τὸ ἄγνωστον, τὸ ἐκθέτην ἔχον τὴν μονάδα, τιθέναι δεῖ τὸ τῆς προκειμένης ἰξίσωσεως ἄγνωστον ἴσον ἐτέρῳ ἄγνωστῳ σὺν τῷ ἡμίσει τῷ συμπράκτορος τῷ ἀγνώστῳ τῷ τὴν μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος, μετὰ σημείῳ ἐναντίῳ, οἷον τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε ἰξίσωσι $\chi = y \mp \Lambda$ τιθέναι δεῖ.

Κ Ε Φ ΙΓ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῇ εὐρίσκειν τὸ ἄγνωστον ἐν ταῖς τῇ τρίτῃ βαθμῇ ἰξισώσεσι.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α. Α'.

§. 125. Εὐρεῖν τὸ ἄγνωστον τὸ ἔχον τὴν τριάδα ἐκθέτην ἐν πάσαις ταῖς ἐκθέσει τῆς κατὰ τὸ Λ ἰξίσωσεως. (Φ)

ΠΡΑΚ.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Α'. Ποίησον ὅσα ἐν τῷ $\S$. 117 διατέτακται. ἔκῃν προκύψει ἢ ἐν τῷ Β ἐξίσωσις.

Β. Ἐξήχθω ἡ κυβικὴ ρίζα ἑκατέρω τῶν μερῶν τῆς κατὰ τὸ Β ἐξισώσεως. ἔκῃν τὸ χ ἴσον τῇ ἐν τῷ Γ ἐκθέσει.

Γ. Διὰ τῶν τῆς μονάδος κυβικῶν ριζῶν τὴν ἐν τῷ Γ ἐκθεσιν, τὴν τῷ χ ἴσην, πολλαπλασιάσας. τρεῖς τοιγαρὺν αἰ τῇ χ ρίζῃ, ἢ ἐν τῷ Δ, ἢ ἐν τῷ Ε, καὶ ἢ ἐν τῷ Ζ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

$\S$. 126. Τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ Η δευτέρῃ τῇ τρίτῃ βαθμῇ ἐξισώσει ἀγνώσας, τὸ διαφόρετε ἔχον ἐκθέτας, εὐρεῖν.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Α.

Α'. Μεταβληθήτω ἡ ἐξίσωσις εἰς ἑτέραν, μὴ περιέχουσαν τὴν ἀγνώσας τὸ ἔχον τὴν δυάδα ἐκθέτην. $\S$. 123. τεθέντος τῇ Φ ἴση τοῖς ἐν τῷ Θ, τὸ μὲν Φ^2 ἴσον ἔσται τοῖς ἐν τῷ Ι, τὸ δὲ Φ^3 τοῖς ἐν τῷ Κ. ἐξ ὧν προκύπτει ἢ ἐν τῷ Λ ἐξίσωσις. τεθεισῶν δὲ τῶν ἐκθέσεων τῶν τῷ χ^2 περιεχουσῶν τῷ μηδενὶ ἴσων, ὡς ἐν τῷ Μ ὁράται, εὐρίσκεται τὸ $\pm \mu$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ν. ἔκῃν ἐν τῇ κατὰ τὸ Θ ἐξισώσει ἀντὶ τῇ $\pm \mu$ τεθέντος τῇ $-\alpha$, ἢ ἐν τῷ Ζ προκύψει ἐξίσωσις. ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Ο γίνεται, καὶ διὰ τὴν ἐν τῷ Η, ἢ ἐν τῷ Π γίνεται. καὶ τῶν ἐν τῷ Ρ καὶ Σ ἐξισώσεων εὐχερείαι χάριν συσθεσῶν, ἢ ἐν τῷ Τ προκύψει ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἢ ἐν τῷ Η μεταβίβληται.

Β'. Κείθω τὸ χ ἴσον δυσὶν ἀγνώστοις, ὡς ἐν τῷ Υ ὁράται. ἔκῃν τὸ μὲν χ^3 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Φ, ἢ τοῖς ἐν τῷ Χ, τεθέντος ἀντὶ τῇ $y + \Omega$ τῇ ἴσῃ αὐτοῖς χ .

ἔξ

ιζ ἔ' προκύπτει ἡ ἐν τῷ Ψ ἰξίσωσις, ἰξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Ω διὰ τὴν ἐν τῷ Τ.

Γ'. Κεῖθω τὰς τὸ ἄγνωστον χ περιχύσας ἐκθεταὶ ἴσας εἶναι τῷ μηδενί, ὡς ἐν τῷ Λ ὁράται. (χ) ἔκθ' τὸ μὲν γ ἴσον τῷ ἐν τῷ Β, τὸ δὲ γ³ τῷ ἐν τῷ Γ. τὰ δὲ λοιπὰ τῆς ἐν τῷ Ω ἰξισώσεως (ψ) ἴσα τοῖς ἐν τῷ Δ. εἰάν ἔν ἐν τῇ κατὰ τὸ Δ (ω) ἰξισώσῃ ἀντὶ τῆς γ³ τεθῇ τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἐν τῷ Γ, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ε ἰξίσωσις, ἰξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ζ γίνεται.

Δ'. Προσκέθω ἐκατέρωθεν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμίσεως τῆς συμπράκτορος τῆς Ω³, εἴσιν τὸ ζ'. (ἐπεὶ γὰρ οἱ τῆς ἀγνώστης ἐκθέται, ἥτοι ὁ 6 καὶ 3, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὃν ὁ 2 : 1, τῆς δευτέρας βαθμῆς εἶναι ἡ προκειμένη ἰξίσωσις, καὶ τῷ Ω⁶ - 2ζΩ³ λείπει τὸ ζ', πρὸς τὸ γενέσθαι τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Ω³ - ζ.) ἔκθ' προκύπτει ἡ ἐν τῷ Η ἰξίσωσις.

Ε'. Ἐξήχθω ἐκατέρωθεν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα. προκύπτει ἄρα ἡ ἐν τῷ Θ ἰξίσωσις.

Σ'. Ἐξήχθω ἐκατέρω τῆς ἰξισώσεως μέρος ἡ κυβικὴ ρίζα. ἔσται δὴ ἔν τὸ Ω ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ι.

Ζ'. Ἀντὶ τῆς Ω³ τεθήτω ἐν τῇ κατὰ τὸ Δ ἰξισώσῃ τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἐν τῷ Θ. ἔκθ' ἔσται τὸ γ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Κ.

Η'. Ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ ἰξισώσῃ, (α) ἀντὶ τῆς γ καὶ Ω τεθήτωσαν τὰ ἴσα αὐτοῖς, τὰ αὐτὰς εὐρεθίντα. τὸ ἄρα χ ἴσον ἔσται τοῖς ἐν τῷ Λ. (β)

Θ'. Ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἰξισώσῃ (Πίν. XIV.) τεθήτω ἀντὶ τῆς χ τὸ αὐτὶ εὐρεθὲν αὐτῷ ἴσον. ἔκθ' τὸ Φ ἴσον ἔσται τοῖς ἐν τῷ Μ. (β) εὐρεταὶ ἄρα τὸ ζητούμενον Φ διὰ
γνώσ

γνωτῶν ἐμφαινόμενον. εἰάν δι' ευχερείας χάριν τὰ εὐρεθίντα αὐτῷ ἴσα τεθῇ ἴσα, τοῖς ἐν τῷ Σ, τέτων διατῶν τῆς μονάδος κυβικῶν ριζῶν πολλαπλασιασθέντων, τὸ Φ ἴσον ἔσται τοῖς ἐν τῷ Ι, ἢ τοῖς ἐν τῷ Υ, ἢ τοῖς ἐν τῷ Φ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 127. Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\gamma = 3$, τὸ δὲ $\beta = 10$. ἔκβην τὸ μὲν ν διὰ τὴν ἐν τῷ Ρ (γ) ἑξίσωσιν ἴσον ἔσται ταύτῃ τῷ Ν· (δ) τὰ δὲ 2ζ διὰ τὴν ἐν τῷ Σ, (ε) ἴσα τοῖς ἐν τῷ Ξ. (Πίν. XV.) ἔξ' ἔδῃλον, ὅτι τὸ ζ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ο. τὸ ἄρα Φ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Π. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν

$$\sqrt[3]{\frac{100}{27}} - \frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ ἢ δὲ } \sqrt[3]{\frac{100}{27} + \frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = 4 + \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ τὸ ἄρα Φ ἴσον ἔσται τοῖς ἐν τῷ Ρ, ὅπερ}$$

ἔστιν ἴσον τῷ α. ἵνα δὲ εὐρεθῇ ταύτας τὰς κυβικὰς ρίζας, ἐξάγαγε τὴν κυβικὴν ρίζαν τῇ ἐν τῷ $\frac{100}{27}$ μεγίστη κύβη, ἥτις ἐστὶ τὸ $\frac{4}{3}$, ἢ ἐγγύς δηλονότι. αὕτη δὲ ἔσται τὸ πρῶτον τῆς ζητημένης κυβικῆς ρίζης μέρος, τὸ δὲ

δεύτερον ἐστὶ τὸ $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. ἔξας ἔν τὴν ζητημένην κυβικὴν ρίζαν ἴσην τῷ $\frac{4}{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ καὶ τῷ $\frac{4}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. ἀλλὰ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ πορίσασθαι ἔνεστιν. ἐπεὶ γάρ τὸ μὲν

$$\frac{100}{27} = \frac{64}{27} + \frac{36}{27}, \text{ τὸ δὲ } \frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{51}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ τὸ δὲ } \frac{51}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{48}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ πάντα ἄρα τὰ μέρη}$$

$$\text{τῇ κύβη } \frac{100}{27} + \frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{64}{27} + \frac{48}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \frac{36}{27} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ καὶ ἐπεὶ ἡ κυβικὴ ρίζα τῇ } \frac{64}{27} \text{ ἴση } \frac{4}{3} \text{ ἐστίν, εἰάν διατῇ}$$

τῇ τριπλασίῃ τῇ τετραγώνῃ τέτῃ τῇ πρώτῃ εὐρεθίντος μέ-

μέρες, ἔτεν τῷ $\frac{48}{9}$ διέλῃς τὸ $\frac{48}{9} \sqrt{\frac{1}{3}}$, (φ. 90.) τὸ
 πηλίκον $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ἔσαι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ζητημένης
 κυβικῆς ῥίζης. Ἐυρεθήσεται δὲ ἡ ἔλθεσις $\sqrt[3]{\frac{27}{27}} =$
 $\frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ὅτως· τεθέντων τῶν ἐξημένων ἀριθμῶν ἀντὶ
 τῶν γραμμάτων, ἔσεται $\sqrt[3]{\frac{27}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{27 \cdot 27} - \frac{2197}{27 \cdot 27}} =$
 $\sqrt[3]{\frac{729}{27 \cdot 27}} = \sqrt[3]{\frac{27}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ · ἐπεὶ δὲ τῷ μὲν $\frac{289}{9}$ τετρα-
 γωνικὴ ῥίζα ἐστὶν ὁ $\frac{17}{3}$ · τῷ δὲ $\frac{1}{3}$, ἀβήητος, ἐξαχθείσης
 τῆς τῷ $\frac{219}{9}$ ῥίζης, ἔσεται $\sqrt[3]{\frac{219}{9} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. αἱ δὲ
 κυβικαὶ ῥίζαι τῶν προκειμένων κυβικῶν ῥιζῶν εὐρεθή-
 σονται ὅτως· ὡς κύβη λογιθέντες τῷ $\frac{100}{27} - \frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$,
 ἡ τῷ πρώτῃ μέρος, ἔτεν τῷ $\frac{100}{27}$ προσεχὴς κυβικὴ
 ῥίζα ἐστὶν ὁ $\frac{4}{3}$. εἰάν ἔν δια τῷ τριπλασίᾳ τῷ τετρα-
 γώνῳ αὐτῆς, τετέσι τῷ $\frac{16}{9} \cdot 3 = \frac{16}{3}$, διέλῃς τὸ δεύτε-
 ρον μέρος, ἦτοι τὸ $\frac{17}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, (φ. 90.) τὸ προσεχὲς πη-
 λίκον, ὅπερ ἐστὶ τὸ $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ἔσαι τὸ δεύτερον μέρος τῆς
 ζητημένης ῥίζης. διὸ ὅλη ἡ ζητημένη κυβικὴ ῥίζα ἴση
 ἐστὶ $\frac{4}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 128, Ἐκ τῆς πρώτης πράξεως δῆλον, ὅτι πρὸς
 τὸ μεταβαλεῖν τὴν τῷ τρίτῃ βαθμῇ ἐξίσωσιν εἰς ἐτί-
 ραν, ἐν ᾗ ἔκ ἔστιν ἑκθεσις περιέχουσα τὸ ἄγνωστον τὸ
 ἐκδέτην ἔχον τὴν δυάδα, τιθέναι δὲ τὸ τῆς προκει-
 μένης ἐξισώσεως ἄγνωστον ἴσον, ἦτοι τῇ διαφορᾷ ἐτί-
 ρη

ΚΕΦ. ΙΓ'. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΘ. ΤΟΥ ΕΥΡΙΣΚ. ΤΟ ΑΓΝ. 63

ρη ἀγνώστῃ καὶ τῇ τριτημορίᾳ τῇ συμπράκτερος τῇ ἀγνώστῃ, τῇ ἐν τῇ προκακινῇ ἐξισώσει τὴν δυάδα ἐκθετήν ἔχοντος, ὡς δὴ καὶ εὕρηται $\Phi = \chi - \frac{a}{3}$, ἢ τῷ κεφαλαίῳ, τετέστι τὸ $\Phi = \chi + \frac{a}{3}$. καὶ τετο μὲν τίθεται ἀποφατικῆς ἕως τῆς ἐκθέσεως, τῆς περιέχουσας τὸ ἀπὸ τῇ ἀγνώστῃ τετραγώνον, εἴπεν τὸ τὴν δυάδα ἐκθετήν ἔχον ἀγνώστον ἐκείνο δὲ, καταφατικῆς ἕως, ὡς ἐν τῷ προκακινῷ ὑποδείγματι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β'.

§ 129. Ἐν τῇ δευτέρᾳ πράξει εἴρηται, κείθω τὸ χ ἴσον δυσὶν ἀγνώστοις. ἴσον ἔν, ὅτι εἰ μὲν ἀποφατικὴ ἢ ἡ ἐκθεσις ἢ περιέχουσα τὴν πρώτην τῇ ἀγνώστῃ δύναμιν, ὥσπερ ἡ ἐν τῇ κατὰ τὸ Γ ἐξισώσει, (ζ) τότε τίθεται δὲ τὸ ἀγνώστον ἴσον τῷ κεφαλαίῳ δύω ἀγνώστον, καθὰ δὴ καὶ ἐτίθη· εἰ δὲ ἡ ρηθεῖσα ἐκθεσις καταφατικὴ ἢ, ὥσπερ ἡ ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ (η) ἐξισώσει, (αἱς ἢ μεταβιβληταὶ ἢ ἐν τῷ χ , (πίν. XV.) τεθέντος τῇ Φ ἴση τοῖς ἐν τῷ Ψ .) ἴσον τῇ διαφορᾷ δύω ἀγνώστον. τεθέντος γὰρ τῇ χ ἴση τοῖς ἐν τῷ Β, ἢ ἐν τῷ Γ προκύπτει ἐξίτκωσις. καὶ τῶν ἐν τῷ Δ καὶ Ε συσταθῶν ἐξισώσεων, εὕρεσκειται τὸ μὲν Ω ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ζ, τὸ δὲ Ω³ τοῖς ἐν τῷ Η. ἐξ ὧν ἡ ἐν τῷ Θ γίνεται ἐξίτκωσις διὰ τὴν ἐν τῷ Ε. ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Θ ἢ ἐν τῷ Ι, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Κ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Λ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Μ. ἐξ αὐτῆς δὲ διὰ τὴν ἐν τῷ Ε, ἢ ἐν τῷ Ν προκύπτει. διὸ δὴ τὸ μὲν γ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ξ, τὸ δὲ Ω τοῖς ἐν τῷ Ο. ἔκῃν τὸ μὲν χ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Π· τὸ δὲ Φ, τοῖς ἐν τῷ Ρ, εἴπεν τῷ 3.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ι'.

§. 130. Εἰδέναι δὲ διὰ, ὅτι ἔκ ἐστι γενική αὕτη ἡ μέθοδος. ἔδδ' γὰρ ἔυρηται ἄχρι τῆ νῦν γενικὸς τῆ ἐπιλύειν τὰ τῆ τρίτη βαθμῆ προβλήματα κανὼν, καὶν ἅπασι τῶτο τοῖς μαθηματικοῖς περιπεδάσων. ἐκ τῆς γὰρ τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν τὰ προβλήματα τὴν λύσιν πορίζεται. ὅρα δὲ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς $\sqrt[3]{\frac{748}{27} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{141}}$ ἐμφαινόμενον ἄρρητόν ἐστιν, ὁμοίως καὶ τὸ ὑπὸ τῆς $\sqrt[3]{-\frac{748}{27} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{141}}$. καὶ γὰρ τὴν κυβικὴν αὐτῶν εὐρεῖν ρίζαν διὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων ἀμήχανον. (9) ἡ δὲ $\frac{11}{6} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{141}$ καὶ ἡ $-\frac{11}{6} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{141}$, ἐξ αὐτῶν ἐγνώθη τὸ χ, εὐρηνηται, γνωστῇ ληφθέντος τῆ Φ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἐν τῷ Χ ἐξιτάσεως, τῆς ἐν τῷ XV πίνακι. τῆ γὰρ Φ ἴση ὄντος τῷ 3, τὸ $\chi = 3 + \frac{2}{3}$, ἔτεν τὸ $\chi = \frac{11}{3}$, ὡς ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ψ ἐξιτάσεως δῆλον. ἐπεὶ δὲ τέθειται (1) τὸ $\chi = y - \Omega$, ἄρα καὶ τὸ $y - \Omega = \frac{11}{6}$ καὶ ἐπεὶ τὸ Ω ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ζ, ἢ ἐν τῷ Α (κ) προκύπτει ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Β γίνεται. καὶ ἐξ αὐτῆς ἀπαρτιθέντος τῆ τετραγώνου, ἡ ἐν τῷ Γ· ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Δ. διὸ τὸ μὲν y ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ε· τὸ δὲ Ω, τοῖς ἐν τῷ Ζ. τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ τιθεμένων τῆ $\Phi = 2$, εὐρίσκεται αὖς ἐν τῷ (§. 127.) κυβικῶς ρίζας.

ΚΕΦ.

(9) Ὁν ὁ Οὐόλφιος παραδίδωσι, (προβλ. 169. §. 360. τῆς Ἀλγ.) λίαν ἀτελής. καταντῶ γὰρ πάλιν πρὸς ζήτησιν ἐπιλύσεως προβλήματος τρίτου βαθμῆ.

(1) Πίν. XVI. (κ) Πίν. XVII.

Κ Ε Φ. ΙΑ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς εὐρίσκειν τὸ ἀγνώστον
ἐν ταῖς τῆς τετάρτης βαθμίδος ἐξισώσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 131. Τὸ ἐν τῇ κατὰ τὸ II τῆς τετάρτης βαθμίδος ἐξίσωσις ἀγνώστον, τὸ ἐν πάσαις ταῖς ἐκθέταις τὴν τετράδα ἐκθέτην ἔχον ἱσμεν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Γινώσκω ἄπαντες ὅσοι ἐν §. 117. ἤρηται. ἔκων ἢ ἐν τῷ Θ προκύψει ἐξίσωσις.

Β'. Τίθησθαι ἐκατέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μερῶν ἢ τῆς τετάρτης Δυναμέως ρίζα. τὸ αἶμα ἀγνώστον χ ἴσται ἐν τῷ I.

Γ'. Πολλαπλασιασθῆτω ἡ ρίζα διὰ τῶν μοναδικῶν ἴσων τῆς τετάρτης Δυναμέως. ἔκων τὸ χ ἴσται ἐπαι τοῖς κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, καὶ Ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 132. Τὸ ἐν τῇ κατὰ Ξ δευτέρῃ τῆς τετάρτης βαθμίδος ἐξίσωσις ἀγνώστον, τὸ διαφόρων ἔχον ἐκθέτας ἱσμεν.

ΠΡΑΚΤΕΑ.

Α'. Τῆς Φ ἴσται τεθέντος τοῖς ἐν τῷ Ο, μεταβληθῶ ἢ ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ II, ἢ λείπει ἢ ἐκθέσεις ἢ τὸν κύβον τὸν ἀπὸ τῆς ἀγνώστης περιέχουσα, ἐξ ἧς γίνεται ἢ ἐν τῷ Ρ. ἐνχερείαν δὲ χάριν συστάσεως τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐν τοῖς Σ, Τ, Υ, ἢ ἐν τῷ Ρ εἰς τὴν ἐν τῷ Φ μεταβληθήσεται, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Χ γίνεται.

Β'. Κείθω τὴν ἐν τῷ Χ ἐξίσωσιν τὸ γινόμενον εἶναι τῶν δύο ἐξισώσεων τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω. τὴν ἑτέραν
Ε δὲ

δὲ διὰ τῆς ἐτέρας πολλαπλασιάσας, ἔξεις τὴν ἐν τῷ Α ἔξιωσιν. ἔκῃν οἱ μὲν τῷ Χ² συμπράκτορες ἴσοι ἔσονται τῷ ἐν τῷ C· οἱ δὲ τῷ Χ, τῷ ἐν τῷ D· τὸ δὲ π, τῷ ἐν τῷ e, διὰ τὸ εἶναι δῆθεν τὴν ἐν τῷ Α ἴσην τῇ ἐν τῷ X. προκύψει ἔν ἐκ μὲν τῆς ἐν τῷ C ἐξιώσεως ἢ ἐν τῷ F· ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ D ἢ ἐν τῷ G.

Γ'. Τὴν ἐν τῷ γ ἐξιώσωσι, κατὰ τὰ μέρη αὐτοῖς, τοῖς μέρει τοῖς ἐν τῷ F πρόσθεν, ὅτε αἴφελ. ἔκῃν προκύψουσιν αἱ ἐν τῷ I, καὶ M ἐξιώσεις. τῆς ἐτέρας δὲ διὰ τῆς ἐτέρας πολλαπλασιασάσης, ἢ ἐν τῷ N προκύψει. ἐξ ἧς, διὰ τὴν ἐν τῷ e, ἢ ἐν τῷ Q γίνεταί. ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ ἐν τῷ R.

Γ'πεὶ ἐν ἡ ἐξιώσει αὐτῇ τῷ τρίτῃ βαθμῷ εἶναι, εὐρεθήσεται τὸ ἐν αὐτῇ ἄγνωστον Ω διὰ τῶν εἰρημένων ἐν §. 126. διὰ δὲ τὰς ἐν τῷ L καὶ M ἐξιώσεις γνωστὰ ἔσονται καὶ τὰ π, γ· ἐξ ὧν καὶ τὸ χ γνωθήσεται διὰ τὰς ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω τῷ δευτέρῃ βαθμῷ ἐξιώσεις, ἐξ ὧ δὲ δῆλον ὅτι καὶ τὸ φ, διὰ τὴν ἐν τῷ O ἐξιώσωσιν.

ΣΤΗΘΕΙΑ

§. 133. Ἐκ τῶν ἐν τῇ Γ πράξει εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἡ τῶν τῷ τετάρτῃ βαθμῷ προβλημάτων ἐπίλυσις ἀπὸ τῆς τῷ τρίτῃ ἤρτηται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 134. Τέσσαρες εὐρεθήσονται αἱ τῷ χ εἶσαι, δύο δὲ ἐκατέρας τῶν ἐν τοῖς Ψ καὶ Ω τῷ δευτέρῃ βαθμῷ ἐξιώσεων. τέτων δὲ ἦτοι δύο μὲν πραγματικά, δύο δὲ ἐπίπλαστοί εἰσιν, ἡ ἀπασα πραγματικά, ὡς ἐν τῷ ἐξῆς 16. κεφαλαίῳ δεικνύται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 135. Ὅμοια μοθὶδω εὐρεῖν ἔνεσι τὸ ἄγνωστον ἐν ταῖς τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἐξιώσεσι. τίθεται γὰρ τὴν

τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν γινόμενον εἶναι δύο ἐξισώσεων, ὧν ἡ μὲν τῇ δευτέρῃ βαθμῇ ἐστίν, ἡ δὲ βαθμῇ ἐμφαινομένη ὑπὸ τῇ λοιπῇ ἀριθμῷ τῇ μεγίστῃ ἐκδότῃ τῇ ἀγνώστῃ, τῇ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξίσωσι, τῆς δυάδος ἀφαιρεθείσης. οἷον, εἰάν ὁ μέγιστος τῇ ἀγνώστῃ ἐκδότης ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξίσωσι ᾗ ὁ 7, τίθεται τὴν μὲν τῶν ἐξισώσεων τῇ δευτέρῃ βαθμῇ εἶναι, τὴν δὲ βαθμῇ $7 - 2$, ὅπερ ἐστὶ βαθμῇ πέμπτῃ. συμπράκτορες δὲ τῶν ἀγνώστων οἱ αὐτοὶ τίθενται ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, ἀλλ' ἐν ταύταις μὲν καταφατικοί, ἐν τῇ ἑτέρᾳ δὲ ἀποφατικοί. τῇ γὰρ κειμένῃ ἐκλείπει τὸ ἀγνώστον τὸ ἔχον τὸν μέγιστον ἐκδότην μετὰ τὸν μέγιστον. ἐκάστη δὲ ἐκδόσεως τῇ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τέτων γινόμενη παρατιθεμένης ἐκάτῃ τῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, αἱ ἐξισώσεις γίνονται, ἐξ ὧν ἡ τῇ ζητεμένη ἀγνώστῃ πόριζεται ἕνδεσις, ὡς ἐν §. 132. εἴρηται.

Κ Ε Φ. ΙΕ'.

Περὶ τῆς τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν εὐρέσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 136. Τὰς τετραγωνικάς τῆς μονάδος εὐρεῖν ῥίζας.

Καίτω $x^2 = 1$. τὸ ἄρα $x = 1$. διὸ καὶ τὸ $x^2 - 1 = 0$, καὶ τὸ $x - 1 = 0$. ἔκῃν καὶ τὸ $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$. ἀλλὰ τὸ $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$. (εἰάν γὰρ διέλῃς τὸ $x^2 - 1$ διὰ τῆς $x - 1$, τὸ πηλίκον ἔσται $x + 1$.) ἄρα καὶ τὸ $x + 1 = 0$. τὸ ἄρα $x = -1$. ἔκῃν. δύο οἱ τετραγωνικαὶ τῆς μονάδος ῥίζαι, ἡ $+1$, καὶ ἡ -1 .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 137. Τὰς κυβικάς τῆς μονάδος εὐρεῖν ῥίζας.

Καίτω τὸ $\chi^3 = 1$. τὸ ἄρα $\chi = 1$. διὸ τό, τε $\chi^3 - 1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. ἐκὼν καὶ τὸ $\frac{\chi^3 - 1}{\chi - 1} = 0$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^3 - 1}{\chi - 1} = \chi^2 + \chi + 1$. ἄρα καὶ τὸ $\chi^2 + \chi + 1 = 0$. ἄρα καὶ τὸ $\chi^2 + \chi = -1$. ἐκὼν τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἔσται τὸ $\chi^2 + \chi + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$. τὸ ἄρα $\chi = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3}$. τρεῖς ἄρα αἱ κυβικαὶ τῆς μονάδος ῥίζαι, αἱ ἐν τῷ S ὁρώμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 138. Τὰς μοναδικὰς τῆς τετάρτης δυνάμεως ῥίζας εὐρεῖν.

Καίτω τὸ $\chi^4 = 1$. τὸ ἄρα $\chi^2 = \pm 1$ διὸ τὸ $\chi = \sqrt{\pm 1}$. τέσσαρες ἄρα αἱ μοναδικαὶ τῆς τετάρτης δυνάμεως ῥίζαι, αἱ ἐν τῷ U ὁρώμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 139. Τὰς μοναδικὰς ῥίζας τῆς πέμπτης δυνάμεως εὐρεῖν.

Καίτω τὸ $\chi^5 = 1$. ἄρα τὸ $\chi = 1$. διὸ, τό, τε $\chi^5 - 1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. ἐκὼν καὶ τὸ $\frac{\chi^5 - 1}{\chi - 1} = 0$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^5 - 1}{\chi - 1} = \chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1$. τὸ ἄρα $\chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1 = 0$. καίτω τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ γινόμενον εἶναι τῶν ἐν τῷ Λ ἐκθέσεων. (λ) ἐκὼν προκύψει ἡ ἐν τῷ B ἐξίσωσις. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὰ, τε $\kappa + \phi = 1$, καὶ τὰ $2 + \phi\kappa = 1$. διὸ τὸ μὲν $\kappa = 1 - \phi$, τὸ δὲ $\phi\kappa = -1$. ἀντὶ δὲ τῷ κ ἐν ταύτῃ τῇ ἐξισώσει τεθέντος τῷ $1 - \phi$, ἔσται τὸ $\phi - \phi^2 = -1$,
ἐτὼν

ἔπτεν τὸ $\Phi^2 - \Phi = 1$. καὶ τῷ τετραγώνῳ πληρωθέν-
τος, προκύψει ἡ ἐν τῷ Γ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ὁφίλον εἶναι τὸ
μὲν Φ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Δ, τὸ δὲ χ τοῖς ἐν τῷ Ε. τε-
θέντων ἐν ἐν ταῖς κατὰ τὸ Α ἐκθέσεων ἀντὶ τῶν Φ
καὶ χ τῶν ἀρτι ἐκθεθέντων αὐτοῖς ἴσων, αἱ ἐν τῷ Ζ
καὶ Η ἐξισώσεις τῷ δευτέρῳ βαθμῷ γίνονται. διὸ διὰ
μὲν τῆς κατὰ τὸ Ζ τὸ χ ἴσον ἐκτίθεται τοῖς ἐν τῷ
Θ· διὰ δὲ τῆς κατὰ τὸ Η, τοῖς ἐν τῷ Ι. πέντε ἄρα
αἱ μοναδικαὶ τῆς πέμπτης Δυνάμεως ρίζαι, αἱ ἐν τῷ
Κ ἐρῶμεναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 140. Τὰς μοναδικὰς ρίζας τῆς ἑκτῆς Δυνάμεως
εὐρεῖν.

Καίθω τὸ $\chi^6 = 1$. τὸ ἄρα $\chi^3 = \pm 1$. ἀλλ' αἱ
μὲν τῷ $+1$ κυβικαὶ ρίζαι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ Λ ἐρῶμεναι·
αἱ δὲ τῷ -1 , αἱ ἐν τῷ Μ. ἔξ ἄρα εἰσὶν αἱ μοναδι-
καὶ τῆς ἑκτῆς Δυνάμεως ρίζαι, αἱ ἐν τοῖς Λ, καὶ Μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ'.

§. 141. Τὰς μοναδικὰς ρίζας τῆς ἐβδόμης Δυνά-
μεως εὐρεῖν.

Καίθω τὸ $\chi^7 = 1$, τὸ ἄρα $\chi = 1$. διὸ τότε $\chi^7 -$
 $1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. ἐκὼν καὶ τὸ $\frac{\chi^7 - 1}{\chi - 1} = 0$.

ὅλλὰ τὸ $\frac{\chi^7 - 1}{\chi - 1} = \chi^6 + \chi^5 + \chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1$.

τὸ ἄρα $\chi^6 + \chi^5 + \chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1 = 0$.

καίθω τὴν ἐκθεσιν ταύτην τὸ γινόμενον εἶναι τῶν ἐν τοῖς
Ν καὶ Ξ ἐκθέσεων. ἐκὼν τῆς ἐτέρας διὰ τῆς ἐτέρας πολλα-
πλασιασθείσης, προκύψει ἡ ἐν τῷ Ο ἐξίσωσις· ἐξ ἧς
γίνονται αἱ ἐν τῷ Π καὶ Ρ, καὶ Σ. καὶ ἐκ μὲν τῆς ἐν
τῷ Π, ἡ ἐν τῷ Τ γίνεται, ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Ρ, ἡ
ἐν τῷ Τ. ἐν τῇ ὅν κατὰ τὸ Σ ἀντὶ τῷ α καὶ β²
τεθέντων τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι Τ

καὶ Υ, ἡ ἐν τῷ Φ προκύπτει, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Χ γίνεται, ἡ αὐτὴ ἔσα τῇ ἐν τῷ Ψ. δι' αὐτῆς ἔν τρεῖς εὐρεθήσονται αἱ τῷ Φ ρίζαι. (§. 120.) ἰκάτης δὲ αὐτῶν ἀντὶ τῷ Φ τεθείσης ἐν τῷ κατὰ τὸ Ν τῷ δευτέρῳ βαθμῷ ἐξισώσει, τρεῖς τῷ αὐτῷ βαθμῷ ἐξισώσεις συσταθήσονται, δι' ἰκάτης δὲ αὐτῶν δύο τῷ Χ ρίζαι εὐρεθήσονται. καὶ ἔτις ἐπταῖ ἴσονται αἱ μοναδικαὶ τῆς ἐβδόμης Δυνάμεως ρίζαι, ἔξ μὲν αἱ διὰ τῶν εἰρημένων τριῶν ἐξισώσεων προκύπτουσαι, μία δὲ ἡ ἥδη εὐρεθεῖσα, ἔστιν ἡ 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 142. Τὰς μοναδικὰς ρίζαις τῆς Δυνάμεως ν εὐρεῖν.

Καίτω τὸ $\chi' = 1$. τὸ ἄρα $\chi = 1$. διὸ τότε $\chi' - 1 = 0$, καὶ τὸ $\chi - 1 = 0$. ὅθεν καὶ τὸ $\chi' - 1 = 0$.

καίτω τὸ τῆς ἐκθέσεως ταύτης πηλίκον τὸ γινόμενον εἶναι τῆς ἐν τῷ Ω καὶ τῆς ἐν τῷ Α ἐκθέσεως, εἰάν τὸ ν περιττὸν ἐμφαίνει ἀριθμὸν τῆς ἐν τῷ Ω δὲ καὶ τῆς ἐν τῷ C, εἰάν τὸ ν ἄρτιον σημαίνει. (ἔτω δὲ τὰς ἐν τῷ Α καὶ C ἐκθέσεις κατασκευάζειν χ η, ὥστε τὸ μὲν ἔχατον αὐτῶν μέρος, τὸ πρὸ τῆς μονάδος, τὸ ἀγνώστον περιέχειν, ἐκθέτην ἔχον τὴν μονάδα· ὅπερ γίνεται, ἐπειδὴν $\nu - 0 = 1$, ἢ $\nu - 5 = 1$. τὰς δὲ τῷ ἀγνώστῳ συμπράκτορας, μετὰ τὸ τὸν μίσον τόπον ἐπέχον μέρος, ἐπαναλαμβάνειν, ὅπερ ἐστὶ τὰς αὐτὰς τιθέναι, ὥς τὰ πρὸ τῷ μέσῳ μέρος ἔχουσιν ἀγνώστῳ.) ἑτέρας δὲ, τῆς ἐν τῷ Ω, διὰ τῆς ἐτίσεως, τῆς μὲν ἐν τῷ Α, εἰάν τὸν περιττὸν δηλοῖ ἀριθμὸν, τῆς δὲ ἐν τῷ C, εἰάν ἄρτιον, πολλαπλασιασθείσης, καὶ διὰ τῆς παραθέσεως τῶν συμπρακτόρων τῶν μερῶν τῷ γινόμενε, καὶ τῷ πηλίκε τῷ $\chi' - 1$

$\chi - 1$
συγ-

συγκροτηθείσων τῶν δευτῶν ἐξισώσεων, ἐξισώσεις προ-
κύψαι, ἐν ἣ ὁ μέγιστος τῷ ἀγνώστῳ ϕ ἐκτίτης ἴσεται
 $\frac{v-1}{2}$, εἰάν τὸ v περιττὸν ἐμφαίνειν ἀριθμὸν, $\frac{v}{2}$ δὲ εἰάν
ἄρτιον. ὅθεν αἱ τῷ ϕ εἰζαὶ ἐυρεθήσονται ἥτοι ἴσαι τὸν
ἀριθμὸν τῷ $\frac{v-1}{2}$, ἢ τῷ $\frac{v}{2}$. ἐκάστης δὲ τέτων ἐν τῇ
κατὰ τὸ Ω ἐκτίτει τεθείσης ἀντὶ τῷ ϕ , αἱ τῷ χ
εἰζαὶ ἐυρεθήσονται ἰσάριθμοι τῷ v .

Κ Ε Φ. ΙΣ'.

Περὶ προβλημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 143. Δύω τὰ τῶν προβλημάτων εἶδη· Ἀόριστα,
τὰ ἀπεροαρίθμους ἐπιδεχόμενα ἐπιλύσεις· καὶ Ὀρισ-
μένα, ὧν ὁ τῶν ἐπιλύσεων ἀριθμὸς ὠρισμένος ἐστὶ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 144. Προκείμενον δὲν εὑρεῖν δύο μεγέθη, λόγον
ἔχοντα πρὸς ἀλλήλα, ὅν τὸ $\alpha:\beta$. Ἐστω δὴ ἔν τὸ μὲν
τῶν μεγεθῶν, χ , τὸ δὲ, y . ἢ κεν ἔσαι ὡς $\alpha:\beta::$
 $\chi:y$. ἐκκείμεσάν ἔν δύο εὐθείαι, (μ) αἱ AB , $B\Gamma$,
γωνίαν τυχεύσαν τὴν $AB\Gamma$ περιέχουσαν καὶ ἔστω ἡ μὲν
 $AB=\alpha$, ἡ δὲ $B\Gamma=\beta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AG . εἰάν ἔσθ
ληφθῇ ἡ $AD=\chi$, ἔσται ἡ DE , ἡ ἀπὸ τῷ Δ σημείῳ
ἀγομένη παράλληλος τῇ $B\Gamma$, ἴση τῷ y . ἔστι γὰρ ὡς
 $AB:B\Gamma::AD:DE$. πάλιν ληφθείσης τῆς $AZ=\chi$,
ἔσται ἡ ZH , ἡ τῇ $B\Gamma$ παράλληλος, ἴση τῷ y . ὁμοίως
ἐκβληθεῶν κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν AB , AG , καὶ ληφ-

Ε 4

θεί-

Θείσης τῆς $\Lambda\Theta = \chi$, ἔσται ἡ $\Theta\Gamma$, ἡ τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἴση τῷ y . ἐπεὶ ἔν ἀπειροαρίθμους ἐνθάδε ἔστι λαβῶν ἴσας τῷ χ , ἀπειροαρίθμοι εὐρεθήσονται ἐνθάδε ἴσαι τῷ y . ἐξ ὧ δὴλον, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα ἀόριστον ὄν, ἀπειροαρίθμους ἐπιδέχεται τὰς ἐπιλύσεις. τὸ αὐτὸ δὲ καὶ δι' αρίθμων δείκνυται. ἐπεὶ γὰρ ὡς $\alpha : \beta :: \chi : y$, ἔσται τὸ $\alpha y = \beta \chi$. διὸ τὸ $y = \frac{\beta \chi}{\alpha}$. ἔσω τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\beta = 2$. τὸ ἄρα $y = \frac{2 \cdot \chi}{1}$. εἰάν ἔν τὸ $\chi = 2$, ἔσεται τὸ $y = 4$. εἰάν δὲ τὸ $\chi = 3$, τὸ $y = 6$. εἰάν δὲ τὸ $\chi = 4$, τὸ $y = 8$.

Προκείτω δὲ διχοτομηταὶ δεῖν τὸ τόξον, ὅτινος χορδὴ ἡ AB . (χ . 2.) ἐπεὶ ἔν ἡ AB χορδὴ ἐστὶν ἐκατέρῃς τῶν $\Lambda\Gamma B$, $\Lambda\Delta B$ τόξων, ζητεμένης τῆς $B\Gamma$, τῆς κατὰ τὸ μέσον σημῶν Γ τὸ τόξον $\Lambda\Gamma B$ τεμνέσης, ἐξίσωσις δευτέρῃ βαθμῷ προκύπτει, δι' ἧς ὁ μόνον ἡ $B\Gamma$ εὐρίσκεται, ἀλλὰ καὶ ἡ $B\Delta$, ἡ τὸ $\Lambda\Delta B$ τόξον διχοτομήσασα κατὰ τὸ Δ . ἔσω μὲν γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$, ἡ διὰ τῶ Κέντρῳ K πρὸς ἐρθὰς τῇ χορδῇ AB , ἴση 2α , ἡ δὲ $EB = \beta$, ἡ δὲ $B\Gamma = \chi$. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Delta\Gamma : \Gamma B :: \Gamma B : \Gamma E$, εἴτεν ὡς $2\alpha : \chi :: \chi : \Gamma E$, ἔσεται ἡ $\Gamma E = \frac{\chi^2}{2\alpha}$. ἐπεὶ δὲ

τὸ $\overline{GB}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{BE}^2$, προκύπτει ἄρα ἡ ἐν τῷ Λ ἐξίσωσις. (ν) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ B , καὶ πληρωθέντος τῷ τετραγώνῳ, ἡ ἐν τῷ Γ , καὶ τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης, ἡ ἐν τῷ Δ . καὶ πάλιν τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ῥίζης, ἡ ἐν τῷ E . ἐξ ἧς αἱ ἐν τῷ Z καὶ H . καὶ τὰ μὲν ἴσα τῷ χ , τὰ ἐν τῷ Z , τὴν μείζονα ἐμφαίνουσι, τὴν $B\Delta$ · τὰ δὲ ἐν τῷ H , τὴν ἐλάσσονα, τὴν $B\Gamma$. εἰλήφθω γὰρ (ξ) ἡ $KM = EB = \beta$. ἔκθεν ἡ μὲν $\Gamma M = \alpha + \beta$, ἡ δὲ $M\Delta = \alpha - \beta$. ἀχθείσης ἔν ἀπὸ

τῷ

τῷ Μ τῆς ΜΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, ἐπεὶ ὡς ΓΜ:
 ΜΛ:: ΜΛ: ΜΔ, ἔσεται ὡς $\alpha + \beta$: ΜΛ:: ΜΛ: $\alpha - \beta$.
 διὸ τὸ μὲν $\overline{ΜΛ^2} = \alpha^2 - \beta^2$, ἡ δὲ $ΜΛ = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.
 ἡ δὲ διπλασία τῆς ΜΛ, εἴτεν ἡ ΛΝ $= 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,
 ἐκβληθείσης ἔν ἐκατέρωθεν τῆς ΓΔ, καὶ ληφθείσης
 τῆς μὲν ΓΘ $= ΓΚ = \alpha$, τῆς δὲ ΔΖ $= ΛΝ = 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,
 ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΘΖ τῷ ΘΞΖ ἡμικυκλίῃ, καὶ
 ἀχθείσης ἀπὸ τῷ Γ τῆς ΓΞ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΘΖ,
 ἔσεται ὡς ΘΓ: ΓΞ:: ΓΞ: ΓΖ, ἥτοι ὡς α : ΓΞ::
 ΓΞ: $2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΓΞ^2} = \alpha \cdot 2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,
 ἡ δὲ $ΓΞ = \sqrt{\alpha \cdot 2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$. ἐξ
 ὧ δὴλον ὅτι ἡ ΓΞ $= \chi$. εἰάν δὲ ληφθῇ ἡ ΔΙ $= ΝΛ =$
 $2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, ἔσεται ἡ ΓΙ $= 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. διὸ
 ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΘΙ τῷ ΘΟΙ ἡμικυκλίῃ, ἔσεται
 ὡς ΘΓ: ΓΟ:: ΓΟ: ΓΙ, εἴτεν ὡς α : ΓΟ:: ΓΟ:
 $2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. διὸ τὸ μὲν $\overline{ΓΟ^2} = \alpha \cdot 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,
 ἡ δὲ $ΓΟ = \sqrt{\alpha \cdot 2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$. ἐξ ὧ
 δὴλον, ὅτι καὶ ἡ ΓΟ $= \chi$, ἐμφαίνουσα τὴν ΒΓ. εἰάν ἔν
 τῷ κύκλῳ ἐφαρμοθῇ ἡ ΒΔ $= ΓΞ$, διχοτομήσῃ τὸ ΑΒ
 τόξον κατὰ τὸ Δ· εἰάν δὲ ἀρμοθῇ ἡ ΒΓ $= ΓΟ$, διχο-
 τομήσῃ τὸ ΑΓΒ κατὰ τὸ Γ. ἐκ τούτων δὲ φανερόν, ὅτι
 ὠρισμένον ὃν τὸ πρόβλημα, δύο ἔχεν ἐπιλύσεις μόνον.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Α'.

§. 145. Ὁρισμένον μὲν ἄρα ὄντος τῷ προβλήματος,
 τόσαι συνίστανται ἐξισώσεις, ὅσα τὰ ἀγνώστα ἀορίστα
 δὲ, παρὰ μίαν τόσαι. ἐνὸς δὲ τῶν ἀγνώστων ἐν τοῖς ἀορί-
 σταις καθ' ἀρέσκειαν ληφθέντος, τὰ λοιπὰ εὐρίσκονται.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ Β'.

§. 146. Ἡ ἐξίσωσις ἄρα ἐμφαίνει ἐν τοῖς ὠρι-
 σμένοις προβλήμασιν ὅσα εἰσὶ τὰ διὰ τῆς τῷ προβλή-

ματος ἐπιλύσεως εὐρισκόμενα ἴσα τῷ ἀγνώστῳ. τόσα γὰρ εἰσιν, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ μεγίστῳ τῷ ἀγνώστῳ ἐκθίστη. Ἐπερ εἰσιν, ἐνὶ μὲν, εἰάν τῷ πρώτῳ βαθμῷ ἢ τὸ πρόβλημα· δυοὶ δὲ, εἰάν τῷ δευτέρῳ· τρισὶν, εἰάν τῷ τρίτῳ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 147. Ἡ ἐξίσωσις ἐμφαίνει καὶ τὸ πότερον, δυνατὸν εἶναι ἐπιλύσαι τὸ πρόβλημα, ἢ ἀδύνατον· καὶ τὸ πόσαι μὲν αἱ πραγματικαὶ ἐπιλύσεις αὐτῇ, πόσαι δὲ αἱ ἐπιπλάσεις, πᾶσι πόσα τὰ ἴσα τῷ ἀγνώστῳ τὰ ὑπαρκτικά καὶ πραγματιώδη, πόσα δὲ τὰ ἀνυπαρκτά καὶ ἐπιπλάσια. εἰάν μὲν γὰρ τὸ ἀγνώστον χ διὰ τῆς ἐξισώσεως ἴσον εὐρεθῇ ἐπιπλάσει ἐκθίσαισιν, (ὄρα §. 14.) ἀνέφικτος ἢ τῷ προβλήματος ἐπιλύσις· εἰάν δὲ, τισὶ μὲν ἐπιπλάσει, τισὶ δὲ πραγματικαῖς, τόσαι μόνον αἱ τῷ προβλήματος ἐπιλύσεις, ὅσαι αἱ πραγματικαὶ ἐκθίσεις, αἱ αὐτῷ ἐξισόμεναι τῷ ἀγνώστῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 148. Ἐστω Ἐλλειψις ἢ ΛΨΕΓ. (χ. 3.) καὶ κέντρον μὲν τῷ Χ, τῷ ὑπερθεῖν τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΑΓ, διαμέτρῳ δὲ ἐλάσσονι τῆς ἡμισείας αὐτῆς γυγνέσθω κύκλος ὁ ΡΨΕΣ, τέμνων τὴν Ἐλλειψιν κατὰ τὰ Ψ, Ρ, Σ, Ε σημεῖα. προεκτείναντες ἔνθα εἰν εὐρεῖν τὴν ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῷ κύκλῳ καὶ τῆς Ἐλλείψεως ἀγομένην τῇ ΑΓ καθέτον, εἶταν τὴν ΨΚ, τῷ τετάρτῳ βαθμῷ ἴσται ἢ περὶκύπτουσα ἐξίσωσις. καὶ γὰρ τέσσαρας ἐνὸν εἶναι τὰς ἀπὸ τῆς κοινῆς τῶν καμπύλων διατομῆς ἀγομένας τῇ ΑΓ καθέτους. μίαν δὲ ζητούντες, καὶ τὰς λοιπὰς διὰ τῆς ἐξισώσεως εὐρίσκομεν. εἰάν δὲ ἢ τῷ κύκ-

κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, τοσούτον μικρότερα τῆς προτέρας
 ληφθῆναι, ὥστε τὴν ἑαυτῇ περιφέρειαν, τὴν ἐπὶ τὰ Ρ
 καὶ Σ μέρη τῆς Ἐλλείψεως, ἐντὶς περῶσαν, μηδὲν ὅπως
 αὐτὴν διαγίμναι, αἱ δὲ δύο καθετοὶ ΡΗ, ΣΖ, ἐκλείψουσιν,
 ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ΨΚ, ΓΦ, εἰάν ἡ τῇ κύκλῳ ἡμιδιά-
 μετρος εἴη μᾶλλον μικρότερα ληφθῆναι, καὶ ὅλος ὁ κύκ-
 λος ἐντὶς χωρήσῃ τῆς Ἐλλείψεως. ἐκ τούτων ἔν δὴ-
 λον, ὅτι ἐνδέχεται τὰ ἴσα τῷ ἀγνώστῳ ἢ ἅπαντα
 πραγματιώδη εἶναι, ἢ ἅπαντα ἐπίπλασα, ἢ δύο μὲν
 πραγματιώδη, δύο δὲ ἐπίπλασα. ὅπως δὲ ἕκαστα ἔχει,
 ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ἐμφαίνεται. καὶ τούτο δὲ ἐκ τῶν
 εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἀρτιοαρίθμα, καὶ ὁδὸς ποτε περιτ-
 τοαρίθμα εἰσι τὰ ἴσα τῷ ἀγνώστῳ ἐπίπλασα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 149. Ἐάν πολλά τὰ διὰ τῇ αὐτῇ προβλήμα-
 τοι ζητούμενα, πολλά ἔσονται καὶ τὰ ἀγνώστα. συγ-
 κροτηθεῖσάν δὲ τῶν ἐξισώσεων, ὡς ἐν §. 146. δια-
 τίτακται, ἐκ τῶν πολλῶν μίαν δεῖ συζηταί, ἐν μό-
 νον περιέχουσαν ἀγνώστον. κανόνας δὲ διερρίσκει περὶ τῇ
 πῶς τούτο γίνεται ἐκ εὐμήχανον. ἕκαστον γάρ τῶν προ-
 βλημάτων ἰδίως ἔχον συνθήκας, ἰδιαζέσας ἔχει καὶ
 τὰς ὑπὲρ τῆς ἐπιλύσεως αὐτῇ γινομένης ἐξισώσεις.
 διὸ τούτῳ μόνῳ χρὴ χρῆσθαι τῷ κανόνι, τῷ διὰ τῶν
 συσταθεῶν ἐξισώσεων εὐρεῖν τὰ ἴσα τοῖς ἀγνώστοις,
 διὰ γνωστῶν καὶ ἀγνώστον ἐμφαινόμενα, τῇ τούτων δὲ
 παραθέσει ἐξισώσεως συνιστῶν, ὥς ἂν προκύψῃ ἡ ἐν
 μόνον ἀγνώστον περιέχουσα ἐξίσωσις. ἡ ταιαίτη δὲ εὐρε-
 σις ἀπὸ τῆς τῇ ἐπιλύοντος τὸ πρόβλημα ἀγχινοίας
 ἡρτῆται, καθάπερ καὶ ἡ τῶν ἐξισώσεων σύστασις. καὶ
 γὰρ ἄλλοτε μὲν διὰ πολλαπλασιασμοῦ πορίζεται, ἄλλο-
 τε δὲ διὰ διαιρέσεως, καὶ ἄλλοτε διὰ προδήκῃς ἢ ἀφαι-
 ρίσεως, ἐνίοτε δὲ διὰ τῆς τῶν φεζῶν ἐξαγωγῆς, ἢ διὰ
 τῆς

τῆς τῶν ἐκθέσεων ἐπὶ τὰς Δυνάμεις αὐτῶν ἐπάρσεως. ἐνὲς δὲ τῶν ἀγνώστων εὐρεθέντος διὰ τῆς αὐτοῦ μόνον ἀγνώστον περιέχουσας ἐξισώσεως, τὰ λοιπὰ εὐρίσκονται, τιθεμένων ἐν ταῖς ἄλλαις ἐξισώσεις τῶν γνωστῶν τῶν ἴσων τῷ εὐρεθέντι ἀγνώστῳ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 150. Προκίθω δὲν εὐρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς συνεχῶς ἀναλόγους, ὧν τὸ μὲν ἐαυτῶν κεφάλαιον ἴσον 21, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, 189. ὤρωσαν οἱ ζητῆ-
 μαι ἀριθμοὶ οἱ χ , y , Ω . ἔκῃν ἐκ μὲν τῆς πρώτης συνθήκης ἢ ἐν τῷ Θ (ο) ἀναλογία γίνεται, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ I ἐξισώσις· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, ἢ ἐν τῷ K· ἐκ δὲ τῆς τρίτης, ἢ ἐν τῷ Λ. ἐκαρθῆτω ἐπὶ τὴν δευ-
 τέραν δύναμιν ἢ ἐν τῷ K ἐξίσωσις, καὶ ἐν τῇ κατὰ τὸ M προκυπτέσῃ ἐξισώσει, τῇ ἴσῃ τῇ κατὰ τὸ N, ἀντὶ μὲν τῶν $\chi^2 + y^2 + \Omega^2$ τεθῆτω τὸ ἴσον αὐτοῖς, τὸ ἐν τῷ Α· ἀντὶ δὲ τῷ $\chi + \Omega$, τὸ ἴσον αὐτῷ, τὰ ἐν τῷ Ξ, ὃ γέγονεν ἐκ τῆς ἐν τῷ K ἐξισώσεως, ἀντὶ δὲ τῷ $2\chi\Omega$ τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ κατὰ τὸ Ο, τὸ ἐκ τῆς ἐν τῷ I ἐξισώσεως γεγονός. ἔκῃν προκύψει ἢ μένον ἐν ἀγνώστον περιέχουσα ἐξίσωσις, ἢ κατὰ τὸ II, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ P γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ ἐν τῷ Σ, ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ $y=6$. διὸ τὸ $y^2=36$. εἰάν ᾖ ἐν τῇ κατὰ τὸ I ἐξισώσει ἀντὶ τῷ y^2 ὃ 36 τεθῇ, προκύψει ἢ ἐν τῷ T ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Υ γίνεται· τεθέντων ᾖ ἐν τῇ κατὰ τὸ K ἐξισώσει ἀντὶ τῷ y καὶ Ω τῶν εὐρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἢ ἐν τῷ Φ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Χ· καὶ ἐξ αὐτῆς, τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἢ ἐν τῷ Ψ· ἐξ ἧς γίνεται ἢ ἐν τῷ Ω, τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐκατέρωθεν ἐξαχθείσης. διὸ τὸ $\chi=12$. ἐν τῇ αὐτῇ
 ᾖ

ἐν τῇ κατὰ τὸ Κ ἐξίσωσι, ἀντὶ τῶν χ καὶ ψ τε-
 θείτων τῶν 12 καὶ 6, ἢ ἐν τῷ Α γίνεται ἐξίσωσις·
 ἐξ ἧς δὴλον, ὅτι τὸ $\Omega = 3$, ὡς ἐν τῷ C ὁράται. τὸ
 ἐπιλυθὲν τέτο πρόβλημα ὠρισμένων ἐστὶ. διὸ καὶ τόσαι
 ὑπὲρ τῆς ἐπιλήσεως αὐτῆς γεγόνασιν ἐξισώσεις, ὅσαι
 τὰ ἀνωτα. Προκιάθω δὲ καὶ τὸδε τὸ πρόβλημα· Πέρ-
 σαι καὶ Ἀραβες καὶ Αἰγύπτιοι τὸν ἀριθμὸν 30 ἐν
 βαλκυσίᾳ ἐπιελθόντες ἐλάβησαν καὶ ἕκαστος μὲν τῶν
 πρώτων διπλάσια ἕκαστος τῶν δευτέρων ἔτισεν, ὁμοίως
 καὶ ἕκαστος τῶν δευτέρων ἐνὸς ἕκαστος τῶν τρίτων. ἦσαν
 δὲ ἅπαντα τὰ ὑπ' αὐτῶν καταβληθῆντα νομίσμα-
 τα τοῖς 10 ἰσάριθμα. ζητεῖται ἐν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξ
 ἕκαστος τῶν τῶν γενῶν λαθόντων ἀνθρώπων. Ἔσω δὴ
 ὁ μὲν τῶν Περσῶν χ , ὁ δὲ τῶν Ἀράβων ψ , ὁ δὲ τῶν
 Αἰγυπτίων Ω . ἔκῃν ἐκ μὲν τῆς πρώτης συνθήκης,
 ἢ ἐν τῷ Α (π) ἐξίσωσις γίνεται. ἐπὶ δὲ κατὰ τὴν
 δευτέραν συνθήκην ἕκαστος τῶν Περσῶν 2 κατέβαλε νο-
 μίσματα, πάντες ἄρα 2 χ κατέθεντο. 1 δὲ ἕκαστος
 τῶν Ἀράβων καταβαλόντες, ἅπαντα τὰ ὑπ' αὐτῶν
 κατατεθέντα νομίσματα τῷ ψ ἰσάριθμα. πάντες δὲ
 οἱ Αἰγύπτιοι δόντες τὸ ἥμισυ τῷ ὑπὸ τῶν Ἀράβων
 δοθέντος, $\frac{1}{2}\Omega$ δεδώκασιν. ἐκ τῶν ἐν ἢ ἐν τῷ Β προ-
 κύπτει ἐξίσωσις. καὶ ἐκ μὲν τῆς ἐν τῷ Α ἢ ἐν τῷ Γ
 γίνεται, ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ Β ἢ ἐν τῷ Δ. ἐξ ἑκατέρας
 δὲ τῶν ἢ ἐν τῷ Ε, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Ζ. κείθω ἐν
 τὸ $\Omega = 2$. τὸ μὲν ἄρα ψ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Η, τὸ δὲ
 χ , διὰ τὴν ἐν τῷ Α ἐξίσωσιν, τοῖς ἐν τῷ Θ. κείθω
 τὸ $\Omega = 4$, ἔκῃν τὸ μὲν ψ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ι, τὸ δὲ
 χ τοῖς ἐν τῷ Κ. ἔσω τὸ $\Omega = 6$, ἄρα τὸ μὲν ψ ἴσον
 τοῖς ἐν τῷ Λ, τὸ δὲ χ τοῖς ἐν τῷ Μ. Τὸ δὲ τὸ πρό-
 βλη-

βλημα ἀόριστον ἐστὶ, διὸ ὑπὲρ τῆς ἰσότητος ἐπιλύσας παρὰ
 τὴν μὲν τεσσάρων γεγονόσαν ἐξισώσας, ὅσα τὰ ἀγνώ-
 στω (§. 146.) ὅτοι δὲ αὐτῶν οὐκ ὄντων, τὰ λοιπὰ
 ἴσμεν. ὁμοίαν δὲ μεθόδου πολλῶν ὄντων τῶν ἀγνώ-
 στων ἐκ τῶν συσθετιστῶν ἐξισώσεων μίαν γίνεται ἐν μό-
 νων ἀγνώστων περιστάσει.

ΣΗΜΚΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 181. Ἰδέναι, καὶ ἡ πάντα τὰ ἀόριστα προβλη-
 ματα ἀπαρασφύρην ἐπιδέχεται τὰς ἐπιλύσεις, οὐκ
 γὰρ ἀριθμὸν τῆς ἐπιλύσεως ἢ ἀπαρασφύρην, τοῦτον
 δὲ εἶναι τὸ προτεθέν, ἵνα γὰρ διὰ τὸ κεφάλαιον τῶν
 ἐν αὐτῷ ἀγνώστων τῶν καὶ μὴ ὑπερβάντων, καὶ το κατὰ
 ἀγνώστων ἐκτιθέμενον ἢ τοῦτον εἶναι, ὥστε τὸ περιλα-
 σαι αὐτὴ ἀπὸ τῆς αἰτίας ἀφαιρέσθαι, τὸ λοιπὸν διὰ
 τὴν αὖ διακρίσιν, ὁλόκληρον ἀριθμὸν παρέχειν πηλίκον,
 διὰ τὸτο δὲ ἀπαρασφύρην ἐπιδέχεται τὰς λύσεις,
 συνεχῶς δὲ μόνον ἐπιλύεται.

ΣΗΜΚΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 182. Ἰδέναι δὲ δεῖ, ὅτι ἐκ τῆς ἀριθμῆ τῶν συ-
 σθετιστῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν ἀγνώστων ἐπιγνωσθέντων τὸ
 πέτερον ὠρισμένον εἶναι, ἢ ἀόριστον τὸ προτεθέν πρό-
 βλημα. τῶν γὰρ συνθηκῶν αὐτῇ ἀκριβῶς πολυπαρα-
 μονοειδῶν, εἰν μὲν ἐξ αὐτῶν τόσαι πορίζονται ἐξ-
 ισώσεις ὅσα τὰ ἀγνώστα, ὠρισμένον δὲ τὸ πρόβλημα
 εἶναι δὲ παρὰ μίαν τόσαι, ἀόριστον.

ΚΕΦ. ΙΖ'.

Περὶ Ἀριθμητικῶν Σειρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

§. 183. Ἐκάτος τῶν τῆς συνεχῆς ἀριθμητικῆς Σει-
 ρῶν ὄρων σύγκαιται ἕκτε τῶ πρώτῳ ὄρῳ, καὶ τῶ γυ-
 νο-

ισμένη ἔντα τῇ ἀριθμῇ τῶν ὄρων, μονάδι ἐλαττωθέν-
τος, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἦτοι συνεχὴς ἀριθμητικὴ Σειρὰ ἡ ἐν τῷ Ν, ἥε
πρώτος μὲν ὄρος τὸ α, διαφορὰ δὲ τῶν ὄρων τὸ β,
ὡν τὸν ἀριθμὸν ἐμφανίζω τὸν ν. λέγω, ὅτι ἕκαστος τῶν
ὄρων αὐτῆς ἴσος ἐστὶ τῷ $\alpha + \nu - 1 \cdot \beta$.

Ἐπεὶ γάρ ὁ μὲν πρῶτος ὄρος τὴν διαφορὰν εἰς πε-
ρίχρη, ἕκαστος δὲ τῶν λοιπῶν ἐκ τῆς πρὸ αὐτῆς αὐγ-
κείται ἢ τῆς διαφορᾶς, ἕκαστος ἄρα τῶν ὄρων ἐκ τῆς
πρώτης αὐγκείται καὶ τῆς διαφορᾶς τοσάκις ληφθί-
σῃ, ὅσκις ἡ μονὰς ὑπὸ τῇ ἀριθμῇ τῶν ὄρων, μον-
άδι ἐλαττωθέντος, περιέχεται. ἕκαστος ἄρα τῶν ὄρων
αὐγκείται ἔντα τῇ πρώτῃ ὄρῃ καὶ τῇ γινομένη ἐκ τῆς
ἀριθμῇ τῶν ὄρων, μονάδι ἐλαττωθέντος, ἢ τῆς δια-
φορᾶς αὐτῶν. ἕκαστος ἄρα τῶν ὄρων ἴσος τῷ $\alpha + \nu - 1 \cdot \beta$.

Π Ε Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 154. Ἐάν ἄρα τὸν ἔχαστον ὄρον ἐμφαίῃ τὸ Ε,
προκύψει ἡ κατὰ τὸ Ζ ἐξήγησις.

Ω Ε Σ Ε Ρ Η Μ Α Β'.

§. 155. Τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ὄρων τῆς συ-
νυχῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἔντα
τῷ κεφαλαίῳ τῇ πρώτῃ καὶ τῇ ἔχαστῃ ὄρῃ καὶ τῇ
ἡμίσει τῇ ἀριθμῇ τῶν ὄρων.

Ἦτοι ἀριθμητικὴ Σειρὰ ἡ αὐτὴ, ἡ ἐν τῷ Ν. καὶ
ἐμφανίζω τὸν μὲν ἔχαστον ὄρον τὸ Ε, τὸ δὲ κεφάλαιον
αὐτῆς, τὸ Κ. λέγω ὅτι τὸ $K = \alpha + \frac{\nu}{2} \cdot \beta$.

Ἰκανὴ γάρ ἐν τῇ συνεχῇ ἀριθμητικῇ Σειρᾷ τὸ
τῶν ἐπιοιωτῶν ἀκρων κεφάλαιον διπλάσιόν ἐστι τῇ ἑαυ-
τῶν μέσῃ, ληφθίτος ἄρα τῇ πρώτῃ καὶ τῇ ἔχά-
στῃ τοσάκις, ὅσκις ἡ μονὰς περιέχεται ὑπὸ τῇ ἡμί-
σει

σεας τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων ὑπερ ἐπὶ πεδωκλασιαδίν, τες τῷ κεφαλαίῳ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ἑκάστῳ ὅς ἐστιν αὐτῷ τῷ ἡμίσειον τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων, τὸ γινόμενον ἔσται τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ὄρων, τὸ ἦρα $K = \alpha + \beta$. $\frac{p}{2}$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 156. Ἐάν ἄρα ἀντὶ τοῦ K ἐν τῷ κατὰ τὸ O ἐξισώσῃ τεθῇ τὸ ἴσον αὐτοῦ τὸ ἐν τῷ Σ , ἔσται τῷ τῆς Σειρᾶς κεφάλαιον ἴσον τοῖς ἐν τῷ Π .

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 157. Ἐκ τῶν ἀνημένων κατιδὼν φάδιν, ὅτι ἐκ τῶν τισσάρων, αἶθεν τῷ πρώτῳ ὄρῳ, τῷ ἑκάστῳ, τῷ κεφαλαίῳ, καὶ τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων τὴν συνεχῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, τριῶν δευτέρων, τὸ τέταρτον εὐρεθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 158. Ἐστὼ τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\beta = 2$, ἔτι ἐκ τῆς ἐν τῷ N Σειρᾶς ἢ ἐν τῷ P ἐμφαίνου. καὶ τεθῇ τος τῷ τῶν ὄρων ἀριθμῷ, τετέστι τῷ $\nu = 6$, ἔσται ὁ μὲν ἑκάτος ὄρος ἴσος τοῖς ἐν τῷ Σ , τὸ δὲ κεφάλαιον τοῖς ἐν τῷ T .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 159. Τῶν ὁποιωνῶν Δυνάμεων, τῶν ἀπὸ τῆς Φυσικῆς γινομένων Σειρᾶς εὐρεῖν τὸ κεφάλαιον.

Ἐβωσαν αἱ ἐν τῷ Υ Σειραὶ ἀπὸ τῆς μηδενικῆς χαρακτηριστέρας ἀρχόμεναι ὧν ἡ μὲν πρώτη Σειρά μονάδων ἔστω ἡ δὲ δευτέρα, ἡ Φυσικὴ, αἶθεν ἡ τῶν πρώτων Δυνάμεων ἡ δὲ τρίτη, ἡ τῶν δευτέρων, τῶν ἀπὸ τῆς Φυσικῆς γινομένων ἡ δὲ τετάρτη, ἡ τῶν τρίτων, τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ὁμοίως καὶ ἄλλαι Σειραὶ τῶν ἐφεξῆς Δυνάμεων. ἐμφαινέτω δὲ τῆς μὲν πρώτης Σειρᾶς ἑκάστον ὄρον

ὄρον τὸ ν^ο. (πᾶσα γὰρ ἐκθεσις τὸ 0 ἔχουσα ἐκθέτην μονάδα ἐμφαίνει. §. 31.) τῆς δὲ δευτέρας, τὸ ν¹. τῆς δὲ τρίτης, τὸ ν². τῆς δὲ τετάρτης, τὸ ν³. δεῖ δὴ ἔν τῷ κεφάλαιον εὐρεῖν ἐκάστης τῶν ἐν τῷ Υ Σειρᾶς.

Συνεξάτωσαν Σειράν, αἱ κατὰ τὸ Φ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρχόμεναι ταῖς κατὰ τὸ Υ ἰσαριθμοί, καὶ ἰσαριθμοὺς περιέχουσαι ὅρας, τὰς αὐταῖς ἐμφαίνοντας Δυναμείας.

Καὶ ἐπεὶ ἔκαστον τῶν τῆς κατὰ τὸ Υ πρώτης Σειρᾶς ὄρων ἐμφαίνει τὸ ν^ο, τὸ ἄρα κεφάλαιον τῶν ν^ο, εἶπεν τὸ Κν^ο, τὸ τῷ ὄρων αὐτῆς κεφάλαιον δηλώσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν Κν¹, τὸ κεφάλαιον δηλώσει τῶν τῆς δευτέρας Σειρᾶς ὄρων· τὸ δὲ Κν², τῶν τῆς τρίτης· τὸ δὲ Κν³, τῶν τῆς τετάρτης· τὸ δὲ $\overline{Κ ν + 1^1}$, τῶν τῆς πρώτης, τῶν ἐν τῷ Φ· τὸ δὲ $\overline{Κ ν + 1^1}$, τῶν τῆς δευτέρας· τὸ δὲ $\overline{Κ ν + 1^2}$, τῶν τῆς τρίτης· τὸ δὲ $\overline{Κ ν + 1^3}$, τῶν τῆς τετάρτης. ἔκ ἔχουσι γὰρ αἱ Σειράν αὐταὶ ἀντὶ πρώτου ὅρα τὸν μηδενικὸν χαρακτηῖρα, ἀλλὰ τὴν μονάδα.

Ἀφ' ἐπεὶ τὸ κεφάλαιον ἐκάστης τῶν ἐν τῷ Υ Σειρᾶς ἀπὸ τῆς κεφαλαιῆς τῆς ὁμοίας αὐτῇ, τῆς ἐν τῷ Φ. προκύψουσιν ἔν αἱ ἐν τοῖς Χ, Ψ, Ω, καὶ Α ἐξισώσεις. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{ν + 1^2}$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ C, τῆς κεφαλαιῆς ληφθέντος ἐκάστης ἐκθέσεως τῶν ἐν ταύτῃ τῇ ἐξίσωσι, ἢ ἐν τῷ D ἐξισώσεις γίνεταί (ἀντὶ τῆς τῶν μονάδων κεφαλαιῆς ἐτέθη ἐν αὐτῇ τὸ $\overline{ν + 1}$. τῆτο γὰρ ἐστὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν, ὡς ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας τῶν ἐν τῷ Φ Σειρῶν δῆλον. ἕκαστος γὰρ ὄρος τῆς δευτέρας ἴσος ὢν τῷ κεφαλαίῳ τῆς πρώτης,

Z

ἐμφαί-

ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆς $\nu + \iota$.) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ C. καὶ τοῦ
 ὁμοίου ἀντὶ τῆς $\kappa \nu + \iota$ — $\kappa \nu$ τῆς ἴσας αὐτῶν, τῆς κα-
 τὰ τὸ Δ., ἡ ἐν τῷ P ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν
 τῷ (i, κα) ἐξ αὐτῆς ἡ ἐν τῷ L, ἐξ ἧς γνωστὸν γί-
 νεται τὸ $\kappa \nu$, εἴτην τὸ κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Y
 δευτέρας Σειρᾶς.

Πάλιν ἐπεὶ τὸ $\nu + \iota$ ³ ἴσον τοῖς ἐν τῷ M, ληφθέν-
 τοι τῆς κεφαλαιῶν ἐκείτης ἐκδόσεως, ἡ ἐν τῷ N ἐξί-
 σωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Q ἐξ αὐτῆς δὲ, τοῦ
 ὁμοίου ἀντὶ μὲν τῆς $\kappa \nu + \iota$ ³ — $\kappa \nu$ τῆς ἴσας αὐτῶν τῆς
 ἐν τῷ A, ἀντὶ δὲ τῆς $\kappa \nu$ τῆς ἴσας αὐτῶν, τῆς ἐν τῷ
 I., ἡ ἐν τῷ R, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ S, ἐξ αὐτῆς δὲ γνωστὸν
 τὸ $\kappa \nu$, τιθεῖται τὸ κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Y τρί-
 τῃ Σειρᾶς.

Τῶν αὐτῶν δὴ τρόπῳ ἐκτελέσσεται καὶ τὸ $\kappa \nu$, καὶ
 τὸ $\kappa \nu$, καὶ τῶν ἐφεξῆς Δυναμῶν τῶν κεφαλαιῶν.

Σ Χ Θ Λ Ι Ο Ν.

§. 160. Ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὄρων τῆς κατὰ τὸ Y
 δευτέρας Σειρᾶς, εἴτην τὸ $\nu + \iota + \iota$, ὁμοίως καὶ ὁ τῆς
 τρίτης. Ἐκτὴν τὸ μὲν τῆς δευτέρας κεφαλαιῶν, εἴτην
 τὸ $\kappa \nu$, ἴσον τοῖς ἐν τῷ N· τὸ δὲ τῆς τρίτης, ἦτοι τὸ
 $\kappa \nu$, ἴσον τοῖς ἐν τῷ W.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Β'.

§. 161. Λεξιθεσίης ἀριθμητικῆς τινὸς Σειρᾶς εὐρεῖν
 τὰ κεφάλαια τῶν ἐξ αὐτῆς συνισταμένων Σειρῶν, ὅρας
 ἔχουσιν, ὧν ἕκαστος ὑπὸ τῷ κεφαλαιῷ ἐμφαίνεται τῇ
 πρὸ αὐτῆς Σειρᾶς.

Ἐπεὶ ἡ δοθένσα ἀριθμητικὴ Σειρὰ (ρ) ἡ ἐν τῷ A.
 ἔκτῃ ὁ μὲν ἔχων αὐτὴν ὅρον ἵσεται ὁ $\alpha - \iota - \nu - \iota$. β.
 (§. 154.)

(§. 144.) τὸ δὲ κεφάλαιον, τὸ ἐν αὐτῷ τῷ Α ὀρώμενον. (§. 133.) τῆτο ἔν κατὰ τὴν τῇ προβλήματι συνθήκην ἐμφαίνει ἕκαστον τῶν ὄρων τῆς ἐξ αὐτῆς γνησιότητος Σειρᾶς, τινὲς τῆς ἐν τῷ Β, τὸ δὲ κεφάλαιον τὸν ἐν αὐτῷ ἐκθέσεων, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Γ ὀρώμενον, τὸ κεφάλαιον ἕκαστων πάντων τῶν ἐν αὐτῇ ὄρων, ἐάν ἔν ἀντὶ τῇ Κν, καὶ τῇ Κν² τεθῶσι τὰ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι (§. 159.) ἐκπεδύντα αὐτῷ. ἴσα, ἔσται τὸ ἐν τῷ Β ὀρώμενον, τὸ κεφάλαιον αὐτῆς τῆς ἐν τῷ Β Σειρᾶς. ὅπερ δὴ ἐμφαίνει καὶ ἕκαστον τῶν ὄρων τῆς ἐν τῷ Γ, ληρδύντος δὲ τῇ κεφαλῇ ἐκθέτης τῶν ἐν αὐτῷ ἐκθέσεων, ἐκπεδύσεται καθόλου καὶ πρότερον τὸ τῆς ἐν τῷ Γ Σειρᾶς κεφάλαιον, ἐμφαίνει καὶ ἕκαστον τῶν τῆς μετ' αὐτὴν Σειρᾶς ὄρων.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 162. Ἐστω τὸ $\alpha = 1$, ὡσαύτως καὶ τὸ $\beta = 1$. ἑκὼν ἢ μὲν ἐν τῷ Α Σειρᾶ εἰς τὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μεταβάλλεται, τὴν κατὰ τὸ Δ ἢ δὲ ἐν τῷ Β εἰς τὴν ἐν τῷ Ε, τὴν καλυμμένην τριγωνικῶν ἀριθμῶν Σειρᾶν ἢ δὲ κατὰ τὸ Γ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Ζ, τὴν τῶν πυραμικῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης τάξεως· ἐξ ἧς, κατὰ τὰ εἰρημίνα, ἢ ἐν τῷ Η συνίσταται, ἢ τῶν πυραμικῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας τάξεως. Ἐκὼν δὲ τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\beta = 2$, ἢ μὲν πρώτη Σειρᾶ ἐστὶν ὄρων ἀριθμητικῶς ἀναλόγων, οἷα ἢ ἐν τῷ Θ· ἢ δὲ δευτέρα, ἢ ἐν τῷ Ι, τετραγώνων· ἢ δὲ τρίτη, ἢ ἐν τῷ Κ, πενταγώνων. πάντες δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἑτοὶ Ἐχρηματισμένοι καλύπτονται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 163. Δοθέντος τῷ ἀριθμῷ τῶν κατὰ δυάδα, ἢ τετράδα, ἢ κατ' ἄλλον ὁποῖον ἂν ἀριθμὸν, συζευχθῶσιν ἐκθέσεων, τὸν ἀριθμὸν ἑυρῶν τῶν συζεύξεων.

Ἔσωσαν αἱ κατὰ δυάδα συζευχθῆσκειναι ἐκθέσεις δύο μὲν αἱ κατὰ τὸ Λ, τρεῖς δὲ αἱ κατὰ τὸ Μ, τέσσαρες δὲ αἱ κατὰ τὸ Ν, πέντε δὲ αἱ κατὰ τὸ Ξ, καὶ ν αἱ κατὰ τὸ Ο.

Π Ρ Α Κ Τ Ε Ο Ν.

Τὸν ὁλόκληρον τῶν ἐκθέσεων ἀριθμὸν εἶφ' ἑαυτὸν μονάδι ἐλαττωθέντα πολλαπλασιασας, διὰ τῷ 2 διέλε τὸ γινόμενον. λέγω δὴ ἔν, ὅτι τὸ περὶ τὸν πληκτικὸν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων δηλοῖ. οἷον ν ἔντος τῷ τῶν ἐκθέσεων ἀριθμῷ, ὁ ζητούμενος τῶν συζεύξεων ἀριθμὸς ἔσται τὸ $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ μὲν γὰρ τῶν κατὰ τὸ Λ συζεύξεων δῆλον, ὅτι μία γίνεται σύζευξις· ἐκ δὲ τῶν κατὰ τὸ Μ, 3· ἐκ δὲ τῶν κατὰ τὸ Ν, 6· ἐκ δὲ τῶν κατὰ τὸ Ξ, 10· εἰσὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἔτσι, εἶπεν οἱ 1, 3, 6, 10, τῆς τῶν τριγωνικῶν ἀριθμῶν Σειρᾶς ἔχει. καὶ ὅτε μὲν 2 αἱ συζευχθῆσκειναι ἐκθέσεις, ὁ πρῶτος τῆς εἰρημένης Σειρᾶς ὅρος ἐμφαίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑαυτῶν συζεύξεων ὅτε δὲ τρεῖς, ὁ δεύτερος· ὅτε δὲ τέσσαρες, ὁ τρίτος· καὶ ἐπὶ τῶν ἑφεξῆς ἐμοίως. διὸ εἰάν ὁ ἀριθμὸς τῶν συζευχθῆσομένων ἐκθέσεων ἴσος ᾖ ν, τὸ $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$ ἐμφαίνει τὸν ὅρον τῆς διαληφθείσης Σειρᾶς, τὸν δηλῶντα τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων. ἐπεὶ δὲ ἕκαστος τῶν ὁρῶν αὐτῆς δηλῶται ὑπὸ τῷ $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$,

1. 2.

ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν συζεύξεων ἀριθμὸς ἐμφαίνεται ὑπὸ τῷ $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$.

1. 2

Ἔσται

Ἐξωσαν αἱ ἀνά τρεῖς συζευχθῆσόμεναι ἐκθέσεις, τρεῖς μὲν αἱ κατὰ τὸ Π, τέσσαρες δὲ αἱ κατὰ τὸ Ρ. πέντε δὲ αἱ κατὰ τὸ Σ, καὶ ν αἱ κατὰ τὸ Τ. λέγω ὅτι τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων ἐμφαίνει τὸ $\nu - 1$. $\nu - 2$

1. 2. 3.

Τῶν μὲν γὰρ κατὰ τὸ Π δῆλον ὅτι μία γίνεται ἡ σύζευξις· τῶν δὲ κατὰ τὸ Ρ, 4· τῶν δὲ κατὰ τὸ Σ, 10. αἱ δὲ αἱ ἀριθμοὶ, 1, 4, 10 τῆς τῶν πυραμικῶν τῆς πρώτης τάξεως Σειρᾶς ὄρει. καὶ εἰάν μὲν τρεῖς αἱ συζευχθῆσόμεναι ἐκθέσεις, ὁ πρῶτος ὅρος τὸν ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων αὐτῶν ἐμφαίνει· εἰάν δὲ τέσσαρες, ὁ δεύτερος· εἰάν δὲ πέντε, ὁ τρίτος. διὸ εἰάν ὁ τῶν ἐκθέσεων ἀριθμὸς ᾗ ν, ὁ ὅρος τῆς εἰρημένης Σειρᾶς, ὁ ἐμφαινὼν τὸν ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων, ἔσται $\nu - 2$. ἔστος δὲ ὁ ὅρος ἐστὶν ὁ $\nu - 1$. $\nu - 2$. ὁ αὐτὸς ἄρα

1. 2

ἐμφαίνει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν συζεύξεων τῶν κατὰ τριάδα συζευχθῆσμένων ἐκθέσεων.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δευθῆσεται, ὅτι ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν συζεύξεων κατὰ τετράδα ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆς ὀρθῆς τῆς Σειρᾶς τῶν πυραμικῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας τάξεως, τετέστι τῆς $\nu - 1$. $\nu - 2$. $\nu - 3$ · ὁ δὲ τῶν κατὰ

1. 2. 3 4.

πεντάδα, ὑπὸ τῆς $\nu - 1$. $\nu - 2$. $\nu - 3$. $\nu - 4$. καὶ τῶν ἰφεξῆς ὑπὸ τῶν ὁμοίων. 1. 2. 3. 4. 5.

Κ Ε Φ. ΙΗ'.

Περὶ Γεωμετρικῶν Σειρῶν.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Λ'.

§. 164. Ἐκαστος τῶν τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς ὄρων, πλην τῆς πρώτης, τὸ γινόμενόν ἐστιν ἐξ αὐτῆς τῆς πρώτης,

2 3

καὶ

καὶ τῆς Δυνάμεως, τῆς ἀπὸ τῆ ἐκθέτε τῆ λόγου, δείκτην ἔχουσης τὸν ἀριθμὸν, μονάδι ἐλαττωθέντα, τὸν ἐμφαίνοντα τὸν τῆ ὄρε τόπον.

Ἐξω Γεωμετρικὴ συνεχῆς Σειρὰ (σ) ἢ ἐν τῷ Α, ἥς πρῶτος μὲν ὅρος τὸ α, ἐκθέτης δὲ τῆ λόγου τὰ μ. λέγω, ὅτι ἕκαστος τῶν ὄρων αὐτῆς, πλὴν τῆ πρώτης, τὸ γινόμενόν ἐστιν ἐξ αὐτῆς τῆ πρώτης α, καὶ τῆς Δυνάμεως τῆς ἀπὸ τῆ ἐκθέτε τῆ λόγου, ἐπίσημον ἔχουσης τὸν ἀριθμὸν, μονάδι ἐλαττωθέντα, τὸν ἐμφαίνοντα τὸν τῆ ὄρε τόπον, εἶπεν τῆς μ^{-1} .

Ἡ μὲν γάρ Σειρὰ $1, \mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^5$, κτ, συνεχῆς Γεωμετρικὴ ἐστίν. (β. 29.) ἕκαστος δὲ τῶν ὄρων αὐτῆς, πλὴν τῆ πρώτης, δύναμις ἐστὶ τῆ ἐκθέτε τῆ λόγου ἐπίσημον ἔχουσα τὸν ἀριθμὸν τῆ τέτης, μονάδι ἐλαττωθέντα. εἰάν δὲ ἕκαστον τῶν ὄρων αὐτῆς διὰ τῆ α πολλαπλασιάσῃς, ἢ ἐν τῷ Α Σειρὰ γίνεταί. ἐξ ὧν δὴ ὁκλον, ὅτι ἕκαστος τῶν ὄρων αὐτῆς, πλὴν τῆ πρώτης, τὸ γινόμενόν ἐστιν ἐξ αὐτῆς τῆ πρώτης ὄρε καὶ τῆς Δυνάμεως, τῆς ἀπὸ τῆ ἐκθέτε, δείκτην ἔχουσης τὸν ἀριθμὸν, μονάδι ἐλαττωθέντα, τὸν ἐμφαίνοντα τὸν τῆ ὄρε τόπον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

β. 165. Ἡ ἀρα μονὰς πρὸς τὴν ἀπὸ τῆ ἐκθέτε τῆ λόγου Δύναμιν, ἐξ ἧς ὅρος τις σύγκεταί, λόγον ἔχει, ὃν ὁ πρῶτος ὅρος, πρὸς αὐτὸν τὸν εἰρημένον ὄρον, οἶον, ὡς $1 : \mu^2 :: \alpha : \mu^2 \alpha$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

β. 166. Ἐκαστος τῶν ὄρων ἐμφαίνεται διὰ τῆ $\mu^{-1} \alpha$, τῆ γ τὸν τῆ ὄρε τόπον ἐμφαίνοντες.

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 167. Ἐὰν ἄρα τὸ Ε τὸν ἔχατον ὄρον τῆς Γεωμετρικῆς συνεχῆς Σειρᾶς ἐμφαίνει, ἴσον ἔσαι τοῖς ἐν τῷ Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

§. 168. Τὸ κεφάλαιον πάσης τῆς γεωμετρικῆς συνεχῆς Σειρᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκτε τῷ ἑκάτῃ ὄρῳ καὶ τῷ ἐκθίτῃ τῷ λόγῳ, μειωθέντι μὲν τὸν πρῶτον, διαμεθέντι δὲ δι' αὐτῷ τῷ ἐκθίτῃ τῷ λόγῳ μονάδι ἐλαττωθέντος, ἔστιν τῷ Εμ—α.

μ—1.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἐν τῶν ἡγυμένων, πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ὅτῳ πάντα τὰ ἡγέμενα, πρὸς πάντα τὰ ἐπομένα· καὶ ὡς μὲν ἐν τῶν ἡγυμένων, πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ὅτως ἢ 1 : μ· (§. 165.) πάντα δὲ τὰ ἡγέμενα ἐν τῇ συνεχῇ ἀναλογίᾳ ἴσα εἰσὶ τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὄρων, πλην τῷ ἑκάτῃ, ὁμοίως καὶ τὰ ἐπομένα πάντα ἴσα τῷ αὐτῷ κεφαλαίῳ, πλην τῷ πρῶτῃ· τῷ ἄρα τῶν ὄρων κεφαλαίῳ διὰ τῷ Κ σημειθέντος, ἔσται, ὡς 1 : μ :: Κ—Ε : Κ—α. ἐκ ταύτης ὅν τῆς ἀναλογίας προκύπτει ἢ ἐν τῷ Λ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς δῆλον τὸ προκείμενον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 169. Ἐὰν ἀντὶ τῷ Ε τεθῇ ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσις τὸ εὐρεθὲν (§. 167.) αὐτῷ ἴσον, ἔσαι τὸ τῶν ὄρων κεφάλαιον ἴσον τοῖς ἐν τῷ Μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 170. Ἐν τῇ Γεωμετρικῇ Σειρᾷ τριῶν δοθέντων ἐκ τῶν δε· τῷ πρῶτῃ ὄρῳ, τῷ ἑκάτῃ, τῷ ἐκθίτῃ τῷ λόγῳ, τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων, καὶ τῷ κεφαλαίῳ αὐτῶν, τὰ λοιπὰ ἐκ τῶν εἰρημένων εὐρεῖν βέλδιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 171. Δοθείσης γεωμετρικῆς τινὸς συνεχῆς Σειρᾶς, εὐρεῖν τὰ κεφάλαια τῶν ἐξ αὐτῆς συνημιμένων Σειρῶν, ὅρας ἔχουσιν, ὧν ἕκαστος ὑπὸ τῆ κεφαλᾶς ἐμφαίνεται τῆς πρὸ αὐτῆς Σειρᾶς.

Ἔστω δοθεῖσα Σειρά, ἡ ἐν τῷ Α, ἥς τὸ κεφάλαιόν ἐστι τὸ $\mu - \alpha$. (§. 168.) τῆτο ἔν κατὰ τὴν τῆ προβ-

$\mu - 1$

λήματος συνθήκην ἐμφαίνει ἕκαστον τῶν τῆς κατὰ τὸ Γ Σειρᾶς ὄρων.

ΠΡΑΚΤΕΟΝ.

Ἀνάλυσον τὴν ἐν τῷ Γ Σειρᾶν εἰς τὴν ἐν τῷ Δ, καὶ εἰς τὴν ἐν τῷ Ε, ὧν ἡ μὲν γεωμετρικὴ ἐστίν, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ. ἔκβν τῆς μὲν πρώτης τὸ κεφάλαιόν ἐστι τὸ $\mu - 1 - \alpha$ — $\mu \alpha$ $\mu - 1^2$

τῆς δὲ δευτέρας, τὸ να. (§. 155.) ἀφελε ἀπὸ τῆ πρώτης τὸ

$\mu - 1$

δευτερον, καὶ τὸ λοιπὸν, ὅπερ ἐστὶν αὐτὸ τὸ ἐν τῷ Γ ὀρώμενον, ἐστὶ τὸ ζητούμενον τῆς ἐν τῷ Γ Σειρᾶς κεφαλᾶσιον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ ἑκάστη τῶν ὄρων τῆς κατὰ τὸ Γ Σειρᾶς ἀφελ. ἵν δαῖ ἕκαστον τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε, εἰάν ἀρα ἀπὸ τῆ κεφαλᾶς τῆς κατὰ τὸ Δ ἀφαιρεθῇ τὸ κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Ε, τὸ λοιπὸν ἔσται τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῆς κατὰ τὸ Γ Σειρᾶς.

Πάλιν τὸ εὐρεθὲν κεφάλαιον τῆς ἐν τῷ Γ Σειρᾶς ἐμφαίνει, κατὰ τὴν τῆ προβλήματος συνθήκην, ἕκαστον τῶν τῆς κατὰ τὸ Ζ Σειρᾶς ὄρων.

Ἀνάλυσον τὴν κατὰ τὸ Ζ Σειρᾶν εἰς τὰς ἐν ταῖς Η, Θ, Ι. τῶν ἡ μὲν πρώτη γεωμετρικὴ ἐστίν· αἱ δὲ δύο λοιπαί, ἀριθμητικαί. ἔκβν τῆς μὲν κατὰ τὸ Η τὸ κεφάλαιόν ἐστι τὸ ἐν τῷ Ν· τῆς δὲ κατὰ τὸ Θ, τὸ ἐν τῷ Ξ· τῆς

τῆς

τῆς δὲ κατὰ τὸ Ι, τὸ ἐν Ο. εἰν ἔν τὰ κατὰ τὸ Ε καὶ Ο
ἀπὸ τῶ ἐν τῷ Ν ἀφαιρεθῇ, λοιπὸν τὸ ἐν τῷ Κ τὸ κεφάλαιον
ἔσται τῆς κατὰ τὸ Ζ Σειρᾶς.

Ὅμοιότροπος δὲ καὶ τῶν ἐφεξῆς ὁμοίως συπαθησ-
μένων Σειρῶν εὐρεθήσονται τὰ κεφάλαια.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 172. Ἐστω τὸ μὲν $\alpha = 1$, τὸ δὲ $\mu = 2$. ἔκῃν
ἢ μὲν κατὰ τὸ Α Σειρᾶς, εἰς τὴν κατὰ τὸ Β μετα-
βληθήσεται ἢ δὲ κατὰ τὸ Γ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Ρ ἢ
δὲ κατὰ τὸ Ζ, εἰς τὴν κατὰ τὸ Σ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 173. Οἱ τῶν Ρ καὶ Σ Σειρῶν ἀριθμοὶ, καὶ οἱ
ἐφεξῆς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὐρισκόμενοι Γεωμε-
τρικοὶ ἀριθμοὶ ἐχηματισμένοι καλῶνται. (*)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 174. Ἰσίον, ὅτι τὰ ἄχρι τῶ ἰὺν ἐπίλυθῆντα προβ-
λήματα, οἷον θύμεθλα εἰσι πάντων τῶν δι ἀριθμῶν
ἐπιλυομένων προβλημάτων.

Κ Ε Φ. Ι Θ'.

Ἀριθμητικῶν τινῶν προβλημάτων ἐπίλυσις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 175. Δοθέντων τῶ πρώτῃ καὶ ἐσχάτῃ ὅρῃ καὶ τῶ
ἀριθμῷ τῶν ὁρῶν τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, τὸν τῶ λό-
γον ἐκθέτην εὐρεῖν.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος ὅρος $= \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$, ὁ
δὲ τῶν ὁρῶν ἀριθμὸς $= \nu$, ὁ δὲ ζητούμενος ἐκθέτης $= \chi$.

Ζ 3

Οὐκ ἔν

(*) Περὶ τούτων μίτιδι τὴν τῷ Ἱερώνυμῳ Ρινάλδῳ βίβλιν, τὴν
περὶ μαθηματικῶν γυμνασμάτων τὴν κατὰ τὸ Πινάβιον ἐκ-
τυπωθεῖσαν.

Οὐκ ἔστιν ὁ ἑχάτος τῆς Σειρᾶς ὄρος, ἔστιν τὸ $\beta =$
 $\chi^{v-1} \alpha$. (φ. 164, 167.) τὸ ἄρα $\chi^{v-1} = \frac{\beta}{\alpha}$. διὸ $\chi =$

$$\sqrt[v]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\sqrt[v]{\alpha}$$

Ἐστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 436$, τὸ δὲ $v = 6$,
 ἔστιν τὸ $\chi = \sqrt[6]{\frac{436}{2}} = \sqrt[6]{218} = 5$.

$$\sqrt[5]{2}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

φ. 176. Δοθέντων τῶ ἀριθμῷ τῶν ὄρων, τῷ ἐκθέ-
 τῇ τῆς λόγου, καὶ τῇ κεφαλῇ τῆς γεωμετρικῆς Σει-
 ρᾶς, εὑρεῖν τὸν πρῶτον ὄρον.

Ἐστω ὁ μὲν τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= v$, ὁ δὲ ἐκθέτης $=$
 μ , τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ ζητούμενος πρῶτος $= \chi$.

Ἔσται δὴ ἔν ὁ μὲν ἑχάτος ὄρος $= \mu^{v-1} \chi$, (φ. 164) τὸ
 δὲ τῆς Σειρᾶς κεφάλαιον, ἦται τὸ $\gamma = \mu \cdot \mu^{v-1} \chi = \chi$.

(φ. 168, 169.) ὅπερ ἐστὶ τὸ $\gamma = \mu^v \chi = \chi$. διὸ τὸ
 $\mu^v \chi = \chi$.

ἔστιν τὸ $\chi = \mu \gamma - \gamma$.

$$\mu^v - 1.$$

Ἐστω τὸ μὲν $\mu = 3$, τὸ δὲ $v = 6$, τὸ δὲ $\gamma =$
 728. τὸ ἄρα $\chi = \frac{728}{3^6 - 1} = 2$.

$$729 - 1$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

φ. 177. Δοθέντων τῶ πρώτῃ καὶ τῷ ἐκθέτῃ ὄρει,
 καὶ τῷ ἐκθέτῃ τῆς λόγου, τὸν ἀριθμὸν εὑρεῖν τῶν ὄρων.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἑχάτος $= \beta$, ὁ δὲ
 ἐκθέτης $= \mu$, ὁ δὲ ζητούμενος τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= \chi$.

Τοι-

Τοιγαρὲν ὁ ἔχματος ὄρος, ἥτοι τὸ $\beta = \mu \chi^{-1} \alpha$.
 (φ. 164.) διὸ δὴ καὶ ὁ λογαριθμὸς τῷ β ἴσος τῷ
 λογαριθμῷ τῷ $\mu \chi^{-1} \alpha$. διὰ τῷ λ ἔν σημειωθέντος τῷ
 λογαριθμῷ, ἔσεται ὁ $\lambda \beta = \chi - 1$. $\lambda \mu + \lambda \alpha$, (*)
 ἥτοι ὁ $\lambda \beta = \chi \lambda \mu - \lambda \mu + \lambda \alpha$. διὸ τὸ $\chi \lambda \mu = \lambda \beta +$
 $\lambda \mu - \lambda \alpha$. τὸ ἄρα $\chi = \frac{\lambda \beta - \lambda \alpha + 1}{\lambda \mu}$.

Ἐστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 486$, τὸ δὲ $\mu = 3$.
 ἔκων ἔσεται ὁ μὲν $\lambda \beta = 2.6966363$, ὁ δὲ $\lambda \alpha =$
 0.3010300 , ὁ δὲ $\lambda \mu = 0.4371213$. διὸ ὁ $\lambda \beta - \lambda \alpha =$
 $2.3956063 = 5$. τὸ ἄρα $\chi = 5 + 1 = 6$. $\lambda \mu$
 0.4371213

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

φ. 178. Δοθέντων τῷ πρώτῃ καὶ τῷ ἔχάτῃ καὶ
 τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὄρων τῆς γεωμετρικῆς Σειρᾶς, ἐν-
 εῖν τὴν τῶν ὄρων ἀριθμὸν καὶ τὸν ἐκθέτην τῷ λόγῳ.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔχματος $= \beta$, τὸ δὲ
 κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= \chi$, ὁ δὲ τῷ
 λόγῳ ἐκθέτης $= y$.

Τὸ ἄρα κεφάλαιον $\gamma = \beta y - \alpha$. διὸ τὸ $\gamma y - \gamma = \beta y - \alpha$.
 ἔθεν τὸ $y = \frac{\gamma - \alpha}{y - 1}$.

Οἱ δὲ ἔχματος ὄρος, ἔστιν τὸ $\beta = y \cdot \chi^{-1} \alpha$, ληφθέν-
 των δὲ τῶν λογαριθμῶν, ἔσεται ὁ $\lambda \beta = \chi \lambda y - \lambda y + \lambda \alpha$,
 ἥτοι ὁ $\chi \lambda y = \lambda \beta + \lambda y - \lambda \alpha$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\lambda \beta - \lambda \alpha + 1}{\lambda y}$.

Ἐστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 486$, τὸ δὲ $\gamma = 728$.
 τὸ ἄρα $y = \frac{728 - 2}{728 - 486} = 3$.

Ἐπει

(*) Ὅρα τὸ γ'. Θεώρ. καὶ τὸ μὲν αὐτὸ δ'. Πόρισμα. τῷ δ'.
 ἡ φλ. τῷ ἀμυνίῳ. Ἀριθμῶν.

Ἐπεὶ δὲ ὁ μὲν $\lambda\beta = 2.6866363$, ὁ δὲ $\lambda\alpha = 0.3010300$, ὁ δὲ $\lambda\gamma = 0.4771212$, τὸ ἄρα $\chi = 2.6866363 - 0.3010300 + 1 = 5 + 1 = 6$.

0.4771212

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 179. Δοθέντων τῶν γινόμενων ἐκ τῶν πρώτων καὶ τῶν ἑκατῶ ὄρων, τῶν ἐκθέτων τῶν λόγων, καὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ὄρων τῆς Γεωμετρικῆς Σειρᾶς, εὐρεῖν τὸν πρῶτον καὶ ἑκατὸν ὄρον.

Ἔστω τὸ μὲν ἐκ τῶν πρώτων καὶ τῶν ἑκατῶ γινόμενον $= \zeta$, ὁ δὲ τῶν λόγων ἐκθέτης $= \mu$, ὁ δὲ τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= \nu$, ὁ δὲ πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ ἑκατὸς $= \psi$.

Οὐκ ἔνν ὁ μὲν ἑκατὸς ὄρος, ἦτοι τὸ $\psi = \mu^{\nu-1} \chi$, τὸ δὲ γινόμενον, εἴτεν τὸ $\chi\psi = \zeta$. τὸ ἄρα $\psi = \frac{\zeta}{\chi}$. ἐν τῇ πρώτῃ ἔνν ἰξίσωσις τεθέντος ἀντὶ τῶν ψ τῶν ἴσων αὐτῶν, προκύψει ἡδε ἡ ἰξίσωσις $\frac{\zeta}{\chi} = \mu^{\nu-1} \chi$. ἐξ ἧς γίνεται αὕτη, $\zeta = \mu^{\nu-1} \chi^2$. ἐξ ἧς τὸ $\chi = \sqrt[\nu]{\frac{\zeta}{\mu^{\nu-1}}}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\zeta = 972$, τὸ δὲ $\mu = 3$, τὸ δὲ $\nu = 6$. ἔκθν τὸ μὲν $\chi = \sqrt[6]{\frac{972}{3^{5}}} = \sqrt[6]{1} = 1$, τὸ δὲ $\psi = 972 = 486$.

2

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 180. Ἐν συνεχείᾳ μὲν ἀρμονικῶν λόγων μεγίστη ἀναμὴ λέγεται, εἰάν ἡ ὑπεροχὴ τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν δευτέρων καὶ τρίτων λόγων ἔχη ὅν τὸ πρῶτον, πρὸς τὸ τρίτον. εἰον, τὰ δε, 10, 16, 40. ὅτι γὰρ ὡς 6 : 24 :: 10 : 40. ἐν διακεκρίμην δὲ, εἰάν ἡ ὑπεροχὴ τῶν πρώτων καὶ τῶν δευτέρων

τέρει, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ τρίτει καὶ τῆ τετάρτει
λόγον ἔχῃ ὃν τὸ πρῶτον, πρὸς τὸ τέταρτον. οἷον τὰ-
δε, 6, 8, 12, 18. ἐστὶ γὰρ ὡς 2. 6 :: 6 : 18. ἐν
ὑπεναντίῳ δὲ ἀρμονικῶ, εἰάν ἡ ὑπεροχὴ τῆ πρώτει καὶ
τῆ δευτέρει, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῆ δευτέρει καὶ τρί-
τει λόγον ἔχῃ, ὃν ὁ τρίτος, πρὸς τὸν πρῶτον. οἷον
τὰ δε, 3, 5, 6. ἐστὶ γὰρ ὡς 2 : 1 :: 6 : 3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

§. 181. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, τρίτον ἀρμονικῶς
ἀνάλογον εὐρεῖν.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος = α, ὁ δὲ δεύτερος = β, ὁ δὲ
ζητούμενος τρίτος = χ.

Οὐκὲν ὡς β-α : χ-β :: α : χ. (§. 180.) τὸ ἄρα
 $\alpha\chi - \alpha\beta = \beta\chi - \alpha\chi$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\alpha\beta}{2\alpha - \beta}$
Ἔστω τὸ μὲν α = 10, τὸ δὲ β = 16. τὸ ἄρα $\chi = \frac{160}{20 - 16} = 40$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2'.

§. 182. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, μέσον ἀρμονικῶς
ἀνάλογον εὐρεῖν.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος = α, ὁ δὲ τρίτος = β, ὁ δὲ
ζητούμενος μέσος = χ.

Ὡς ἄρα χ-α. β-χ :: α : β. τὸ ἄρα βχ-
 $\alpha\beta = \alpha\beta - \alpha\chi$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$.

Ἔστω τὸ μὲν α = 10, τὸ δὲ β = 40. οὐκὲν τὸ $\chi = \frac{30}{50} = 36$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 183. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, τέταρτον εὐρεῖν
ἀρμονικῶς ἀνάλογον.

Ἔστω

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$, ὁ δὲ
 τρίτος $= \gamma$, ὁ δὲ ζητούμενος τέταρτος $= \chi$.

Οὐκ ἔν ὥς $\beta - \alpha : \chi - \gamma :: \alpha : \chi$. τὸ ἄρα $\beta\chi - \alpha\chi =$
 $\alpha\chi - \alpha\gamma$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\alpha\gamma}{2\alpha - \beta}$.

Ἐστω τὸ μὲν $\alpha = 6$, τὸ δὲ $\beta = 8$, τὸ δὲ $\gamma = 12$.
 τὸ ἄρα $\chi = \frac{72}{12 - 8} = 18$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄.

§. 184. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὐρεῖν τρίτον ὑπερ-
 ναντίως ἀρμονικόν.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$, ὁ δὲ
 ζητούμενος τρίτος $= \chi$. ἔκ ἐν ἔσται ὥς $\beta - \alpha : \chi - \beta ::$
 $\chi : \alpha$. (§. 180.) τὸ ἄρα $\chi^2 - \beta\chi = \alpha\beta - \alpha^2$. πλη-
 ρωθέντος δὲ τῆς τετραγώνου, ἔσται τὸ $\chi^2 - \beta\chi + \beta^2 =$

$\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2$. (§. 120.) καὶ τῆς τετραγωνικῆς ἱξάχῃ
 $\sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2}{4}}$ θείσης ῥίζης ἔσται τὸ $\chi - \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2}{4}}$. διὸ

τὸ $\chi = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2}{4}}$.

Ἐστω τὸ μὲν $\alpha = 3$, τὸ δὲ $\beta = 5$. ἔκ ἐν ἔσται τὸ
 $\chi = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25 + 15 - 9}{4}} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} =$
 $\frac{12}{2} = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι΄.

§. 185. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μίσην ὑπερναντίως
 ἀρμονικόν εὐρεῖν.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ τρίτος $= \beta$, ὁ δὲ
 ζητούμενος μίσης $= \chi$.

Ὡς ἄρα $\chi - \alpha : \beta - \chi :: \beta : \alpha$. τὸ ἄρα $\alpha\chi -$
 $\alpha^2 = \beta^2 - \beta\chi$. διὸ τὸ $\chi = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}$.

Ἐστω

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 3$, τὸ δὲ $\beta = 6$. ἔκιν τὸ $\chi =$
 $\frac{9+36}{3+6} = 5$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ΙΑ'.

§. 186. Δοθέντων τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ἔχατῳ καὶ
 τῆς διαφορᾶς τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, εὐρεῖν
 τὸν τῶν ὄρων ἀριθμὸν, καὶ τὸ αὐτῆς κεφάλαιον.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἔχατος $= \beta$, ἡ δὲ
 διαφορὰ δ , ὁ δὲ τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= \chi$, τὸ δὲ τῆς
 Σειρᾶς κεφάλαιον $= y$.

Οὐκὲν ὁ μὲν ἔχατος ὄρος, εἴταν τὸ $\beta = \alpha + \chi - 1$. δ.
 (§. 153, 154.) τὸ δὲ τῆς Σειρᾶς κεφάλαιον, ἦτοι
 τὸ $y = \alpha + \beta$. χ . καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἰξισώσεως
 εὐρίσκωμεν τὸ $\chi = \frac{\beta + \delta - \alpha}{\delta}$ ἐκ δὲ τῆς δευτέρας,
 τοθέντος ἀντὶ τῷ χ τῷ ἴσῳ αὐτῷ, τὸ $y = \alpha + \beta$.
 $\frac{\beta + \delta - \alpha}{\delta}$.

Καίτω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 17$, τὸ δὲ $\delta = 3$.
 ἔκιν τὸ μὲν $\chi = \frac{17+3-2}{3} = 6$ τὸ δὲ $y = 2+17$.
 $\frac{17+3-2}{3} = 57$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ΙΒ'.

§. 187. Δοθέντων τῷ πρώτῳ καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν
 ὄρων, καὶ τῷ τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς κεφαλαίῳ, εὐρεῖν
 τὸν ἔχατον, καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὄρων.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $= \alpha$, ἡ δὲ διαφορὰ $= \delta$, τὸ
 κεφάλαιον $= y$, ὁ δὲ ἔχατος $= \beta$, ὁ δὲ τῶν ὄρων
 ἀριθμὸς $= \chi$.

Τὸ μὲν ἄρα $y = a + \frac{x}{2} - 1$. δ' (φ. 153.) τὸ δὲ $y = a + \frac{y}{2} \cdot \frac{x}{2}$. (φ. 155.) καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὸ $y = a + \delta x - \delta$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $y = \frac{2\gamma - \alpha x}{x}$. διὸ τὸ $a + \delta x - \delta = \frac{2\gamma - \alpha x}{x}$.

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ἥδε· $x^2 + \frac{x}{2\alpha - \delta}$.

$x = \frac{2\gamma}{\delta}$ τεθέντος δὲ τῷ $2\alpha - \delta = 2\nu$, ἔσται τὸ $x^2 +$

$\frac{2\nu x}{\delta} = \frac{2\gamma}{\delta}$. καὶ τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἔσται το

$x^2 + 2\nu x + \nu^2 = \nu^2 + \frac{2\gamma}{\delta}$. ἐξαχθείσης δὲ τῆς ρίζης,

ἔσται τὸ $x + \nu = \sqrt{\nu^2 + \frac{2\gamma}{\delta}}$. διὸ τὸ $x = \sqrt{\nu^2 + \frac{2\gamma}{\delta}} - \nu$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\delta = 3$, τὸ δὲ $\gamma = 57$. Οὐκ ἔν τὸ μὲν $\frac{2\alpha}{\delta} = \frac{4}{3} - 1 = 1 = 2\nu$. διὸ τὸ $\nu = \frac{1}{2}$,

καὶ τὸ $\nu^2 = \frac{1}{4}$. τὸ ἄρα $x = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{114}{3}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1264}{36}} -$

$\frac{1}{2} = \frac{37}{6} - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} = 6$. διὸ τὸ $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

φ. 188. Δεθέντων τῷ πρώτῳ καὶ ἑκάστῳ καὶ τῷ κεφαλαίῳ τῶν ὄρων τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς, εὐρεῖν τὴν διαφορὰν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὄρων.

Ἔστω ὁ μὲν πρώτος $= \alpha$, ὁ δὲ ἑκάστος $= \beta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ἡ δὲ διαφορὰ $= y$, ὁ δὲ τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= x$.

Τοιγαρὲν τὸ μὲν $y = \alpha + \beta \cdot \frac{x}{2} - 1$. τὸ δὲ $\beta = \alpha + x - 1$. y .

καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $x = \frac{2\gamma}{\alpha + \beta}$.

2γ. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τεθέντες ἀντὶ τῷ χ τῷ ἴσθ

$\alpha + \beta$

αὐτῶ, τὸ $y = \frac{\alpha + \beta}{2\gamma - \alpha - \beta} \cdot \beta - \alpha$.

$2\gamma - \alpha - \beta$

Καί ὡς τὸ μὲν $\alpha = 2$, τὸ δὲ $\beta = 17$, τὸ δὲ $\gamma = 57$.

ἔκῃν τὸ μὲν $\chi = \frac{114}{19} = 6$, τὸ δὲ $y = \frac{2 + 17 \cdot 17 - 2}{114 - 2 - 17}$

$285 = 3$.

95

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1Δ'.

§. 189. Δοθέντων τῷ ἀριθμῷ τῶν ὄρων, τῆς διαφορᾶς, καὶ τῷ τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς κεφαλᾷ, εὑρεῖν τὸν πρῶτον καὶ ἑκατον ὄρον.

Ἔστω ὁ μὲν τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= n$, ἡ δὲ διαφορὰ $= d$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ πρῶτος ὄρος $= \chi$, ὁ δὲ ἑκατὸς $= y$. Οὐκ ἔν τὸ μὲν $\gamma = \chi + y \cdot n$, τὸ δὲ $y = \chi + n - 1 \cdot d = \chi + nd - d$. ἀντὶ ἧν τῷ y τεθέντες ἐν τῇ πρώτῃ ἰξισώσας τῷ ἴσθ αὐτῶ, ἔσται τὸ $\gamma = \chi + \chi + nd - d \cdot \frac{n}{2}$, ἢ τὸ $2\gamma = 2\chi + n^2 d - nd$, ἢ τοι τὸ $\chi = \frac{2\gamma + nd - n^2 d}{2}$.

89

Καί ὡς τὸ μὲν $n = 6$, τὸ δὲ $d = 3$, τὸ δὲ $\gamma = 57$.

ἔκῃν τὸ μὲν $\chi = \frac{114 + 18 - 108}{12} = \frac{24}{12} = 2$, τὸ δὲ

$y = \frac{2 + 6 - 1 \cdot 3}{1} = 3 = 17$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1Ε'.

§. 190. Δοθέντων τῷ ἑκάστῳ καὶ τῆς διαφορᾶς καὶ τῷ κεφαλᾷ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς Σειρᾶς ὄρων, εὑρεῖν τὸν πρῶτον, καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὄρων.

Η

Ἔστω

Ἐστω ὁ μὲν ἑχάτος $= \beta$, ἡ δὲ διαφορὰ $= \delta$, τὸ δὲ κεφάλαιον $= \gamma$, ὁ δὲ πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ τῶν ὄρων ἀριθμὸς $= y$. Οἱ μὲν ἄρα $\beta = \chi + y - 1$. δ, τὸ δὲ $\gamma = \chi + \beta \cdot \frac{y}{2}$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $y = \frac{\beta - \chi + \delta}{\delta}$ ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $y = \frac{2\gamma}{\chi + \beta}$ διὸ τὸ $\frac{2\gamma}{\chi + \beta} = \frac{\beta - \chi + \delta}{\delta}$, ἥτοι τὸ $\chi^2 - \delta\chi = \beta^2 + \beta\delta - 2\gamma\delta$. πληρωθέντες δὲ τῇ τετραγώνῃ, ἔσται τὸ $\chi^2 - \delta\chi + \frac{\delta^2}{4} = \frac{\delta^2}{4} + \beta^2 + \beta\delta - 2\gamma\delta$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσται τὸ $\chi - \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2 + \beta\delta - 2\gamma\delta}$, εἴτεν τὸ $\chi = \frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \beta^2 + \beta\delta - 2\gamma\delta}$. Κείμεν τὸ μὲν $\beta = 17$, τὸ δὲ $\delta = 3$, τὸ δὲ $\gamma = 57$. τὸ μὲν ἄρα $\chi = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 289 + 51 - 342} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$. τὸ δὲ $y = \frac{114}{2+17} = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15'.

§. 191. Εὐρεῖν ἀριθμὸν, ὃς τὸ ἡμισυ σὺν τῷ τεταρτημορίῳ καὶ ἐβδομημορίῳ καὶ τρισὶ μονάσιν ἴσεν ἐπὶ τῷ ὅλῳ. (*)

Ἐστω ὁ ζητούμενος χ .

Οὐκὲν τὸ $\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{7} + 3 = \chi$. τὸ ἄρα $\chi =$

28.

ΠΡΟ:

(*) Τὴν ἐστὶ τὸ ὑπὸ Διοφάντου προταγόμενον (ἐν βιβλ. 5. τῶν Ἀριθμ. σελ. 262) συγκεχυμένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

§. 192. Ἐρεῖν ἀριθμὸν, ὃ τὸ πεμπτημόριον σὺν τῷ δωδεκατημορίῳ καὶ ὀκτημορίῳ καὶ εἰκοσημορίῳ καὶ τεταρτημορίῳ καὶ ἐβδόμημορίῳ, καὶ μονάσι πεντακοσίαις ἴσον ἢ τῷ ἑλκ. (*)

Ἐστω ὁ ζητούμενος x .

Τὸ ἄρα $\frac{1}{5}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 500 = x$. διὸ τὸ $x = 3360$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

§. 193. Ἐρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὧν ὁ μὲν πρῶτος τὸν δεύτερον καὶ τὸ τρίτημόριον περιέχει τῷ τρίτῳ ὁ δὲ δεύτερος, τὸν τρίτον καὶ τὸ τῷ πρώτῳ τρίτημόριον ὁ δὲ τρίτος, μονάδας δέκα καὶ τὸ τῷ πρώτῳ τρίτον. (**)

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= x$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$, ὁ δὲ τρίτος $= z$.

Τοιγαρὲν ὁ μὲν $x = y + \frac{1}{3}z$, ὁ δὲ $y = z + \frac{1}{3}x$, ὁ δὲ $z = 10 + \frac{1}{3}x$. τεθήτω ἔν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξίσωσιν ἀντὶ τῷ z τὸ ἴσον αὐτῷ. ἔκθ' ἔσται τὸ $y = 10 + \frac{2}{3}x$. εἰάν ἔν ἐν τῇ πρώτῃ ἐξίσωσιν ἀντὶ τῷ y καὶ τῷ z τεθῶσι τὰ ἴσα αὐτοῖς, προκύψει ἡ ἐξίσωσις αὕτη $x = 10 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(10 + \frac{1}{3}x)$. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ $x = 60$. τὸ μὲν ἄρα $z = 10 + 20 = 30$. τὸ δὲ $y = 30 + 20 = 50$.

Η Ω

ΠΡΟ-

(*) Τὸ Διοφάντ. ἀντ.

(**) Τὸ αὐτῷ. ἀντ. ὁμοίαι καὶ τὸ ἐξῆς. σελ. 277.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘ'.

§. 194. Ἐυρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὧν ὁ πρῶτος δίκαια μονάδας παρὰ τῷ δευτέρῳ λαβὼν, τριπλάσιος αὐτῷ γίνεται· ὁ δὲ δεύτερος τὰς αὐτὰς παρὰ τῷ πρώτῳ λαβὼν, πεντάπλες τῷ πρώτῳ.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= x$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$.

Οὐκ ἔν τῷ μὲν πρῶτος μετὰ τὴν λῆψιν ἴσος ἐστὶ τῷ $x + 10$ · ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τὴν δόσιν, τῷ $y - 10$. ἐπεὶ δὲ ὁ πρῶτος μετὰ τὴν λῆψιν τριπλάσιος γίνεται τῷ δευτέρῳ μετὰ τὴν δόσιν, ἔσεται τὸ $x + 10 = 3y - 30$. πάλιν ὁ μὲν δεύτερος μετὰ τὴν λῆψιν ἐστὶν ὁ $y + 10$, ὁ δὲ πρῶτος μετὰ τὴν δόσιν, ὁ $x - 10$. καὶ ἐπεὶ ὁ δεύτερος μετὰ τὴν λῆψιν πεντάπλες γίνεται τῷ πρώτῳ μετὰ τὴν δόσιν, ἔσεται δὴ ἄρα τὸ $y + 10 = 5x - 50$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἰξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $x = 3y - 40$ · ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $x = \frac{y + 60}{5}$. διὸ τὸ $3y - 40 = \frac{y + 60}{5}$. τὸ ἄρα

$$y = \frac{260}{4} = 65 + \frac{4}{7}$$

τὸ δὲ $x = 3 \cdot 65 + \frac{4}{7} - 40 = 155 + \frac{5}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Κ'.

§. 195. Ἐυρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τῷ λοιπῷ ὑπερέχῃσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ.

Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος x , ὁ δὲ δεύτερος y , ὁ δὲ τρίτος z . ἐπιταχθῶ δὲ τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸν δεύτερον τῷ τρίτῳ ὑπερέχαιν μονάδας 20· τὸν δὲ δεύτερον καὶ τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ, 30· τὸν δὲ τρίτον καὶ τὸν πρῶτον τῷ δευτέρῳ, 40. Οὐκ ἔν τῷ μὲν $x + y = z + 20$, τὸ δὲ $y + z = x + 30$, τὸ δὲ $x + z = y + 40$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἰξισώσεως τὸ $z = x + y - 20$.

20. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $Z = \chi + 30 - y$. διὸ τὸ $\chi + y - 20 = \chi + 30 - y$. τὸ ἄρα $y = \frac{50}{2} = 25$. τέτρε
 ἔν τεθίντες ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, ἔσται τὸ $\chi + 25 =$
 $Z + 20$, ἔτιεν τὸ $Z = \chi + 5$. τεθήτω ἔν ἐν τῇ τρί-
 τῇ ἐξισώσει ἀντὶ τῆς y καὶ τῆς Z τὰ εὐρεθέντα ἀν-
 τοῖς ἴσα. ἔκῃν ἔσται τὸ $\chi + \chi + 5 = 25 + 40$, ἥτοι
 τὸ $\chi = \frac{60}{2} = 30$. διὸ τὸ $Z = 35$. τοιγαρὲν ὁ μὲν $\chi =$
 30 , ὁ δὲ $y = 25$, ὁ δὲ $Z = 35$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑ'.

§. 196. Ἐυρεῖν τέσσαρας ἀριθμούς, ὅπως σὺν τρεῖς
 συντιθέμενοι ποιῶσι τὴν ἐπιταχθίντας ἀριθμός.

"Ἐστω ὁ μὲν πρῶτος $= \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $= y$, ὁ δὲ
 τρίτος $= z$, ὁ δὲ τέταρτος $= \Omega$. ἐπιτετάχθω δὲ τὴν
 μὲν ἀπὸ τῆς πρώτης τρεῖς κατὰ τὸ ἐξῆς συντεθίντας
 ποιῶν μονάδας 14· τὴς δ' ἀπὸ τῆς δευτέρας τρεῖς, 21·
 τὴς δ' ἀπὸ τῆς τρίτης τρεῖς, 20· τὴς δ' ἀπὸ τῆς τε-
 τάρτης τρεῖς, 17.

Τοιγαρὲν οἱ μὲν $\chi + y + z = 14$ · οἱ δὲ $y + z +$
 $\Omega = 21$ · οἱ δὲ $z + \chi + \Omega = 20$ · οἱ δὲ $\Omega + \chi + y =$
 17 . ἐκ μὲν ἔν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὸ $\chi + y =$
 $14 - z$ · ἐκ δὲ τῆς ἐσχάτης, τὸ $\chi + y = 17 - \Omega$. διὸ
 τὸ $14 - z = 17 - \Omega$. τὸ ἄρα $z = \Omega - 3$. πάλιν ἐκ μὲν
 τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τὸ $\chi + \Omega = 20 - z$, ἐκ δὲ
 τῆς τρίτης τὸ $\chi + \Omega = 17 - y$. διὸ τὸ $17 - y = 20 - z$.
 τὸ ἄρα $z - 3 = y$. ἀλλὰ τὸ z ὑψηταὶ ἴσον τῷ $\Omega - 3$
 τὸ ἄρα $\Omega - 3 - 3 = y$, ἥτοι $\Omega - 6 = y$. τεθήτω ἔν
 ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ τῶν y καὶ z τὰ εὐρε-
 θέντα αὐτοῖς ἴσα. καὶ ἔσται δὴ τὸ $\Omega - 6 + \Omega - 3 + \Omega =$
 21 , ἄτιν τὸ $3\Omega = 30$. τὸ ἄρα $\Omega = 10$. διὸ τὸ μὲν

$y=10-6=4$, τὸ δὲ $Z=10-3=7$. τὸ δὲ $x+4=17-10$, ἥτοι τὸ $x=3$. ἔκθ' τῶν ζητημένων ἀριθμῶν ὁ μὲν $x=3$, ὁ δὲ $y=4$, ὁ δὲ $Z=7$, ὁ δὲ $\Omega=10$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΒ'.

§. 197. Δοθέντος τῆς κεφαλαιῆς δύο Δυνάμεων τὸν αὐτὸν ἐκθέτην ἔχουσῶν, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, εὑρεῖν ἑκατέρας τὴν ῥίζαν.

Ἔστω τῆς μὲν μείζονος ἡ ῥίζα, y · τῆς δὲ ἐλάσσονος, x · καὶ τὸ μὲν τῶν Δυνάμεων κεφάλαιον $=\alpha$, ἡ δὲ διαφορὰ $=\beta$.

Οὐκ ἔν τὸ μὲν $y^2 + x^2 = \alpha$, τὸ δὲ $y^2 - x^2 = \beta$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $y^2 = \alpha - x^2$. ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $y^2 = \beta + x^2$. διὸ τὸ $\alpha - x^2 = \beta + x^2$. τὸ ἄρα $x^2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἔσται $x = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2}}$.

Ἔστω τὸ μὲν $\alpha = 25$, τὸ δὲ $\beta = 7$. ἔκθ' τὸ μὲν $x = \sqrt{\frac{25 - 7}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$. τὸ δὲ $y^2 = 7 + 9 = 16$. διὸ τὸ $y = 4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΓ'.

§. 198. Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ γινόμενον ἔξ ἑκατέρου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς ἐντέρου ἴσον δοθέντι ἀριθμῷ.

Ἔστω τὸ μὲν τῶν γινόμενων α , τὸ δὲ β . καὶ ὁ μὲν τῶν ζητημένων x , ὁ δὲ y .

Τοιγαρὲν τὸ μὲν $x\sqrt{y} = \alpha$, τὸ δὲ $y\sqrt{x} = \beta$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $y = \frac{\alpha^2}{x^2}$.

$$\alpha^2, \text{ ἐκ δὲ τῆς δευτέρας τὸ } y = \frac{\beta}{\sqrt{x}}. \text{ διὸ τὸ } \frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{\beta}{\sqrt{x}}$$

$$\text{τὸ ἄρα } \frac{\alpha^4}{x^4} = \frac{\beta^2}{x} \cdot \text{ καὶ τὸ } x^3 = \frac{\alpha^4}{\beta^2}. \text{ διὸ τὸ } x = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{\beta^2}}.$$

$$\text{Ἔστω τὸ μὲν } \alpha = 18, \text{ τὸ δὲ } \beta = 12. \text{ ἔκθεν τὸ } x = \sqrt[3]{\frac{104976}{144}} = \sqrt[3]{729} = 9. \text{ τὸ δὲ } y = \frac{12}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΔ'.

§. 199. Ἑυρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ἔπως τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἴσον ᾗ δοθέντι ἀριθμῷ, τὸ δὲ ἀπὸ τῶ κεφαλαίων αὐτῶν τετραγώνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς ἔχῃ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω ὁ μὲν μείζων τῶν ζητημένων ἀριθμῶν x , ὁ δὲ ἐλάσσων y · καὶ τὸ μὲν ἐξ αὐτῶν γινόμενον $= \alpha$ · ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὁ τῷ $\beta : \gamma$.

Οὐκ ἔστι τὸ μὲν $xy = \alpha$, τὸ δὲ $x^2 + 2xy + y^2 : x^2 - 2xy + y^2 :: \beta : \gamma$. διὸ τὸ $\gamma x^2 + 2\gamma xy + \gamma y^2 = \beta x^2 - 2\beta xy + \beta y^2$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξίσωσως εὐρίσκομεν τὸ $x^2 = \frac{\alpha^2}{y^2}$ · ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ

$$x^2 + y^2 = \frac{2\gamma + 2\beta}{\beta - \gamma} xy. \text{ τεθέντων ἔν ἀντὶ τῷ } xy, \text{ καὶ}$$

τῷ x^2 ἐν τῇ δε τῇ ἐξίσώσει τῶν εὐρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, προκύψει ἡδε ἡ ἐξίσωσις· $\frac{\alpha^2}{y^2} + y^2 = \frac{2\gamma + 2\beta}{\beta - \gamma}$.

μ. διὸ τεθέντος τῷ $\frac{2\gamma + 2\beta}{\beta - \gamma} \alpha = 2\gamma$, ἔσται τὸ $y^4 =$

$$2\gamma y^2 - \alpha^2, \text{ ἥτοι τὸ } y^4 - 2\gamma y^2 = -\alpha^2. \text{ τῷ δὲ τετραγώνῳ}$$

γώνυα πληρωθέντες, ἔσεται τὸ $y^4 - 2vy^2 + v^2 = v^3 - a^2$. καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐξαχθείσης, ἔσεται τὸ $y^2 - v = \sqrt{v^2 - a^2}$. διὸ τὸ $y^2 = v + \sqrt{v^2 - a^2}$. καὶ πάλιν τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης ρίζης, ἔσεται τὸ $y = \sqrt{v + \sqrt{v^2 - a^2}}$.

Ἐστὼ τὸ μὲν $a = 96$. ὥς δὲ $\beta : \gamma :: 25 : 1$. τὰ ἄρα $2v = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 25$. $96 = 52$. $4 = 208$. διὸ τὸ

$v = 104$, τὸ δὲ $v^2 = 10816$. ἔστι δὲ καὶ τὸ $a^2 = 9216$. τὸ ἄρα $y = \sqrt{104 + \sqrt{10816 - 9216}} = \sqrt{104 + 40} = \sqrt{144} = 12$. διὸ τὸ $x = \frac{96}{12} = 8$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΕ΄.

§. 200. Ἐυρεῖν δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον ἴσον ᾗ ἑκατέρω, εἴτεν τῷ κεφαλαίῳ αὐτῶν, καὶ τῇ ὑπεροχῇ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐστὼ ὁ μὲν μείζων τῶν ζητούμενων x , ὁ δὲ ἐλάσσων y .

Οὐκ ἔστι τὸ $xy = x + y$, ὁμοίως τὸ $xy = x^2 - y^2$. ἐκ τῆς πρώτης δὲ ἐξισώσεως δῆλον ἔστι τὸ $x = \frac{xy}{x-y}$. τεθέντες ἔν ἀντὶ τοῦ x ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει τὸ ἴσον αὐτῷ, ἔσται τὸ $x^2 - y^2 = xy^2 - y^2$, ἥτοι τὸ $x = y^2$. διὸ τὸ $y = \sqrt{x}$. ἐν τῇ πρώτῃ ἔν ἐξισώσει τεθέντες ἀντὶ τοῦ y τὴν ἴσην αὐταῖ, ἔσται τὸ $x\sqrt{x} = x + \sqrt{x}$, ἥτοι τὸ $x = \sqrt{x} + 1$. διὸ τὸ $x - 1 = \sqrt{x}$, καὶ τὸ $x = x^2 - 2x + 1$. ἔκβη τὸ $x^2 - 3x + 1 = 0$. καὶ πληρωθέντες τῇ τετραγώνῳ, ἔσεται τὸ $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$. διὰ τὸ $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. καὶ δὲ $y = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 201. Ἰστέον δὲ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, καὶ τῶν ὁμοίων αὐτῇ ἐκθέσεων, εὐρίσκεται ἔτω.

κάθω τὴν ζητημένην ρίζαν ἀναγί τὴν $\Omega + \sqrt{\Psi}$. ἔκῃν

ἔσται τὸ $\Omega + \sqrt{\Psi} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$. διὸ τὸ $\Omega^2 + 2\Omega \cdot$

$\sqrt{\Psi} + \Psi = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. καὶ ὡς τὸ $2\Omega\sqrt{\Psi} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

ἔκῃν ἔσται τὸ $\Omega^2 + \Psi = \frac{3}{2}$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης

ἐξισώσεως, ἵπτι $4\Omega^2\Psi = \frac{5}{4}$, ἔσται τὸ $\Psi = \frac{5}{4 \cdot 4 \cdot \Omega^2}$.

τί ἔν, τὸ Ψ τεθέντος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει τὸ ἴσον αὐτῇ,

ἔσται τὸ $\Omega^2 + \frac{5}{4 \cdot 4 \cdot \Omega^2} = \frac{3}{2}$. διὸ τὸ $\Omega^4 - \frac{3}{2}\Omega^2 = -\frac{5}{4}$.

πληρωθέντος δὲ τῆς τετραγώνου, ἔσται τὸ $\Omega^4 - \frac{3}{2}\Omega^2 +$

$\frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{4}{4}$, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ἐξαχθείσης

ρίζης, ἔσται τὸ $\Omega^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, διὸ τὸ μὲν $\Omega^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$,

τὸ δὲ $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. διὸ τὸ $\frac{5}{4} + \Psi = \frac{3}{2}$, ἥτις τὸ $\Psi =$

$\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ἔκῃν ἡ $\sqrt{\Psi} = \frac{1}{2}$. διὸ τὸ $\Omega + \sqrt{\Psi} =$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. ἡ ἄρα ζητημένη ρίζα ἔσται ἡ $\frac{1}{2} +$

$\frac{1}{2}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΣ'. (*)

§. 202. Ἐυρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἕκαστος τῶ ἐξῆς ἑαυτῷ διδῶ μέρος τὸ ἐπιταχθῆν ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γίνωνται ἴσοι.

Ἐξω ὁ μὲν πρῶτος x , ὁ δὲ δεύτερος y , ὁ δὲ τρίτος z . ἐπιτετάχθω δὲ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ δίδοναι τὸ ἑαυτῷ τρίτον· τὸν δὲ δευτέρου τῷ τρίτῳ, τὸ τέταρτον· καὶ εἴ τι τὸν τρίτον τῷ πρῶτῳ, τὸ πέμπτον.

Τοιγαρὲν ὁ μὲν πρῶτος μετὰ τὴν δόσιν τῷ ἑαυτῷ τρίτῳ ἴσος ἔσται τῷ $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$, λαβὼν δὲ τὸ πέμπτον τῷ τρίτῳ, ἴσος ἔσται τῷ $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}z$. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τὴν δόσιν τῷ τεταρτημόριον αὐτῷ ἴσος ἔσται τῷ $y - \frac{1}{4}y = \frac{3}{4}y$, λαβὼν δὲ τὸ τῷ πρώτῳ τριτημόριον, ἴσος ἔσται τῷ $\frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x$. ὁ δὲ τρίτος δὲς μὲν τὸ πεμπτημόριον, ἴσος ἔσται τῷ $z - \frac{1}{5}z = \frac{4}{5}z$, λαβὼν δὲ τὸ τῷ δευτέρῳ τεταρτημόριον, ἴσος τῷ $\frac{4}{5}z + \frac{1}{4}y$. ἔστι δὲ τὸ $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}z = \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x$, καὶ τὸ $\frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x = \frac{4}{5}z + \frac{1}{4}y$. ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{5}z$. τοθέντος δὲ ἐν τῇ δευτέρῃ ἐξισώσει αὐτῇ τῷ $\frac{1}{3}x$ τῷ ἴσῳ αὐτῷ, ἔσται τὸ $\frac{3}{4}y + \frac{3}{4}y - \frac{1}{5}z = \frac{4}{5}z + \frac{1}{4}y$. διὸ τὸ $z = \frac{5}{4}y$. καὶ τὸ $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4}y$ ἢ τοι τὸ $\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}y$, ἥτοι τὸ $x = \frac{3}{4}y$.

*ΕΛΛ

(*) Τὸ ἐξῆς προβλήματα ἐν τῶν ἀρίστων ἀσέλ.

Ἔστω τὸ $Z=10$. ἔκῃν τὸ μὲν $y=8$, τὸ δὲ $x=12$. Ἔστω τὸ $Z=20$. τὸ μὲν ἄρα $y=16$, τὸ δὲ $x=24$. ἔστω τὸ $Z=30$. τὸ μὲν ἄρα $y=24$, τὸ δὲ $x=36$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΖ'.

203. Ἐυρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὧν τὸ κεφάλαιον σὺν τῷ γινόμενῳ ἴσον ἀριθμῷ δοθῇντι.

Ἔστω ὁ μὲν τῶν ζητεμένων $=x$, ὁ δὲ $=y$, ὁ δὲ ἰσθὺς ἀριθμὸς $=a$.

Τοιγαρὲν ἴσεται τὸ $x+y+xy=a$. τὸ ἄρα $xy+y+x=a-y$, ἥτοι τὸ x . $y+y+1=a-y$. διὸ τὸ $\frac{x}{y}=\frac{a-y}{y+1}$.

$$y+1$$

Ἔστω τὸ μὲν $y=2$, τὸ δὲ $a=30$. ἔκῃν τὸ $x=30-2=28$. καὶ ἔστω τὸ μὲν $y=2$, τὸ δὲ $a=20$.

$$\frac{2+1}{3} \quad \frac{3}{2+1}$$

$$\text{τὸ ἄρα } x = \frac{20-2}{2+1} = 6.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΗ'.

§. 204. Ἐυρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ μὲν κεφάλαιον τῶ πρώτῃ καὶ τῶ δευτέρῃ ἴσον ᾖ τῶ τρίτῳ ἢ δὲ ὑπερσχή, τῶ τετάρτῳ.

Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος $=x$, ὁ δὲ δευτερός $=y$, ὁ δὲ τρίτος $=z$, ὁ δὲ τέταρτος $=\Omega$.

Οἰκῇν τὸ μὲν $x+y=z$, τὸ δὲ $x-y=\Omega$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $x=z-y$, καὶ ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $x=\Omega+y$. διὸ τὸ $z-y=\Omega+y$. ἔστιν τὸ $y=z-\Omega$.

Καίθω τὸ μὲν $Z=8$, τὸ δὲ $\Omega=2$. τὸ μὲν ἄρα
 $y=8-2=3$. τὸ δὲ $x=8-3=5$. Ἔσω τὸ μὲν
 $Z=5$, τὸ δὲ $\Omega=1$. ἄρα τὸ μὲν $y=5-1=4$
 τὸ δὲ $x=5-2=3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΘ'.

§. 205. Ἑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὅπως τὸ ἐξ αὐτῶν
 γινόμενον ἴσον ᾖ κύβῳ, ἢ ἡ ρίζα ἴση τῷ γινομένῳ ὅππῃ
 τῷ πρώτῳ τῶν ζητούμενων ἀριθμῶν, καὶ τῷ τετραγώνῳ
 τῷ δευτέρῳ.

Ἔσω ὁ μὲν πρῶτος $=x$, ὁ δὲ δεύτερος $=y$, καὶ ἡ
 κυβικὴ ρίζα $=\Omega$.

Οὐκ ἔν τὸ μὲν $xy=\Omega^3$, τὸ δὲ $xy^2=\Omega$. καὶ ἐν
 μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως προκύπτει τὸ $x=\frac{\Omega^3}{y}$ ἐν
 δὲ τῆς δευτέρας, τὸ $x=\frac{\Omega}{y^2}$. διὰ τὸ $\frac{\Omega^3}{y}=\frac{\Omega}{y^2}$. τὸ ἄρα
 $y=\frac{1}{\Omega^2}$.

Καίθω τὸ $\Omega=2$. ἄρα τὸ μὲν $y=\frac{1}{4}$, τὸ δὲ $x=$
 32 . ἔσω τὸ $\Omega=3$. τὸ ἄρα $y=\frac{1}{9}$, τὸ δὲ $x=243$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Λ.

§. 206. Ἑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἕτερος τῷ
 τετραγώνῳ τῷ ἑτέρῳ προστεθείς ποιῇ ἀριθμὸν τετρα-
 γωνον, ἢ ἡ πλευρὰ ἴση τῷ τῶν ἀριθμῶν κεφαλαίῳ.

Ἔσω ὁ μὲν τῶν ἀριθμῶν $=x$, ὁ δὲ $=y$, ὁ δὲ τε-
 τραγώνος ἀριθμὸς $=v^2$.

Οὐκ ἔν τὸ μὲν $x^2+y=v^2$, τὸ δὲ $v=x+y$. ἐν
 τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὸ $v=\sqrt{x^2+y}$.
 ἐν τῇ $x+y=\sqrt{x^2+y}$. τὸ ἄρα $x^2+2yx+y^2=$

$\chi^2 + y$, ἥτοι τὸ $2y\chi + y^2 = y$, εἶπεν τὸ $2\chi + y = 1$.
διὸ τὸ $\chi = \frac{1-y}{2}$. ἐξ ὧ δὴλον, ὅτι ἐκάτερος τῶν ζη-

τεμένων ἀριθμῶν ἐλάττωσεν ἐς τὴν μονάδα.

Ἐξω τὸ $y = \frac{1}{2}$. Οὐκ ἔν τὸ $\chi = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{4}$.

Καίτω τὸ $y = \frac{1}{3}$. τὸ ἄρα $\chi = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{1}{3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΛΛ'.

§. 207. Ἐυρεῖν δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους, ὥπως
ἐκατέρω προσεθεὶν τὸ ἐξ αὐτῶν γινόμενον, τετράγωνον
ποιήσῃ.

Ἐξω ὁ μὲν τῶν τετραγώνων $= \chi^2$, ὁ δὲ $= y^2$. τῶν δὲ
κεφαλαίων, τὸ μὲν ποιείτω τὸν v^2 , τὸ δὲ τὸν μ^2 .

Οὐκ ἔν τὸ μὲν $\chi^2 + \chi^2 y^2 = v^2$, τὸ δὲ $y^2 +$
 $\chi^2 y^2 = \mu^2$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως γίνε-
ται τὸ $\chi^2 = \frac{v^2}{y^2 + 1}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας τὸ $\chi^2 =$

$\frac{\mu^2 - y^2}{y^2}$. διὸ τὸ $\frac{v^2}{y^2 + 1} = \frac{\mu^2 - y^2}{y^2}$. ἔκν τὸ $y^2 v^2 =$

$\mu^2 y^2 - y^4 + \mu^2 - y^2$. διὸ τὸ $y^4 + v^2 - \mu^2 + 1$.

$y^2 = \mu^2$. καὶ τεθέντος τῷ $v^2 - \mu^2 + 1 = 2\gamma$, ἔσεται
τὸ $y^4 + 2\gamma y^2 = \mu^2$. καὶ πληρωθέντος τῷ τετραγώνῳ,
τὸ $y^4 + 2\gamma y^2 + \gamma^2 = \gamma^2 + \mu^2$. καὶ τῆς τετραγω-
νικῆς ρίζης ἐξαχθείσης, τὸ $y^2 + \gamma = \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}$. διὸ τὸ
 $y^2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \mu^2}$.

Ἐξω τὸ μὲν $v = 3$, τὸ δὲ $\mu = 2$. ἔκν τὸ $v^2 -$
 $\mu^2 + 1 = 9 - 4 + 1 = 6 = 2\gamma$. τὸ ἄρα $\gamma = 3$. διὸ
τὸ μὲν $y^2 = -3 + \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} - 3$, τὸ δὲ
 $\chi^2 = \frac{9}{\sqrt{13} - 3}$.

Κ Ε Φ. Κ'.

Γεωμετρικῶν τινῶν προβλημάτων
ἐπίλυσις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 208. Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην ὑπερβαίνειαν ΑΒ (τ)
ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ΑΒ = α, τὸ δὲ τῆς τομῆς
σημεῖον, τὸ Γ, ἡ δὲ ΑΓ = χ. καὶ ἔσται δὴ ἡ ΒΓ =
α - χ.

Οὐκ ἔν ὥς α : χ :: χ : α - χ. διὸ τὸ $χ^2 = α^2 -$
αχ. καὶ ἔδὲ προσεθέντος τῷ αχ, ἔσται τὸ $χ^2 +$
αχ = α², καὶ τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, τὸ $χ^2 +$
αχ + $\frac{1}{4}α^2 = α^2 + \frac{1}{4}α^2$, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης
ἐξαχθείσης, τὸ $χ + \frac{1}{2}α = \sqrt{\frac{5}{4}α^2}$. διὸ τὸ $χ =$
 $\sqrt{\frac{5}{4}α^2} - \frac{1}{2}α$.

Ἡ χθω ἐν ἀπὸ τῆ Α πρὸς ὀρθῶς τῇ ΑΒ ἡ ΑΔ =
 $\frac{1}{2}α$. καὶ ἐπιγευχθείσης τῆς ΒΔ, εἰλήφθω τῇ μὲν ΑΔ =
ΒΕ, τῇ δὲ ΔΕ = ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ = χ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΑΒ = α, ἡ δὲ ΑΔ = $\frac{1}{2}α$, ἔσται ἡ
ΒΔ = $\sqrt{α^2 + \frac{1}{4}α^2} = \sqrt{\frac{5}{4}α^2}$. ἀλλ' ἡ ΒΕ = $\frac{1}{2}α$, ἡ
ἄρα ΔΕ = $\sqrt{\frac{5}{4}α^2} - \frac{1}{2}α = χ$. ἀλλὰ τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΑΓ.
ἡ ἄρα ΑΓ = χ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 209. Δοθείσης τῆς περιμέτρου καὶ τῆς ἐπιφα-
νείας τῆς ΑΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου, εὗρεῖν τὴν ὑποτά-
νυσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΓ. χ. 5.

Ἔστω

Ἔστω ἡ μὲν περίμετρος, εἴτεν ἡ $AB + BG + ΓΑ = α$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια $= β^2$, ἡ δὲ ζητούμενη $ΛΓ = χ$. ἡ δὲ ἀπὸ τῆς Β πρὸς ὀρθῶς τῇ $ΛΓ$ ἀχθῆσα $ΒΔ = γ$.

Οὕκ᾽ ἔσται ἡ $AB + BG = α - ΓΑ$, ἥτοι ἡ $AB + BG = α - χ$. καὶ τῷ τετραγώνῳ ἐκατέρωθεν ληφθέντος, ἔσται τὸ $AB^2 + 2AB \cdot BG + BG^2 = α^2 - 2αχ + χ^2$, καὶ τῷ $2AB \cdot BG$ ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος, ἔσται τὸ $AB^2 + BG^2 = α^2 - 2αχ + χ^2 - 2AB \cdot BG$. ἐπεὶ δὲ τὸ $AG^2 = AB^2 + BG^2$, ἥτοι τὸ $χ^2 = α^2 - 2αχ + χ^2 - 2AB \cdot BG$. ἐπὶ δὲ τὸ $αχ$ τὸ $χ^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ (υ) Α. καὶ ἐπὶ τὸ $1 AB \cdot BG$ τὴν ἐπιφάνειαν τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ ἐμφαίνει, ² ἔστιν ἄρα τὸ $β^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Β. διὸ τὸ $γβ^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Γ. ἰὰν ἔν ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσις, ἀντὶ τοῦ $2AB \cdot BG$ τιθῇ τὸ $4β^2$, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ε γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ζ, ἐξ ἧς γνωστὸν τὸ $χ$ ἀριθμητικῶς.

Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ $1 ΒΔ \cdot ΛΓ$ τὴν τῷ τριγώνῳ ἐπιφάνειαν ἐμφαίνει, ² ἔσται ἄρα τὸ $β^2$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Η. διὸ τὸ $γ$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Θ.

Ἐκκείδω ἔν ευθείᾳ ἡ $ΒΔ = α$, (φ) καὶ ἀπὸ τῆς Β ἤχθω πρὸς ὀρθῶς αὐτῇ ἡ $ΕΛ = 2β$. καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΒΛ κατὰ τὸ Ε, καὶ ληφθείσης τῆς $BZ = BE = β$, εὐρεθήτω τετάρτη ἀνάλογον τῶν ΒΔ, ΒΛ, ΒΖ, ἡ ΕΗ. ἥτις δὴ ἴση ἔσται τῷ $\frac{2β^2}{α}$. τετμήσω δὲ

δίχα ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἡ $ΓΙ = ΒΗ = \frac{2β^2}{α}$. καὶ ἔστω δὴ ἡ $ΒΙ = \frac{1}{2} α - \frac{2β^2}{α} = χ$. δίχα ἔν τμηθείσης τῆς ΒΙ κατὰ τὸ Ο, ἔσται ἡ $ΒΟ = \frac{1}{4} χ$. ἰὰν

ἐν

Ἐν τῶν ΒΟ, ΒΖ, τρίτη ἀνάλογον εὐρεθῇ, ἥτις
 τρίτη τῶν $\frac{1}{2}\chi$, καὶ β, ἡ ΒΚ, ἔσεται ἡ $BK = \frac{2\beta^2}{\chi} =$
 γ , ὅπερ ἐστὶ τὸ τῆς τριγώνου ὕψος. ἔαν ἔν ἐπὶ τῆς ΒΙ ἡμι-
 κύκλιον ἀναγραφῇ τὸ ΒΑΙ, καὶ ἀπὸ τῆς Κ τῇ ΒΔ
 ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΚΛ, ἐπιζευχθῶσι δὲ αἱ ΕΛ, ΙΛ,
 ἔσεται τὸ ΒΑΙ τρίγωνον, τὸ ὕψος μὲν ἔχον τὴν $BK =$
 γ , βάσιν δὲ τὴν $BI = \chi$, ἐπιφάνειαν δὲ ἴσην τῷ β^2 .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 210. Δεδείχθη τῆς ἐπιφανείας τῆς ὀρθογωνίου τρι-
 γώνου ΑΕΓ, (χ. 7.) ὅτις ἡ ἑτέρα τῶν τὴν ὀρθήν γωνίαν
 περιεχουσῶν πλευρῶν μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τὴν ὀρ-
 θήν ὑποτείνουσας καὶ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς, εὐρεῖν ἱκά-
 σην τῶν πλευρῶν.

Ἐξω ἡ μὲν ἐπιφάνεια $= a^2$, ἡ δὲ $AB = \gamma$, ἡ δὲ
 $B\Gamma = \chi$. ὥς δὲ $ΑΓ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ$.

Οὐκ ἔν ἔσται ὡς $\chi : \gamma :: \gamma : ΑΓ$. διὸ ἡ $ΑΓ = \frac{\gamma^2}{\chi}$,
 ἐπεὶ δὲ τὸ $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, ἔσεται τὸ $\frac{\gamma^4}{\chi^2}$ ἴσον τοῖς
 ἐν τῷ 1, (χ) ἄγαν τοῖς ἐν τῷ Κ. ἔστι δὲ καὶ τὸ $\frac{1}{2}\chi =$
 a^2 , τὸ ἄρα $\gamma\chi$ ἴσον τῆς ἐν τῷ Α. ἐκ τῆς κατὰ τὸ
 Α δὲ ἐξισώσεως, τῆς τετραγώνου ἱκατέρωθεν ληφθέν-
 τος, ἡ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, πάλ-
 λιν τῆς τετραγώνου ἱκατέρωθεν ληφθέντος. ἔαν ἔν ἂν
 τὶ τῆς $\gamma^2 \chi^2$, καὶ τῆς χ^4 τὰ ἴσα αὐτοῖς τεθῇ ἐν τῇ
 κα.

κατὰ τὸ Κ ἐξίσταται, ἢ κατὰ τὸ Ξ προκύψει, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ο γίνεται, καὶ τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντι, ἢ κατὰ τὸ Η, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑξαχθείσης, ἢ κατὰ τὸ Ρ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Σ, καὶ τῆς ρίζης τῆς τετάρτης δυνάμεως ἑξαχθείσης, ἢ κατὰ τὸ Τ. τεθέντων δὲ ἐν τῇ κατὰ τὸ Κ ἐξίσταται, ἀντὶ τῷ y^4 καὶ τῷ $y^2 \chi^2$ τῶν ἴσων αὐτοῖς τῶν ἐν τοῖς Σ καὶ Μ, ἢ κατὰ τὸ Υ ἐξίσταται γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Φ, καὶ ἐξ αὐτῆς ἢ κατὰ τὸ Χ.

Ἐκκείνω ἔν ἐυθείᾳ ἡ ΑΓ = 2α. (Ψ) καὶ ἀπὸ τῷ Α ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΑΒ = α. καὶ ἐπιτευχθείσης τῆς ΒΒ, εἰλήφθω ἡ ΒΔ = ΒΑ = α, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΓ κατὰ τὸ συνεχές, εἰλήφθω ἡ ΓΕ = ΓΔ. καὶ ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΝΕ ἀναγεγράφεντος ἐπὶ τῆς ΑΕ, ἤχθω ἀπὸ τῷ Γ ἡ ΓΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΕ. καὶ ληφθείσης τῆς μὲν ΓΖ = ΓΝ, τῆς δὲ ΓΗ = ΑΒ = α, ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΗΖ ἡμικύκλιον τὸ ΗΙΖ. καὶ ληφθείσης τῆς ΓΚ = ΓΗ + ΓΒ, ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΚ ἡμικύκλιον τὸ ΑΛΚ. καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΝΓ ἐπὶ τὸ Α, εἰλήφθω ἡ ΓΟ = ΓΑ, καὶ ἀναγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΗΟ ἡμικύκλιον τὸ ΗΜΟ. καὶ ληφθείσης τῆς ΓΦ = ΓΙ, ἐπετευχθῶ ἡ ΦΜ. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΜΓΦ τρίγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον ἐν ᾧ ἡ μὲν ΓΜ = y, ἡ δὲ ΓΦ = χ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΒ = $\sqrt{1\alpha^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{5}$, ἡ δὲ ΒΔ = α, ἡ ἄρα ΓΔ = $\alpha\sqrt{5} - \alpha$. ἀλλὰ τῇ ΓΔ = ΓΕ, ἄρα καὶ ἡ ΓΕ = $\alpha\sqrt{5} - \alpha$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΓ : ΓΝ :: ΓΝ : ΓΕ, ἥτοι ὡς 2α : ΓΝ :: ΓΝ : $\alpha\sqrt{5} - \alpha$, ἡ ἄρα ΓΝ = $\alpha\sqrt{2}\sqrt{5} - \alpha = ΓΖ$. ἀλλ' ὡς ΗΓ : ΓΙ :: ΓΙ : ΓΖ, ἥτω ὡς α : ΓΙ :: ΓΙ : $\alpha\sqrt{2}\sqrt{5} - \alpha$, ἡ ἄρα ΓΙ = $\alpha\sqrt{2}\sqrt{5} - \alpha = \chi$. (ὄρα τὸν XXIV πίν.) ἀλλ' ἡ

(+) III, XIX, σκ. 8.

$\Gamma\Gamma = \Gamma\Phi$. ἄρα καὶ ἡ $\Gamma\Phi = \chi$. ἐπεὶ δὲ ἡ $\Gamma\Gamma = \Gamma\Gamma +$
 $\Gamma\beta = \alpha + \alpha\sqrt{5}$, ὅτι δὲ ὡς $\Lambda\Gamma : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \Gamma\Gamma$, ἥτοι ὡς
 $\alpha\alpha : \Gamma\Lambda :: \Gamma\Lambda : \alpha + \alpha\sqrt{5}$, ἢ ἔτι $\Gamma\Lambda = \sqrt{\alpha + \alpha\sqrt{5}}$
 $\Gamma\Theta$. ἔτι δὲ καὶ ὡς $\Pi\Gamma : \Gamma\Gamma :: \Gamma\Gamma : \Gamma\Theta$, ἥτοι ὡς $\alpha :$
 $\Gamma\Gamma :: \Gamma\Gamma : \alpha\sqrt{\alpha + \alpha\sqrt{5}}$. ἢ ἔτι $\Gamma\Gamma = \alpha\sqrt{\alpha + \alpha\sqrt{5}}$
 $\alpha\sqrt{5} = \gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 211. Τὴν δοθεῖσαν ἐκτείνειν $\Lambda\beta$ (α) τομῇ, ὥστε
 τὰ ἐκτείνε τμήματα ἀντιπεπνύσθαι λόγον ἔχον τῷ
 δοθείσῃ ἐκτείνῃ $\Lambda\Gamma$, $\Pi\Gamma$.

Ἐστω ἡ μὲν $\Lambda\beta = \alpha$, ἡ δὲ $\Lambda\Gamma = \beta$, ἡ δὲ $\Pi\Gamma =$
 γ . καὶ ἐκτείνω τὴν $\Lambda\beta$ κατὰ τὸ ἐκτείναν τμήμα
 κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω ἡ $\beta\Gamma = \chi$. ἐκτείνω ἡ $\Lambda\Gamma = \alpha + \chi$.

Ἔστιν ἄρα ὡς $\Lambda\Gamma : \Lambda\beta :: \Pi\Gamma : \beta\Gamma$, ἥτοι ὡς $\alpha +$
 $\chi : \beta :: \gamma : \chi$. ἐκ τῆς ἀναλογίης δὲ ταύτης ἡ κα-
 τὰ τὸ Ψ (α) ἰξίσις γίνεται ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β ,
 καὶ τῇ τετραγώνῃ πληρωθῆντος, ἡ κατὰ τὸ α , καὶ τῇ
 τετραγωνικῇ ῥίζῃ ἰξασθῆντος, ἡ κατὰ τὸ γ , ἐξ ἧς
 ἡ κατὰ τὸ γ .

Ἐκτείνω ἔτι ἐκτείνῃ ἡ $\Pi\Gamma$, (β) καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν
 $\Pi\Gamma = \beta$, ἡ δὲ $\Pi\Gamma = \gamma$. καὶ ἀναγεγράφοντες τῇ $\Pi\Gamma$
 ἡμικυκλίῳ, ἥχθω ἡ $\Gamma\Gamma$ πρὸς ἐκτείνῃ τῇ $\Pi\Gamma$. καὶ ληφ-
 θείσης τῆς $\Gamma\Gamma = \frac{1}{2}\alpha$, κέντρῳ μὲν τῷ Λ , διαστήματι
 δὲ τῷ $\Lambda\Gamma$, τέξον κύκλῳ γεγραμμένῳ τὸ $\Gamma\Gamma$, καὶ ἥχθω
 ἀπὸ τῇ Γ ἡ $\Gamma\Gamma$ τῇ $\Gamma\Gamma$ παράλληλος, λέγω, ὅτι
 ἡ $\Gamma\Gamma = \chi$.

ἥχθω

(α) Πρ. XIX. γ. 9. (α) Πρ. XXIV. (β) Πρ. XXV. γ. 1.

$\overline{ΔΓ}^2 + \overline{ΓΕ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΔΕ}^2 = αβ + \frac{1}{4}γ^2$. διὸ ἡ $ΔΕ = \sqrt{\frac{1}{4}γ^2 + αβ}$. ἄλλ' ἡ $ΕΗ = ΕΓ = \frac{1}{2}γ$. ἡ ἄρα (ὅρα πίν. XXIV.) $ΔΗ = \sqrt{\frac{1}{4}γ^2 + αβ} - \frac{1}{2}γ = χ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

§. 213. Δοθείσης πλευρᾶς ὀκταγώνου τῆς ΑΗ, (§) εὐρεῖν τὴν ἡμιδιάμετρον τῆ περι αὐτὸ περιγεγραφθεῖσας κύκλου.

Ἔστω ἡ ΑΗ = β, κύκλος δὲ ὁ περι αὐτὸ περιγεγραμμένος ὁ ΑΒΔ, ἔτινος ἡ ζητούμενη ἡμιδιάμετρος ΑΚ = γ. καὶ ἐγγεγραφθῶ εἰς τὸν κύκλον πλευραὶ τετραγώνου ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς κέντρου Κ ἐπὶ τὰ Α, Η, Β σημεῖα ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΗ, ΚΒ.

Οὐκᾶν ἔσται ἡ ΒΚΑ γωνία ὀρθή, ἑκατέρω δὲ τῶν ΗΚΑ, ΗΚΒ ἡμίσεια ὀρθῆς. διὸ δήλον, ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΖΑ, ΚΖΒ ὀρθῆ, καὶ ἡ ΑΖ = ΖΒ, καὶ ἡ ΚΑΖ ἡμίσεια ὀρθῆς. ἄρα καὶ ἡ ΖΚ = ΖΑ. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΒΚ}^2 + \overline{ΑΚ}^2 = 2\overline{ΑΚ}^2 = 2γ^2$, ἔσται τὸ $\overline{ΑΖ}^2 = \frac{2}{2}γ^2 = \frac{1}{2}γ^2$. ἡ ἄρα ΑΖ = ΖΚ = $\sqrt{\frac{1}{2}γ^2}$. διὸ ἡ ΗΖ = $γ - \sqrt{\frac{1}{2}γ^2}$. ἐπεὶ δὲ $\overline{ΑΗ}^2 = \overline{ΑΖ}^2 + \overline{ΗΖ}^2$, ἐκ τούτου ἄρα

προκύπτει ἡ κατὰ τὸ θ ἐξίσωσις, (Πίν. XXIV.) ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ ι, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ κ γίνεται. καὶ λαφύδντων ἑκατέρωθεν, τῶν τετραγώνων, ἡ κατὰ τὸ λ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ μ, καὶ τῆς τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ ν, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ ξ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ο, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης πάλιν ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ π.

Ἐπὶ

Ἐπὶ τῆς τετταγώνου ἐν πλευρᾷ ΑΗ, (Πλ. XXV. χ. 4.) ἀναγεγράφω ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἡχθῶ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΑΗ ἢ ΚΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΔ. καὶ ἐκβληθεῖσιν τῶν ΑΗ, ΚΔ κατὰ τὸ συνεχές, εἰλήφθω ἡ ΑΕ = 2ΑΗ + 2ΗΔ, καὶ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΕ τετταγώνου ἡμικυκλίου, ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. λέγω ὅτι ἡ ΑΓ = γ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΗ = β, ἡ ἄρα ΚΗ = ΚΔ = $\frac{1}{2}\beta$. ἡ ἄρα ΗΔ = $\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\beta^2}$. ἡ ἄρα ΑΕ = 2ΑΗ + 2ΗΔ = $2\beta + 2\sqrt{\frac{1}{2}\beta^2}$. ἐπεζευχθείσης δὲ τῆς ΓΕ, εἰσὶν ὡς ΑΕ : ΑΓ :: ΑΓ : ΑΚ, ἥτοι ὡς $2\beta + 2\sqrt{\frac{1}{2}\beta^2}$: ΑΓ :: ΑΓ : $\frac{1}{2}\beta$. διὸ ἡ ΑΓ = $\sqrt{\beta^2 + \beta\sqrt{\frac{1}{2}\beta^2}} = \gamma$. ὁ ἐν κέντρῳ τῷ Γ καὶ διαστήματι τῷ ΓΑ γραφόμενος κύκλος εἰσὶν ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 214. Δοθείσης πλευρᾷς δεκαγώνου τῆς ΑΒ, (σχ. 5.) εὐρεῖν τὴν ἡμιδιάμετρον τετταγώνου περὶ αὐτὸ περιγεγραφομένην κύκλου.

Ἐστω ἡ μὲν ΑΒ = α, κύκλος δὲ ὁ περὶ τὸ δεκάγωνον περιγεγραφοσόμενος ὁ ΑΒΕ, ἕτινος ἡ ζητούμενη ἡμιάμετρος ΑΚ = χ. ἐκβληθείσης δὲ τῆς ΒΑ, καὶ ληφθείσης τῆς ΑΔ = ΑΚ, ἐπεζεύχθω ἡ ΚΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια δεκατημόριον τῆς ὅλης εἰσὶν, ἡ ἄρα ΑΚΒ γωνία ἴση μοίρας 36. ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΒΑ = ΚΑΒ, ἑκάτερα ἄρα αὐτῶν ἴση μοίρας 72. ἡ ἄρα ΔΑΚ ἴση μοίρας

ρως 108. ἔστι δὲ ἡ $\Delta\text{ΚΔ} = \Delta\text{ΔΚ}$, ἑκατέρω ἄρα αὐ-
τῶν ἴση μοίρῃς 56, ὅλη δὲ ἡ $\Delta\text{ΚΒ}$ ἴση μοίρῃς 72.
ἔκιν τὰ $\Delta\text{ΚΒ}$, ΑΚΒ τρίγωνα ὁμοιά εἰσιν. ὡς ἄρα $\Delta\text{Β}$ ·
 $\text{ΒΚ} :: \text{ΑΚ} : \text{ΑΒ}$, ἥτοι ὡς $\alpha + \chi : \chi :: \chi : \alpha$. ἐκ τῆς
ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις γίνεται (η)
ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ σ, καὶ τῷ τετραγώνῳ πληρωθίντος,
ἡ κατὰ τὸ τ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐξαχθού-
σης ἡ κατὰ τὸ υ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ φ.

Ἀνασάτω ἔν ἀπὸ τῷ Α (9) τῷ ΑΒ πλευρᾷ τῷ δεκα-
γώνῳ πρὸς ὀρθῶς ἡ $\text{ΑΓ} = \frac{1}{2}\alpha$. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς
 ΓΒ , εἰληφθῶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐκβληθείσης ἡ $\text{ΓΚ} = \text{ΓΒ}$,
λέγω ὅτι ἡ $\text{ΚΔ} = \chi$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\text{ΓΒ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2$, ἥτοι τὸ $\text{ΓΒ}^2 =$
 $\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha^2$. ἡ ἄρα $\text{ΓΒ} = \text{ΓΚ} = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2}$. διὸ ἡ
 $\text{ΚΔ} = \alpha + \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2} = \chi$. ὁ κέντρον ἄρα τῷ Κ, διαστή-
ματι δὲ τῷ ΚΑ γραφόμενος κύκλος, ἔσται ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

§. 215. Δοθείσης τῆς ἡμιδιαμέτρου ΑΚ (χ. 7.) τῷ ΑΒΓ
κύκλῳ, καὶ τῆς τῷ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης δεκαγών-
ου πλευρᾶς ΑΗ, τὴν πλευρὰν εὐρεῖν τῷ εἰς αὐτὴν
ἐγγεγραφθεὶς πενταγώνῳ.

Ἐστω ἡ μὲν $\text{ΑΚ} = \alpha$, ἡ δὲ $\text{ΑΗ} = \beta$, ἡ δὲ ζητού-
μενη τῷ πενταγώνῳ πλευρὰ $\text{ΑΒ} = \chi$. ἐπιζευχθαι-
σῶν ἔν τῶν ΚΒ, ΚΗ, αἱ γωνίαι ΑΚΗ , ΗΚΒ ἴσαι ἀλλή-
λαις ἔσονται διὰ τὸ δίχα τετμημένον εἶναι τὸ ΑΒ τέ-
τον κατὰ τὸ Η. ἐξ ὧς δὲ ὅλον, ὅτι ἡ $\text{ΒΖ} = \text{ΑΖ} = \frac{1}{2}\chi$
καὶ

καὶ ἡ $\Lambda ΖΚ$ γωνία ὀρθή. διὸ τὸ $\overline{ΑΚ}^2 = \overline{ΑΖ}^2 + \overline{ΖΚ}^2$,
ἥτοι τὸ $\alpha^2 = \frac{1}{4}\chi^2 + \overline{ΖΚ}^2$. τὸ ἄρα $\overline{ΖΚ}^2 = \alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2$.

διὸ ἡ $\overline{ΖΚ} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2}$. ἡ ἄρα $\overline{ΗΖ} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2}$.

ἐπεὶ δὲ $\overline{ΑΗ}^2 = \overline{ΗΖ}^2 + \overline{ΑΖ}^2$, ἐκ τούτου ἄρα ἡ κατὰ τὸ
 Λ ἑξήκοσις γίνεται, (ι) ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ B ,
ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Γ , καὶ τῶν τετραγώνων ἐκατέρωθεν
ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ Δ , ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ E , καὶ
ἐξ αὐτῆς ἡ κατὰ τὸ Z , καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης
ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ H .

Ἐκείνου ἔν εὐθείας ἡ $\Gamma H = 2AK = 2\alpha$, (κ) καὶ ἀνα-
γράφοντας τῇ $\Gamma A H$ ἡμικυκλίῳ ἐφημέριῳ ἡ $AH = \beta$,
καὶ ἐπιτελείω ἡ ΓA , καὶ ληφθείσης τῆς $\Gamma Z = \beta$,
ἀπὸ μὲν τῆς κέντρος K ἐπὶ τὸ A ἐπεξεύχθω ἡ KA ,
ἐπὶ δὲ τὸ Z ἕλθω τῇ KA παράλληλος ἡ ZB . Λέγω
ὅτι ἡ ὑπερίνη τῶν πενταγώνων πλευρά ἐστὶν ἡ $GB = \chi$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΓΗ}^2 = \overline{ΑΗ}^2 + \overline{ΓΑ}^2$, ἔσται τὸ $4\alpha^2 =$
 $\beta^2 + \overline{ΓΑ}^2$. διὸ τὸ $4\alpha^2 - \beta^2 = \overline{ΓΑ}^2$. ἡ ἄρα $\overline{ΓΑ} = \sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}$.
ἐπεὶ δὲ ὡς $\overline{ΓΚ} : \overline{ΓΖ} :: \overline{ΓΑ} : \overline{ΓΒ}$, ἥτοι ὡς $\alpha : \beta ::$
 $\sqrt{4\alpha^2 - \beta^2} : \overline{ΓΒ}$, ἔσται ἄρα ἡ $\overline{ΓΒ} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}$
 $\sqrt{\beta^2} = \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

§. 216. Δεθέντος τῆς κεφαλαίας τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν
τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων $ΑΒΓ$ (χ. 9.) περιεχουσῶν πλευρῶν,
 $ΑΒ, ΒΓ$, καὶ τῆς ὕψους $ΒΔ$, εὑρεῖν ἐκάστην τῶν πλευρῶν.

Ἔστω τὸ μὲν $ΑΒ + ΒΓ = \alpha$, τὸ δὲ $ΕΔ = \beta$, ἡ δὲ
 $ΑΓ = \chi$. ἔστω δὲ καὶ $ΑΒ - ΒΓ = y$.

Ἐπεὶ ἔν τὸ $ΑΒ + ΒΓ = \alpha$, κοινῶς ἀφαιρεθέντος τῇ
 $ΒΓ$, ἔσται $ΑΒ - ΒΓ = \alpha - 2ΒΓ$. ἀλλ' $ΑΒ - ΒΓ = y$.
τοῦτο

Θ 4

τὸ ἄρα $y = a - 2BG$. διὸ τὸ $2BG = a - y$, καὶ τὸ $BG = \frac{a - y}{2}$. τεθέντος δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντὶ τῆς BG τῆς ἄρτι εὐρεθέντος αὐτῶ ἴσος, ἔσεται τὸ $AB + \frac{a - y}{2} = a$, ἥτοι τὸ $AB = \frac{a + y}{2}$. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $AG^2 = AB^2 + BG^2$, ὡς δὲ $AB : BD :: AG : BG$, ἐκ τούτου ἄρα γίνονται αἱ κατὰ τὰ Θ καὶ Ι ἐξισώσεις. (λ) καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ Θ ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ἐν τῷ Κ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Λ· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ι ἡ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Λ ἡ ἐν τῷ Ν, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ξ· καὶ τῆς τετραγώνου πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Ο, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐξαχθείσης, ἡ ἐν τῷ Π, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Ρ.

Ευθεία τῇ $ΔΓ = α$ (μ) ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔΕ = β$, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς $ΕΓ$, εἰλήφθω τῇ μὲν $ΒΔ = ΕΖ$, τῇ δὲ $ΓΖ = ΓΑ$, καὶ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ τῆς $ΑΒΓ$ ἡμικυκλίου, ἤχθω ἡ $ΕΒ$ τῇ $ΔΓ$ παράλληλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΓΒ$. λέγω ὅτι τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνόν ἐστι τὸ ζητούμενον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $ΕΓ^2 = ΔΓ^2 + ΕΔ^2$, ἥτοι τὸ $ΕΓ^2 = α^2 + β^2$, ἡ ἄρα $ΕΓ = \sqrt{α^2 + β^2}$. ἀλλ' ἡ $ΕΖ = ΕΔ = β$, ἡ ἄρα $ΓΖ = \sqrt{α^2 + β^2} - β$. ἀλλὰ τῇ $ΓΖ = ΑΓ$, ἄρα ἡ $ΑΓ = \sqrt{α^2 + β^2} - β = χ$. ἡ ἄρα βάσις τῆς ζητούμενης τριγώνου ἐστὶν ἡ $ΑΓ$, ὕψος δὲ ἡ $ΕΔ = β$. διὸ δῆλον ὅτι αἱ λοιπαὶ τῆς τριγώνου πλευραὶ εἰσιν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 217. Δοθείσης τῆς ΒΓ, (σχ. II.) τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας τῆς ΒΑΓ ὀρθογωνίας τριγώνου καὶ τῆς τῶν λοιπῶν πλευρῶν διαφορᾶς ΔΓ, ἐκατέραν τῶν πλευρῶν εὐρεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν $BΓ = γ$, ἡ δὲ $ΔΓ = α$, ἔστω δὲ καὶ ἡ $ΑΒ + ΑΓ = χ$. ἔκυν ἔσται ἡ $ΑΒ + ΑΓ = 2χ$, καὶ κεινῆς ² ἀφαιρεθείσης τῆς $2ΑΒ$, ἔσται ἡ $ΑΓ - ΑΒ = 2χ - 2ΑΒ$. ἀλλὰ ἡ $ΑΓ - ΑΒ = ΔΓ = α$, ἄρα τὸ $α = 2χ - 2ΑΒ$. διὸ ἡ $2ΑΒ = 2χ - α$. ἡ ἄρα $ΑΒ = χ - \frac{1}{2}α$. | τεθέντος δὲ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσεσι ἀντὶ τῆς $ΑΒ$ ² τῆς ἄρτι εὐρεθέντος αὐτῇ ἴσθ, ἔσται ἡ $ΑΓ = χ + \frac{1}{2}α$.

Ἔστι δὲ $BΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2$, διὸ ἡ κατὰ τὸ Σ (ν) ἐξισώσεσι γίνεται, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ Τ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ κατὰ τὸ Φ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ Χ.

Ἐκκείδω ἐν εὐθείᾳ ἡ $ΑΖ = \frac{1}{2}γ$, (ξ) καὶ ἀπὸ τῆς Ζ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς καὶ ἴση αὐτῇ ² ἡ ΖΕ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΕ. καὶ ἡμικυκλίᾳ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΑΕ τῆς ΑΖΕ, ἐφημέρω εὐθείᾳ ἡ ΕΘ = $\frac{1}{2}α$, καὶ εἰλήφθω ἐκατέρω τῶν ΓΘ, ΘΔ ἴση τῇ ΕΘ. ² καὶ ἔσται δὴ ἡ μὲν ΑΘ = χ ἡ δὲ ΑΓ, ἡ μείζων τῶν πλευρῶν ἡ δὲ ΑΒ, ἡ ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $ΑΕ^2 = ΑΖ^2 + ΕΖ^2$, ἥτοι τὸ $ΑΕ^2 = \frac{1}{4}γ^2 + \frac{1}{4}γ^2$, ἡ ἄρα $ΑΕ = \sqrt{\frac{1}{2}γ^2}$. πάλιν ἐπειδὴ τὸ $ΑΕ^2 = ΑΘ^2 + ΕΘ^2$, ἥτοι τὸ $\frac{1}{2}γ^2 = ΑΘ^2 + \frac{1}{4}α^2$, ἡ ἄρα $ΑΘ = \sqrt{\frac{1}{2}γ^2 - \frac{1}{4}α^2} = χ$. ἔστι δὲ ἡ

Θ 5

Θ Γ

$$\begin{aligned}\Theta\Gamma &= \Gamma\Theta = \frac{1}{2}\alpha, \text{ ἡ ἄρα } \Lambda\Gamma = \chi + \frac{1}{2}\alpha, \text{ ἡ δὲ } \Lambda\beta = \\ \Lambda\Gamma - \Delta\Gamma &= \Lambda\Delta = \Lambda\Theta - \Delta\Theta = \chi - \frac{1}{2}\alpha.\end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

§. 918. Εἰς τὸν δοθέντα $\Lambda\text{ΚΙ}$ κύκλον (ο) εὐθεῖαν δοθείσαν τὴν ΚΛ ἐναρμόσαι, ἥτις ἐκβληθεῖσα διὰ τῷ δοθέντος σημείου Η ἤξει, ἀφ' ἧς ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη ΗΙ ἦχθῃ.

Ἔστω ἡ μὲν $\text{ΚΛ} = \alpha$, ἡ δὲ $\text{ΗΙ} = \beta$, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΚΑ ἡκίτω ἐπὶ τὸ Η . καὶ ἔστω ἡ $\text{ΗΛ} = y$. ἔκκει ἔστι ἡ $\text{ΗΚ} = y + \alpha$.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ΗΚ . $\text{ΗΛ} = \overline{\text{ΗΙ}}^2$, ἐκ τούτου ἡ κατὰ τὸ Ψ ἐξίσωσις γίνεται. (π) καὶ πληρωθέντος τῷ τετραγώνῳ ἡ κατὰ τὸ $\Delta\lambda$, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κατὰ τὸ α , ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ β .

Ἰχθῶ ἐν ἀπὸ τῷ $\text{Ι}(\rho)$ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΗΙ ἡ $\text{ΙΜ} = \frac{1}{2}\alpha$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΜ . καὶ ληφθείσης τῆς $\text{ΜΝ} = \text{ΜΙ}$, κέντρῳ τῷ Η καὶ διαστήματι τῷ ΗΝ γεγραφθῶ τέξον κύκλου τὸ ΝΛ , λέγω ὅτι ἡ $\text{ΗΛ} = y$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{\text{ΗΜ}}^2 = \overline{\text{ΗΙ}}^2 + \overline{\text{ΙΜ}}^2$, ἥτοι τὸ $\overline{\text{ΗΜ}}^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2$, ἔσεται ἡ $\text{ΗΜ} = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2}$. ἔστι δὲ ἡ $\text{ΜΝ} = \text{ΜΙ} = \frac{1}{2}\alpha$, ἡ ἄρα $\text{ΗΝ} = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}\alpha$. ἀλλὰ τῇ $\text{ΗΝ} = \text{ΗΛ}$. ἡ ἄρα $\text{ΗΛ} = \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4}\alpha^2} - \frac{1}{2}\alpha = y$. ἐκ τούτου δὴ δῆλον, ὅτι τὸ Λ ἐστὶ τὸ σημῆον. Ἰφ' ὃ ἐπιξευχθείσης τῆς ΗΛ , καὶ ἐκβληθείσης, ἔσται ἡ ΗΛΚ ἡ ζητούμενη.

ΠΡΟ-

(ο) Πλ. XXVII. §. 1. (π) Πλ. XXVI. (ρ) Πλ. XXVII. §. 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

§. 219. 'Ευρεῖν δύο τετράγωνα, ἀντιπεπνύστως μὲν ἀνάλογον τοῖς διδῶσι τετραγώνοις, ὁμοῦ δὲ ληφθέντα ἴσα διδύντι τετραγώνῳ.

Ἐστω τὰ μὲν δοθέντα τετράγωνα τὰ, β^2 , γ^2 , τὸ δὲ τῶν ζητεμένων κεφάλαιον α^2 , ἐν δὲ τῶν ζητεμένων τὸ γ^2 , ἔκέν τὸ ἕτερον εἶναι $\alpha^2 - \gamma^2$.

Ἔσται δὴ ἔν ὥς $\gamma^2 : \beta^2 :: \gamma^2 : \alpha^2 - \gamma^2$. ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἢ κατὰ τὸ γ (σ) ἐξίσωσις γίγνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ δ, καὶ τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἢ κατὰ τὸ ε, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐξαχθείσης, ἢ κατὰ τὸ ζ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ η, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης πάλιν ἐξαχθείσης, ἢ κατὰ τὸ θ.

Ἐκκέδω ἔν ευθεῖα τις ἡ ΑΔ, (τ) καὶ ἑτέρα ἡ ΑΘ γωνίαν περιέχουσα τυχεύσαν τὴν ΘΛΔ. καὶ τῇ ΑΒ = α , ΒΔ = γ , ΑΓ = β , τετάρτη ἀνάλογον εὐρεθήτω ἡ ΓΕ, ἥτις ἴση εἶναι βγ. καὶ ληφθείσης τῆς ΓΖ = $\frac{1}{\alpha}$, καὶ ἀναγραφέντος α ἐπ' αὐτῆς τῷ ΖΗΓ ἡμικυκλίῳ, ^α ἐνημέδω εἰς αὐτὸν ευθεῖα ἡ ΓΗ = ΓΕ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΖΗ, εἰλήφθω ἡ μὲν ΖΙ = ΖΗ, ἡ δὲ ΓΘ = α καὶ ἡμικυκλίῳ ἀναγραφέντος ἐπὶ τῆς ΙΘ τῷ ΙΚΘ, ἤχθω ἀπὸ τῷ Γ ἡ ΓΚ πρὸς ἐξθὰς τῇ ΙΘ. καὶ τῷ ΓΛΘ ἡμικυκλίῳ ἐπὶ τῆς ΓΘ ἀναγραφέντος, ἐναρμολύσας τε τῆς ΓΛ = ΓΚ, ἐπεζεύχθω ἡ ΘΛ. λέγω ἔν ὅτι ἡ μὲν ΓΚ = γ , ἡ δὲ ΛΘ = $\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΖΓ}^2 = \overline{ΖΗ}^2 + \overline{ΓΗ}^2$, ἥτοι $\frac{1}{\alpha^2} = \overline{ΖΗ}^2 + \frac{\beta^2 \gamma^2}{\alpha^2}$, ἔσται ἡ ΖΗ = $\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^4 - \beta^2 \gamma^2} = ΖΙ$.

ἢ

ἡ ἄρα $\Gamma\Gamma = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2}$. καὶ ἐπεὶ ὡς $\Gamma\Gamma$:

$\Gamma\Gamma :: \Gamma\Gamma : \Gamma\Theta$, ἥτοι ὡς $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2} : \Gamma\Gamma ::$

$\Gamma\Gamma : \alpha$, ἡ ἄρα $\Gamma\Gamma = \sqrt{\frac{1}{2}\alpha^2 - \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2\gamma^2}} =$

$\gamma = \Gamma\Lambda$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\Gamma\Theta^2 = \Gamma\Lambda^2 + \Lambda\Theta^2$, ἥτοι τὸ $\alpha^2 =$
 $\gamma^2 + \Lambda\Theta^2$, ἡ ἄρα $\Lambda\Theta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$. ἐκ τούτου δὲ
 δῆλον, ὅτι τὸ μὲν τῶν ζητημένων τετραγώνων εἰς τὸ
 ἀπὸ τῆς $\Gamma\Lambda$ τὸ δὲ, τὸ ἀπὸ τῆς $\Lambda\Theta$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

§. 210. Ἐκ τῆς γωνίας Γ (σχ. 3.) τῇ δοθέντος ῥόμβου
 $\Lambda\Gamma\Delta\Β$ εὐθεῖαν ἀγαγῶν, συμβαλέσσαν τῇ ἐτέρᾳ τῶν τῷ
 ῥόμβου πλευρῶν ἐκβληθείσῃ κατὰ τι σημεῖον τὸ Z , ὥστε
 τὴν ἐκτὸς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῷ ῥόμβου ἀπολαμβανομένην
 EZ ἴσην εἶναι εὐθείᾳ δοθείσῃ.

Ἦχθω ἡ διαγωνίος $\Gamma\Β$, καὶ συνεχάτω γωνία ἡ $\Gamma\epsilon\Phi =$
 $\Gamma\Β Z$, καὶ συμβαλέτω ἡ $E\Phi$ τῇ διαγωνίᾳ $\Gamma\Β$ ἐκβλη-
 θείσῃ κατὰ τὸ Φ .

Ἔστω δὲ ἡ μὲν $\Lambda\Β = \beta$, ἡ δὲ $\Gamma\Β = \gamma$, ἡ δὲ $EZ =$
 α , ἡ δὲ $\Β Z = Z$, ἡ δὲ $\Gamma\Phi = \gamma$. ἔκθεν ἡ $\Phi\Β = \gamma - \gamma$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ $\Gamma\Β Z$, $\Gamma\epsilon\Phi$ τρίγωνα ἔχει τὴν μὲν γω-
 νίαν $\Gamma\Β Z = \Gamma\epsilon\Phi$, τὴν δὲ $\Β\Gamma Z$ κοινὴν, ὅμοια ἄρα εἰσὶ.
 πάλιν ἐπεὶ ἡ $\Lambda\epsilon\Gamma = \Gamma\Β\Delta$, (διὰ τὸ τῷ ῥόμβου ἰσὴ
 πλευρὸν) ἡ δὲ $\Lambda\Β\Gamma = \Phi\Β Z$, ἄρα καὶ ἡ $\Gamma\Β\Delta = \Phi\Β Z$,
 κοινῇ δὲ προσκειμένης τῆς $E\Β Z$, ἔσται ἡ $\Phi\Β E =$
 $\Gamma\Β Z$. ἀλλ' ἡ $\Gamma\Β Z = \Gamma\epsilon\Phi$, ἄρα καὶ ἡ $\Gamma\epsilon\Phi = \Phi\Β E$.
 ἔχεισι δὲ τὰ τρίγωνα $\Gamma\epsilon\Phi$, $\Β\epsilon\Phi$, καὶ τὴν πρὸς τῷ
 Φ γωνίαν κοινὴν, ὅμοια ἄρα εἰσὶν. ἐπεὶ δὲ ὡς $Z\epsilon :$
 $Z\epsilon :: \Β\Delta : E\Gamma$, ἥτοι ὡς $Z : \alpha :: \beta : E\Gamma$, (παράλλη-
 λος γὰρ ἡ $\Β E$ τῇ $\Lambda\Gamma$ διὰ τὸν ῥόμβον) ἔσται ἄρα

ἢ $ΕΓ = \frac{αβ}{z}$. ἔστι δὲ καὶ ὡς $ΓΒ : ΕΖ :: ΓΕ : ΕΦ$, ἥτοι
 ὡς $γ : 1 :: \frac{αβ}{z} : ΕΦ$, ἢ ἄρα $ΕΦ = \frac{αβz}{γz} = \frac{αβ}{γ}$. ἔπει-
 δὲ καὶ ὡς $ΓΦ : ΦΕ :: ΦΕ : ΦΒ$, ἥτις ὡς $γ : \frac{αβ}{γ} ::$
 $\frac{αβ}{γ} : γ - γ$, ἐκ τούτων ἄρα ἢ κατὰ τὸ ἐξίσωσις (υ) γί-
 νεται, καὶ πληρωθέντος τῆς τετραγώνου, ἢ κατὰ τὸ
 κ, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἐξαχθείσης, ἢ κατὰ
 τὸ λ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ μ.

Ἐκβεβλήθω ἐν ἡ διαγώνιος ΒΓ, (Φ) καὶ ληφθείσης
 τῆς ΒΜ = α, ἡχθῶ ἀπὸ τῆς Μ ἡ ΜΛ τῇ ΓΑ πα-
 ράλληλος, δίχα δὲ τμηθείσης τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Ν,
 ἀναστὰς ἀπὸ τῆς Γ ἡ ΓΘ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΓΒ καὶ
 ἴση τῇ ΛΜ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΝΟ. ληφθείσης δὲ τῆς
 ΝΦ = ΝΟ, κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΦΕ
 γεγραφθῶ τόξον κύκλου τέμνον τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Ε.
 καὶ ἔσται δὴ ἡ ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ Ε ἐπιζευγνυμένη καὶ
 ἐκβαλλομένη, ἧς τὸ μέρος ΕΖ τὸ ζητούμενον.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ΒΓ : ΓΑ :: ΒΜ : ΜΛ, ἥτοι ὡς $γ :$
 $β :: α : ΜΛ$, ἔσται ἡ $ΜΛ = ΓΟ = \frac{αβ}{γ}$. ἔστι δὲ τὸ
 $ΟΝ^2 = ΟΓ^2 + ΓΝ^2$, ἥτοι τὸ $ΟΝ^2 = \frac{α^2 β^2}{γ^2} + \frac{1}{4} γ^2$,
 ἢ ἄρα $ΟΝ = \frac{1}{γ} \sqrt{\frac{1}{4} γ^4 + α^2 β^2} = ΝΦ$. ἢ ἄρα $ΓΦ =$
 $\frac{1}{2} γ + \frac{1}{γ} \sqrt{\frac{1}{4} γ^4 + α^2 β^2} = γ$. ἢ δὲ $ΦΕ = ΛΜ$. ἔκα-
 τέρα γὰρ ἴση τῷ $\frac{αβ}{γ}$.

ΚΕΦ.

Κ Ε Φ. ΚΑ΄.

Περὶ τῆς καλαμένης ὑψηλοτέρας Γεωμετρίας, καὶ πρῶτον περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐμφαινουσῶν τὰς τῶ Κώνε τομάς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§ 221. Ὑψηλοτέραν εἰώθασι καλεῖν Γεωμετρίαν τὴν περὶ τε τῶν Κώνε τομῶν καὶ ἄλλων διαλαμβάνουσαν καμπύλων, περὶ ὧν ἔδωκ περιέχει ἡ σοιχαστὴς Γεωμετρία, καὶ οἱ ὧν διάφορα ἐπιλύεται προβλήματα, διὰ τῶν γεωμετρικῶν σοιχείων μηδαμῶς ἐπιλύσιμα. ἅπαντα δὲ τὰ ἐξῆς τῆδε τῶ βιβλίου κεφάλαια, τὰ περὶ τῆς ὑψηλοτέρας ἐμπεριέχει Γεωμετρίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.

§. 222. Τὴν τρίγωνον ἐμφαίνουσαν ἐξίσωσιν εὐρεῖν.

Ἔστω σύζυγα τρίγωνα τὰ ΓΒΑ, ΓΕΔ, (χ) τὰ ἀπὸ τοῦ μῆς διὰ τῶ ἑξέτος συζυγῶν Κώνων γενόμενα. καὶ εἰ λήψω ἀπὸ τῆς τῶ Κώνε πλευρᾶς ΓΑ ἀποτετμημένη ἡ ΓΖ, καὶ ἀπὸ τῆς Ζ τεταχθῶ, εἴτεν ἡ χθω τῇ τῆς βύσεως τῶ Κώνε διαμέτρῳ ΑΒ παρὰλληλος ἡ ΖΗ καὶ ἔστω ἡ μὲν ΓΑ = α, ἡ δὲ ΑΒ = β, ἡ δὲ ΓΖ = χ, ἡ δὲ ΖΗ = γ.

Καὶ εἶπε ὡς ΓΑ : ΑΒ :: ΓΖ : ΖΗ, ἥτοι ὡς α : β :: χ : γ, προκύψει ἄρα ἡ κατὰ τὸ ν ἐξίσωσις. (ψ)

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ληφθείσης τῆς μὲν ἀποτετμημένης ΓΚ = — χ, τῆς δὲ τεταγμένης ΚΘ = — γ, ἔσται ὡς α : β :: — χ : — γ. ἐξ ὧ γίνεται ἡ ἐν τῷ ξ ἐξίσωσις, ἡ αὐτὴ ἔσα τῇ κατὰ τὸ ν.

Ἦ ἐν τῷ ν ἄρα ἐξίσωσις ἡ ζητούμενη εἰσιν, ἡ τριγώνον ἐμφαίνουσα.

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 223. Ἡ τρίγωνον ἄρα ἐμφαίνεσθαι ἔξισωσις δύο ἀγνώστα περιέχει, ὧν ἐκάτερον μονάξιν μὲν ἔχει ἐκδοῖσθαι, γνωστὴν δὲ ἐκδοῖσθαι πολλαπλασιασθῆναι, ἢ συμ-
πράκτεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 224. Ἐάν ἔν ἐκ τῶν τῷ προτεθέντος ἡμῶν προβ-
λήματος συνθηκῶν ὁμοία τῇ ἐν τῷ ν προκύψῃ ἐξίσω-
σις, ἢ τέττε ἐπίλυσις, εἴτεν ἢ τῶν ἀγνώστων ἔυρεσις,
ἀπὸ τριγώνου συστάσεως ἡρτηται. ἔχθασων γὰρ τῶν
ΓΑ, ΑΒ, ἐκδοῖσθαι, (ω) γωνίαν περιεχουσὴν τὴν τυχεύσαν,
ὧν ἢ μὲν ἴση α, ἢ δὲ β, ἐκίτευχθῶσις τε τῆς ΓΒ,
καὶ μέγεθς τυχόντος τῆς ΓΑ ληφθῶντος, οἷον τῷ $\Gamma\lambda = \chi$,
(ἀέριστα γὰρ τὰ τοιαῦτα προβλήματα) ἢ ἀπὸ τῷ
πέρατος Ζ ἀγομένη παρὰλληλος τῇ ΑΒ, ἥτοι ἢ ΖΗ,
ἴση ἐστὶ τῷ υ. ὁμοίως ἐκβληθῶσιν τῶν ΑΓ, ΕΓ, καὶ
ληφθῶσις τῆς ΓΚ = — χ, ἔσεται ἢ ἀπὸ τῷ Κ τῇ
ΑΒ ἀγομένη παρὰλληλος, ἥτοι ἢ ΚΘ = — υ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 225. Ἐνίοτε ἢ ἐκ τῶν συνθηκῶν τῷ προβλήμα-
τος συσταθῆσα ἐξίσωσις ἐκ ἑστὶ κατὰ πάντα ὁμοία τῇ
ἐν τῷ ν, καίπερ τρίγωνον ἐμφαίνεσθαι μεταβάλλεται
δὲ ταῖς εἰρημέναις (§. 110—115.) μεθόδοις εἰς ἐτέ-
ραν ἐντελῶς αὐτῇ ὁμοίαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 226. Οἷον ἢ ἐν τῷ ο ἐξίσωσις (Πίν. XXVI.) εἰς
ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ ν μεταβάλλεται ὕτως· Ἐπεὶ ἢ ἐν τῷ ο ἢ
αὐτῇ ἐστὶ τῇ ἐν τῷ π, κείδω τὸ μὲν $\gamma^2 - \gamma = \lambda$, τὸ
δὲ $\chi + \mu = \Omega$. τεθήτω δὲ ἀντὶ μὲν $\frac{\gamma^2}{\alpha}$ τῷ $\gamma^2 - \gamma$ τὸ
Ζ, ἀντὶ δὲ τῷ $\chi + \mu$ τὸ Ω ἐν τῇ κατὰ τὸ π α ἐξίσω-
σει.

σαι. ἔκῃν ἢ ἐν τῷ ο εἰς τὴν ἐν τῷ ρ μεταβέβληται, τὴν κατὰ πάντα ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ ν. εὐρεθήσονται δὲ τὰ ἀγνώστα χ καὶ y ἔτιωσ' ἐκκείδασαν δύο εὐθεῖαι αἱ $AB, B\Gamma$, (α) γωνίαν περιέχεσαι τὴν τυχῶσαν. καὶ ληφθείσης τῆς μὲν $AB = \alpha$, τῆς δὲ $B\Gamma = \beta$, καὶ ἐπιβρυχθείσης τῆς AG , εἰλήφθω ἡ $AD = \Omega$. ἔκῃν ἢ ἀπὸ τῆς Δ ἀχθῶσα παράλληλος τῇ $B\Gamma$, ἦτοι ἡ $DE = \zeta$. ἔτι γὰρ ὡς $AB : B\Gamma :: AD : DE$, ἔστιν ὡς $\alpha : \beta :: \Omega : \Delta E = \beta\Omega = \zeta$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\chi + \mu = \Omega$, ἔστιν ἄρα τὸ $\chi = \Omega - \mu$. εἰάν ἄρα ληφθῇ ἡ $\Lambda\Theta = \mu$, ἔσται ἡ $\Theta\Delta = \Omega - \mu$. πάλιν ἐπειδὴ τὸ $\gamma^2 - y = \zeta$, τὸ ἄρα $y = \gamma^2 - \zeta$. ἐκβληθείσης ἔν τῆς α ΔE , καὶ ληφθείσης τῆς α $\zeta\Delta = \gamma^2$, ἔσται ἡ $\zeta E = \gamma^2 - \zeta = y$.

Ἦχθω ἔν ἀπὸ μὲν τῆς ζ ἢ $\Lambda\zeta O$ τῇ AB παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς Θ ἢ ΘH τῇ $B\Gamma$. καὶ ἐκβεβλήδω ἐφ' ἐκάτερά τὰ μέρη ἡ AG . ἔκῃν ἔσται ἡ μὲν $H\zeta = \chi$, ἡ δὲ $\zeta E = y$. καὶ πᾶσα μὲν ἢ ἀπὸ τῆς $H O$ ἀπολαμβανομένη, ὡς ἀποτετμημένη, οἷον ἡ $H\zeta, H\psi, H O$, τὸ χ ἐμφαίνει· πᾶσα δὲ ἢ ἀπὸ τῆς $H\Lambda$, τὸ $-\chi$. τῶν δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἀποτετμημένων τατομένων εὐθεῶν αἱ μὲν ἄχρει τῆς ψ , τὸ y αἱ δὲ μετὰ τὸ ψ σημεῖον, τὸ $-\gamma$. οἷον αἱ μὲν $\zeta E, \Lambda M$, τὸ y · ἡ δὲ $O\Pi$, τὸ $-\gamma$. διὸ ἔσται ἡ μὲν $\psi O = \chi$, ἡ δὲ $O\Pi = -\gamma$. καὶ ἡ μὲν $H\Lambda = -\chi$, ἡ δὲ $\Lambda M = y$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 227. Ἐν μὲν τοῖς ἀριθμητικοῖς προβλήμασι τῆς ἐξισώσεως συσταθείσης, διὰ γενικῶν κανόνων τὴν τῶν ἀγνῶστων εὐρεσιν περιζόμεθα· ἔχ' ἔτιω δὲ ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς, (ἐκ τῶν ἐν τῷ προλαβόντι κεφαλαίῳ ἐπιλυθέντων προβλημάτων δῆλον.) καὶ μάλιστα ἐν τοῖς

διὰ τῆς ὑψηλοτέρας ἐπιλυομένοις Γεωμετρίας. ἡ κατὰ συνέχουσαν δὲ πρᾶξις, καὶ ἡ διηλεκτὴς τριβὴ πολυμέθοδον ποιεῖ τὸν ἐξασκούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 228. Τὰς κύκλον ἐμφαινέσας εὐρεῖν ἐξισώσεις.

Τῷ Κώνῃ ἐπιπέδῳ τμηθέντος τῇ βάσει παραλλήλῳ, κύκλος περικύπτει. ἔσω δὴ ἔν ὅττος ὁ ΑΒΓ, (σχ. 3) ἔ ἡ διαμέτρος ΑΓ ἴση ἔσω 2α. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῷ τῆς διαμέτρου πέρατος ἀποτετμημένη ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῷ Δ τετάχθω ἡ ΔΕ πρὸς ὀρθῶς τῇ ΑΓ. καὶ ἔσω ἡ μὲν $ΓΔ = χ$, ἡ δὲ $ΔΒ = γ$. ἔκῃν ἡ $ΑΔ = 2α - χ$.

Ἐπεὶ δὲ ὡς $ΑΔ : ΔΒ :: ΔΒ : ΔΓ$, ἥτοι ὡς $2α - χ : γ :: γ : χ$, ἡ ἐν τῷ σ (β) περικύπτει ἐξισώσεις.

Ἐλήφθω δὲ ἀπὸ τῷ κέντρῳ Κ (γ) ἡ ἀποτετμημένη $ΚΔ = Ζ$. ἔκῃν ἵσταται ἡ μὲν $ΑΔ = α + Ζ$, ἡ δὲ $ΓΔ = α - Ζ$.

Ἐπεὶ δὲ ὡς $ΑΔ : ΔΒ :: ΔΒ : ΔΓ$, ἡ ἐν τῷ τ (δ) συνίσταται ἐξισώσεις. ἑκατέρω ἄρα τῶν ἐν τοῖς σ καὶ τ ἐξισώσεων κύκλον ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 229. Ἐν μὲν ἔν τῇ ἑτέρῃ τῶν ἐξισώσεων, τῶν κύκλον ἐμφαινουσῶν, τῇ κατὰ τὸ σ, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀποτετμημένης, λείψει τῷ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνῳ. ἐν δὲ τῇ ἑτέρῃ, τῇ κατὰ τὸ τ, τὸ ἀπὸ τῆς τῷ κύκλῳ ἡμιδιαμέτρου τετραγώνον, λείψει τῷ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνῳ. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ σ ἐξισώσεις ἐμφαίνει τὴν ἀποτετμημένην ἀπὸ τῷ τῆς

I

δια-

(σ) Πλ. ΧΧVΙ. (γ) Πλ. ΧΧVΙΙΙ. χ. 3. (δ) Πλ. ΧΧVΙ.

διαμέτρου πέρατος ἀρχομένην· ἡ δὲ κατὰ τὸ τ, ἀπὸ
τῆς κέντρου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 230. Γραφθήσεται ἄρα ὁ κύκλος διὰ μὲν τῆς
κατὰ τὸ σ ἐξίσωσης, ἡμιδιαμέτρου τῷ ἡμίσει τῆς πολλα-
πλασιασῆς τῆς ἀγνώστης χ, εἴτεν τῷ α· διὰ δὲ τῆς
κατὰ τὸ τ, ἡμιδιαμέτρου τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τῆς τε-
τραγώνου τῆς γνωστῆς ἐκθέσεως α², εἴτεν τῷ αὐτῷ α.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 231. Ἐὰν ἔν ἐκ τῶν τῆς προτεθέντος ἡμῖν προ-
βλήματος συνθηκῶν ὁποτέρᾳ τῶν ἐν τοῖς σ καὶ τ συ-
σταθῇ ἐξίσωσις, ἀπὸ τῆς τῆς κύκλου ἀναγραφῆς ἡ αὖν.
τῆς ἐπίλυσις ἤρτηται, εἴτεν ἡ τῶν ἀγνῶστων εὐρεσις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 132. Ἔστιν ὅτε ἀνομοία ταῖς εἰρημέναις ἐξισώ-
σεσιν ἐστὶν ἡ συσταθῆσα ἐξίσωσις, καίπερ κύκλον ἡμ-
φαίνουσα· μεταβάλλεται δὲ εἰς ἐτέραν ὁποτέρᾳ αὐτῶν
ὁμοίαν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 233. Οἷον ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι (ε) ἐξίσωσιν ἀναπλη-
ρωθέντος τῆς ἐλλειπῆς τετραγώνου $y^2 - 2\gamma y$, προκύπ-
τει ἡ ἐν τῷ Κ, καὶ τεθέντος τῆς $y - \gamma = Z$, ἡ ἐν
τῷ Λ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Μ. πληρωθέντος δὲ καὶ τῆς ἐλλει-
πῆς τετραγώνου $x^2 - 2\alpha x$, ἡ ἐν τῷ Ν. καὶ τεθίν-
τος τῆς μὲν $\alpha^2 + \gamma^2 = v^2$, τῆς δὲ $x - \alpha = \Omega$, ἡ ἐν
τῷ Ξ ἐξίσωσις γίνεται, ἡ κατὰ πάντα ὁμοία τῇ ἐν
τῷ τ. (ζ) εὐρίσκονται δὲ τὰ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι ἀγνώστα ὅπως

Ἡμιδιαμέτρου τῷ $v = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$ γεγραφθῶ κύκ-
λος ὁ ΑΕΒ, (η) καὶ ἀπὸ τῆς κέντρου Κ εἰληφθῶ τῆς ΑΒ
δια-

(α) Πλ. XXIX. (ζ) Πλ. XXVI. (η) Πλ. XXVIII.
κ. 4.

διαμέτρων μέρος τὸ $ΚΔ = Ω$. καὶ ἀπὸ τῆς $Δ$ τετάχ-
θω ἡ $ΔΕ$ πρὸς ἐρθαίς τῇ $ΑΒ$. ἔσεται τοιγαρὲν ἡ $ΔΕ =$
 Z . ἐπεὶ δὲ τὸ $Χ - α = Ω$, ἔσεται τὸ $Χ = Ω + α$.
ληφθείσης ἔν τῆς $ΚΛ = α$, ἔσεται ἡ $ΛΔ = Ω +$
 $α = Χ$. πάλιν ἐπεὶ τὸ $Υ - γ = Z$, ἔσεται τὸ $Υ =$
 $Z + γ$. ἔκθ' τῆς $ΕΔ$ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβληθείσης,
ἐκ ληφθείσης τῆς $ΔZ = γ$, ἔσεται ἡ $ZE = Z + γ =$
 $Υ$. εἰν ἔν ἀπὸ μὲν τῆς Z ἀχθῇ ἡ $ΘΗ$ τῇ $ΑΒ$ πα-
ράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς $Λ$ ἡ $ΛΓ$ τῇ $ΕΜ$, ἔσεται ἡ μὲν
 $ΓZ = Χ$, ἡ δὲ $ZE = Υ$.

Αἱ μὲν ἔν ἀπὸ τῆς $ΓΘ$ ὡς ἀποτετμημέναι ἐκλαμ-
βανόμεναι, καταφατικαὶ ἔσονται, ἥτοι $Χ$. αἱ δὲ ἀπὸ
τῆς $ΓΗ$, ἀποφατικαί, εἴθεν $-Χ$. τῶν δὲ ἀπὸ τῶν πε-
ράτων αὐτῶν ταττομένων αἱ μὲν ἐπὶ τὰς $Ε$ μέρη κατα-
φατικαί εἰσιν, ἥτοι $Υ$, οἷα ἡ ZE . αἱ δὲ ἐπὶ τὰς $Μ$ μέ-
ρη ἀποφατικαί, οἷα ἡ $ZM = -Υ$. εἰν δὲ ληφθῇ ἡ
 $ΓΘ = Χ$, καταφατικὴν μὲν τεταγμένην ἀπὸ τῆς $Θ$
ἐξαγαγὼν ἔνεστιν, ἀποφατικὴν δ' ἔ. ὡσαύτως ληφθείσης
τῆς $ΓΗ = -Χ$, ἀπὸ τῆς $Η$ καταφατικὴ μὲν ἄγεται
τεταγμένη, ἀποφατικὴ δὲ ὑδαμῶς.

Ὅμοιως ἐν τῇ κατὰ τὸ $Ο$ ($Θ$) ἐξισώσει ἀναπληρωθέν-
τος τῆς ἑλλειπῆς τετραγώνου, ἡ κατὰ τὸ $Π$ γίνεται,
γεθείσης δὲ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης $Υ + βΧ = Z$, ἡ
ἐν τῷ $Ρ$ περὶ κύπτει, ὁμοίᾳ ἔσα τῇ κατὰ τὸ $α$ σ. τὰ δὲ
ἔγνωσα $Χ$ καὶ $Υ$ εὐρεθήσονται ἔτως·

Ἡμὶδιαμέτρω τῶν $α$ κύκλου γραφέντος τῆς $ΑΕΒ$, (1)
ἢ ληφθῶ ἡ $ΛΔ = Χ$. ἡ ἄρα τεταγμένη $ΔΗ = Z$. ἐπεὶ
τὸ $Υ + βΧ = Z$, ἔσεται τὸ $Υ = Z - βΧ$. εἰν ἔν ἀπὸ

τῷ κέντρῳ Κ ἀχθῇ ἢ ΚΘ παράλληλος μὲν τῇ ΔΗ, ἴση δὲ τῷ Β, καὶ ἐπιζευχθῇ ἢ ΛΘ, ἴσεται ὡς ΑΚ: ΚΘ:: ΛΔ: ΔΖ, ἥτοι ὡς α: β:: χ: ΔΖ. διὸ ἢ ΔΖ = βχ. ἔκέν ἢ ΗΖ = Ζ - βχ = γ.

Αἱ μὲν ἄρα ἀποτετμημέναι ἀπὸ τῆς ΑΒ διαμέτρου λαμβάνονται, αἱ δὲ ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν ταττι μεναι ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῆς τῷ κύκλῳ περιφερείας περατῆνται. ὧν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ Η μέρη καταφατικαί εἰσιν, οἷα ἢ ΖΗ = γ· αἱ δὲ ἐπὶ τὰ Ε, ἀποφατικαί, οἷα ἢ ΖΕ = - γ. καὶ ἀπὸ τῷ Γ ἀποφατικῇ μὲν τεταγμένη περατῆται, καταφατικῇ δὲ ἐδαμῶς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

234. Τὴν ἐξίσωσιν εὐρεῖν, τὴν ἐμφαίνουσαν Παραβολὴν. (κ)

Τμηθέντος τῷ ΑΓΒ Κῶνος (λ) ἐπιπέδῳ ὁποτέρῃ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, οἷον τῇ ΓΛ, παραλλήλῳ, ἢ ΜΚΑ Παραβολὴ γίνεται, ἥς ἄξων ἢ ΚΛ, ἢ κοινὴ τομὴ τὴν τμηθέντος ἐπιπέδου, καὶ τῷ διὰ τῷ ἄξονος τριγώνῳ ΑΓΕ εἰάν δὲ ὁ Κῶνος καὶ ἐπιπέδῳ τμηθῇ τῷ βάσει αὐτοῦ παραλλήλῳ, τέμνονται καὶ τὸν τῆς Παραβολῆς ἄξονα ΚΛ, κύκλος γίνεται ὁ ΔΘΖ, ἐν ᾧ ἢ κοινὴ, τομὴ Θ αὐτοῦ τε καὶ τῆς Παραβολῆς, πρὸς ἐρθῶς μὲν ἐστὶ τὴν διαμέτρῳ ΔΖ καὶ τῷ ἄξονι ΚΛ, τεταγμένη δὲ ἐν ἑκατέρῃ τῶν τομῶν, τῷ κύκλῳ δηλαδὴ καὶ τῇ Παραβολῇ.

Καίτω γνωστὸν εἶναι τὸν τῆς Παραβολῆς ἄξονα καὶ τὰ μέρη ΑΔ, ΔΒ τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς τῷ Κῶνος βάσεως. καὶ ἔστω ἢ μὲν ΚΛ = γ, ἢ δὲ ΑΒ = β ἢ δὲ ΑΔ = ΔΕ = α, ἢ δὲ ΚΕ = χ, ἢ δὲ ΕΘ = ε.

(κ) Προδεδιδαγμένον δὲ εἶναι τὸν αἰρετὴν τὰ περὶ τῶν τῷ Κῶνος Τομῶν.

(λ) Πίν. XXVIII. γ. 6.

Ἐπεὶ ὡς $ΚΛ : ΑΒ :: ΚΕ : ΕΖ$, ἤτοι ὡς $γ : β :: χ : ΕΖ$,
ἴσεται ἢ $ΕΖ = \frac{βχ}{γ}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $ΔΕ : ΕΘ :: ΕΘ : ΕΖ$,

τετίξιν ὡς $α : γ :: γ : ΕΖ$, ἢ αὐτὴ ἄρα $ΕΖ = \frac{γ^2}{α}$.
ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἢ $\frac{α}{α} = \frac{βχ}{γ^2}$.

κατὰ τὸ Σ γίνεται, (μ) ἢ Παραβολὴν ἐμφαίνουσα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

§. 235. Ἐν τῇ ἐξισώσει ἄρα τῇ Παραβολῇ ἐμφανέσθῃ, τὸ ἐρρογώνιον, τὸ ἐκ γνωστῆς τινὸς ἐκθέσεως καὶ τῆς ἀποτετμημένης ἴσον ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνω.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β'.

§. 236. Ο' τῆς ἀποτετμημένης $χ$ πολλαπλασιασθῆς, ἔσθιν τὸ $\frac{αβ}{γ}$, ἢ παράμετρος τῆς Παραβολῆς ἐστίν. ἢ γὰρ τῆς Παραβολῆς παράμετρος τρίτη ἀνάλογόν ἐστι τῆς ἀποτετμημένης, καὶ τῆς τεταγμένης. (ν) ἔστι δὲ τὸ $\frac{αβ}{γ}$ τρίτη ἀνάλογον τῆς τε $χ$ καὶ τῆς $γ$, διὰ γὰρ τὴν ἐν ταῖς Σ ἐξίσωσιν ἐστίν ὡς $χ : γ :: γ : \frac{αβ}{γ}$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Γ'.

§. 237. Ο' Ἀΐζων διχοτομεῖ τὴν Παραβολήν. εἰάν γὰρ ἢ $ΘΕ$ (ξ) ἐκβληθεῖσα, τῇ τομῇ συμπέσῃ κατὰ τὸ $Η$, εὐρεθήσεται τὸ $ΕΗ^2 = \frac{αβχ}{γ}$. ἐξ ὧς δὲ ἔστι δὲ ὅτι τὸ $ΕΘ^2 = ΕΗ^2$. διὸ καὶ ἢ $ΕΘ = ΕΗ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχ-

I 3

Θή.

(μ) Π. ΣΧΙΧ. (ν) Ὅρα τὸν καὶ ὁρισμ. τῶν Κυν. Τομ. τὸν ἐν σελ. 85 τῷ β'. τίμ.

(ξ) Π. ΧΧVΙΙΙ. χ. 6.

θήσεται, ὅτι πᾶσαι αἱ τεταγμέναι ὑπὸ τῆς Α' ἕξονος διχοτομούνται. ἐξ ἧς δὲ ἤλθεν, ὅτι καὶ ἡ Παραβολὴ ὑπ' αὐτῆς διχοτομεῖται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 238. Π' παραβολικὴ καμπύλη ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεται, τοσάτω μᾶλλον τῆς ἕξονος ἀφισταμένη, ὅση πορρωτέρω προσεπικτείνεται. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\alpha\beta\chi = y^2$, ὅση μείζων ἢ ἡ ἀποτετμημένη χ τοσάτω μᾶλλον καὶ τὸ y^2 , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετράγωνον, καὶ ἐπομένως καὶ αὐτὴ ἡ τεταγμένη. ἐπεὶ δὲ τῆς προληφθείσης ἀποτετμημένης μείζονα λαμβάνειν ἐνὸν ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἡ τεταγμένη ἄρα τῆς προτεταγμένης αὐτῆς ἐπ' ἄπειρον μείζων ἔσται. ἐκ τούτου ἔν δὲ ἤλθεν ὅτι ἡ καμπύλη ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεται, καὶ τοσάτω μᾶλλον τῆς ἕξονος ἀφίσταται, ὅσον πορρωτέρω προσεπικτείνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.

§. 239. Αἱ ἐν τῇ Παραβολῇ ἀποτετμημέναι διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν τεταγμένων. ὥσπερ γὰρ εὐρεθῇ τὸ $\alpha\beta\chi = y^2$, ἔτω τῆς μὲν Ω ἄλλην ἐμφαίνοντος ἀποτετμημένην, τῆς δὲ Ψ ἄλλην τεταγμένην, τὴν ἀπὸ τῆς πέραςτος τῆς Ω ἀχθείσαν, εὐρεθήσεται τὸ $\alpha\beta\Omega = \Psi^2$. διὸ ἔσεται ὡς $\alpha\beta\chi : \alpha\beta\Omega :: y^2 : \Psi^2$, εἴτεν ὡς $\chi : \Omega :: y^2 : \Psi^2$. ἐξ ἧς δὲ ἤλθεν τὸ προκείμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Σ'.

§. 240. Ἐὰν ἔν ἐκ τῶν τῆς προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συνθηκῶν ἐξίσωσις συσταθῇ ἢ κατὰ τὸ Σ, (ο)†

τῆς ἐπίλυσις, εἴτην ἡ τῶν ἀγνώστων ἔυρεσις, ἀπὸ τῆς ἀναγραφῆς ἡρτήται τῆς Παραβολῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 241. Καίτινες δὲ τῶν ἐξισώσεων τῶν μὴ ὁμοίων τῇ κατὰ τὸ Σ εἰς ἑτέρας μεταβάλλοντα αὐτῇ ὁμοίας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 242. Οἷον ἡ κατὰ τὸ Τ εἰς τὴν κατὰ τὸ Υ μεταβάλλεται, τεθείσης τῆς μὲν τῷ τετραγώνῳ ῥίζης $y + \beta = \gamma$, τῷ δὲ πολλαπλασιασῶν τῷ Χ, εἴτην τῷ $2\alpha - 2\beta = 2\gamma$. καταγράφεται δὲ ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ

Τ ἐξισώσεως ἐμφαινόμενη Παραβολή, δι' ἧς τὰ ἀγνώστα Χ καὶ Υ εὐρίσκονται, ὕτω·

Παραμέτρῳ (π) τῷ 2γ τῷ τῷ Χ πολλαπλασιασῶν γεγράφω Παραβολή. (ρ) ληφθείσης δὲ ἀπὸ τῷ ΑΗ ἀξονος ἀποτετμημένης τῆς ΑΒ — Χ, τετάχθω ἀπὸ τῷ Β ἢ ΒΓ. ἔστω δὴ ἔν ἡ ΒΓ = γ. ἐπεὶ δὲ τὸ $y + \beta = \gamma$, ἔστω τὸ $y = \gamma - \beta$. ληφθείσης ἔν τῆς ΒΔ = β, ἔστω ἡ ΔΓ = γ — β = y. εἰάν ἔν ἀπὸ μὲν τῷ Δ ἀχθῇ ἡ ΔΕ τῇ ΑΗ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς Α ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη ἐκβληθῇ ἡ ΓΒ, ἔστω ἡ μὲν ΕΔ = χ, ἡ δὲ ΔΓ = y, ἡ δὲ ΔΖ = —y.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 243. Τὰς ἑλλειψιν ἐμφαινέσας ἐξισώσεις εὐρεῖν. Τμηθέντος τῷ ΗΕΘ Κώνος (σχ. 8.) ἐπιπέδῳ ἑκατέραν τῶν ΗΕ, ΗΘ πλευρῶν τῷ διὰ τῷ ἀξονος τριγώνῳ ΕΗΘ διατέμνοντι, ἡ ἑλλειψις ΑΖΓ γίνεται, ἧς μείζων διά-

(*) Πιν. XXVIII. χ. 7.

(*) Ὅρα τὴν δ. καὶ ε. Συνίπ. τῆς ε'. προτ. τὴν ἐν σελ. 109. ὁμοίως καὶ τὴν δ. Συνίπ. τῆς ζ', προτ. τὴν ἐν σελ. 113. τῷ Β. Τόμ. τῶν Κων. Τόμ. καὶ τὸ ἐξῆς §. 260.

μετρος, ἢ πλαγία πλευρά, ἡ ΓΛ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶ δια-
 τριπόντος ἐπιπέδου, καὶ τῶ διατὰ τῶ ἄζονος τριγώνου. ἔαν
 δὲ τμηθῇ ὁ Κῶνος καὶ ἐπιπέδῳ τῇ βιάσει αὐτῶ παραλ-
 λήλῳ, καὶ αὐτὴν τὴν τῆς Ἐλλείψεως πλαγίαν πλευρὰν
 διατέμνοντι, κύκλος γίνεται ὁ ΙΖΛ, ἐν ᾧ ἡ κοινὴ το-
 μὴ αὐτῶ τε καὶ τῆς Ἐλλείψεως. ἔτεν ἡ ΖΝ, πρὸς ὁρθά-
 ἐσι τῇ διαμέτρῳ αὐτῶ ΙΑ, καὶ τῇ τῆς Ἐλλείψεως ΑΓ.
 Ἡ' χθώσαν ἔν ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ σημείων αἱ ΑΒ, ΓΜ
 τῇ ΙΑ παράλληλοι. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = β, ἡ δὲ ΓΜ = γ,
 ἡ δὲ ΑΙ = 2α, ἡ δὲ ΑΔ = χ, ἡ δὲ ΔΖ = γ. καὶ ἔστω
 δὴ ἡ ΓΛ = 2α - χ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΓ : ΓΜ :: ΑΔ : ΔΛ,
 ἦτοι ὡς 2α : γ :: χ : ΔΛ, ἔσεται ἡ ΔΛ = $\frac{\gamma\chi}{2\alpha}$.

ἐπειδὴ ὡς ΓΛ : ΑΒ :: ΓΔ : ΔΙ, ἔτεν, ὡς 2α : β ::
 2α - χ : ΔΙ, ἔσεται ἄρα ἡ ΔΙ = $\frac{2\alpha\beta - \beta\chi}{2\alpha}$. ἐπειδὴ

ἔστι καὶ ὡς ΙΔ : ΔΖ :: ΔΖ : ΔΛ, τετέλειν ὡς $\frac{2\alpha\beta - \beta\chi}{2\alpha}$

γ :: γ : γχ, γίνεται ἄρα ἡ ἐν τῷ Φ (σ) ἐξίσωσις, ἐξ ἧς

ἡ ἐν τῷ Χ, ἐξ αὐτῆς δὲ, τεθέντος τῶ βγ = 4ν²,
 ἡ ἐν τῷ Ψ.

Ἐὰν δὲ, δίχα τμηθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΓΛ
 (τ) κατὰ τὸ Κ, ἀπὸ τῶ κέντρου Κ ληφθῇ ἡ ἀποτετμη-
 μένη ΚΔ = ζ, ἔσεται ἡ μὲν ΓΔ = α + ζ, ἡ δὲ ΑΔ =
 α - ζ. διὸ δὴ διὰ τὰ προειρημένα, ἡ μὲν ΔΛ = $\frac{\alpha\gamma - \gamma\zeta}{2\alpha}$,

ἡ δὲ ΔΙ = $\frac{\alpha\beta + \beta\zeta}{2\alpha}$. διὸ τὸ γ² = $\frac{\beta\gamma \cdot \alpha + \zeta \cdot \alpha - \zeta}{4\alpha^2}$.

ἐκ

ἐκ τῆς ἑξισώσεως ταύτης ἢ ἐν τῷ Ω γίνεται (υ) ἐξ αὐ-
τῆς δὲ τεθέντος τῷ $\beta\gamma = 4\nu^2$, ἢ ἐν τῷ Λ .

Αἱ ἄρα ἐν τοῖς Ψ καὶ Λ ἐξισώσεις αἱ ζητούμεναι-
εἰσιν, ὡς ἑκάστη αὖ ἑλκεῖται ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 244. Τοιγαρὲν ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ των ἐξισώσεων
τῶν ἑλκεῖται ἐμφανισῶν, τῇ κατὰ τὸ Ψ , τὸ γινό-
μενον ἐκ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμημέ-
νης, λείπει τῷ ἀπὸ τῆς τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ
γινόμενῳ ἐκ γνωστῆς τινὸς ἐκδέσεως καὶ τῷ ἀπὸ τῆς
τεταγμένης τετραγώνου ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ, τῇ κατὰ τὸ
 Λ , το αὖτὸ τῆς ἡμισυαίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τε-
τραγώνου, λείπει τῷ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετρα-
γώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ γινόμενῳ ἐκ γνωστῆς τινὸς ἐκδέσεως
καὶ τῷ ἀπὸ τῆς τεταγμένης τετραγώνου. καὶ ἡ μὲν
κατὰ τὸ Ψ ἐμφαίνει τὴν ἀποτετμημένην ἀπὸ τῷ τῆς
διαμέτρου πύρατος ληφθεῖσαν ἢ δὲ κατὰ τὸ Λ , ἀπὸ
τῷ κέντρῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

245. Ἡ τῆς ἑλκεῖται ἐλάσσων διάμετρος ἴση ἐστὶ τῷ
διπλασίῳ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῷ ὀνομαστῷ τῷ κλάσ-
ματος, εἴτεν τῷ 2ν . εἴαν γὰρ ἡ ἀποτετμημένη χ
ἴση ληφθῇ τῇ $\Delta\kappa$, εἴτεν τῷ α , ἢ ἐν τῷ Ψ ἐξισώσεις
εἰς τὴν ἐν τῷ C μεταβάλλεται, ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὸ
 $y^2 = \nu^2$. διὸ τὸ μὲν $y = \nu$, τὸ δὲ $2y = 2\nu$. ἀλλὰ τὸ
 $2y$ ἢ ἐλάσσων τῆς ἑλκεῖται διαμέτρος ἐστίν, (ὅτε
γὰρ τὸ $\chi = \alpha$, ἡ τεταγμένη y διὰ τῷ κέντρῳ διήσιν)
ἢ καὶ τὸ 2ν . ὅτε δὲ ἡ τεταγμένη διὰ τῷ κέντρῳ
διήσιν, ἡ ἀποτετμημένη $Z = 0$. διὸ ἢ ἐν τῷ A ἐξί-
σωσης εἰς τὴν ἐν τῷ D μεταβάλλεται. ἐξ ἧς πάλιν
δῆλον, ὅτι τὸ $2y = 2\nu$.

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 246. Ἰστέον δὲ ὅτι ἡ ἐλάσσων τῆς Ἐλλείψεως διάμετρος ἴση ἐστὶ τῷ διπλασίῳ τῆς ρίζης τῆς κλάσματος, εἰάν ὁ γνωστὸς ἀριθμητὴς αὐτῆς, τὸ τετράγωνον ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος διαμέτρου, οἷος ἐσιν ὁ τῶν προκειμένων ἐξισώσεων, τετέστι τὸ α^2 . εἰ δὲ ἄλλος ἢ ὁ ἀριθμητὴς, οἷος ὁ ἐν τοῖς E, F, ἡ ἐλάσσων διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τῆς τετάρτης ἀναλόγου, τῆς ἀριθμητῆς τῆς κλάσματος, τὴ παρενομασῆς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς μείζονος διαμέτρου τετραγώνου, εἴτεν τῆς β^2 , ν^2 καὶ $4\alpha^2$. ἡ τέτων γὰρ τετάρτη ἀναλογὸν ἐσιν τὸ $\frac{4\alpha^2\nu^2}{\beta^2}$. ἔτινος τετραγωνικῇ

ρίζα τὸ $\frac{2\alpha\nu}{\beta}$ τεθέντος δὲ τῆς $\chi = \alpha$, ἡ ἐν τῷ E

ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ G μεταβάλλεται. ἐξ ἧς εὐρίσκομεν τὸ $y = \frac{\alpha\nu}{\beta}$. διὸ τὸ $2y$, ἥτοι ἡ ἐλάσσων διά-

μέτρος, ἴση $\frac{2\alpha\nu}{\beta}$ ὡσαύτως τεθέντος τῆς $Z = 0$, ἡ ἐν

τῷ F ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ L μετατρέπεται, ἐξ ἧς πάλιν προκύπτει τὸ $2y = \frac{2\nu}{\beta}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 247. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν τὴν Ἐλλειψιν ἐμφαινουσῶν ἐξισώσεων ἢτε μείζων καὶ ἡ ἐλάσσων αὐτῆς διάμετρος δίδεται, γνωστὴ ἄρα εἶσαι καὶ ἡ αὐτῆς παράμετρος, τετάρτη ἀνάλογον εἶσαι τῆς ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου ὀρθογωνίου, τῆς ἀπὸ τῆς τετραγμένης τετραγώνου, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, (Φ) εἴτεν τῆς μέ-

ζο-

ζονος Διαμέτρου. κειμένον ἔν τὴν ἀποτετμημένην ἴσην εἶναι τῷ α , καὶ ἐπομένως αὐτὴν εἶναι τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τεταγμένην, ἔσται ὡς $\alpha. \alpha : \nu^2 :: 2\alpha$, πρὸς τὴν παράμετρον, ἥτις ἴση ἔσται τῷ $\frac{2\nu^2}{\alpha}$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

§. 248. Ἐάν ἔν ἡ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος συσθεῖσαι ἐξίσωσις ὁμοία ἢ ὁποτέρῃ τῶν κατὰ τὸ Ψ καὶ Λ , ἢ εἰς ὁμοίαν μεταβληθῆναι ἔχη, διὰ τῆς ἀναγραφῆς τῆς Ἑλλείψεως τὰ ζητούμενα εὐρίσκονται ἄγνωστα.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 249. Οἷον ἡ ἐν τῷ M , τεθείσης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης $y + \gamma = Z$, εἰς τὴν ἐν τῷ N μεταβάλλεται, τὴν ὁμοίαν τῇ κατὰ τὸ Ψ . καταγράφεται δὲ ἡ ὑπὲρ αὐτῆς ἐμφαινόμενη Ἑλλείψις ἔτω

Γεγονέτω ὡς $\nu : \beta :: 4\alpha^2$ πρὸς τὴν τετάρτην, ἔσται τὴν $\frac{4\alpha^2\beta}{\nu}$, ἥτις δὲ τὸ τετράγωνόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ

τῆς ἐλάσσονος Διαμέτρου τῆς Ἑλλείψεως. (§. 246.)

ἔστω ἄρα, ὅτι ἡ μὲν ἐλάσσων διάμετρος $= 2\alpha \sqrt{\beta}$.

τὸ δὲ ἡμισυ αὐτῆς $= \alpha \sqrt{\beta}$. ἔκδεν ὡς $\alpha. \alpha : \frac{\alpha^2\beta}{\nu} ::$

2α , πρὸς τὴν παράμετρον, (§. 247.) ἥτις ἴση ἐστὶ

$\frac{2\alpha\beta}{\nu}$. παραμέτρῳ ἔν τῷ $\frac{2\alpha\beta}{\nu}$ γεγράφθω Ἑλλείψις (χ)

ἡ $\Delta\Gamma$. (ψ) καὶ ἀπὸ τῆς μείζονος διαμέτρου $\Delta\Gamma = 2\alpha$ εἰλήφ-

(χ) Πιν. XXX. κ. 1.

(ψ) Ὅρα τὸν δ' καὶ ἐν Σύντ. τῆς β' προτ. τὴν ἐν σελ. 216. καὶ β' τομ. καὶ τὸ ἐξῆς §. 263.

εἰλήφθω ἀποτετμημένη ἡ $\Lambda\Lambda'$ · χ , καὶ ἔσται δὴ ἡ ἀπὸ
 $\tau\tilde{\epsilon}$ Λ ταχθεῖσα $\Delta\Gamma = \chi$. ἐπεὶ δὲ τὸ $\gamma + \gamma = \chi$,
 ἔσται δὴ ἄρα τὸ $\gamma = \frac{\chi}{2}$. ἐκδὲν ληφθεῖσθαι τῆς $\Delta\Gamma =$
 γ , ἔσται ἡ $\Gamma\Gamma' = \chi - \gamma = \frac{\chi}{2}$. ἀχθεῖσθαι ἐν ἀπὸ μὲν $\tau\tilde{\epsilon}$
 Λ τῆς $\Lambda\Theta$ τῇ $\Delta\Gamma$ παραλλήλῃ, ἀπὸ δὲ $\tau\tilde{\epsilon}$ Π τῆς
 $\Theta\Gamma$ τῇ $\Lambda\Gamma'$, καὶ τῆς $\Gamma\Lambda$ ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη ἐκβλη-
 θεῖσθαι, ἔσται ἡ μὲν $\Theta\Gamma = \chi$, ἡ δὲ $\Gamma\Gamma' = \gamma$, ἡ δὲ
 $\Pi\Lambda = \gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 250. Τὰς Ὑπερβολὴν ἐμφαινέσας εὐρεῖν ἐξισώσεις.

Τμηθέντων τῶν συζύγων Κώνων (σχ. 2.) $\Gamma\Delta\Psi$, $\Gamma\Omega\Phi$
 ἐπιπέδῳ διὰ $\tau\tilde{\epsilon}$ ἄξονος, ἑκατέρωθεν δὲ τῶν $\Gamma\Psi$, $\Gamma\Omega$ πλευ-
 ρῶν ἑτέρω τμηθεῖσθαι ἐπιπέδῳ, αἱ ἀντικείμεναι Ὑπερ-
 βολαὶ $\Pi\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Theta\Phi$ γίνονται. Ἐάν δὲ διὰ $\tau\tilde{\epsilon}$ τυχόντος
 σημείου Φ $\tau\tilde{\epsilon}$ ἄξονος $\Delta\Phi$ τμηθῇ αὐτοῖς ὁ Κώνος ἐπι-
 πέδῳ τῇ βάσει αὐτῶν παραλλήλῳ, κύκλος προκύπτῃ
 ὁ $\Pi\Omega\Lambda$, ὃς ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν καὶ τῆς Ὑπερβολῆς, εἴτεν
 ἡ $\Omega\Phi$, πρὸς ὁρθῶς ἐστὶ τῇ τε διαμέτρῳ $\Pi\Lambda$, καὶ τῇ
 ἄξονι $\Delta\Phi$.

Ἰχθῶσαν ἐν ἀπὸ τῶν Δ καὶ Ω τομῶν αἱ $\Delta\Gamma$,
 $\Omega\Lambda$ τῇ $\Omega\Psi$ διαμέτρῳ τῆς βάσεως $\tau\tilde{\epsilon}$ κἄντι παραλλή-
 ληλοι. καὶ ἔστω ἡ μὲν $\Delta\Gamma = \gamma$, ἡ δὲ $\Omega\Lambda = \beta$. ἡ δὲ
 πλαγία πλευρὰ $\Omega\Delta = 2\alpha$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη $\Delta\Phi =$
 χ , ἡ δὲ τεταγμένη $\Omega\Omega' = \gamma$. ἐκδὲν ἔσται ἡ $\Omega\Phi = 2\alpha + \chi$.

Ἐπεὶ ἔνι ὡς $\Delta\Omega : \Omega\Lambda :: \Delta\Phi : \Phi\Lambda$, ἥτοι ὡς $2\alpha :$
 $\beta :: \chi : \Phi\Lambda$, ἔσται ἡ $\Phi\Lambda = \frac{\beta\chi}{2\alpha}$. πάλιν ἐπειδὴ ὡς

$\Omega\Delta : \Delta\Gamma :: \Omega\Phi : \Phi\Omega$, εἴτεν ὡς $2\alpha : \gamma :: 2\alpha + \chi :$
 $\Phi\Omega$, ἔσται ἡ $\Phi\Omega = \gamma \frac{2\alpha + \chi}{2\alpha}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $\Lambda\Phi :$

$\Phi\Omega :: \Phi\Omega : \Phi\Omega$, ἔσται ἄρα ὡς $\frac{\beta\chi}{2\alpha} : \gamma :: \gamma : \frac{2\alpha + \chi}{2\alpha}$.

ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἢ ἐν τῷ $\Omega(\omega)$ ἐξίσωσις γίνεται,
ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Σ , τιθέντες τὸ $\beta\gamma = 4\nu^2$.

Γὰν δὲ διχα τμηθείσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς $\text{ΒΔ}(\alpha)$
κατὰ τὸ Κ , ληφθῇ ἀπὸ τῆς κέντρως Κ ἡ ἀποτετμημένη
 $\text{ΚΡ} = \zeta$, ἵσταται ἡ μὲν $\text{ΒΦ} = \alpha | \zeta$, ἡ δὲ $\Delta\Phi = \zeta - \alpha$.
διὸ διὰ τῶν αὐτῶν ἀναλογιῶν εὐρεθήσεται ἢ ἐν τῷ V ἐξί-
σωσις.

Λι δὲ ὡς ἄρα ἐξισώσεις αἱ ἐν τοῖς S καὶ $\text{V}(\beta)$ αἱ ζη-
τέμεναι εἰσιν, ὧν ἑκατέρω Ὑπερβολὴν ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 251. Ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ ἄρα τῶν Ὑπερβολῶν
ἐμφαινέσων ἐξισώσεων, τῇ κατὰ τὸ S , τὸ ὀρθογώνι-
ον τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς ἀποτετμη-
μένης, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης ἰσραγώνῳ ἴσον
ἐστὶ τῷ γινόμενῳ ἀπὸ γνωστῆς κλάσματος καὶ τῆς ἀπὸ
τῆς ἰσραγμένης ἰσραγώνῳ· ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ τῇ κατὰ τὸ
 V , τὸ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης τετραγώνον, λείψει τὸ
ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἰσραγώνῳ,
ἴσον ἐστὶ τῷ προδιαληφθέντι γινόμενῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 252. Ἐκατέρωσιν ἔν τῶν ἐν τοῖς S καὶ V ἐξισώ-
σεων τὴν αὐτὴν ἐμφαινέσης Ὑπερβολὴν , ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ
τῇ κατὰ τὸ S ἡ πλαγία πλευρὰ ὁ πολλαπλασια-
σῆς ἐστὶ τῆς ἀποτετμημένης χ , ὅπερ ἐστὶ τὸ 2α · ἐν δὲ
τῇ ἐτέρᾳ, τῇ κατὰ τὸ V , τῆς ἰσραγωνικῆς ρίζης τῆς α^2 ἰσ-
ραγώνῳ τὸ διπλάσιον, εἴτεν αὐτὸ τὸ 2α .

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 253. Ἡ τῆς Ὑπερβολῆς παράμετρος, ἴση ἐστὶ
τῷ διπλασίῳ τῆς παρανομαστῆς τῆς κλάσματος, διὰ τῆς
τῆς πλαγίας πλευρᾶς ἡμίσεως διαρεθέντι, εἴτεν τῷ
 $2\nu^2$.

$\frac{2v^2}{a}$. ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς Ὑπερβολῆς παράμετρος τελευτή
 ἀνάλογόν ἐστι τῷ ὀρθογωνίῳ (γ) ΒΦ. ΦΔ, τῷ τετραγώνῳ
 ΦΖ², καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ΒΔ, (δ) ἦτοι τῷ
 $2αχ + χ^2$, τῷ y^2 , καὶ τῷ $2α$, ἔσται ἄρα ἡ παρά-
 μετρος ἴση τῷ $\frac{2αy^2}{2αχ + χ^2}$. τῷτο δὲ διὰ τῆς κατὰ τὸ S (ε) ἐξι-
 στώσεως ἴσον εὐρίσκειται τῷ $\frac{2v^2}{a}$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπὶ
 ὡς Ζ² — α² : y² :: 2α πρὸς τὴν παράμετρον, ἔσται
 αὕτη ἴση τῷ $\frac{2αy^2}{z^2 - α^2}$. τῷτο δὲ διὰ τῆς κατὰ τὸ V ἐξισώ-
 σεως ἴσον προκύπτει τῷ αὐτῷ $\frac{2v^2}{a}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 254. Ἐάν ὁ τῷ κλάσματι ἀριθμητῆς, ἔστω ὁ
 τῷ y^2 πολλαπλασιασθῇ μὴ ἢ τῷ ἀπὸ τῷ ἡμίσεως τῆς
 πλαγίας πλευρᾶς τετραγώνον, ὡς ἐν ταῖς κατὰ τὸ α καὶ
 β ἐξισώσεις, ἡ τῆς Ὑπερβολῆς παράμετρος ἐστὶν ἡ τε-
 λεύτη ἀνάλογος τῷ γνωστῷ ἀριθμῷ τῷ κλάσματι, τῷ
 παρονομαστῷ αὐτῷ, καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ἔστω
 τὸ $\frac{2αν^2}{β^2}$. ἐπεὶ γὰρ ὡς $2αχ + χ^2 : y^2 :: 2α$, πρὸς
 τὴν παράμετρον, ἔσται δὴ αὕτη ἴση τῷ $\frac{2αy^2}{2αχ + χ^2}$. τῷτο
 δὲ ἐκ τῆς κατὰ τὸ α ἐξισώσεως ἴσον τῷ $\frac{2αν^2}{β^2}$. ὡσαύ-
 τως

(γ) Πλ. XXX. χ. β.

(δ) Κατὰ τὸν προηγουμέν. καί. Ὁρισμ. (ε) Πίν. XXIX.

ἵσως ἐπειδὴ ὡς $z^2 - \alpha^2 : y^2 :: 2\alpha$, πρὸς τὴν παρά-
μετρον, ἴσται αὐτὴ ἴση τῷ $\frac{2\alpha y^2}{z^2 - \alpha^2}$, ὅπερ διὰ τῆς κα-

τὰς β ἐξισώσεως ἴσον εὐρίσκειται τῷ $\frac{2\alpha n^2}{\beta^2}$.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Δ'.

§. 255. Ἐὰν ἔν ἐκ τῶν τῷ περιεχέντος ἡμῶν προ-
βλήματος συνθηκῶν ἐξισώσεις συσταθῇ ἡτοι ὁμοία ταῖς
κατὰ τὰς δ, καὶ V, ἢ εἰς ὁμοίαν αὐταῖς μεταβαλλομέ-
νη, ἡ τέτα ἐπίλυσις ἀπὸ τῆς ἀναγραφῆς ἡρήται τῆς
ὑπερβολῆς.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 256. Τὴν ἐν τῷ γ ἐξίσωσιν εἰς ὁμοίαν τῇ ἐν τῷ
V μεταβαλὼν ἔτω κείθω ἡ τετραγωνικὴ ρίζα $x + \frac{\alpha y}{\beta} =$

Z. ἔκιν ἡ ἐν τῷ γ εἰς τὴν ἐν τῷ δ μετατρέπεται, ἐξ ἧς
ἡ ἐν τῷ γ γίνεται, ἡ τῇ κατὰ τὸ V ὁμοία. τὴν ὑπ' αὐτῆς
δὲ ἰμφοινομένην ὑπερβολὴν ἀναγράφουσ ἔτως ἐπὶ
ἡ πλαγία αὐτῆς πλευρᾷ ἴση ἐπὶ τῷ $\frac{\alpha y}{\beta}$, (§. 252.)

ἡ παράμετρον αὐτῆς ἴση ἔσται τῷ $\frac{2\alpha y}{\beta}$. (§. 253.)

τῇδε ἐν τῇ παραμέτρῳ (ξ) γραφθῇτω ὑπερβολὴ ἡ ΒΑΓ.

(η) καὶ εἰληφθῶ ἀπελείμενη ἡ ΑΓ = y. ἔκιν ἡ ἀπὸ
τῷ Ε λαχθῇσα ΕΗ = Z. ἐπεὶ δὲ τὸ $x + \frac{\alpha y}{\beta} = Z$,

ἔσε-

(ξ) Ὅρα τὴν α' λ' β'. Συνίπ. τὴν μετὰ τὴν δ'. πρὸτ. τῶν Κων.
Τόμ. τὴν ἐν σελ. 165. τῷ β'. τόμ. καὶ τὴν δ'. τὴν ἐν σελ.

170. καὶ τὴν β'. τὴν ἐν σελ. 184. καὶ τὸ ἐξῆς §. 266.
(η) Πίν. XXX. χ. 3.

ἔσται $\Gamma\delta \chi = Z - \frac{\alpha\gamma}{\beta}$. εἰάν ᾖν ληφθῇ ἡ μὲν $EZ = \beta$,
 ἡ δὲ $EO = \alpha$, ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ZO , ἀχθῇ αὖ.
 τῇ ἀπὸ τῆς A ἡ AI παράλληλος, ἔσται ὡς $EZ : EO ::$
 $EA : EI$, ἥτοι $\beta : \alpha :: \gamma : EI = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$. ἡ ἄρα $IH =$
 $Z - \frac{\alpha\gamma}{\beta} = \chi$. ἐκὼν ἀχθείσης ἀπὸ μὲν τῆς IA τῇ AE
 παραλλήλῃ, ἀπὸ δὲ τῆς A τῆς AL τῇ EH , ἔσται ἡ
 μὲν $LI = \gamma$, ἡ δὲ $IH = \chi$, ἡ δὲ $IM = -\chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ'.

§. 257. Τὴν ἐξίσωσιν εὐρεῖν τὴν τὰς ἐν ταῖς Ἀσυμ-
 πλωτοῖς Ὑπερβολαῖς ἐμφορῶνται.

Ἐσώσαν τῶν Ὑπερβολῶν PBT , $\Sigma\Lambda\Sigma$ (9) τῶν διὰ
 τῆς κατὰ τὸ ζ (1) ἐξιστάσεως γεγραμμένων ἀσύμπτωται,
 αἱ ZI , $\Pi\Phi$. καὶ ἀπὸ τῆς τυχοῦτος τῆς Ὑπερβο-
 λῆς σημείω P ἐπὶ τὴν ἀσύμπλωτον KI τετάχθω ἡ PH ,
 παράλληλος τῇ $K\Pi$, καὶ ἀχθείσης τῆς κατὰ κορυφὴν
 ἐφαπτομένης ΔE , τετάχθω ἀπὸ τῆς P ἐπὶ τὸν KN ἄξο-
 να ἡ PN , καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ ἔστω
 ἡ μὲν $KH = Z$, ἡ δὲ $HP = \Pi$, ἡ δὲ $BN = \chi$, ἡ δὲ $NP = \gamma$,
 ἡ δὲ πλαγία πλευρὰ $AB = 2\alpha$, ἡ δὲ $\Delta E = 2\beta$. ἐκὼν ἔστω
 ταῖς ἡ μὲν $KN = \alpha + \chi$, ἡ δὲ $K\Delta = KE = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ $ΚΕΔ$, $ΗΡΙ$ τρίγωνα ὁμοιά εἰσιν, ἔστω
 ἄρα ὡς $KE : ED :: HP : PI$, ἥτοι ὡς $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} :$
 $2\beta :: \Pi : PI$. ἡ ἄρα $PI = 2\beta \Pi$. ἔστω δὲ καὶ ὡς $K\Delta :$
 $ED :: KH : \Pi$, (ἔστι γὰρ ὡς $KI : HI :: \Pi : PI$
 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

καὶ διαιρεθέντα, ὡς $KH : HI :: PR : PI$. καὶ εἰαλλάξ
ὡς $KH : PR :: HI : PI$. ὡς δὲ $HI : PI :: KA : EA$. διὸ
καὶ ὡς $KA : EA :: KH : PI$.) ἔτεν ὡς $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} : 2\beta :: Z : PI$. διὸ ἡ $PI = \frac{2\beta Z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. πάλιν ἐπειδὴ ὡς $KE : KN ::$
 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} :$

$BA : NI$, ἥτοι ὡς $\alpha : \alpha + \chi :: \beta : NI$, ἡ ἄρα $NI = \frac{\beta \cdot \alpha + \chi}{\alpha}$. ἀλλ' ἡ $NI - NP = PI$. ἄρα ἡ $PI = \frac{\beta}{\alpha}$.

$\alpha + \chi - y$. ἐπεὶ δὲ ἡ $NI = NP$, εἰσὶν ἡ $NI + NP = PI$. διὸ ἡ $PI = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha + \chi + y$. Ἐστὶ δὲ τὸ IP . $PI =$

IP . PI . διὸ ἡ ἐν $\Gamma\omega$ ἡ ἐξίσωσις γίνεσθαι. (κ) ἐξ ἧς, γεθέντος
ἀντὶ τῷ y^2 $\Gamma\delta$ ἴσθαι ἀπὸ $\Gamma\omega$, $\Gamma\delta$ ἐκ τῆς κατὰ τὸ ζ ἐξί-
σώσεως περικύπτοντος, ἡ ἐν τῷ Θ . ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ
1, ἥτις τὰς ἐν ταῖς Ἀσυμπτώταις Ὑπερβολαῖς ἐμφαίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 258. Ἐν τῇ ἐξίσώσει ἄρα τῇ ἐμφαινέσθαι τὰς
ἐν ταῖς Ἀσυμπτώταις Ὑπερβολαῖς τὸ ἐκ τῆς ἀποτετ-
μημένης καὶ τῆς τεταγμένης ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ γνω-
στῷ καὶ ὠρισμένῳ μεγέθει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 259. Ἐν ταῖς Ὑπερβολαῖς ἄρα ταῖς ἐν ταῖς
Ἀσυμπτώταις αἱ ἀποτετμημέναι ἐν ἀντιπεπονητότι λό-
γῳ εἰσὶ τῶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτῶν τεταγμένων.
ληφθείσης γὰρ ἐτέρας ὁποιασὲν ἀποτετμημένης, οἷον
τῆς KT , (λ) καὶ ταχθείσης ἀπὸ τῆς Γ τῆς Θ , εὐρε-
θήσεται ὡς ἀνωτέρω τὸ $KT \cdot T\Theta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$. διὸ τὸ

K

4

Π. Z

Π. Ζ=ΚΤ. ΓΘ, ἥτοι τὸ ΚΗ. ΗΡ=ΚΤ. ΤΘ. ὡς ἄρα
ΚΗ: ΚΤ:: ΤΘ: ΗΡ.

Κ Ε Φ. ΚΒ'.

Περὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ τῶν κωνικῶν Τομῶν
ἀναγραφής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 260. Τὴν τυχεῖσαν Παραβολὴν γράψαι.

Κανόνι ὑψακισμένῳ τῷ ΑΒ (μ) γνώμων ἐνηρμόδω ὁ
ΗΔΘ, ὃν νῆμα ἐφήρμεται τὸ ΔΕΦ. καὶ ἀχθείσης ἐνθείας
τῆς ΖΦ πρὸς ὁρθὰς τῷ ΑΒ κανόνι, ἐπὶ τυχέντος αὐτῆς
σημεῖς τῷ Φ σῆσον τὸ ἕτερον τῶν τῷ νήματος περὶ-
των. καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΦΖ κατὰ τὸ Γ, ἐπ' αὐ-
τῆς τῆς ΖΦ κειμένῃ τῷ ΗΔΘ γνώμονος, ἦλος παρην-
τεθείς ὁ Ε, ἐπὶ τῷ Γ πρώτον σῆτω, εἶτα ἐπὶ τῷ
Β μέσῃ φερόμενος, συμφέρειτω τὸν γνώμονα, τῷ μὲν
ΦΕ μέσῃ τῷ νήματος ἐντεταμένῃ διαπαντὸς διαμίνον-
τος, τῷ δὲ λοιπῷ τῷ γνώμονι ἐνηρμωμένῃ. λέγω ὅτι
ἡ ΓΕ καμπύλη, ἡ ὑπὸ τῷ ἦλοι φερεμένη γραφεῖσα,
Παραβολὴ ἐστίν. Ἦχθω γάρ ἀπότινος αὐτῆς σημεῖς,
τῷ Ε ἢ ΕΚ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΖΦ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΖΦ=
α, ἡ δὲ ΓΚ=χ, ἡ δὲ ΕΚ=γ. ἔκῃν ἔσται ἡ μὲν
ΖΓ=ΓΦ=α, ἡ δὲ ΦΚ=α-χ, ἡ δὲ ΦΕ=ΕΔ=
ΖΚ=α+χ.

Ἐπεὶ ἂν τὸ $\overline{ΦΕ}^2 = \overline{ΦΚ}^2 + \overline{ΚΕ}^2$, ἐκ τούτου ἄρα ἡ
ἐν τῷ Α ἐξίσωσις γίνεται, (ν) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Β, Παρα-
βολὴν ἐμφαίνεσα, παράμετρον ἔχεσαν τὸ 4α. (§. 236.)

ΠΟ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 261. Τὸ ἄρα Φ σημεῖον, (Ξ) ὅπερ Ἑστία τῆς Παραβολῆς καλεῖται, ἀπὸ μὲν τῆς κορυφῆς Γ τῆς Παραβολῆς ἀπέχει ἀποστήματι ἴσῳ τεταρτημορίου τῆς παραμέτρου· ἔστι γὰρ ἡ $\Gamma\Phi = \alpha$ · ἀπὸ δὲ τῆς κανόνος ΑΒ, τῷ τῆς παραμέτρου ἡμίσει. ἔστι γὰρ ἡ $\Phi\chi = 2\alpha$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 262. Διὰ κανόνος ἄρα, γνῶμενος, νήματος καὶ ἢ ἢ αἰρηται τρόπος (§. 260.) πᾶσα Παραβολὴ γραφθήσεται, ἢ ἢ ἐξίσωσιν δέδοται, εἴαν ληφθῇ ἀπὸ τῆς ἑνθάτης, τῆς πρὸς ὀρθῆς τῷ κανόνι ἀχθείσης, εἰς τῆς ΖΦ, μέρος ἴσον τῷ τῆς παραμέτρου ἡμίσει, ὅπερ ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆς ἀποτετμημένης χ (§. 236.) πολλαπλασιασῇ, οἷον ἐν τῇ προκειμένη κατὰ τὸ Β ἐξισῶσαι, (ο) τῷ 2α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 263. Τὴν τυχούσαν Ἐλλειψιν αἰαγραΐψαι.

Νήματος μήκους τυχόντος τὰ πέρατα Φ καὶ Ζ (π) ἐν τυχόντι ἀποστήματι τῷ ΦΖ ἐλάττωσι τῆς νήματος πεπλήχθω. ἢλος δὲ παρεντεθείς τῷ νήματι ἐντεταμένῳ διαμένοντι περιεγείδω πρῶτον μὲν ἐπὶ τὰ Δ μέρος, εἶτα καὶ ἐπὶ τὰ ἑναντία. λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῇ τοιαύτῃ Φορᾷ ὑπὸ τῆς ἢλος γραφεῖσα καμπύλη, Ἐλλειψὶς ἐστίν.

Ἠχθῶ γὰρ ἀπότινος τῶν ἑαυτῆς σημείων, τῆς Δ, ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθῆς τῇ ΦΖ, δίχα τμηθείσῃ κατὰ τὸ Κ. καὶ ἔσῃ ἡ μὲν $\text{ΚΓ} = \chi$, ἡ δὲ $\text{ΔΓ} = y$, ἡ δὲ $\text{ΦΖ} = 2\beta$, τὸ δὲ τῆς νήματος μῆκος, εἶπεν τὸ $\text{ΦΔ} + \text{ΔΖ} = 2\alpha$. ἔκῃν ἔσῃ ἡ μὲν $\text{ΦΓ} = \beta + \chi$, ἡ δὲ $\text{ΖΓ} = \beta - \chi$.

Κ 2

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν $\overline{\Phi\Lambda}^2 = \beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$,
 τὸ δὲ $\overline{\Delta\chi}^2 = \beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$, ἴσεται ἄρα τὸ
 μὲν $\Phi\Delta = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$, τὸ δὲ $\Delta\chi =$
 $\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$ διὸ τὸ $\Phi\Delta + \Delta\chi = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} +$
 $\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$. ἐκ τούτου ἔν προκύπτει ἡ κατὰ
 τὸ Γ ἐξίσωσις, (ρ) ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Δ γίνεται. τῶν τε-
 τραγώνων δὲ ἐκατέρωθεν ληφθέντων ἡ ἐν τῷ Ε, ἐξ ἧς ἡ
 ἐν τῷ Ζ, καὶ τῶν τετραγώνων πάλιν ληφθέντων, ἡ ἐν
 τῷ Η, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Θ, ἡ αὐτὴ ἴσα τῇ ἐν τῷ Ι, ἐξ
 ἧς ἡ ἐν τῷ Κ γίνεται, Ἐλλείψιν (ς. 243.) ἐμφά-
 νισα, πλαγίαν πλευράν, ἡ μείζονα διάμετρον, ἔχουσαν
 τὸ 2α' ἐλάσσονα δὲ, (ς. 245.) τὸ $2\sqrt{a^2 - \beta^2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

ς. 254. Τὸ μὲν ἄρα μῆκος τῆς νήματος ἴσον τῇ
 πλαγίᾳ τῆς Ἐλλείψεως πλευρᾷ. ἔστι γὰρ $\Phi\Delta + \Delta\chi =$
 2α' (σ) τὸ δὲ ἀπόστημα τῶν Φ, Ζ σημείων τῶν καλεμέ-
 νων Ἐξισῶν τῆς Ἐλλείψεως, ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ρί-
 ζῃ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς
 μείζονος ἄξονος, ἔσται τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὑπε-
 ρέχει τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος. ἔστι γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς
 μείζονος, $4a^2$. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, $4a^2 - 4\beta^2$.
 διὸ ἡ ὑπεροχὴ ἔστι τὸ $4a^2 - 4a^2 + 4\beta^2 = 4\beta^2$. ὅτι
 νος τετραγωνικὴ ρίζα τὸ 2β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

ς. 265. Δι' ἧς αἵ αἵματι καὶ νήματος, ἃ ἔρηται τρε-
 πα, πάσαν Ἐλλείψιν ἀναγάγομεν, ἧς ἡ ἐξίσωσις
 δὲ

δίδεται, ἂν τὸ μὲν τῷ νήματος μήκος ἴσον λάβωμεν τῷ μείζονι τῆς ἑκτίσεως ἄξονι, οἷον ἐν τῇ προκείμενῃ ἐξίσωσι, τῷ 2α· τὸ δὲ ἀπόστημα ΦΖ, ἐφ' ᾧ σῆσαι δεῖ τὰ τῷ νήματος πέρατα, ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ρίζῃ τῆς εἰρημένης (§. 204.) ὑπεροχῆς, ἥτοι τῷ 2β. (τ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 266. Τὴν τυχεῖσαν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι.

Τῷ ΒΛ κανόνι (υ) νῆμα ἐφημέσθω ἐλαττον αὐτῷ τῷ τυχόντι μεγέθει, οἷον τῷ ΑΖ. τὸ τυχόν δὲ ἀπόστημα ΑΓ λαβὼν, ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ τῶν αὐτῷ περάτων Α ἔτω σῆσον τὸν ΒΛ κανόνα, ὥστε περὶ τὸ Α σημεῖον ἐξῆναί περιάγειν αὐτόν· ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ, τῷ Γ, τὸ ἕτερον τῶν τῷ νήματος περάτων. κείθω δὲ πρῶτον ὁ κανὼν ἐπὶ τῆς ΑΓ, εἴτα ἥλος ὁ Δ περεντεθείς, φερέθω ἐπὶ τὰ Ε μέρη, συμπεριάγων καὶ τὸν κανόνα, μέρους μὲν τῷ νήματος, οἷον τῷ ΔΓ, ἐντεταμένε διαμείνοντος, τῷ λοιπῷ δὲ τῷ κανόνι ἐφημεοσμένε, λέγω, ὅτι ἡ τῇ τσιᾶδε τῷ ἥλῳ Φορᾷ γραφομένη καμπύλη Ὑπερβολὴ ἐστίν.

Ἐσω γὰρ ἐν τῶν τῆς καμπύλης σημείων τὸ Δ. καὶ ἀπ' αὐτῷ ἤχθω πρὸς ἑρθᾶς τῇ ΑΓ ἢ ΔΦ. δίχα δὲ τμηθείσης τῆς ΑΓ κατὰ τὸ Κ, ἔσω ἡ μὲν ΚΦ=χ, ἡ δὲ ΔΦ=γ, τὸ δὲ ΑΓ ἀπόστημα=2β, ἡ δὲ τῷ νήματος καὶ τῷ κανόνος διαφορὰ, ἥτοι ἡ ΑΖ=2α. ἐκδὲν ἔσεται ἡ μὲν ΑΦ=β+χ, ἡ δὲ ΓΦ=β-χ.

Οὐκὲν ἡ μὲν $ΑΔ = \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + \gamma^2}$, ἡ δὲ $ΓΔ = \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + \gamma^2}$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΔ - ΓΔ = ΑΖ = 2α, ἔσεται ἄρα ἡ ΑΔ - ΓΔ = 2α. ἐκ τούτου ἂν ἡ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις γίνεταί (φ) ἐξ ἧς ἡ ἐν

Κ 3

τῷ

(τ) Πλ. XXXII. (•) Πλ. XXX. κ. 6. (φ) Πλ. XXXII.

τῷ Μ· καὶ τῶν τετραγώνων ἐκατέρωθεν ληφθέντων,
 ἢ ἐν τῷ Ν, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Ξ· καὶ τῶν τετραγώνων
 πάλιν ἐκατέρωθεν ληφθέντων, ἢ ἐν τῷ Ο· ἐξ ἧς ἢ ἐν
 τῷ Π, ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ ἐν τῷ Ρ· ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Σ,
 ἢ Ὑπερβολὴν ἐμφαίνουσα, (ψ. 250.) ἢς πλαγία μὴ
 πλευρὰ τὸ α, (ψ. 252.) παραμέτρος δὲ (ψ. 253.)
 $\frac{2\beta^2 - 2\alpha^2}{\alpha}$

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

ψ. 267. Ἡ τε καίσιος ἄρα καὶ τῇ νήματος δια-
 φορὰ ἴση ἐστὶ τῇ πλαγίᾳ τῆς Ὑπερβολῆς πλευρᾷ· τὸ δὲ
 ἀπόστημα τῶν Α καὶ Γ σημείων, (χ) ἄπερ Ἐστὶαι τῆς
 Ὑπερβολῆς καλῶνται, ἴσον τῇ τεταγωνικῇ ρίζῃ τῇ
 κεφαλαίᾳ τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς παραμέτρος,
 δι' αὐτῆς τῆς πλαγίας πλευρᾶς πολλαπλασιασθέντες,
 εἶπεν τῷ $2\alpha + 2\beta^2 - 2\alpha^2$. $2\alpha = 4\alpha^2 + 4\beta^2 -$
 $4\alpha^2 = 4\beta^2$, ἔτινος ἢ α τεταγωνικὴ ρίζα $= 2\beta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

ψ. 268. Ἐστὶ δὲ καὶ ἄλλως ἀπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως
 πορίσασθαι τὸ τῶν Ἐστιῶν ἀπόστημα ΑΓ. ὁριθείσης γάρ
 τῆς πλαγίας πλευρᾶς καὶ τῆς παραμέτρος, καὶ ἡ δει-
 νύμενα διάμετρος μέση ἀνάλογον αὐτῶν ἔσται, (ψ) γνω-
 σὴ ἔσεται, ἢ τεταγωνικὴ δὲ ρίζα τῇ κεφαλαίᾳ τῇ
 αἰπ' αὐτῆς καὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τετραγώνῳ ἴση
 ἐστὶ τῷ τῶν Ἐστιῶν ἀποσήμετι ΑΓ. οἶον, ὁριθείσης
 μέσης ἀνάλογον τῶν α, καὶ $\frac{2\beta^2 - 2\alpha^2}{\alpha}$, τῆς $2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$
 ἴση

(χ) Πη. XXX. γ. 6.

(ψ) Κατὰ τὸν κδ. τῶν Κωι. Τομ. ὁρισμοὶ τὸν ἐν σελ. 85.
 καὶ Α'. τομ.

ἔτεται τὸ $4\beta^2 - 4\alpha^2 + 4\alpha^2 = 4\beta^2$, ἢ ἡ ῥίζα 2β
τὸ τῶν Ἐξῶν ἐστὶν ἀπόστημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 269. Διὰ κανόνος ἄρα, ἢ λυγρῆς καὶ νήματος τῷ διαληφ-
θῆντι τρόπῳ πᾶσα Ὑπερβολή, ἢς δέδοται ἡ ἐξίσωσις,
γραφθήσεται, εἴαν ἡ μὲν διαφορὰ ἢ μεταξὺ τῶ μῆ-
κους τῶ κανόνος καὶ τῶ νήματος ἴση ληφθῇ τῇ πλα-
γίᾳ τῆς Ὑπερβολῆς πλευρᾶς, αἶν ἐν τῇ προκειμένη
ἐξίσωσι, τῷ $2\alpha'$ (ω) τὸ δὲ τῶν Ἐξῶν Λ ἢ Γ (α)
ἀπόστημα ἴσον τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῶ γνωμένου ἐκ τῆς
πλαγίᾳ πλευρᾶς, ἢ τῶ κεφαλῆς αὐτῆς τῆς πλαγίᾳς
πλευρᾶς καὶ τῆς παραμέτρου, εἴεν τῷ 2β .

Κ Ε Φ. ΚΓ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶ εὐθεΐαν ἐφαπτομένην
ἄγειν ἀπὸ δοθέντος σημείου τῆς ὁποιασῶν
καμπύλης, ἢς δέδοται ἡ ἐξίσωσις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 270. Τὴν ἔκθεσιν εὐρεῖν τὴν ἐμφαίνουσαν τὴν
ἐφαπτομένην πάσης καμπύλης.

Ἐμφανέτω ὁποιαδήποτε καμπύλην ἡ ΓΦΔ, (β) ἢς
ἄξων μὲν ἡ ΓΨ, ἐφαπτομένη δὲ κατὰ τὸ Φ ἡ ΛΦ, τῷ
ἄξωνι ἐκβληθῆντι κατὰ τὸ Λ συμπίπτουσα. καὶ ταχ-
θείσης ἀπὸ τῶ Φ τῆς ΦΒ, εἰλήφθω σημεῖον τὸ Ζ
ὡς ἔγγιστα τῶ Φ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶ Ζ ἤχθω ἡ ΖΕ τῇ
ΦΒ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῶ Φ ἡ ΦΡ τῇ ΛΨ.

Κ 4

Οὐκ ἔν

(*) Πλ. XXXII. (α) Πλ. XXX. §. 6. (β) Πλ.
XXXI. §. 2.

Οὐκ ἔν δὲ τῶν σημείων Φ καὶ Ζ καὶ Ὑ ὑπερ-
 χὴν ἐγγύτητα τῆς μὲν ΦΔ τῆς ἴσης ΒΕ ἀπειράκις
 μείζων ἢ ΓΒ, τῆς δὲ ΚΔ ἢ ΒΦ ἢ ἴση τῇ ΕΔ. (ἀπει-
 ράκις μείζων καὶ ἀπειροπλάσιος λέγοντες, νοῶμεν ὅτι
 ἢ μὲν ΒΕ, τῆς ΓΒ, ἢ δὲ ΚΔ τῆς ΔΕ τοτῶτον ἐλάτ-
 τωον ἐσὶν, ὥστε ὡς ἐδὲν λογιζοίμεθα μὴδεμίαν αἰδητὴν
 ἐπιφέρειν αὐξήσιν ἢ μείωσιν.) ἐπεὶ δὲ γωνία ἢ ΖΦΔ
 τῇ ΖΦΚ παραβαλλομένη, ἀπειροπλάσιος αὐτῆς ἐστὶ,
 καὶ τὸ ἡμίτονον ἄρα τῆς ΖΦΔ τῷ τῆς ΖΦΚ παρα-
 τιθέμενον, ἔτεν ἢ ΖΔ τῇ ΖΚ, (γ) ἀπειράκις μείζων.

Ἔστω δὲ ἔν ἢ μὲν ΓΒ = χ, ἢ δὲ ΒΕ, ἀπειροε-
 μόσιον ἔστω τῆς ΓΒ, ἐμφαινέτω διὰ τῆς δχ. ὁμοίως ἔστω
 ἢ μὲν ΦΒ = υ, ἢ δὲ ΚΔ = δυ.

Ἐπεὶ ἔν τὰ ΖΔΦ, ΦΒΔ τρίγωνα ὁμοία εἰσιν, ἔστω
 ἄρα ὡς ΖΔ : ΔΦ :: ΦΒ : ΒΑ. ἐπεὶ δὲ ἢ ΖΔ ἀπειρο-
 πλάσιος τῆς ΖΚ, ἀλογεμένης ἄρα τῆς ΖΚ, ἀπει-
 ροπλάσιος ἀντὶ τῆς ΖΔ, τὴν ΚΔ ἐκλαβεῖν ἔξεστιν. οὕτως
 ἔστω ὡς ΚΔ : ΔΦ :: ΦΒ : ΒΑ, ἔτεν ὡς δυ : δχ ::
 υ : ΒΑ, ἢ ἄρα ΒΑ = $\frac{υδχ}{δχ}$.

Ἐπεὶ δὲ ἢ ΒΑ ἢ ὑφαπτομένη ἐστὶ τῆς καμπύλης
 δῆλον ἄρα ὅτι ἢ $\frac{υδχ}{δχ}$, ἢ ζητούμενη ἐκθεσίς ἐστιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 271. Ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείου Φ, (σχ. 3.) τῆς δὲ
 τῆς κατὰ τὸ Τ δοθείσης ἐξισώσεως (δ) ἐμφαινομένη
 κύκλου εὐθεῖαν ὑφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Ἔν

(γ) Κατὰ τὸ δ΄. Θέωρ., τῆς Τριγωνομ., τὸ ἐν σελ. 64. τῆ β΄ Τίμ.
 (δ) Πλ. XXXII,

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Τ ἐξίσωσι ἀντὶ μὲν τῆ χ , τε-
θέντος τῆ $\chi + \delta\chi$, ἀντὶ δὲ τῆ χ^2 τῆ $\chi + \delta\chi^2$,
καὶ ἀντὶ τῆ y^2 τῆ $y + \delta y^2$, ἡ ἐν τῷ Τ ἐξίσωσις
γίνεται, ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων, ἔσται τῆ y^2
καὶ τῆ $2\alpha\chi - \chi^2$, καὶ τῶν ἀπειροσημορίων, ἦτοι τῆ
 δy^2 , καὶ $\delta\chi^2$, (ἔστι γὰρ τὸ δy^2 ἀπειροσὸν τῷ δy
παρατιθέμενον. ὡς γὰρ $1 : \delta y :: \delta y : \delta y^2$. ἀπειρο-
πλασίς δὲ ἔσται τῆς μονάδος τῆ δy , ἀπειροπλασίον-
ἐστι καὶ τὸ δy τῷ δy^2 παραβαλλόμενον) ἡ ἐν τῷ Φ.
ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι τὸ $\delta\chi$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Χ. ἐν τῇ ἐκ-
δίσει ἐν $\frac{y\delta\chi}{\delta y}$ τῇ ἐμφανέσῃ τὴν ὑφαπτομένην πάσης

καμπύλης, ἀντὶ τῆ $\delta\chi$ τεθήτω τὸ ἀρτίως εὐρεθὲν
αὐτῷ ἴσον. προκύψει ἔν ἡ κατὰ τὸ Ψ ἐξίσωσις. τε-
θέντος δὲ ἀντὶ τῆ y^2 τῆ ἴση αὐτῷ, τῆ ἐν τῷ Τ,
ἡ ἐν τῷ Ω. ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆ
κύκλου ὑφαπτομένη ἴση τῇ $\frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$. Ἐὰν ἔν ἀπὸ

τῆ δοθέντος σημείου Φ ταχθῇ (ε) ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον
ἡ ΦΒ, ληθῇ δὲ ἡ ΓΒ = χ , ἐπεὶ ἡ ΓΔ = 2α , (φ. 228.)
ἔσται ἡ μὲν ΔΒ = $2\alpha - \chi$, ἡ δὲ ΚΒ = $\alpha - \chi$, τῆ Κ
κέντρος ὄντος τῆ κύκλου. διὸ εἰάν τῶν ΚΒ, ΔΒ, καὶ ΓΒ,
ἦτοι τῶν $\alpha - \chi$, $2\alpha - \chi$ καὶ χ , τετάρτη ἀνάλογος
εὐρεθῇ, ληθῇ δὲ ἴση αὐτῇ ἡ ΛΒ, ἔσται ἡ ΛΒ =
 $\frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$ ἡ τῆ κύκλου ὑφαπτομένη. ἡ ἄρα ἀπὸ τῆ Α

ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευχθεῖσα ΑΦ ἐφάπεται τῆ κύκλου κατὰ τὸ Φ.

ΠΡΩΒΛΗΜΑ Ι'.

§. 272. Ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείε Φ τῆς Παραβολῆς (σχ. 2.) τῆς ἐμφανισμένης ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τῆς κατὰ τὸ Α, (ζ) εὐθείαν ἐφαπτομένην ἀγαγῶν.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ μὲν τῆ χ , τῆ $\chi + \delta\chi$, ἀντὶ δὲ τῆ y^2 , τῆ $y + \delta y$, ἡ ἐν τῷ C ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων, καὶ τῶν διὰ τὴν σμικρότητα ὡς μηδὲν λογιζομένων, ἡ ἐν τῷ D. ἐν τῇ ἔν εκθέσει τῇ τὴν ὑφαπτομένην ἐμφανέση πάσης καμπύλης, τεθέντος ἀντὶ τῆ $\delta\chi$, τῆ ἀρτι

εὐρεθέντος αὐτῇ ἴσθ, ἡ ἐν τῷ E προκύπτει ἐξίσωσις. ἀντὶ δὲ τῆ y^2 τεθέντος τῆ ἴσθ αὐτῷ, τῆ κατὰ τὸ Α, ἡ ἐν τῷ F γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς ὑφαπτομένη ἴση τῷ 2χ . Ἐὰν ἔν ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείε Φ (η) ταχθῇ ἡ ΦΒ· ἐκβληθείσης δὲ τῆς ΨΓ ἐπὶ τὰ Α μέρη, ληφθῇ ἡ ΑΓ=ΓΒ=Χ, ἔσεται ἡ ΒΑ=2Χ. διὸ ἡ ἀπὸ τῆ Α ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευχθεῖσα ΑΦ ἐφάπεται τῆς Παραβολῆς κατὰ τὸ Φ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 273. Ἐὰν ἀπὸ τῆ Φ ἀχθῇ ἡ ΦΨ (θ) πρὸς ἑσθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ ΑΦ, καὶ τῷ ἄξονι συμπίπτουσα κατὰ τὸ Ψ, ἔσεται ἡ μὲν ὑποκάθετος ΒΨ=α, ἡ δὲ κάθετος ΦΨ= $\sqrt{2\alpha\chi + \alpha^2}$, ἡ δὲ ἐφαπτομένη ΑΦ $\sqrt{4\chi^2 + 2\alpha\chi}$. ἐπεὶ γὰρ ὡς ΑΒ: ΒΦ:: ΒΦ: ΒΨ, αἶτον ὡς $2\chi: y:: y: ΒΨ$, ἔσεται ἡ ΒΨ= y^2 . τεθέν-

2Χ

τος

τας δὲ τῆς $2\alpha\chi$ ἀντὶ τῆς y^2 , ἔσεται ἡ $B\Psi = 2\alpha\chi = \alpha$. ἐν

τέτῃ δὲ δῆλον, ὅτι ἡ $\Lambda\Psi = 2\chi + \alpha$. ἐπεὶ δὲ καὶ
 ἡ $\Lambda\Psi : \Psi\Phi :: \Psi\Phi : \Psi B$, ἦτοι ὡς $2\chi + \alpha : \Phi\Psi ::$
 $\Phi\Psi : \alpha$, ἔσεται τὸ $\Phi\Psi^2 = 2\alpha\chi + \alpha^2$. διὸ ἡ $\Phi\Psi =$
 $\sqrt{2\alpha\chi + \alpha^2}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $\Psi A : \Lambda\Phi :: \Lambda\Phi : AB$,
 τετίσιν ὡς $2\chi + \alpha : \Lambda\Phi :: \Lambda\Phi : 2\chi$, τὸ ἄρα $\Lambda\Phi^2 =$
 $4\chi^2 + 2\alpha\chi$. διὸ ἡ $\Lambda\Phi = \sqrt{4\chi^2 + 2\alpha\chi}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 374. Οὐκ ἔν ἐν τῇ Παραβολῇ ἡ μὲν ὑφαπτο-
 μένη AB διπλασία ἐστὶ τῆς ἀποτετμημένης GB , ἡ δὲ
 παράμετρος, ἦτοι τὸ 2α , τῆς ὑποκαθέτου $B\Psi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 275. Ἡ ἀπὸ τῆς σημείας τῆς ἐπαφῆς Φ ἐπὶ τῆς
 Ἐξίας Π ἐπιζευχθεῖσα $\Phi\Pi$ ἴση ἐστὶ τῇ $\Lambda\Pi$ τῇ ἀπὸ
 τῆς Ἐξίας Π καὶ τῆς ἐφαπτομένης ΦA ἀπολαμβαν-
 ομένη. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $\Gamma\Pi = \frac{1}{2}\alpha$, (§. 261.) ἔσεται ἡ
 μὲν $B\Pi = \chi - \frac{1}{2}\alpha$, ἡ δὲ $\Lambda\Pi = AB - B\Pi = 2\chi -$
 $\chi + \frac{1}{2}\alpha = \chi + \frac{1}{2}\alpha$. ἔστι δὲ τὸ $\Phi\Pi^2 = \Phi B^2 +$
 $B\Pi^2$, ἦτοι τὸ $\Phi\Pi^2 = y^2 + \chi^2 - \alpha\chi + \alpha^2$, καὶ ἀντὶ τῆς
 y^2 τεθέντος τῆς ἴσως ἀντὶ τῆς A , (1) τὸ $\Phi\Pi^2 =$
 $2\alpha\chi + \chi^2 - \alpha\chi + \alpha^2 = \chi^2 + \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2$. διὸ ἡ
 $\Phi\Pi = \chi + \frac{1}{2}\alpha$. (κ) ἡ ἄρα $\Phi\Pi = \Lambda\Pi$.

ΠΟ.

(1) Πλ. XXXII. (κ) Πλ. XXVII. χ. 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

§. 276. Τῆς δευτέρας διαμέτρου ΦΡ (λ) παράμετρος ἐστὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς ΦΠ. ταχθείσης γὰρ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ τῆς ΓΔ, ἔσεται ἡ μὲν ΦΔ = ΛΓ, ἡ δὲ ΓΔ = ΛΦ. (ἔστι γὰρ ἡ μὲν ΓΔ τῇ ΛΦ, ἡ δὲ ΦΡ τῇ ΛΨ παράλληλος) διὸ ἡ μὲν ΦΔ = χ, ἡ δὲ ΓΔ = $\sqrt{4\chi^2 + 2\alpha\chi}$. (§. 273.) ἔκθ' ἐν τῷ $\overline{\Gamma\Delta^2} = 4\chi^2 + 2\alpha\chi$. ἐπεὶ δὲ ἡ ΦΠ = $\chi + \frac{1}{2}\alpha$, τὸ ἄρα $4\Phi\Pi = 4\chi + 2\alpha$. διὸ τὸ ΦΔ. $4\Phi\Pi = \chi$. $4\chi + 2\alpha = 4\chi^2 + 2\alpha\chi$. τὸ ἄρα $\overline{\Gamma\Delta^2} = \Phi\Delta$. $4\Phi\Pi$. ὡς ἄρα ΦΔ: ΓΔ :: ΓΔ: $4\Phi\Pi$. τὸ ἄρα $4\Phi\Pi$ τρίτῃ ἔσται ἀνάλογος τῇ ἀποτετμημένῃ ΦΔ καὶ τῇ τεταγμένῃ ΓΔ, παράμετρος ἐστὶ (μ) τῆς ΦΡ διαμέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 277. Ἀπὸ τῆς δοθέντος τῆς Ε' λείψεως σημείου Ζ, (σχ. 5.) τῆς ἐμφαινιμένης διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τῆς κατὰ τὸ Γ (ν) εὐθείαν ἐφαπτομένην ἀγαγῆν.

Τεθέντος ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ἀντὶ τῆς χ τῆς $\chi + \delta\chi$, καὶ τῆς $\chi + \delta\chi^2$ ἀντὶ τῆς χ^2 , καὶ τῆς $y + \delta y^2$ ἀντὶ τῆς y^2 , ἡ κατὰ τὸ L ἐξίσωσις γίνεται· ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων καὶ τῶν ἀπειροσῶν, ἡ ἐν τῇ Μ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῇ Ν. ἐν τῇ ὅν ἐκθίσει τῇ ἐμφαινέσῃ τὴν ἐφαπτομένην πάσης καμπύλης, (§. 270.) ἀντὶ τῆς $\frac{\delta\chi}{\delta y}$ τεθέντος τῆς ἀερίως εὐρεθέντος αὐτῷ ἴσθ'.

(λ) Ὅρα τὸν κί. ὄρισμ. τῶν Κων. Τομ, τὸν ἐν σελ. 86. τῷ β'. τόμ.

(μ) Κατὰ τὸν προσημ. κα'. ὄρισμ.

(ν) Πίν. XXXII.

ἡ κατὰ τὸ Q ἐξίσωσις προκύπτει. ἐν ᾗ ἀντὶ τῆς y^2 τεθέντος τῆς ἴσως αὐτῶν, τῆς ἐν τῶ G, ἡ ἐν τῶ R γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι ἡ τῆς Ἐλλείψεως ΑΖΦ ὑφαπτομένη (ξ) τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τῶν $\alpha - \chi$, $2\alpha - \chi$, καὶ χ .

Ἐὰν ὅν ἐπὶ τῆς μείζονος Διαμέτρου ΑΦ $= 2\alpha$, (ς. 244.) καὶ διχα τετμημένης κατὰ τὸ Κ ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείου Ζ ταχθῇ ἡ ΖΒ, καὶ ληφθῇ ἡ ΑΒ $= \chi$, ἔσεται ἡ μὲν ΦΒ $= 2\alpha - \chi$, ἡ δὲ ΚΒ $= \alpha - \chi$. διὸ ἡ τετάρτη ἀνάλογον τῶν ΚΒ, ΦΒ, ΒΑ ἡ ὑφαπτομένη ἔσεται τῆς ΑΖΦ Ἐλλείψεως. ληφθείσης ὅν τῆς ΒΗ $= \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$, ἡ ἀπὸ τῆς Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευχθεῖσα ΗΖ ἐφάπτεται τῆς Ἐλλείψεως.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

ς. 278. Ἀχθείσης ὅν ἀπὸ τῆς Ζ τῆς ΖΓ πρὸς ἐξάς τῇ ἐφαπτομένη ΗΖ, ἔσεται ἡ ὑποκάθετος ΒΓ $= \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \alpha - \chi$. ἔστι γὰρ ὡς ΗΒ : ΒΖ :: ΒΖ : ΛΓ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ε'.

ς. 279. Ἀπὸ τῆς δοθέντος σημείου Μ τῆς Ὑπερβολῆς ΡΒΥ, (ο) τῆς, ἐμφαινομένης ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξίσωσεως, τῆς κατὰ τὸ Λ, (π) ἐφαπτομένην εὐθεῖαν ἀγαγῆν.

Ἀντὶ μὲν τῆς χ καὶ τῆς χ^2 θῆς ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξίσωσει τὸ $\chi + \delta\chi$, καὶ τὸ $\chi + \delta\chi^2$. ἀντὶ δὲ τῆς y^2 τὸ

τὸ $\gamma + \delta \gamma$.² ἐκὼν προκύπτει· ἢ κατὰ τὸ Β ἐξίσωσις
ἐξ ἧς ἀφαιρεθέντων τῶν ἴσων καὶ τῶν ἀπειρεσῶν,
ἢ κατὰ τὸ Γ γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Δ. τεθέντας
δὲ ἐν τῇ ἐκθείσει $\gamma \delta \chi$ (§. 270.) ἀντὶ τῆς $\delta \chi$ τῆς

αὐτῶς τῆς ἐν τῷ Δ, ἢ ἐν τῷ Ε, ἐξ ἧς ἢ ἐν τῷ Ζ. ἐξ
αὐτῆς δὲ δῆλον, ὅτι ἢ τῆς προκειμένης Ὑπερβολῆς
ὑφαπτομένη τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τῶν $\alpha + \chi$, $2\alpha + \chi$,
καὶ χ .

Ἐπεὶ ἔν ἢ τῆς Ὑπερβολῆς πλαγία πλευρὰ (ρ) ΑΒ=2α,
(§. 252.) ἀχθίστης ἀπὸ τῆς Μ τῆς τεταγμένης
ΜΛ, ἔσεται ἢ μὲν ΒΛ=χ, ἢ δὲ ΑΛ=2α+χ,
ἢ δὲ ἀπὸ τῆς κέντρος ΚΛ=α+χ. διὸ δὴ ἢ τετάρτη
ἀνάλογον τῶν ΚΛ, ΑΛ, ΒΛ, ἢ ὑφαπτομένη ἐστὶ τῆς
Ὑπερβολῆς. εἰάν ἔν ληφθῇ ἢ ΑΓ= $\frac{2\alpha\chi + \chi^2}{\alpha + \chi}$, ἢ

ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθεῖσα ΓΜ, ἐφαπτεται
τῆς Ὑπερβολῆς κατὰ Μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 280. Ἰστέον δὲ ὅτι τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὐρεθήσεται
ἢ ὑφαπτομένη, ἐξ ἧς καὶ ἢ ὑφαπτομένη πάσης καμπύλης,
ἧς ἢ ἐξίσωσις δίδεται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 281. Αἱ τὰς κωνικὰς τομαὶς ἐμφαίνεσαι ἐξίσωσεις,
πλὴν τῆς τριγώνου δηλώσεως, δευτέρου βαθμοῦ
εἰσίν. (§. 98.) ὅσαι δὲ τῶν καμπύλων ὑπὸ ἐξισώσεων
ἐμφαίνονται μείζονος βαθμοῦ ἢ περὶ ὁ δεύτερος, ἐκείναι
Καμπύλαι ἀνωτέρων βαθμῶν λέγονται.

ΚΕΦ.

Κ Ε Φ. ΚΔ'.

Ἐπὶ γεωμετρικῶν τόπων, καὶ τῶν δι' αὐτῶν
ἐπιλιομένων ἀορίστων προβλημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 282. Τόπος γεωμετρικὸς λέγεται εὐθεῖα, ἡ
κύκλος, ἡ κωνικὴ τμήν, ἡ ὀψιαῖον καμπύλη, δι' ἧς τὸ
κατεῖν ἐπιλύεται πρόβλημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 283. Ἀπαντα τὰ ἀόριστα γεωμετρικὰ προβλή-
ματα διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιλύεται τόπων· τινὰ μὲν
ἰσοθείας καὶ κύκλους, τινὰ δὲ τῇ εὐθείᾳ καὶ κώνῳ
μῆς ἢ καμπύλης, τινὰ δὲ τῇ δύο κώνων τμημάτων, ἢ
ὡς ὀψιωνέν καμπύλων διατομῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 284. Δοθείσης τῆς θέσεως τῶν ΑΥ, ΑΨ, (σ)
ἰσὺς τῆς ὑπ' αὐτῶν περιχεμένης ΥΑΨ γωνίας, εὐρεῖν
ταξὺ αὐτῶν σημεία, ἀφ' ὧν αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι καὶ
γωνίας περιέχουσαι δοθείσας, λόγον ἔχουσι δοθέντα πρὸς
ἀλλήλας, οἷον ὃν ἔχει τὸ α: γ.

Ἔστω ἐν τῶν ζητούμενων σημείων τὸ Γ. καὶ ἤχθωσαν
π' αὐτῷ αἱ ΓΖ, ΓΦ, γωνίας περιέχουσαι δοθείσας.
ἔστω γινώσκαι μὲν ἔσονται αἱ ΓΖΑ, ΓΦΑ γωνίαι, γνω-
στὸ δὲ καὶ ὁ λόγος ἐν ἔχει ἢ ΓΖ: ΓΦ, ὅστις ἐστὶν ὁ
λόγος, ἐν ἔχει τὸ α: γ. ἀχθείσης ἐν ἀπὸ τοῦ Γ τῆς
ἐν ΓΚ παραλλήλου τῇ ΑΦ, τῆς δὲ ΓΤ τῇ ΑΨ, γνω-
στὴ ἔσεται ἑκατέρωθεν τῶν ΓΚΖ, ΓΤΦ γωνιῶν. ἑκατέρωθεν
ἴση τῇ δοθείσῃ ΥΑΨ. γνωστὸς ἄρα ἔσται καὶ ὁ λό-
γος ἐν ἔχει ἢ τε ΓΚ: ΓΖ, καὶ ἢ ΓΤ: ΓΦ. τῶν γὰρ
ἴσων γωνιῶν, γνωστὰ καὶ τὰ ἡμίτονα, τὰ δὲ τῶν
γων-

γωνιῶν ἡμίσεα ἀνάλογα ταῖς τῶν γωνίας ὑποτείνουσιν
 πλευραῖν. ἴαν ἄρα $\tilde{\gamma}$, ἡ μὲν $\Lambda\text{K}::\text{H}::\chi$, ἡ δὲ $\text{K}\Gamma::\gamma$,
 καὶ ὡς μὲν $\Gamma\text{K}::\Gamma\text{Z}::\alpha::\beta$, ὡς δὲ $\Gamma\Gamma::\Gamma\Phi::\alpha$
 * , ἴσται ὡς μὲν $\alpha::\beta::\gamma::\Gamma\text{Z}::\beta\gamma$, ὡς δὲ α :

* :: $\chi::\Gamma\Phi::\gamma\chi$. ἄρα καὶ ὡς $\beta\gamma::\gamma\chi::\alpha::\gamma$.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἡ κατὰ τὸ $\text{H}(\Gamma)$ ἐξίσωσι
 γίνεται, τρίγωνον ($\S$ 22.) ἐμφαίνουσα. διὸ δῆλον,
 ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τέποι, δι' ὃ τὸ προκείμενον ἐπιλύ-
 ται πρὸς βλεψαίνον ἐστίν, ἐν ᾧ τὰ ζητούμενα εἰσὶ σημεῖα.

Ἐκ βλεψαίνουσης ἥν κατὰ τὸ συνεχὲς τῆς $\Lambda\Psi$, (v)
 εἰλήφθω ἡ $\Lambda\Psi::\beta\gamma$. καὶ ἀπὸ τῆ Ψ ἀχθείσῃς τῆς

ΨH παραλλήλῃ τῇ $\Lambda\Gamma$ καὶ ἴσῃς τῷ * , ἐπεξεύχθω
 ἡ ΛH , καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. λίγω
 ὅτι τὰ τῆς ΛH σημεῖα τὰ ζητούμενά εἰσιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς $\Lambda\Psi::\Psi\text{H}::\Lambda\text{K}::\text{K}\Gamma$, ἴσται καὶ ὡς
 $\beta\gamma::\epsilon::\chi::\gamma$. αἱ ἄρα ἀπὸ τῆ Γ ἀχθείσας ΓZ , $\Gamma\Phi$

αἵτινες καὶ δοθείσας περιέχουσι γωνίας, λόγον ἔχουσι πρὸς
 ἀλλήλας ἐν τῷ $\alpha::\gamma$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ, λεφθείσῃς τῆς
 $\Lambda\Lambda::\chi$, καὶ ἀπὸ τῆ Δ ἀχθείσῃς τῆς ΔE παραλλήλῃ
 τῇ $\Lambda\Gamma$, αἱ ἀπὸ τῆ E ἀγόμεναι $\text{E}\Phi$, $\text{E}\Gamma$ καὶ γωνίας περιέ-
 χουσαι ταῖς δοθείσαις ἴσας, λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας
 ἐν τῷ $\alpha::\gamma$. καὶ τῆς $\Lambda\Lambda$ δὲ λεφθείσῃς ἴσῃς τῷ χ , καὶ τῆς
 ΛM ἀχθείσῃς παραλλήλῃ τῇ $\text{H}\Psi$, ἴσται καὶ τὸ M
 ἐν τῶν ζητούμενων σημείων. ἐφ' ὃ ἴαν ἀχθῶσιν αἱ $\text{M}\Theta$,
 MN , γωνίας περιέχουσαι ἴσας ταῖς δοθείσαις, ἔχουσι
 λόγον πρὸς ἀλλήλας, ἐν τῷ $\alpha::\gamma$. ἔστι γὰρ ὡς $\Lambda\Psi::$
 $\Psi\text{H}::\Lambda\Lambda::\Lambda\text{M}$, ἥτοι ὡς $\beta\gamma::\epsilon::\chi::\gamma$.

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

§. 285. Ἐπειδὴ γενικῶν κανόνων ἀπορῶμεν τὴν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων λύσιν πορίζοντων, τῷτο τὸ μέγιστον συντομῇ, ἀμείλιτοι τὸ ὡς γνωστὸν ἐκλαμβάνουσιν τὸ ζητούμενον. ἐκ συνεισίας δὲ εἰς συνεισίαν μεταβαίνοντας, ἄλλοτε μὲν παραλλήλους, ἢ καθέτους ταῖς δοθείσαις ἐυθείαις ἄγοντας, ἄλλοτε δὲ γωνίας ἴσας ταῖς δοθείσαις, ἢ τρίγωνα τοῖς δοθεῖσιν ὅμοια κατασκευάζοντας, ἐπ' ἐκάστης τελευταίαν ἱκανοῦς τῆς συνεισίας, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἐξίσωσις, ἀφ' ἧς ἢ τῷ προκειμένη προβλήματος ἤρηται ἐπίλυσις. εἰς ὃν ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι, ἵνός τῶν ζητημένων σημείων λογιζίντες τῷ Γ, καὶ ἀχθεύσας τῶν ΓΖ, ΓΦ, τὴν δὲ ἐπορισάμεθα τὴν συνεισίαν γνωσάμεθα αἱ ΓΖΑ, ΓΦΑ γωνίαι, καὶ ὁ λόγος ὃν ἔχει ἡ ΓΖ : ΓΦ, πάλιν ἀχθεύσας τῶν ΓΚ, ΓΓ παραλλήλων ταῖς ΑΦ, ΑΨ, ἐπορισάμεθα τὴν δὲ καὶ αἱ γωνίαι ἄρα ΓΚΖ, ΓΤΦ γνωσάμεσιν· ἐκ τούτου δὲ καὶ τὸ γνωστὸν εἶναι τὸν λόγον τῆς τε ΓΚ : ΓΖ, καὶ τῆς ΓΤ : ΓΦ ἐκ τούτου δὲ αἱ ἀναλογίαι γιγνόμεναι, δι' ὧν αἱ ἐκθέσεις ἐξηρτηται, αἱ τὰς ΓΖ, ΓΦ ἐμφαίνουσαι. ἐξ ὧν τελευταίον καὶ ἡ ἐχάστη γίγνεται ἀναλογία, ἐξ ἧς ἡ ἐξίσωσις συνίστη, ἢ τὸ τρίγωνον ἐμφαίνουσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

§. 286. Δεθίντες τῷ ΑΓΒ ὀρθογώνιον τρίγωνον, (χ. 7.) εὐρεῖν τρίγωνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν ἐπίρραν τῶν τὴν ἐκθετὴν γωνίαν ΑΓΒ περιχέουσιν πλευρῶν, τὴν ΑΓ, τὰς δὲ πλευράς αὐτῶν ἀναλόγως ταῖς λοιπαῖς τῷ δοθέντι τρίγωνον πλευραῖς.

Ἔστω δὲ ἐν τῶν ζητημένων τριγώνων τὸ ΑΨΓ. καὶ ἔχῃ τμηθείσης τῆς ΑΓ κατὰ τὸ Φ, ἥχθω ἀπὸ ΓΨ

Λ

Ψ

Ψ ἢ ΨΖ. πρὸς ἐκθὰς τῇ ΛΓ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΛΓ = 2α,
ἡ δὲ ΓΒ = β, ἡ δὲ ΦΖ = χ, ἡ δὲ ΖΨ = γ.

Οὐκ ἔν ἡ μὲν ΛΖ = α + χ, ἡ δὲ ΓΖ = α - χ. διὸ
ἡ μὲν ΛΨ = $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 + \gamma^2}$, ἡ δὲ ΨΓ =
 $\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + \gamma^2}$, ἡ δὲ ΛΒ = $\sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}$.
ὡς ἄρα $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 + \gamma^2} : \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + \gamma^2} ::$
 $\sqrt{4\alpha^2 + \beta^2} : \beta$. ἄρα καὶ ὡς $\alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 + \gamma^2 :$
 $\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + \gamma^2 :: 4\alpha^2 + \beta^2 : \beta^2$. ἐκ ταύτης
δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ Θ ἐξίσωσις (Φ) γίνεται
ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Ι' ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ ἐν τῷ Κ. τεθίντος δὲ τῷ
 $\beta^2 + 2\alpha = 2\mu$, καὶ πληρωθέντος τῷ τετραγώνῳ, ἡ ἐν
α
τῷ Λ. ἐξ ἧς τεθίντος τῷ μὲν $\mu - \chi = \gamma$, τῷ δὲ $\mu^2 -$
 $\alpha^2 = \gamma^2$, ἡ ἐν τῷ Μ γίνεται, κύκλον ἐμφαίνουσα,
ἡμιδιάμετρον ἔχοντα (ψ. 230.) τὸ γ. ἥλον ἄρα ἐστὶ
ὁ γεωμετρικὸς τόπος κύκλος εἶναι, ὃ ἀναγραφέντος,
λυθήσεται τὸ πρόβλημα.

Ἦχθω ἔν ἀπὸ τῷ Β (χ) ἡ ΒΚ πρὸς ἐκθὰς τῷ ΑΒ,
τίμνωσα τὴν ΛΓ ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπὶ αὐτῇ
ΛΓ : ΓΒ :: ΓΒ : ΓΚ, ἥτοι ὡς 2α : β :: β : ΓΚ, ἐστὶ
ται ἡ ΓΚ = $\frac{\beta^2}{2\alpha}$. ἡ ἄρα ΦΚ = $\alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha} = \mu$. διὸ τὸ
 $\mu^2 = \alpha^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2} + \beta^2$. ἀλλὰ τὸ $\mu^2 - \alpha^2 = \gamma^2$. ἄρα
καὶ τὸ $\alpha^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2} + \beta^2 - \alpha^2 = \beta^2 + \frac{\beta^4}{4\alpha^2} = \gamma^2$. τὸ
ἄρα

$$\alpha \gamma = \beta \sqrt{4\alpha + \beta^2}. \text{ ἀλλὰ καὶ ἡ } \text{BK} = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{4\alpha + \beta^2},$$

(ἔστι γὰρ τὸ $\overline{\text{BK}}^2 = \overline{\text{BK}}^2 + \overline{\text{IK}}^2$, ἥτοι τὸ $\overline{\text{BK}}^2 = \beta^2 + \beta^2$.) ἡ ἄρα $\text{EK} = \gamma$. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Κ, δια-
 $4\alpha^2$

τίματι δὲ τῷ ΚΒ γραφόμενος κύκλος, ὁ ἐμφαινόμε-
 νός ἐστιν ὑπὸ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν
 $\Phi\text{Z} = \chi$, ἡ δὲ $\Phi\text{K} = \mu$, ἡ ἄρα $\text{KZ} = \Phi\text{K} - \Phi\text{Z} = \mu -$
 $\chi = \nu$, ἡ δὲ $\text{Z}\Psi = \gamma$.

Αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν σημείων τῆς περιφερείας τῆς ΒΨΔ
 ὡς καὶ ἐπὶ τὰ Α καὶ Γ σημεία ἐπιζευγνύμεναι εὐθεΐαι,
 τὰ ζητούμενα συστήσωσι τρίγωνα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

§. 287. Λοθισσῶν τῶν ΑΔ, ΗΘ εὐθειῶν, (χ. 8.)
 εὐρεῖν μὲν εὐθεΐαν, τεμνῶν δὲ τὴν ΑΔ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν
 τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ
 τῆς εὐρεθησομένης καὶ τῆς δεθείσης ΗΘ περιεχομένῳ
 ὀρθογώνιῳ.

Ἐστω ἡ μὲν ζητημένη εὐθεΐα = γ , ἡ δὲ ΑΔ = α ,
 ἡς κατὰ τὸ Γ τμηθείσης, ἔστω ΑΓ = χ . ἔκθ' ἡ ΓΔ =
 $\alpha - \chi$.

Τὸ ἄρα ΑΓ. ΓΔ = γ . ΗΘ, ἄτεν τὸ $\alpha\chi - \chi^2 = \beta\gamma$.
 ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ Ν (Ψ) γίνεται,
 καὶ τῶν τετραγώνων πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ Ξ. καὶ
 τεθέντος, τῶ μὲν $\chi - \alpha = \nu$, τῶ δὲ $\alpha^2 - \beta\gamma = \beta\nu$,
 $\frac{2}{2}$ $\frac{4}{4}$

Α 2

ή

ἢ κατὰ τὸ Ο, Παραβολὴν (§. 234.) ἐμφαίνεσα. Παραβολὴ ἄρα ἐστὶν ὁ γεωμετρικὸς τόπος, δι' ὃ τὸ πρὸς κείμενον ἐπιλύεται πρέβλημα.

Τετμήθω ἔνδιχα ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Β, (ω) καὶ ἡχθῶ ἀπ' αὐτῆς τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθῆς ἡ ΗΒ = α^2 , καὶ πα-

$\frac{4\beta}{4\beta}$

ραμέτρῳ τῷ Β = ΗΘ (§. 236.) ἀναγεγράφθω Παραβολὴ ἡ ΑΗΔ. ληφθεὶς ἐν τῇς ἀποτετμημένης ΗΖ = Ω, ἔσται ἡ τεταγμένη ΖΕ = γ. ἀχθεὶς δὲ ἀπὸ τῆς Ε τῆς ΕΓ παραλλήλου τῇ ΗΒ, ἔσται ἡ μὲν ΑΓ = Χ, ἡ δὲ ΓΕ = γ. ἐπεὶ γὰρ τὸ $\chi - \alpha = z$,

ἔσται τὸ $\chi = z + \frac{\alpha^2}{2}$. ἐστὶ δὲ ἡ μὲν ΑΒ = $\frac{\alpha^2}{2}$, ἡ δὲ

ΒΓ = ΖΕ = z. διὸ ἡ ΑΒ + ΒΓ = ΑΓ = $\frac{\alpha^2}{2} + z = \chi$.

ἐπεὶ δὲ τὸ $\frac{\alpha^2}{4} - \beta\gamma = \beta\Omega$, τὸ ἄρα $\gamma = \frac{\alpha^2}{4} - \Omega$. ἐστὶ

δὲ τὸ ΒΗ - ΗΖ = $\frac{\alpha^2}{4} - \Omega$. τὸ ἄρα ΒΗ - ΗΖ = ΒΖ =

ΓΕ = γ.

Ἡ ἀπὸ παντὸς ἄρα σημεῖος τῆς ΑΗΔ ἀγχομένη καθετος τῇ ΑΔ, ἡ ζητούμενη ἔσται, ἥτις τεμεῖ τὴν ΑΔ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ὑπ' αὐτῆς τῆς τεμνύσης καὶ τῆς ΗΘ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 288. Δοθεσῶν τῶν εὐθειῶν ΖΚ, ΖΓ (§. 9.) τῶν ἐκ τῆς γωνίας περιεχουσῶν, τὴν ΓΖΚ, καὶ τῶν Β καὶ Γ σημείων, εὐρεῖν ἐφ' ἐκάστην τῶν Παραβολῶν, ὧν τὸ Β καὶ

κορυφῇ, σημῶν ἐφ' ὃ ἡ ἀπὸ τῆς Γ ἐπιζευγνυμένη πρὸς ῥοθὰς ἢ τῇ Παραβολῇ, εἶπεν τῇ κατὰ τὸ εἰρημένον σημῶν ἐφαπτομένη τῆς Παραβολῆς.

Ἔστω μία τῶν Παραβολῶν ἡ ΒΜΘ, καὶ τὸ ἐν αὐτῇ ζητούμενον σημῶν τὸ Μ. ἡ ἄρα ἀπὸ τῆς Γ ἐπὶ τὸ Μ ἐπιζευχθῶσα ΓΜ πρὸς ῥοθὰς ἐστὶ τῇ τῆς Παραβολῆς ἐφαπτομένη ΦΜ. ἤχθω ἔν ἀπὸ τῆς Μ ἡ μὲν ΜΚ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΜΗ τῇ ΖΚ παράλληλος. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΓΖ = α, ἡ δὲ ΖΒ = β, ἡ δὲ ΒΚ = χ, ἡ δὲ ΚΜ = γ. καὶ ἔσται δὴ ἡ μὲν ΗΜ = ΖΚ = ΖΒ + ΒΚ = β + χ, ἡ δὲ ΓΗ = ΓΖ - ΗΖ = ΓΖ - ΜΚ = α - γ, ἡ δὲ (φ. 274.) ΦΚ = 2χ.

Ἐπεὶ δὲ τὰ ΦΜΚ, ΜΗΓ τρίγωνα ὁμοιά εἰσιν, ἔσιν ἄρα ὡς ΦΚ : ΚΜ :: ΗΓ : ΗΜ, ἥτοι ὡς 2χ : γ :: α - γ : β + χ. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ Π ἐξίσωσις γίνεται (α) ἐξ ἧς, τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Ρ τεθέντος δὲ τῷ $\chi + \beta = \frac{\Pi}{2}$, ἡ ἐν τῷ Σ

καὶ πάλιν τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἡ ἐν τῷ Τ τεθέντος δὲ τῷ $\gamma - \alpha = \frac{Z}{2}$, τῷ δὲ $\frac{\alpha^2 + \beta}{4} = \gamma^2$,

ἡ ἐν τῷ Υ, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ Φ, Ἐλλειψιν (φ. 243.) ἐμφαίνουσα. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος, δι' ὃ τὸ προκείμενον ἐπιλύεται πρόβλημα Ἐλλειψίς ἐστὶ.

Τετμήσω ἔν δίχα ἡ ΓΖ (β) κατὰ τὸ Ο, καὶ ἤχθω διὰ τῆς Ο ἡ ΟΨ παράλληλος τῇ ΖΚ. ὁμοίως δίχα τετμήσῃς τῆς ΖΒ κατὰ τὸ Τ, ἤχθω ἀπὸ τῆς Τ ἡ ΤΕ παράλληλος ὁποτέρᾳ τῶν ΓΖ, ΨΚ. καὶ γεγραφθῶ Ἐλλειψίς ἡ ΕΛΑΙ, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ

Λ 3

ΕΛ

$EA = 2\gamma$, (§. 244.) ἐλάσσων δὲ ἢ $IA = 2\gamma$. (§. 245.)

καὶ ἔσται δὴ τὸ Δ τὸ τῆς Ἐλλείψεως κέντρον. ἔστι γὰρ
 ἢ $\Delta\psi = TK = \beta + \chi = \Pi$. διὸ ἢ $\Psi M = \Psi K - MK =$
 $\frac{\alpha - \gamma}{2} = Z$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 289. Δοθείσης τῆς διαφορᾶς τῶν πρὸς τῇ βά-
 σει γωνιῶν τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς AB (§. 10.) βάσεως
 τριγώνων, εὑρεῖν τὸν γεωμετρικὸν τύπον, ἐν ᾧ αἱ κε-
 ρυφαὶ αὐτῶν.

Ἐστω μία τῶν ζητούμενων κρυφῶν ἢ τῆ AGB τρι-
 γώνου Γ . Ἐὰν ἄρα, διῇα τμηθείσης τῆς AB κατὰ τὸ
 K , ᾗ $\chi\theta\eta$ ἀπὸ τῆ K ἢ KE πρὸς ὀρθὰς τῇ AB , ἢ
 ἀπὸ τῆ A ἐπὶ τὸ E ἐπιζευχθῇ ἢ AE . ἔσεται ἡ γω-
 νία $EAB = EBA$. διὸ ἢ $ΓAE$, ἡ διαφορὰ ἔστι τῶν πρὸς
 τῇ βάσει γωνιῶν $ΓAB$, $ΓBA$ τῆ AGB τριγώνου. ληφ-
 θέσης δὲ τῆς $AZ = AK$, ἀπὸ μὲν τῆ Z ἢ $\chi\theta\omega$ ἢ $Z\Psi$
 πρὸς ὀρθὰς τῇ AG , τὴν ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης
 γωνίας $ΓAE$ ἐμφαίνουσα· ἀπὸ δὲ τῆ E ἢ EP τῇ $Z\Psi$
 παράλληλος· ἀπὸ δὲ τῆ Γ ἢ $ΓΦ$ τῇ AB κάθετος. ἢ
 ἐκβληθεῖται αἱ AG , KE συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κα-
 τὰ τὸ Δ .

Ἐστω δὲ ἢ μὲν $AK = KB = AZ = \alpha$, ἢ δὲ $Z\Psi =$
 β , ἢ δὲ $K\Phi = \chi$, ἢ δὲ $\Phi\Gamma = \gamma$. καὶ ἔσται δὴ ἢ
 μὲν $B\Phi = \alpha + \chi$, ἢ δὲ $A\Phi = \alpha - \chi$, ἢ δὲ $A\Psi =$
 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Ἐπεὶ δὲ ὡς $B\Phi : \Phi\Gamma :: BK : KE$, ἥτοι $\alpha + \chi :$
 $\gamma :: \alpha : KE$, ἔσεται ἢ $KE = \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \chi}$. ὁμοίως ἐπεὶ δὲ ὡς

$A\Phi : AK :: \Phi\Gamma : K\Delta$, ἥτοι $\alpha - \chi : \alpha :: \gamma : K\Delta$, ἔσ-
 ται

$$\tau\alpha\iota \eta \text{ } \overline{ΚΔ} = \overline{α\gamma}. \quad \eta \text{ } \overline{ΔΕ} = \overline{ΔΚ} - \overline{ΚΕ} = \overline{α\gamma} - \overline{α\gamma} =$$

$$\overline{2α\gamma\chi}. \quad \epsilon\pi\epsilon\iota \delta\epsilon \text{ } \overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΑΚ}^2 + \overline{ΚΕ}^2, \quad \eta \text{ } \overline{ΑΕ} =$$

$$\overline{\frac{α^2 - \chi^2}{α + \chi}} \quad \sqrt{\frac{α^2 + α^2 \gamma^2}{α + \chi}} = \frac{α}{α + \chi} \sqrt{α^2 + 2α\chi + \chi^2 + \gamma^2}. \quad \epsilon\varsigma\iota \delta\epsilon$$

$$\kappa\alpha\iota \text{ } \overline{ΑΨ} : \overline{ΨΖ} :: \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΡ}, \quad \epsilon\tau\epsilon\nu \text{ } \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΡ} :: \overline{ΑΨ} : \overline{ΨΖ} :: \overline{ΑΕ} : \overline{ΕΡ}, \quad \delta\iota\omicron \text{ } \overline{ΕΡ} =$$

$$\overline{\frac{αβ}{α + \chi}} \sqrt{α^2 + 2α\chi + \chi^2 + \gamma^2}. \quad \pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu \text{ } \overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΑΚ}^2 + \overline{ΚΔ}^2,$$

$$\epsilon\varsigma\epsilon\tau\alpha\iota \text{ } \overline{ΑΔ} = \frac{α - \chi}{α + \chi} \sqrt{α^2 - 2α\chi + \chi^2 + \gamma^2}$$

$$\epsilon\varsigma\iota \delta\epsilon \kappa\alpha\iota \text{ } \overline{ΔΕ} : \overline{ΕΡ} :: \overline{ΑΔ} : \overline{ΑΚ}. \quad \delta\iota\omicron \text{ } \overline{ΔΕ} : \overline{ΕΡ} :: \overline{ΑΔ} : \overline{ΑΚ}. \quad \overline{ΔΕ} : \overline{ΕΡ} :: \overline{ΑΔ} : \overline{ΑΚ}.$$

$$\sqrt{α^2 + 2α\chi + \chi^2 + \gamma^2} :: \frac{α}{α - \chi} \sqrt{α^2 - 2α\chi + \chi^2 + \gamma^2} : α.$$

ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας, ἢ κατὰ τὸ Χ (γ) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ψ, καὶ τῶν τετραγώνων ἐκατέρων ληφθέντων ἡ κατὰ τὸ Ω, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ α' ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ β, καὶ ἡ ἐφεξῆς ἡ κατὰ τὸ γ καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐκατέρωθεν ἐξαχθείσης ἡ κατὰ τὸ δ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ε, καὶ τῶν τετραγώνων πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ ζ, τεθέντος δὲ τῶν χ + $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ = Ζ, ἡ κατὰ τὸ η, καὶ τεθέντος τῶν $\frac{\beta}{\alpha}$.

Λ 4

$\sqrt{\alpha^2}$

$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \Phi$, ἡ κατὰ τὸ Θ. ἥτις Ὑπερβολὴν ἰσοπλευρον, τῷ τετιμένῳ τὰς διαμέτρους ἴσας ἔχουσιν ἐμφαινέται ἴσης γὰρ ἔσσης τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῇ παραμέτρῳ, (ὄρα τὸ §. 253.) ἴση ἔσται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος τῇ πλαγίᾳ πλευρᾷ, μέση ἀνάλογον ἔσται αὐτῆς τε (δ) καὶ τῆς παραμέτρου.

Ἦχθω ἐν ἀπὸ τῆ Β ἡ ΒΤ (ε) πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ καὶ ἴση τῇ ΖΨ = β. καὶ ἀπὸ τῆ Κ ἐπὶ τὸ Τ ἐπιζευχθῆτα ἡ ΚΤ, ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ συνεχές. Ἦχθω δὲ ἀπὸ τῆ Γ ἡ ΓΣΟ τῇ ΑΒ παράλληλος, καὶ τῇ ΚΤ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ο συμβάλλουσα. Ἐκὼν ἔσεται ἡ $ΚΤ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΒΤ : ΚΤ :: ΚΣ : ΚΟ, ἦτοι ὡς β : $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$:: γ : ΚΟ, ἔσεται ἡ $ΚΟ = \frac{\gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} = \Phi$. ἔστι δὲ καὶ ὡς ΒΤ : ΒΚ :: ΚΣ : ΣΟ, ἦτοι ὡς β : α :: γ : ΣΟ, ἡ ἄρα $ΣΟ = \frac{\alpha \gamma}{\beta}$. εἰάν ἄρα

ἀπὸ τῆ Γ ἀχθῇ ἡ ΓΠ τῇ ΚΟ παράλληλος, ἔσται ἡ μὲν ΓΠ = ΚΟ = Φ, ἡ δὲ ΦΠ = ΣΟ = $\frac{\alpha \gamma}{\beta}$. διὸ ἡ

$ΚΠ = \frac{\alpha \gamma}{\beta} + \chi = \zeta$. Ἀναγραγείσης ἄρα τῆς ΑΓΗ

Ὑπερβολῆς, ἥς πλαγία μὲν πλευρὰ ἡ ΑΒ = α, κέντρον δὲ τὸ Κ, ἔσται ἀποτετμημένη μὲν ἡ ΚΠ = ζ, τεταγμένη δὲ ἡ ΠΓ = Φ. δῆλον δὲ, ὅτι ἐν τῇ ΑΗ, ἔσονται αἱ κορυφαὶ τῶν ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ τριγώνων.

ΚΕΦ.

(δ) Κατὰ τὴν κδ'. ὁρίσμ. τῶν Κοιν. Τομ. τὸν ἐν σελ. 85. τῇ β'. Τόμ.

(ε) Πρὸς ΣΧVΠ. §. 10.

Κ Ε Φ. ΚΕ'.

Περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐμφαινουσῶν τὰς
τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν καμπύλας, καὶ τῆς
ἀναγραφῆς αὐτῶν, καὶ τῶν δι' αὐτῶν ἐπι-
λυομένων προβλημάτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 290. Αἱ τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις ἀπει-
ρεάζονται εἰς κατὰ τε τὰ γένη καὶ τὰ εἶδη. κατὰ μὲν
γὰρ τὰ γένη τοσαῦταί εἰσιν, ὅσοι οἱ μετὰ τὴν δυά-
δα ἀριθμοὶ κατὰ δὲ τὰ εἶδη, ἔτι πολλὰ πλείονες.
ὑπάρχει γὰρ ὑπὸ ἑκάστον τῶν γενῶν διάφορα εἶδη.
ἐκ τούτου δὲ δῆλον, ὅτι ἀμήχανόν ἐστιν ἀπάσας εὐρεῖν
τὰς τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις, ὥστερ καὶ αἱ
τῆς δευτέρας βαθμῆς εὐρίσκονται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 291. Τὴν ὑπὸ τῆς τῆς ἀνωτέρας βαθμῆς ἐξισώ-
σεως καμπύλην ἀναγράψαι βεβλόμενοι, δι' ἐπισσαγω-
γῆς ἑτέρας ἀγνώστου εἰς ἑτέρας ἀναλύμεν ἐξισώσεις,
καμπύλας γνωστὰς ἐμφαινέσας. ὧν ἀναγραφεισῶν, ση-
μεῖα περιζονται, δι' ὧν ἀναγράφεται ἡ ζητούμενη καμ-
πύλη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 292. Οἷον, πρεκείδω ἡ ἐν τῷ Α (ζ) τῇ τρίτῃ
βαθμῇ ἐξισώσει, ἣτις διὰ μὲν τῆς χ πολλαπλασιασθεῖσα
εἰς τὴν ἐν τῷ Β μεταβάλλεται, τῆς τετραγωνικῆς δὲ
ἐξίσως ἐκατέρωθεν ἐξαχθείσης εἰς τὴν ἐν τῷ Γ. κείδω
ἐν τῷ Ζ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Δ. τεθέντος ἔν ἐν τῇ κατὰ
Α 5 τσ

τὸ Γ ἐξισώσει τῷ Ζ ἀντὶ τῷ $\sqrt{2\alpha\chi - \chi^2}$, ἢ κατὰ τὸ Ε ἐξίσωσις γίνεται. ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἢ κατὰ τὸ Ζ, κύκλον ἐμφαίνεσα. §. 228.

Διαμέτρῳ ἐν τῇ ΑΨ=2α (η) ἀναγεγραφθῶ κύκλος ὁ ΑΜΨΓ, (δ. 230.) καὶ ληφθείσης τῆς ΑΒ=χ, ἀπὸ τῷ Β τετάχθῃ ἡ ΒΓ. καὶ ἀπὸ τῷ Γ ἀχθείσης διὰ τῷ κέντρῳ τῆς ΓΚΜ, ἐπιζευχθείσης τε τῆς ΑΜ, ἐκβεβλήθῃ ἡ ΓΒ κατὰ τὸ Ρ. λέγω δὴ, ὅτι τὸ σημεῖον Ρ ἐν τῇ ζητεμένῃ καμπύλῃ ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ=χ, ἡ ἄρα ΨΒ=2α-χ. διὸ ἡ ΒΓ=Ζ. ἐστὶ δὲ ὡς ΓΒ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΡ, ἥτοι ὡς Ζ : χ :: χ : ΒΡ. ἡ ἄρα ΒΡ= $\frac{\chi^2}{Z}$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\chi^2}{Z}$ ὡς ἐκ τῆς κα-

τὰ τὸ (θ) Ε ἐξισώσεως δῆλον, ἡ ἄρα ΒΡ= $\frac{\chi^2}{Z}$. ἐπεὶ ἔνι μὲν ΑΒ=χ, (ι) ἡ δὲ ΒΡ= $\frac{\chi^2}{Z}$, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ σημεῖον Ρ ἐν τῇ ζητεμένῃ καμπύλῃ ἐστὶ. τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ληφθείσης τῆς ΑΔ=χ, καὶ ταχθείσης τῆς ΔΖ, ἀχθείσης τε διὰ τῷ κέντρῳ τῆς ΖΚΝ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΝ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΖΔ κατὰ τὸ Ε, δευχθήσεται ἡ ΔΕ= $\frac{\chi^2}{Z}$. διὸ καὶ τὸ σημεῖον Ε ἢ τῇ ζητεμένῃ καμπύλῃ ἔσται. ὁμοίως καὶ ἕτερος ἐνταυροῖσθαι σημεῖα ἄλλοις ἢ ἡ ἀποτετμημένη χ ἢ ληφθῇ τῇ ΑΚ. τότε γὰρ ἡ ἀπὸ τῷ Κ τεταγμένη ΚΗ= $\frac{\chi^2}{Z}$, ἡ μεγίστη τῶν ἐν τῇ ζητεμένῃ καμπύλῃ τεταγμένων ἔσται. εἰ δὲ ληφθῇ ἡ μὲν ΨΙ=ΑΒ, ἡ δὲ ΨΖ=ΑΔ, ἀχθῇ δὲ ἡ μὲν ΙΑ=ΒΡ καὶ παραλλῆλος αὐτῇ, ἡ δὲ ΖΟ τῇ ΔΕ, ἔσται καὶ τὰ Α, Ο σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ καμπύλῃ. τὰ αὐτὰ δὲ σημεῖα καὶ

(η) Πλ. XXXI. κ. 4. (θ) Πλ. XXXIV. (ι) Πλ. XXXI. κ. 4.

ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, εἶπεν τὰ Θ εὐρεθήσονται. ἐξ
 ὧ δὴλον, ὅτι ἐλλειψοειδὲς ἐστὶ τὸ τῆς ζητουμένης καμ-
 πύλης χῆμα.

ΣΤ ΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 293. Τῶν τὰς Παραβολὰς ἐμφαινουσῶν ἐξισώ-
 σεων, (κ) μία μὲν ἐστὶν ἡ τῷ δευτέρῳ βαθμῷ, ἡ κατὰ
 τὸ Η, (§. 234.) ἡ τὴν ἐκ τῆς τῷ Κωνίᾳ τομῆς προκύ-
 πτεσαν δηλῶσα· δὴ δὲ αἱ τῷ τρίτῳ, αἱ ἐν τῷ Θ·
 τρεῖς δὲ αἱ τῷ τετάρτῳ, αἱ κατὰ τὸ Ι. ἐξ ὧ δὴλον,
 εἶτι αἱ τῷ βαθμῷ ν παραβολικαὶ ἐξισώσεις ἰσάριθμοι
 μὲν εἰσι τῷ ν—1, σημαίνονται δὲ ὑπὲρ τῶν ἐν τῷ Κ,
 ἢ ὑπὸ τῶν ἐν τῷ Λ ἐξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 294. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ Μ δοθείσης ἐξισώσεως
 ἐμφανομένην τῷ τρίτῳ βαθμῷ Παραβολὴν ἀναγράψαι.
 Ἐπεὶ ἡ ἐν τῷ Μ ἐξίσωσις ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ἐν τῷ Ν,
 κείῳ τὸ y^2 ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ξ. ἔκεν αὐτ' αὐτῷ τε-
 θέντος τῷ ἴσῳ αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ν ἐξίσώσει, προ-
 κύψει ἡ ἐν τῷ Ο.

Παραμέτρῳ ἔν τῳ $\alpha = \Lambda\Gamma$ (λ) ἀναγεγραφθῶ Παρα-
 βολὴ ἡ $\Delta\Lambda\Xi$, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσεως ἐμφαι-
 νομένη. (§. 236.) ληφθείσης δὲ τῆς ἀποτετμημένης
 $\Lambda\Xi = Z$, τετάχθω ἡ ΒΕ, ἢ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΓ,
 ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΕ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ
 σημείων ἤχθωσαν αἱ ΖΕΦ, ΔΚ τῷ ΑΒ ἄξονι παράλ-
 ληλοι, διὰ δὲ τῷ Α ἡ ΚΛΦ τῇ ΓΒ. λέγω ὅτι τὰ Φ
 καὶ Κ σημεῖα ἐν τῇ ζητουμένῃ Παραβολῇ εἰσὶν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη $\Lambda\Xi = Z$, ἡ ἄρα τε-
 ταιγμένη $ΒΕ = y$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ξ ἐξίσωσιν. ἐστὶ δὲ
 ὡς

ὡς $ΑΓ : ΑΒ :: ΑΖ : ΖΦ$, ἤτοι ὡς $α : Ζ :: γ : ΖΦ$.
 διὸ ἡ $ΖΦ = Ζγ = χ$. ἔστι δὲ καὶ ὡς $ΑΓ : ΑΒ :: ΑΥ :$

$ΥΚ$, εἴτεν ὡς $α : Ζ :: -γ : ΥΚ$. ἡ ἄρα $ΥΚ = -$
 $Ζγ = -χ$. ἔστιν ἄρα ἡ μὲν $ΑΖ = γ$, ἡ δὲ $ΖΦ = χ$.

καὶ ἡ μὲν $ΑΥ = -γ$, ἡ δὲ $ΥΚ = -χ$. ἐπεὶ δὲ τὸ $Ζγ =$

$χ$, ἔγεται ἄρα τὸ $Ζ = αχ$. τεθέντος δὲ ἐν τῇ κατὰ

τὸ $Ξ$ ἐξίσωσι (μ) ἀντὶ τῆς $Ζ$ τῆς $αχ$, ἡ κατὰ τὸ $Μ$

προκύψει ἐξίσωσις.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ, καὶ ἄλλων πορισθέντων σημείων,
 ἀναγεγράφεται ἡ ΦΑΚ Παραβολή, (ν) ἐν ᾗ ἐκάστη μὲν
 τῶν $ΑΖ$, $ΑΗ$, $ΑΙ$ τὸ $γ$ ἐμφαίνουσιν, ἐκάστη δὲ τῶν $ΖΓ$,
 $ΗΘ$, $ΙΑ$, τὸ $χ$ ὡσαύτως ἐκάστη μὲν τῶν $ΑΥ$, $ΑΜ$,
 $ΑΞ$ τὸ $-γ$, ἐκάστη δὲ τῶν $ΥΡ$, $ΜΝ$, $ΞΟ$, τὸ $-χ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 295. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ Π δοθείσης (ξ) ἐξίσωσις
 ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Καίθω τὸ $γ/3$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Ρ. τεθέντος ἔν ἐν τῇ
 κατὰ τὸ Π ἐξίσωσι ἀντὶ τῆς $γ/3$ τῆς ἴσας αὐτῷ, ἡ κα-
 τὰ τὸ Σ ἐξίσωσις γίνεται.

Ἀναγεγράφθω ἔν ἡ κυβικὴ Παραβολή $ΕΑΔ$, (ο) ἡ
 ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ ἐξίσωσεως ἐμφαινομένη. (§. 294.)
 καὶ εἰλήφθωσαν ἀποτετμημέναι ἡ $ΑΒ = Ζ$, καὶ ἡ $ΑΔ =$
 $Ζ$.

(μ) π. XXXIV. (ν) π. XXXI. χ. 6. (ξ) π. XXXIV. (ο) π. XXXV. σ. 1.

Ζ, καὶ τετάχθω ἡ μὲν $ΒΕ = γ$, ἡ δὲ $ΛΔ = - γ$. ἢ χθω δὲ διὰ μὲν τῆς $Α$ ἡ $ΖΑΥ$ ὑποτίτρα τῶν $ΕΒ$, $ΛΔ$ παράλληλος, διὰ δὲ τῶν $Ε$ καὶ $Δ$ αἱ $ΖΕΦ$, $ΔΚ$, τῶν $ΛΒ$ ἄξονι παράλληλοι καὶ ληφθείσης τῆς $ΛΓ = α$, ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΙΒ$, $ΓΛ$. καὶ ἢ χθωσαν ἀπὸ τῆς $Α$ ἡ μὲν $ΛΦ$ τῇ $ΓΒ$, ἡ δὲ $ΔΚ$ τῇ $ΓΛ$ παράλληλος. λέγω ὅτι τὰ $Φ$ καὶ $Κ$ σημῖα ἐν τῇ Παραβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ $Η$ ἐξισώσεως ἐμφαινομένη.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς $ΛΓ : ΛΒ :: ΛΖ : ΖΦ$, ἦτοι ὡς $α : Ζ :: γ : ΖΦ$, ἢ ἄρα $ΖΦ = \frac{Ζγ}{α} = χ$. ὁμοίως ἔπει ὡς

$ΛΓ : ΛΔ :: ΛΥ : ΥΚ$, εἴτην ὡς $α : - Ζ :: - γ : ΥΚ$ ἢ ἄρα $ΥΚ = \frac{Ζγ}{α} = χ$. εἰν ὅν ἡ μὲν $ΛΖ = γ$, ἡ δὲ

$ΖΦ = χ$, καὶ ἡ μὲν $ΛΥ = - γ$, ἡ δὲ $ΥΚ = χ$. Ἐκ τούτων ἔν δῆλον, ὅτι τὸ τῆς ζητεμένης Παραβολῆς χῆμα ἴμοιόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς τῆς $Κ$ ώνος τομῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 296. Τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ $Τ$ ($π$) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην Παραβολὴν ἀναγράψαι.

Καίθω τὸ $γ^4$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ $Υ$. ἔκῃν ἐν τῇ κατὰ τὸ $Τ$ ἐξισώσει τεθίντος αἰτὶ τῆς $γ^4$ τῆς ἴσας αὐτῷ, ἢ κατὰ τὸ $Φ$ προκύψει ἐξισώσεις.

Ἀναγογράφθω ἔν Παραβολῇ ἡ $ΔΛΕ$, ($ρ$) ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ $Τ$ ἐμφαινομένη ἐξισώσεως. (§. 294.) καὶ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γινομένης, τῆς καὶ ἐν τῷ πρώτῳ προβλήματι, ἴσονται τὰ $Φ$ καὶ $Κ$ σημῖα ἐν τῇ ζη-

τε-

τημένη Παραβολή. διό η ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Τ δηλωμένη ἐξισώσεως Παραβολή ἔσται (χ. 6.) ἡ ΦΑΚ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 297. Ἐνθυθέν πορίζεται ἡ γενικὴ μέθοδος τῆ πάσης ἀναγράφειν τὰς Παραβολὰς, τὰς ὑπὸ ἐξισώσεων ἐμφαινομένας, ἐν αἷς τὸ ἴσχυρον τῶν ἀγνώστων εἶναι τὸ Χ, τὴν μονάδα ἐκδέχην ἔχει. ἐμφαινέτω γὰρ ἡ κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσις (σ) ἐκάστην τῶν ἐξημένων. καὶ καθὼς τὸ γινώσκον τοῖς ἐν τῷ Ψ. καὶ ἐν τῇ κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσι, τῇ αὐτῇ ἔσθαι τῇ κατὰ τὸ ΔΙ τεθέντῃ αὐτῇ αὐτῇ τὸ ἴσον αὐτῇ. ἐκὼν προκύψει ἡ κατὰ τὸ α ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Β γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ γ. διὰ τῶν ἐξισώσεων ἔν τῶν ἐν τῷ Ψ καὶ γ ποιεῖσθονται τὰ σημεῖα, δι' ὧν ἀναγραφῆται ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Χ ἐξισώσεως δηλωμένη Παραβολή. καὶ εἰ μὲν τὸ ν περιττὸν σημαίνει ἀριθμὸν, κατασκευῆ μὲν χρῆσθαι τῇ τῆ πρώτῃ προβλήματι. (§. 294.) τὸ δὲ τῆς Παραβολῆς χῆμα, ἔσται τὸ ΦΑΚ. (τ) εἰ δὲ ἀρτιον, τῇ τῆ δευτέρῃ, (§. 295) τὸ δὲ χῆμα τῆς κωνικῆς ἔσται Παραβολῆς.

ΣΗΜΚΡΙΣΙΣ

§. 298. Ἡ δὲ γενικὴ μέθοδος τῆ ἀναγράφειν τὰς Παραβολὰς, τὰς ὑπὸ ἐξισώσεων ἐμφαινομένας, ἐν αἷς ἐκώτερον τῶν ἀγνώστων ἐκδέχην ἔχει τῆς μονάδος μέζονα, ἐστὶν ἡ ἐξῆς. ἡ ἐν τῷ δ ἐξίσωσις (υ) ἐκάστην τῶν ἐξημένων δηλοῖ ἐξισώσεων. ἔστι δὲ τὸ μ μῆζον τῷ ν, ἐμφαίνει δὲ ἐκάτερά ἀριθμοὺς ἦτοι περιττὸς, ἢ ἀρτιος ἢ τὸ μὲν περιττὸν ἀριθμὸν, τὸ δὲ ἀρτιον. καθὼς δὲ τὴν ἐν τῷ δ ἐξίσωσιν ἐκ τῶν ἐν τοῖς ε καὶ ζ γινώσκων

ὡν ἑκατέρω ἐκ τῶν προδικληφθεῶν ἐξισώσεων ἴσιν, ἐν αἷς δὴθιν τὸ ἕτερον τῶν ἀγνώστων τὴν μονάδα ἐκ-
 θέτην ἔχει. ἀναγραφθεῶν δὲ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἰμφαι-
 νομένων Παραβολῶν, τὸ, τε y καὶ x ἐνρεθίσονται, καὶ σημεῖα ποιεῖσθαι, δι' ὧν ἡ Παραβολὴ γραφ-
 θήσεται, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ δ ἐξισώσεως σημαίνο-
 μίνη. ἴσιν δὲ, ὅτι διὰ τὸ ζ ἴσον εἶναι τῷ Π . τέτα-
 γαρ κεμένη, ἐκ τῶν ἐν τοῖς e καὶ ζ ἐξισώσεων ἡ κα-
 τὰ τὸ δ γίνεται. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν γ ἴσον τοῖς ἐν τῷ
 e , τὸ δὲ Π τοῖς ἐν τῷ ζ , τὸ μὲν ἄρα ζ ἴσον τοῖς ἐν
 τῷ e , τὸ δὲ Π τοῖς ἐν τῷ δ . ἐξ ὧν ἡ κατὰ τὸ e ἐξί-
 σωσις γίνεται. καὶ τῆς μὲν v δυνάμεως ἑκατέρωθεν ληφ-
 θήσης, ἡ ἐν τῷ κ τῆς δὲ μ , ἡ ἐν τῷ λ πάντων δὲ
 τῶν αὐτῆς μερῶν διὰ τῶν α^{m-n} διαιρεθύντων, ἡ ἐν
 τῷ μ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ ἐν τῷ v , ἡ αὐτὴ
 ὅσα τῇ κατὰ τὸ δ. λευκαίνεται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη διὰ
 τῶν ἐξῆς προβλημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 299. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῷ ξ δευτέρας ἐξισώσεως
 ἰμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Ἴσιν ἄρα ἐν τῇ κατὰ τὸ δ γενικῇ ἐξισώσει τὸ μὲν
 $m=3$, τὸ δὲ $n=2$. ὅπερ ἐστὶ τὸ μὲν μ περὶ τὸν, τὸ
 δὲ v ἀρτίον σημαίνει ἀριθμόν. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ e
 ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ θ ἰμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ
 τὴν κατὰ τὸ π .

Ἐκκείθω δὲ ἰσθῆς τις ἡ HN , (Φ) πρὸς ὁρθὰς δὲ αὐτῇ
 ἴσω ἡ $ΓΑΡ$. καὶ τεμνέτωσαν δίχα τὰς περὶ τὸ Λ ὁρθὰς
 γωνίας αἱ $ΕΔ$, $ΓΒ$. ἀναγεγράφθωσαν δὲ Παραβολαί,
 ὅτι $ΕΑΒ$, ἣν ἡ κατὰ τὸ e ἐξίσωσις ἰμφαίνει, (§. 260.)

καὶ

κὴ ἡ ΕΛΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ π δηλεμένη. (§. 294.) εἰλήφθω δὲ ἡ ἀποτετμημένη $AN = \gamma$. καὶ ἀπὸ τῆς Ν τετάχθω ἡ ΝΜ. κὴ ἤχθω ἀπὸ μὲν τῆς Μ ἡ ΜΖ τῇ ΛΝ, ἀπὸ δὲ τῆς Ζ ἡ ΖΟ τῇ ΣΡ, ἀπὸ δὲ τῶν Ο καὶ Κ αἱ ΟΠ, ΚΨ τῇ ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῆς Π ἡ ΠΨ τῇ ΣΡ παράλληλος. λέγω δὴ, ὅτι τὰ σημεῖα Λ, Ψ ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ζ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενη.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν $AN = \gamma$, ἡ ἄρα τεταγμένη $NM = Z$, διὰ τὴν κατὰ τὸ ο ἐξίσωσιν. ἄρα κὴ ἡ $\Phi Z = MN = Z$. ἀλλὰ τὸ $Z = \Pi$, (§. 298.) ἄρα ἡ $\Phi Z = \Pi$. ἐπεὶ ἔν ἡ τεταγμένη $Z\Phi = \Pi$, ἡ ἄρα ἀποτετμημένη $A\Phi = \chi$ διὰ τὴν κατὰ τὸ π ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ $\Phi\Lambda = KN = AN = \gamma$. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν $AH = H\P = \Phi O = A\Phi = \chi$, ἡ ἄρα $AH = -\chi$, ἡ δὲ $H\P = \Phi\Lambda = \gamma$. ἔκθεν ἡ μὲν ἀποτετμημένη $A\Phi = \chi$, ἡ δὲ τεταγμένη $\Phi\Lambda = \gamma$, καὶ ἡ μὲν $AH = -\chi$, ἡ δὲ $H\P = \gamma$. τὰ ἄρα Λ καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, ἥς χῆμα (σχ. 3.) τὸ ΛΑΨ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 300. Τὴν ὑπὸ τῆς ἐν τῇ ρ (χ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενὴν ἀναγεῖν Παραβολήν.

Ἔσιν ἄρα ἐν τῇ κατὰ τὸ δ γενικῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν $m = 5$, τὸ δὲ $n = 3$, ἑκάτεροι δὲ ἀριθμοὶ περιττοί. διὸ ἡ μὲν κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις, τὴν κατὰ τὸ σ ἐμφαίνει ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ, τὴν κατὰ τὸ τ.

Καίθωσαν ἔν ἐυθεῖαι αἱ ΗΝ, ΡΣ, ΓΒ, ΕΔ (ψ) ὡς καὶ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι. καὶ ἀναγεγράφωσαν Παραβολὰν ἥτε ΕΜΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ σ ἐμφαινόμενῃ

μένη εξίσωσης, (δ. 294.) καὶ ἡ ΕΖΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ τ δηλεμένη. (δ. 296.) καὶ εἰλήφθω ἡ ἀποτετμημένη $AN = \mu$. καὶ ἀπὸ τῆς Ν τετάχθω ἡ ΝΜ, καὶ ἐμβεβλήθω κατὰ τὸ Τ. καὶ ἤχθασαν ἀπὸ μὲν τῶν Μ, Κ, Τ σημείαν αἱ ΜΖ, ΚΛ, ΤΨ τῇ ΗΝ, ἀπὸ δὲ τῆς Ζ ἡ ΖΦ τῇ ΡΣ, ἀπὸ δὲ τῆς Ο ἡ ΟΗ τῇ ΗΝ, ἀπὸ δὲ τῆς Η ἡ ΗΨ τῇ ΡΣ παράλληλος. λέγω δὴ, ὅτι τὰ σημεία Λ καὶ Ψ ἐν τῇ ζητεμένη Παραβολῇ ἔσονται, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ς εξίσωσης ἐμφαινόμενη.

Ἐπεὶ γάρ ἡ ἀποτετμημένη $AN = \mu$, ἡ ἄρα τεταγμένη $NM = \lambda$, διὰ τὴν κατὰ τὸ σ εξίσωσιν. ἐπεὶ δὲ τὸ $\lambda = \Pi$, (δ. 298.) ἔστιν ἄρα ἡ $NM = \Pi$. ἄρα καὶ ἡ $Z\Phi = \Pi$. ἐπεὶ ἔν ἡ τεταγμένη $Z\Phi = \Pi$, ἡ ἄρα ἀποτετμημένη $ΛΦ = \chi$, διὰ τὴν κατὰ τὸ τ εξίσωσιν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $ΛΦ = KN = AN = \mu$. πάλιν ἐπειδὴ ἡ $ΛΗ = ΠΡ = ΡΑ = ΟΦ = ΛΦ$, ἡ ἄρα $ΛΗ = \chi$, ἡ δὲ $ΗΨ = ΝΤ = ΛΝ = \mu$. τὰ μὲν ἄρα Λ καὶ Ψ σημεία ἐν τῇ ζητεμένη Παραβολῇ εἰσὶ, τὸ δὲ χῆμα αὐτῆς ὅμοιον τῷ ἑκατέρωσ των ἐν τῇ κατασκευῇ ἀναγραφθεῖσων Παραβολῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Σ'.

δ. 301. Τὴν Παραβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ γ (ω) δεθείσης εξίσωσης ἐμφαινμένην.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ δ ἄρα γενικῇ εξίσωσει τὸ μὲν $\mu = 4$, τὸ δὲ $\nu = 2$, ἑκάτεροι δὲ ἀριθμοὶ ἄρτιοι. διὸ δὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ ε εξίσωσις τὴν κατὰ τὸ φ σημαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ ς τὴν κατὰ τὸ χ.

Καίθυσαν ἔν ἐνθῆσαι αἱ ΟΝ, ΧΥ, ΕΔ, ΓΒ, (α) αἱ ἐν τῇ τετάκτῳ προβλήματι. (δ. 299.) καὶ ἀναγε-
M γράφ.

γράφω Παραβολή ή μὲν ΕΜΛΒ, ή υπό τῆς κατὰ τὸ Φ ἐξισώσεως δηλεμένη, ή δὲ ΕΖΛΒ, ή υπό τῆς κατὰ τὸ Χ. (§. 260. 299.) καὶ ληφθείσης τῆς ἀποτετμημένης $ΛΝ = γ$, τετάχθω ή ΝΜ, καὶ ἐμβεβλήθω κατὰ τὸ Η. καὶ ἀπὸ τῶν Μ, Κ, Π σημείων ἤχθωσαν αἱ ΜΖ, ΚΨ, ΠΤ τῇ ΛΝ, ἀπὸ δὲ τῆ Ζ ή ΖΣ τῇ ΧΥ, ἀπὸ δὲ τῆ Ρ ή ΡΗ τῇ ΛΝ, διὰ δὲ τῆ Η ή ΨΗΤ τῇ ΧΥ. λέγω δὴ, ὅτι τὰ σημεῖα Λ, Σ, Ψ, Τ ἐν τῇ ζητεμένη εἰσὶ Παραβολῇ, ἥς ή ἐξίσωσις ἐν τῷ $γ$.

Ἐπεὶ γάρ ή ἀποτετμημένη $ΛΝ = γ$, ή ἄρα ἰσχυρμένη $ΝΜ = Ζ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσιν. ἀλλὰ τὸ $Ζ = Π$, (§. 298.) ἄρα καὶ ή $ΝΜ = ΖΦ = Π$. ἐπεὶ ἔν ή τεταγμένη $ΖΦ = Π$, ή ἄρα ἀποτετμημένη $ΛΦ = Χ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσιν. ἔτι δὲ καὶ ή $ΛΦ = ΚΝ = ΑΝ = γ$. πάλιν ἐπεὶ ή $ΦΣ = ΝΠ = ΑΝ$, ή ἄρα $ΦΣ = -γ$. ἐπεὶ δὲ καὶ ή $ΛΟ = ΟΗ = ΦΡ = ΛΦ$, ή ἄρα $ΛΟ = -Χ$, ή δὲ $ΟΤ = ΦΣ = -γ$, ή δὲ $ΟΨ = ΔΦ = γ$. τὰ ἄρα Λ, Σ, Ψ, Τ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένη Παραβολῇ εἰσὶν. ἐξ ὧ δὴλον, ὅτι τὸ χῆμα αὐτῆς εἰς τὸ ΨΑΤΛΑΣ. χ. 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

§. 302. Τὴν υπό τῆς ἐν τῷ ψ (β) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Παραβολήν.

Οὐκὲν ἐν τῇ κατὰ τὸ δ γενικῇ ἐξίσώσει, τὸ μὲν $μ = 4$, τὸ δὲ $ν = 3$, καὶ τὸ μὲν ἄρτιος, τὸ δὲ περιττός ἀριθμός. ή μὲν ἄρα κατὰ τὸ ε ἐξίσωσις, τὴν κατὰ τὸ ω ἐμφαίνει· ή δὲ κατὰ τὸ ζ, τὴν κατὰ τὸ Λ.

Κά.

Κείθωσαν ἔν ἐυθεΐᾳ αἱ ΡΥ, ΗΝ, ΕΔ, ΓΒ, (γ) ὡς καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ προβλήματι. (§. 299.) καὶ ἀναγεγράφω Παραβολὴ ἡ ΕΜΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ω ἐξίσωσης δηλεμένη, (§. 294.) ὡσαύτως ἡ ΕΖΑΒ, ἣν ἐμφαίνει ἡ κατὰ τὸ Α. (§. 295.) καὶ ληφθείσης τῆς ἀποτετμημένης $ΑΝ = γ$, τετάχθω ἡ ΝΜ, καὶ ἐκβεβλήθω κατὰ τὸ Π. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Μ, Κ, Π σημείων ἤχθωσαν αἱ ΜΖ, ΚΛ, ΠΨ τῇ ΗΝ παράλληλοι, ἀπὸ δὲ τῆς Ζ ἡ ΖΨ τῇ ΜΠ. λέγω, ὅτι τὰ Λ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ψ ἐμφανιζομένη δοθείσης ἐξίσωσης.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ἀποτετμημένη $ΑΝ = γ$, ἡ ἄρα ἰσχυμένη $ΝΜ = Ζ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ ω ἐξίσωσιν. εἰ δὲ τὸ $Ζ = Π$, (§. 298.) ἡ ἄρα $ΝΜ = Π$. διὸ καὶ ἡ $ΖΦ = ΝΜ = Π$. ἡ ἄρα ἀποτετμημένη $ΑΦ = χ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Α ἐξίσωσιν. εἰ δὲ ἡ μὲν $ΦΛ = ΝΚ = ΑΝ = γ$, ἡ δὲ $ΦΨ = ΝΠ = ΝΚ = - γ$. διὸ τὰ Λ, Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητεμένῃ Παραβολῇ εἰσὶ, καὶ ἔχουσι τῷ τῆς κωνικῆς Παραβολῆς ὅμοιον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 303. Τῶν Παραβολῶν ἰέντων ἀναγραφεισῶν, καὶ αἱ λοιπαὶ αἱ τῆς ὁποῦν βαθμῷ τῷ αὐτῷ ἀναγραφθήσονται ἰσόπῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 304. Αἱ περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα ἤδη ἀναγεγραμμέναι Παραβολαί, καὶ κοινὴν ἔχουσαι τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην συμβάλλουσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ ευθεΐα ἡ διχοτομοῦσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἶον ἡ ΔΕ, αὐτὰς τέμνει. ἔτω γὰρ τὸ Π ἴσον ἐν τῷ Ζ, (§. 298.) ἑκατέρως τῶν Παραβο-

Μ 2

λάν

ἂν ἰσχυρὴν ἐκείνην ἐκείνην μὴ πρὸς τὴν οὐρανὸν
 ὡς καὶ ἡ ἀστρονομία ἀπὸ τῆς γῆς τὴν ἐξουσίαν
 ἐκείνην ἐκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν
 τὴν ἀστρονομίαν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

§. 305. Ἐν τῇ κοινῇ ἑκείνῃ τῇ κοινῇ, ὅπου

τὴν κοινὴν ἑκείνην (§. 257.) καὶ

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II.

§. 306. Τὴν ἑκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

ἐκείνην ἑκείνην ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν ἂν ἴσχυρὴν

δι' ΔΨ τῇ ΓΖ. λέγω, ὅτι τὰ Φ καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερβολῇ ἴσονται, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενη.

Ἐπὶ γὰρ ὁμοιά εἰσι τὰ ΓΑΕ, ΓΔΜ τρίγωνα, ἴσιν ὡς ΑΕ: ΑΓ:: ΓΔ: ΔΜ, ἥτοι ὡς γ: β:: α: ΔΜ. ἢ ἄρα ΔΜ = $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$. ἀλλὰ τὸ $\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \chi$, ὡς ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δῆλον. ἢ ἄρα ΔΜ = χ . διὸ καὶ ἡ ΕΦ = ΔΜ = χ . διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ΑΖ: ΑΓ:: ΖΗ: ΖΨ, ἥτοι ὡς γ: β:: α: ΖΨ = $\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \chi$.

Τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἄλλων ἐριθύντων σημείων γραφθήσεται ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ΙΚ, ΖΕ ἡ κανὼν Ὑπερβολῇ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

§. 307. Τὴν Ὑπερβολὴν τῇ δευτέρῃ βαθμῇ ἀναγράψαι. τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ε (ζ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενην.

Καίτω τὸ γχ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ζ. ἕκῃν τεθέντος αὐτ' αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ε ἐξισώσει τῷ αΖ, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Η ἐξίσωσις.

Ἐν τοῖς ἀσυμπτώτοις ἦν ΦΡ, ΖΓ (η) γεγραφθῶσαν ἀντικείμεναι Ὑπερβολαὶ αἱ ΔΑ, ΚΗ, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Η ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. (§. 306.) καὶ ληφθείσης τῆς μὲν ΑΒ = α, τῆς δὲ τῇ ΑΨ παραλλήλου ΒΛ = β, καὶ τῆς ἀποτετμημένης ΑΓ = γ, τετάχθω ἡ ΓΔ. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ληφθείσης τε τῆς ΑΖ = ΑΓ, ἥχθω ἀπὸ μὲν τῆ Ν ἢ ΨΝΕ τῇ ΖΓ πα-

παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς Ζ ἢ ΖΨ τῇ ΦΡ. λέγω, ὅτι τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ε σημαυνομένη δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη $ΑΓ = y$, ἡ ἄρα ἰσχυμένη $ΓΔ = Ζ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Η ἐξίσωσιν. (ι) εἰς δὲ ὡς $ΑΓ : ΓΔ :: ΑΒ : ΒΝ = ΓΕ$, ἥτοι ὡς $y : Ζ :: α : ΓΕ = αΖ$. ἀλλὰ τὸ $αΖ = χ$, ὡς ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ζ

y
ἐξισώσεως δῆλον, ἡ ἄρα $ΓΕ = χ$. εἰς δὲ καὶ ἡ $ΑΖ = y$, καὶ ἡ $ΖΨ = ΓΕ = χ$. διὸ τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶν. ἐξ ὧ δὲ δῆλον ὅτι τὸ χῆμα αὐτῆς εἰς τὸ ΒΕ, ΔΨ. (κ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

§. 308. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Θ (Πίν. XXVI.) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενῃ.

Καίθω τὸ $yχ$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Ι. ἐκδὼν αὐτὸ αὐτῷ τεθέντος τῆς ἴσης αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Θ ἐξίσωσι, κατὰ τὸ Κ γίνεται ἐξίσωσις.

Ἀναγεγράφθωσαν ἐν Ὑπερβολῇ αἱ ΛΔ, ΚΟ, (Πίν. XXXVII. §. 3.) αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Κ ἐμφαινόμενῃ ἐξισώσεως. καὶ ληφθείσης τῆς μὲν $ΑΒ = α$, τῆς δὲ $ΒΔ = β$, τῆς δὲ ἀποτετμημένης $ΑΓ = ΑΖ = y$, τεταίχθω ἡ ΓΔ. καὶ ἐχθείσης τῆς ΔΚ τῇ ΖΓ παραλλήλῃ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α τῆς ΑΦ πρὸς ὁρθὰς τῇ ΖΓ, ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΦΓ, ΦΖ. καὶ διὰ μὲν τῆς Μ ἤχθω ἡ μὲν ΜΕ τῇ ΦΓ, καὶ δὲ ΜΨ τῇ ΦΖ παράλληλος, διὰ δὲ τῆς Ζ ἡ ΚΖΨ τῇ ΦΑ. λέγω, ὅτι τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶν.

(ι) Πίν. XXXVI. (κ) Πίν. XXXVII. §. 2.

Υπερβολῇ εἰσὶ, τῇ ἐμφαινομένῃ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Θ δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη $ΑΓ = γ$, ἡ ἄρα τεταγμένη $ΓΔ = ζ$ διὰ τὴν κατὰ τὸ Κ ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ διὰ τὴν τῶν τριγώνων $ΦΑΓ$, $ΦΝΜ$ ὁμοιότητα ὡς $ΑΓ : ΑΦ :: ΦΜ : ΜΝ$, ἥτοι ὡς $γ : ζ :: α : ΜΝ$. διὸ ἡ $ΜΝ = αζ = χ$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $ΑΖ : ΑΦ :: ΦΜ :$

$ΦΗ$, ἔτεν ὡς $γ : ζ :: α : ΦΗ$, ἡ ἄρα $ΦΗ = αζ = χ$.

ἂλλ' ἡ $ΖΨ = ΦΗ$, ἡ ἄρα $ΖΨ = χ$. τὰ ἄρα Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητούμενῃ Υπερβολῇ εἰσὶν ἥς τὸ χῆμα ὅμοιον τῷ τῶν ἐν τῇ ἀσυμπτώτοις ἀντικειμένων κοινῶν Υπερβολῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

§. 309. Τὴν Υπερβολὴν ἀναγράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Λ (λ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Κείθω τὸ $γχ$ ἴσον τῷ ἐν τῇ Μ. ἔκκεν ἀντ' αὐτῆς τῇ ἴσῃ αὐτῷ τεθέντος ἐν τῇ κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσι, προκύψει ἡ ἐν τῇ Ν ἐξίσωσις.

Ἀναγεγραφέθωσαν ἔν Υπερβολαὶ αἱ ΛΔ, ΚΗ (μ) αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ν ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. (§. 308.) καὶ γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, τῆς καὶ ἐν τῇ ἐνστάτῳ προβλήματι, (§. 307.) εὐρεθήτονται τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητούμενῃ Υπερβολῇ, ἥς τὸ χῆμα τῷ ΒΕ, ΔΨ ὅμοιον. χ. 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ'.

§. 310. Τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ (ν) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Υπερβολὴν.

Μ 4

Κεί-

(λ) πλ. XXXVI. (μ) XXXVII. χ. 1. (ν) πλ. XXXVI.

Καίθα τὸ $\chi\chi$ ἴσιν τῷ ἐν τῷ Θ . ἀντ' αὐτῆς ἔν τῷ ἴσιν αὐτῷ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἰξισώσις τεθέντος, ἢ κατὰ τὸ Π ἰξισώσις περὶ ψφί.

Λ' ἀναγνῶσθωσαν ἔν Υ περὶ βολαὶ αἱ $\Lambda\Delta$, ΚΟ , (ξ) αὖ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Π ἰξισώσεως σημαίνονται. (Σ. 308.) καὶ γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, τῆς καὶ τῶ δ κατὰ περὶ βλήματι, εὐρεθήσονται τὰ Ε καὶ Ψ σημεῖα ἐν τῇ ζητημένῃ Υ περὶ βολῇ κίματι, ἥς τὸ $\chi\eta\mu\alpha$ ὁμοιοντὶ $\Lambda\Lambda$, ΚΗ , (σχ. 1.) τιτὸν τῶ τῶν κωνικῶν Υ περὶ βολῇ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 311. Ἐντεῦθεν ἡ γενικὴ μέθοδος πορίζεται τῷ ἀναγράψαι πᾶσαν Υ περὶ βολὴν ὑπὸ ἰξισώσεως δηλωμένην, ἐν ἣ τὸ ἔγγραφον τῶν ἀγνώτων τὴν μονάδα ἐκθεῖται ἔχει. ἐπὶ γὰρ πᾶσαν τοιαύτην ἰξισώσιν ἢ κατὰ τὸ Ρ σημαίνει, ἔάν τεθῇ τὸ $\chi\chi$ ἴσον τοῖς ἐν τῷ Σ , καὶ ἀντ' αὐτῆς τὸ ἴσον αὐτῷ τεθῇ ἐν τῇ κατὰ τὸ Ρ ἰξισώσει, ἢ κατὰ τὸ Υ γίνεται ἰξισώσις. ἀναγραφῆς ἔν τῆς Υ περὶ βολῆς, τῆς ὑπ' αὐτῆς δηλωμένης, εὐρεθήσονται τὰ χ καὶ η , ὅπερ ἐπὶ τὰ σημεῖα, ὅων ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ ἰξισώσεως ἐμφαινόμενη Υ περὶ βολὴν ἀναγραφῆσεται. καὶ ἔάν μὲν τὸ $\nu-1$ ἀρτίος ἢ ἀρίθμος, κατασκευῇ χρητέον, τῇ τῷ δεκάτῃ περὶ βλήματος· τὸ δὲ τῆς Υ περὶ βολῆς $\chi\eta\mu\alpha$, τὸ ὑπὸ τῷ κατὰ τὸ Ρ δοθείσης ἰξισώσεως ἐμφαινόμενον ὁμοιοντὶται τῷ τῶν κωνικῶν Υ περὶ βολῶν, τῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτῆτοις· ἔάν δὲ τὸ $\nu-1$ περιττός, κατασκευῇ μὲν χρητέον τῇ τῷ ἐννάτῃ περὶ βλήματος, τὸ δὲ τῆς ζητημένης Υ περὶ βολῆς $\chi\eta\mu\alpha$ ὁμοιοντὶται τῷ ΒΕ , $\Delta\Psi$. (χ. 2.)

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 312. Η' δὲ γενικὴ μέθοδος τῇ ταῖς λοιπαῖς ἀναγραφὰν Ὑπερβολᾶς, ἀμέλειται τὰς ἐμφαινόμενας ὑπὸ ἐξισώσεων, αἵς ἐκάτερον τῶν ἀγνώτων ἐκδίτην ἔχει τῆς μονάδος μείζονα, ἢ ἐξῆς ἐσὶν· ἐπεὶ πᾶσαν ταύτην ἐξίσωσιν ἐμφαίνει ἢ κατὰ τὸ Υ' (ο) τὰ γὰρ μ καὶ ν ἢ ἐκάτεροι ἀριθμοὶ εἰσιν ἄρτιοι, ἢ ἐκάτεροι περιίτοι, ἢ τὸ μὲν ἄρτιος τὸ δὲ περιίτος ἀριθμὸς· κείῳ τὸ χ' ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Φ. καὶ ἀντ' αὐτῶ τὸ ἴσον αὐτῷ τεθήτω ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ' ἐξίσωσει. ἔκθ' προκύψει ἢ κατὰ τὸ Χ ἐξίσωσις. εἰν ἔν ταῖς προειρημέναις μεθόδοις αἱ καμπύλαι ἀναγραφαῖσιν, αἱ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐν τοῖς Φ καὶ Χ ἐμφαινόμεναι, (ἐν αὐταῖς γὰρ τὸ ἕτερον τῶν ἀγνώτων τὴν μονάδα ἐκδίτην ἔχει.) σημεῖα περιδιήκονται, δι' ὧν ἢ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Υ' ἐξισώσεως δηλεμένη Ὑπερβολὴ ἀναγνώφεται. ὅπερ δὴ τοῖς ἐξῆς ἀναπτύσσεται περιβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'.

§. 313. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγράψαι τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ψ δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην.

Οὐκὲν ἐν τῇ κατὰ τὸ Υ' γενικῇ ἐξισώσει τό, τε, μ καὶ τὸ ν ἄρτιοι εἰσιν ἀριθμοὶ, ἐκάτερον δὲ τῶν ἴσων τῷ α. καὶ ἢ μὲν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσις, τὴν κατὰ τὸ Ω σημαίνει, ἢ δὲ κατὰ τὸ Χ τὴν κατὰ τὸ α.

Ἐκείῳ ἐν εὐθείᾳ ἢ ΝΡ, (π) καὶ πρὸς ὁρθᾶς αὐτῇ ὅσω ἢ ΖΖ. τεμνέτωσαν δὲ δίχα τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας ὁρθᾶς γωνίας αἱ ΗΧ, ΕΥ. καὶ ἀναγεγραφῶσαν Ὑπερβολὰν μὲν αἱ ΔΟ, ΓΟ, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ α δηλεμένη ἐξισώσεως Παραβολὴ δὲ κωνικὴ

ἡ ΗΑΕ, ἣν ἡ κατὰ τὸ Ω σημαίνει ἐξίσωσις. (§. 307, 260.) εἰλήφθω δὲ ἡ ἀποτετμημένη $\Lambda\Xi = \gamma$, καὶ ἀπὸ τῆς Ξ τετάχθω ἡ $\Xi\Phi$. ληφθέντος δὲ ἀπὸ τῆς ΗΧ τυχόντος σημείου τῆς ς ἤχθω ἡ $\Psi\varsigma\tau\psi$ τῇ $\gamma\zeta$ παράλληλος. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν ς καὶ Γ σημείων ἤχθωσαν αἱ $\varsigma\Gamma$, $\Gamma\chi$ τῇ NR παράλληλοι, ἀπὸ δὲ τῆς Φ ἡ $\Phi\beta$ τῇ $\gamma\zeta$. καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\Gamma\chi$, καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα, ὁμοίως ἐκβεβλήθω καὶ ἡ $\Phi\Xi$, καὶ διὰ τῆς β ἤχθω ἡ $\Psi\beta\psi$ τῇ NR παράλληλος. λέγω, ὅτι τὰ σημεία Ψ , Ψ , Ψ , Ψ ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερβολῇ αἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ψ ἐξισώσεως ἐμφαινόμενη.

Ἐπεὶ γάρ ἡ ἀποτετμημένη $\Lambda\Xi = \gamma$, ἡ ἄρα τεταγμένη $\Xi\Phi = \pi$, διὰ τὴν κατὰ τὸ α ἐξίσωσιν. ἐστὶ δὲ ἡ ἀποτετμημένη $\Lambda\Pi = \Xi\Phi = \pi$, ἡ ἄρα τεταγμένη $\Pi M = \chi$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ω ἐξίσωσιν. ἐστὶ δὲ ἡ $\Xi\Psi = \Lambda N = N\varsigma = M\Pi = \chi$, ἡ ἄρα $\Psi\Xi = \Theta\chi = \Lambda\Theta = \Pi\Lambda = \chi$. ὁμοίως ἡ μὲν $\Lambda\gamma = -\gamma$, ἡ δὲ $\gamma\Psi = \Xi\Psi = \chi$, ἡ δὲ $\Psi\gamma = \Psi\Xi = -\chi$. τὰ ἄρα Ψ , Ψ , Ψ , Ψ σημεία ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερβολῇ αἰσὶν, ἥς τὸ ῥῆμα τὸ $\Psi\Psi\Psi$. κ. δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'.

§. 314. Τὴν ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ β (ρ) δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένην ἀναγράψαι Ὑπερβολήν.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ Γ ἄρα γενικῇ ἐξίσωσει τὸ $\mu = 2$, τὸ δὲ $\nu = 3$, τὸ μὲν δῆθεν ἄρτιος, τὸ δὲ περιττός. καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ Φ ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ γ σημαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ χ τὴν κατὰ τὸ δ .

Καίθωσαν ἔν ἐυθεῖαι αἱ $\beta\Lambda$, $\zeta\kappa$, $\epsilon\tau$, $\eta\chi$, (σ) αἱ καὶ ἐν τῷ προλαβόντι προβλήματι. καὶ ἀναγεγράφθωσαν Ὑπερβολαὶ αἱ $\Delta\Theta$, $\Gamma\Theta$, αἱ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ δ ἐξισώσεως δηλούμεναι, (§. 307.) ὡσαύτως καὶ Παρεμβ

κλη ἡ ΗΑΧ, ἣν ἡ κατὰ τὸ γ ἐξίσωσις ἐμφαίνει.
 294.) καὶ εἰλήφθω ἀποτετμημένη ἡ ΑΚ = γ, καὶ
 ὑπὸ τῆς Κ τετάχθω ἡ ΚΦ. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Φ ἡ ΧΘω
 ΦΜ τῇ ΖΚ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς Μ ἡ ΜΚ τῇ
 Α, ἀπὸ δὲ τῆς Σ ἡ ΨΣΨ τῇ ΖΚ. καὶ ληφθείσης
 τῆς ΑΖ = ΑΚ, ἡ ΧΘω ἀπὸ τῆς Ζ ἡ ΖΨ τῇ ΒΑ παράλ-
 ληλος. ἐκβεβλήθω δὲ ἡ ΚΦ ἐπὶ τὸ Ψ. λέγω, ὅτι τὰ
 ἡμίτια Ψ καὶ Ψ ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσὶ τῇ ὑπὸ τῆς
 κατὰ τὸ β δεθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμενα.

Ἐπεὶ γάρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΚ = γ, ἡ ἄρα τεταγ-
 μένη ΚΦ = π. ἄρα καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ = ΚΦ =
 π. ἡ ἄρα τεταγμένη ΠΜ = χ, διὰ τὴν κατὰ γ ἐξί-
 σωσιν. ἄρα καὶ ἡ ΚΨ = ΑΝ = ΣΝ = ΜΠ = χ. οἷσάν-
 τες ἡ μὲν ΑΖ = — γ, ἡ δὲ ΖΨ = χ. ἔκβν τὰ Ψ, Ψ
 ἡμίτια ἐν τῇ ζηγερμένῃ Ὑπερβολῇ εἰσὶν. ἥς τὸ χῆμα (τ)
 τῶν ΒΕ, ΔΨ ὅμοιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ'.

§. 315. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγεράσαι, τὴν δηλαδὴ
 ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ε (υ) δεθείσης ἐξισώσεως.

Οὐκ ἔν ἐν τῇ κατὰ τὸ γ γενικήῃ ἐξισώσει τὸ μὲν
 $m = 5$, τὸ δὲ $n = 3$, ἑκάτεροι δὲ περιττοὶ ἀριθμοί.
 καὶ ἡ μὲν κατὰ τὸ φ ἐξίσωσις τὴν κατὰ τὸ ζ ἐμ-
 φαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ χ τὴν κατὰ τὸ η.

Κείδωσαν εὐθεῖαι αἱ ΠΡ, ΖΝ, ΒΕ, ΗΓ, (Φ) ὡς καὶ ἐν
 τῇ γ' προβλήματι. (§. 313.) καὶ ἀναγεγράφθω Παρα-
 βολὴ μὲν ἡ ΗΑΛ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ζ δηλωμένη
 (§. 294.) ἐξισώσεως. Ὑπερβολαὶ δὲ αἱ ΙΘ, ΚΕ, αἱ
 ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ η ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. (§. 310.)
 ληφθείσης δὲ τῆς ἀποτετμημένης ΑΠ = π, τετάχ-
 θω

(τ) πλ. XXXVII. χ. 2. (υ) πλ. XXXVI. (φ) πλ.
 XXXVIII. χ. 2.

Θο ἢ ΠΜ, καὶ ἐκβληθῶ ἐπὶ τὸ Θ. καὶ ἀπὸ μη
 τὲ Θ ἢ ΧΘω ἢ ΘΨ, ἀπὸ δὲ τῶ Μ ἢ ΜΣ τῇ Π
 παλάλληλοι. ληρθείσης δὲ τῆς ΑΡ=ΑΠ, ἢ ΧΘω ἀπὸ
 μὲν τῶ Ρ ἢ ΟΡΔ τῇ ΖΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Ο καὶ Λ αὖ
 ΟΨ, ΑΤ τῇ ΠΡ, ἀπὸ δὲ τῶν Γ καὶ Σ αὖ ΤΨ, ΣΨ τῇ
 ΖΝ παράλληλοι. λέγω δὴ, ὅτι τὰ Ψ, Ψ σημεῖα ἢ
 τῇ Ὑπερβολῇ ἔσσι, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ε δευτέρας
 ἐξισώσεως συμφαινόμενῃ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ=π, ἡ ἄρα τε
 ταμένη ΠΜ=χ, διὰ τὴν κατὰ τὸ ζ ἐξίσωσιν. αὖτις
 τεταγμένη ΘΝ=ΑΠ=π. ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΑΝ=
 π, διὰ τὴν κατὰ τὸ η ἐξίσωσιν. ἔστι δὲ ἡ μὲν ΑΡ=-
 π, ἡ δὲ ΡΛ=-χ. ἔστι δὲ ἡ ΡΛ=ΡΦ+ΦΛ καὶ
 ἡ μὲν ΡΦ=ΡΛ=ΝΔ, ἡ δὲ ΦΛ=ΑΤ=ΔΨ. ὡς
 ἡ ΡΛ=ΝΨ=-χ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐκβληθῶσιν
 τῆς ΘΜ κατὰ τὸ Γ, δευτέρας τῇ ΖΨ=π. καὶ ἡ
 ΑΖ=-π. διὸ τὰ σημεῖα Ψ, Ψ ἐν τῇ ζητούμενῃ Ὑπερ
 βολῇ εἰσὶν, ἥτις τὸ χῆμα τὸ Ψ, Ψ. χ. 3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΣ'.

§. 316. Τὴν Ὑπερβολὴν ἀναγεράψαι, τὴν ὑπὸ τῆς
 κατὰ τὸ θ (χ) δευτέρας ἐξισώσεως συμφαινόμενῃ.

Ἐν τῇ κατὰ τὸ γ ἄρα γενικῇ ἐξισώσει, τὸ μὲν μ=31
 τὸ δὲ ν=2, ἔπερ ἔστι τὸ μὲν περιττός, τὸ δὲ ἀρτι
 ἀριθμός. διὸ ἡ μὲν κατὰ τὸ φ ἐξίσωσις δηλοῖ τὴν
 κατὰ τὸ ι, ἡ δὲ κατὰ τὸ χ τὴν κατὰ τὸ κ. Κείδωσιν
 ἔν αὖ ΒΛ, ΝΖ, ΔΟ, ΗΓ (ψ) εὐθεῖαι ὡς καὶ ἐν τῇ γ.
 προβλήματι. (§. 313.) καὶ ἀναγεράψω Παράβο
 λή μὲν ἡ ΗΑΔ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ι δηλούμενῃ ἐξ
 ισώσεως (§. 260.) Ὑπερβολῇ δὲ, αὖ ΘΟ, ΕΟ, αὖ
 ἐπὶ

ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ κ ἐμφαινόμεναι. (§. 307.) ληφ-
θείσης δὲ τῆς ἀποτετμημένης $ΑΗ = π$, τετάχθω ἡ
 $ΠΜ$, καὶ ἐμβολύθω κατὰ τὸ Ο. ἀχθείσης δὲ διὰ
τὸ Ο τῆς $ΙΟΥ$ τῇ $ΒΑ$ παραλλήλῃ, ἡχθῶ διὰ μὲν
τὸ Σ ἡ $ΕΙ$, τῇ $ΜΟ$ παραλλήλῃ, διὰ δὲ τῶν $Μ$ καὶ
 $Λ$ αἱ $ΜΨ$, $ΛΨ$ τῇ $ΒΑ$. λέγω, ὅτι τὰ $Ψ, Ψ$ σημεῖα
ἐν τῇ Ὑπερβολῇ εἰσὶ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Θ δο-
θείσης ἐξισώσεως ἐμφαινόμεναι. Ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΗ = π$,
ἡ ἄρα τεταγμένη $ΠΜ = χ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ι ἐξί-
σωσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ $ΖΟ = ΑΗ = π$, ἡ ἄρα ἀποτετμη-
μένη $ΑΖ = υ$, διὰ τὴν κατὰ τὸ κ ἐξίσωσιν. εἰ δὲ ἡ
μὲν $ΑΒ = ΣΖ = ΖΑ = υ$, ἡ δὲ $ΒΨ = ΠΜ = χ$. ὁμοίως
δὲ καὶ ἡ $ΒΨ = ΠΛ = χ$. ἐκ τέτων δὲ ὁρῶν, ὅτι τὸ
τῆς ζητούμενης Ὑπερβολῆς γῆμα' εἰς τὸ $ΒΕ, ΔΨ$. (ω)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 317. Ὡςπερ διὰ τῶν τῷ Κέντρῳ τορῶν, ἔτω καὶ
διὰ τῶν ἐκκενμένων καμπύλων πολλά τῶν γεωμετρικῶν
ἐπιλύεται προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

§. 318. Δύο δοθείσων ἐυθειῶν τῶν α, β, δύο μέ-
σας αἰσάλογον εὐρεῖν ἐν συνεχείᾳ ἀναλογίᾳ.

Ἐστω ἡ α $\supset$ β. καὶ ἡ μὲν τῶν μέσων, ἡ ἐλάσσων,
χ· ἡ δὲ, ἡ μείζων, υ.

Οὐκ ἔστιν ἔσθαι ὡς α : χ :: χ : υ, καὶ ὡς χ : υ ::
υ : β. ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἄρα ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ
λ ἐξίσωσις (α) γίνεται· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας, ἡ κατὰ τὸ μ.
ἑκατέρα δὲ τέτων τὴν κωνικὴν ἐμφαίνει Παραβολήν.

Ἐκκεῖθω ἔν ἐυθειᾷ ἡ $ΑΔ$. (β) καὶ ληφθείσης τῆς $ΑΒ =$
α, ἡχθῶ ἀπὸ τῷ Β τῇ $ΑΔ$ πρὸς ὁρθὰς ἡ $ΕΓ$. καὶ πα-
ρα-

(*) πλ. XXXVII. χ. 2. (α) πλ. XXXVI (β) πλ.
XXXVIII. χ. 5.

ραμέτρῳ μὲν τῷ $\alpha = AB$ γεγραφθῶ ἡ $ZB\Theta$ Παραβελή περὶ τὸν BA ἄξονα, κορυφὴν ἔχουσα τὸ B · παραμέτρῳ δὲ τῷ $\beta = BE$ γεγραφθῶ περὶ τὸν BE ἄξονα Παραβελή ἡ ZFH , τὴν αὐτὴν ἔχουσα κορυφὴν. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῶν Παραβελῶν διατομῆς Z ἤχθῳ ἡ μὴ $Z\Lambda$ τῇ EG , ἡ δὲ ZF τῇ AD παράλληλος. λέγω, ὅτι αἱ BE , BD εἰσιν αἱ ζητούμεναι μέσαι ἀνάλογον τοῖς δοδοῦσιν α καὶ β .

Γὰρ γὰρ τὸ AB , $BD = \Delta Z^2$, (§. 235.) ὡς ἄρα $AB : \Delta Z :: \Delta Z : BD$, ἥτοι. ὡς $\alpha : \chi :: \chi : \gamma$. ἐστὶ γὰρ διὰ τὴν κατὰ τὸ λ ἐξίσωσιν, (γ) ἡ μὲν ἀποτετμημένη $BD = \gamma$, ἡ δὲ τετραγμένη $Z\Delta = \chi$. ἔστι δὲ ἡ $\Delta Z = BE$. ἄρα καὶ ὡς $AB : BE :: BE : BD$. πάλιν ἐπεὶ τὸ GB , $BE = EZ^2$, (§. 235.) ὡς ἄρα $GB : EZ :: EZ : BE$, ἥτις ὡς $\beta : \gamma :: \gamma : \chi$, διὰ τὴν κατὰ τὸ μ ἐξίσωσιν. ἐστὶ δὲ ἡ $EZ = BD$. ὡς ἄρα $GB : BD :: BD : BE$. καὶ ἀπὸ πάλιν ὡς $BE : BD :: BD : GB$. διὸ καὶ ὡς $AB : BE :: BE : BD :: BD : GB$. διὸ καὶ ὡς $\alpha : \chi :: \chi : \gamma :: \gamma : \beta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 319. Ἐκ τῆς κατὰ τὸ λ ἐξισώσεως, ἡ κατὰ τὸ ν γίνεται. καὶ τῶν τετραγώνων ἐκατέρωθεν ληφθέντων, ἡ κατὰ τὸ ξ . ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ μ ἡ κατὰ τὸ σ , ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ π . ἐξ ἧς δὴλον, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα τῷ τρίτῳ βαθμῷ ἐστὶ. διὸ ἀμήχανον διὰ κύκλου καὶ εὐθείας ἐπιλυθῆναι, ὡς τινες ἐνόμισαν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 320. Ἀπὸ τοῦ προβλήματος τέττα καὶ ἡ τῷ περιβοήτῳ παρὰ τοῖς παλαιοῖς δηλιακῷ προβλήματος ἐπίλυσις ἤρηται, ὅπερ ἦν τὸ διπλασιάσαι τὸν κύβον. ἔσθ

ἔσω γὰρ ἡ μὲν τῷ δοθέντος κύβου πλευρά α, ἡ δὲ τῷ
ζητημένῳ διπλασίῃ χ. ἔκῃν τὸ $2\alpha^3 = \chi^3$. εἰάν ὣν τῆς
πλευρᾶς α τῷ δοθέντος κύβου, καὶ τῷ διπλασίῃ αὐτῆς,
ἦεν τῷ 2α , δύο εὐρεθῶσι μέσαι ἀνάλογον, ἡ πρώτη αὐ-
τῶν ἡ πλευρά ἔσται τῷ ζητημένῳ κύβου. ἔσω γὰρ ἡ μὲν
πρώτη τῶν μέσων χ, ἡ δὲ δευτέρα γ. ἔκῃν ὡς α :
χ :: χ : γ :: γ : 2α . τὸ μὲν ἄρα $\alpha\gamma = \chi^2$, τὸ δὲ
 $2\alpha\chi = \gamma^2$. διὸ τὸ $\chi^3 = 2\alpha^3$.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 321. περὶ τῷ προβλήματος τέττα ὁ Ἐρατοσθέ-
νης τῷ βασιλεῖ Πτολεμαίῳ τὰ δε ἔγραψε (δ) τῶν ἀρ-
χαίων τινὰ τραγικοδοπειῶν, Φασίν, εἰσαγαγεῖν τὸν Μί-
ων τῷ Ἰλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ,
ὅτι πανταχῶ ἐκατόμπεδος εἴη, εἰπὼν μικρὸν γ' ἔλε-
ξαι βασιλικῶ σηκὸν τάφου, διπλασίον ἔσω. τῷ δὲ δι τῷ
κύβου μὴ σφαλῆναι, διπλασιάσων ἕκαστον κῶλον ἐν πά-
χαι τάφου, ἰδόκει διημαρτηκίναί. τῶν γὰρ πλευρῶν δι-
πλασιασθῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον,
τὸ δὲ σφαιρὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς
Γεωμέτραις, τίνα ἄντις τρόπον τὸ δοθὲν σφαιρὸν διαμέ-
ριον ἐν τῷ αὐτῷ κήματι διπλασιασέει. καὶ ἐκαλύπτο
τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθίμε-
νοι γὰρ κύβον, ἐζήτην τῷτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ
διαφορέντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτον Ἰπποκράτης ὁ
Χίος ἐπενέησεν, ὅτι εἰάν εὐρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν,
ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσαι
ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθή-
σεται ὁ κύβος. ὥς τὸ ἀπόρημα αὐτῷ εἰς ἕτερον ἐκ
ἐλάσσον ἀπόρημα κατέσχευε. μετὰ χρόνον δέ τινα, Φα-
εῖ, Δηλῆς ἐπιβαλλομένης νόσου κατὰ χρησμὸν διπλα-
σιά-

(*) Περὶ Ἐντεκίῳ ἐν τῷ τῷ Ἀρχιμήδ. περὶ σφαιρ. καὶ κυλινδρ.
β. β. β.

σιάσαι τὰς τῶν βωμῶν ἐπιταχύνοντας, ἐμπροσθὶν αὖ
τὸ αὐτὸ ἀπέλημα. διαπεμφθεύμενος δὲ τὰς παρὰ τῷ
Πλάτῳ ἐν Ἀκαδημίᾳ Γεωμέτρους, ἀξίαν αὐτοῖς εὐρεῖν
τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ
ζητούντων, δύο δοδεκαῶν, δύο μίστας λαβόν. Ἀρχυ-
τας γὰρ ὁ Ταρσαντίνος, λέγεται, διὰ τῶν ἡμικυλίων
εὐρηκέναι τὸν Ἰσθμόν. διὰ δὲ τῶν κελευμένων καμπύλων
γραμμῶν. συβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδοτικῆς
γυμνασίας. γυμναζομένη δὲ καὶ εἰς χροῖαν περὶ τὴν
δύαδαι, πλην ἐπὶ βραχύτι τῷ Μενέχμῳ, καὶ ταῦ-
τα δυσχερῶς ἐπιτηδέονται ὅτις ὑφ' ἡμῶν ὁργανικῇ φα-
δία, δι' ἧς εὐρήσομεν δύο τῶν δοδεκαῶν, ἢ μίσην δύο
μίστας, ἀλλ' ἔσταις ἀντις ἐπιτάξῃ. τέτταρ' ἐν εὐρισκόμεναι,
δυστητέοντα καθέλετο τὸ δεῦν τεττάρ' παραλληλογράμ-
μῳ περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρων ἢ
ἑτέρον σχηματίζαν, καὶ ἔμοιρον ποιῶν καὶ ἐπαύξιν δια-
τηρῶντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε, κτ. Οὗ δὲ φησι περὶ τοῦ
Μενέχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς, ἐκ ἀληθείας. εὐχερῶς
γὰρ τέτο ὁ Μένεχμος, καὶ ἐκ ὁργανικῶς λέλυκεν,
ὥσπερ τέτο διαφύροις ἐλυτάν μεθόδοις παρ' Εὐτοκίῳ συ-
ζομέναις, (*) ὁ Πλάτων, ὁ Ἡρώων, ὁ Φίλων ὁ Βυζάν-
τιος, ὁ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, ὁ Διοκλῆς, ὁ Πάπ-
πης, ὁ Σπόρος, ὁ Ἀρχύτας, ὁ Νικομήδης, καὶ αὐτοὶ
ὁ Ἐρατοσθένης. ἔστι δὲ ἡ τῷ Μενέχμῳ ἐπίλυσις ἡ αὖ-
τῇ τῇ παρ' ἡμῶν προτεθείση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΗ΄.

§. 322. Τὴν δεθῶσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ΑΚΒ (ε)
εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελθῆν.

Κέντρῳ τῷ Κ, καὶ διαστήματι τῷ ΚΑ κύκλος γ' ἡ
γράφω ὁ ΑΕΒ. κείδω δὲ τὴν ΑΚΒ εἰς τρεῖς ἴσας δια-
μετρῶν.

(*) Ἐν τῷ ἄρῳ. σημειώω. Ὅρα δὲ καὶ Περὶ βλ. 255. § 626.
τῆς τῷ Οὐλοφ. Ἀλγιβρ. (1) Πίν. XXXVIII. σελ. 61

ταί γωνίας τὰς ΑΚΕ, ΕΚΔ, ΔΚΒ. καὶ ἐπιζευχθε-
σῶν τῶν ΑΕ, ΕΔ, ΔΒ, ΑΒ, ἢ χθω ἀπὸ τῆ Ε ἢ ΕΦ
τῇ ΔΚ παράλληλος. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΚ = β, ἡ δὲ ΑΒ =
α, ἡ δὲ ΑΕ = γ, ἡ δὲ ΕΖ = χ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΚΒ γωνία, ἡ πρὸς τῇ κέντρῳ διπλα-
σία ἐστὶ τῆς ΕΑΒ, τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἐστὶ δὲ ἡ
αὐτὴ ΕΚΒ διαπλασία καὶ τῆς ΑΚΕ, (ἐξ ὑποθέσεως
γὰρ εἰς τρεῖς ἴσας διήνηται ἡ ΑΚΒ) ἡ ἄρα ΕΑΒ, ἐ-
στιν ἡ ΕΑΖ = ΑΚΕ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΕΚ κοινὴ γωνία τῶν
ΔΕΚ, ΑΕΖ τριγώνων. ἄρα καὶ ἡ ΕΖΑ = ΚΑΕ. ἐστὶν ἄρα
ὡς ΕΚ = ΑΚ :: ΕΑ :: ΕΖ, ἥτοι ὡς β :: γ :: χ.
ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις
γίνεται. (ζ) Ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΕΖΑ = ΚΑΕ, ἐστὶ δὲ
ἡ μὲν ΕΖΑ = ΚΖΗ, ἡ δὲ ΚΑΕ = ΚΕΑ = ΚΕΔ, ἡ ἄρα
ΚΖΗ = ΚΕΔ. διὸ ἡ ΑΒ τῇ ΕΔ παράλληλος. ἵπεί
δὲ ἡ ΕΦΖ γωνία ἴση τῇ ἐναλλάξ ΦΗΚ, ἡ δὲ ΦΗΚ
τῇ ἐντὸς ΕΔΚ, ἡ ἄρα ΕΦΖ = ΕΔΚ = ΚΕΔ. τὰ
τρίγωνα ἄρα ΕΦΖ, ΚΕΔ ὅμοιά εἰσι. διὸ ὡς ΕΚ ::
ΕΔ :: ΕΖ :: ΖΦ, ἥτοι ὡς β :: γ :: χ :: ΖΦ = $\frac{\gamma\chi}{\beta}$.

Ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν ΑΖ = ΑΕ, ἡ δὲ ΦΗ = ΕΔ, ἡ δὲ
ΒΗ = ΒΔ, αἱ ἄρα ΑΖ + ΦΗ + ΗΒ = ΑΕ + ΕΔ +
ΔΒ. ἀλλ' αἱ μὲν ΑΖ + ΦΗ + ΗΒ = ΑΒ + ΦΖ, αἱ δὲ
ΑΕ + ΕΔ + ΔΒ = 3ΑΕ. αἱ ἄρα ΑΒ + ΦΖ = 3ΑΕ.
ἥτων τὸ α + $\frac{\gamma\chi}{\beta}$ = 3γ. ἐκ τῆς ἐξίσωσεως δὲ ταύτης

ἡ κατὰ τὸ σ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ τ. ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ
ἐξῆς ἀναλογία, ὡς 3β - χ :: α :: β :: γ. ἀλλ' ὡς β :: γ ::
γ :: χ, ὡς ἀνωτέρω διδασκται. ἄρα καὶ ὡς 3β - χ :: α :: γ ::
χ. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ γ ἐξίσωσις
γίνεται. καὶ προτεθέντων ἐκατέρωθεν τῶν ἴσων τῶν ἐν τῇ

- N

κα

κατὰ τὸ ρ ἐξισώσει, προκύπτει ἡ κατὰ τὸ Φ, ἢ τὴ
 τετραγώνῳ πληρωθέντος, ἡ κατὰ τὸ χ. καὶ τεθέντες
 τῷ $y + \frac{1}{2} \alpha = z$, ἡ κατὰ τὸ ψ, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ θ.
 καὶ πληρωθέντος τῷ τετραγώνῳ, ἡ κατὰ τὸ Λ. καὶ
 τεθέντος τῷ μὲν $2\beta - \chi = \pi$, τῷ δὲ $4\beta^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 =$
 μ^2 , ἡ κατὰ τὸ C, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ D γίνεται.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων ἔν τῶν ἐν τοῖς ρ καὶ D, ὧν ἡ
 μὲν Παραβολὴν, (§. 234.) ἡ δὲ κύκλον ἐμφαίνει,
 (§. 228.) ἡ τῷ y , ταύτης ἡ τῆς ΔΕ ἕρσεις ἡρτήσθαι
 ἥς εἶνος ἕρεθείσης τὸ προκείμενον ἐπιλύεται πρέβλημα.
 Παραμέτρῳ ἔν τῷ β ἀναγεγράφθω περὶ τὴν ΑΘ (η)
 ἄξονα Παραβολὴ ἡ ΑΓ, ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ ρ ἐξισώ-
 σεως ἀπλημένη. (§. 260.) καὶ ληφθείσης τῆς ΑΔ =
 2β , ἡχθῶ ἀπὸ τῷ Δ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΘ ἡ ΔΚ =
 $\frac{1}{2}\alpha$. ἢ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῇ ἐπιζευχ-
 θίστη ΚΛ ἀναγεγράφθω ὁ ΑΓΙ κύκλος. καὶ διαχθάν-
 σης τῆς διαμέτρου ΖΙ, τετάχθω ἀπὸ τῷ Γ ἡ ΓΕ
 λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΓΒ = y .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ $\overline{ΚΛ}^2 = \overline{ΚΔ}^2 + \overline{ΛΔ}^2$, ἡ ἄρα ΚΛ =
 $\sqrt{\frac{1}{2}\alpha^2 + 4\beta^2} = \mu$. ἡ ἄρα ἀποτετμημένη ΚΕ = π ,
 διὰ τὴν κατὰ τὸ D ἐξίσωσιν, ἡ δὲ τεταγμένη ΕΓ =
 z . ἔστι δὲ τὸ μὲν $\pi = 2\beta - \chi$. διὸ τὸ $\chi = 2\beta - \pi =$
 $\Lambda\Delta - B\Delta = \Lambda B$. διὸ ἡ $\Lambda B = \chi$. τὸ δὲ $z = \frac{1}{2}\alpha + y$.
 διὸ τὸ $y = z - \frac{1}{2}\alpha = ΕΓ - ΕΒ = ΓΒ$. ἡ ἄρα ΓΒ = y .

Καὶ ἄλλως δὲ τὸ προκείμενον διαχθήσεται. ἐκ γὰρ
 τῆς γενομένης κατασκευῆς ἡ κατὰ τὸ σ (θ) προκύπτει

ἐξίσωσις. ἐπιζυχθήσῃς γὰρ τῆς ΚΓ, τὸ $ΚΓ^2 = ΚΕ^2 + ΕΓ^2$.
ἐξ ἧς κατὰ τὸ Ε' ἐξίσωσις γίνεται ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Λ, καὶ
τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις,
ἡ κατὰ τὸ Λ, ἐξ ἧς ἡ ἀναλογία αὕτη ὡς $3β::χ::α::γ::$
 $χ$. ἐστὶ δὲ ὡς $β::γ::μ::χ$. ἄρα καὶ ὡς $2β::χ::α::β::μ$.
ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἡ κατὰ τὸ Μ' ἐξίσωσις συνί-
σταται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, ἡ αὕτη ἔσται τῇ κατὰ τὸ σ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 323. Καὶ ταῦτα μὲν δὴ περὶ τῶν διὰ τῆς αἰδι-
κῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλυομένων προβλημάτων αἴτις. ἐξα-
σκῶν δὲ δὴ ὅτι μάστιγα ἑαυτοῦ ἐν τῇ τῶν προβλη-
μάτων ἐπιλύσει. ὁ μὲν γὰρ τὴν τῆ ἐπιλύειν πᾶν τὸ
προτεθεὶν πρόβλημα ἔξιν κτησάμενος, τῆς ἀναλυτικῆς
ἐπιτήκης ἐμμετῆς ἐγένετο· ὁ δὲ ταύτης ἀποτυχὼν,
τῶν ἑαυτοῦ μόνον ἠψατο κραιπιδῶν.

Κ Ε Φ. ΚΖ'.

Περὶ τῶν καμπύλας ἐμφαινουσῶν ἐξισώσε-
ων, ὧν τινὲς ὑπερβατικαὶ καλεῖνται.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

§. 324. Α'. Ἐὰν ἐυθεῖα ἡ ΑΓ (ι) πρὸς ὀρθὰς σταθῇ
ἐυθεῖα τῇ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς πέρατος αὐτῆς Γ ἀχθῶ-
σιν ἐυθεῖαι ὁσαυδηποῦν, αἱ ΓΜ, ΓΝ, τὴν ΒΔ κατὰ
τὰ Ψ, Ψ σημεῖα τέμνουσαι, ἀφ' ὧν δὲ ἑκατέρωθεν τῶν
ΜΨ ἴση τῇ ΑΕ, ἡ μὲν διὰ τῶν σημείων Μ, Λ, Μ
διῶσα καμπύλη, Κογχοειδὴς λέγεται, (κ) ἡ δὲ
ΒΔ ἐυθεῖα Κανὼν, τὸ δὲ σημεῖον Γ πόλος.

Ν 2

§. 325.

- (ι) Πά. ΧΧΔΙΚ. χ. 2.
(κ) Ἐν τῇ αὐτῇ ὁ Νικομήδης, ὁ τῷ Ἐρμεδίω συνακμήσας,
τῇ κατὰ τὸ 194. ἔκ. πρὸ Χρυσῶ τολευτήσαντι. ὅρα δὲ τὸν
Πάριον. αἱ τὸ 2. β. βλ. τῷ Ἀρχιμ. περὶ Σφαίρ. καὶ Κυλίνδ.
σλ. 22. ἐν ᾗ καὶ ἡ δι' ἐργασίαν τῆς Κογχοειδὸς γραφή.

§. 325. Β'. Εάν ἀπὸ μὲν τῆς ἑτέρας τῶν περὶ τῆς τῆς ἡμικυκλίας ΑΟΒ (χ. 3.) Διαμέτρου ἀχθῇ περὶ ὁρθῶς αὐτῇ ἡ ΒΓ· ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας, τῆς Α, ἑυθὺς ὁσαυδήποτ' ἐν, αἱ ΑΗ, ΑΓ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον τέμνουσαι, τῇ δὲ ΒΓ συμβάλλουσαι ληφθῇ δὲ τῇ μὲν ΗΙ, τῇ ἀπὸ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ἀπολαμβάνομένη, ἴση ἡ ΑΜ, τῇ δὲ ΑΝ χωρῶν, ἡ ΑΓ, ἡ διὰ τῶν Μ καὶ Λ σημείων διήσασσα καμπύλη **Κισσοειδής** λέγεται (λ).

§. 326. Γ'. Εάν τὸ τῆς κύκλου περιφερείας τεταρτημόριον ΑΒ (χ. 4.) εἰς ὁσαυδήποτ' ἴσα μέρη τμηθῇ, τὰ ΑΝ, Νν, νν, νΒ, εἰς τοσαῦτα δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἡμιδιάμετρος τὰ ΑΠ, Ππ, ππ, πΓ· ἐπιζευχθεῖσιν δὲ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΓΝ, Γν, Γν, ἀχθῶσιν αἱ ΗΜ, πμ, πμ τῇ ΓΒ ταρσάλληλοι, ἡ τὰ σημεία Α, Μ, μ, μ ἐπιζευγνύσασα γραμμὴ, **Τετραγωνίζουσα** καλεῖται. (μ)

§. 327. Δ'. Εάν ἡ τῆς κύκλου ΑΠΠΛ περιφέρεια (χ. 5.) εἰς ὁσαυδήποτ' ἴσα μέρη τμηθῇ, αἰς τοσαῦτα δὲ καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος ΓΑ, ἀχθῶσιν δὲ τῶν Διαμέτρων ΠΠ, ππ, κτ, ληφθῇ ἡ μὲν ΓΜ ἴση ἐνὶ τῶν εἰρημένων τῆς ἡμιδιαμέτρου μερῶν, ἡ δὲ Γμ = 2, ἡ δὲ Γμ = 3, ἡ δὲ Γμ = 4, καὶ ὅτως ἐφεξῆς, ἡ τὰ Μ, μ, μ, κτ σημεία ἐπιζευγνύσασα γραμμὴ **Σπείρα** λέγεται, ἡ **Ἐλιξ ἀρχιμήδους**. (*)

ΣΗ

(λ) Ἐννοεῖται αὐτῇς ὁ Διοκλῆς, ὁ πρὸ τῆς ἰ. αἰῶνος πρὸ Χριστοῦ μαθητής, ὅρα δὲ τὰ περὶ τῆς Κισσοειδ. ἐν σελ. 28. πρὸς τῇ περὶ σημ. ἀριθμ. 616λ.

(μ) Οἱ Δανιέλτες, ὁ τῷ Πλάτωνα συναμαρτάνων, ἑννοεῖται αὐτῇς.

(*) Οἱ περίπλοτοι Ἀρχιμήδους, ὁ βιβλίον ὅλον περὶ ἰσχύος ἐκτατάμενος, ἑννοεῖται αὐτῇς ἰσχύος. ἀντιφάση δὲ ἔσται ὑπὸ τῶν πρώτων ἐν τῇ ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων τῆς Σικελίας μάχῃ, ἐν. πρὸ Χριστοῦ 212.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 328. Ἀυτὴ μὲν πρώτη Σπείρα, κύκλῳ δὲ γραφίντος, ἡμιδιάμετρον ἔχοντος διπλασίαν τῆς ΓΑ, δευτέρα γραφθήσεται καὶ πάλιν κύκλῳ γραφίντος ἡμιδιάμετρον ἔχοντος τριπλασίαν τῆς ΓΑ, τρίτη γραφθήσεται, ὁμοίως καὶ τετάρτη, καὶ πέμπτη, καὶ ἄλλαι ὅσας ἀντίς ἐπιτάξῃ.

§. 329. Εἰ. Ἐάν κύκλος ὁ δαβ (χ. 6.) ἐπὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιγεχθῇ, τὸ ἐν τῇ περιφέρειᾳ αὐτῇ σημεῖον, εἰς τὸ α, καμπύλην γράψῃ τὴν ΑΒΓ, Κυκλοσὶ δὲ καλεμένην.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 330. Ὅλη μὲν ἄρα ἡ περιφέρεια τῷ κύκλῳ ἴση τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· ἡ δὲ ἡμισία ἴση τῇ τῆς εὐθείας ἡμισίᾳ, ὅτεν τῇ ΑΔ, καὶ τὸ τόξον αδ τῇ Αδ εὐθείᾳ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 331. Τὴν Κογχοειδῇ ἐμφαίνεσαν ἐξίσωσιν εὐρεῖν. Πιχθῶ ἀπὸ τῷ Μ ἡ μὲν ΜΠ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΜΡ τῇ ΛΙ παραάλληλος. καὶ ἔτω ἡ μὲν $\Psi\text{M} = \text{A}\Gamma = \alpha$, (§. 324.) ἡ δὲ $\text{EI} = \beta$, ἡ δὲ $\text{MP} = \text{EI} = \chi$, ἡ δὲ $\text{IP} = \text{IM} = \gamma$. ἔκῃν ἔσται ἡ $\text{ΓΠ} = \beta + \chi$. καὶ ἐπεὶ ὡς $\text{ΠΕ} : \text{ΜΨ} :: \text{ΕΓ} : \text{ΓΨ}$, (διὰ τὴν τῶν ΠΓΜ, ΕΓΨ τριγώνων ὁμοιότητα) ἦτοι ὡς $\chi : \alpha :: \beta : \text{ΓΨ}$, ἔσεται ἡ $\text{ΓΨ} = \alpha\beta$. διὸ ἡ $\text{ΓΜ} = \alpha + \alpha\beta = \alpha\chi + \alpha\beta$. ἔστι δὲ

$\overline{\text{ΓΜ}}^2 = \overline{\text{ΓΠ}}^2 + \overline{\text{ΠΜ}}^2$. διὸ δὴ ἡ κατὰ τὸ Q (ν) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ R, ἥτις Κογχοειδῇ ἐμφαίνει καμπύλην.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 332. Τὴν ἐξίσωσιν εὐρεῖν, τὴν Κισσοειδῇ ἐμφαίνεσαν.

N 3

"Εξω

Ἐξω ἡ μὲν τῷ κύκλῳ Διάμετρος (ξ) $AB = \alpha$, ἡ δὲ ἀποτετμημένη $AI = \chi$, ἡ δὲ τεταγμένη $IM = \gamma$. ἀπὸ δὲ τῶν κέντρων Z καὶ τῶν σημείων I ἤχθωσαν αἱ ZO , IK τῇ IM παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ὡς $AIH : KB :: AM : IH$, (διὰ τὴν τῶν τριγώνων AIB , AMI ὁμοιότητα) ἔστι δὲ ἡ $AM = IH$, (§. 325.) ἄρα καὶ ἡ $AI = KB = \chi$. διὸ καὶ ἡ $AK = BI = \alpha - \chi$. ἐπεὶ δὲ ὡς $AK : KI :: KI : KB$, ἥτοι ὡς $\alpha - \chi : KI :: KI : \chi$, ἔσται ἡ $KI = \sqrt{\alpha\chi - \chi^2}$. πάλιν ἐπεὶ ὡς $AK : KI :: AI : IM$, ἔσται καὶ ὡς $AK^2 : KI^2 :: AI^2 : IM^2$, ἥτοι ὡς $\alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 : \alpha\chi - \chi^2 :: \chi^2 : \gamma^2$. ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας ἡ κατὰ τὸ S (ο) ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ V , Κισσοειδῆ ἐμφαίνουσα, ἥς ἐγνητῶρ κύκλος ἴσων τῷ α διάμετρον ἔχει.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 333. Ἐν τῇ ἐξίσωσι αἶρα, τῇ τὴν Κισσοειδῆ ἐμφαίνουσα ὁ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης κύβος ἴσος ἐστὶ σφαιρῷ γινομένῳ ἐκ τῶν τετραγώνων τῆς τεταγμένης καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τῆς διαμέτρου τῶν κύκλου τῷ γνητῶρ καὶ τῆς ἀποτετμημένης.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Γ'.

§. 334. Τὴν ἐξίσωσιν εὐρεῖν, τὴν ἐμφαίνουσαν τὴν Τετραγωνίζουσαν καμπύλην.

Καίθω τὸ μὲν τῆς περιφερείας τῶν κύκλου τεταγμὸν $AB = \alpha$, (π) ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος $AG = \beta$, τὴν δὲ τόξον $AN = \chi$, ἡ δὲ $AI = \gamma$. ἐπεὶ δὲ ὡς $AB : AN :: AG : AI$, (§. 326.) ἔστιν αἶρα ὡς $\alpha : \chi :: \beta : \gamma$.

(ξ) πλ. XXXIX. κ. 3. (ο) πλ. XXXVI. (ο) πλ. XXXIX. κ. 4.

ἔξ ἧ κατὰ τὸ W (ρ) ἐξίσωσις πορίζεται, τὴν Τετραγωνίζουσαν ἐμφαίνουσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 335. Τὴν ἐξίσωσιν εὐρεῖν, τὴν Σπείραν δηλῶσαν.
Ἐστω ἡ μὲν τῷ κύκλῳ περιφέρεια $= π$, (σ) ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος $= η$. καὶ μέρος μὲν τῆς περιφέρειας τὸ Απ $= χ$, μέρος δὲ τῆς ἡμιδιαμέτρου τὸ πμ $= υ$. καὶ ἐπεὶ ὡς ὅλη ἡ περιφέρεια, πρὸς τὸ μέρος Απ, ἔτως ὅλη ἡ ἡμιδιάμετρος, πρὸς τὸ μέρος πμ, (§. 327.) εἰσι ἄρα ὡς $π : χ :: η : υ$. ἐκ τούτου ἢ κατὰ τὸ ΛΑ ἐξίσωσις (τ) γίνεται, Σπείραν δηλῶσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 336. Τὴν ἐξίσωσιν εὐρεῖν τὴν Κυκλοειδῆ ἐμφαίνουσαν.

Ἡχθῶ ἀπὸ τοῦ Π (υ) ἡ ΠΑ τῇ ΑΓ παράλληλος. καὶ ἔστω ἡ μὲν τῷ γεννήτορος κύκλῳ περιφέρεια $= π$, ἡ δὲ ἰσομέτρη ΑΓ $= α$, τὸ δὲ ὡς ἀποτετμημένη ἐκλαμβανόμενον τόξον ΒΜ $= χ$, ἡ δὲ τεταγμένη ΜΠ $= υ$. ἔκων ἔσται ἡ μὲν περιφέρεια ΒΠδ $= \frac{1}{2} π$, ἡ δὲ ΑΔ $= \frac{1}{2} α$. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΠδ $= ΑΔ$. τὸ δὲ τόξον Πδ $= Αδ$,

(§. 330.) εἰσι ἄρα καὶ Πβ ἡ λοιπὴ περιφέρεια ἴση λοιπῇ εὐθείᾳ τῇ δΔ. εἰσι δὲ ἡ ΝΛ $= δΔ$, ἄρα ἡ ΝΛ $= Πβ$. εἰσι δὲ ἡ ΜΛ $= ΠΝ$, (ἴσων γὰρ ὄντων τῶν Πβ, Μβ τόξων, ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ὀρθὰ αὐτῶν ἡμίτονα ΜΛ, ΠΝ) ἄρα ἡ ΝΛ $= δΔ = ΠΜ = υ$. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΔ : ΒΠδ :: δΔ : Πβ, ἔσται καὶ ὡς ΑΔ : ΒΠδ :: ΠΜ : ΒΜ,
N 4 ἥτοι

(ρ) πλ. XXXVI. (σ) πλ. XXXIX. κ. 5. (τ) πλ. XXXVI. (υ) πλ. XXXIX. κ. 6.

ἥτοι ὡς $\frac{1}{2} \alpha : \frac{1}{2} \pi :: \gamma : \chi$. ἔξ ὧ κατὰ τὸ ΒΒ (Φ)
προκύπτει ἰξισόσις, τὴν Κυκλοσὶδὴ ἐμφαίνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 337. Ἐν τῇ ἐξισώσει ἐν τῇ τὴν Κυκλοσὶδὴ ἐμ-
φανίστῃ ἡ ἀποτετμημένη χ ἴση ἐστὶ τῇ τεταγμένη γ .
ἔστι γάρ (§. 330) τὸ $\pi = \alpha$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 338. Ἰστέον, ὅτι αἱ μὲν ἰξισώσεις, αἱ διὰ τὸ
λόγε συντάσσονται, ὅν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν αἱ ἐν ταῖς
καμπύλαις εὐθεῖαι, εἴην αἱ ἀποτετμημέναι, καὶ τὰ
ταγμένα, καὶ οἱ ἄξονες, καὶ αἱ Διμέτρες καὶ Περ-
αίμετροι, Ἀλγεβραϊκοὶ λέγονται αἱ δὲ συνε-
τέμεναι διὰ τὸ λόγε, ὅν ἔχουσιν τόξα κύκλων πρὸς ταῖς
εἰρημέναις εὐθείαις, Ὑπερβατ. καί. ὁπλον ἀρετῇ
αἱ μὲν τὴν Τετραγωνίζουσαν, καὶ τὴν Σπέραν, καὶ τὴν
Κυκλοσὶδὴ ἐμφαίνουσαι ἰξισώσεις, Ὑπερβατικαὶ εἰσὶν αἱ
δὲ λοιπαὶ, περὶ ὧν ἐν τοῖς προλαβέσι καὶ τὰ προ-
ρόντι εἴρηται κεφαλαίῳ, Ἀλγ-Βραϊκαί.

(Φ), ΠΛ. XXXVI.



A Γ B

$$(A) \quad 3\alpha^3\beta | -4\alpha^2\beta^2 | 5\alpha\beta^3 | -5\alpha\mu^3$$

$$(B) \quad 3\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 5\alpha\beta^3 - 5\alpha\mu^3$$

$$(\Gamma) \quad 2\alpha^2\beta | 4\alpha^2\beta | 6\alpha^3\beta | (Z) - 5\alpha\gamma^3 | - 7\alpha\gamma^3 | - 10\alpha\gamma^3 | \alpha\gamma^3$$

$$(\Delta) \quad 2\alpha^3\beta$$

$$4\alpha^3\beta$$

$$6\alpha^3\beta$$

$$\alpha^5\beta$$

$$(H) - 5\alpha\gamma^3$$

$$- 7\alpha\gamma^3$$

$$- 10\alpha\gamma^3$$

$$\alpha\gamma^3$$

$$(K) \quad 6\alpha^2\beta$$

$$- 4\alpha^2\beta$$

$$\alpha^2\beta$$

$$- 8\alpha^2\beta$$

$$- 2\alpha^2\beta$$

$$(\underline{E}) \quad 13\alpha^3\beta$$

$$(\Theta) - 21\alpha\gamma^3$$

$$(\Lambda) - 7\alpha^2\beta$$

$$(I) \quad 6\alpha^2\beta | - 4\alpha^2\beta | \alpha^2\beta | - 8\alpha^2\beta | - 2\alpha^2\beta$$

$$(M) \quad 3\alpha^4 | - 3\alpha^3\beta | 6\alpha^2\beta^2 | - 5\alpha\beta^3 | 2\alpha^4 | - 8\alpha^2\beta$$

$$(N) \quad 7\alpha^2\beta^2 | - 8\alpha\beta^3 | - \alpha^4 | 5\alpha^3\beta | - 2\alpha^2\beta^2 | - 6\alpha\beta^3$$

$$(\Xi) \quad 3\alpha^4 - 3\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 5\alpha\beta^3$$

$$2\alpha^4 - 8\alpha^3\beta \quad 7\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta^3$$

$$- \alpha^4 \quad 5\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 - 6\alpha\beta^3$$

$$(\Pi) \quad 6\alpha \quad | \quad (P) \quad 4\alpha$$

$$(\Upsilon) \quad 6\alpha$$

$$- 4\alpha$$

$$(O) \quad 4\alpha^4 - 6\alpha^3\beta + 11\alpha^2\beta^2 - 19\alpha\beta^3$$

$$(\Phi) \quad 2\alpha$$

$$(\Sigma) \quad 8\gamma \quad | \quad (T) - 5\gamma$$

$$(X) \quad 8\gamma$$

$$+ 5\gamma$$

$$(\Psi) \quad 13\gamma$$

$$(A) 3\alpha\beta - 5\gamma\delta \mid (B) -4\alpha^2\gamma + 3\beta^2\delta^2 \mid (\Gamma) 3\alpha\beta - 5\gamma\delta + 4\alpha^2\gamma - 3\beta^2\delta^2$$

$$(\Delta) 4\alpha^2\beta\gamma - 3\gamma^2\delta \mid (Z) 4\alpha^3\beta\gamma - 3\alpha^2\beta \mid (\Theta) -5\alpha\beta\gamma - 3\alpha\beta$$

$$(E) 12\alpha^2\beta\gamma^2\delta \mid (H) -12\alpha^5\beta^3 \mid (I) +15\alpha^2\beta^2$$

$$(K) -2\alpha^2\beta^2\gamma. 3\alpha\beta^2\gamma^4 \mid (M) -\frac{2}{3}\alpha^2\beta. -\frac{2}{5}\alpha\beta$$

$$(\Lambda) -6\alpha^2\beta^4\gamma^5 \quad (N) +\frac{6}{15}\alpha^3\beta^2$$

$$(\Xi) \overline{2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 5\beta^2}. \overline{4\alpha - 3\beta} \mid (T) 4\alpha\beta^2 \mid (\Upsilon) 3\gamma^2\delta$$

$$(O) 2\alpha^2 - 3\alpha\beta + 5\beta^2 \quad \mid (\Phi) 4\alpha\beta^2 : 3\gamma^2\delta$$

$$4\alpha - 3\beta$$

$$(X) 4\alpha\beta^2$$

$$(\Pi) \overline{8\alpha^3 - 12\alpha^2\beta + 20\alpha\beta^2} \quad \overline{3\gamma^2\delta}$$

$$(P) -6\alpha^2\beta + 9\alpha\beta^2 - 15\beta^3$$

$$(\Sigma) \overline{8\alpha^3 - 18\alpha^2\beta + 29\alpha\beta^2 - 15\beta^3}$$

$$(\Psi) \alpha\beta\gamma - \delta\epsilon\zeta \mid (\Omega) \vartheta_{ik} + \lambda_{\mu\nu}$$

$$(2\Psi) \overline{\alpha\beta\gamma - \delta\epsilon\zeta} : \overline{\vartheta_{ik} + \lambda_{\mu\nu}}$$

$$(2\Omega) \alpha\beta\gamma - \delta\epsilon\zeta$$

$$\overline{\vartheta_{ik} + \lambda_{\mu\nu}}$$

$$(E) - 8\alpha^2\gamma^2 (Z) - 2\alpha\gamma^2 (H) + 4\alpha (\Theta) 10\beta^4\delta^5 (I) - 2\beta\delta^4 (K) - 5\beta^3\delta^4 (V) - 3\alpha\gamma^2\beta^3 (M) + 3\alpha\gamma\beta^2 (N) - \gamma\beta^2 (\Xi) - 12\beta^5\gamma^3 (O) 4\beta^3\gamma^4 u$$

$$(II) - \mathcal{E} \mathcal{B}_2 \gamma_2^* \gamma_2^* (P) - \frac{n}{\mathcal{E} \mathcal{B}_2 \gamma_2^* \gamma_2^*}$$

$$(X) \quad \overline{-\alpha_4 + 2\alpha_2 - \alpha_3} \quad (e) \quad \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4$$

$$\begin{aligned} (F) \quad & -2\alpha^3\beta + 5\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4 \mid (F) \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 \quad (G) \mid \alpha + \beta \\ (E) \quad & \frac{+2\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta^3}{\overline{\alpha + \beta + \gamma^2}} \quad (L) \end{aligned}$$

$$a^2x - x^2 + x^3 \quad (c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (D) \quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (D)$$

$$(A) \frac{2\alpha\beta}{\gamma} \mid \frac{3\beta\delta}{\gamma} \mid \frac{4\alpha\beta}{\gamma} \mid -\frac{2\beta\delta}{\gamma} \mid (B) \frac{6\alpha\beta + \beta\delta}{\gamma}$$

$$(\Gamma) \frac{4\alpha^2\gamma^2}{\beta} \mid -\frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta} \mid -\frac{3\alpha\delta}{\beta} \mid -\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta} \mid (\Delta) \frac{\alpha^2\gamma^2 - 3\alpha\delta}{\beta}$$

$$(E) \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta} \mid \frac{\alpha\beta}{\varepsilon} \mid (Z) \frac{\alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta}{\varepsilon\delta} \mid (H) \frac{\alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta}{\varepsilon\delta}$$

$$(\Theta) \frac{2\alpha^2}{\beta} \mid -\frac{3\alpha^2}{\gamma} \mid \frac{4\beta^2}{\delta} \mid (I) \frac{2\gamma\delta\alpha^2 - 3\beta\delta\alpha^2 + 4\gamma\beta^3}{\beta\gamma\delta}$$

$$(K) \frac{4\alpha^2\beta}{\gamma} \mid \frac{3\alpha^2\beta}{\gamma} \mid (\Lambda) \frac{4\alpha^2\beta - 3\alpha^2\beta}{\gamma} = \frac{\alpha^2\beta}{\gamma}$$

$$(M) \frac{3\alpha^3\gamma}{\beta} \mid -\frac{2\gamma^2}{\beta} \mid (N) \frac{3\alpha^3\gamma + 2\gamma^2}{\beta}$$

$$(\Xi) \frac{2\alpha\beta}{\gamma} \mid \frac{3\alpha\beta}{\delta} \mid (O) \frac{2\alpha\beta\delta - 3\alpha\beta\gamma}{\gamma\delta} \mid (\Pi) \frac{2\alpha\beta\delta - 3\alpha\beta\gamma}{\gamma\delta}$$

$$(P) \frac{2\alpha + \beta}{\gamma} \mid -\frac{3\beta + \varepsilon}{\delta} \mid (\Sigma) \frac{2\alpha\delta + \beta\delta + 3\beta\gamma - \varepsilon\gamma}{\gamma\delta}$$

$$(A) \frac{3\alpha^2\beta}{\gamma} \frac{2\alpha^2\beta}{\gamma} \mid (B) \frac{6\alpha^4\beta^2}{\gamma^2} \mid (\Gamma) \frac{2\alpha--3\beta}{\gamma+\delta} \frac{\varepsilon+\alpha}{\beta}$$

$$(\Delta) \frac{2\alpha\varepsilon-3\beta\varepsilon+2\alpha^2--3\alpha\beta}{\beta\gamma+\beta\delta} \mid (E) \frac{3\alpha\beta}{\gamma} \mid (Z) \frac{2\varepsilon\alpha}{\delta} \mid (H) \frac{\delta}{2\varepsilon\alpha}$$

$$(\Theta) \frac{3\alpha\beta\delta}{2\varepsilon\alpha\gamma} = \frac{3\beta\delta}{2\varepsilon\gamma} \mid (I) \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\gamma\delta} \mid (K) \frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}$$

$$(\Lambda) \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\gamma\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\gamma\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma\delta} = \frac{\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon}{\gamma\delta}$$

$$(M) \beta\sqrt[3]{\gamma} \mid 2\sqrt[3]{\gamma^2} \mid \delta\sqrt[4]{-\gamma} \mid \varepsilon\sqrt[4]{\beta+\varepsilon} \mid -3\alpha\sqrt[3]{\beta^3}$$

$$(N) \beta\sqrt[3]{\gamma} + 2\sqrt[3]{\gamma^2} + \delta\sqrt[4]{-\gamma} + \varepsilon\sqrt[4]{\beta+\varepsilon} - 3\alpha\sqrt[3]{\beta^3}$$

$$(\Xi) \sqrt[3]{32\alpha^5} \mid (O) \sqrt[3]{8\alpha} \mid (\Pi) \sqrt[3]{16\alpha^4-2\alpha} \mid (P) 4\alpha^2\sqrt[3]{2\alpha} \mid (\Sigma) \sqrt[3]{4\cdot 2\alpha} \mid (T) 2\sqrt[3]{2\alpha}$$

$$(\Upsilon) \sqrt[3]{\alpha^4+\beta^3} \mid 3\alpha^2\beta^2+\beta^3 \mid (\Phi) \sqrt[3]{\alpha} \mid (X) \sqrt[3]{\alpha+\beta} \sqrt[3]{\alpha} \mid (\Psi) \sqrt[3]{\alpha^3\cdot\alpha}$$

$$(\Omega) \alpha\sqrt[3]{\alpha} \mid (C) 2\sqrt[3]{\alpha+\beta} \mid 3\sqrt[3]{\alpha-\beta} \mid -\sqrt[3]{\alpha+\beta}$$

$$(D) \frac{2+3-i}{1} \sqrt[3]{\alpha+\beta} = 4\sqrt[3]{\alpha+\beta} \mid (I) \alpha\sqrt[3]{\beta^2} \mid \gamma\sqrt[3]{\beta^2} \mid \frac{\delta+\varepsilon}{1} \sqrt[3]{\beta^2}$$

$$(G) \frac{\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon}{1} \sqrt[3]{\beta^2} \mid (L) \frac{\alpha}{\beta} \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} \frac{\gamma}{\varepsilon} \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} \mid (M) \frac{\alpha\varepsilon+\beta\gamma}{\beta\varepsilon} \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2}$$

$$(N) 3\sqrt[3]{\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2} = 3\cdot \frac{\alpha+\beta}{1} \sqrt[3]{\alpha} \mid (Q) 2\sqrt[3]{\alpha^3} = 2\alpha\sqrt[3]{\alpha}$$

$$(R) \frac{3\alpha+3\beta+2\alpha}{1} \sqrt[3]{\alpha} = 5\alpha+3\beta\sqrt[3]{\alpha}$$

- (A) $3V^{\alpha_3} | (B) \nu V^{\alpha_2} | (T) 3V^{\alpha_3 - \nu \alpha_2} | (\Delta) \underline{4\alpha + 2\beta V^{\alpha_3 + \beta_3}}$
- (E) $\underline{4\alpha - \beta V^{\alpha_3 + \beta_3}} | (Z) \underline{4\alpha + 2\beta - 4\alpha + \beta V^{\alpha_3 + \beta_3}} = 3\beta V^{\alpha_3 + \beta_3}$
- (H) $\underline{\alpha_1 \beta V^{\nu}} | (\Theta) \underline{-\gamma_1 \delta V^{\nu}} | (I) \underline{\alpha_1 \beta \gamma - \delta V^{\nu}} | (K) \alpha V^{\beta_3} | (V) \gamma V^{\alpha_2 \beta_3}$
- (M) $\alpha V^{\beta_3 \times \gamma V^{\alpha_2 \beta_2}} | (N) V^{\alpha} | (Z) V^{\beta} | (O) 4V^{\beta_3 \alpha} | (T) 2V^{\beta_3 \alpha}$
- (P) $8V^{\beta_3 \alpha_2} = 8 \cdot 3\alpha = 24\alpha | (\Sigma) \underline{2\alpha - 3\beta V^{\alpha_2 + \beta}}$
- (T) $3\gamma V^{\beta_3 \gamma - \delta} | (T) \underline{6\alpha \gamma - 9\beta \gamma \cdot V^{\beta_3 \gamma + 2\beta \gamma - \alpha_2 \delta - \beta \delta}}$
- (Φ) $V^{\alpha} | (X) V^{\beta} | (Y) V^{\alpha_2 \beta_2} | (\Xi) \underline{4\alpha + 2\alpha_2 V^{\alpha_2 + 2\alpha \beta + \beta_2}}$
- (C) $2\alpha V^{\alpha + \beta} | (D) \underline{2 + \alpha V^{\alpha + \beta}} | (F) 2\beta V^{\alpha + \beta}$
- (G) $\beta V^{\alpha + \beta} | (M) \underline{2 V^{\alpha + \beta}}$

$$\begin{aligned}
& (A) \frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha\beta} \mid (B) \frac{\alpha\beta}{\gamma} \mid (T) \frac{\alpha^2\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta^2}{\gamma} \mid (\Delta) \frac{\gamma\delta}{\gamma\delta} \mid (E) \frac{1}{2\beta} \\
& (Z) \frac{2\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha} \mid (H) \frac{2\alpha + 3\alpha^2\beta}{\beta} \mid (\Theta) \frac{2\gamma^2\delta}{\beta} \mid (I) \frac{4\alpha\gamma^2\delta + 6\alpha^2\gamma^2\beta\delta}{\beta} \\
& (K) \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} \mid (A) \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} \mid (M) \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} \cdot \gamma^2 = \gamma^2 \mid (N) \frac{2\alpha - 3\beta}{\alpha + \beta} \\
& (\Xi) 2\beta\gamma^3 \mid (O) 2\alpha - 3\beta + 2\beta\gamma^3 \mid (\Pi) 3\alpha^2 + \gamma \mid (P) 4\beta\gamma^2 \\
& (\Sigma) 3\alpha^2 + \gamma - 4\beta\gamma^2 \mid (T) 2\alpha\gamma^2 \mid (T) 2\beta^2 - 3\gamma \mid (\Phi) 2\alpha\gamma^2 - 2\beta^2 + 3\gamma \\
& (X) 2\beta^2 - 2\gamma \mid (\Psi) 2\alpha + \beta\gamma^2 \mid (\Omega) 4\alpha\beta^2 - 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 2\beta\gamma \cdot \gamma^2 \\
& (C) \alpha^2 - \beta^2 \mid (D) \alpha + \beta\gamma^2 \mid (e) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta\gamma^2}{\gamma^2} \\
& (F) \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} \cdot \gamma^2 \mid (G) \alpha + \beta \mid (L) \alpha + \beta\gamma^2 \\
& (M) \frac{2\alpha}{\alpha} \mid (N) \frac{1}{\alpha} \gamma^2 \mid (Q) 2\alpha + 3\alpha\gamma\gamma^2 \mid (R) \frac{3\gamma}{5\beta} \\
& (S) \frac{1}{\beta} \gamma^2 \mid (V) \frac{3\alpha}{5\beta - 3\alpha\beta\gamma^2}
\end{aligned}$$

$$(A) \frac{\alpha}{\beta} \mid (B) \frac{1}{1} \sqrt{\nu} \mid (\Gamma) \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\nu} \mid (\Delta) \frac{2\alpha\beta}{\gamma} (E) \frac{\varepsilon}{1} \sqrt{\nu} (Z) \frac{2\alpha\beta}{\varepsilon\gamma\sqrt{\nu}}$$

$$(H) \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 \mid (\Theta) \overline{\alpha \pm \beta^3} = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(I) \overline{\alpha \pm \beta^4} = \alpha^4 \pm 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 \pm 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(K) \overline{\alpha \pm \beta^v} = \alpha^v \pm \frac{v}{1} \alpha^{v-1} \beta + \frac{v \cdot v - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{v-2} \beta^2 \pm \frac{v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{v-3} \beta^3 \pm$$

$$\frac{v \cdot v - 1 \cdot v - 2 \cdot v - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^{v-4} \beta^4 + \frac{v \cdot v - 1 \cdot v - 2 \cdot v - 3 \cdot v - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \alpha^{v-5} \beta^5, \kappa\tau.$$

$$(\Lambda) \alpha^{\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2\alpha^{\frac{1}{2}}} - \frac{\beta^2}{8\alpha^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\beta^3}{48\alpha^{\frac{5}{2}}} - \frac{15\beta^4}{16 \cdot 24\alpha^{\frac{7}{2}}}, \kappa\tau.$$

$$(M) +1, -1 \mid (N) +1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3}$$

$$(\Xi) +1, -1, +\sqrt{+1}, -\sqrt{-1}$$

$$(O) \dagger 1, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{5} \dagger \frac{1}{2} \sqrt{-5} \dagger \frac{1}{2} \sqrt{5}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{-5} \dagger \frac{1}{2} \sqrt{5},$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \sqrt{-5} - \frac{1}{2} \sqrt{5}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{-5} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$(A) 2\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 \mid (B) \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{-\alpha^2} \mid (\Gamma) \alpha + \beta$$

$$(\Delta) \frac{\begin{array}{r} +2\alpha\beta + \beta^2 \\ -2\alpha\beta - \beta^2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}}$$

$$(E) \frac{\chi^2 + 2\chi y + 2\chi z + y^2 + 2yz + z^2}{-\chi^2} \mid (Z) \chi + y + z$$

$$(H) \quad 2\chi y + 2\chi z + y^2 + 2yz + z^2 \mid (I) 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \alpha^3 + \beta^3 \mid (\Lambda) \alpha + \beta$$

$$(\Theta) \quad \begin{array}{r} 2\chi \cdot \overline{y+z} + y^2 + 2yz + z^2 \\ -2\chi y - 2\chi z - y^2 - 2yz - z^2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \mid \begin{array}{r} (K) \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ -\alpha^3 \\ \hline (M) \frac{3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}{-3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \beta^3} \end{array}$$

$$(N) \frac{\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta + \gamma^2\delta^2}{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4} \mid (\Xi) \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha^2 + \beta^2} \mid (P) \frac{\alpha^4}{\beta^8} \mid (\Sigma) \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$(O) \frac{\alpha^6}{\alpha^6 + 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 + \beta^6} \mid (\Pi) \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \mid (T) \alpha\chi + \kappa = \beta\chi + \zeta$$

$$(\Upsilon) \frac{y - \kappa}{\alpha} = \frac{y - \zeta}{\beta} \mid (\Phi) \alpha\chi^2 - \beta\chi^2 = \frac{\gamma\chi^2 - \beta\delta}{\varepsilon}$$

$$(X) 3\chi^2 - 2\alpha\chi = \chi^2 + 2\beta\chi + \alpha\beta \mid (\Psi) \chi^3 + 2\beta\chi^2 = \frac{\beta\delta}{\gamma}$$

$$(\Omega) \chi^3 + 2\beta\chi = \beta\gamma - \chi^2$$

$$(A) \alpha x + \beta y = \gamma z - \beta \delta \mid (B) \begin{array}{c} x^2 - \gamma \\ -\beta \end{array} \mid x + \beta y = 0$$

$$(\Gamma) \beta\beta - \beta\beta - \beta\gamma + \beta\gamma = 0 \mid (\Delta) \gamma\gamma - \gamma\gamma - \beta\gamma + \beta\gamma = 0$$

$$(E) \begin{array}{c} x^2 + \gamma \\ +\beta \end{array} \mid x + \beta y = 0 \mid (Z) \begin{array}{c} x^2 - \gamma \\ +\beta \end{array} \mid x - \beta y = 0$$

$$(H) +, -, + \mid (\Theta) +, +, + \mid (I) +, \pm, - \mid (K) +, +, - \mid (\Lambda) +, -, -$$

$$(M) \begin{array}{c} x^3 - \gamma \\ -\beta \\ -\alpha \end{array} \mid \begin{array}{c} x^2 + \beta\gamma \\ +\alpha\gamma \\ +\alpha\beta \end{array} \mid x - \alpha\beta\gamma = 0 \mid (N) \gamma^3 - \gamma^3 - \beta\gamma^2 - \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = 0$$

$$(\Xi) \beta^3 - \beta^3 - \gamma\beta^2 - \alpha\beta^2 + \gamma\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = 0$$

$$(O) \alpha^3 - \alpha^3 - \gamma\alpha^2 - \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^2 + \beta\alpha^2 + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = 0$$

$$(\Pi) \begin{array}{c} x^3 + \gamma \\ +\beta \\ +\alpha \end{array} \mid \begin{array}{c} x^2 + \beta\gamma \\ +\alpha\gamma \\ +\alpha\beta \end{array} \mid x + \alpha\beta\gamma = 0 \mid (P) \begin{array}{c} x^3 + \alpha \\ +\beta \\ -\gamma \end{array} \mid \begin{array}{c} x^2 + \alpha\beta \\ -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \end{array} \mid x - \alpha\beta\gamma = 0$$

$$(\Sigma) \begin{array}{c} x^3 - \alpha \\ -\beta \\ +\gamma \end{array} \mid \begin{array}{c} x^2 + \alpha\beta \\ -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \end{array} \mid x + \alpha\beta\gamma = 0 \mid (T) +, -, +, - \mid (\Upsilon) +, +, +, +$$

$$(\Phi) +, \pm, \pm, - \mid (X) +, +, +, - \mid (\Psi) +, -, -, -, \mid (\Omega) +, -, +, -$$

$$(A) +, +, -, - \mid (B) +, \pm, \pm, + \mid (\Gamma) +, +, +, + \mid \Delta +, -, -, +$$

$$(E) +, -, +, + \mid (Z) +, +, -, + \mid (H) \chi^2 + \alpha\chi - \beta = 0$$

$$(\Theta) y^2 - 2\mu \mid y + \mu^2 - \alpha\mu - \beta = 0 \mid (\Gamma) y^2 + 2\mu \mid y + \mu^2 + \alpha\mu - \beta = 0$$

$$+ \alpha \mid + \alpha$$

$$(K) \mu^2 y^2 + \alpha\mu y - \beta = 0 \mid (\Lambda) \frac{y^2 + \alpha y - \beta}{\mu^2 \mu} = 0 \mid (M) \frac{y^4 + \alpha y^2 - \beta}{\mu^2 \mu} = 0$$

$$(N) \frac{1}{y^2} + \frac{\alpha}{y} - \beta = 0 \mid (\Xi) \alpha\chi + \frac{\chi}{\beta} - \frac{\gamma\chi}{\delta} = \chi + \frac{\gamma\chi}{\alpha} - \epsilon$$

$$(O) \alpha\beta\chi + \chi - \frac{\beta\gamma\chi}{\delta} = \beta\chi + \frac{\beta\gamma\chi}{\alpha} - \beta\epsilon$$

$$(\Pi) \alpha\beta\delta\chi + \delta\chi - \beta\gamma\chi = \beta\delta\chi + \frac{\beta\gamma\delta\chi}{\alpha} - \beta\delta\epsilon$$

$$(P) \alpha^2\beta\delta\chi + \alpha\delta\chi - \alpha\beta\gamma\chi = \alpha\beta\delta\chi + \beta\gamma\delta\chi - \alpha\beta\delta\epsilon$$

$$(\Sigma) \alpha^2\beta\delta\chi + \alpha\delta\chi - \alpha\beta\gamma\chi - \alpha\beta\delta\chi - \beta\gamma\delta\chi = -\alpha\beta\delta\epsilon$$

$$(T) \overline{\alpha^2\beta\delta + \alpha\delta - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \beta\gamma\delta} \cdot \chi = -\alpha\beta\delta\epsilon$$

$$(\Upsilon) \chi = \frac{-\alpha\beta\delta\epsilon}{\alpha^2\beta\delta + \alpha\delta - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta - \beta\gamma\delta} \mid (\Phi) \alpha\chi + \kappa = \beta\chi + \zeta \mid \chi = \frac{\kappa - \zeta}{\beta - \alpha}$$

$$(\Psi) \frac{y - \kappa}{\alpha} = \frac{y - \zeta}{\beta} \mid (\Omega) y = \frac{\beta\kappa - \alpha\zeta}{\beta - \alpha}$$

$$(A) \chi = \frac{-5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9}{25 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 15 - 5 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 15 \cdot 4} = -\frac{360}{90} = -4$$

$$(B) \chi = \frac{60-20}{6-2} = \frac{40}{4} = 10 \quad | \quad (\Gamma) y = \frac{6 \cdot 60 - 2 \cdot 20}{6-2} = \frac{360-40}{4} = 80$$

$$(\Delta) \alpha^2 \chi^2 + \frac{\beta^2 \chi^2}{\alpha^2} = \alpha^2 - 2\beta \chi^2 \quad | \quad (E) \alpha^4 \chi^2 + \beta^2 \chi^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2 \beta \chi^2$$

$$(Z) \alpha^4 \chi^2 + 2\alpha^2 \beta \chi^2 + \beta^2 \chi^2 = \alpha^4 \quad (H) \overline{\alpha^4 + 2\alpha^2 \beta + \beta^2} \cdot \chi^2 = \alpha^4$$

$$(\Theta) \chi^2 = \frac{\alpha^4}{\alpha^4 + 2\alpha^2 \beta + \beta^2} \quad | \quad (I) \chi = \frac{\pm \sqrt{\alpha^4}}{\sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2 \beta + \beta^2}} \quad | \quad (K) \chi = \frac{\pm \alpha^2}{\alpha^2 + \beta}$$

$$(\Lambda) \frac{\alpha \chi^2 - \gamma^2 + \alpha \chi}{\beta} = \chi^2 - \frac{3\alpha^3}{\gamma} \quad | \quad (M) \alpha \gamma \chi^2 - \beta \gamma^3 + \alpha \beta \gamma \chi = \beta \gamma \chi^2 - 3\beta \alpha^3$$

$$(N) \alpha \gamma \chi^2 - \beta \gamma \chi^2 + \alpha \beta \gamma \chi = \beta \gamma^3 - 3\beta \alpha^3$$

$$(\Xi) \overline{\alpha \gamma - \beta \gamma} \cdot \chi^2 + \alpha \beta \gamma \chi = \beta \gamma^3 - 3\beta \alpha^3$$

$$(O) \chi^2 + \frac{\alpha \beta \gamma \chi}{\alpha \gamma - \beta \gamma} = \frac{\beta \gamma^3 - 3\beta \alpha^3}{\alpha \gamma - \beta \gamma}$$

$$(\Pi) \chi^2 + \frac{\alpha \beta \gamma \chi}{\alpha \gamma - \beta \gamma} + \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{2\alpha \gamma - 2\beta \gamma^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{2\alpha \gamma - 2\beta \gamma^2} + \frac{\beta \gamma^3 - 3\beta \alpha^3}{\alpha \gamma - \beta \gamma}$$

$$(A) \frac{\chi + \alpha\beta\gamma}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma^2} + \frac{\beta\gamma^3 - 3\beta\alpha^3}{\alpha\gamma - \beta\gamma}}$$

$$(B) \frac{\chi - \alpha\beta\gamma}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma^2} + \frac{\beta\gamma^3 - 3\beta\alpha^3}{\alpha\gamma - \beta\gamma}}$$

$$(\Gamma) \frac{\chi - \alpha\beta\gamma}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma} + \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma^2} + \frac{\beta\gamma^3 - 3\beta\alpha^3}{\alpha\gamma - \beta\gamma}}$$

$$(\Delta) \frac{\chi - \alpha\beta\gamma}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma} - \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{2\alpha\gamma - 2\beta\gamma^2} + \frac{\beta\gamma^3 - 3\beta\alpha^3}{\alpha\gamma - \beta\gamma}}$$

$$(E) \chi^2 \pm 2A\chi = \pm B^2 \mid (Z) \chi^2 \pm 2A\chi + A^2 = A^2 \pm B^2$$

$$(H) \chi \pm A = \pm \sqrt{A^2 \pm B^2} \mid (\Theta) \chi = \mp A \pm \sqrt{A^2 \pm B^2}$$

$$(I) \chi = \mp A + \sqrt{A^2 \pm B^2} \mid (K) \chi = \mp A - \sqrt{A^2 \pm B^2}$$

$$(\Lambda) \chi^{\frac{1}{2}} \chi = 1 \mid (M) \chi^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \mid (N) \chi^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$(\Xi) \chi = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \mid (O) \chi = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$(\Pi) y^2 \pm 2\mu y \pm \mu^2 = \pm 2A y \pm 2\mu = \pm B^2 \mid (P) y^2 \mp 2A y \pm A^2 \pm 2A y - 2A^2 = \pm B^2$$

$$(\Sigma) y^2 - A^2 = \pm B^2 \mid (T) y^2 = A^2 \pm B^2 \mid (\Upsilon) y = \pm \sqrt{A^2 \pm B^2}$$

$$(\Phi) \chi \pm A = \pm \sqrt{A^2 \pm B^2} \mid (X) \chi = \mp A \pm \sqrt{A^2 \pm B^2}$$

$$(A) \alpha\chi^3 - \beta\gamma = \frac{\alpha\gamma\chi^3}{\varepsilon} \mid (B) \chi^3 = \frac{\varepsilon\beta\gamma}{\varepsilon\alpha - \alpha\gamma} \mid (\Gamma) = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\varepsilon\alpha - \alpha\gamma}}$$

$$(\Delta) \chi = 1. \sqrt[3]{\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\varepsilon\alpha - \alpha\gamma}} \mid (E) \chi = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\varepsilon\alpha - \alpha\gamma}}$$

$$(Z) \chi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon\beta\gamma}{\varepsilon\alpha - \alpha\gamma}} \mid (H) \phi^3 + \alpha\phi^2 - \gamma\phi = \beta \mid (\Theta) \phi = \chi \pm \mu$$

$$(I) \phi^2 = \chi^2 \pm 2\mu\chi + \mu^2 \mid (K) \phi^3 = \chi^3 \pm 3\mu\chi^2 + 3\mu^2\chi \pm \mu^3$$

$$(\Lambda) \phi^3 + \alpha\phi^2 - \gamma\phi = \chi^3 \pm 3\mu\chi^2 \pm 3\mu^2\chi \pm \mu^3 \pm \alpha\chi^2 \pm 2\alpha\mu\chi \pm \alpha\mu^2 - \gamma\chi \mp \gamma\mu$$

$$(M) \pm 3\mu\chi^2 + \alpha\chi^2 = 0 \mid (N) \pm\mu = -\frac{\alpha}{3} \mid (\Xi) \phi = \chi - \frac{\alpha}{3}$$

$$(O) \phi^3 + \alpha\phi^2 - \gamma\phi = \chi^3 - \frac{1}{3}\alpha^2\chi - \gamma\chi + \frac{\alpha\gamma}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}$$

$$(\Pi) \chi^3 - \frac{1}{3}\alpha^2 - \gamma \cdot \chi = \beta - \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} \mid (P) -\frac{1}{3}\alpha^2 - \gamma = \nu$$

$$(\Sigma) \beta - \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} = 2\zeta \mid (T) \chi^3 - \nu\chi = 2\zeta \mid (\Upsilon) \chi = y + \Omega$$

$$(\Phi) \chi^3 = y^3 + 3\Omega y \cdot y + \Omega + \Omega^3 \mid (X) \chi^3 = y^3 + 3\Omega y\chi + \Omega^3$$

$$(\Psi) \chi^3 - \nu\chi = y^3 + 3\Omega y\chi + \Omega^3 - \nu\chi$$

$$(\Omega) y^3 + 3\Omega y\chi + \Omega^3 - \nu\chi = 2\zeta$$

$$(A) 3y\Omega\chi - v\chi = 0 \mid (B) y = \frac{v}{3\Omega} \mid (\Gamma) y^3 = \frac{v^3}{27\Omega^3} \mid (\Delta) y^3 + \Omega^3 = 2\zeta$$

$$(E) \Omega^3 + \frac{v^3}{27\Omega^3} = 2\zeta \mid (Z) \Omega^6 - 2\zeta\Omega^3 = -\frac{v^3}{27} \mid (H) \Omega^6 - 2\zeta\Omega^3 + \zeta^2 = \zeta^2 - \frac{v^3}{27}$$

$$(\Theta) \Omega^3 = \zeta + \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}} \mid (I) \Omega = \sqrt[3]{\zeta + \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}} \mid (K) y = \sqrt[3]{\zeta - \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}}$$

$$(\Lambda) \chi = \sqrt[3]{\zeta - \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}} + \sqrt[3]{\zeta + \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}}$$

$$(M) \phi = \sqrt[3]{\zeta - \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}} + \sqrt[3]{\zeta + \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}} - \frac{\alpha}{3} \mid (N) v = -\frac{4}{3} - 3 = -\frac{13}{3}$$

$$(\Xi) 2\zeta = 10 - 2 - \frac{16}{27} \mid (O) \zeta = \frac{100}{27} \mid (\Pi) \phi = \sqrt[3]{\frac{100}{27} - \frac{17}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{\frac{100}{27} + \frac{17}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}$$

$$(P) \phi = \frac{4}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$(\Sigma) \sqrt[3]{\zeta - \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}} - \sqrt[3]{\zeta + \sqrt[3]{\zeta^2 - \frac{v^3}{27}}} - \frac{2}{3} = \mu - \sqrt[3]{v} + \mu + \sqrt[3]{v}$$

$$(T) \phi = \mu - \sqrt[3]{v} + \mu + \sqrt[3]{v} = 2\mu$$

$$(\Upsilon) \phi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-3} \cdot \mu + \sqrt[3]{v} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-3} \cdot \mu - \sqrt[3]{v} = -\mu + \sqrt[3]{3v}$$

$$(\Phi) \phi = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-3} \cdot \mu + \sqrt[3]{v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-3} \cdot \mu - \sqrt[3]{v} = -\mu - \sqrt[3]{-3v}$$

$$(X) \phi^3 + 2\phi^2 + 3\phi = 54 \mid (\Psi) \phi = \chi - \frac{2}{3}$$

$$(A) \chi^3 + \frac{5\chi}{3} = \frac{1496}{27} \mid (B) \chi = y - \Omega$$

$$(\Gamma) y^3 - 3y\Omega\chi - \Omega^3 + \frac{5\chi}{3} = \frac{1496}{27} \mid (\Delta) -3y\Omega\chi + \frac{5\chi}{3} = 0$$

$$(E) y^3 - \Omega^3 = \frac{1496}{27} \mid (Z) \Omega = \frac{5}{9y} \mid (H) \Omega^3 = \frac{125}{729y^3}$$

$$(\Theta) y^3 - \frac{125}{729y^3} = \frac{1496}{27} \mid (I) y^6 - \frac{1496y^3}{27} = \frac{125}{729}$$

$$(K) y^6 - \frac{1496y^3}{27} + \frac{748^2}{27^2} = \frac{748^2}{27^2} + \frac{125}{729}$$

$$(\Lambda) y^3 - \frac{748}{27} = \sqrt[3]{\frac{559629}{727}} = \frac{7}{3} \sqrt[3]{141} \mid (M) y^3 = \frac{748}{27} + \frac{7}{3} \sqrt[3]{141}$$

$$(N) \Omega^3 = -\frac{748}{27} + \frac{7}{3} \sqrt[3]{141} \mid (\Xi) y = \sqrt[3]{\frac{748}{27} + \frac{7}{3} \sqrt[3]{141}} = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} \sqrt[3]{141}$$

$$(O) \Omega = \sqrt[3]{-\frac{748}{27} + \frac{7}{3} \sqrt[3]{141}} = -\frac{11}{6} + \frac{1}{6} \sqrt[3]{141}$$

$$(\Pi) \chi = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} \sqrt[3]{141} + \frac{11}{6} - \frac{1}{6} \sqrt[3]{141} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$(P) \phi = \frac{11}{3} - \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\begin{aligned}
 & (A) y - \frac{5}{9y} = \frac{11}{3} \mid (B) y^2 - \frac{11y}{3} = \frac{5}{9} \mid (\Gamma) y^2 - \frac{11y}{3} + \frac{121}{36} = \frac{121}{36} + \frac{5}{9} = \frac{141}{36} \\
 & (\Delta) y - \frac{11}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{141} \mid (E) y = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{141} \mid (Z) \Omega = -\frac{11}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{141} \\
 & (H) \beta \gamma \chi^4 - \frac{\alpha^3}{\beta} = \alpha \chi^4 \mid (\Theta) \chi^4 = \frac{\alpha^3}{\beta^2 \gamma - \alpha \beta} \mid (I) \chi = \frac{\alpha^2}{\sqrt[4]{\beta^2 \gamma - \alpha \beta}} \mid (K) \chi = \frac{+1 \cdot \alpha^2}{\sqrt[4]{\beta^2 \gamma - \alpha \beta}} \\
 & (\Lambda) \chi = \frac{-1 \cdot \alpha^2}{\sqrt[4]{\beta^2 \gamma - \alpha \beta}} \mid (M) \chi = \frac{\alpha^2 \sqrt{+1}}{\sqrt[4]{\beta^2 \gamma - \alpha \beta}} \mid (N) \chi = \frac{-\alpha^2 \sqrt{-1}}{\sqrt[4]{\beta^2 \gamma - \alpha \beta}} \\
 & (\Xi) \phi^4 + \alpha \phi^3 + \beta \phi^2 + \gamma \phi = \gamma^3 \mid (O) \phi = \chi - \frac{\alpha}{4} \\
 & (\Pi) \chi^4 - \frac{3\alpha^2 + \beta}{8} \cdot \chi^2 + \frac{1\alpha^3 - 1\alpha\beta}{8 \cdot 2} + \gamma \cdot \chi - \frac{3\alpha^4 + 1\beta\alpha^2 - 1\alpha\gamma}{4^4 \cdot 4^2 \cdot 4} = \gamma^3 \\
 & (P) \chi^4 - \frac{3\alpha^2 + \beta}{8} \cdot \chi^2 + \frac{1\alpha^3 - 1\alpha\beta}{8 \cdot 2} + \gamma \cdot \chi = \gamma^3 + \frac{3\alpha^4 - 1\beta\alpha^2 + 1\alpha\gamma}{4^4 \cdot 4^2 \cdot 4} \\
 & (\Sigma) -\frac{3\alpha^2 + \beta}{8} = \pm A \mid (T) \frac{1\alpha^3 - 1\alpha\beta}{8 \cdot 2} + \gamma = \pm B \mid (Y) \gamma^3 + \frac{3\alpha^4 - 1\beta\alpha^2 + 1\alpha\gamma}{4^4 \cdot 4^2 \cdot 4} = \mp P \\
 & (\Phi) \chi^4 \pm A \chi^2 \pm B \chi = \mp P \mid (X) \chi^4 \pm A \chi^2 \pm B \chi \pm P = 0 \mid (\Psi) \chi^2 + \chi \sqrt{\Omega + \gamma} = 0 \\
 & (\Omega) \chi^2 - \chi \sqrt{\Omega + \pi} = 0 \mid (A) \chi^4 + \gamma - \Omega + \pi \cdot \chi^2 + \pi - \gamma \cdot \chi \sqrt{\Omega + \pi \gamma} = 0 \\
 & (C) y - \Omega + \pi = \pm A \mid (D) \pi - \gamma \sqrt{\Omega} = \pm B \mid (E) \pi \gamma = \pm P \mid (F) y + \pi = \Omega \pm A \\
 & (G) \pi - \gamma = \pm B \mid (L) \pi = \frac{\Omega \pm A \pm B}{\sqrt{\Omega}} \mid (M) y = \frac{\Omega \pm A \mp B}{2 \sqrt{\Omega}} \\
 & (N) \pi \gamma = \frac{\Omega \pm A \pm B}{2 \sqrt{\Omega}} \mid (Q) \pm P = \frac{\Omega^3 \pm 2A\Omega^2 + A^2 \Omega - B^2}{4\Omega} \\
 & (R) \Omega^3 \pm 2A\Omega^2 + A^2 \mp P \cdot \Omega = B^2 \mid (S) \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2} \sqrt{-3} \mid -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3} \mid (V) \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2} \sqrt{+1} \mid -\sqrt{-1}
 \end{aligned}$$

$$(A) \overline{\chi^2 + \phi\chi + 1} \cdot \overline{\chi^2 + \kappa\chi + 1} = 0$$

$$(B) \begin{array}{c|c|c} \chi^4 + \kappa & \chi^3 + 1 & \chi^2 + \phi \\ + \phi & + \phi\kappa & + \kappa \end{array} \left| \begin{array}{c} \chi^2 + \phi \\ \chi + 1 \end{array} \right| \chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1$$

$$(\Gamma) \phi^2 - \phi + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \mid (\Delta) \phi = \frac{1 \pm 1}{2} \sqrt{5} \mid (E) \kappa = \frac{1 \pm 1}{2} \sqrt{5}$$

$$(Z) \chi^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \chi + 1 = 0 \mid (H) \chi^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \chi + 1 = 0$$

$$(\Theta) \chi = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{5} \pm \frac{1}{4} \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} \mid (I) \chi = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} \pm \frac{1}{4} \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}$$

$$(K) +1 \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} \right| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{5} - \frac{1}{4} \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} \mid$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}} \mid -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{5} - \frac{1}{4} \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}$$

$$(\Lambda) +1 \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} \right| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3} \mid (M) -1 \left| +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3} \right| +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3}$$

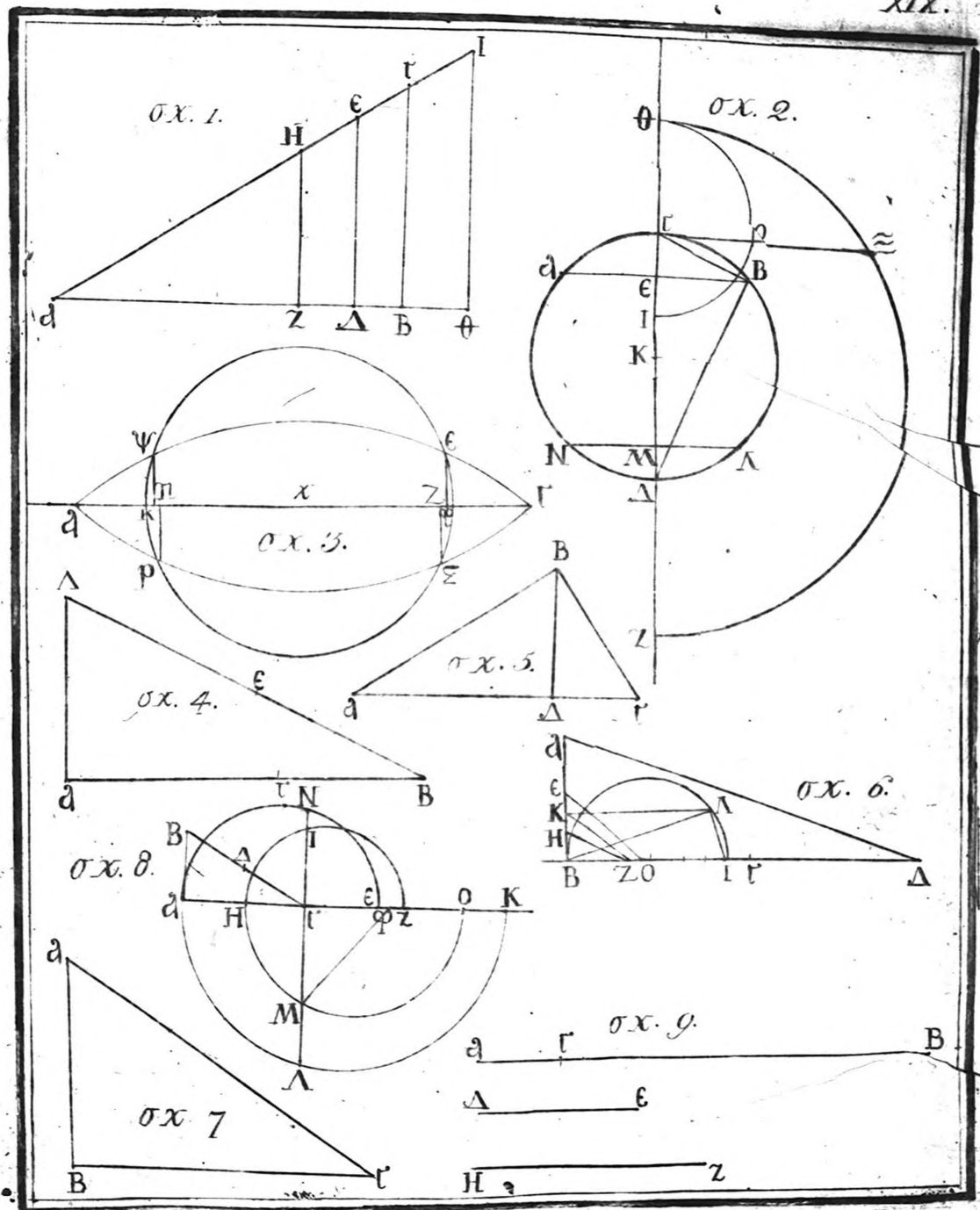
$$(N) \chi^2 + \phi\chi + 1 = 0 \mid (\Xi) \chi^4 + \alpha\chi^3 + \beta^2\chi^2 + \alpha\chi + 1 = 0$$

$$(O) \begin{array}{c|c|c|c|c} \chi^6 + \alpha & \chi^5 + \beta^2 & \chi^4 + \alpha & \chi^3 + 1 & \chi^2 + \phi \\ + \phi & + \alpha\phi & + \beta^2\phi & + \phi\alpha & + \alpha \end{array} \left| \begin{array}{c} \chi^2 + \phi \\ \chi + 1 \end{array} \right| \chi^2 + \phi \mid \chi + 1 = 0 \mid (\Pi) \alpha + \phi = 1$$

$$(P) \beta^2 + \alpha\phi + 1 = 1 \mid (\Sigma) 2\alpha + \beta^2\phi = 1 \mid (T) \alpha = 1 - \phi \mid (Y) \beta^2 = -\alpha\phi$$

$$(\Phi) 2 - 2\phi - \alpha\phi^2 = 1 \mid (X) -\phi - \phi^2 + \phi^3 + 1 = 0 \mid (\Psi) \phi^3 - \phi^2 - 2\phi = -1 \mid (\Omega) \chi^2 + \phi\chi + 1 = 0$$

$$(A) \chi^{\nu-3} + \alpha\chi^{\nu-4} + \beta^2\chi^{\nu-5} + \alpha\chi^{\nu-6} + 1 \mid (C) \chi^{\nu-2} + \alpha\chi^{\nu-3} + \gamma\chi^{\nu-4} + \alpha\chi^{\nu-5} + 1$$



$$(A) \chi^2 = \frac{\chi^4}{4\alpha^2} + \beta^2 \mid (B) \chi^4 - 4\alpha^2 \chi^2 = -4\alpha^2 \beta^2$$

$$(\Gamma) \chi^4 - 4\alpha^2 \chi^2 + 4\alpha^4 = 4\alpha^4 - 4\alpha^2 \beta^2 \mid (\Delta) \chi^2 = 2\alpha^2 \pm 2\alpha \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$(E) \chi = \sqrt{\alpha \cdot 2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \mid (Z) \chi = \sqrt{\alpha \cdot 2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

$$(\mathcal{H}) \chi = \sqrt{\alpha \cdot 2\alpha - 2\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2}} \mid (\Theta) \chi : y :: y : \Omega \mid (I) y^2 = \chi \Omega$$

$$(K) \chi + y + \Omega = 21 \mid (\Lambda) \chi^2 + y^2 + \Omega^2 = 189$$

$$(M) \chi^2 + y^2 + \Omega^2 + 2y\chi + 2y\Omega + 2\chi\Omega = 441$$

$$(N) \chi^2 + y^2 + \Omega^2 + 2y \cdot \overline{\chi + \Omega} + 2\chi\Omega = 441 \mid (\Xi) \chi + \Omega = 21 - y$$

$$(O) 2\chi\Omega = 2y^2 \mid (\Pi) 189 + 2y \cdot \overline{21 - y} + 2y^2 = 441$$

$$(P) 42y - 2y^2 + 2y^2 = 252 \mid (\Sigma) y = \frac{252}{42} = 6 \mid (T) \chi\Omega = 36$$

$$(\Upsilon) \Omega = \frac{36}{\chi} \mid (\Phi) \chi + 6 + \frac{36}{\chi} = 21 \mid (X) \chi^2 - 15\chi = -36$$

$$(\Psi) \chi^2 - 15\chi + \frac{225}{4} = \frac{225}{4} - 36 = \frac{81}{4}$$

$$(\Omega) \chi = \frac{15}{2} + \frac{9}{2} = \frac{24}{2} = 12 \mid (A) 12 + 6 + \Omega = 21 \mid (C) \Omega = 3$$

$$(A) x + y + \Omega = 30 \mid (B) 2x + y + \frac{1}{2} \Omega = 30 \mid (\Gamma) x = 30 - y - \Omega$$

$$(\Delta) x = \frac{60 - 2y + \Omega}{4} \mid (E) 30 - y - \Omega = \frac{60 - 2y - \Omega}{4} \mid (Z) y = \frac{60 - 3\Omega}{2}$$

$$(H) y = \frac{60 - 6}{2} = \frac{54}{2} = 27 \mid (\Theta) x + 27 + 2 = 30 \mid x = 1 \mid (I) y = \frac{60 - 12}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$(K) x + 24 + 4 = 30 \mid x = 2 \mid (\Lambda) y = \frac{60 - 18}{2} = \frac{42}{2} = 21 \mid (M) x + 21 + 6 = 30 \mid x = 3$$

$$(N) \alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha + 4\beta, \alpha + 5\beta \dots \alpha + \nu - 1 \cdot \beta$$

$$(\Xi) E = \alpha + \nu - 1 \cdot \beta \mid (O) K = \alpha + \frac{\nu}{2} \mid (\Pi) K = \alpha + \alpha + \nu\beta - \beta \mid \frac{\nu}{2} = \frac{2\alpha\nu + \nu^2\beta - \nu\beta}{2}$$

$$(P) 1, 1 + 2, 1 + 4, 1 + 6, 1 + 8, 1 + 10, \dots 1 + \nu - 1 \cdot 2$$

$$(\Sigma) E = 1 + 6 - 1 \cdot 2 = 11 \mid (T) K = \frac{2 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 2 - 6 \cdot 2}{2} = 36$$

$$(\Upsilon) 0 + 1 + 1 + 1 + 1, \kappa\tau = K\nu^0 \mid (\Phi) 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \kappa\tau = K\nu + 1^0$$

$$\text{II } 0 + 1 + 2 + 3 + 4, \kappa\tau = K\nu^1 \mid \text{II. } 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \kappa\tau = K\nu + 1^1$$

$$\text{III } 0 + 1 + 4 + 9 + 16, \kappa\tau = K\nu^2 \mid \text{III. } 1 + 4 + 9 + 16 + 25, \kappa\tau = K\nu + 1^2$$

$$\text{IV. } 0 + 1 + 8 + 27 + 64, \kappa\tau = K\nu^3 \mid \text{IV. } 1 + 8 + 27 + 64 + 125, \kappa\tau = K\nu + 1^3$$

$$(X) K\nu + 1^0 - K\nu^0 = \nu + 1^0 = 1 \mid (\Psi) K\nu + 1^1 - K\nu^1 = \nu + 1 \mid (\Omega) K\nu + 1^2 - K\nu^2 = \nu + 1$$

$$(A) K\nu + 1^3 - K\nu^3 = \nu + 1^3 \mid (C) \nu + 1^2 = \nu^2 + 2\nu + 1 \mid (D) K\nu + 1^2 = K\nu^2 + 2K\nu + 1$$

$$(E) K\nu + 1^2 - K\nu^2 - \nu - 1 = 2K\nu \mid (F) \nu + 1^2 - \nu - 1 = K\nu \mid (G) \nu^2 + 2\nu + 1 - \nu - 1 = 2K\nu$$

$$(L) K\nu = \frac{\nu^2 + \nu}{2} = \frac{\nu}{2} \cdot \nu + 1 \mid (M) \nu + 1^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1 \mid (N) K\nu + 1^3 = K\nu^3 + 3K\nu^2 + 3K\nu + 1$$

$$(Q) K\nu + 1^3 - K\nu^3 - 3K\nu - \nu - 1 = 3K\nu^2 \mid (R) \nu + 1^3 - 3\nu^2 - 3\nu - 1 = 3K\nu^2$$

$$(S) K\nu^2 = \nu \cdot \frac{2\nu^2 + 3\nu + 1}{2 \cdot 3} \mid (N) K\nu = \frac{4}{2} \cdot \frac{4 + 1}{2} = 10 \mid (W) K\nu^2 = 4 \cdot \frac{2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 1}{2 \cdot 3} = 30$$

$$(A) \alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha + 4\beta, \dots, \alpha + \nu - 1. \beta = K\nu. \frac{2\alpha + \nu\beta - \beta}{1, 2}$$

$$(B) \alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 3\beta, 4\alpha + 6\beta, 5\alpha + 10\beta, \dots, \nu. \frac{2\alpha + \nu\beta - \beta}{1, 2} = K\nu. \frac{3\alpha\nu + 3\alpha - \beta + \beta\nu^2}{1, 2, 3}$$

$$(C) \frac{2\alpha - \beta}{2}, K\nu + \frac{\beta}{2}, K\nu^2$$

$$(Γ) \alpha, 3\alpha + \beta, 6\alpha + 4\beta, 10\alpha + 10\beta, 15\alpha + 20\beta, \dots, \nu. \frac{3\alpha\nu + 3\alpha - \beta + \beta\nu^2}{1, 2, 3}$$

$$(Δ) 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1 + \nu - 1. 1 = K\nu = \nu + 1. \nu$$

$$(E) 1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{\nu + 1. \nu}{2} = \nu + 2. \frac{\nu + 1. \nu}{2}$$

$$(Z) 1, 4, 10, 20, 35, \dots, \frac{\nu + 2. \nu + 1. \nu}{1, 2, 3} = \nu + 3. \frac{\nu + 2. \nu + 1. \nu}{1, 2, 3}$$

$$(H) 1, 5, 15, 35, 70, \dots, \frac{\nu + 3. \nu + 2. \nu + 1. \nu}{1, 2, 3, 4} = \nu + 4. \frac{\nu + 3. \nu + 2. \nu + 1. \nu}{1, 2, 3, 4}$$

$$(Θ) 1, 3, 5, 7, 9, \dots, \kappa\tau \mid (I) 1, 4, 9, 16, 25, \kappa\tau \mid (K) 1, 15, 14, 30, 55, \kappa\tau$$

$$(Λ) \alpha, \beta, \dots, \alpha\beta$$

$$(M) \alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma$$

$$(N) \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta$$

$$(Ξ) \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \alpha\epsilon, \beta\gamma, \beta\delta, \beta\epsilon, \gamma\delta, \gamma\epsilon, \delta\epsilon$$

$$(O) \nu, \dots, \nu. \frac{\nu - 1}{1, 2}$$

$$(Π) \alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha\beta\gamma$$

$$(P) \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \alpha\gamma\delta, \beta\gamma\delta$$

$$(Σ) \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots, \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \alpha\beta\epsilon, \alpha\gamma\delta, \alpha\gamma\epsilon, \alpha\delta\epsilon, \beta\gamma\delta, \beta\gamma\epsilon, \beta\delta\epsilon, \gamma\delta\epsilon$$

$$(T) \nu, \dots, \nu. \frac{\nu - 1}{1, 2, 3}$$

$$(A) \alpha, \mu\alpha, \mu^2\alpha, \mu^3\alpha, \mu^4\alpha, \mu^5\alpha \dots \mu^{v-1}\alpha = K \frac{\mu^v\alpha - \alpha}{\mu-1} \quad (B)_E = \mu^{v-1}\alpha$$

$$(\Gamma) \frac{\mu\alpha - \alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^2\alpha - \alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^3\alpha - \alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^4\alpha - \alpha}{\mu-1} \dots \frac{\mu^v\alpha - \alpha}{\mu-1} = K \frac{\mu^{v+2}\alpha - \mu\alpha - v\alpha}{\mu-1^2} \frac{1}{\mu-1}$$

$$(\Delta) \frac{\mu\alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^2\alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^3\alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^4\alpha}{\mu-1} \dots \frac{\mu^v\alpha}{\mu-1} = K \frac{\mu^{v+1}\alpha - \mu\alpha}{\mu-1^2}$$

$$(E) \frac{\alpha}{\mu-1}, \frac{\alpha}{\mu-1}, \frac{\alpha}{\mu-1}, \frac{\alpha}{\mu-1}, \dots \frac{\alpha}{\mu-1} = K \frac{v\alpha}{\mu-1^3}$$

$$(Z) \frac{\mu^2\alpha - \mu\alpha - \alpha}{\mu-1^2}, \frac{\mu^3\alpha - \mu\alpha - 2\alpha}{\mu-1}, \frac{\mu^4\alpha - \mu\alpha - 3\alpha}{\mu-1^2}, \dots \frac{\mu^{v+1}\alpha - \mu\alpha - v\alpha}{\mu-1^2} \frac{1}{\mu-1}$$

$$(H) \frac{\mu^2\alpha}{\mu-1^2}, \frac{\mu^3\alpha}{\mu-1^2}, \frac{\mu^4\alpha}{\mu-1^2} \dots \frac{\mu^{v+1}\alpha}{\mu-1^2} = K \frac{\mu^{v+2}\alpha - \mu^2\alpha}{\mu-1^3}$$

$$(\Theta) \frac{\mu\alpha}{\mu-1^2}, \frac{\mu^2\alpha}{\mu-1^2}, \frac{\mu^3\alpha}{\mu-1^2}, \dots \frac{\mu^v\alpha}{\mu-1^2} = K \frac{v\mu\alpha}{\mu-1^2}$$

$$(I) \frac{\alpha}{\mu-1}, \frac{2\alpha}{\mu-1}, \frac{3\alpha}{\mu-1} \dots \frac{v\alpha}{\mu-1} = K \frac{v+1}{2} \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{\alpha}{\mu-1}$$

$$(K) \frac{\mu^{v+2}\alpha - \mu^2\alpha - v\mu\alpha - v}{\mu-1^3} \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\alpha}{\mu-1}$$

$$(\Pi) 1, 2, 4, 8, 16, 32 \dots 64 = K 127$$

$$(P) 1, 3, 7, 15 \dots 31 = K 57$$

$$(\Sigma) 1, 4, 11, \dots 26 = K 42.$$

$$(\Lambda) K = \frac{\mu^v - \alpha}{\mu-1}$$

$$(M) K = \frac{\mu^v\alpha - \alpha}{\mu-1}$$

$$(N) K = \frac{\mu^{v+2}\alpha - \mu^2\alpha}{\mu-1^3}$$

$$(\Xi) K = \frac{v\mu\alpha}{\mu-1^2}$$

$$(O) K = \frac{v+1}{2} \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{\alpha}{\mu-1}$$

$$(A) \chi^2 = \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 - 2AB.B\Gamma \mid (E) \beta^2 = \frac{1}{2}AB.B\Gamma \mid (\Gamma) 4\beta^2 = 2AB.B\Gamma$$

$$(\Delta) \chi^2 = \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 - 4\beta^2 \mid (E) 2\alpha\chi = \alpha^2 - 4\beta^2 \mid (Z) \chi = \frac{1}{2}\alpha - \frac{2\beta^2}{\alpha}$$

$$(H) \beta^2 = \frac{1}{2}\chi y \mid (\Theta) y = \frac{2\beta^2}{\chi} \mid (I) \frac{y^4}{\chi^2} = y^2 + \chi^2 \mid (K) y^4 = y^2\chi^2 + \chi^4 \mid (\Lambda) y\chi = 2\alpha^2$$

$$(M) y^2\chi^2 = 4\alpha^4 \mid (N) \chi^4 = \frac{16\alpha^8}{y^4} \mid (\Xi) y^4 = 4\alpha^4 + \frac{16\alpha^8}{y^4} \mid (O) y^8 - 4\alpha^4 y^4 = 16\alpha^8$$

$$(\Pi) y^8 - 4\alpha^4 y^4 + 4\alpha^8 = 4\alpha^8 + 16\alpha^8 \mid (P) y^4 - 2\alpha^4 = 2\alpha^4 \sqrt{5} \mid (\Sigma) y^4 = 2\alpha^4 + 2\alpha^4 \sqrt{5}$$

$$(T) y = \alpha \sqrt{2 + 2\sqrt{5}} \mid (\Upsilon) 2\alpha^4 + 2\alpha^4 \sqrt{5} = 4\alpha^4 + \chi^4 \mid (\Phi) \chi^4 = 2\alpha^4 \sqrt{5} - 2\alpha^4$$

$$(X) \chi = \alpha \sqrt{2\sqrt{5} - 2} \mid (\Psi) \alpha\chi - \chi^2 = \beta\gamma \mid (\Omega) \chi^2 - \alpha\chi = -\beta\gamma$$

$$(\alpha) \chi^2 - \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\gamma \mid (\beta) \chi - \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\gamma} \mid (\gamma) \chi = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\gamma}$$

$$(\delta) \gamma\chi + \chi^2 = \alpha\beta \mid (\epsilon) \chi^2 + \gamma\chi + \frac{\gamma^2}{4} = \frac{\gamma^2}{4} + \alpha\beta \mid (\zeta) \chi + \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\beta} \mid (\eta) \chi = \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma$$

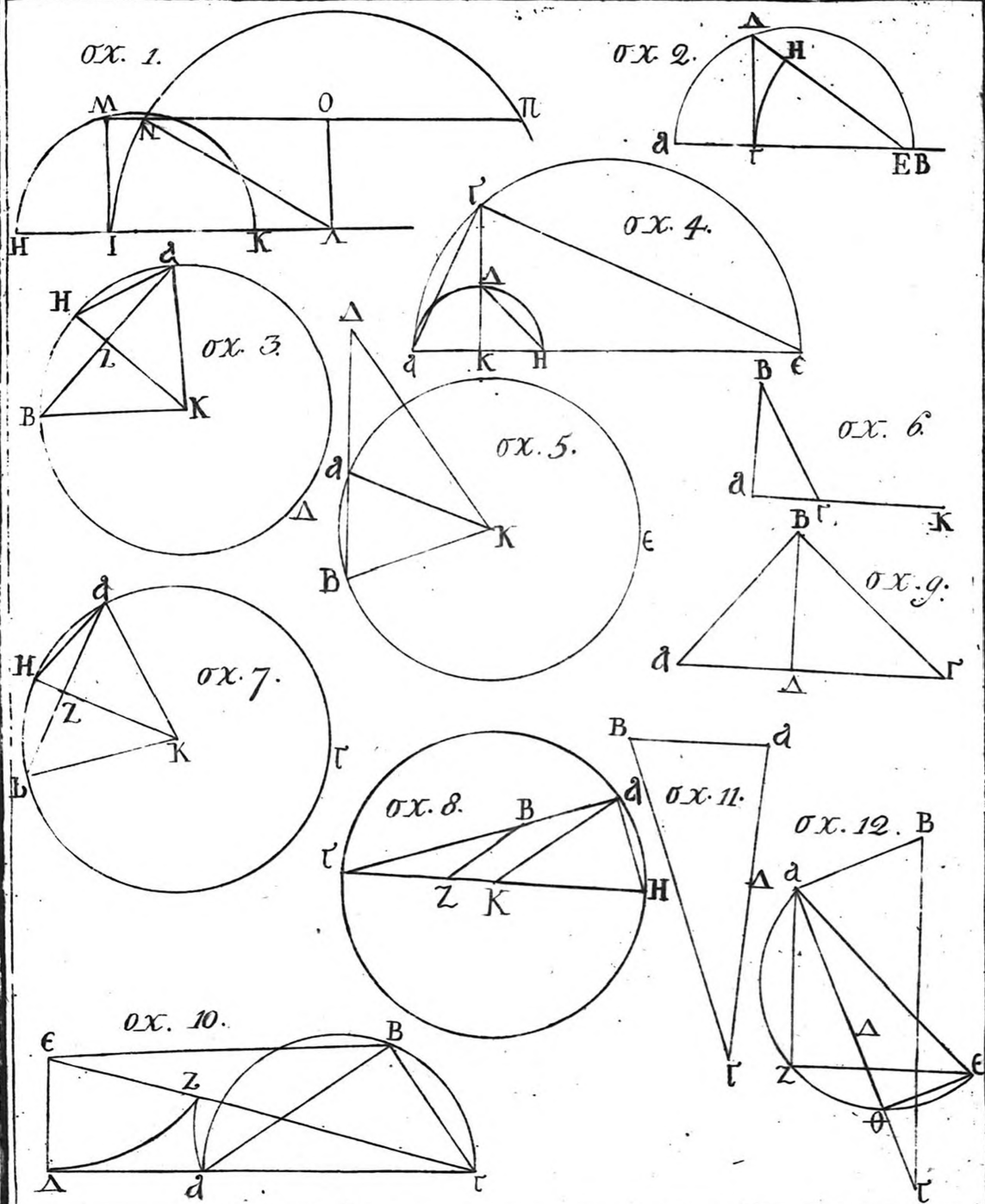
$$(\theta) \beta^2 = \frac{1}{2}y^2 + y^2 - \sqrt{2y^4} + \frac{1}{2}y^2 \mid (\iota) \beta^2 = 2y^2 - \sqrt{2y^4} \mid (\kappa) \sqrt{2y^4} = 2y^2 - \beta^2$$

$$(\lambda) 2y^4 = 4y^4 - 4\beta^2 y^2 + \beta^4 \mid (\mu) y^4 - 2\beta^2 y^2 = -\frac{1}{2}\beta^4 \mid (\nu) y^4 - 2\beta^2 y^2 + \beta^4 = \frac{1}{2}\beta^4$$

$$(\xi) y^2 - \beta^2 = \beta \sqrt{\frac{1}{2}\beta^2} \mid (\omicron) y^2 = \beta^2 + \beta \sqrt{\frac{1}{2}\beta^2} \mid (\pi) y = \sqrt{\beta^2 + \beta \sqrt{\frac{1}{2}\beta^2}}$$

$$(\rho) \chi^2 = \alpha^2 + \alpha\chi \mid (\sigma) \chi^2 - \alpha\chi = \alpha^2 \mid (\tau) \chi^2 - \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

$$(\upsilon) \chi - \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2} \mid (\phi) \chi = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{5}{4}\alpha^2}$$



$$(A) \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2} + \alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2 + \frac{1}{4}\chi^2 \mid (B) \beta^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2}$$

$$(\Gamma) 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{4}\chi^2} = 2\alpha^2 - \beta^2 \mid (\Delta) 4\alpha^4 - \alpha^2\chi^2 = 4\alpha^4 - 4\alpha^2\beta^2 + \beta^4$$

$$(E) -\alpha^2\chi^2 = -4\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \mid (Z) \chi^2 = \frac{4\alpha^2\beta^2 - \beta^4}{\alpha^2} \mid (H) \chi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}$$

$$(\Theta) \chi^2 = \frac{y^2 + 2\alpha y + \alpha^2 + y^2 - 2\alpha y + \alpha^2}{4} \mid (I) \frac{\alpha^2 - y^2}{4} = \beta\chi \mid (K) \chi^2 = \frac{y^2 + \alpha^2}{2}$$

$$(\Lambda) 2\chi^2 - \alpha^2 = y^2 \mid (M) y^2 = \alpha^2 - 4\beta\chi \mid (N) 2\chi^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - 4\beta\chi \mid (\Xi) \chi^2 + 2\beta\chi = \alpha^2$$

$$(O) \chi^2 + 2\beta\chi + \beta^2 = \beta^2 + \alpha^2 \mid (\Pi) \chi + \beta = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \mid (P) \chi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta$$

$$(\Sigma) y^2 = \chi^2 + \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 + \chi^2 - \alpha\chi + \frac{1}{4}\alpha^2 \mid (T) y^2 = 2\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \mid (\Upsilon) 2\chi^2 = y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$(\Phi) \chi^2 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}\alpha^2 \mid (X) \chi = \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}\alpha^2} \mid (\Psi) y^2 + \alpha y = \beta^2 \mid (\Omega) y^2 + \alpha y + \frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2$$

$$(a) y + \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2} \mid (\beta) y = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2} - \frac{1}{2}\alpha \mid (\gamma) \alpha^2 y^2 - y^4 = \beta^2 y^2$$

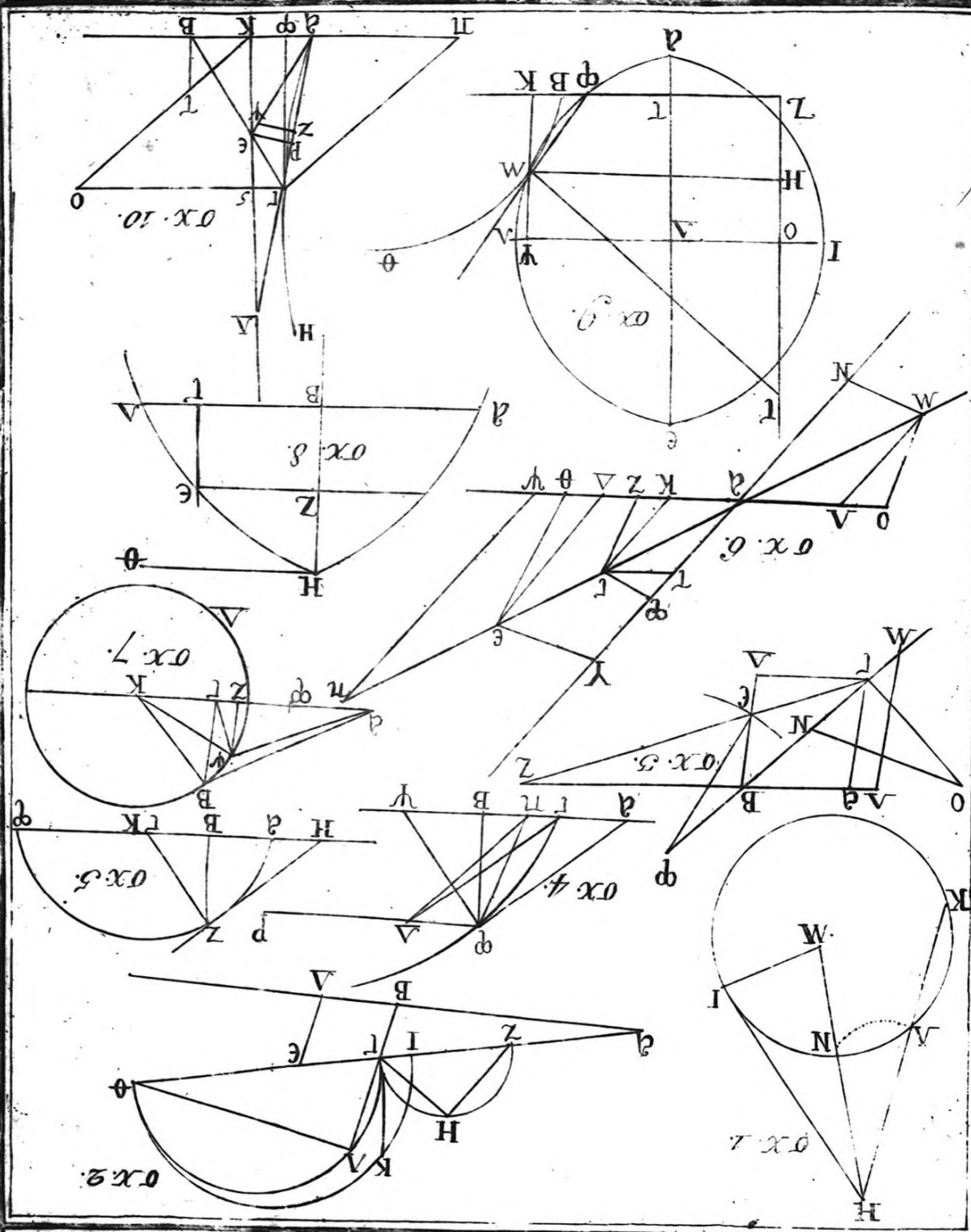
$$(d) y^4 - \alpha^2 y^2 = -\beta^2 y^2 \mid (\epsilon) y^4 - \alpha^2 y^2 + \frac{1}{4}\alpha^4 = \frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2 y^2 \mid (\zeta) y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2 y^2}$$

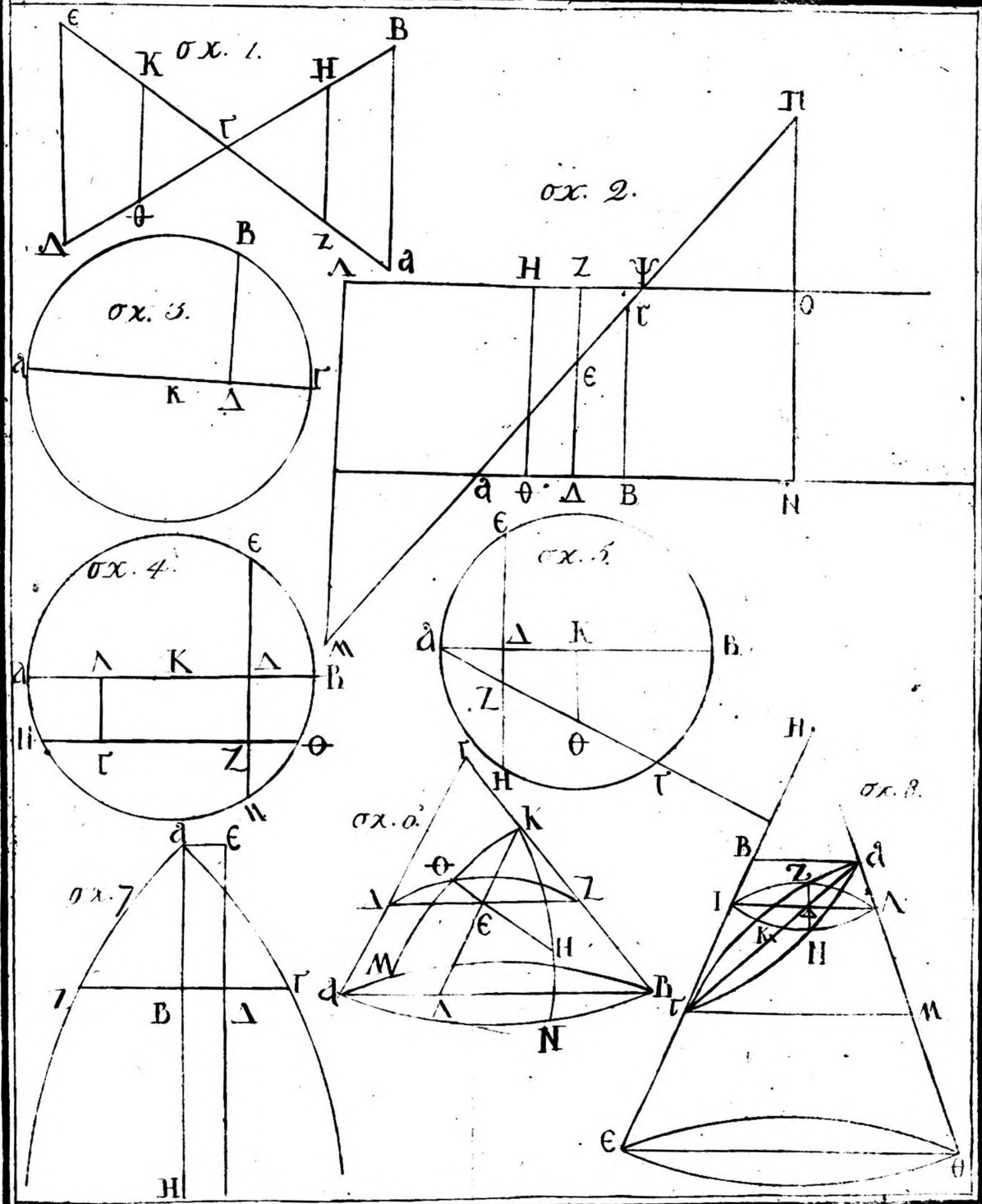
$$(\eta) y^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2 y^2} \mid (\theta) y = \sqrt{\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 - \beta^2 y^2}} \mid (i) y^2 - \gamma y = \frac{\alpha^2 \beta^2}{y^2}$$

$$(\kappa) y^2 - \gamma y + \frac{1}{4}\gamma^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{y^2} \mid (\lambda) y - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\beta^2} \mid (\mu) y = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 + \alpha\beta^2}$$

$$(v) \alpha y = \beta\chi \mid (\xi) -\alpha y = -\beta\chi \mid (o) \gamma^2 - \alpha y = \beta\chi + \beta\mu$$

$$(\pi) \alpha \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha} - y = \beta \cdot \chi + \mu \mid (\rho) \alpha z = \beta\Omega \mid (\sigma) 2\alpha\chi - \chi^2 = y^2 \mid (\tau) \alpha^2 - z^2 = y^2$$





$$(I) 2\alpha\chi - \chi^2 = y^2 - 2\gamma y \mid (K) 2\alpha\chi - \chi^2 + \gamma = y^2 - 2\gamma y + \gamma^2$$

$$(\Lambda) 2\alpha\chi - \chi^2 + \gamma^2 = z^2 \mid (M) \gamma^2 - z^2 = \chi^2 - 2\alpha\chi \mid (N) \alpha^2 + \gamma^2 - z^2 = \chi^2 - 2\alpha\chi + \alpha^2$$

$$(\Xi) v^2 - z^2 = \Omega^2 \mid (O) 2\alpha\chi - \chi^2 - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} = y^2 + \frac{2\beta\chi y}{\alpha}$$

$$(\Pi) 2\alpha\chi - \chi^2 - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} = y^2 + \frac{2\beta\chi y}{\alpha} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} \mid (P) z^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$$

$$(\Sigma) \frac{\alpha\beta\chi}{\gamma} = y^2 \mid (T) 2\alpha\chi - \frac{2\beta}{\gamma}\chi = y^2 + 2\beta y + \beta^2 \mid (Υ) 2v\chi = z^2$$

$$(\Phi) \frac{2\alpha\beta\gamma\chi - \beta\gamma\chi^2}{4\alpha^2} = y^2 \mid (X) 2\alpha\chi - \chi^2 = \frac{4\alpha^2 y^2}{\beta\gamma} \mid (\Psi) 2\alpha\chi - \chi^2 = \frac{\alpha^2 y^2}{v^2}$$

$$(\Omega) y^2 = \frac{\beta\gamma}{4\alpha^2} \cdot \overline{\alpha^2 - z^2} \mid (\Lambda) \frac{\alpha^2 y^2}{v^2} = \alpha^2 - z^2 \mid (C) 2\alpha^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2 y^2}{v^2}$$

$$(D) \frac{\alpha^2 y^2}{v^2} = \alpha^2 - \alpha^2 \mid (E) 2\alpha\chi - \chi^2 = \frac{\beta^2 y^2}{v^2} \mid (F) \frac{\beta^2 y^2}{v^2} = \alpha^2 - z^2$$

$$(G) 2\alpha^2 - \alpha^2 = \frac{\beta^2 y^2}{v^2} \mid (L) \frac{\beta^2 y^2}{v^2} = \alpha^2 \mid (M) y^2 + 2\gamma y + \gamma^2 = \frac{2\alpha\beta\chi - \beta\chi^2}{v}$$

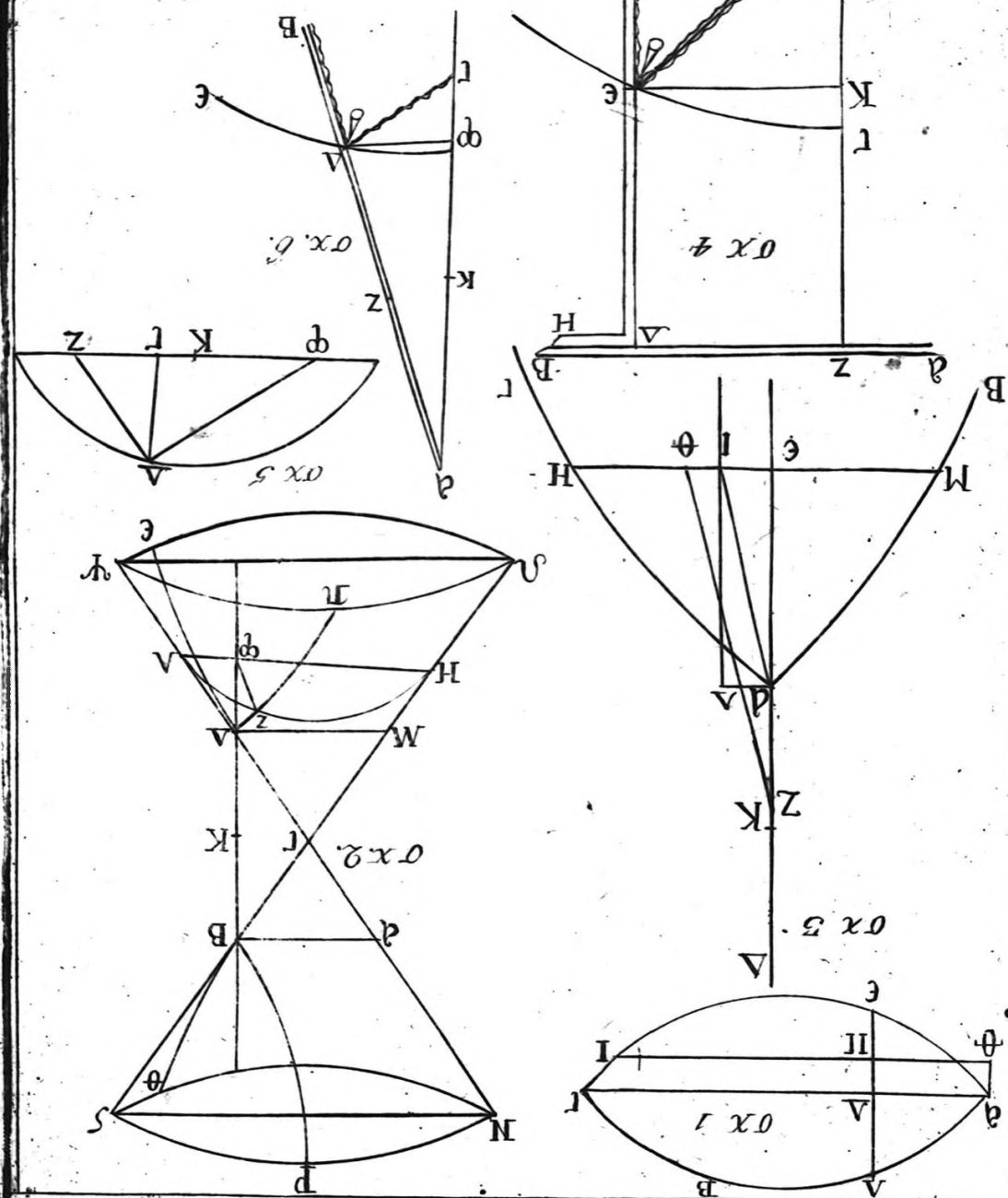
$$(N) \frac{vz^2}{\beta} = 2\alpha\chi - \chi^2 \mid (Q) \frac{\beta\gamma}{4\alpha^2} \cdot 2\alpha\chi + \chi^2 = y^2 \mid (S) \frac{\alpha^2 y^2}{v^2} = 2\alpha\chi + \chi^2$$

$$(V) \frac{\alpha^2 y^2}{v^2} = z^2 - \alpha^2 \mid (\alpha) \frac{\beta^2 y^2}{v^2} = 2\alpha\chi + \chi^2 \mid (\beta) \frac{\beta^2 y^2}{v^2} = z^2 - \alpha^2$$

$$(\gamma) \frac{\alpha^2 y^2}{v^2} = \chi^2 + \frac{2\alpha\chi y}{\beta} + \frac{\alpha^2 y^2}{\beta^2} + \gamma^2 \mid (\delta) \frac{\alpha^2 y^2 - \gamma^2}{v^2} = z^2 \mid (\epsilon) \frac{v^2 z^2}{\alpha^2} = y^2 - \frac{v^2 \gamma^2}{\alpha^2}$$

$$(\zeta) \frac{\alpha^2 y^2}{\beta^2} = 2\alpha\chi + \chi^2 \mid (\eta) \frac{4\beta^2 \Pi z}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \overline{\alpha + \chi^2 - y^2}$$

$$(\theta) \frac{4\beta^2 \Pi z}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 + 2\alpha\beta^2 \chi + \beta^2 \chi^2 - 2\alpha\beta^2 \chi - \beta^2 \chi^2}{\alpha^2} \mid (\iota) \Pi z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$$



$$(A) \alpha^2 + 2\alpha\chi + \chi^2 = \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2 + y^2 \mid (B) 4\alpha\chi = y^2$$

$$(\Gamma) \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} \cdot \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} = 2\alpha \mid (\Delta) \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$$

$$(E) \beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} + \beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$$

$$(Z) \alpha\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} = \alpha^2 - \beta\chi \mid (H) \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta\chi + \alpha^2\chi^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta\chi + \beta^2\chi^2$$

$$(\Theta) \alpha^2y^2 = \alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\chi^2 + \beta^2\chi^2 \mid (I) \alpha^2y^2 = \alpha^2 - \chi^2, \alpha^2 - \beta^2 \mid (K) \alpha^2y^2 = \alpha^2 - \chi^2$$

$$(\Lambda) \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} - \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} = 2\alpha \mid (M) \sqrt{\beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} = 2\alpha + \sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2}$$

$$(N) \beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} + \beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$$

$$(\Xi) \beta\chi - \alpha^2 = \alpha\sqrt{\beta^2 - 2\beta\chi + \chi^2 + y^2} \mid (O) \beta^2\chi^2 - 2\beta\alpha^2\chi + \alpha^4 = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta\chi + \alpha^2\chi^2 + \alpha^2y^2$$

$$(II) \alpha^2y^2 = \beta^2\chi^2 - \alpha^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2 + \alpha^4 \mid (P) \alpha^2y^2 = \chi^2 - \alpha^2, \beta^2 - \alpha^2 \mid (\Sigma) \alpha^2y^2 = \chi^2 - \alpha^2$$

$$(T) y^2 = 2\alpha\chi - \chi^2 \mid (Y) y^2 + 2y\delta y + \delta y^2 = 2\alpha\chi + 2\alpha\delta\chi - \chi^2 - 2\chi\delta\chi - \delta\chi^2$$

$$(\Phi) y\delta y = \alpha - \chi, \delta\chi \mid (X) \delta\chi = \frac{y\delta y}{\alpha - \chi} \mid (\Psi) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{y}{\alpha - \chi}, \frac{y\delta y}{\alpha - \chi} = y^2$$

$$(\Omega) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi} \mid (A) 2\alpha\chi = y^2 \mid (C) 2\alpha\chi + 2\alpha\delta\chi = y^2 + 2y\delta y + \delta y^2$$

$$(D) \frac{\delta\chi}{\delta y} = \frac{y}{\alpha} \mid (e) y \cdot \frac{\delta\chi}{\delta y} = y \cdot \frac{y}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha} \mid (f) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{2\alpha\chi}{\alpha} = 2\chi$$

$$(G) \frac{\alpha^2y^2}{\beta^2} = 2\alpha\chi - \chi^2 \mid (L) \frac{\alpha^2y^2}{\beta^2} + \frac{2\alpha^2y\delta y}{\beta^2} + \frac{\alpha^2\delta y^2}{\beta^2} = 2\alpha\chi + 2\alpha\delta\chi - \chi^2 - 2\chi\delta\chi - \delta\chi^2$$

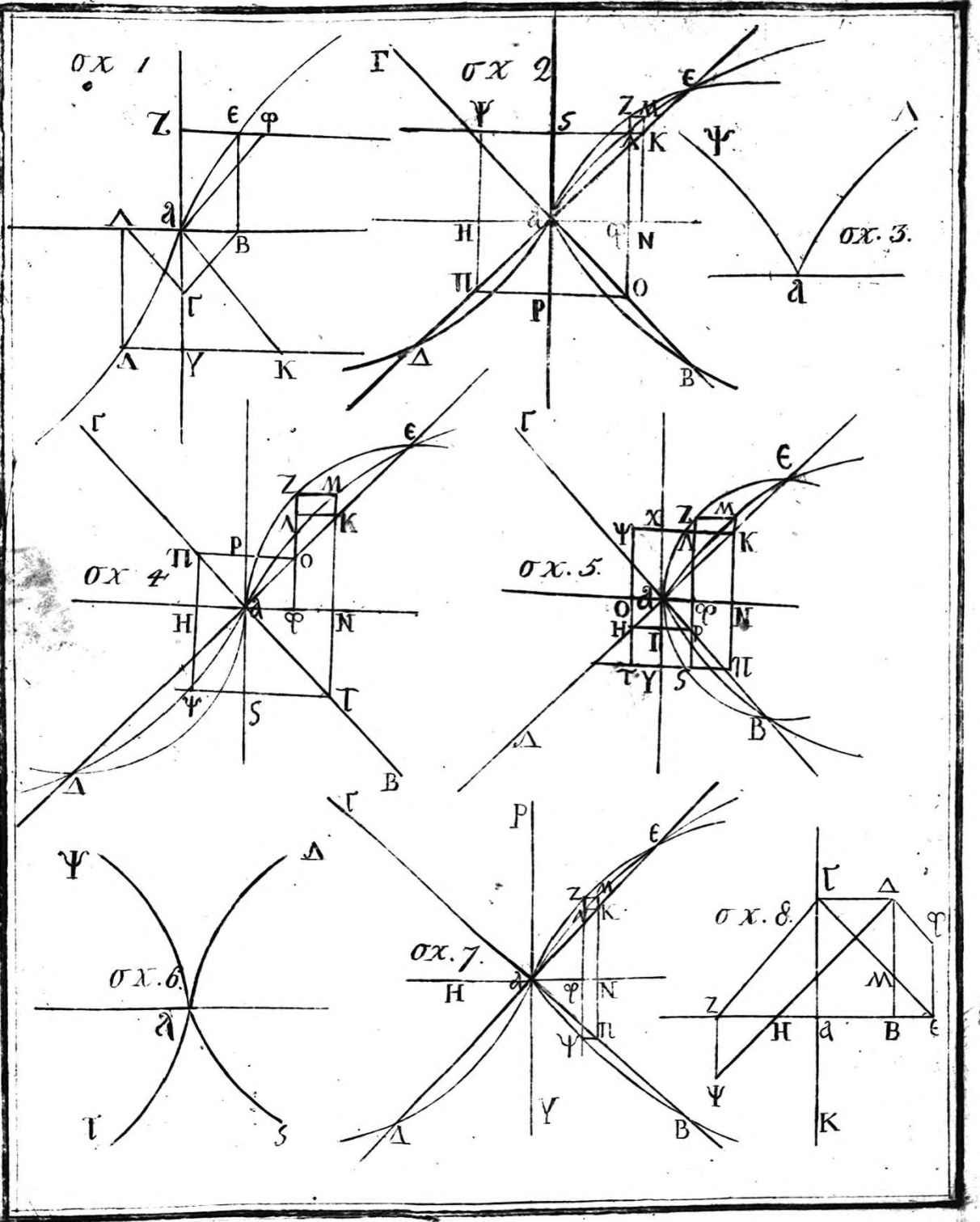
$$(M) \frac{\alpha^2}{\beta^2} y\delta y = \alpha - \chi, \delta\chi \mid (N) \delta\chi = \frac{\alpha^2y}{\beta^2 \cdot \alpha - \chi} \mid (Q) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{\alpha^2y^2}{\beta^2 \cdot \alpha - \chi} \mid (R) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{2\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - \chi}$$

y²

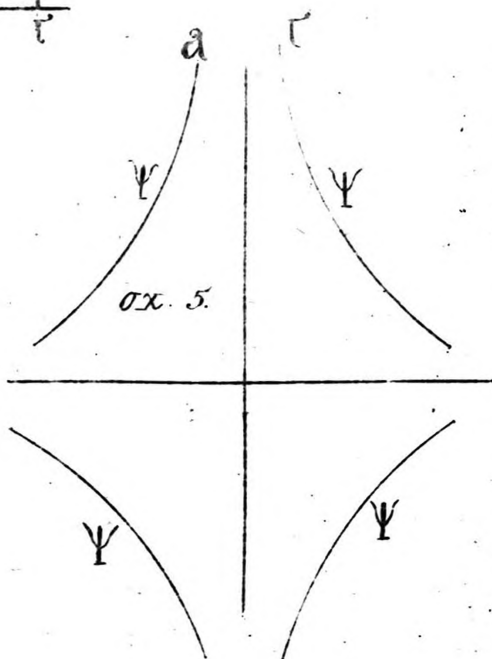
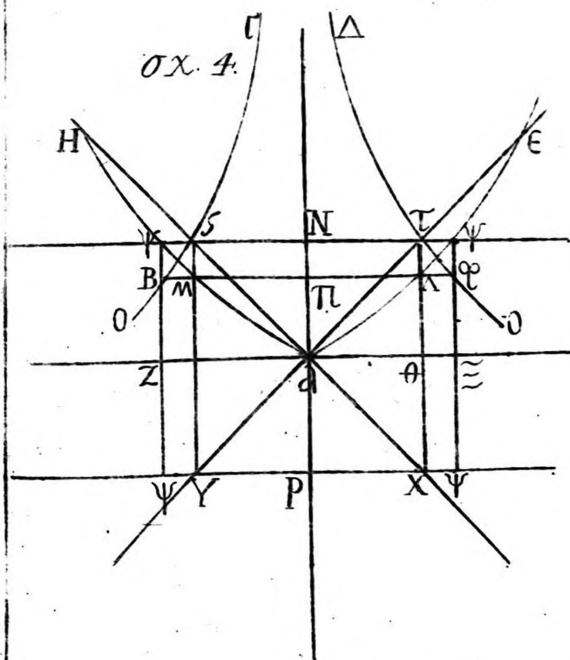
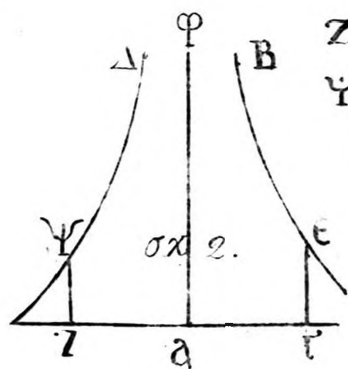
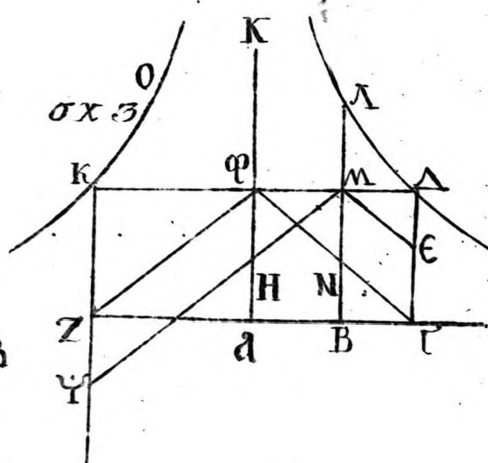
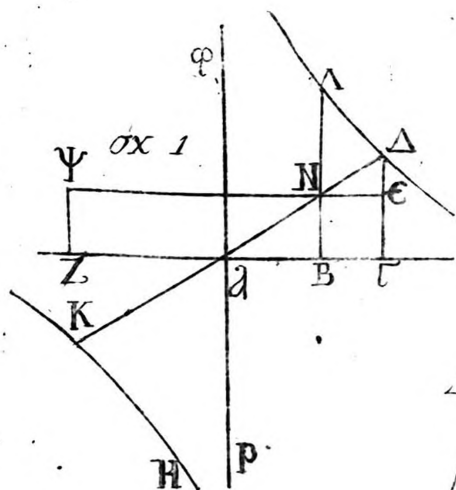
2

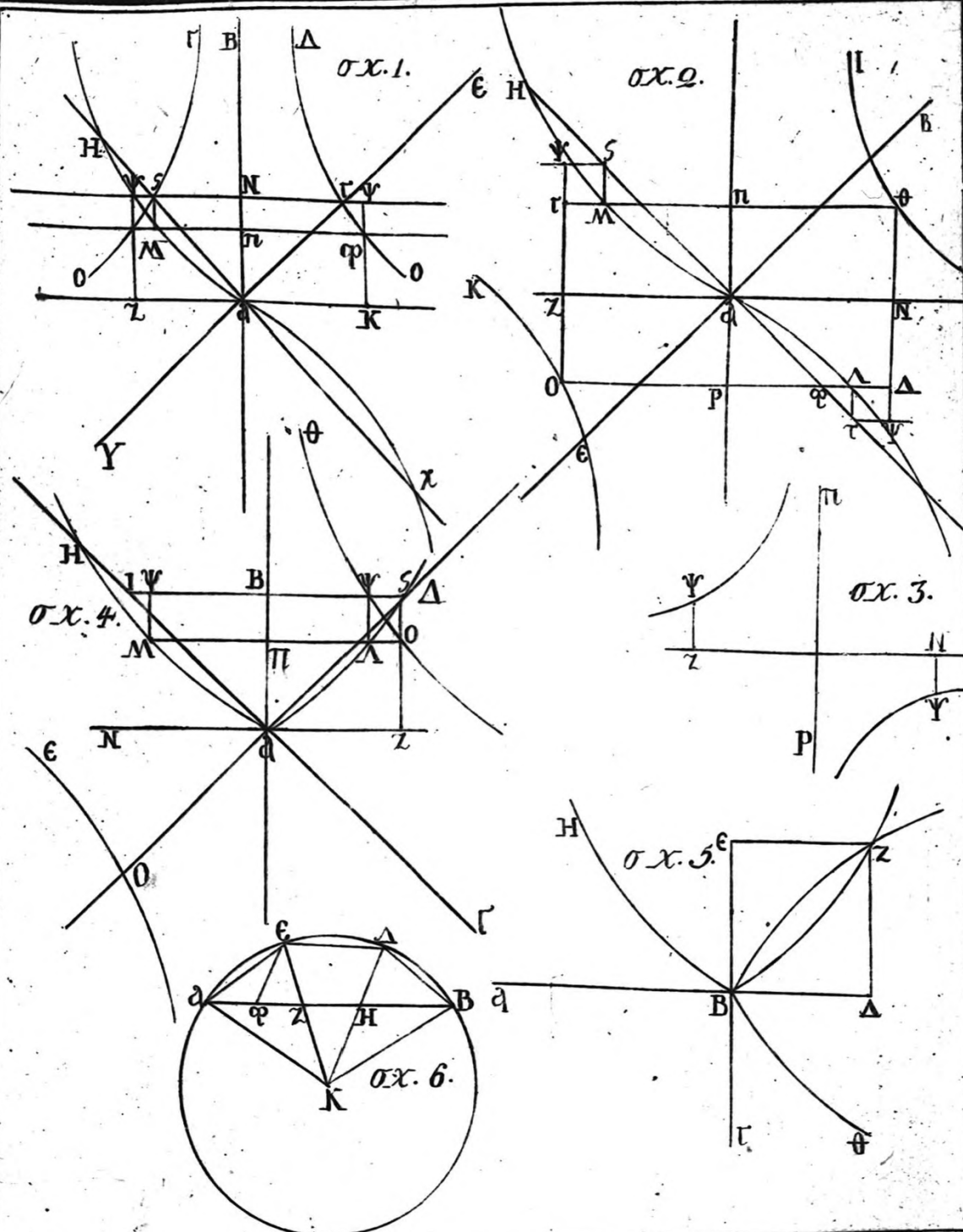
$$\begin{aligned}
(A) \quad & \frac{\beta^2}{\alpha^2} y^2 = 2\alpha x + x^2 | (B) \frac{\beta^2}{\alpha^2} y^2 + 2\alpha^2 y^2 + \alpha^2 \delta y^2 = 2\alpha x + 2\alpha \delta x + x^2 + \delta x^2 \\
(F) \quad & \frac{\beta^2}{\alpha^2} y^2 dy = \alpha + x \cdot \delta x | (\Delta) \delta x = \alpha^2 y^2 | (E) y^2 \delta x = \alpha^2 y^2 | (Z) \frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha x + x^2 \\
(H) \quad & \frac{\beta^2}{\alpha^2} y^2 = \epsilon x | (\Theta) \alpha^2 \beta^2 + 2\alpha \beta^2 x + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 - 2\alpha \beta^2 x + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 + 4\alpha^2 y^2 \\
(I) \quad & -4\alpha^4 - 4\alpha^2 y^2 = 4\alpha^2 x^2 - 4\alpha \beta^2 - 8\alpha^3 x | (K) -\alpha^2 - y^2 = x^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} - 2\alpha x \\
(L) \quad & u^2 - \alpha^2 - y^2 = x^2 - 2ux + u^2 | (M) y^2 - z^2 = y^2 | (N) x^2 - \alpha x = -\beta y \\
(O) \quad & x^2 - \alpha x + \frac{1}{2} \alpha^2 = -\beta y | (P) x^2 + \beta x + \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} \beta^2 + \alpha y - y^2 \\
(Q) \quad & y^2 - \alpha y + \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{1}{2} \beta^2 - 2\pi^2 | (R) z^2 = y^2 - 2\pi^2 | (S) \frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha x + x^2 + y^2 \\
(T) \quad & 2\alpha^2 y^2 = \alpha \beta \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha x + x^2 + y^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2 + y^2} \\
(U) \quad & \frac{\alpha^2 - x^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\alpha^2 - \alpha x + x^2 + y^2}{\beta \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha x + x^2 + y^2}} | (V) \frac{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2 + y^2}{4y^2 x^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha x + x^2 + y^2}{\alpha^2 + 2\alpha x + x^2 + y^2} \\
(W) \quad & 2\alpha y^2 x^2 = \alpha^2 y^2 x^2 + 4\beta^2 y^2 x^2 + 2\alpha \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 \\
(X) \quad & 4\alpha^2 y^2 x^2 + 4\beta^2 y^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2 + 2\alpha \beta^2 y^2 x^2 + 2\alpha \beta^2 y^2 x^2 - 4\alpha^2 \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 \\
(Y) \quad & 4\alpha^2 y^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2 - 2\alpha \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 \\
(Z) \quad & 2\alpha y^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 y^2 x^2 + \beta^2 y^2 \\
(1) \quad & x^2 + 2\alpha y^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 + 2\alpha y^2 x^2 + \alpha^2 y^2 \\
(2) \quad & x^2 + 2\alpha y^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 + 2\alpha y^2 x^2 + \alpha^2 y^2 \\
(3) \quad & \Phi^2 = 2 - \alpha^2
\end{aligned}$$

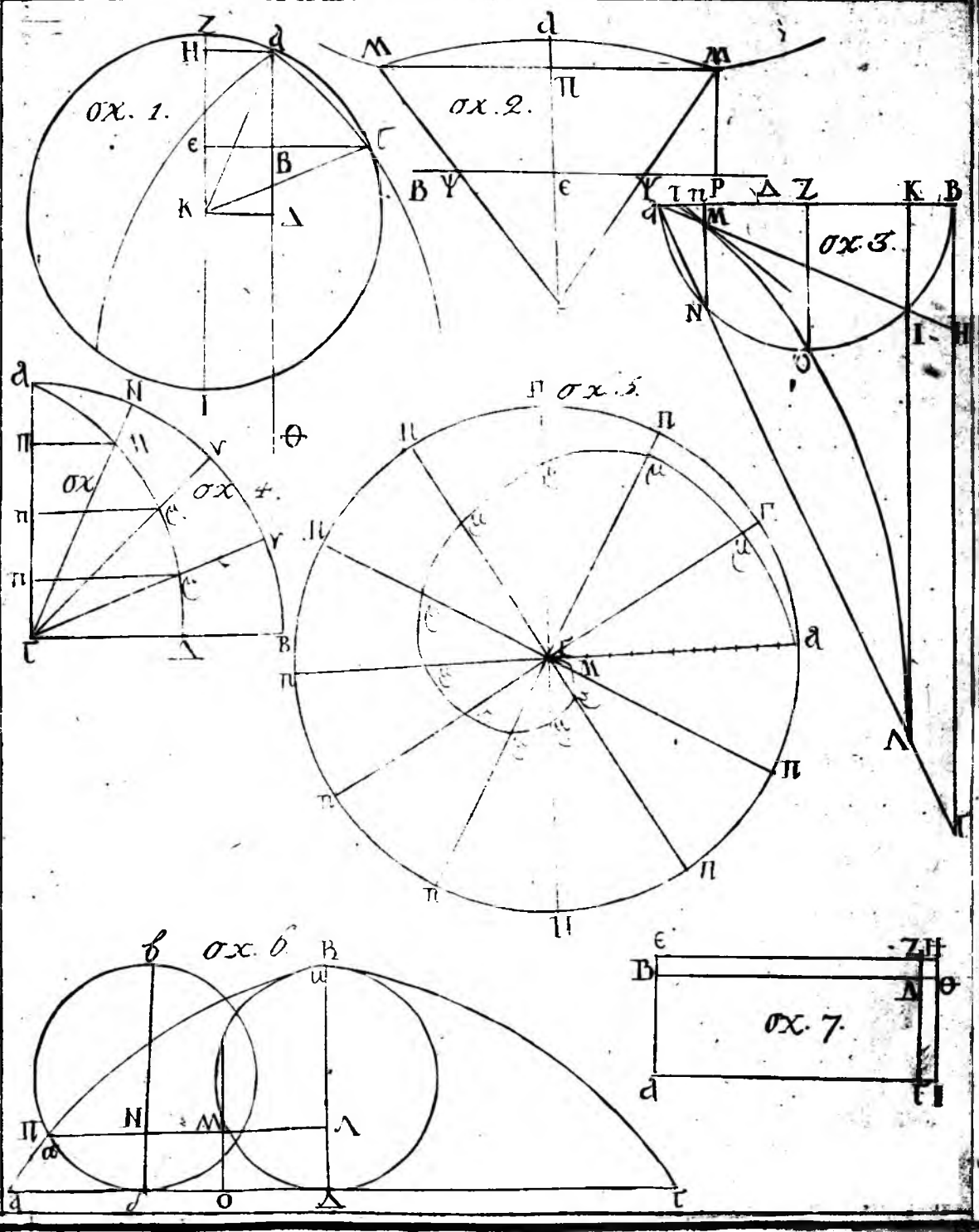
- (A) $2\alpha y^2 - y^2 x = x^3$ | (B) $2\alpha x y^2 - y^2 x^2 = x^4$ | (Γ) $y \sqrt{2\alpha x - x^3} = x^2$
 (Δ) $z = \sqrt{2\alpha x - x^2}$ | (E) $yz = x^2$ | (Z) $z^2 = 2\alpha x - x^2$ | (H) $\alpha x = y^2$
 (Θ) $y^3 = \alpha^2 x$ | $y^3 = \alpha x^2$ | (I) $y^4 = \alpha^2 x$ | $y^4 = \alpha^2 x^2$ | $y^4 = \alpha x^3$
 (K) $y^r = \alpha^{r-1} x$ | $y^r = \alpha^{r-2} x^2$ | $y^r = \alpha^{r-3} x^3$, $\kappa\tau$ | (Λ) $y^r = \alpha x^{r-1}$ | $y^r = \alpha^2 x^{r-2}$ | $y^3 = \alpha^3 x^{r-3}$, $\kappa\tau$
 (M) $y^3 = \alpha^2 x$ | (N) $y, y^2 = \alpha^2 x$ | (Ξ) $y^2 = \alpha z$ | (O) $zy = \alpha x$ | (Π) $y^4 = \alpha^3 x$
 (P) $y^3 = \alpha^2 z$ | (Σ) $zy = \alpha x$ | (T) $y^5 = \alpha^4 x$ | (Υ) $y^4 = \alpha^3 z$ | (Φ) $yz = \alpha x$
 (X) $y^r = \alpha^{r-1} x$ | (Ψ) $y^{r-1} = \alpha^{r-2} z$ | (Ω) $y, y^{r-1} = \alpha^{r-1} x$ | (α) $y, \alpha^{r-2} z = \alpha^{r-1} x$
 (β) $yz = \alpha^{r-1-r+2} x$ | (γ) $yz = \alpha x$ | (δ) $y^\mu = \alpha^{\mu-r} x^r$ | (ε) $z^r = \alpha^{r-1} y$
 (ζ) $\Pi^\mu = \alpha^{\mu-1} x$ | (η) $z = \sqrt{\alpha^{r-1} y}$ | (θ) $\Pi = \sqrt{\alpha^{\mu-1} x}$ | (ι) $\sqrt{\alpha^{r-1} y} = \sqrt{\alpha^{\mu-1} x}$
 (κ) $\alpha^{r-1} y = \sqrt{\alpha^{\mu-r} x^r}$ | (λ) $\alpha^{\mu-r} y^\mu = \alpha^{\mu-r} x^r$
 (μ) $y^\mu = \alpha^{\mu-r-\mu+\mu} x^r$ | (ν) $y^\mu = \alpha^{\mu-r} x^r$ | (ξ) $y^8 = \alpha x^2$
 (ο) $z^2 = \alpha y$ | (π) $\Pi^3 = \alpha^2 x$ | (ρ) $y^5 = \alpha^2 x^3$ | (σ) $z^3 = \alpha^2 y$ | (τ) $\Pi^5 = \alpha^4 x$ | (υ) $y^4 = \alpha^2 x^2$
 (φ) $z^2 = \alpha y$ | (χ) $\Pi^4 = \alpha^3 x$ | (ψ) $y^4 = \alpha x^3$ | (ω) $z^3 = \alpha^2 y$ | (Λ) $\Pi^4 = \alpha^3 x$



- (A) $xy = a\beta$ | (B) $y^2x = a^2\beta$ | $y\chi^2 = a\beta^2$ | (Г) $y\chi^3 = a\beta^3$ | $y^2\chi^2 = a^2\beta^2$ | $y\chi^3 = a\beta^3$
 (Δ) $y^4x = a^4\beta$ | $y^3\chi^2 = a^3\beta^2$ | $y^2\chi^3 = a^2\beta^3$ | $y\chi^4 = a\beta^4$ | (E) $y^2x = a^2\beta$ | (Z) $y\chi = az$
 (H) $zy = a\beta$ | (Θ) $y^3x = a^3\beta$ | (I) $y\chi = az$ | (K) $zy^2 = a^2\beta$ | (Λ) $y^4x = a^4\beta$
 (M) $y\chi = az$ | (N) $y^3z = a^3\beta$ | (Ξ) $y^5x = a^4\beta^2$ | (O) $y\chi = az$ | (Π) $y^4z = a^3\beta^2$
 (P) $y^2x = a^2\beta$ | (Σ) $y\chi = az$ | (Τ) $zy^{v-1} = a^{v-1}\beta$ | (Υ) $y^u\chi^v = a^u\beta^v$
 (Φ) $\chi^v = a^{v-1}\pi$ | (X) $y^u\pi = a^{u-v+1}\beta^v$ | (Ψ) $y^2\chi^2 = a^2\beta^3$ | (Ω) $\chi^2 = a\pi$ | (α) $y^2\pi = a\beta^3$
 (β) $y^2\chi^3 = a^2\beta^3$ | (γ) $\chi^3 = a^2\pi$ | (δ) $y^2\pi = \beta^3$ | (ε) $y^5\chi^3 = a^5\beta^3$ | (ζ) $\chi^3 = a^3\pi$
 (η) $y^5\pi = a^3\beta^3$ | (θ) $y^3\chi^2 = a^3\beta^2$ | (ι) $\chi^2 = a\pi$ | (κ) $y^2\pi = a^2\beta^2$ | (λ) $ay = \chi$
 (μ) $\beta\chi = y^2$ | (ν) $y = \frac{\chi}{a}$ | (ξ) $y^2 = \frac{\chi^2}{a^2}$ | (ο) $\beta\chi = \frac{\chi^2}{a^2}$ | (π) $a^2\beta = \chi^3$
 (ρ) $\beta\chi = y^2$ | (σ) $a\beta + y\chi = 3\beta y$ | (τ) $3\beta y - y\chi = a\beta$ | (γ) $ay = 3\beta\chi - \chi^2$
 (φ) $y^2 + ay = 4\beta\chi - \chi^2$ | (χ) $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4\beta\chi - \chi^2$ | (ψ) $z^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4\beta\chi - \chi^2$
 (ω) $z^2 + \chi^2 - 4\beta\chi = \frac{1}{4}a^2$ | (Α) $z^2 + \chi^2 - 4\beta\chi + 4\beta^2 = 4\beta^2 + \frac{1}{4}a^2$ | (C) $z^2 + \pi^2 = \mu^2$
 (D) $z^2 = \mu^2 - \pi^2$ | (F) $\frac{1}{4}a^2 + 4\beta^2 = 4\beta^2 - 4\beta\chi + \chi^2 + y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2$
 (G) $y^2 + ay = 4\beta\chi - \chi^2$ | (L) $ay = 3\beta\chi - \chi^2$ | (M) $3\beta y - y\chi = a\beta$
 (N) $3\beta y = a\beta + y\chi$ | (Q) $\frac{a^2\chi^2 + 2a^2\beta\chi + a^2\beta^2}{\chi^2} = \beta^2 + 2\beta\chi + \chi^2 + y^2$
 (R) $\frac{\chi^4 + 2\beta\chi^3 + y^2\chi^2 + \beta^2\chi^2}{\chi^2} = \frac{a^2\beta^2 + 2a^2\beta\chi + a^2\chi^2}{\chi^2}$ | (S) $y^2 \cdot \frac{a^2 - 2a\chi + \chi^2}{\chi^2} = a\chi^3 - \chi^4$
 (V) $\frac{a - \chi}{a - \chi} \cdot y^2 = \chi^3$ | (W) $ay = \beta\chi$ | (AA) $\pi y = \eta\chi$ | (BB) $\pi y = a\chi$









ΒΙΒΛΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ
Τῆς καλεμένης τῶν ἀπείρων
Μεθόδου

Κ Ε Φ. Α'.

Περὶ τῶν λεγομένων διαφορικῶν λογισμῶν,
ἥτοι τῶν ἀπειροσῶν.



ΟΡΙΣΜΟΣ Α'.

μετάβλητον μέγεθος κα-
λείτω τὸ μηδ'ομίαν αὐξῆσιν
ἢ μείωσιν πᾶσιν, ἀλλ' ὅπερ
ἐστὶ διαμένον.

ΟΡΙΣΜΟΣ Β'.

§. 2. Μεταβλητὸν δὲ, τὸ αὐξομειώσεις ἐπιδει-
χόμενον.

ὑψηλότητος τινος ὄρεος, ἄνεμος πνεύσας, ἀπὸ τῆς ἀκροκρίσεως ἀφίλη ἢ προῦν λυγρῆς κύνεως λιπτότατον μέρος, τὸ τῷ ὕψει μέγρον μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἢ προῦν τὸ αὐτὸ ἐνυεθήσεται, τὸ ἀφαιρέθην ἔν ἢ προῦν μέρει, ἐκείνὸ ἐστὶ τὸ ἀπειροσόν, ὅπερ τῷ ἔλα πρὸς αὐτὸν ἐστὶν ἐστὶ. τῷ δὲ τῷ λόγῳ καὶ τὴν τῆς γῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς σημείου οἱ Ἀριστοτέλει ἐκλαμβάνουσι, τοῖς ὑπὸ τῶν Ἀστρον ἀποτήμῃσι περὶ τῶν αὐτῶν καὶ αὐτὰ τὰ ἐν τῇ γῇ ὑψηλότερα ἐστὶ, ὡς ἀπειροσὰ τῷ ἔλα τῆς γῆς μεγέθει καὶ τὴν γῆν δὲ ὡς ἀκριβῆς οὐκ ἔστιν ἐκλογίζονται. ὅπερ δὲ καὶ ἢ ἐν τῇ τῆς Σελήνης ἐκλογίσειν ἐκμετρήσῃ αὐτὴν σικνὲ ποιῶν.

Σ Κ Ο Λ Ι Ο Ν Β΄.

§. 7. Καὶ τοῖς παλαιοῖς ἢ ἀπὸ τῆς ἢ τῶν ἀπειροσῶν χρῆσιν ὅμοια. τὸ ἀπειροσὸν γὰρ εἰναι τὴν ἢ μὲν Ἐυκλείδης, λέγων· ληφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἐστὶν ἔλασσον ἐκκεκμηκὸς ἐλάσσονος μεγέθους (ω) ὃ δὲ Ἀριστοτέλης, (α) τῶν ἀνίσων χωρίων τὴν ὑπερέχον, ἢ ὑπερέχει τὸ μᾶλλον τῷ ἐλάττωτος, δυνατόν· εἶμεν αὐτὰν ἐκμετρήσῃ παντὸς ὑπερέχειν τῷ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ Δ΄.

§. 8. Ῥέοντα ἢ ὁλόκληρα μεγέθη λέγεται τὰ τῶν ἀπειροσῶν ὅλα.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ Ε΄.

§. 9. Ἀπειροσὸν δευτέρας τάξεως ἐστὶ τὸ τῷ ἀπειροσῷ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροσόν, ἔχει τε ἔστιν πρὸς τὸ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροσόν, ὃν αὐτὸ τὸ τῆς πρώτης τάξεως, πρὸς τὸ αὐτῷ ὅλον.

ΣΧΟ-

(ω) Θίωρ. Ι. τῷ ΙΟ. βιβλ. τῶν τοιχ. (α) Ἐν τῷ Περὶ οὐρανοῦ, τῷ περὶ τῆς Περὶ οὐρανοῦ, τετραγωνισμ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§ 10. Οἷον τὸ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροσόν, ἡ λέκλυσόν ἐστὶ τῇ τῆς δευτέρας αὐτοῦ δὲ τὸ τῆς δευτέρας ἀπειροσόν, τῇ τῆς πρώτης. τὸ αὐτὸ δὲ νόον καὶ περὶ τῶν τῆς τρίτης τάξεως ἀπειροσῶν, καὶ περὶ τῶν τῆς τετάρτης, καὶ περὶ τῶν ἀπειροσῶν τῶν ἐφεξῆς τάξεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 11. Τῶν ἀμεταβλήτων μεγεθῶν μηδενίαν αὐξήσιν ἢ μείωσιν ἐπιπεχεμένων, (§. 1.) ἔδεν ἀπειροσὸν λαμβάνεσθαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5'.

§. 12. Ἀπειρον μέγεθος, ἢ πείρας ἔδεν.

ΟΡΟΣ.

§. 13. Τὰ μὲν ἀπειρα μεγέθη γεγραφθῶσι ὡς ἐν τῷ Α καίταρ (πὶν α.) τὰ δὲ πεπερασμένα, τὰ μεταβλητά, ὡς ἐν τῷ Β ἢ ὡς ἐν τῷ Γ. καὶ τὰ μὲν ἀπειροτά τῆς πρώτης τάξεως, ὡς ἐν τῷ Δ, ἢ ὡς ἐν τῷ Ε, ἢ ὡς ἐν τῷ Ζ· τὰ δὲ τῆς δευτέρας, ὡς ἐν τῷ Η, ἢ ὡς ἐν τῷ Θ· τὰ δὲ τῆς τρίτης, ὡς ἐν τῷ Ι, ἢ ὡς ἐν τῷ Κ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 14. Ὁ ὑπερθεὶς ἢ δ τιθόμενος ἀριθμὸς ἔδεν ἢ δ, ἔδεν τῇ χ ἐκδέτης ἐστὶ, τὴν τῷ ἀπειροσῷ δὲ τάξιν δηλοῖ. τὸ μὲν γὰρ δ' χ, ἀπειροσὸν πρώτης τάξεως ἐμφαίνει· τὸ δὲ δ' χ, δευτέρας· τὸ δὲ δ' χ, τρίτης· τὸ δὲ ἀπὸ τῇ δ' χ τετράγωνον ἐστὶ τὸ δ' χ², ἢ τὸ δ' χ². τὸ δὲ ἀπὸ τῇ δ' χ, δ' χ². τὸ δὲ ἀπὸ τῇ δ' χ, τὸ δ' χ². τὸ αὐτὸ δὲ νοητέον καὶ περὶ τῇ μηδενικῇ σημείῃ.

ΠΩ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 5. Προτιθεμένη μὲν ἄρα μονάδος τῷ ἐπὶ τῇ δυνάμει σημείῳ, ἢ τῷ ἐν αὐτῇ ἀριθμῷ, τὸ ἀπειροσὶ αὐτῇ ἐμφανέσθαι, ἀφαιρεμένης δὲ, τὸ ὁλόκληρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 16. Ὡς γὰρ ἐν τῷ δ' χ ἴσμεν μὲν γὰρ ὅτι προσηλὴ ἢ ῥητὴ, περὶ ἧς γὰρ δ' χ , ἔστι τὸ ἀπειροσὶ ἐμφανέσθαι τῷ $\delta^1 \chi$, ἴσμεν δὲ ἀφαιρεθῆναι, τὸ δ' $\delta^1 \chi$, ὅστις δηλοῖ τὸ ὁλόκληρον τῷ $\delta^0 \chi$, τὸ γὰρ δ' χ πεπερασμένον ἔν, ἀπειροσὶν ἐν τῇ ἀπείρῃ δ' $\delta^1 \chi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 17. Ἐὰν ἄρα ἢ κατὰ τὸ Λ σκεῖται συνταχθῇ, ἔκτε μὲν τῶν περὶ τῇ δ' χ ὄρεσιν, τὸ ὁλόκληρον τῇ προ αὐτῇ δηλαδ' ἵκανον δὲ τῶν μετὰ τὸν δ' χ , τὸ ἀπειροσὶν τῇ μετ' αὐτῇ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 18. Ὡς γὰρ τὸ μὲν ὁλόκληρον τῷ δ' χ ἐπὶ τὸ δ' $\delta^1 \chi$, ἔστι δὲ τὸ δ' $\delta^2 \chi$, τὸ δὲ ἀπειροσὶν τῷ $\delta^0 \chi$, τὸ δ' χ , ἔστι δὲ τὸ $\delta^2 \chi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γ'.

§. 19. Διαφορικὸς μὲν, ἢ τῶν Ἀπειροσῶν Λογισμὸς λέγεται, ἢ τῷ τὰ ἀπειροσῶν τῶν δοθέντων ὁλοκλήρων εὐρίσκειν μέθοδος. Ὁλοκληρωτικὸς δὲ, ἢ τῷ εὐρίσκειν τῶν δοθέντων ἀπειροσῶν τὰ ὁλόκληρα. Τέτων δὲ ἢ μὲν εὐθεῖα καλεῖται, ἢ δὲ ἀντίστροφος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 20. Δοθείσης μὲν τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης τινὰ ἐμφανέσεως, τῇ τῶν ἀπειροσῶν λήψει, τὰ ἰδιώματα αὐτῆς εὐρίσκομεν, οἷον τὴν ὑφαπτομένην, τὴν ἱσοκείμεν, τὴν ὑφαπτομένην, τὴν κείσμεν. τῷτο δὲ
μέ.

μ' ὁδοῦ ἐν θ' αὐτῇ δοθέντο. δι' τίνος τῶν τῆς καμπύλης ἰδιωμάτων, ἵππων ἐκθέτων δι' ἀπειροσῶν ἐμφανίσθη μίαν τῶν ἐξημίαν ἐμβασίων, τῇ τῶν ὀλοκλήρων ἐνέριστι, ἢ ἐξέτωσι προκύπτει ἢ τὴν καμπύλην δηλώσας, ἢ ἢ ἐκθέσει δέδοται. τῷτο δὲ μ' ὁδοῦ ἀντίστροφος.

Λ Ι Τ Η Μ Λ.

§. 21. Τὰ ἐποικιδῆ μεγ' ὄνη, τὰ ἀπειροσῶ μεγ' ὄνη αἰθῆλων διαφύροντα, ἴσα ἐκλαμβύνεται.

Κ Ε Φ. Β'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς τὰ ἀπειροσῶ τῶν δοθέντων ὀλοκλήρων ἐνέρισκιν.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α'.

§. 22. Τῆς κατὰ τὸ Μ δοθέντος κεφαλαίᾳ τῶν ὀλοκλήρων ἐνέριν τὰ ἀπειροσῶ.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ.

Γράψαντες κατὰ τὸ Μ ὡς ἐν τῷ Ν ὀρῶνται. (§. 13.) πρὸς δὲ τὴν μεταβάσιν ἐκάσω τῶν ἐπὶ τῇ δ' μὴνικῶν σημείων. (§. 15.) λέγω δὲ, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Ξ ἐκθέσις τὰ ἀπειροσῶ εἰσι τῇ κατὰ τὸ Μ δοθέντος κεφαλαίᾳ.

Λ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Τὸ γὰρ α ἀμετάβλητον ὂν, (§. 3.) ἀπειροσῶν ἐκ ἔχας. (§. 11.) εἰσι δὲ τῇ μὲν χ ἀπειροσῶν τὸ δχ, τῇ δὲ γ τὸ δγ, τῇ δὲ Ω τὸ δΩ. (§. 15.) τὰ ἄρα ζητούμενα ἀπειροσῶ τὰ ἐν τῷ Ξ εἰσι.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ τῇ μὲν κατὰ τὸ Ξ κεφαλαίᾳ τὰ ἀπειροσῶ εἰσι τὰ κατὰ τὸ Ο' τὰ δὲ τῇ κατὰ τὸ Π, τὰ κατὰ τὸ Ρ' τὰ δὲ τῇ κατὰ τὸ Σ, τὰ κατὰ τὸ Τ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 23. Ἐπίστε ἐν τῷ λαμβάνειν τὰ τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροσά, ἐν τῶν τῆς πρώτης, ὡς ἀμετάβλητον λογίζεται. οἷον τῆς κατὰ τὸ Υ ἐκθέσεως τὰ ἀπειροσά εἰσι τὰ κατὰ τὸ Φ, ἀμεταβλήτη λογισθέντι τῷ δχ. ὁμοίως τῆς κατὰ τὸ Χ, ἀμεταβλήτη λογισθέντι τῷ διγ, τὰ κατὰ τὸ Ψ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 24. Τῷ κατὰ τὸ Ω διδόντος γινομένη τὰ ἀπειροσά εὐρεῖν.

ΠΡΑΞΙΣ.

Παραπλασίωσον τὸ ἕτερον τῶν μεταβλητῶν διὰ τῆ ἀπειροσῶς τῆ ἑτέρας, εἴτεν τὸ μὲν χ διὰ τῷ διγ, ἢ δὲ γ διὰ τῷ δχ. λέγω δὴ ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν γινομένων, τὸ ἐν τῷ α, τὰ ζητούμενα ἀπειροσά εἰσιν.

ΛΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ χγ τὸ ὑπὸ τῶν χ καὶ γ ἰμφοῖται περιχόμενον ὀρθογώνιον, εἴτω ἡ μὲν ΑΓ = χ, (β) ἡ δὲ ΑΒ = γ, καὶ τῆς μὲν ΑΓ ἀπειροσὸν ἔσω ἡ ΓΙ = δχ, τῆς δὲ ΑΒ ἡ ΒΕ = διγ. καὶ πεπλασιάζω τὸ ΑΗ ὀρθογώνιον. ἔκῃν ἡ μὲν ΑΙ = χ + δχ, ἡ δὲ ΑΕ = γ + διγ. διὸ τὸ μὲν ΑΗ ἴσον τῇ κατὰ τὸ β ἐκθέσει, (πρ. α.) τὸ δὲ ΑΔ τῷ χγ. ἀφαιρεθέντος ἔν ἀπὸ τῷ ΑΗ τῷ ΑΔ, εἴτεν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ β ἐκθέσεως τῷ χγ, τὸ λοιπὸν τὸ ἐν τῷ γ εἶναι ὁ γνώμων. καὶ ἐπεὶ εἰ 1 : διγ :: δχ : διγδχ, εἴτι δὲ τὸ διγ ἀπειροσὸν τῆς ἐκτῆς μονάδος, ἄρα καὶ τὸ διγδχ ἀπειροσὸν τῷ δχ παρατιθέμενον. διὸ δὴ ἀπειροσὸν καὶ τοῖς χδγ + γδχ παραβαλλόμενον. ἔκῃν ἡ κατὰ τὸ γ ἐκθεσις ἴση τῇ κατὰ

κατὰ τὸ α. (§. 21.) τὰ κατὰ τὸ α ἄρα τὰ ζητούμενα ἀπειροσά εἰσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 25. Ἐάν δὲ ἐκ πλειόνων ἢ δύο γραμμάτων ᾗ δοθέν γινόμενον συγκέηται, ὅσον τὸ κατὰ τὸ δ, τὸ κεφάλαιον τῶν γινόμενων ἐκ τῆ ἀπειροσά ἐνὸς ἐκάστου διὰ τῶν λοιπῶν πολλαπλασιαζέμενος ἐπὶ τὰ ζητούμενα ἀπειροσά, εἴτεν τὰ ἐν τῷ ε. κείθω γὰρ τὸ χυ ἴσον ἐξίσω ἀγνώστῳ πῶ κατὰ τὸ ζ. ἐκὼν τὸ χυζ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ η. τὰ μὲν ἄρα ἀπειροσά τῆς κατὰ τὸ ζ, ἐξισώσεως, εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ θ· τὰ δὲ τῆς κατὰ τὸ η, τὰ κατὰ τὸ ι, (§. 24.) τῆ Δ τὰ ληφθησόμενα ἀπειροσά τῆ χυη ἐμφαίνοντες. ἐν τῇ κατὰ τὸ ι ἐξισώσει τεθέντος ἀντὶ μὲν τῆ Δ τῶν ἴσων αὐτῶ, τῶν κατὰ τὸ ζ, ἀντὶ δὲ τῆ Δ τῶν κατὰ τὸ θ, ἢ κατὰ τὸ κ ἐξισώσει γήσεται. ἐξ ἧς δῆλον ὅτι τὰ ζητούμενα ἀπειροσά, εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὰ ἀπειροσά τῆς ἐν τῷ λ ἐκθέσεως εἰσὶ τὰ ἐν τῷ μ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 26. Ἐάν δὲ τὸ γινόμενον ᾗται πεπολλαπλασιασμένον ἢ δι' ἀμεταβλήτου, καθάπερ τὸ ἐν τῷ ν, ἐξηρημένον, ὡς τὸ ἐν τῷ ο, λαμβάνεται μὲν πρῶτον τὰ ἀπειροσά ὡς ἀνωτέρω εἰρηται, εἰδ' ἔτω διὰ τῆ ἀμεταβλήτου πολλαπλασιάζεται, ὡς τὰ ἐν τῷ ξ, ἢ ἀπειροσά, ὥσπερ τὰ ἐν τῷ π.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 27. Τὸ ἀπειροσὸν εὐρεῖν τῆς κατὰ τὸ ρ δύναμews.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ.

Ο' τῆς Δυναμέως ἐκθέτης ἐν τῷ τῷ συμπράκτορος τόπω γεγραψθῶ, μεθ' ὃν αὐτὴ ἡ Δύναμις μετὰ τῷ προτέρῳ ἐκθέτῃ μονάδι ἐλαττωθύντος, ἔσται τὸ ἀπειροσὸν τῷ γραμμάτος, ἐξ ἧς ἡ Δύναμις, ὡς ἐν τῷ σ ἔραται. λέγω δὴ ἔν, ὅτι ἡ κατὰ τὸ σ ἔτω συγκροτηθεῖσα ἐκθεσις τὸ ἀπειροσὸν ἐστὶ τῆς κατὰ τὸ ρ δοθείσης Δυναμέως.

Δ Ε Ι Ξ Ι Σ.

Ἐπεὶ γάρ τὸ $\chi^2 = \chi\chi$, τῷ δὲ $\chi\chi$ τὸ ἀπειροσὸν ἐστὶ (ψ. 24.) τὸ $\chi\delta\chi + \chi\delta\chi = \chi\delta\chi$. ἡ κατὰ τὸ σ ἔρα ἐκθεσις τὸ ἀπειροσὸν ἐστὶ τῆς κατὰ τὸ ρ Δυναμέως.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν τῷ y^3 ἀπειροσὸν ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ τ' τὸ δὲ τῷ $\frac{\alpha\chi^4}{\beta}$, τὸ κατὰ τὸ γ' τὸ δὲ τῷ $\alpha\chi'$, τὸ ἐν τῷ φ' τὸ δὲ τῷ $\alpha + \chi''$, τὸ ἐν τῷ χ' τὸ δὲ τῷ $\frac{\alpha\chi^{\mu}}{\nu}$, τὸ ἐν τῷ ψ' τὸ δὲ τῷ $\alpha + \chi^{\frac{\mu}{\nu}}$, τὸ ἐν τῷ ω' τὸ δὲ τῷ $\alpha' + \chi^{\frac{\mu}{\nu}}$, τὸ ἐν τῷ Α.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α'.

§. 28. Καὶ τῆς ὁποιασὺν ἔρα εἴξης τῷ αὐτῷ ἰσόπῃ ἐκθεσὶ ἔναι τὸ ἀπειροσὸν. ἰπεί γάρ τὸ $\sqrt[3]{y^3} = y$ (ψ. 33. τῷ 1. βιβλ.) τὸ ἔρα ἀπειροσὸν αὐτῇ ἐστὶ τὸ τῷ Α. (ψ. 27.) (Πίν. β.) διὰ τὰ αὐτὰ τῷ μὲν $\sqrt[3]{\chi^{\mu}}$.

τὸ ἀπρόσῳ ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Β. τὸ δὲ τῆς $\sqrt[3]{\alpha^2 + \gamma^2}$

τὸ κατὰ Γ. τὸ δὲ τῆς $\sqrt[3]{\alpha^2 + \gamma^2}$, τὸ κατὰ τὸ Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 29. Οποῖον δὴ καὶ τῆς γινώσκουσιν ἐξ ἐμπειρίας

Δυναμὴς καὶ ταχυτήτος τὸ ἀπρόσῳ ἐκτιμάται, ἐπὶ
 γὰρ τὸ $\chi^2 \gamma^2 = \chi \chi \gamma$, τῆς δὲ $\chi \chi \gamma$ τὸ ἀπρόσῳ ἐστὶ
 τὸ $\chi \gamma \delta \chi + \chi \gamma \delta \gamma$, (§. 25.) τῆς ἀγὰρ $\chi^2 \gamma$
 τὸ ἀπρόσῳ ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ε. ἐκείνου τὸ τῆς $\chi \gamma$
 τὸ κατὰ τὸ Ζ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 30. Το κατὰ τὸν ἀγὰρ τῶν γινώσκουσιν ἐκ τῶν

δοτῶν τῆς πολλαπλασιαστικῆς Δυναμὴς καὶ τῆς ταχυ-
 τῆς ἀπρόσῳ τῆς ἐμπειρίας ταχυτήτος, τὸ ἀπρόσῳ ἐστὶ
 τῆς γινώσκουσιν ἐκ τῆς Δυναμὴς καὶ τῆς ταχυτήτος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 31. Τῆς κατὰ τὸ Η δοθέντος κατὰ τὸν ἀγὰρ
 ποσὸν εὐρίσκω.

ΠΡΑΞΙΣ.

Ἀπὸ τῆς γινώσκουσιν ἐκ τῆς εὐνοίας καὶ τῆς ἀπρόσῳ
 τῆς ἀγινώσκουσιν, ἐπὶ τῆς ἀπὸ χ ἀφ' ἧς τὸ γινώσκου-
 νον ἐκ τῆς ἀγινώσκουσιν καὶ τῆς ἀπρόσῳ τῆς εὐνοίας, ἵστα-
 το $\chi \delta \gamma$, τὸ δὲ λοιπὸν δὲ τῆς ταχυτάτος, τῆς ἀπὸ
 τῆς εὐνοίας δὲ τῆς, τῆς δὲ τῆς $\chi \delta \gamma$, ἵστατο δὴ, ἐπὶ
 ἡ ἴστω συγχρηστικῆν ἐκδρασίαν, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Θ τὸ
 ζητούμενον ἀπρόσῳ ἐστὶ.

ΔΕΙΞΙΣ.

"Εστὶ μὲν γὰρ τὸ κατὰ τὸ Η δοθέν κατὰ τὸν ἀγὰρ τὸ
 κατὰ τὸ Ι, (§. 31. τῆς Ι, βιβλ.) τὸ δὲ τῆς $\chi \gamma$ -

ἀπειροσέν, τὸ κατὰ τὸ Κ ἐστίν, (§. 24.) ὃ ταυτὸν τὰ κατὰ τὸ Θ.

Καὶ ἄλλως δὲ τὸ αὐτὸ εὐρεθήσεται. κείδω γὰρ τὸ ἐξὶν κλάσμα ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Λ. ἐκ τῆς ἐξίσωσιν ταύτης ἢ κατὰ τὸ Μ γίνεται, ἥς τὰ ἀπειροσά τα κατὰ τὸ Ν. (§. 24) ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ν δὲ ἐξίσωσιν ἢ κατὰ τὸ Ξ γίνεται καὶ τιθέντες ἀντὶ τῷ Ζ τῷ ἴσῳ αὐτῷ τῷ ἐν τῷ Λ, ἢ κατὰ τὸ Ο, ἐξ ἥς ἢ κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ δὲ τὸ δΖ ἴσον τῷ ἀπειροσῷ τῷ ἐκθέντος κλάσματος, διὰ τὴν κατὰ τὸ Λ ἐξίσωσιν, ἔλκεν ἄρα ἔτι τὰ τῷ δΖ ἴσα τὰ ζητούμενα ἀπειροσέν ἐστ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ μὲν τῆς κατὰ τὸ Ρ ἐκθέσεως ἀπειροσόν ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Σ· τὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Τ, πὲρ ἐν τῷ Υ· τὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Χ, τὸ ἐν τῷ Φ.

ΣΗΜΒΙΩΣΙΣ.

§. 32 Τοῖς εἰρημέναις κανόσι καὶ τὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης καὶ πάσης ἄλλης τάξεως ἀπειροσά εὐρεθίσκονται. διὸ τὸ μὲν ἀπειροσόν τῷ ἐν τῷ Ψ ἐστὶ τὸ ἐν τῷ Σ· τὸ δὲ τῷ ἐν τῷ α, τὸ ἐν τῷ β· τὸ δὲ τῷ γ, τὸ ἐν τῷ δ· τὸ δὲ τῷ ἐν τῷ ε, τὸ ἐν τῷ ζ τὸ ἐν τῷ η. τὸ ἐν τῷ θ. ὁμοίως καὶ πάσης ἄλλης ἐκθέσεως συγκαμένης ἐξ ἀπειροσῶν ὅποιαισιν τάξεως καὶ μεταβλητῶν τὰ ἀπειροσά εὐρεῖν ἔνεστι.

Κ Ε Φ. Γ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῇ τὰ ὁλόκληρα τῶν δοθέντων ἀπειροσῶν εὐρίσκων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§ 33. Τῷ ἐν τῷ ι δοθέντος μονάδικῷ ἀπειροσῷ τῷ θ μονάδα ἐκθέτην ἔχοντος εὐρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ.

"Αφελε (§. 15.) τὴν μονάδα ἀπὸ τῆ ἀριθμῆ τῆ ἐπὶ τῆ δ, καὶ πρόσγραψον αὐτῷ τὸ σιγχαῖον, ἔσται τὸ χ. τῶν γινομένων, δῆλον ὅτι προκύψει τὸ ὅλο πληρον, ὅπερ ἐστὶ τὸ κατὰ πὸ κ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῆ μὲν κατὰ τὸ λ ἀπειροσθῆ ἐλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ μ' τῆ δὲ κατὰ τὸ ν, τὸ κατὰ τὸ ξ· τῆ δὲ κατὰ τὸ ο, τὸ κατὰ τὸ π.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Ε'.

§. 34. Τῆς κατὰ τὸ Α (πίν. γ.) δοθείσης Δυνάμεως, τῆς διὰ τῆ ἀπειροσθῆ τῆς ἑαυτῆς ῥίζης πλάσσιαζομένης εὐρεῖν τὸ ἐλόκληρον.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ.

Καίθω τὸ ζητούμενον ἐλόκληρον εἶναι τὸ κατὰ τὸ Β, ἐν ᾧ τό, τε Α καὶ τὸ π ὡς ἀγνωστα λογίζονται. ἔκιν τὰ ἀπειροσθῆ τῆ κατὰ τὸ Β ὀλοκλήρη ἴσα ἔσονται ἢ κατὰ τὸ Α δοθείση ἐκθέσει. ἐκ γάρ τε ἔν η κατὰ τὸ Γ ἐξίσωσις συνίσταται. διὸ δὴ τὸ μὲν $\pi A = 1$, τὸ δὲ $\pi - 1 = \nu$. τὸ μὲν ἄρα $\pi = \nu + 1$, τὸ δὲ $A = \frac{1}{\nu+1}$.

τῇ ἔν κατὰ τὸ Β ἐκθέσει τεθίντων ἀντὶ τῶν Α καὶ π τῶν ἄρτι εὐρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, δῆλον ὅτι ἡ κατὰ τὸ Δ ἐκθέσις ἔσται τὸ ζητούμενον ἐλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 35. Πάσης ἄρα Δυνάμεως διὰ τῆ ἀπειροσθῆ τῆς ἑαυτῆς ῥίζης πολλαπλασιαζομένης εὐρεθήσεται τὸ ἐλόκληρον, ἀρθέντος μὲν τῆ ἀπειροσθῆ, μονάδος δὲ τῇ ἐκθέσει προσθεθείσης, καὶ διὰ τῆ προκύπτοντος καφαλαῖς τῆς Δυνάμεως διαιρεθείσης.

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 36. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ ὁλοκληρωθήσεται πᾶσαι ἐκθέσεις τῇ κατὰ τὸ Α ὁμοίᾳ. ἐμφαίνει δὲ ὁ ἐκθέτης τῆς ἐν αὐτῇ Δυνάμεως, τατέτι τὸ ν, πάντα ἀριθμὸν, κλίμακτικόν, ἀποφατικόν, ὁλόκληρον, κεκλασμένον. διὸ τῆς μὲν κατὰ τὸ Ε ἐκθέσεως τὸ ὁλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ζ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Η, τὸ κατὰ τὸ Θ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Ι, τὸ κατὰ τὸ Κ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Λ, τὸ κατὰ τὸ Μ· τῆς δὲ κατὰ τὸ Ν, τὸ κατὰ τὸ Ξ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 37. Ἰστέον ὅτι, ἐπειδὴ τῷ τε χ καὶ τῷ $\alpha + \chi$ τὰ ἀπαιρούμενα ἐστὶ τὸ $\delta\chi$, διὰ τῆς τοῖς εὐμεθίσιν ὁλοκληρίαις προστιθέναι εἰσάθασιν ἀγνωστὸν τι γράμμα ὑπὲρ τῶν ἀμεταβλήτων, ὅπερ διὰ τῶν δοθ.σών ἐξιτάσεων ὀρίζεται. οἷον ὁλοκληρεῖντες τὸ $\delta\chi$ γράψασιν ἀντὶ ὁλοκληρίαις τὸ $\Lambda + \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ.

§. 38. Τῆς κατὰ τὸ Ο δοθείσης ρίζης, τῆς διὰ τῆς ἀπαιρούμενης τῶν ὑπὸ τὴν ρίζαν πολλαπλασιαζομένης, εὐρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

Ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Ο ἴση ἐστὶ τοῖς κατὰ τὸ Π, (§. 33. τῇ 1. βιβλ.) τὸ ἄρα ὁλόκληρον αὐτῆς ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ρ. (§. 36.) διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ τῆς κατὰ τὸ Σ ἐκθέσεως ὁλόκληρον, τῆς ἴσης τῇ κατὰ τὸ Τ, ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Υ, καὶ τῆς κατὰ τὸ Φ τὸ κατὰ τὸ Χ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 39. Εἰδέναι δεῖ ὅτι εἰσὶ τινες ἐκθέσεις τῇ κατὰ τὸ Ο ἀνόμοιοι, αἱ ταῖς ἐφεξῆς μεθόδοις εἰς ὁμοίας, ἥτοι αὐτῇ, ἡ τῇ κατὰ τὸ Α μεταβληθῆσαι ὁλοκληρεῖνται.

ΜΕΘΟΔΟΣ Α΄.

§. 40. Ἐξάγαγε, ἢ εἰσάγαγε ὑπὸ τὴν ρίζαν τὴν μὴ ἀβήτητον αὐτὴν ποιῶν. Θατέρη γὰρ τέτων γενομένη, ὁμοία πολλάκις ἢ ἐκθεσις γίνεται τῇ ἐτέρᾳ τῶν κατὰ τὸ Ο, καὶ Α.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 41. Οἷον ἐξαχθέντος μὲν ἐκ τῆς κατὰ τὸ Ψ ρίζης τῆ χ^2 , ἢ ἡ ρίζα χ , ἢ κατὰ τὸ Ψ ἐκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ Ω μεταβάλλεται, τὴν ὁμοίαν τῇ κατὰ τὸ Ο. διὸ τὸ ὁλόκληρον αὐτῆς εἰς τὸ κατὰ τὸ α. (§. 38) εἰσαχθέντος δὲ ὑπὸ τὴν κατὰ τὸ β ρίζαν τῆ χ^2 , ἢ κατὰ τὸ β ἐκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ γ μεταμορφῶται, ἥς τὸ ὁλόκληρον (§. 38.) ἢ ἐν τῇ δ.

ΜΕΘΟΔΟΣ Β΄.

§. 42. Ἐὰν τὸ ὑπὸ τὴν ρίζαν μεταβλητὸν τὴν μοῖρα ἐκθέτην $\chi\gamma$, θίς αὐτὴν τὴν ρίζαν ἴσην ἐτέρᾳ γ χόντι μεταβλητῷ, καὶ ἔτω πᾶσα ἢ προκαμένη ἐκθεσις εἰς ἐτέραν μεταβληθήσεται, διὰ τὴν λεγόμενην μεταβλητῇ γραμμάτος ἐμφαινομένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 43. Οἷον τῆς ρίζης $\sqrt{a+\chi}$, (πίν. δ.) τῆς ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως, ἡ ἐκθέσις ἴσης τῇ ἐν τῇ Β ἀγνώτῃ ἴσται τὸ μὲν $a+\chi$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Γ· τὸ δὲ χ , τοῖς ἐν τῷ Δ· τὸ δὲ χ^2 , τοῖς ἐν τῷ Ε· τὸ δὲ $\delta\chi$, τοῖς ἐν τῷ Ζ, διὰ τὴν ἐν τῷ Γ ἐξίσωσιν. διὸ ἢ κατὰ τὸ Α ἐκθεσις τῇ κατὰ τὸ Η ἴση, ἢ τῇ κατὰ τὸ Θ (ὁμοίᾳ ἔση τῇ κατὰ τὸ Α, (πίν. γ.) ἢς τὸ ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ Ι (§. 34.) (πίν. δ.) τεθέντων δὲ ἀντὶ τῆς γ^7 καὶ τῆς γ^8 τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπὸ τῶν ἡδὴ συσταθεσῶν ἐκ-

ώσεων περιζομένων, εἴηαι τῆς κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως τὸ ἐλάττωρον, ἢ κατὰ τὸ Κ, ἢ ἢ κατὰ τὸ Λ ἐκθεσις.

ΜΕΘΟΔΟΣ Γ'.

§. 44. Ἐάν δὲ ἡ ῥίζα τετραγωνικὴ ᾖ, καὶ τὸ ὑπ' αὐτὴν μεταβλητὸν μείζονα τῆς μονάδος ἐκθέτην ἔχη, δις αὐτὴν τὴν ῥίζαν ἴσην τῷ ὑπ' αὐτὴν μεταβλητῷ, ἴται διὰ γνωστῆ γράμματος πολλαπλασιαζομένη καὶ δι' ἑτέρου τυχόντος μεταβλητῆ διαιρεμένη, ἢ διὰ μεταβλητῆ τυχόντος πολλαπλασιαζομένη καὶ διὰ γνωστῆ διαιρεμένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 45. Οἷον δευτέρας τῆς κατὰ τὸ Μ ἐκθέσεως, ἵσται δὲ τὴν $\sqrt{ax-x^2}$ ἴσην ἔται τοῖς κατὰ τὸ Ν, ἴταις κατὰ τὸ Ξ ἐκ μὲν γὰρ τῆς κατὰ τὸ Ν ἐξίσωσης ἢ κατὰ τὸ Ο γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Π, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τῶν ἀπειροσῶν ληφθέντων ἢ κατὰ τὸ Σ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Τ. τεθέντες δὲ ἀντὶ τῆς $a-x^2$ τῆς ἴσης αὐτῇ, τῆς ἐκ τῆς κατὰ τὸ Π ἐξίσωσης περιζομένης, ἢ κατὰ τὸ Υ γίνεται, ἢ διὰ τῆς $x\sqrt{ax-x^2}$ διαιρεθείσης, ἢ κατὰ τὸ Φ τεθέντες δὲ ἀντὶ τῆς $\sqrt{ax-x^2}$ τῆς ἴσης αὐτῇ τῆς ἐν τῇ κατὰ τὸ Ν ἐξίσώσει, ἢ κατὰ τὸ Χ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ψ, ἢ αὐτῇ ἔσται τῇ κατὰ τὸ Ω. ἧς τὸ ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ α. (§. 35.) ὅπερ ἴσον τῷ ἐν τῷ β, τεθέντες δὲ ἀντὶ τῆς y τῆς ἴσης αὐτῇ, τῆς ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ο ἐξίσωσης περιζομένης. πάλιν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐξίσωσης ἢ κατὰ τὸ γ γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ δ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ ε, καὶ τῶν ἀπειροσῶν ληφθέντων, ἢ κατὰ τὸ ζ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ δ, ἢ κατὰ τὸ η, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ ι, πολλα-
Ξ 4 πλα-

πλασσε. Οὕτως τῇ μὲν δχ διὰ τῆ α³, τῇ δὲ ἐπὶ

ρετῇ ἐξισώσεται μέντι διὰ τῆ ἴση τῇ α¹, τῇ

ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ β' ἐξισώσεως πορίζομένη. ἐκ δὲ τῆς
κατὰ τὸ ἐξισώσεως γίνετορ ἡ κατὰ τὸ Α, (Πίν. ε.) ἐξ ἧς
ἡ κατὰ τὸ Β, τρέχοντος τῆ ἴση τῇ χ¹, ἡ αὐτὴ ἴση
εἴ κατὰ τὸ Γ, ἥτις ἴση τῇ κατὰ τὸ Δ, ἥ το ὅλο-
κληρον τὸ ἐν τῇ Ε, (φ. 31.) εἴταιν τὸ ἐν τῇ Ζ,
τρέχοντος ἀντὶ τῆ Ζ, τῆ ἴση αὐτῇ τῇ α¹ τῆς κατὰ
τὸ γ (Πίν. δ.) ἐξισώσεως πορίζομένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 46. Τῆς κατὰ τὸ Π (πίν. ε.) δοθείσης κλασματικῆς
ἀπειροστέως ἐκθέσεως, ἥς ὁ ἀριθμητὴς τὸ ἀπειροστέον ἐστὶ
τῇ παρονομασίᾳ, εὐρεῖν τὸ ὁλόκληρον.

ΠΡΑΞΙΣ.

Ὁ τῇ παρονομασίᾳ λογιζόμενος, ὃν τὸ Α ἐμφανί-
τω, διὰ τῆ συμπλέκτεως τῇ ἀριθμητῇ πεπλατυ-
σασθῆτω. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ἐντελεθὲν γινόμενον, οἷον
τὸ κατὰ τὸ φ, τὸ ζητούμενον ὁλόκληρον εἴαι τῆς κατὰ
τὸ Π δοθείσης ἐκθέσεως.

ΛΕΞΙΣ.

Ἔγω γὰρ ὕπερβολὴ ἡ ΓΝ, (Πίν. 5. κ. 1.) ἥς Ἀσύμ-
πτωται αἱ ΑΥ, ΑΖ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ=α, ἡ δὲ ΒΓ ἡ τῇ
ΑΥ παρὰ ἑλθούσα β, ἡ δὲ ΒΔ=χ. εἰληφθώσαν δὲ αἱ
ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ, ΑΦ, ΑΖ συνεχῶς ἀνάλογον. καὶ ἐπὶ ἡ
ΑΒ=α, ἡ μὲν ἄρα ΑΔ=α+χ, ἡ δὲ ΑΓ= $\frac{1}{\alpha} \alpha + \chi$,
ἡ δὲ ΑΦ= $\frac{1}{\alpha^2} \alpha + \chi^3$, ἡ δὲ ΑΖ= $\frac{1}{\alpha^3} \alpha + \chi^4$, ἰαίν

ἐν ληφ. οὗ τὰ δ, ε, φ, ζ σημαῖα τῶν Α, Β, Φ, Ζ. ἰγγύτα-
τα, ὡς αὐτῶν ἡ μὲν δΑ τοῦ ἀπειροσίου τῆς ΑΑ, ἡ δ' εἰς τῆς
ΑΒ, ἡ δὲ φΦ τῆς ΑΦ, ἡ δὲ ζΖ τῆς ΑΖ. διὸ ἡ μὲν
δΑ=δΧ, ἡ δὲ εΒ=εΧ, α+χ, εδχ, ἡ δὲ φΦ=φΧ,
α+χ², εδχ, ἡ δὲ ζΖ=ζΧ, α+χ³, εδχ, αχ²θεωρῶν
α³

δι' τῶν μὲν δμ, ΑΚ, ελ, ΕΛ, φμ, ΦΜ, ζν, ΖΝ τῶν ΑΨ
παραπλήσιων, τῶν δὲ ΚΟ, ΑΖ, ΜΠ, ΝΞ τῆς ΑΖ, ὡς αὐτῶν
τοῦ β. ἴσων ἐκείνῃ τῶν ἐν τοῖς Ι, Κ, Α, Μ (Πιν. ν.) ἐκ-
δόσεων, (ὅ. αβγ. τῆ Ι. βιβλ.). διὸ ἡ μὲν ΚΑ ἴση
τοῖς ἐν τῇ Ν, ἡ δὲ ΕΛ τοῖς ἐν τῇ Ξ, ἡ δὲ ΦΜ
ἴση τοῖς ἐν τῇ Ο, ἡ δὲ ΖΝ τοῖς κατὰ τὸ Η. ὅθεν τὸ
μὲν δΚ ἐκείνου ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β' τῇ δὲ εΛ, τοῖς
κατὰ τὸ Δ'. τὸ δὲ ΦΜ, τοῖς κατὰ τὸ Γ'. τὸ δὲ ζΝ, τοῖς
κατὰ τὸ Υ. ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν δΚ (Πιν. § α. 1.) τοῦ ἀπειρο-
σίου ἐστὶ τῷ ΕΒΑΚ μικτογράφῳ, τὸ δὲ εΛ τῇ ΕΒΕΛ,
τὸ δὲ φΜ τῇ ΕΦΜ, τὸ δὲ ζΝ τῇ ΕΖΝ, (δια-
φέρεισι γὰρ τῶν ἀπειροσίων αὐτῶν τοῖς τετραγωνίοις κικ,
λλλ, μμμ, ννν), τῶν ἄρα μικτογράφων τῶντων τοῦ
ἀπειροσίου ἐμφαίνονται ὑπὸ τῶν ἐν τοῖς Β, Δ, Γ, Υ ἐκδό-
σεων, (Πιν. ν.) ὥστε εἰ ἐκθέσμεν αὐτῶν ἀριθμητικὸν λόγον
πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι. καὶ τὰ αὐτῶν ἄρα ὁλόκληρα, εἴτε
τὰ ερημένα μικτογράμματα ἀριθμητικὸν ἔχουσι λόγον,
ἥτοι ὅν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4. διὸ οἱ λογάριθμοι εἰσι
τῶν ἀποτετμημένων ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΦ, ΑΖ. (*) καὶ τὰ
ἀπειροσίου ἄρα τῶν μικτογράφων, ἀπειροσά εἰσι τῶν
λογαριθμῶν τῶν ἀποτετμημένων. ἐπεὶ δὲ τῆς μὲν ἀπο-
τετμημένης ΑΔ λογάριθμός ἐστι τὸ λ. α+χ' τῆς δὲ
Ξ 3 ΑΕ,

(*) Κατὰ τὸν Η'. ἱστ. τὸ Υ. τῆς Ἀριθμ. βιβλ. τὸν
ἐν σελ. 217.

ΑΕ, τὸ $\lambda \frac{1}{\alpha} \overline{\alpha + \chi^2}$, τῆς δὲ ΛΦ τὸ $\lambda \frac{1}{\alpha^2} \overline{\alpha + \chi^2}$

τῆς δὲ ΑΖ, τὸ $\lambda \frac{1}{\alpha^3} \overline{\alpha + \chi^4}$, αἱ κατὰ τὰ Φ, Χ, Ψ, Ω

πρακύνψαι ἐξισώσεις, τῶν ἀπειροσῶν τῶν λογαρίθμων διὰ τῆ Δ σημειωθέντων. ἔκιν τῶν α καὶ β ὡς μονάδις ληφθέντων, καὶ τὸ ὁλοκλήρον διὰ τῆ Ο σημειωθέντος, ἔσται τὰ ὁλοκλήρα τῶν ἐν τοῖς Φ, Χ, Ψ, Ω ἐξισώσεων ἢ ἐν τοῖς α, β, γ, δ. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι πάσης κλάσματις ἀπειροσῆς ἐκθέσεως, ἀριθμητὴν ἔχουσης τὸ ἀπειροσὸν τῆ ὀνομαστῆς, τὸ ὁλοκλήρον αὐτῆς ἐστὶ τὸ γινόμενον ἐκ τῆ συμπεράκτορος τῆ ἀριθμητῆς καὶ τῆ λογαρίθμου τῆ ὀνομαστῆς.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τῆς μὲν κατὰ τὸ ε ἐκθέσεως τὸ ὁλοκλήρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ ζ τῆς δὲ κατὰ τὸ η, τὸ κατὰ τὸ θ τῆς δὲ κατὰ τὸ ι, τὸ κατὰ τὸ κ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 47. Ἐκ τέτων ρατίων ὁλοκληρωσάμην πᾶσαν ἔκθιν ἐκ δύο μεταβλητῶν συγκειμένην, ὧν ἡ ἑτέρα διὰ τῆ ἀπειροσῆς τῆς ἑτέρας πεπολλαπλασιάσασα, οἷα ἡ ἐν τῇ Α. (πίν. ζ.) ἐπεὶ γὰρ αὕτη ἴση τοῖς ἐν τῇ Β, κἀκεῖ τὰ ἐν αὐτῇ κλάσματα ἴσα τῷ κατὰ τὸ Γ. ληφθέντων ἔν τῶν ὁλοκληρῶν τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως, (§. 46.) ἡ κατὰ τὸ Δ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ε, διὰ τὶ τῶν λογαρίθμων ἰδίωμα. (*) ἔκιν τὸ ὁλοκλήρον τῆς κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως ἐστὶ τὸ γχ. πολλαπλασιασθείσης γὰρ τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως διὰ τῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ κατὰ τὸ Ζ γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Η. ἐξ αὐτῆς δὲ δῆλον ὅτι τὸ ὁλοκλήρον τῆς κατὰ τὸ

(*) Ὅρα τὸ ε'. Θεώρ. τῆ δ'. τῆς Ἀριθμ. βιβλ. τὸ β' σελ. 318.

Ἡ Λ δευτείας ἐκθέσεως ἐστὶ τὸ ἐλόκληρον $\tau\tilde{\epsilon}\delta\zeta$, ἔτεν
 τὸ ζ , ἔπερ ἐστὶ τὸ ἴσον αὐτῷ $\gamma\chi$. ὁμοίως δὲ ἐπεὶ ἡ
 κτκ τὸ Θ ἐκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Γ , συζαθείσης
 τῆς κατὰ τὸ κ , ἡ κατὰ τὸ Λ πορίζεται, ἐξ ἧς ἡ κα-
 τὰ τὸ μ . ἐξ αὐτῆς δὲ δῆλον, ὅτι τὸ τῆς κατὰ τὸ
 Θ ἐκθέσεως ἐλόκληρον ἐστὶ τὸ χ . τῆς γὰρ κατὰ τὸ μ
 ἱερώσεως διὰ τῆς γ πολλαπλασιασθείσης, ἡ κατὰ τὸ
 κ προκύπτει. ταύτης δὲ διὰ τῆς κατὰ τὸ κ πολλα-
 πλασιασθείσης, ἡ κατὰ τὸ ξ γίνεται, ἐξ ἧς δῆλον ἔστι
 τὸ ἐλόκληρον $\tau\tilde{\epsilon}\delta\zeta$, ἔτεν τὸ ζ , τῆς χ , τὸ γ
 ἐλόκληρόν ἐστι τῆς κατὰ τὸ Θ ἐκθέσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 48. Ἰστέον, ὅτι αἱ εἰρημέναι (§. 46.) ἐκθέσεις
 τῇ ἄλλως ἐλόκληρῶνται, τῆς χ διὰ Σειρᾶς ἐξ ἀπεί-
 ρου συγκεκλιμένης ὄρων, πορίζομένης τῇ τῆς ἀξιομητῆ
 κτκ διὰ τῆς ἐνταυτῆ. οἷον τῆς δὲ τῆς ἐκθέσεως
 $\beta\chi$, ἴσης ἔσης τῇ κατὰ τὸ Θ ἀπείρῳ Σειρᾶ, τὸ
 ἐλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ μ .

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 49. Ὅλη ἄρα ἡ κατὰ τὸ μ Σειρὰ ἴση τῇ
 $\beta\chi + \chi$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 50. Εἰσὶ τινες κλασματικαὶ ἐκθέσεις ταῖς εἰρη-
 μέναις (§. 46.) ἀνέμιοι, μεθόδοις δέτισιν ὁμοίαι αὐ-
 τῶν κατασταθῶσαι ἐλόκληρῶνται.

ME

ΜΕΘΟΔΟΣ Α'.

§ 51. Κρίνω ἢ κατὰ τὸ Ρ ἐκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Σ δύοι κλάσμασιν, ἐν οἷς τὰ Α, D, c ἀγνοῦνται. ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἢ κατὰ τὸ Τ γνίσθαι. ἔκῃν τὸ μὲν Α+D ἴσον τῷ ἔδενι, ὡς ἐν τῷ Τ ἰσχύεται, τὸ δὲ Dc—Ac τῷ ἐν τῷ Φ, τὸ δὲ —c² τῷ ἢ τῷ Χ. (ἀλλ' οὐ γὰρ ἐκ αὐτῶν τὰ κατὰ τὸ Σ δύο κλάσματα ἴσα εἶναι τῷ κατὰ τὸ Ρ.) ἐκ μὲν ἔν τῆς κατὰ τὸ Τ ἐξισώσεως ἢ κατὰ τὸ Ψ γνίσθαι, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Χ ἢ κατὰ τὸ Ω, ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῶν κατὰ τὸ Τ καὶ Φ ἢ κατὰ τὸ α, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ β, ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ γ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ψ, ἢ κατὰ τὸ δ. τεθέντων ἔν ἐν τῇ κατὰ τὸ Σ ἐξισώσει ἀντὶ τῶν Α, D, c τῶν ἀρτι εὐρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἢ κατὰ τὸ ε ἐξισώσεις γνίσθαι, ἧς αἱ ἐκθεσεις ὁμοίαι ταῖς εἰρημέναις. (§. 46.) τῶν δὲ τὰ ἐλόκληρα τὰ κατὰ τὸ ζ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 52. Ἐάν μὲν τὸ α² καταφατικὸν ᾖ, τὸ c = $\sqrt{\alpha^2}$, τετέστιν τὸ c ἴσον ἐπιπλάσῳ μεγέθει. (§. 42. τῆ 1. βιβλ.) ἰάν δὲ, ἀποφατικὸν, τὸ c = $\sqrt{\alpha^2}$ α. ὅπερ ἐστὶ πραγματικὸν μέγεθος.

ΜΕΘΟΔΟΣ Β'.

§. 53. Ἐτω ἐλόκληροτέρα ἢ κατὰ τὸ Α (πίν. η.) ἐκθεσις. κρίνω τὸ Χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β. ἔκῃν τῆς ἐξισώσεως ταύτης τῶν ἀπεροσῶν ληφθέντων, ἢ κατὰ τὸ Γ γνίσθαι. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἢ κατὰ τὸ Δ. ἐξ ἧς καὶ τῆς κατὰ τὸ Γ διὰ τῆ 3^α πλάσιαθείσης ἢ κατὰ τὸ Ε, ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ Ζ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἢ κατὰ τὸ Η

Η, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Θ. ἐπὶ δὲ τὸ $\frac{\delta\gamma}{2 \cdot \gamma^2 - 2\alpha^2}$ ἴσον

τοῖς κατὰ τὸ Ι, (διὰ τῆς προλαβέσης εὐρήται μεθόδου) ἡ ἄρα προτεθεισα ἐκθεσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Κ, ὧν τὰ ἐλόκληρα τὰ κατὰ τὸ Λ' (φ. 46.) τεθειμένων δὲ ἀντὶ τοῦ γ καὶ τοῦ γ^2 τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐξισώσεως περιζομένων, τὰ κατὰ τὸ Μ. τὰ κατὰ τὸ Μ ἄρα τὰ ζητούμενα ὁλόκληρα εἰσι τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως.

ΜΕΘΟΔΟΣ Γ'.

§. 54. Ἐστω ὁλοκληροτέρα ἡ κατὰ τὸ Ν ἐκθεσις. ἐπὶ ἔν ὁ ὀνομασῆς αὐτῆς μέρος τετραγώνου περιέχεται, πεπληρωθῶ τὸ ἑλπίπον, ὅτεν προκείσθω τὸ $\frac{1}{4} \gamma^2$,

ἅμα δὲ καὶ ἀφγρήθω, ὅπως ἂν μηδεμίαν μεταβολὴν πάθῃ ἡ ἐκθεσις. ἐκὲν αὕτη ἴση ἔσται τοῖς κατὰ τὸ Ξ. τεθίντες δὲ τῷ μὲν Ζ ἴσος τοῖς κατὰ τὸ Ο, τῷ δὲ ϵ^2 τοῖς κατὰ τὸ Η, ἴση ἔσεται ἡ αὐτὴ ἐκθεσις τοῖς κατὰ τὸ Ρ. καὶ ἐπὶ τῷ $\frac{\alpha\delta\gamma}{\gamma^2 - 1 - \epsilon^2}$ τὸ ἐλόκληρον

ῥῆλον, (φ. 51.) γνωστὸν ἄρα ἔσται καὶ τὸ τῆς δοθείσης ἐκθέσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 55. Καὶ πᾶσα δὲ ἀπειροσὴ κλασματιώδης ἐκθεσις, ἧς ὁ μὲν ἀριθμητὴς ἀπλὴν ἀπειροσὴν ἐστὶ, γνωστὸν ὅπως ἐν συμπράκτορα ἔχον, ὁ δὲ ὀνομασῆς τὸ γινόμενον ἐκ δύο τυχόντων πολλαπλασιασῶν, μεταβλητὰ περιεχόντων, ὧν οἱ ἐκθεται τῷ 3 ἐλάσσονες, διὰ τῆς πρώτης μεθόδου (φ. 51.) ὁλοκληρωθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 56. Οὗν, εἰάν ἡ κατὰ τὸ Α (Πίν. 9.) ἐκθεσις ἴση ᾖ τοῖς ἐν ταῖς Β κλάσμασιν, ἡ κατὰ τὸ Γ ἐξίσωσις γίνεται. ἔξ ἧς αἱ ἐν τοῖς Δ, Ε, Ζ, Η. καὶ ἐκ μὲν τῆς κατὰ τὸ Δ ἡ κατὰ τὸ Θ, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ε, καὶ τῆς κατὰ τὸ Θ ἡ κατὰ τὸ Ι, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ζ ἡ κατὰ τὸ Κ, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Η ἡ κατὰ τὸ Λ· ἔξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ι ἡ κατὰ τὸ Μ, ἔξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν· ἔξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Κ, ἡ κατὰ τὸ Ξ· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Θ, ἡ κατὰ τὸ Ο, ἔξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Π· ἔξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Θ, ἡ κατὰ τὸ Ρ· ὁμοίως ἔξ αὐτῆς τῆς κατὰ τὸ Π καὶ τῆς κατὰ τὸ Ν, ἡ κατὰ τὸ Σ· ἔξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Π καὶ Ι, ἡ κατὰ τὸ Τ. τεθέντων ὅν ἐστι κατὰ τὸ Β ἐξίσωσις ἀντὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ τῶν ὅτι εὐρεθέντων αὐτοῖς ἴσων, ἡ κατὰ τὸ Υ γίνεται, ἡ αὐτὴ ὅσα τῇ κατὰ τὸ Φ. ἧς τὰ ἐλόκληρα τὰ ἐν τῇ Χ, (§. 46, 51.) πλὴν τῶν ἐχάσθη αὐτῆς μέρους, εἴπεν τῷ δχ. ὅπερ τετάρτη ἀνάλογόν ἐστι τῷ

$$4\chi^2 + \alpha^2$$

$4\alpha^2$, τῆς 1, καὶ τόξου κύκλου, (ὄρα τὸ ἐξῆς §. 67.) ἡμιδιάμετρον μὲν ἔχοντος τὸ α, ἐφαπτομένην δὲ τὸ γ. διὸ ἀπὸ τῶν κατὰ τὸ Χ ἐλοκλήρων ἀφαιρεθείσης τῆς εἰρημένης τετάρτης αἰαλόγη, τὸ λοιπὸν ἐστὶ τὸ ἐλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α διθείσης ἐκθείσεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 57. Ἐάν δὲ τῆς εἰρημένης κλασματικῶδες ἐκθείσεως (§. 55.) πεπολλαπλασιασμένος ᾖ διὰ τῆς ἐκασθεν τῆς ἀμεταβλήτου Δυνάμεως, ἥτοι ὁ ἀριθμητικὸς ὡςπερ τῆς κατὰ τὸ Ψ, ἡ ὁ ονομασῆς, καθάπερ ὁ τῆς κατὰ τὸ Ω, εὐρετιόν τὰ τῆς ἐκθείσεως ἐλόκληρον.

ρα, (§. 56.) μὴ λογιθῆσης τῆς πολλαπλασιαζέσης ἢ διαιρέσης Δυνάμεως, εἴτα δι' αὐτῆς πολλαπλασιασίων αὐτὰ, ἢ διαιρετέον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 58. Τὴν κατὰ τὸ Α (Πίν. ι.) δοθεῖσαν ἀπειροσὴν λογαριθμικὴν ἐκθεσιν ὀλοκληρώσῃ.

Ἐμφανίτω τὸ μ ἀριθμὸν ἐλόκληρον καταφατικόν, ἰμοίως καὶ τὸ π. κείσθω δὲ τὸ ζητούμενον ὀλόκληρον εἶαι τὸ κατὰ τὸ Β, ἐν ᾧ τὰ f, m, e ἀγνώστα λογιζέσθω. ἰάν ἔν τῷτο τὸ ἀκριβὲς ὀλόκληρον ᾗ, τὰ ἀπειροσὴ αὐτῷ, ἅπερ εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ Γ ἴσα ἔσονται τῇ κατὰ τὸ Α δεθείσῃ ἐκθέσει. τέτων ἔν κειμένων, αἱ ἐν τοῖς Δ, Ε, Ζ συσταθήσονται ἐξισώσεις. καὶ ἐκ μὲν τῆς κατὰ τὸ Ε ἢ κατὰ τὸ Η ἐξισώσεις γίνεσθαι, ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Δ, ἢ κατὰ τὸ Θ. ἔκκ' ἢ κατὰ τὸ Β ἐκθεσις εἰς τὴν κατὰ τὸ Ι μεταβληθήσεται, ἵε-δίττων ἐν αὐτῇ ἀντὶ τῶν f, m, e τῶν ἀρτίως εὐρεθέντων αὐτοῖς ἴσων. αὕτη ἔν ὑπῆρχεν ἂν τὸ ζητούμενον ὀλόκληρον, ἔπερ τὰ κατὰ τὸ Γ ἀπαιροσὴ αὐτῆς ἴσα ἵτύγχανε τῇ κατὰ τὸ Α δεθείσῃ ἐκθέσει. ἐπεὶ δὲ ὑπερέχει αὕτην κατὰ τὸ ἕτερον τῶν μερῶν, εἴτην τὸ εfχ^m δχ λχ^{e-1}, ἀφαιρετέον ἄρα τὸ τέτε ὀλόκληρον ἀπὸ

χ

τῆς κατὰ τὸ Ι ἐκθέσεως, ὅπως ἂν τὸ ζητούμενον προκύψῃ ἐλόκληρον. τέτε ἔν ἀφαιρεθέντος, (ἀντὶ τῶν e, f, m τὰ ἀρτὶ εὐρεθέντα ἴσα αὐτοῖς τίθενται) ἢ κατὰ τὸ Κ ἐξισώσεις γίνεσθαι. ἰάν μὲν ἔν τὸ $\mu - 1 = 0$, ἢ ἀφαιρούσα ἐκθεσις, τετέσιν ἢ κατὰ τὸ Λ, ἴση ἔσῃ τῇ κατὰ τὸ Μ, ὀλόκληρον ἔχει τὸ κατὰ τὸ Ν. (§. 35.) ἀπὸ τὸ ζητούμενον ὀλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκθέσεως εἰς τὸ κατὰ τὸ Ξ. ἰάν δὲ τὸ $\mu - 1 > 0$,
ἵπα-

ἐπαναληπτέον τὴν αὐτὴν πράξιν, ἕως ἂν ὁ τῷ λχ ἐκδέτης ἴσος τῷ μηδενὶ γένηται. οὖν κατέμεινεν πάλιν τῷ ὁλόκληρῳ τῆς κατὰ τὸ Α ἐκδέσεως ἴσος εἶναι τῇ κατὰ τὸ Β ἐκδέσει, ληφθέντων τῶν αὐτῆ ἀπειροσῶν, τῶν ἐν τῷ Ο, αἱ κατὰ τὰ ΙΙ, Ρ, Σ γίνονται ἰσώσεις. ἐξ ὧν πορίζεται τὸ μὲν ιι ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Τ, τὸ δ' εἰ τοῖς κατὰ τὸ Υ. ἔθεν ἡ κατὰ τὸ Β ἐκδέσις εἰς τὴν κατὰ τὸ Φ μετατρέπεται. ἐπειδὴ δὲ τὰ κατὰ τὸ Ο ἀπειροσῶν τῆς κατὰ τὸ Β ἐκδέσεως ὑπερέχουσι τῇ κατὰ τὸ Α ἐκδέσει τῇ κατὰ τὸ Χ ἐκδέσει, ἀφαιρέσειν ἄρα ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Φ ὁλόκληρας αὐτῶν τὸ ὁλόκληρον τῆς ἐν τῷ Χ. ἔκῃν τὸ ὁλόκληρον τῆς ἐν τῷ Α ἐκδέσεως τὸ ἐν τῷ Ψ εἶναι. ἀντὶ δὲ τῶν εϛ, ιι-ι, καὶ ο-ι, τεθέντων ἐν αὐτῇ τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν διὰ τῶν ἰσώσεων ΙΙ, Ρ, Σ πορίζομένων, ἔσται τὸ ἐκτεταμένον ὁλόκληρον τὸ ἐν τῷ Ω. καὶ οὖν μὲν τὸ μ-2=ο, τὸ διαληφθὲν ὁλόκληρον ἴσον εἰς τοῖς κατὰ τὸ α. διὸ τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκδέσεως εἰς τὸ κατὰ τὸ β. εἰάν δὲ τὸ μ-2 > ο, ἴσον εἰς τοῖς κατὰ τὸ γ. τῆς αὐτῆς δὲ πράξεως ἐπαναληφθείσης, ἐυρεθήσεται τὸ ὁλόκληρον τῆς ἀπειροσῆς τῆς ἐν τῇ γ ἐκδέσεως ἴσον τοῖς κατὰ τὸ δ. διὸ τὸ τῆς κατὰ τὸ Α δοθείσης ἐκδέσεως ζητούμενον ὁλόκληρον τοῖς κατὰ τὸ ε ἴσον εἰς. διὰ τῆς αὐτῆς δὲ πράξεως ἐυρεθὲν πάλιν τὸ ὁλόκληρον τῆς ἀπειροσῆς μέρος τῆς κατὰ τὸ ζ καὶ ταῦτα ἕως ἂν ὁ τῷ λχ ἐκδέτης ἴσος τῷ μηδενὶ γένηται.

Ἐμφανέτω δὲ τὸ μ ἐν τῇ κατὰ τὸ Α δοθείσῃ ἐκδέσει ἀριθμὸν ὁλόκληρον ἀποφατικόν. κείθω δὲ πάλιν τὸ ζητούμενον αὐτῆς ὁλόκληρον εἶναι τὸ κατὰ τὸ Β. ἔκῃν ληφθέντων τῶν ἀπειροσῶν αὐτῆ τῶν κατὰ τὸ Α, (Πίν. ια.) αἱ ἐν τοῖς Β, Γ, Δ ἰσώσεις συνίστανται. ἐξ ὧν πορίζομεθα τὸ μὲν ε ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ εἰς τοῖς κα-

κατὰ τὸ 2, τὸ δὲ m τοῖς κατὰ τὸ Η. διὸ δὴ διὰ τὸν
 προσημένον λόγον τὸ τῆς δοθείσης ἐκθέσεως ὁλόκληρον
 ἔσται τοῖς κατὰ τὸ Θ. καὶ εἰάν μὲν ὁ $\tau\theta$ λχ ἐκ
 θέτης, εἴταιν τὸ $m+1=-1$, τὸ ζητούμενον τῆς δο-
 θέσης ἐκθέσεως ὁλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Ι. εἰάν δὲ
 τὸ $m+1 \geq -$, ἐπαναληπτέον τὴν πράξιν, ἕως ἂν
 τὸ $m+1=-1$. ἐπεὶ δὲ τῆς κατὰ τὸ Ι ἐκθέσεως μέ-
 ρος τὸ κατὰ τὸ Κ ὁλόκληρώσασαι μεθόδῳ ἄλλῃ, τῷ νῦν
 ἔχεται, δηλὸν ὅτι ἐν μέρει ὁλόκληρωται ἡ δοθεῖσα
 ἰνδεσις, ἀποφατικῶς ὄντος τῷ ἐκθέτε τῷ ἐν αὐτῇ λο-
 γαρίθμῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.

§. 59. Ἐστω τὸ μὲν $m=2$, τὸ δὲ π ἀριθμὸς ὁποιο-
 ῦν, οἷον ὁ 3. ἔκῃν ἢ κατὰ τὸ Α δοθεῖσα ἐκθεσις
 (πίν. Ι.) τὴν κατὰ τὸ Α ἐμφαίνει. ἐπεὶ δὲ τὰ ἀπερὶστα
 (πίν. Ια.) τῷ ἤδη τεθέντος ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α ἐκθέ-
 σεως εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ Μ, ἔσεται τὸ μὲν $m\pi=\alpha$,
 τὸ δὲ $m-1=3$, τὸ δὲ $e=2$. διὸ τὸ $f=\alpha$. ἔκῃν

τὸ ὁλόκληρον τῆς κατὰ τὸ Α ἐκθέσεως ἐστὶ τὸ ἐν τοῖς
 κατὰ τὸ Ν. τῆς αὐτῆς δὲ πράξεως ἐπαναληφθείσης,
 τὸ ἐν τοῖς κατὰ τὸ Ξ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

§. 60. Ἐστω τὸ μὲν $m=-2$, τὸ δὲ $\pi=3$. ἔκῃν
 ἢ μὲν δοθεῖσα ἐκθεσις τὴν κατὰ τὸ Ο ἐμφαίνει, ἢ δὲ
 κατὰ τὸ Ν τὴν κατὰ τὸ π, ἢ δὲ κατὰ τὸ Ξ τὴν
 κατὰ τὸ Ρ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 61. Ἐάν δὲ τὸ μ κλασματικὴν ἐμφαίνειν ἀριθμὸν,
 οἷον, εἰάν τὸ $\mu=\frac{1}{2}$, ἢ δοθεῖσα ἐκθεσις τὴν κατὰ τὸ

Σημαίνει· εξακτέον ταιγαρεῖν πρῶτον τὴν τῷ λχ¹ τετραγωνικὴν ρίζαν, εἰθ' ὅπως ἐλοκληρωτέον τὴν ἐκθεσιν. ἐπεὶ δὲ τὸ λχ εἰς τετράγωνόν ἐστιν, ἐδὲ ἄλλη τις δύναμις, ἢ τῆς ρίζης ἐξαγωγή ἐπ' ἀπειρεν περαχθήσεται. ἐξ ἧς δὴλον, ὅτι τὸ τῆς κατὰ τὸ Σ ἐκθέσεως ἐλοκληρον Σεισά ἐστιν ἀπειρομερής.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 62. Ἐάν μὲν ἐλοκληρον καταφατικὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνῃ τὸ μ, ἐλοκληρωθήσεται ἡ δοθεῖσα ἐκθεσις, τεθέντος τῷ ἐλοκληρῶ αὐτῆς ἴσος τοῖς κατὰ τὸ Τ· εἰάν δὲ ἐλοκληρον ἀποφατικόν, τοῖς κατὰ τὸ Τ. λεγόντων γὰρ τῶν ἀπειροσῶν αὐτῶν, εὐρεθήσονται τὰ ἴσα τοῖς ἀγνώστοις f, g, h, l, διὰ τῶν α, π, μ ἐμφαινόμενα, καθάπερ καὶ ἐν τῷ περὶ κειμένῳ προβλήματι (§. 58.) τέτων δὲ ἐν τοῖς κατὰ τὸ Τ, ἢ Υ ὑποθετικοῖς ἐλοκληρῶσις τεθέντων, τὰ ζητούμενα εὐρεθήσεται ἐλοκληρῶ. καὶ εἰάν μὲν καταφατικὸν ᾖ τὸ μ τοσαῦτα μέρη ὑποθετικῶν ἐλοκληρῶν συγκροτείδωσαν, ὅσα δεύσειεν ἂν πρὸς τὸ περιέχειν τὸ ἔχον μέρη τὸ λχ μετὰ ἐκθέτε ἴσος τῷ ο· εἰάν δὲ ἀποφατικόν, μετὰ ἐκθέτε ἴσος τῷ — 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5'.

§. 63. Τῆς κατὰ τὸ Φ δοφείσης ἀπειροσῆς ἐκθέσεως εὐρεῖν τὸ ἐλοκληρον.

Ἐάν μὲν τὸ μ ἀριθμὸν ἐλοκληρον καταφατικὸν ἐμφαίνῃ, ἀρθέντος τῷ $\epsilon + \zeta\chi$ ἐπὶ τὴν ὑπὸ τῷ μ σημειωμένην Δύναμιν, καὶ ἑκάστη τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῷ αχ^πδχ πολλαπλασιασθέντος, ἑκάστον τῶν γινόμενων ἐλο

ἐλοκληρωθήσεται. (§. 34.) τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν προ-
κυπτόντων ἐλοκληρῶν ἐστὶ τὸ ζητούμενον ὀλόκληρον.

Ἐάν δὲ τὸ μ ἀποφατικόν, κείδω τὸ ζητούμενον
ἐλοκληρῶν εἶναι τὸ κατὰ τὸ χ. εἰληφθῶ δὲ τὰ ἀπει-
ροσά αὐτῆς, ὥς περ εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ ψ. ἐκὼν αὖ κα-
τὰ τὸ Ω, α, β συσαθήσονται ἐξισώσεις. ἐξ ὧν πα-
ριζόμεθα τὸ μὲν α ἴσον τοῖς κατὰ τὸ γ, τὸ δὲ β τοῖς
κατὰ τὸ δ, τὸ δὲ γ τοῖς κατὰ τὸ ε. διὸ τὸ ζητούμε-
νον ὀλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ ζ, (ὄρα τὸ 58 §.)
εἰάν δὴ θεν ὁ τῷ $\epsilon + \zeta \chi''$ ἐκθείτης, ἥτοι τὸ $\mu + 1 = -1$.
ἐκ γὰρ τῆς κατὰ τὸ ζ ἢ κατὰ τὸ η προκίψει ἐξί-
σωσις, ἥς τὸ ἔχαστον μέρος ὀλοκληρωθήσεται διὰ τῆς
πρειρημένης (§. 57.) μεθόδου· εἰάν δὲ τὸ $\mu + 1 \geq -1$,
ἐπαναληπτίον τὴν αὐτὴν πράξιν, ἄχρις ὅτου τὸ $\mu + 1 = -1$ γίνηται.

Ἐάν δὲ τὸ μ κεκλασμένον ἐμφαίνῃ ἀριθμὸν, κείδω
τὸ $\epsilon + \zeta \chi''$ ἴσον τῷ ἐν τῷ Α. (πίν. ιβ.) ἐκ τῆς ἐξισώσεως
δὲ ταύτης ἢ κατὰ τὸ Β γίνεσθαι, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Γ, ἐξ
αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Δ, κληφθέντων τῶν ἀπειροσῶν
ἢ κατὰ τὸ Ε. (πίν. ια.) ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς δευτέ-
ρης τῆς κατὰ τὸ Φ, ἢ κατὰ τὸ Ζ. ἥτις δὴ εἰάν μὲν
ἐλοκληρῶν ἀριθμὸν καταφατικὸν ἐμφαίνῃ τὸ $\pi + 1 = 1$,
ἐλοκληρωθήσεται εἰάν δὲ ἀποφατικόν, ἔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α:

§. 64. Ἰστίον, ὅτι πάσης μὲν δοθείσης ἐκθείσεως τὸ
ὑπεροσὸν εὐρεῖν δυνατόν, ἐμὴν δὲ καὶ τὸ ἐλοκληρῶν.
ὡς πρὶν

ὥσπερ καὶ παντὲς ἀριθμὸς καὶ ἐκθέσεως τὴν Δύναμη,
ἐμὴν δὲ καὶ τὴν τῆς Δυνάμεως ρίζαν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.

§. 65. Ἔτι εἰδέναι δεῖ, ὅτι τινὲς μὲν τῶν ἀπαρα-
στῶν ἐκθέσεων ἐντελῶς ὁλοκληρῶνται· αἱ δὲ τοιαύται
Ἀλγεβραϊκῶς ὁλοκληρῶσαι λέγονται· τινὲς δὲ ἢ
μίρει· ἐπεισάγονται γὰρ ἐν τοῖς τῷ ὁλοκλήρῳ μέρει λο-
γαριθμοί, ἢ τόξα κύκλου, διὸ τῷ κύκλῳ αὐτῷ ἀνέ-
γχεσθαι φασι· τινὲς δὲ μόνον διὰ τόξων κύκλου καὶ Ὑπερ-
βολῆς· διὸ τῷ κύκλῳ ἢ τῇ Ὑπερβολῇ ἀνάγεσθαι λέ-
γονται. (ε)

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 66. Οἶον, τῆς μὲν κατὰ τὸ Η ἐκθέσεως (πίν. β.)
τὸ ἀκριβὲς ὁλόκληρον ἐστὶ τὸ κατὰ τὸ Θ. τῆς δὲ κατὰ
τὸ Ι, τὸ κατὰ τὸ Κ, ἔ μέρος λογαριθμὸς ἐστὶ τῆς δὲ
κατὰ Λ, τὸ κατὰ τὸ Μ, ἔ μέρος ἰσὺς κύκλου. (πίν. θ.)
τῆς δὲ κατὰ τὸ Α τὸ κατὰ τὸ Χ, ἔ μέρος μὲν διὰ τῶν
λογαριθμῶν ὁλοκληρῶται, μέρος δὲ κύκλου τόξον ἐστὶ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

§. 67. Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΗΕ, ἔ κέντρον μὲν τὸ
Κ, (πίν. ζ. χ. 2.) Διάμετρος δὲ ἡ ΑΕ, τεταγμέναι δὲ ἐν
αὐτῷ ἐγγιστα ἀλλήλων αἱ ΓΗ, ΔΖ. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς Ζ
ἤχθω ἡ ΖΙ τῇ ΑΕ παράλληλος, ἀπὸ δὲ τῆς κέντρου Κ
ἐπὶ τὰ Η, Ζ σημεῖα ἵπεξεύχθωσαν αἱ ΚΗ, ΚΖ. καὶ
ἔστω ἡ μὲν $ΑΚ = α$, ἡ δὲ $ΚΓ = χ$, ἡ δὲ $ΓΔ = ιζ$.
δχ. ἔκων ἡ μὲν $ΑΓ = α + χ$, ἡ δὲ $ΕΓ = α - χ$ διὸ
ἡ μὲν $ΓΗ = \sqrt{α^2 - χ^2}$, τὸ δὲ ἀπεροσὸν αὐτῆς, ἄν

(ε) Ὅσον τὰ ἐξῆς §. 67 καὶ §. 68.

ἡ ΗΙ (πίν. β.) ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ν. ἐπεὶ δὲ τὸ $\overline{ΗΖ}^2 = \overline{ΗΙ}^2 + \overline{ΙΖ}^2$, (ἀπειροσόν γὰρ ὄν τὸ ΗΖ τόξον ὡς ἐυθεία λογίζεται) ἔστιν ἄρα τὸ $\overline{ΗΖ}^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Σ. διὸ τὸ ΗΖ τόξον, τὸ τῷ ΑΖ ἀπειροσόν, ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ο.

Ἐπεὶ δὲ τὸ ΓΖ ὀρθογώνιον ὡς ἴσον λογίζεται τῷ ΓΗΖΔ χωρίῳ, (ἀλογεῖται γὰρ τὸ ἀπειροσόν τριγωνίδιον ΗΙΖ) ἔστι δὲ τὸ ΓΗΖΔ ἀπειροσόν τῷ ΑΖΔ χωρίῳ, καὶ τὸ ΓΖ ἄρα ὀρθογώνιον τὸ ἀπειροσόν ἐστὶ τῷ αὐτῷ ΑΖΔ χωρίῳ, ὅπερ διὰ τῶν ἐν τοῖς π ἐμφαίνεται.

Ἔστι δὲ καὶ τῷ ΚΖΑ τομέως ἀπειροσόν ὁ ΚΖΗ τριμύς, ὅστις ἴσος ἐστὶ τοῖς κατὰ τὸ Ρ.

Εἰάν δὲ ἡ ἀποτετμημένη ἀπὸ τῷ τῆς διαμέτρου πύρατος ληφθῇ, εἴτην ἴαν ἡ $ΕΔ = Χ$, ἔσται ἡ $ΑΔ = α - Χ$. διὸ ἡ μὲν $ΔΖ = \sqrt{2αΧ - Χ^2}$, τὸ δὲ ἀπειροσόν $ΗΙ = \frac{αδΧ - ΧδΧ}{\sqrt{2αΧ - Χ^2}}$. ὅθεν τὸ μὲν ΗΖ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Σ. τὸ δὲ ΗΓΔΖ τοῖς κατὰ τὸ Τ, ὁ δὲ ΚΗΖ τοῖς κατὰ τὸ Υ.

Εἰάν δὲ ἐφαπτομένη τῷ κύκλῳ ληφθῇ ἡ ΕΘ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπέσῃ ταῖς ΚΖ, ΚΗ ἐκβληθείσας, ἢ δὲ αὐτὴ ἡ ΕΘ = Χ, ἔσται ἡ $ΘΚ = \sqrt{α^2 + Χ^2}$. καὶ ἔπει ὡς $ΚΘ : ΚΕ :: ΚΖ : ΚΔ$, ἔσται ἄρα ἡ $ΚΔ = \frac{α^2}{\sqrt{α^2 + Χ^2}}$ διὸ ἡ $ΕΔ = α - \frac{α^2}{\sqrt{α^2 + Χ^2}}$. ἔστι δὲ καὶ ὡς $ΚΕ : ΕΘ :: ΚΔ : ΔΖ$. διὸ ἡ $ΔΖ = \frac{αΧ}{\sqrt{α^2 + Χ^2}}$. ἔκθεν τὸ

μὲν ἀπειροσὸν τῆς ΔΖ, ἥτοι ἡ $HI = \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\alpha^2 + \chi^2} \frac{3}{2}$, διὸ δὲ

ΕΔ, εἴτεν ἡ ΓΔ = ΖΙ = $\frac{\alpha^2 \chi \delta \chi}{\alpha^2 + \chi^2} \frac{3}{2}$ διὸ τὸ μὲν ΗΖ

ἴσεν τοῖς κατὰ τὸ Φ, τὸ δὲ ΗΓΔΖ τοῖς κατὰ τὸ Χ,
ὁ δὲ ΚΗΖ τομὲυς τοῖς κατὰ τὸ Ψ.

Οὐκ ἔν ἀπὸ μὲν τῶ κέντρου Κ ληφθεῖσης τῆς ἀπο-
τετμημένης, ἡ μὲν κατὰ τὸ Ο ἐκθέσις ἀπειροσὸν κύ-
κλῳ τόξον ἐμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ Π χωρίον, ἡ δὲ
κατὰ τὸ Ρ τομέα· ἀπὸ δὲ τῆς τῆς διαμέτρου πέρατος,
τόξον μὲν ἡ κατὰ τὸ Σ, χωρίον δὲ ἡ κατὰ τὸ Τ,
τομέα δὲ ἡ κατὰ τὸ Υ· ἀπὸ δὲ τῆς ἐφαπτομένης,
τίξον μὲν ἡ κατὰ τὸ Φ, χωρίον δὲ ἡ κατὰ τὸ Χ,
τομέα δὲ ἡ κατὰ τὸ Ψ. αἱ ἐκθέσεις δὲ αὐταὶ εἰς
ὁλοκληρῶνται. εἰ γὰρ ὁλοκληρῶντο, ἐτετραγωνίζετο ὁ
ὁ κύκλος, τῷ ὅπερ τοῖς μαθηματικοῖς περιπαύσασθαι
αἱ ἐν ἀπειροσῶν ἐκθέσεις, ὧν τὸ ὁλόκληρον εἶναι
ἐμφαίνεται, εἰμὴ διὰ τῶν εἰρημένων ἐκθέσεων, τῷ κύκλῳ
ἐπαναγέσθαι λέγονται. δι' αὐτῶν δὲ ὅπως γινώσκον
γινέσθαι τὴν ἀρετὴν ἐμφαίνει, ἢ ἄλλως πως μὴ ὁλοκληρῶ-
μένη ἐκθέσις. οἷον εἰ μὲν ἀναχθῇ εἰς ἐκθεσιν ἀπεί-
ροσὸν τόξον, κύκλῳ ἐμφαίνουσιν, δηλοῦν, ὅτι τὸ ὁλό-
κληρον αὐτῆς τόξον κύκλῳ σημαίνει, οἷον τὸ ΑΗ· εἰ μὲν
δὲ εἰς ἀπειροσὸν χωρίον, δηλοῖ τὸ ΑΖΔ· εἰ μὲν δὲ εἰς
τομέα, τὸν ΚΑΖ.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'.

§. 68. Ἐστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΙΓ, (πίν. 5. χ. 3.) ἥτις πλα-
για μὲν πλευρὰ ἡ ΔΑ = α, ἡ δὲ ὀρθία = β. εἰληφθῶ δὲ
ἀποτετμημένη ἀπὸ τῶ κέντρου Κ ἡ ΚΜ = χ. ἡ τε

ἐκχθασων ἔγγιστα ἀλλήλων αἱ ΜΙ, ΒΓ. καὶ ἐπιζευ-
 θασῶν τῶν ΚΙ, ΚΓ, ἀπὸ μὲν τῶν Κ καὶ Α ἡχθασαν
 τῇ ΜΙ παρὰλληλοι αἱ ΚΗ, ΑΒ· ἀπὸ δὲ τῶν Γ, Ι, αἱ
 ΓΗ, ΖΙΕ τῇ ΔΒ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήμασι δὲ
 τοῖς ΚΙ, ΚΛ τόξα κύκλου γεγραφθῶ τὰ ΙΡ, ΑΝ. ἔκυν
 ἡ μὲν $MB = IZ = \delta\chi$, ἡ δὲ $\Delta M = \alpha + \chi$, ἡ δὲ
 $\Delta N = \alpha - \chi$. διὸ ἡ τεταγμένη $MI = \sqrt{\beta\chi^2 - \beta\alpha^2}$.

(2) ἐπεὶ δὲ τῇ ΑΙΜ χωρὶς ἀπειροσόν ἐστὶ τὸ ΓΙΜΒ, τῇ
 ἑρθωγάνῃ ΜΖ διαφέρειν τῷ ἀπειροσῷ τριγωνοῖδῳ ΓΙΖ,
 αὐτὸ ἄρα τὸ ΜΖ ἑρθωγώνιον τὸ ἀπειροσόν ἐστὶ τῇ
 ΑΙΜ. ἔκυν τὸ ἀπειροσόν τῇ ὑπερβολικῇ χωρὶς ΑΙΜ
 ἐμφαίνεται ὑπὸ τῶν ἐν τῷ Ω. (πίν. 1β.)

Ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς ΜΙ ἀπειροσόν, εἴτεν ἡ $\Gamma Z =$
 $\beta\chi\delta\chi$ ἐστὶ δὲ τὸ $\Pi^2 = IZ^2 + \Gamma Z^2$, τὸ ἄρα

$$\sqrt{2\alpha\beta\chi^2 - 2\beta\alpha^2}$$

Π ἀπειροσόν ἔξ ὑπερβολικῇ ῥόξῃ ΑΙ ἐμφαίνεται ὑπὸ
 τῶν ἐν τοῖς α.

Ἐπεὶ δὲ ὡς $KM : MI :: KA : AL$, ἥτοι (καμένε τῇ
 $y = MI$.) ὡς $\chi : y :: \alpha : AL$, ἡ ἄρα $AL = \frac{\alpha y}{\chi}$.

ἡς τὸ ἀπειροσόν, εἴτεν ἡ $AO = \frac{\alpha\chi\delta y - \alpha y\delta\chi}{\chi^2}$. ἐστὶ δὲ

καὶ ὡς $KM : KI :: KA : KL$. διὸ ἡ $KL = \frac{\alpha}{\chi} \sqrt{\chi^2 + y^2}$.

ἡ γὰρ $KI = \sqrt{\chi^2 + y^2}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς $KI : KM ::$
 $AO : AN$, (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΙΚΜ, ΟΑΝ ἱσι-

Q 4

γα-

(2) Κατὰ τὴν β'. ἀρίτ. εἰ β'. τμημ. τῶν Κον, τομ. τὴν ἐν
 εἰλ. 130. τῇ β'. τόμ.

γώνων) τὸ ἄρα τόξον $\Lambda\Gamma = \frac{\alpha\chi\delta\eta - \alpha\eta\delta\chi}{\chi\sqrt{\chi^2 + y^2}}$. ἔστι δὲ ἡ

ὥς $\text{ΚΛ} : \Lambda\Gamma :: \text{ΚΙ} : \text{ΙΡ}$. (διὰ τὴν τῶν τομέων $\text{ΚΛ}\Gamma$, ΚΙΡ ὁμοιότητα) τὸ ἄρα ΙΡ τόξον $= \frac{\chi\delta\eta - \eta\delta\chi}{\sqrt{\chi^2 + y^2}}$.

ἄρα κυκλικὸς τομεὺς $\text{ΚΙΡ} = \frac{\chi\delta\eta - \eta\delta\chi}{\sqrt{\chi^2 + y^2}}$. τῷτον δὲ ὑπερβολικὸς τομεὺς ΚΙΙ τῷ ἀπαιροσῶν τριγωνίῳ ΓΙΡ . διὸ ὡς ἴσος αὐτῷ λογιζέται. ἔπειτα δὲ ὁ ΚΓΙ . τὸ ἀπαιροσέν ἐστι τῷ ὑπερβολικῷ τομέως ΚΙΛ . τὸ τῆτις ἄρα ἀπαιροσέν ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆς κατὰ β ἢ κατὰ τὸ γ ἐκθέσεως. ἔστι γὰρ τὸ $y = \text{ΙΜ} = \sqrt{\beta \cdot \chi^2 - \alpha^2}$, ἐξ ὑποθέσεως. ἰσοπλευρὸς δὲ ἔσται τῆς

ὑπερβολῆς τὸ $y = \sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$. διὸ τὸ $\delta y = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}}$. ἀντὶ δὲ τῷ y καὶ δy τεθέντων τῶν ἰσῶν

$\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$ αὐτοῖς ἐν τῇ ἐκθέσει $\frac{\chi\delta\eta - \eta\delta\chi}{2}$, τῇ τὸν ἀπαιροσέν τομέα ἐμφαινέση, ἢ κατὰ τὸ β , ἢ ἢ κατὰ τὸ γ ἐκθέσεις συνίστηται.

Οὐκ ἔν η̄ μὲν κατὰ τὸ Ω ἐκθέσεις χωρίον ἀπαιροσέν ὑπερβολικὸν δηλοῖ, ἢ δὲ κατὰ τὸ α τόξον, ἢ δὲ κατὰ τὸ γ τομέα. τῶν δὲ τῶν ὁλόκληρα ταῖς περιλαμβανέαις εὐρίσκεται μεθόδοις, κειμένης τῆς $\sqrt{\chi^2 - \alpha^2} = \chi - z$ καὶ τὸ μὲν τῆς κατὰ τὸ γ διὰ μόνων λογαριθμῶν ἐμφαίνεται ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ δ ἐκθέσεως. ἢ δὲ τῶν ἐν τοῖς Ω καὶ α διὰ λογαριθμῶν καὶ ἄλλων ὁλοκλήρων ἐκθέσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 69. Αἱ παρ' ἡμῶν διὰ τῶν προλαβόντων προβλημάτων ἐκδοθεῖσαι μέθοδοι τῷ ὁλοκληρῶν, ἔχ' ἀπαιροῦσαι αἱ ἀχρεῖ τῶν νῦν εὐρεθεῖσαι, ἀλλ' αἱ θεμελιώδεις καὶ γενικότεραι ταῖς δὲ λοιπαῖς ἐπιγνώσασθαι φάσιν τὰ ἐν ταῖς περὶ τῶν ἐκδοσμένων βιβλίοις (η) τὰ νῦν ἐπιζητάντι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

§. 70. Πολλὰς τῶν προκειμένων ἐκθέσεων ταῖς διαμφθίσις μεθόδοις ὁλοκληρῶσαι ἀμήχανον, διὰ τὸ ἀπειροσὰ διάφορα περιέχειν, ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς μεταβλητοῖς τῶν γραμμάτων συμμεμιγμένα. διὸ μέθοδοι τινες εὐρησθαι ἴσ' ἴα συμμεμιγμένα ἀπειροσὰ πρῶτον διαζευγνύειν, εἰθ' ὅπως ὁλοκληρῶν. τῶν τινες μὲν εἰδικὰ εἰσι τῇ ἀγχινοῖα καὶ ἱμπειρίᾳ τῷ ἀναλύειν ἐπινοούμεναι, ὀλίγα δὲ τινες γενικὰ καὶ κανόνισιν ὑποκείμεναι, περὶ αὐτῶν ἔν νῦν ῥητέον.

Κ Ε Φ. Δ'.

Περὶ τῶν Μεθόδων τῷ τὰ συμμεμιγμένα ἀπειροσὰ τῶν δοθεῖσων ἐκθέσεων διαζευγνύειν, καὶ μετὰ τὴν διάζευξιν ὁλοκληρῶν.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΙΔΙΚΑΙ.

§. 71. Α'. Τὸ ἐκ τῷ ἑτέρου εἰς τὸ ἕτερον μέρος μετατιθέναι τινὰς τῶν ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκθέσεων. οἷον, ἐν τῇ κατὰ τὸ δ ἐξισώσει τὸ χδγ. ἐκ τούτου γὰρ ἡ

Ο 5

κα-

(b) Τῇ τῷ Βερνουλλί περὶ τῷ τῇ ὁλοκληρώσει ἀναλογισμῷ ποσὴν. τῇ δ. τόμ. τῶν Ἀναλυτικῶν τῷ ὑπὸ Μαρίας Γκατάνο Ἀγρίνης ἐκδοθέντι, τῇ παρὰ Ἰακώβου Ἐρνάτου καὶ Βικεντίου τῷ εἰς αὐτὰ Ἀλγεβραϊκῇ Συνατάγματι.

κατὰ τὸ ε ἰξίσωσις γίνεται, ἥς τὰ ὁλόκληρα (§. 35, 47.) τὰ ἐν τῷ ζ.

§. 72. Β'. Τὸ διελεῖν τὴν δοθεῖσαν ἰξίσωσιν διὰ τινος τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν. οἷον τὴν κατὰ τὸ η διὰ τῆς η^2 . ἐκ τῆς γὰρ ἡ κατὰ τὸ θ πορίζεται ἰξίσωσις, ἥς τὰ ὁλόκληρα (§. 34, 47.) τὰ ἐν τῷ ι.

§. 73. Γ'. Τὸ πολλαπλασιάσαι τὴν δοθεῖσαν ἰξίσωσιν διὰ τινος τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν. οἷον τὴν

1--1

κατὰ τὸ κ διὰ τῆς $\eta\mu$. ὅτω γὰρ ἡ κατὰ λ προκύπτει, ἥς ὁλόκληρα (§. 34, 47.) τὰ κατὰ τὸ μ.

§. 74. Δ'. Τὸ μετὰ τὴν μετάθεσιν, (§. 71.) ἢ τὴν διὰ τινος τῶν ἐν τῇ ἰξίσώσει μεταβλητῶν διαίρεσιν (§. 72.) ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν. οἷον, ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἰξίσώσει (πίν. ιγ.) μετὰ τὴν μετάθεσιν τῆς $\chi^2 y^2 \delta \chi^2$ καὶ τὴν διὰ τῆς χ^2 διαίρεσιν, τῆς κατὰ τὸ Β προκύπτουσας ἰξίσωσος ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἡ κατὰ τὸ Γ ἰξίσωσις γίνεται, ἥς τὰ ὁλόκληρα εἰσι τὰ ἐν τῷ Δ. (§. 46, 47.)

§. 75. Ε'. Τὸ μετὰ τὸ πολλαπλασιάσαι τὴν ἰξίσωσιν διὰ τινος τῶν ἐν αὐτῇ μεταβλητῶν, ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν. οἷον μετὰ τὸ πολλαπλασιάσαι τὴν κατὰ τὸ Ε ἰξίσωσιν διὰ τῆς χ , καὶ τὴν κατὰ τὸ Ζ προκύψαι, ἐξαχθείσης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἡ κατὰ τὸ Η γίνεται, ἥς ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ Θ.

§. 76. Σ'. Τὸ τὰ μεταβλητὰ ἑτέρω μεταβλητῇ ἴσα τιθέναι, ἢ ὅτω τὴν δοθεῖσαν ἰξίσωσιν εἰς ἑτέραν μεταβλέπειν. οἷον τῶν ἐν τῇ κατὰ τὸ Ι ἐκθείσει $\chi+y$ ἴσων τεθέντων τῷ κατὰ τὸ Κ, ληφθέντων τῶν ἀποροφῶν, ἡ κατὰ τὸ Λ ἰξίσωσις γίνεται. ἐξ ὧν ὁρᾷται, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Ι ἰξίσωσις ἴση τοῖς κατὰ τὸ Μ, καὶ ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ Ν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 77. Ὁμοίαις μεθόδοις τὰ ἀπείροτα πολλῶν ἄλλων ἐκδόσεων διαζυγνύται, καὶ τὸ ὁλόκληρον αὐτῶν εὐρίσκεται.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΕΝΙΚΑΙ.

§. 78. Α'. Πάσης ἀπείροτης ἐκδόσεως, ἐν ἣ τῶν μὴ μεταβλητῶν ἐκδότης ὁ αὐτός, τῶν δὲ ἀπείροτων τὴν μονάδα ὑπερβαίνει, τὰ ἀπείροτα διαζευχθήσονται, εἰὰν τὸ γινόμενον ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν μεταβλητῶν καὶ γνωστῆς τινὸς ἴσον τεθῇ τῶ γινόμενῳ ἐκ τῆς ἑτέρας τῶν μεταβλητῶν καὶ ἄλλῃ τυχόντος μεταβλητῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 79. Οἷον, δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐξισώσεως, εἰδὼ τὸ $\alpha\gamma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Θ . ἐκὼν τὰ μὲν τῆς κατὰ τὸ Θ ἐξισώσεως τετράγωνα εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ π , τὰ δὲ ἀπείροτα τὰ κατὰ τὸ P . ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἡ ἐξισώσις τεθέντων ἀντὶ τῆς y^2 καὶ $\delta\gamma$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἐκ τῆς κατὰ τὸ Θ καὶ Π ποριζομένων, προκύψει ἡ κατὰ τὸ Σ ἐξισώσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ T γίνεται ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Υ , ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Φ , ἧς τὰ ὁλόκληρα τὰ ἐν τῷ X τεθέντος ἢ ἀντὶ τῆς Z τῆς ἴσας αὐτῷ, ἡ κατὰ τὸ Ψ . ἡ ἡ κατὰ τὸ Ω .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 80. Εἰὰν δὲ ὁ ἐκδότης τῶν ἀπείροτων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τὴν μονάδα ὑπερέχη, ὥς τῶν τῆς κατὰ τὸ α , τεθέντος πάλιν τῆς $\alpha\gamma$ ἴσας τοῖς κατὰ τὸ Θ , ἡ κατὰ τὸ β προκύψει ἐξισώσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ γ γίνεται. καμένει δὲ τῆς $\chi\delta z$ ἴσας ἑτέρῳ ἀπεί-

ροσά, τὰ κατὰ τὸ δ. ἢ κατὰ τὸ ε πορίζεται ἐξισώσεις διὰ τὴν κατὰ τὸ ρ. ἐκ τῆς κατὰ τὸ ε δὲ ἢ κατὰ τὸ ζ' ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ γ. καὶ ε, ἢ κατὰ τὸ η, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ θ. τεθέντες δὲ τῷ δτ ἴσιν τοῖς κατὰ τὸ ι, ἔτεταται τὸ δτ² ἴσον τοῖς κατὰ τὸ κ. τεθέντων ἔν ἐν τῇ κατὰ τὸ θ ἐξισώσει ἀπὸ τῷ δτ καὶ τῷ δτ² τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἢ κατὰ τὸ λ συνίσταται ἐξισώσεις, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ μ γίνεται ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ ο ἢ κατὰ τὸ ν, ἥτις τὰ ὁλοκλήρως ἐστὶ τῆς κατὰ τὸ α. εἰάν γὰρ ἀντὶ τῷ σ καὶ σ² τὰ ἴσα αὐτοῖς τεθῇ, τὰ ἐκ τῆς κατὰ τὸ ι ἐξισώσεως πορίζόμενα, (πίν. ιδ.) ἢ κατὰ τὸ Α αἰσφύσας ἐξισώσεις, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Β, ἐν ᾗ τεθέντων ἀπὸ τῷ δτ καὶ δτ² τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Ο (πίν. ιγ.) ἐξισώσεως προκυπτόντων, ἢ κατὰ τὸ Γ (πίν. ιδ) ἐξισώσεις γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Δ, (πίν. ιγ.) ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ α δοθείσῃ.

§. 81. Β'. Πάσης ἀπειροσῆς ἐκθέσεως, ἐν ᾗ τὸ μὲν μεταβλητὰ ἐκθέτας ἔχει τὴν μονάδα μὴ ὑπερβαίνοντα, τὰ δὲ ἀπειροσὰ τὲς ὁποιοῦν, διατεχόμεναι τὰ ἀπειροσὰ, εἰάν τὸ ἕτερον τῶν μεταβλητῶν ἴσον τεθῇ τῷ ὁλοκλήρῳ τῷ γινομένῳ ἐκ τῷ ἀπειροσῷ τῷ ἑτέρῳ μεταβλητῷ, καὶ ἄλλῃ τυχόντος μεταβλητῷ σοιχείῃ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 82. Οἷον, δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ε (πίν. ιδ.) ἐξισώσεως, κείθω τὸ χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ζ. ἐκ τῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Η ἐξισώσεις γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Θ καὶ ἢ κατὰ τὸ Ι. ἐξ αὐτῶν δὲ, διὰ τὰς κατὰ τὸ Ε καὶ Ζ, ἢ κατὰ τὸ Κ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Λ, καὶ τῶν ἀπειροσῶν ληφθέντων, ἢ κατὰ τὸ Μ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ν, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Ξ, ἢ κατὰ τὸ Ο.

κληρεα ταῖς εἰρημέναις (46, 57.) εὐρεθήσεται. με-
θόδοις.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 83. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι μέθοδοι τῇ τὰ ἀπειροσά
ἀπαιτούμεν ὑπὸ διαφόρων ἐκδοθῆσαι συγγραφέων. (θ)

Κ Ε Φ. Ε'.

Περὶ τῆς εὐρέσεως τῶν ἐκθέσεων, τῶν ἐμ-
φανιστῶν τὴν Ὑφαπτομένην καὶ Ἐφαπ-
τομένην, τὴν Ὑποκάθετον καὶ Κάθετον, καὶ
τὰ σοιχεῖα πάσης καμπύλης, τῶν πρὸς τὸ
τετραγωνίζεν καὶ κυβίζεν συντείνουσιν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 84. Τὸ μὲν τετραγωνίζεν, τὸ εὐθύγραμμον εὐ-
ρίσκειν ἴσον τῷ δοθέντι χωρίῳ σημαίνει· τὸ δὲ κυβίζεν,
πρίσμα ἴσον τῷ δοθέντι στερεῷ· τὸ δὲ σοιχεῖον, ἀπει-
ροσόν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 85. Τὰς ἐκθέσεις εὐρεῖν, τὰς τὴν Ὑφαπτομένην καὶ
Ἐφαπτομένην, τὴν Ὑποκάθετον καὶ Κάθετον καὶ τὸ σοιχεῖον
ἐμφανέσης τῆς ὁποιασὲν καμπύλης, εἶον τῆς ΓΖΨ,
ἢς ἄξων ἡ ΒΡ. (πίν. 5. χ. 4.)

Τετάρχθωσαν ἑγγίς αἱ ἀλλήλων αἱ ΖΔ, ΨΕ. καὶ
ἤχθω ἀπὸ τῆς Ζ Ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ἡ ΒΖΤ καὶ
ἐμβεβλήθω μὲν ἡ ΕΨ κατὰ τὸ συνεχές, ἤχθω δὲ ἀπὸ
τῆς Ζ ἡ μὲν ΖΦ τῇ ΑΡ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΠ τῇ
ΒΤ κάθετος. ἔσω δὲ ἡ μὲν ΓΔ=χ, ἡ δὲ ΔΖ=γ.
ἔκιν ἡ μὲν ΔΕ=δχ, ἡ δὲ ΦΨ=δγ. ἀπειροσὸν γάρ
ἐστιν.

(θ) Ὅρα τὸν 2. Τόμ. τῆς προσημ. (§. 69.) Ἀγνίς καὶ τὸν
3. τῶν Ἀλγεβρικών Βικοντίε τῇ Ἐκτάτῃ.

ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΓΑ, ἡ δὲ ΦΨ τῆς ΔΖ διὰ τὴν τῶν ΖΑ, ΨΕ ὀρθογώνιαν ἰσότητά. λέγω δὴ ἔν, ὅτι τὴν μὲν Ἰσοπεριμέτρην ΒΑ ἰσφαίνει ἡ κατὰ τὸ (1) ἔκδοσις, (π. β. δ.) τὴν δὲ Ἰσοπεριμέτρην ΒΖ ἡ κατὰ τὸ II, τὴν δὲ Ἰσοκέκλιτον ΠΔ, ἡ κατὰ τὸ P, τὴν δὲ Καθίστα ΖΗ ἡ κατὰ τὸ Σ, τὸ δὲ τῆς καμπύλης Στοιχείῃ ΖΨ, αὐτὴν τὸ ἀπειροτόν τῆς ΙΖ, ἡ κατὰ τὸ Γ.

Ἐπεὶ γάρ ἡ ΓΖΨ γωνία, ἡ ὑπὸ τῆς Ἰσοπεριμέτρης καὶ τῆς καμπύλης περιεχομένη πάσης δοθείσης διωρθωμένη γωνίας ἰσάσθων ἔσιν, ἑκατέρω αἷμα τῶν ΖΨΤ, ΖΤΨ ἀπειροτόν ἐστ. καὶ ἡ ΓΨ αἷμα ἀπειροτόν ἐστ τῶν ΖΤ, ΖΨ παραβέβητομένη. αἱ μὲν γάρ γωνίαι τοῖς ἡμίτονοις αὐτῶν ἀνάλογον, τὰ δὲ ἡμίτονα αὐτῶν τῆς γωνίας ὑποτανύσαις πλεοναῖν, (1) ἐπεὶ δὲ αἱ ΓΨ, ΖΨ τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροτά εἰσι διὰ τὴν τῶν σημείων Ζ, Ψ ὀρθογώνιαν, ἡ αἷμα ΓΨ ἀπειροτόν ἐστ τῆς δευτέρας τάξεως. (β. γ.) ἔτι δὲ ἡ ΦΨ ἀπειροτόν τῆς πρώτης τάξεως, διὸ ἡ ΓΦ διαφέρει τῆς ΦΨ κατὰ τὸ τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροτόν ΤΨ. ἔκκ' ἐξεν τὴν ΓΦ ὡς ἴσην ἐκλαμβάνειν (β. α.) τῇ ΦΨ.

Ἐπεὶ δὲ ὡς ΓΦ : ΦΖ :: ΖΔ : ΒΔ, (διὰ τὴν τῶν τριγώνων ΓΦΖ, ΖΔΒ ὁμοιότητα) ἔτσι δὴ αἷμα καὶ ὡς ΨΦ : ΦΖ :: ΖΔ : ΒΔ, ἥτοι ὡς δγ : δχ :: γ : ΒΔ. ἔξ' αὐτοῦ δὴλον, ὅτι ἡ ΒΔ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ο.

Ἔστι δὲ καὶ τὸ $BZ^2 = ZA^2 + BA^2$, αὐτὴν τὸ $BZ^2 = \gamma^2 + \frac{\mu^2 \delta \chi^2}{\delta \gamma^2}$, διὸ ἡ ΒΖ ἴση τοῖς κατὰ τὸ II.

Κα)

(1) Ὁρμ. Θεώρ. β. τῷ α'. τῆς Τριγων. βιβ. τὸ Ιν νικ. 64 καὶ β'. τέμ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς $Z\Phi : \Phi\Gamma :: Z\Delta : \Delta\P$, (διὰ τὴν τῶν $\Gamma\Phi\Delta$, $Z\Delta\P$ τριγώνων ὁμοιότητά) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς $Z\Phi : \Phi\P :: Z\Delta : \Delta\P$, ἤτοι ὡς $\delta\chi : \delta\gamma :: \gamma : \Delta\P$. ἡ ἄρα $\Pi\Delta$ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Γ .

Ἐπεὶ δὲ $Z\P^2 = Z\Delta^2 + \Pi\Delta^2$, διὸ καὶ $Z\P$ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Σ .

Ἐπεὶ δὲ τὸ $Z\Gamma^2 = Z\Phi^2 + \Gamma\Phi^2 = Z\Phi^2 + \Phi\P^2$, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς χορδῆς $Z\P$, εἴταν τὸ $Z\P^2 = Z\Phi^2 + \Phi\P^2$, τὸ ἄρα $Z\Gamma^2 = Z\P^2$. διὸ καὶ ἡ $Z\Gamma = Z\P$, καὶ τὸ μεταξὺ ἄρα τῆς $Z\Gamma$ καὶ $Z\P$ χορδῆς ἀπειροσθὲν τῆς καμπύλης $Z\P$ ἴσον ἰκατέρω τῶν $Z\Gamma$, $Z\P$. διὸ καὶ ἴδι ἐκ τῆ ἀπειροσθῆ τῆς καμπύλης, εἴταν τὸ $Z\P^2 = Z\Phi^2 + \Phi\P^2$. ἔξ ὧς δὲ δῆλον, ὅτι τὸ $Z\P$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Γ .

ΣΗΜΗΝΩΣΙΣ.

§. 86. Ἐπειδὴ ἡ $B\Gamma = B\Delta - \Gamma\Delta$, ἴση ἄρα ἡ $B\Gamma$ τοῖς κατὰ τὸ Υ . ἴαν ἦν ἀπὸ τῆς Γ ἀχθῶ ἡ $\Gamma\Theta$ τῇ ΔZ παράλληλος, ἔσται, ὡς $B\Delta : \Delta Z :: B\Gamma : \Gamma\Theta$. διὸ καὶ $\Gamma\Theta$ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Φ . δῆλον δὲ, ὅτι δοθεῖσιν τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\Theta$ ὑποκειμένων, καὶ ἡ ἐφαπτομένη δοθήσεται. ἦτις ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζυγθεῖσα, καὶ ἐκβληθεῖσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 87. Τὴν ἔκθεσιν εὐρεῖν τὴν ἀπειροσθὲν χωρίον ἐμφυνησαν, ὑπὸ ὁποιουσὶν καμπύλης καὶ τῶν αὐτῆς τεταγμένων καὶ τῇ ᾗζονος περιεχόμενον.

Τὴν τεταγμένην $Z\Delta$ διὰ τοῦ ἀπειροσθῆ τῆς ἀποτέμμενης ΔE πολλαπλασιάσας, ἔτω γὰρ προκύψει ἡ ἑστημένη ἐκθεσις, ἣτις ἐστὶν τὸ χ .

Τῷ $\Gamma\Delta$ χωρίῳ ἀπειροσθὲν ἐστὶ τὸ μικτόγραμμα $\Delta Z\Phi E$, ὅπερ τοῦ ὀρθογωνίου $\Delta\Phi$ διαφέρει τῷ μικτογράμμῳ τριγωνιδίῳ $Z\Phi\P$. ἐπεὶ δὲ τῷτο ἀπειροσθὲν ἐστὶ, (ἰκατέρω γὰρ τῶν $Z\Phi$, $\Phi\P$ ἀπειροσθὲν τῇ πρώτῃ τῷ.

τάξως) τὸ ΔΖΨΕ ἔξον ἴσιν τῷ ΔΦ ἐκλαμβάνει.
(§. 21.) ὁθεν δὴλον ὅτι τὸ ΔΦ, τὸ ἴσον τοῖς κατὰ
τὸ Χ τὸ ζητούμενον ἀπεροσὲν χωρίον ἐμφαίνει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Τὴν ἔκθεσιν δὲ, τὴν ἐμφαίνουσαν τὸ στοιχεῖον τῆ
χωρίε ΖΓΗ, τῇ ὑπὸ τῆς καμπύλης ΓΖ, καὶ τῆς
ἀποτετμημένης ΒΗ, καὶ τῆς καθέτης ΖΗ περιεχομέ-
νη, ἐυρήσεις ἔτως.

ἮΧΘω ἀπὸ τῆ Ψ εἰς τὰς τρεῖς ἰσοπαραμέτρους ἢ ΨΑ,
ἢ πρὸς ὁρθὰς αὐτῇ ἢ ΨΥ, τῇ ΖΗ ἐκβαλεῖται συμ-
βάλλουσα κατὰ τὸ Υ. καὶ κέντρον μὲν τῷ Υ, διαμή-
ματι δὲ τῷ ΥΗ τόξον κύκλου γεγράφθω τὸ ΗΣ. καὶ
ἔστω δὴ ἢ μὲν ΓΠ = Γ, ἢ δὲ ΖΠ = Η. ἔκιν ἢ ΗΠ =
δτ. διὰ γὰρ τὸ ἔγγιστα ἀλλήλων εἶναι τὰ Ζ, Ψ ση-
μαῖα, ἔγγιστα εἴσι καὶ τὰ Η, Ρ. διὸ ἢ ΗΡ ἀπαρασὲν
ἐστὶ τῆς ΓΠ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΖΗ : ΖΑ :: ΡΗ : ΗΣ, (ὡς
ἐυθείας λαμβανόμενα τῇ ΗΣ τόξον, ὁμοίᾳ εἴσι τὰ
ΖΗΔ, ΣΗΡ τρίγωνα) ἦτοι ὡς π : γ :: δτ : ΗΣ, τὸ
ἄρα ΗΣ = $\frac{\gamma \delta \tau}{\pi}$.

τὸ ΖΗΡΨ μικτόγραμμα, ὅπερ ἴσον ἐστὶ τῇ τε ὑπερ-
σχῇ τῶν τομέων ΥΖΨ, ΥΗΣ, καὶ τῷ τριγώνῳ ΗΣΡ,
εἶπεν τέταρτον ἀλγεβρίαντος, ὡς ἀπεροσὲν, μόνον τῇ τῶν
εἰρημίων τομέων ὑπερσχῇ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ΖΗΣΨ χω-
ρίον. ἐστὶ δὲ τῷτο ἴσον τῷ $\frac{ΖΗ \cdot ΖΨ + ΖΗ \cdot ΗΣ}{2}$.

κατὰ τὸ Ψ ἔκθεσις τὸ στοιχεῖον ἐμφαίνει τῇ ΖΓΗ χω-
ρίε. ὡσαύτως τὸ στοιχεῖον τῇ ΓΒΖ χωρίε, τῇ ἐκτὸς
τῆς καμπύλης ὑπὸ τῆς ἰσοπαραμέτρους ἀπολαμβάνου-
σας ὁ ΛΒΜ τομέως. τὰ γὰρ μικτόγραμμα τρίγωνα
ΛΜΒ, ΔΖΨ ὡς ἀπεροσὲν παραβλίνονται.

ΠΡΟ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§ 88. Τὴν ἐκθίσιν εὐρεῖν, τὴν τὸ σσιχαῖον ἐμφαί-
 νουσαν τῷ σσερεῷ, τῷ ὑπὸ ἐπικιασῶν καμπύλης περιεχο-
 θείσης γυμνίε.

Ἐστω καμπύλη ὁποιαῦν ἡ ΑΔ. ἢς Ἀξων ἡ ΑΓ, (πίν. ε'.
 χ. 5.) τεταγμένηαι δὲ ἑγγιστα ἀλλήλων αἱ ΒΕ, ΓΔ. ἐκβλη-
 θείσης δὲ τῆς ΒΕ, ἡ χθω ἀπὸ τῷ Δ τῇ ΑΓ παρὰλλη-
 λος ἡ ΔΦ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = χ, ἡ δὲ ΒΕ = γ.
 περιεχθείσης δὲ τῆς ΑΔ περὶ τὸν ΑΓ ἄξωνα γενίσ-
 θω ὑπ' αὐτῆς σσερόν. Ἐστω ἐν τῷ ὑπὸ τῷ ΑΒΒ
 χωρίῳ γινόμενα σσερεῷ ἀπικροσόν, τὸ ὑπὸ τῷ ΕΔΓΒ
 γινόμενον σσερόν· ἐπεὶ δὲ τὸ ΦΔΓΒ ὀρθογώνιον ὑπερῖχει
 τὸ ΕΔΓΒ χωρίον κατὰ τὸ ἀλογητέον τρίγωνον ΦΔΕ,
 ἐν ὃ κύλινδρος ἄρα ὁ ὑπὸ τῷ ΦΔΓΒ ὀρθογωνίᾳ ἀλο-
 γητῆα ὑπεροχῇ ὑπερίχει τὸ ὑπὸ τῷ ΕΔΓΒ χωρίον γι-
 νόμενον σσερόν· διὸ ὡς ἴσος αὐτῷ ἐκλαμβάνεται. (§. 21)
 τὸ ἄρα ζητέμενον σσιχαῖον ὁ κύλινδρος ἐστίν, ὁ ὑπὸ τῷ
 ΦΔΓΒ ὀρθογωνίᾳ γινόμενος. κειμένον ἔν τῇ ΔΓ ἡμι-
 διάμετρον λόγον ἔχων πρὸς τὴν περιφέρειαν τῷ ὑπ'
 αὐτῆς γινόμενῳ κύκλῳ, ὃν τὸ η: π, ἡ ζηθῶσ περι-
 φέρεια ἐμφαίνεται ὑπὸ τῷ $\pi\gamma$, (κ) ὁ δὲ ὑπ' αὐτῆς

ἡ
 περιχόμενος κύκλος ὑπὸ τῷ $\pi\gamma^2$. διὸ ὁ ὑπὸ τῷ ΦΔΓΒ
 οη

γινόμενος κύλινδρος, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ω ἐκθίσεως
 σημαίνεται, (λ) (πίν. ιδ.) ἥτις ἐστὶν ἡ ζητούμενη.

. Π

ΣΗ.

(α) Ὅρα τὴν μετὰ τὴν β'. πρὸτ. τῇ ιβ'. βιβλ. τῆς Γεωμετρ.
 Σιρίπ. τὴν ἐν σελ. 240. τῷ α'. τόμ. ἐν τῷ β' περίσῳ τῷ ἐν
 τοῖς τῷ Ἀρχίμ. Θιυρήμ. τὸ ἐν σελ. 14. τῷ β' τόμ.

(λ) Ὅρα τὸ περίσῳ τὸ μετὰ τὸ δ'. Λῆμ. τῶν ἐν τῇ ιβ'. βιβλ.
 τῆς Γεωμετρ. τὸ ἐν σελ. 250.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 89. Αἱ ἄρτι εὐρεθεῖσαι ἐκθέσεις ταῖς καμπύλαις ἀνήκουσι, ταῖς διὰ τῆς ἀξονος γεγραμμέναις. (μ) εὐρετέον δὲ τὰς αὐτάς ὑπὲρ τῶν διὰ τῆς ἐξίας (ν) γεγραμμένων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 90. Πᾶσαν διὰ τῆς ἐξίας γεγραμμένην καμπύλιν ἢ κατὰ τὸ α ἐξίσωσις ἐμφαίνει. ἔωσαν γὰρ αἱ διὰ τῆς ἐξίας (πίν. 5. χ. 6.) Α γεγραμμένης καμπύλης ΒΔ τεταγμένην ἑρμίσαι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΑΔ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ γεγραφθῶ τόξον κύκλου τὸ ΒΓ. καὶ ἔσω ἢ μὲν ΑΒ = π, τὸ δὲ ΒΓ = δκ, ἔχέτω δὲ ΑΒ : ΒΓ λόγον ὃν 1 : δλ. ἐκτὺς εἰν ὡς π : δκ :: 1 : δλ. ἐκ τῆς ἀναλογίας δὲ ταύτης ἢ κατὰ τὸ (πίν. ιδ.) α ἐξίσωσις γίνεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 91. Τὰς ἐκθέσεις εὐρεῖν, τὰς ἐμφαινέσας τὰς προειρημένας εὐθείας, (§. 85, 87, 88.) καὶ τὰ σοιχεῖα πάσης καμπύλης διὰ τῆς ἐξίας γραφάσης.

Ἐφαπτέσθω τῆς διὰ τῆς ἐξίας (πίν. 5. χ. 6.) Α γραφάσης καμπύλης ΒΔ ἢ ΦΒ κατὰ τὸ Β, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ τεταγμένῃ ΑΔ τῇ ἐγγυτάτῃ τῆς ΑΒ = Ζ κατὰ τὸ Μ. ἤχθω δὲ ἀπὸ τῆς Β ἢ μὲν ΒΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΜ, ἢ δὲ ΒΚ τῇ ἐφαπτομένῃ ΦΜ· ἀπὸ δὲ τῆς Α ἢ μὲν ΑΚ τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ ΦΜ, ἢ δὲ ΑΦ τῇ ΒΚ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ γεγραφθῶ τόξον τὸ ΒΓ. ἔκταν ἢ ΤΔ = δλ.

(μ) Κατὰ τὴν γ'. Ἐκθ. τῆς β'. προτ. τῆ α'. τμήμ. τῶν Κορ. Τομ. τὴν ἐν σελ. 93. τῆ β'. τομ.

(ν) Κατὰ τὴν δ'. Ἐκθ. τῆς ε'. προτ. τῆ αὐτ. τμήμ. τὴν ἐν σελ. 109. τῆ β'. τόμ.

ἢ διὰ τὸ ἀπεροσὸν τῆς καμπύλης, εἴτεν ἡ ΒΔ (ὡς
ἐθα γὰρ ἡ ΒΔ λογίζεται) ἴση τοῖς κατὰ τὸ β. καὶ ἐπὶ
ὡς ΒΜ: ΒΝ:: ΜΑ: ΑΦ, (πίν. ιδ.) εἰσὶ δὲ αἱ ΜΔ, ΓΝ
ἀπεροσὰ τῇ ΓΔ παραβαλλόμεναι, (εἶρα ς. 85.) καὶ
τὴν ΒΔ τόξον τῇ ΒΜ, τὸ δὲ ΒΓ τῇ ΒΝ μικρὸν
ἐκ ταυτίζεται, ἡ δὲ ΜΑ ὡς ἴση τῇ ΑΒ ἐκλαμβάνεται,
(ς. 21.) εἶναι δὴ ἔν αἷα καὶ ὡς ΒΔ: ΒΓ::
ΑΒ: ΑΦ, ἥτοι ὡς $\sqrt{\delta\kappa^2 + \delta\lambda^2}: \delta\kappa:: \text{Ζ}:\Psi\text{Α.}$ διὸ ἡ
ΦΑ ἴση τοῖς κατὰ τὸ γ.

Ἐπὶ δὲ καὶ ὡς ΒΜ: ΜΝ:: ΑΜ: ΜΦ, ἐστὶ καὶ
ὡς ΒΔ: ΓΔ:: ΑΒ: ΒΦ, ἥτοι ὡς $\sqrt{\delta\kappa^2 + \delta\lambda^2}: \delta\lambda::$
Β: ΒΦ. διὸ ἡ ΒΦ ἴση τοῖς κατὰ τὸ δ.

Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΑΒΓ τομεὺς, τῷ ΒΓ ὡς εὐθείας ἐκ-
λαμβάνομεν, ἴσος τῷ $\frac{1}{2}$ ΑΒ. ΒΓ, εἴτεν τοῖς κατὰ
τὸ Σ.

Οὐκ ἔν ἡ μὲν κατὰ τὸ β ἐκθεσις τὸ τῆς καμπύ-
λης σελήων ἐμφαίνει, ἡ δὲ κατὰ τὸ γ τὴν Ἰφα-
πτομένην, καὶ τὴν Καάθετον ἡ γὰρ ΑΦ = ΒΚ· ἡ δὲ
κατὰ τὸ δ τὴν Ἰφαπτομένην καὶ τὴν Ἰποκάθετον
ἡ γὰρ ΒΦ = ΑΚ· ἡ δὲ κατὰ τὸ ε τὸ τῷ χωρίῳ σελ-
ήων. Πάντες γὰρ χωρίῳ ὑπὸ δύο τεταγμένων καὶ τῆς
καμπύλης περιεχομένῃ, οἷον τῷ ΑΒΕ, ἀπεροσὸν ἐστὶ
τῇ μικτόγγραμμον τρίγωνον ΑΒΔ, ὅπερ τὸν ΑΒΓ το-
μεῖ ὑπερέχον κατὰ μίνον τὸ ΒΓΔ τρίγωνον, ὡς ἴσον
ἐντὶ ἐκλαμβάνεται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

ς. 92. Τοιγαρὲν ἀχθήσεται ἀπὸ τῷ δοθέντος ση-
μεῖο Β τῆς καμπύλης Ἰφαπτομένη, εἰάν' κέντρῳ μὲν
ἡ ἴσια Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ
τῷ Β τῇ δοθείσῃ ΑΦ πρὸς εὐθείᾳ ἀχθῇ εὐθεῖα,
ὡς ἡ ΒΦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 93. Τὴν ἐκθεσιν τὴν τὸ σερεὸν ἐμφαίνουσαν, τὴν ἀπὸ τῆς περιαγωγῆς τῆς τοιαύτης δε καμπύλης γινόμενον, εὐρεῖν ἀμήχανον, εἰάν μὴ ὁ ἄξων ὀριζῶν, πρὶν ἐν αὐτῇ περιεγεγεῖσθαι, τὸ σερεὸν περὶ. Διὸ μεταβλητέον τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἑτέραν, τὴν αὐτὴν καμπύλην δηλῶσαν, διὰ τῆς Ἀξονος γεγραμμένην, εἰδ' ἔτι καὶ τὸν τῇ προεξεθείσῃ (§. 88.) ἐκθέσει, τῇ τὸ σερεὸν τῷ σερεῖ, τῷ ὑπὸ πάσης καμπύλης γινόμενῃ ἐμφαινέσῃ.

Κ Ε Φ. 5.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς μεταβάλλειν τὴν ἐξίσωσιν, τὴν δηλῶσαν καμπύλην διὰ τῆς ἐξίσωσας γεγραμμένην εἰς ἑτέραν, τὴν αὐτὴν σημαίνουσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἀξονος γραφῆσαν καὶ τῆς ἀνάπαλιν, ἀμέλειτοι τῇ τῇ δηλῶσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἀξονος γεγραμμένην εἰς ἑτέραν μεταβάλλειν τὴν αὐτὴν σημαίνουσαν καμπύλην διὰ τῆς ἐξίσωσας γεγραμμένην.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 94. Τὴν κατὰ τὸ (πίν. ιε.) Α δοθεῖσαν ἐξίσωσιν τὴν ἐμφαίνουσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἐξίσωσας γραφῆσαν, εἰς ἑτέραν μεταβαλεῖν, τὴν αὐτὴν δηλῶσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἀξονος γεγραμμένην.

Ἐξω καμπύλη ὅποια ᾖ, ἡ ΒΓΔ, διὰ τῆς (πίν. 5. κ. 7.) Α Ἐξίσωσας γεγραμμένη, ἥς ἄξων ἡ ΕΗ· τεταγμένη δὲ ὁμογενῶς ἀλλήλων ἀπὸ μὲν τῆς Ἐξίσωσας αἱ ΔΓ, ΔΔ, ἀπὸ δὲ

ἢ τῷ Ἀξονος αἱ ΓΖ, ΔΗ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, δια-
στήματι δὲ τῷ ΑΓ τόξον κυκλῶ γεγράφθω τὸ ΓΕ,
καὶ ἤχθῃ ἀπὸ τῷ Γ ἡ ΓΦ τῇ ΒΗ παράλληλος. ἔστω
ἢ ἡ μὲν ΑΖ = χ, ἡ δὲ ΖΓ = γ, ἡ δὲ ΑΓ = z,
τὸ δὲ τόξον ΓΕ = δκ. κείθω δὲ τὸ π διὰ τῷ z ὅπως
ἂν ἴσῃ ἐμφαίνεσθαι, ὅσον, ἢ διὰ τῷ z², ἢ διὰ τῷ z³.

Οὐκ ἔνν ἡ μὲν ΖΗ = δχ, ἡ δὲ ΔΦ = δγ, ἡ δὲ ΔΕ =
δ. καὶ ἐπεὶ τὸ $\overline{ΓΔ}^2 = δχ^2 + δγ^2$, τὸ αὐτοὶ δὲ $\overline{ΓΔ}^2 =$
 $δz^2 + δκ^2$, τὸ ἄρα $δz^2 + δκ^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β.
ἴσι δὲ καὶ τὸ $\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΑΖ}^2 + \overline{ΖΓ}^2$, διὸ τὸ z² ἴσον τοῖς
κατὰ τὸ Γ. ἐκ μὲν ἓν τῆς κατὰ τὸ (πίν. ιε.) Α ἐξι-
σώσεως ἢ κατὰ τὸ Δ γίνεται, ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὸ Γ,
ληφθέντων τῶν ἀπειροσῶν ἢ κατὰ τὸ Ε, ἐξ ἧς ἢ
κατὰ τὸ z, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Η. ἐν τῇ κατὰ τὸ
Β ἓν ἐξισώσεις τεθέντων ἀντὶ τῶν δκ² καὶ δγ² τῶν ἴσων
αὐτοῖς, ἢ κατὰ τὸ Θ γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ ι,
ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Κ. καμένε δὲ τῷ χ ἴση
τοῖς κατὰ τὸ Α, ἔσται τὸ μὲν χ² ἴσον τοῖς ἐν τῷ
Μ, τὸ δὲ δχ τοῖς κατὰ τὸ Ν. διὸ τῶν ἴσων αὐτοῖς
ἀντ' αὐτῶν τεθέντων ἐν τῇ κατὰ τὸ Κ ἐξισώσει, ἢ
κατὰ τὸ Ξ γίνεται, καμπύλην διὰ τῷ Ἀξονος γε-
γραμμένην δηλῶσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 95. Ἐπειδὴ τὸ π διὰ τῷ z ὅπωςδήποτε ὑπερ-
φαίνεται, (§. 94.) εὐρεθήσεται διὰ τῆς κατὰ τὸ Κ
ἐξισώσεως ὁ λόγος ἃν ἔχει τὸ χ πρὸς τὸ z, καὶ πρὸς
τὸ γ. εἰάν γάρ τεθῇ τὸ π = z², ἢ κατὰ τὸ Κ εἰς
τὴν κατὰ τὸ Ο μεταβιάσεται ἐξισώσιν ἐξ αὐτῆς δὲ
ἢ κατὰ τὸ π γίνεται. καμένε δὲ τῷ αz ἴση τοῖς κα-
τὰ τὸ Ρ, ἢ κατὰ τὸ Σ πορίζεται ἐξισώσεις, ἐξ ἧς
ἢ κατὰ τὸ Τ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Υ, καὶ ληφ-
θέντων τῶν ἀπειροσῶν ἢ κατὰ τὸ Φ, διὰ τῷ α δὲ

πολλαπλασιαζόντων τῶν μερῶν ἢ κατὰ τὸ χ . ἢ ψ .
 των δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ ν ἢ κατὰ τὸ ψ . ἢ α .
 τῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ π ἢ κατὰ τὸ ω , ἢ α .
 ὁλόκληρα τὰ κατὰ τὸ α , (§. 34, 47.) ἢ τὰ κατὰ
 τὸ β . ἢ α ἢ κατὰ τὸ γ ἀναλογίᾳ συνίσταται, ἢ
 ἢς δῆλος ὁ λόγος, ὅν ἔχει τὸ χ πρὸς τὸ z . ἢ α δὲ
 τὸ z ἴσον ταῖς κατὰ τὸ Γ , δῆλος ἄρα ἔσται καὶ ὁ
 λόγος, ὅν ἔχει τὸ χ πρὸς τὸ y .

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 96. Ἐν τῇ κατὰ τὸ π ἐξισώσει τὸ $\delta\psi$

$\sqrt{\alpha^2 - \psi^2}$
 τόξον ἀπειροσὺν κ' ἐκτὴ ἐμφανίσει. (ὄρα τὸ §. 67.) δι
 τὰν μὲν καὶ τὸ ἕτερον τῆς ἐξισώσεως μέρος, ἀπὸ τοῦ
 π δι, τεθέντος ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ π τοῦ ἴσου ἀπὸ τοῦ

z
 τοῦ διὰ τοῦ z ἐμφαινόμενον, εἰς ἐκθυσιν μεταβληθῶν,
 ἀπειροσὺν τόξον κύκλου δηλῶσαν, ἔχει δὲ τὸ ἴσον
 τῶν τόξων πρὸς τὸ ἕτερον λόγον ῥητόν, ἢ ὑπὸ τῆς ἐξί
 σώσεως ἐμφαινόμενῃ καμπύλῃ, Ἀλγεβραϊκῇ λέ
 γεται· εἰ δὲ μὴ, Ὑπερβατικῇ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 97. Ἀλγεβραϊκαὶ μὲν καμπύλαι εἰσιν, (ξ) ἐν
 αἷς ὁ λόγος τῶν ἀποτετμημένων ἢ τῶν τεταγμένων δι
 ἀλγεβραϊκῆς παρίσταται ἐξισώσεως· Ὑπερβατικαὶ δὲ αἱ
 μὴ δι ἀλγεβραϊκῆς ἐμφαινόμεναι ἐξισώσεις. Ἀλγε
 βραϊκῇ δὲ ἐξίσωσις λέγεται, ἢ βαθμῷ τινὸς ὀρίσθην
 ἔσα ἐξίσωσις καὶ ἡ αὐτὴ διαμένουσα ἐν παντὶ τῆς
 καμπύλης σημείῳ.

ΣΗ.

(ξ) Ὁρμ §. 377. τῆς τοῦ Οὐέλφ. Ἀναλύσ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ'.

§. 98. Μετὰ τὸ μεταβληθῆαι τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἰστέαν, ἠμφαινέσαν καμπύλην, διὰ τῆς Ἀξονος γραφθεῖσαν, χρηστέον ἐν τῇ τῇ ἐξ αὐτῆς γινομένης εὐρεοῦ ἀνελήπτῃ τῷ εὐρεθέντι (§. 88.) σοιχείω $πγ^2 δχ$.

2η

Ἐπομὲν γὰρ τὸ εὐρεὸν εὐρεθήσεται, τὸ ἐκ τῆς (πίν. 5. χ. 7.) ΓΒΖ χωρίῳ, ἀφ' ἧς ἀφαιρεθέντος τῆς κώνης, τὸ ἐκ τῆς ΓΑΖ τριγώνου, τὸ λοιπὸν ἔσται τὸ εὐρεοῦ, τὸ ἐκ τῆς ΓΒΑ χωρίῳ, τῇ ἀπολαμβάνομένη ἀπὸ τῆς διὰ τῆς Ἐξίσως Α γραφείσης καμπύλης ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 99. Τὴν κατὰ τὸ (πίν. 19.) Ξ δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς ἰστέαν μεταβλεπὼν, τὴν αὐτὴν μὲν δηλῶσαν καμπύλην, διὰ τῆς Ἐξίσως δὲ γογγραμμένην.

Ἦτοι κύκλος ὁ ΑΓΝ. (πίν. 5. χ. 8.) καὶ διάμετρος μὲν αὐτῆς ἡ ΑΗ = α, Ἐξίς δὲ τὸ Α, ἀποτετμημένη δὲ ἡ ΑΖ = χ, τεταγμένη δὲ ἦτο ΖΓ, καὶ ἡ ΑΓ = z.

Καὶ ἰπὲρ ὡς ΑΗ : ΑΓ :: ΑΓ : ΑΖ, ἦτοι ὡς α :: z :: z : χ, ἴσεται τὸ z² ἴσον τοῖς κατὰ τὸ δ. ἀλλὰ τὸ χ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Α, (πίν. 19.) τὸ ἄρα z² ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ε. διὸ τὸ μὲν z ἴσον τοῖς ἐν τῷ ζ, τὸ δὲ z² τοῖς ἐν τῷ η, τὸ δὲ δz τοῖς ἐν τῷ θ. ἐν τῇ κατὰ τὸ Ξ ἔν ἐξίσώσει τεθέντων ἀντὶ τῆς δψ καὶ τῆς ψ² τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἡ κατὰ τὸ ι συνίσταται ἐξίσωσις ἐξ ἧς δηλ.ν, ὅτι τὸ π ἴσον τοῖς κατὰ τὸ κ ἐν τῇ ἐξίσώσει ἐν τῇ κατὰ τὸ Α, τῇ ἠμφαινέσῃ πᾶσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἐξίσως γογγραμμένην, τεθέντος ἀντὶ τῆς π τῆς ἀρτι εὐρεθέντος αὐτῷ ἴσθ, ἡ κατὰ τὸ λ προκύπτει ἐξίσωσις, κύκλον σημαίνουσα, διὰ τῆς Ἐξίσως γογγραμμένην, καὶ ἡμιδιάμετρον ἔχοντα ἴσην τῷ α.

Ἐξω δὲ μεταβληθισμένη ἐξ' ἑαυτῆς ἢ κατὰ τὸ Α, (πίν. 15.) ἢ πᾶσαν κωνικὴν τομὴν ἱμφαίνεσα, διὰ τῆς Ἄξονος γεγραμμένην. καὶ ἔτι δὲ τὴν (πίν. 5. χ. 9.) ΚΓ πᾶσαν ἱμφαίνειν Κώνη τομὴν. Ἐξω δὲ ὁ μὲν ΚΖ Ἄξων, ἢ δὲ ἀποτετμημένη ΑΖ = Χ, τῶν δὲ τεταγμένων ἢ μὲν ἐπὶ τῆς Ἄξονος ΖΓ = γ, ἢ δὲ ἀπὸ τῆς Ἐξίας ΑΓ = z.

Οὐκ ἔν τῇ z, ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Β, διὰ δὲ τὴν κατὰ τὸ Α ἐξίσωσιν τοῖς κατὰ τὸ Γ. ἐπὶ δὲ τὸ $χ = zψ$, (φ. 94.) τοῦ ἄρα z ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Δ. ἐξ ἧς αὖ δὴλον, ὅτι τὸ ψ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε. ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἢτε κατὰ τὸ Ζ, ἢ κατὰ τὸ Η γίνεταί. ἑκατέρω δὲ τῶν μερῶν τῆς κατὰ τὸ Η ἀφαιρέθιντες ἀπὸ τῆς α², ἢ κατὰ τὸ Θ συνίσταται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ι, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Κ. διὸ δὴ ἐν τῇ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσιν (ὄρα γὰρ φ. 94.) τεθείτων ἀντὶ τῆς δψ καὶ τῆς $\sqrt{α^2 - ψ^2}$ τῶν ἄρτι ἐνριθίνων αὐτοῖς ἴσων, ἢ κατὰ τὸ Μ. καὶ ἢ κατὰ τὸ Ν ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς διὰ τὴν κατὰ τὸ Ξ, τὴν πᾶσαν καμπύλην διὰ τῆς Ἐξίας γεγραμμένην ἱμφαίνουσαν, ἢ κατὰ τὸ Ο, δηλῶσα ἑκάστην τῶν τῆς Κώνης τομῶν διὰ τῆς Ἐξίας γεγραμμένην.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

φ. 100. Ἡ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσις Παραβολὴν μὲν ἱμφαίνει, εἰάν τὸ $β = γ$. τότε γὰρ κεκρίμεν, εἰς τὴν κατὰ τὸ π μεταβάλλεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ρ γίνεταί, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ Σ καὶ τεθέντος τῆς $\frac{1}{2}$. $α \pm χ = z$, ἢ κατὰ τὸ Τ. Παραβολὴν δηλῶσα παράμετρον ἔχουσαν τὸ 2α. εἰάν δὲ τὸ $β > γ$, ἢ κατὰ

τὰ τὸ Α εἰς τὴν κατὰ τὸ Υ μεταβλήσεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Φ γίνεται, ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ Ζ, ἐξ αὐτῆς δὲ, πληρῶντος τὸ τετραγώνου, ἢ κατὰ τὸ Ψ τεινόντος δὲ τὰ ἄρστος τοῦ κατὰ τὸ Ω, ἢ κατὰ τὸ α, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ β, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ γ, ἢ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ δ' ἢ τοῦ "Εκλεψίν σημαίνει, πλαγίαν μὲν πλευρὰν ἔχουσαν τὸ $\alpha\beta^2$, $\beta^2 - \gamma^2$

(§. 244. τῷ 1. βιβλ.) ἐλάχιστονα δὲ Διάμεινεν τὸ $\alpha\beta^2$. (§. 246. τῷ 1. βιβλ.) διὰ τὰ αὐτὰ δὲ

$\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$

ἰάν τὸ $\beta\gamma$ ἢ ἐν τῷ Α ἐξίσωσις εἰς τὴν ἐν τῷ Σ μεταβληθήσεται, ὧς περὶ βολὴν σημαίνουσιν, ἢ πλαγίαν μὲν πλευρὰν τὸ $\alpha\beta^2$, (§. 252. τῷ 1. βιβλ.) ὁρῶν $\gamma^2 - \beta^2$

δὲ τὸ α . (§. 254. τῷ αὐτ.) ἰάν δὲ τὸ $\gamma = 0$, τὴν κατὰ τὸ Α ἢ κατὰ τὸ ζ ἐμφαίνει, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ η γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ θ, κύκλον δηλῶσα, ἡμιδιάμετρον (§. 229.) ἔχοντα τὸ α.

Κ Ε Φ. Ζ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὐρίσκειν τὴν Ὑφαπτομένην καὶ Ἐφαπτομένην, τὴν Ὑποκάθετον καὶ Κάθετον, τὸ Χρῆρον καὶ τὸ Στερεὸν τὸ ἐκ τῆς καμπύλης γινόμενον, ἣν ἡ δοθεῖσα ἐμφαίνει ἐξίσωσις καὶ περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἐξίσωσιν εὐρίσκειν εἰς τῶν δοθέντος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 101. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ (πίν. 13.) Α ἐξισώσεως, τῆς Παραβολῆς δηλώσεως, τὴν Ὑφαπτομένην αὐτῆς εὐρεῖν.

Εἰληφθῶ τὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀπειροσά. προκύψει ἔν η κατὰ τὸ Β ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Γ γίνεται. ἐν τῇ ἔν ἐκθίσει $\mu\delta\chi$, τῇ πάσης καμπύ-

δι/

λης τὴν Ὑφαπτομένην ἐμφανέσῃ (§. 85.) τεθέντος ἀντὶ τῷ $\delta\chi$ τῷ ἄρτι εὐρεθέντος ἴσθ αὐτῶ, ἡ κατὰ τὸ Δ περιέχεται ἐξίσωσις· ἐν ἣ ἀντὶ τῷ μ^2 τεθέντος τῷ ἴσθ αὐτῶ, τῷ ἐν τῷ Α, ἡ κατὰ τὸ Ε ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς Ὑφαπτομένη διπλασία τῆς ἀποτετμημένης.

Τῶ αὐτῶ δὴ τρόπῳ, δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ζ ἐξισώσεως, τῆς τὴν Κισσοειδῆ ἐμφανέσεως, (§. 332. 1^η βιβλ.) εὐρεθήσεται ἡ αὐτῆς Ὑφαπτομένη. ληφθέντων γὰρ τῶν ἀπειροσά, τῶν κατὰ τὸ Η, ἴσθαι τὸ $\delta\chi$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Θ· ἀντ' αὐτῶ δὲ τεθέντος τῷ ἴσθ αὐτῶ ἐν τῇ καθολικῇ ἐκθίσει, ἡ κατὰ τὸ Ι ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Κ, τέθεντος ἀντὶ τῷ μ^2 τῷ ἴσθ αὐτῶ, τῷ ἐν τῷ Ζ. ἐξ ὧς δῆλον, ὅτι ἡ Ὑφαπτομένη ΙΙΙ τῆς Κισσοειδὸς ΑΜΛ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 102. Τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως δοθείσης, τὴν Ὑποκάθετον, τὴν Ἐφαπτομένην, τὴν Κάθετον, τὸ τῆς καμπύλης τόξον, τὸ χωρίον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῆς γινόμενον σερεῖν εὐρεῖν.

Τῶν ἀπειροσά, ληφθέντων, ὡς εἴρηται, (§. 101.) τεθήτω ἐν τῇ καθολικῇ ἐκθίσει, $\mu\delta\chi$ τῇ τὴν Ὑποκά-

δχ

9ε.

δετον πάσης καμπύλης ἐμφαινέση, (§. 85.) ἀντὶ τῆς 104 τοῖς ἴσον αὐτῶν, τὸ ἐν τῷ Β. ἐκὼν περικύψει ἡ κατὰ τὸ Α ἐξίσωσις. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς Ὑπεκάρθετος ἴση τῷ ἡμίσει τῆς παραμέτρου.

Ὅμοιως ἐν τῇ καθολικῇ ἐκθέσει, ἢ $\sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2}$
 δy

τῇ δηλέσει τὴν Ἐφαπτομένην πάσης καμπύλης, (§. 85.) τεθέντος ἀντὶ τῆς $\delta\chi^2$, τῆς ἴσης αὐτῶν, τῆς ἐκ τῆς κατὰ τὸ Β ἐξίσωσεως πορίζομένης, ἡ κατὰ τὸ Μ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ν, τεθέντων ἀντὶ τῶν y καὶ y^2 τῶν ἴσων αὐτοῖς, τῶν ἀπο τῆς κατὰ τὸ Α ἐξίσωσεως προκυπτόντων. ἐξ ὧν δῆλον, ὅτι ἡ τῆς Παραβολῆς Ἐφαπτομένη ἴση τοῖς κατὰ τὸ Ν.

Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ εὐρεθήσεται ἡ μὲν Καθέτος ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ξ ἐκθέσεως ἐμφαινομένη· τὸ δὲ παραβολικὸν τόξον ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ο· (τὸ ἐλόκλησεν αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐν τῷ π, ὅπερ εὐρεῖται τεθείσης τῆς $\sqrt{4y^2 + a^2} = 2y + z$.) τὸ δὲ παραβολικὸν χωρίον ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Ρ, καὶ τῆς ἐλοκλήσεως ληφθέντος ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Σ, ἢ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Τ, τεθέντος ἀντὶ τῆς y^2 τῆς ἴσης αὐτῶν, τῆς ἐν τῷ Α· τὸ δὲ σφαιρὸν τὸ ὑπὸ τῆς παραβολῆς γινόμενον, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Υ, καὶ τῆς ἐλοκλήσεως ληφθέντος, ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Φ, ἢ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ Χ, τεθέντος τῆς ἴσης τῷ y^2 , τῆς ἐν τῷ Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 103. Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ὁποῖα ἔστιν δοθείσης ἐξίσωσεως, ἀπαντα τὰ εἰρημένα εὐρεθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 104. Δοθείσης τῆς Ἐφαπτομένης καμπύλης τινὸς εὐρεῖν τὴν ἐξίσωσιν, τὴν ἐμφαινέσαν τὴν καμπύλην.

Ἐξω

Ἔστω ἡ δοθεῖσα Ὑποπτομένη — 2X. Ἐκὼν ἡ κατὰ τὸ Ψ συνίσταται ἐξίσωσις, (§. 85.) ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Δλ γίνεται, καὶ ληθόντων τῶν ὁλοκληρῶν (§. 46.) ἡ κατὰ τὸ α, ἡ αὐτὴ ἔσα τῇ κατὰ τὸ β, (ε) ἥτις παραβολὴν ἰμφαίνει.

Δοθεῖσης δὲ τῆς Ὑποκαθέτου ἴσης 1 α, ἡ κατὰ τὸ γ συνίσταται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ δ, καὶ τῶν ὁλοκληρῶν ληθόντων, (§. 34.) ἡ κατὰ τὸ ς, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ ζ, ἥτις τὴν αὐτὴν Παραβολὴν σημαίνει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 105. Τῷ αὐτῷ δὴ τρόπῳ, δοθέντος ἑνὸς τῶν εἰρημένων, (§. 102.) εὐρεθήσεται ἡ ἐξίσωσις.

Κ Ε Φ. Η'.

Περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 106. Ἐὰν καμπύλης αἱ τεταγμέναι προϊῶσαι αὐξήσιν ἄχρι τεταγμένης τινὸς, μεθ' ἣν μειῶνται, ἡ τὴν αἰσάπαλιν, ἡ μέθοδος τῇ εὐρίσκειν τὴν μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τῶν τεταγμένων, Μέθοδος τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων καλεῖται.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 107. Οἷον ἐν μὲν τῷ ΑΒΓ (πίν. ΙΗ. X. 1.) κύκλῳ αἱ τεταγμέναι ΔΕ, ΖΗ, ΕΙ καὶ αἱ ἐφοξῆς προϊῶσαι αὐξήσιν ἄχρι τῆς διὰ τῆς κέντρου ΒΚ, μεθ' ἣν προϊῶσαι μειῶνται ἐν δὲ τῇ ΒΓΗ (X. 2.) καμπύλῃ μειῶνται μέχρι τῆς ΓΔ, μεθ' ἣν πάλιν αὐξήσιν. διὸ ἐν μὲν τῷ κύκλῳ μεγίστη καὶ ΒΚ, ἐν δὲ τῇ ΒΓΗ καμπύλῃ, ἐλαχίστη ἡ ΓΔ.

ΣΗ-

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

§. 108. Οὐ πᾶσα καμπύλη μεγίστη καὶ ἐλαχίστην ἔχει. τῇ μὲν γὰρ ΑΒΓ κύκλου ἡ ἐλαχίστη ἴση τῷ ἔδω. ἢ, τῆς δὲ ΒΠΗ καμπύλης ἡ μεγίστη ἄπειρος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

§. 109. Ἐάν ταῖς καμπύλαις, ταῖς μεγίστην ἢ ἐλαχίστην ἔχουσας, ἡ ὑφαπτεμένη ἢ ἀπὸ τῆς πρῶτης ἐκαστίας αὐτῶν ἀγομένη ἤτοι παράλληλος τῷ ἄξονι γίνεται, οἷα ἡ ΡΒ, ἡ τῇ τεταγμένη ταυτίζεται, οἷον ΕΛ, προϊῶσα ἐπὶ τὰ Δ μέρη, τῇ ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

§. 110. Τῆς τεταγμένης ἄρα μεγίστης ἢ ἐλαχίστης γινομένης, ἡ ὑφαπτεμένη ἤτοι ἄπειρος, ἡ τῷ ἔδω ἴση γίνεται. ἡ μὲν γὰρ ΒΡ ἄπειρος, (π) ἡ δὲ ΔΑ ἴση τῷ ἔδω, τῆς ΕΛ τῇ ΓΔ ταυτιώσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

§. 111. Ἴνα ἔν δια τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἡ μεγίστη, ἡ ἢ ἐλαχίστη εὐρεθῇ, τιθίσαι δεῖ τὴν καθολικὴν τῆς ὑφαπτομένης ἐκθεσιν ἥτοι τῷ ἔδω, ἢ τῷ ἀπείρῳ ἴσην καὶ καμίναν μὲν τῷ πρώτῳ, εἴταν τῆς $yδχ = 0$, ἔσται καὶ τὸ $δχ = 0$. ἔστι γὰρ ὡς $δy$:

$δχ :: y : 0$. τῷ δευτέρῳ δὲ καμίναν, ἥτοι τῆς $yδχ = 0$, (διὰ τῆς 00 σημείω τὸ ἀπειρον σημαίνεται) ἔσται τὸ $δy = 0$ ἔστι γὰρ ὡς $δy : δχ :: y : 00$.

ΠΟ-

(π) Ὡς παράλληλος τῇ ΑΓ. Ἰπὸ δὲ ἡ ὑφαπτομένη ΒΡ ἄπειρος, δῶλον ὅτι καὶ ἡ ὑφαπτομένη ἢ ὑπ' αὐτῆς τε καὶ τῆς τεταγμένης περατομένη ἄπειρος.

ΗΟΡΙΣΜΑ Γ'.

§. 112. Ἐάν ἐν ληφθῇ μὲν τὰ ἀπειροσὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τεθῇ δὲ τῶν $\delta\chi$, $\delta\gamma$ ἦτοι τὸ ἕτερον, ἢ ἐκότερον τῶ ἐδενὶ ἴσον, περιωθήσεται ἢ ἀποτετμημένη, ἀφ' ἧς ἢ μεγίστη, ἢ ἢ ἐλαχίστη ἀχθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 113. Τὴν μεγίστην εὐρεῖν τῶν τεταγμένων, τῶν ἐν τῇ καμπύλῃ, τῇ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ η δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένη. (πίν. ιζ'.)

Εἰλήφθω τὰ τῆς ἐν τῷ η δοθείσης ἐξισώσεως ἀπειροσά. ἔκθεν ἢ κατὰ τὸ θ συσταθήσεται ἐξίσωσις. καμίνε δὲ τῷ $\delta\gamma=0$, ἢ κατὰ τὸ ι γίνεται. ληφθεῖσας ἐν τῆς ἀποτετμημένης $\chi=\alpha$, ἢ ἀπὸ τῷ πέρατος αὐτῆς ταχθεῖσα, ἔσεται ἢ ζητημένη μεγίστη. (πίν. ιη. χ . 1.)

Ἡ γὰρ κατὰ τὸ η δοθεῖσα ἐξίσωσις κύκλον σημαίνει, ἡμιδιάμετρον ἔχοντα τὸ α . (§. 229.) τὸ ἕτερον ἄρα τῶν τῷ α περάτων τὸ τῷ κύκλῳ κέντρον εἶναι ἢ δὲ διὰ τῷ κέντρῳ μεγίστη.

Ἐάν δὲ ἐν τῇ κατὰ τὸ η ἐξισώσει τὸ α ἀντὶ τῷ χ τεθῇ, ἢ κατὰ τὸ κ ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ λ ἐμφαίνουσα τὴν ἐν τῷ κύκλῳ μεγίστην ἴσην τῇ ἡμιδιαμέτρῳ.

Κείδω δὲ τὸ $\delta\gamma=00$, ἔπερ ἐπὶ $\delta\chi=0$. καὶ ἐπὶ τὸ $\delta\gamma=00$, ἄρα καὶ τὸ $\gamma\delta\gamma=00$. διὸ τὸ $\alpha\delta\chi-\chi\delta\chi=0$, διὰ τὴν κατὰ τὸ θ ἐξίσωσιν. ἐξ ὧς πάλιν προκύπτει τὸ $\chi=\alpha$.

Ὅμοίως ληφθέντων τῶν ἀπειροσῶν τῆς κατὰ τὸ μ ἐξισώσεως, τῆς ὑπερβλήν ἐμφαινέσης, (§. 251.) καὶ τεθέντος τῷ $\delta\iota=0$, ἔσεται τὸ $z=0$. διὸ δὲ διὰ τὴν κατὰ τὸ μ ἐξίσωσιν τὸ $y^2=-\frac{1}{2}\alpha^2$. τὸ
ἄρα

ἄρα y ἐπίπλαστον μέγεθος ἐστίν, (ὄρα §. 42. τῷ 1. βιβλ.) ὅπερ ἐμφαίνει μηδεμίαν μεγίστην τεταγμένην εἶναι ἐν τῇ Ὑπερβολῇ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 114. Δοθέντες τῷ ΑΒΓΔ (πίν. ΙΗ. χ. 3.) ὀρθογωνίᾳ εὐρεῖν τὴν ἐλαχίστην εὐθείαν, τὴν διὰ τῷ σημείῳ Γ ἀγχομένην, καὶ ὑπὸ τῶν ἐκβληθεῶν πλευρῶν τῆς ΔΑΒ γωνίας περιεχομένην.

Ἔστω ἡ μὲν ΑΒ = α , ἡ δὲ ΒΓ = β , ἡ δὲ ζητούμενη ἐλαχίστη ΨΓΗ = y ἡ δὲ ΒΗ = χ .

Οὐκὼν ἡ μὲν ΑΗ = $\alpha + \chi$, ἡ δὲ ΓΗ = $\sqrt{\beta^2 + \chi^2}$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΗΑ :: ΗΨ :: ΗΒ :: ΗΓ, εἴτεν ὡς $\alpha + \chi :: y :: \chi :: \sqrt{\beta^2 + \chi^2}$, συσταθήσεται ἄρα ἡ κατὰ τὸ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ ϕ γίνεται, (πίν. ΙΖ.) καὶ τῶν ἀπειροσῶν ληφθέντων ἡ κατὰ τὸ π , τεθέντες δὲ τῷ $\delta y = 0$, (§. 112.) ἡ κατὰ τὸ ρ , ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ

σ . ληφθείσης ἔν τῆς ΒΗ = $\sqrt{\alpha\beta^2}$, ἡ ἀπὸ τῷ Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευχθεῖσα, καὶ ἐκβληθεῖσα εἴσεται ἡ ζητούμενη ἐλαχίστη εὐθεῖα.

Ἐάν δὲ τεθῇ τὸ $\delta y = 00$, ἐστὶ καὶ τὸ $y = 00$. διὸ διὰ τὴν κατὰ τὸ ϕ ἐξίσωσιν ἡ κατὰ τὸ τ πορίζεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ y , ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Φ. Ἰὸ ἄρα χ μέγεθος ἐπίπλαστον ἐστίν (§. 42. τῷ 1. βιβλ.) ὅπερ δηλοῖ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῷ Β ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη, καὶ ἐπ' ἀπειρον ἐκβαλλομένη ἐστίν ἡ μεγίστη εὐθεῖα τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΨ, ΑΗ πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 115. Ἐν ταῖς τοιαύταις ἄρα ἐκθέσεσι, τῷ ἀριθμῷ τῷ κλάσματος ἴσθ τῷ ὅθεν τεθέντος, ὡσαύτως καὶ τῷ ὀνομαστῷ, τὰ ζητούμενα πορίζονται.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 116. Τριχοτομηθείσης τῆς δοθείσης ευθείας ΑΒ (πίν. ιθ'. χ. 4) κατὰ τὰ Γ, Φ σημῶσα, αὐτὴς κατὰ τὸ Ε τέμνῃ αὐτήν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ περιεχόμενον ῥηθγώνιον, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΦ λόγον ἔχαι ἐλάσσονα παντὶς διδίντος λόγου.

Ἐστω ἡ μὲν ΑΓ = α, ἡ δὲ ΓΦ = β, ἡ δὲ ΓΒ = γ, ἡ δὲ ΕΕ = χ.

Οὕκ᾽ ἐν ἡ μὲν ΑΕ = α + χ, ἡ δὲ ΕΒ = γ - χ, ἡ δὲ ΓΦ = β - χ. διὸ τὸ μὲν ΑΕ. ΕΒ = α + β. γ - χ, τὸ δὲ ΓΕ. ΕΦ = χ. β - χ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ χ (πίν ιθ') ἐκθέσις, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ κατὰ τὸ Ψ, τὸν λόγον ἑμμετρίας, ἐν ἔχει τὸ ΑΕ. ΕΒ : ΓΕ. ΕΦ. εἰλήφθω δὲ ἡ ἀποφαστικὴ τῆς κατὰ τὸ ψ ἐκθέσεως, ἥπερ εἰσὶ τὰ κατὰ τὸ ω. καὶ κείθω ὁ τῷ κλάσματος ἀριθμητικῆς ἴσον τῷ ἑδνί, ὡς ἐν τῷ Α ὁράται. (§. 115.) ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἡ κατὰ τὸ C γίνεται, ἐξ ἧς, τῷ τετραγώνῳ πληρωθέντες, ἡ κατὰ τὸ D, καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἐξαχθείσης, ἡ κεία τὸ Ε. δύο ἂν ἦν τῷ χ ἴσα, ὧν τὸ μὲν καταφατικὸν ἐστίν, ἀπὸ τῆς ΓΒ λαμβανόμενον, τὸ δὲ ἀποφατικὸν ἀπὸ τῆς ΓΑ. ἐκατέρω δὲ τῶν τεθέντος ἐν τῇ κατὰ τὸ χ ἐκθέσει, δηλὸς ἔσται ὁ ζητούμενος λόγος, ὁ παντὸς διδίντος ἐλάσσων.

Ἐάν δὲ ὁ τῆς κατὰ τὸ ω ἐκθέσεως ὀνομαστῆς ἴσῃ τῷ ἑδνί τεθῇ, ἔσται τὸ χ = β. διὸ ἡ ΓΕ = ΓΦ. τὸ ἄρα ῥηθγώνιον ΓΕ. ΕΦ = ο. διὰ τοιούτου τούτου ὁ λόγος ὃν ἔχει τὸ ΑΕ. ΕΒ : ΓΕ. ΕΦ παντὸς διδίντος λόγου μείζων,

ΠΡΟ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

§. 117. Πάντων τῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἴσων διθίεντι κύβῳ, καὶ ὧν μία τῶν πλευρῶν δεδομένη ἐστίν, εὐρίεν τὸ ἔχον ἐλάσσονα ἐπιφάνειαν.

Ἐστω ὁ μὲν δοθὲν κύβος $= \alpha^3$, ἡ δὲ δοθεῖσα τῆ ζητούμενη παραλληλεπιπέδου πλευρὰ $= \beta$ καὶ ἡ μὲν ἐτέρα τῶν ἀγνώστων αὐτῆς πλευρῶν $= \chi$, ἡ δὲ ἑτέρα $= \gamma$.

Οὐκ ἔν τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον $\beta\chi\gamma = \alpha^3$. διὸ ἡ πλευρὰ $\gamma = \frac{\alpha^3}{\beta\chi}$. καὶ ἡ μὲν τῶν τῆ παραλληλεπιπέδου ἐπιφανειῶν $= \beta\chi$, ἡ δὲ ἡ $\frac{\alpha^3}{\chi}$, ἡ δὲ $\frac{\alpha^3}{\beta}$. τὸ τέτων ἄρα κεφάλαιον τὸ ἐν τῷ Α ἐστίν, (πίν. 19.) ὃ τὸ κλειροτόν τὸ ἐν τῷ Β, ὅπερ ταυτὸν τῷ κατὰ τὸ Γ. κειμένη δὲ τῆ ἀριθμητῆ τῆ κλάσματος ἴση τῷ ἑδενί (§. 115.) ὡς ἐν τῷ Δ ὁράται, προκύπτει τὸ χ ἴσον τοῦ κατὰ τὸ Ε. διὸ αἱ τρεῖς τῆ ζητούμενη παραλληλεπιπέδου πλευραὶ αἱ ἐν τῷ εἰσιν, ἂν δύο ἀλλήλαις ἴσῃ.

Ἐάν δὲ ὁ τῆ κλάσματος ὀνομασῆς ἴσον τῷ ἑδενί τεθῇ, ἔσεται τὸ $\chi = 0$. ἐκ τέτῃ δὲ ἔμνον ἑδέν προκύπτει, ἀλλὰ καὶ ἀναιρεῖται τὸ πρόβλημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 118. Ἐάν μηδεμία τῶν τῆ ζητούμενη παραλληλεπιπέδου πλευρῶν δεδομένη ᾖ, ὁ δοθὲν κύβος ἔσται τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον. ἔστω γάρ ἡ μὲν τῶν πλευρῶν χ , ἡ δὲ γ , ἡ δὲ z . ἔκν τὸ $\chi\gamma z = \alpha^3$. διὸ τὶ

Ε

$\gamma z =$

$\eta\zeta = \frac{\alpha^3}{\chi}$ ἢ ἄρα μία τῶν τῶν παραλληλεπιπέδων ἐπιφανειῶν ἐστὶν ἢ $\frac{\alpha^3}{\chi}$ μία δὲ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἢ $\frac{\alpha}{\sqrt{\chi}}$.
 (ἢ τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ τῆς $\frac{\alpha^3}{\chi}$ ἐπιφανείας) διὸ ἢ
 ἑτέρα τῶν ἐπιφανειῶν ἐστὶν ἢ $\frac{\alpha\chi}{\sqrt{\chi}}$ $\sqrt{\alpha}$. αὐτῇ δὲ ἴση
 ἔσω καὶ ἡ λοιπὴ, εἴτεν ἡ τρίτη. τὸ τέτων ἄρα κε-
 φαλαίον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ H, ἔ τὸ ἀπειροσέν τὸ κατὰ
 τὸ Θ. τεθέντος δὲ τῶ ἀριθμητῶ ἴσθ τῷ ἐν τῷ I,
 ἢ κατὰ τὸ K γίνεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Λ,
 ἐξ αὐτῆς δὲ ἢ κατὰ τὸ M. ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι ὁ δο-
 θείς κύβος ἐστὶ τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

§. 119. Πάντων τῶν ἀπειροαρίθμων Κώνων τῶν εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐγγραφθησομένων ἵκεῖν τὸν ἔχοντα μεγίστην ἐπιφάνειαν,

Ἐστω ἡμικύκλιον τῶ γεννήτορος τῆς δοθείσης σφαίρας κύκλος τὸ ABD, (πίν. IH. χ. 5.) καὶ ληφθείσης τῆς AΓ αὐτῆς ἔτυχεν, ἢ χθῶ πρὸς ὁρθάς αὐτῇ ἀπὸ τῶ Γ ἢ GB, καὶ ἐπεξέυχθῶ ἢ AB. ἔκῃν ἐκ μὲν τῶ ἡμικυκλίου ABD περιγεγενηθέντος σφαῖρας, ἐκ δὲ τῶ τριγώνου AΓB κῶνος εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένος γίνεται. κείῳ δὲ ἔν τῷτον εἶναι τὸν ζητούμενον. καὶ ἔσω ἢ μὲν τῆς σφαίρας διάμετρος $AD = \alpha$, ἢ δὲ $AG = \chi$. Οὐκῃν ἢ μὲν $ΔΓ = \alpha - \chi$,

ἡ δὲ $ΓΒ = \sqrt{αχ - χ^2}$, ἡ δὲ $ΑΒ = \sqrt{αχ}$. διὸ τὸ $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσον τῇ κατὰ τὸ $Ν$ ἐκθείσει, (πίν. ιθ.) ἥς τὸ ἀπειροσὸν τὸ κατὰ τὸ $Ξ$. τεθέντος δὲ τῷ ἀριθμητῷ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ $Ο$ (δ. 115) ἡ κατὰ τὸ π ἐξίτωσις γίνεται, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ $Ρ$, ἐξ ἧς δῆλον, ὅτι εἰάν ληφθῇ ἡ $ΑΓ = \frac{2}{3}$ τῆς $ΑΔ$ διαμέτρου, ἀχθῇ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ $Γ$ τῇ $ΑΔ$ ἡ $ΓΒ$, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ $ΑΒ$, ὁ ἐκ τοῦ $ΑΓΒ$ τριγώνου γινόμενος κῶνος ἐστὶν ὁ ζητούμενος.

Κ Ε Θ. Θ'.

Περὶ τῶν τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως ἀπειροσῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

§. 120. Ταῖς εὐθείας εὐρεῖν, ταῖς τὰ ἀπειροσῶν τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως ἐμφαινέσαι.

Εμφαινέτω ἡ $ΑΚΓ$ γραμμὴ καμπύλης ὅποιαν ᾖ τοιαύτην, (πίν. ιη. χ. 6,) εἶταν ἀπειροσὸν τῆς πρώτης τάξεως. καὶ ἡχθῶσαν ἀπὸ τῶν $Α$ καὶ $Γ$ σημείων ἐφαπτόμεναι τῆς $ΑΚΓ$ καμπύλης αἱ $ΑΔ$, $ΓΔ$, συμβάλλουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ $Δ$. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς $ΑΓ$ ἡχθῶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἡ $ΔΒ$. καὶ τῶν $ΑΚ$, $ΓΚ$ ἐπιζευχθεισῶν, ἐκβεβλήθω ἡ $ΔΓ$, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $Γ$, διαστήματι δὲ τῷ $ΓΒ$ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ $ΖΒΕ$. λέγω δὴ, ὅτι ἡ μὲν $ΒΔ$ ἀπειροσὸν ἐστὶ τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ δὲ $ΔΖ$ τῆς τρίτης.

Επὶ γὰρ ἡ $ΑΚΓ$ ἀπειροσὸν ἐστὶ τῆς πρώτης τάξεως, καὶ γωνία ἄρα ἡ $ΑΓΔ$ ἀπειροσὸν ἐστὶν ἑκατέρω τῶν

τῶν ΔΒΓ, ΕΔΓ παρὰβαλλομένη. καὶ τὸ ἡμίτονον ἔσται
τῆς ΑΓΔ, εἴταν τῆς ΒΓΔ, ἀπειροσὸν εἴη τοῖς τῶν ΔΒΓ,
ΕΔΓ παρὰβαλλομένων. καὶ ἡ ΒΔ ἔσται ἀπειροσὸν εἴη τῇ
τῆς ΔΓ παραδίσει. (τὰ γὰρ τῶν γωνιῶν ἡμίτονα ταῖς
ταῖς γωνίαις ὁποσείνῃσαι πληροῦν ἀνάλογον.) καὶ ἡ
ΔΙ ἀπειροσὸν τῆς πρώτης τάξεως εἴη· ἀπειροσὸν γὰρ
τῆς πρώτης τάξεως καὶ ἡ ΑΚΓ. ἡ ἄρα ΔΒ ἀπειρο-
σὸν τῆς δευτέρας τάξεως. (§. 9.) ἵπαι δὲ ὡς ΕΔ:
ΔΒ:: ΔΒ: ΔΖ, (ρ) εἴη δὲ ἡ ΔΒ ἀπειροσὸν τῇ τῆς ΕΔ
παραδίσει, καὶ ἡ ΔΖ ἔσται τῇ τῆς ΔΒ. καὶ ἡ ΔΒ
ἀπειροσὸν δίδωκεται τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ ἄρα ΔΖ
τῆς τρίτης τάξεως (§. 9.) ἀπειροσὸν εἴη.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

§. 121. Ἡ ΔΓ ὑπερέχει τῆς ΒΓ τῷ τῆς τρίτης
τάξεως ἀπειροσῷ ΔΖ. ἡ ΚΓ ἄρα χορδὴ, ἡ μεταξὺ
τῶν ΔΓ, ΒΓ ὑπερέχει τῆς ΒΓ ἀπειροσῷ ἐλάσσονι τῆς
ΔΖ. ἵπαι δὲ ἡ ΚΓ χορδὴ ὡς ἴση τῇ ΚΓ καμπύλῃ ἐκ-
λαμβάνονται, ὅτε δὴ μικρὰ δύνανται συγκολληθῆναι αὐτῇ, καὶ
ἡ ΚΓ ἄρα καμπύλη ὑπερέχει τῆς ΒΓ ἀπειροσῷ ἐλάσ-
σονι τῆς ΔΖ, εἴταν ἀπειροσῷ ἐλάσσονι τῇ τῆς τρίτης
τάξεως ἀπειροσῷ ΔΖ. ἐκλαμβάνειν ἄρα ἔξουσιν ἀντὶ
τῆς ΚΓ καμπύλης, ἡ τῆς ΔΓ ἐφαπτομένης τὴν ΒΓ.
(§. 21.) καὶ ἀντὶ τῆς ΑΚΓ καμπύλης, ἡ τῇ κεφα-
λαίᾳ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἐφαπτομένων, τὴν ΔΓ χορδὴν.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ.

§. 122. Ἐάν νῆμα τῇ ΨΒΔ καμπύλῃ ἰσόμηνος ἐφ' ἑ-
μοσμένον αὐτῇ ὄν, (πλν. ΠΙ. χ. 7.) κατὰ μικρὸν ἀπ' αὐτῆς
ἀποχωρίζοιτο, τὸ μὲν ὑπὸ τῇ νήματος γραφόμενον κῆμα
ΨΑΒ,

ΨΑΒ, ἐκτετυλιγμένη καλεῖται καμπύλη, ἡ δὲ ΨΕΔ
ἐκτετυλιγμένη, τὸ δὲ νῆμα ΑΒΔ, ἡμιδιάμετρος
φιλέσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 123. Τὸ νῆμα τῆς ἐκτετυλιγμένης ἐκτυλισσόμε-
νων, ἐφαπτομένη αὐτῆς γίνεται κατὰ διάφορα ση-
μεῖα, οἷον τὰ Γ, Δ, διὸ τὸ τῆς συμπτώσεως τῶν νη-
μάτων σημεῖον, οἷον τὸ Γ, αὖ συμπτώσει τῶν τῆς ἐκ-
τετυλιγμένης ἐφαπτομένων ἐκλαμβάνεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

§. 124. Πᾶσα καμπύλη οἷον ἐξ ἀπειροσῶν κύκλων
τόξων σύγγενηται, γραφέντων ἀποσήματι μὲν μιᾷ τῶν
φιλοσῶν ἡμιδιαμέτρων, κέντρῳ δὲ τῇ ἐαυτῶν συμπτώσει.

Ἔστω γὰρ ἐκτετυλιγμένη μὲν ἡ ΨΒΔ, ἐκτετυλιγμένη
δὲ ἡ ΨΖ, φιλέσαι δὲ ἡμιδιάμετροι ὕψιστα ἀλλήλων,
καὶ τῆς ΨΕΔ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐκβεβλήδω
δὲ ἡ ΑΓ, καὶ κέντρῳ μὲν τῇ συμπτώσει Γ, διατή-
ματι δὲ τῇ φιλίᾳ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΒ τόξον κύκλου γε-
γράφω τὸ ΒΗ.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΔ = ΑΓ + ΕΔ, (§. 122.) ἔτι
δὲ τὸ αὐτὸ ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ = ΦΓ + ΓΔ, τὸ ἄρα
ΦΓ + ΓΔ = ΑΓ + ΕΔ. ἀλλὰ τὸ ΦΓ = ΦΗ +
ΗΓ, τὸ ἄρα ΦΗ + ΗΓ + ΓΔ = ΑΓ + ΕΔ, διὸ τὸ
ΗΓ + ΓΔ + ΕΔ = ΑΓ + ΦΗ. ἀλλὰ τὸ ΑΗ = ΦΗ =
ΑΦ, τὸ ἄρα ΗΓ + ΓΔ + ΕΔ = ΑΦ. ἔτι δὲ ἡ ὑπερ-
χῆ, καὶ ἢν αἱ ἐφαπτόμεναι ΗΓ, ΓΔ τῆς καμπύλης
ΕΔ ὑπερέχουσιν, ὅθεν τὸ ΗΓ + ΓΔ + ΕΔ, ὑπερτον ἀ-
πειροσθ τῆς ἰσότητος τάξεως (§. 121.) ἡ ἄρα ΑΦ ἴση
ἔσται τῇ σιγημένῃ, ὑπερὶ χῆ, ἐλάσσων ἰσὺν ἀπειροσθ τρι-

της τάξεως. τὸ ἄρα ΒΦ τόξον τῇ ΒΑ καμπύλῃ μι-
κρὸν δὲν ταυτίζεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται,
ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ΨΖ καμπύλης μέρη τοῖς ὁμοίως
ἀναγεγραμμένοις κύκλων τόξοις ταυτίζεται· ἐκ τούτου
ἐν δῆλον τὸ προκείμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 125. Τὴν ἔκθεσιν εὐρεῖν, τὴν ἐμφαίνουσιν τὸ
τόξον, τὸ ὑποτεῖνον γωνίαν περιεχομένην ὑπό τε ἐφαπ-
τομένης καμπύλης ἀπειροσῆς τῆς πρώτης τάξεως, καὶ
τῆς χορδῆς αὐτῆς.

Ἐξω ἀπειροσὲν πρώτης τάξεως ὁποιασὺν καμπύλης
ἢ ΑΖΒ, (πίν. ΙΗ. χ. 8.) ἥς ἐφαπτομένη μὲν ἢ ΑΨ,
χορδὴ δὲ ἢ ΑΒ· τόξον δὲ κύκλου τὸ ΒΨ ἀναγεγραμμέ-
νον κέντρῳ τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ. δὲ δὴ ἐν
εὐρεῖν τὴν ἔκθεσιν τὴν ἐμφαίνουσιν τὸ ΒΨ τόξον, τὴν
ὑποτεῖνον τὴν ΨΑΒ γωνίαν.

Ἡ' χθω δὴ ἀπὸ τῆ Β ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης
ἢ ΒΔ τῇ ΑΨ συμβάλλουσα κατὰ τὸ Δ. καὶ πρὸς ὀρ-
θὰς ταῖς ΑΔ, ΔΒ ἡχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ. καὶ κέντρῳ
μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ τόξον κύκλου γεγραφί-
θω τὸ ΒΕ. καὶ ἔσω ἢ μὲν ΑΓ = η, ἢ δὲ ΑΖΒ = δσ,
τὸ δὲ ΒΨ = τ.

Καὶ ἐπεὶ ἢ ΑΖΒ καμπύλη ὡς τόξον κύκλου ἐκλαμ-
βάνεται, (§. 124) αἱ δὲ ΑΓ, ΒΓ πρὸς ὀρθὰς εἰσι
ταῖς ἐφαπτομέναις ΑΔ, ΒΔ, ἐπ' αὐταῖς ἄρα, (σ)
εἴτεν ἐπὶ τῇ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν σημείῳ Γ τὸ κέν-
τρον ἐστὶ τῆ ΑΖΒ τέξε. διὸ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ μὲν
ΑΓ, ΓΒ, ὡς ἀπὸ τῆς κέντρου, αἱ δὲ ΑΔ, ΒΔ ὡς ἀπὸ
τῆς αὐτῆς σημείῳ ἀχθῆσαι ἐφαπτόμεναι (τ) ἐπεὶ δὲ
τῆ

(σ) Ὅρα τὴν ιθ'. Προτ. τῇ γ'. βιβλ. τῆς Γεωμετρ. (τ) Κα-
τὰ τὴν Β. Συνίπ. τῆς λς'. τῆ αὐτ. βιβλ.

τῷ ΔΑΓΒ τετραπλεύρῳ ἐρῶν ἔστιν ἑκατέρω τῶν ΓΑΔ, ΓΒΔ γωνιῶν, δυσὶν ὁρθαῖς ἄρα ἴσαι ἔσονται αἱ ΑΓΒ, ΑΔΒ. ἔξ ἧς δὴλον, ὅτι ἡ ΑΓΒ = ΒΔΕ, διὸ ὁμοιοῦσιν οἱ ΓΑΖΒ, ΔΒΕ τομέας. ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΔ + ΔΒ = ΑΕ, αἱ δὲ ΑΔ + ΔΒ ὑπερέχουσι τῆς ΑΒ ἐλαττον ἀπειροσθ τρίτης τάξεως, (§. 121.) καὶ ἡ ΑΕ ἄρα ὑπερέχει τῆς ΑΒ ἐλαττον ἀπειροσθ τρίτης τάξεως. ἔστι δὲ ἡ ὑπερβολὴ αὕτη ἡ ΨΕ. ἡ ἄρα ΨΕ ἐλάσσων ἀπειροσθ τρίτης τάξεως. τὸ ἄρα ΒΕ μικρὸν δύνει ταυτίζεσθαι τῷ ΒΨ. ἀντ' ἐκείνου ἄρα τῷτο λαβεῖν ἔξεστιν. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΓ : ΑΖΒ :: ΔΒ : ΒΕ, διὰ τὴν τῶν τῶν ΓΑΖΒ, ΔΒΕ τομέων ὁμοιότητα, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΑΓ : ΑΖΒ :: ΔΒ : ΒΨ, ἔτερον ὡς η : δσ :: $\frac{1}{2}$ δσ : Τ ἢ γὰρ ΔΒ = $\frac{1}{2}$ ΑΖΒ = $\frac{1}{2}$ δσ. (§. 121.) διὸ τὸ ζητούμενον τόξον ΒΨ = Τ = $\frac{\delta\sigma}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

§. 126. Τὴν ἐκθεσιν εὐρεῖν, τὴν σιχαῖον δευτέρας τάξεως ἐμφαίνουσαν ὁποιασὲν τεταγμένης καὶ καμπύλης.

Ἐστω καμπύλη ὁποιασὲν διὰ τῷ ἄξονος ΑΔ. γεγραμμένη, ἡ ΑΕΚ. (πίν. ΙΗ. χ. 9.) καὶ εἰλήφθω ἀπειροσθ τῆς πρώτης τάξεως ἴσα, τὰ ΒΓ, ΓΔ, καὶ τετάχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΦ, ΔΚ. καὶ ἀπὸ τῶν Ε καὶ Φ σημείων ἤχθωσαν αἱ ΕΜ, ΦΛ τῇ ΑΔ παράλληλοι. ἐπεξεύχθωσαν δὲ αἱ ΕΦ, ΦΚ, ὧν ἡ ΕΦ ἐκβληθεῖσα, συμβαλέτω τῇ ΔΚ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ζ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Φ, διαστήματι δὲ τῷ ΦΚ τόξον κύκλου γεγραφέθω τὸ ΚΓ. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΕ = γ, ἡ δὲ ΑΕ = σ.

Οὐκ ἔνν ἡ μὲν ΕΦ = δσ, ἡ δὲ ΦΜ = δγ. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν γωνία ΕΜΦ = ΦΛΖ, ἡ δὲ ΦΕΜ = ΖΦΛ, ἡ δὲ

$EM = \Phi\Lambda$, ἄρα καὶ ἡ $\Phi M = Z\Lambda$, καὶ $E\Phi = \Phi Z$. διὸ ἡ $KZ = K\Lambda - Z\Lambda = K\Lambda - \Phi M = -\delta\delta\gamma$. τῆς KZ , ἡ ὑπεροχὴ τῶν $\Phi\Gamma$, $K\Delta$ τετραγμένων ἀπειροσόν ἐστὶ τῆς δευτέρας τάξεως. ὅπερ ἀποφατικὸν μὲν ἐστίν, εἰάν τὸ τῆς καμπύλης κοῖλον ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐτραμμένον ᾗ, αἶον τὸ εὐρεθὲν $KZ = -\delta\delta\gamma$ καταφατικὸν δὲ, (χ. 10.) εἰάν τὸ κυρτὸν, οἷον τὸ $KZ = \delta\delta\gamma$.

Ἐπεὶ δὲ ἡ $PZ = \Phi P - \Phi Z = \Phi K - E\Phi$, ἡ ἄρα τῶν χορδῶν $E\Phi$, ΦK ὑπεροχὴ ἴση τῇ PZ . ἀλλ' ἡ τῶν χορδῶν ὑπεροχὴ ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ τῶν $E\Phi$, ΦK καμπύλων, (χ. 121.) ἡ ἄρα τῶν $E\Phi$, ΦK καμπύλων ὑπεροχὴ ἡ PZ ἐστίν. ἀλλὰ ἡ τῶν ὑπεροχῶν ἀπειροσῶν ὥσων τῆς πρώτης τάξεως ἀπειροσὸν δευτέρας τάξεως ἐστίν, ἡ ἄρα $PZ = \delta\delta\sigma$. ἐκέν τὸ $-\delta\delta\sigma$ ἀπειροσὸν εἰσχιεῖν δευτέρας τάξεως ὁποιασὲν καμπύλης σημαίνει.

Ἐάν δὲ ἀνίστα ᾗ τὰ ἀπειροσά, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, γεγονέτω μὲν ἡ αὐτὴ καλῶς κελευθὴ, (χ. 11.) εἰλήφθω δὲ ἡ $\Phi N = EM$, καὶ ἡ $\chi\theta$ ἀπὸ μὲν τῆς N ἢ $N\Psi$ παράλληλος τῇ $Z\Delta$, ἀπὸ δὲ τῆς Ψ ἢ $\Psi\Upsilon$ τῇ $\Lambda\Delta$. ἐκέν διὰ τὰ προσηρημένα ἡ $E\Phi = \Phi\Psi$, καὶ ἡ $\Phi K = \Phi O$. διὸ ἡ $\Psi O = \Phi O - \Phi\Psi = \Phi K - E\Phi$. ἡ ἄρα τῶν ΦK , $E\Phi$ χορδῶν ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ ΨO . διὸ δὴ ἡ $\Psi O = \delta\delta\sigma$. ὁμοίως ἡ $\Upsilon K = \Upsilon\Lambda - K\Lambda = \Psi N - K\Lambda = \Phi M - K\Lambda$. διὸ ἡ $\Upsilon K = -\delta\delta\gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 127. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ληφθείσης τῆς ἀποτεταμημένης $\Lambda\beta = \chi$, ἐσείλω ἡ μὲν $B\Gamma = EM = \delta\chi$, ἡ δὲ $N\Delta = \Phi\Lambda - \Phi N = \Phi\Lambda - EM$. διὸ ἡ $N\Delta = \delta\delta\chi$.

ΛΗΜΜΑ.

§. 128 Αἱ εὐθύγραμμοι γωνία, οἷον αἱ $Z\Lambda E$, $Z\Lambda\Delta$ λόγον ἔχουσι (χ. 12.) συγκαίμενον ἐκτὸς τῷ λόγῳ ὃν ἔχουσι τὰ

ἰα ῥόξα, ἐφ' αὐτῆς βεβήκασι, καὶ ἐκ τῆς ἀντιστοιχίας τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν. κέντρω γὰρ τῷ Α καὶ διαστήματι ἰσχυροῦσι, τοῖς ΑΓ, ΑΔ ῥόξα κύκλου γεγραμμένω ἰα ΓΒ, ΔΕ. καὶ ἐπεὶ ὡς γωνία ΖΑΕ: ΖΑΔ:: ΖΕ: ΖΔ, (υ) ἔχει δὲ καὶ ΖΕ: ΖΔ λόγον συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΖΕ: ΓΒ, καὶ ΓΒ: ΖΔ, (φ) καὶ γωνία ἄρα ἡ ΖΑΕ: ΖΑΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΖΕ: ΓΒ, καὶ ΓΒ: ΖΔ. ἀλλ' ὡς ΖΕ: ΒΒ:: ΑΖ: ΑΓ. (χ) ἡ ἄρα ΖΑΕ: ΖΑΔ λόγον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ῥο ΓΒ: ΖΔ, καὶ τῆς ΑΖ: ΑΓ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Β' :

§. 129. Ἐάν ἀπὸ τῶν ἐγγυῖαίων σημείων Α, Δ, Φ (πίν. κ. χ. 1.) τῆς ὁποιασὲν καμπύλης ΤΑΔΦ ἐφαπτόμεναι μὲν ἀχθῶσιν αἱ ΑΨ, ΓΔΖ, ΦΕ, κάθετοι δὲ αὐταῖς αἱ ΑΠ, ΔΜ, ΦΜ, συμβάλλουσιν ἀλλήλαις κατὰ ἰα π καὶ Μ σημεία, αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνία ΑΠΔ, ΔΜΦ ὡς ἴσαι λογιζήσονται.

Ἐπεὶ γὰρ ἰα ΑΔ, ΔΦ ὡς ῥόξα κύκλων ἐκλαμβάνονται, (§. 124.) ἰα μὲν ἄρα Π καὶ Μ εἰσὶ ἰα ἐαυτῶν κέντρα, αἱ δὲ ΔΠ, ΜΔ αἱ αὐτῶν ἡμιδιαμέτρους. (ὄρα τὴν ἐν τῷ 125. 6. δεξι.) ἡ ἄρα γωνία ΑΠΔ πρὸς τὴν ΔΜΦ λόγον ἔχει συγκείμενον ἕκτε τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ΑΔ: ΔΦ καὶ ἐκ τῆς ἐν ἔχει ΔΜ: ΑΠ. (§. 128) εἴτεν εἴναι ὡς ΑΠΔ: ΔΜΦ:: ΑΔ: ΔΜ: ΔΦ. ΑΠ. ἀλλὰ ῥο ΑΔ. ΔΜ=ΔΦ. ΑΠ: διὰ γὰρ τὴν τῶν Α, Δ, Φ σημείων

P 5

μέ-

(υ) Ὅσοις γὰρ βῆμασι ἴσιν τὰ τόξα ΖΕ, ΖΔ, τοσάτοις καὶ γωνίαι ΖΑΕ, ΖΑΔ. μίτρα γὰρ, τῶν γωνιῶν τὰ τόξα. (φ) Κατὰ τὸ α'. Πόρισμα. τὰ μετὰ τὴν Ν. Πρωτ. τὰ ε'. τῆς Γεωμετρ. βιβλ. τὸ ἐν σελ. 135. (χ) Ὅρα τὴν Σύντ. τὴν μετὰ τὴν β'. τὰ ιβ'. Γεωμετρ. βιβλ. τὴν ἐν σελ. 240.

μέων μεγίστην ἐγγύτητα τὸ μὲν $\Lambda\Delta$ ὡς ἴσον τῷ $\Delta\Phi$ ἐκλαμβάνεται, ἡ δὲ $\Delta\mathbf{M}$ ἢ $\Lambda\mathbf{H}$ ἄρα καὶ ἡ $\Lambda\mathbf{P}\Delta = \Delta\mathbf{M}\Phi$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.

§. 130. Καὶ γωνίαι ἄρα αἱ $\Psi\Gamma\Delta$, $\cdot\mathbf{Z}\mathbf{E}\Phi$, αἱ πρὸς τῇ συμπύκναι τῶν ἐφαπτομένων ἴσιν ἀλλήλαις ἔσονται. ἔστι γὰρ ἡ μὲν $\Psi\Gamma\Delta = \Lambda\mathbf{H}\Delta$, ἡ δὲ $\mathbf{Z}\mathbf{E}\Phi = \Delta\mathbf{M}\Phi$. ὅρα τὴν δεῖξιν ἐν §. 125,

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

§. 131. Ἐάν ἄρα ἐπιζευχθῇ ἡ $\Lambda\Delta$ χορδὴ, καὶ ἐκβληθῶσα συμπέσῃ κατὰ τὸ $\mathbf{K}$ τῇ τεταγμένη $\Phi\Theta$ ἐκβληθείσῃ, ἡ $\mathbf{K}\Delta\Phi$ γωνία, ἡ ὑπὸ τῶν χορδῶν $\Lambda\mathbf{K}$, $\Delta\Phi$ περιεχομένη δίχα ἡμικηθήσεται ὑπὸ τῆς $\Gamma\Delta\mathbf{Z}$ ἐφαπτομένης. ἐπεὶ γὰρ ἡ $\Gamma\Delta\Lambda = \Gamma\Delta\Delta$, (ὅρα τὴν $\tau\beta$ 125. 6. δεῖξ.) ἡ $\Psi\Gamma\Delta$ διπλασία ἐστὶ τῆς $\Gamma\Delta\Lambda$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $\mathbf{Z}\mathbf{E}\Phi$ διπλασία τῆς $\mathbf{Z}\Delta\Phi$. ἔστι δὲ ἡ $\Psi\Gamma\Delta = \mathbf{Z}\mathbf{E}\Phi$, (§. 130.) ἄρα καὶ ἡ $\Gamma\Delta\Lambda = \mathbf{Z}\Delta\Phi$. ἀλλὰ τῇ $\Gamma\Delta\Lambda = \mathbf{K}\Delta\mathbf{Z}$. ἄρα καὶ ἡ $\mathbf{Z}\Delta\Phi = \mathbf{K}\Delta\mathbf{Z}$. ἡ ἄρα $\mathbf{K}\Delta\Phi$ δίχα ἡμικηθήσεται ὑπὸ τῆς $\Gamma\Delta\mathbf{Z}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.

§. 132. Ἐάν ἔν ἡ $\Lambda\mathbf{E} = \gamma$, ἔσται ἡ $\mathbf{K}\mathbf{Z} = -\frac{1}{2}\delta\delta\gamma$. ἐπεὶ γὰρ ἡ $\mathbf{K}\Delta\Phi$ γωνία δίχα ἡμικηθήσεται ὑπὸ τῆς $\Delta\mathbf{Z}$, (§. 131.) ἔστιν ἄρα ὡς $\Delta\Phi : \Delta\mathbf{K} :: \Phi\mathbf{Z} : \mathbf{Z}\mathbf{K}$. ἀλλ' ἡ $\Delta\Phi$ ὡς ἴση τῇ $\Delta\mathbf{K}$ ἐκλαμβάνεται, (§. 121.) ἄρα καὶ ἡ $\Phi\mathbf{Z}$ τῇ $\mathbf{Z}\mathbf{K}$. ἔστι δὲ ἡ $\mathbf{K}\Phi = -\delta\delta\gamma$, (§. 126.) ἡ ἄρα $\mathbf{K}\mathbf{Z} = -\frac{1}{2}\delta\delta\gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.

§. 133. Ἡ μὲν ἄρα $\mathbf{K}\Delta\Phi$ γωνία, ἡ ὑπὸ τῶν χορδῶν περιεχομένη ἴση ἐκείνῃ τῶν $\Lambda\mathbf{H}\Delta$, $\Delta\mathbf{M}\Phi$ τῶν ὑπὸ τῶν

τῶν καθεύον περιεχομένων· ἡ δὲ ΚΔΖ, ἡ ΖΔΦ, ἡ ὑπὸ
τῆς χερδῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιεχομένη ἡμίσεια ἐκα-
τέρας τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ. ἐπεὶ γὰρ ἐκείρα τῶν ΚΔΦ,
ΖΕΦ διπλασία τῆς ΖΔΦ, ἔστιν ἄρα ἡ ΚΔΦ = ΖΕΦ.
ἀλλὰ τῇ ΖΕΦ ἴση ἐκείρα τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ, (ὅρα
τὴν δ. 125. §.) ἄρα καὶ ἡ ΚΔΦ ἴση ἐκείρα
τῶν ΑΠΔ, ΔΜΦ.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Δ'.

§. 134. Τὴν ἔκθεσιν εὐρεῖν, τὴν ἐμφαίνουσαν τὴν Φι-
λῶσαν ἡμιδιάμετρον πάσης καμπύλης, διὰ τῆς ἄξονος
γεγραμμένης.

Πᾶσι ἀπὸ τῆς Φ ἡ ΦΟ πρὸς ὀρθάς τῇ ΔΚ. καὶ
κίττω μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΦ τόξον
κύκλου γεγράφθω τὸ ΦΥ. κείθω δὲ τὴν μὲν
 $ΤΞ = χ$, τὴν δὲ $ΛΞ = y$, τὴν δὲ $ΔΦ = δσ$, τὴν
δὲ $ΔΜ = N$. καὶ ἐπεὶ ὡς ΚΔ : ΔΗ :: ΚΦ : ΦΟ,
ἡ δὲ ΚΔ ὡς ἴση τῇ ΔΦ ἐκλαμβάνεται, (§. 121.)
ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΔΦ : ΔΗ :: ΚΦ : ΦΟ, ἥτοι ὡς δσ.
δχ :: — δδγ : ΦΟ, ἡ ἄρα $ΦΟ = - \frac{δχδδγ}{δσ}$. διὸ καὶ τὸ
τόξον $ΦΥ = - \frac{δχδδγ}{δσ}$. διαφέρει γὰρ τῆς ΦΟ ἀπειρο-
σῶς μεγέθει. ἐπεὶ δὲ οἱ τομῆς ΔΦΥ, ΜΔΦ ὅμοιοι εἴ-
σιν, (ἐκ τῆς 133. §. δῆλον.) ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΜΔ :
ΔΦ :: ΔΥ : ΦΥ : εἴηεν ὡς Η : δσ :: δσ : — $\frac{δχδδγ}{δσ}$. διὸ
τὸ Η ἴσον τοῖς καὶ τὸ Σ, ἡ τοῖς κατὰ τὸ Τ, (πίν. 19.) τοῖς ἐν-
τοῖς ἀντὶ δσ3 τῆς ἴσου ἀντὶ. ἔστι γὰρ τὸ δσ = $\sqrt{δχ^2 + δγ^2}$
Εἴω

Ἔσω δὲ (πίν. κ. χ. 2.) καὶ ἡ ΔΑΒ καμπύλη. ἀπὸ δὲ τῶν ἐγγυσιότατων αὐτῆς σημείων Α καὶ Β ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι μὲν τῆς καμπύλης αἱ ΑΠ, ΒΣ, ἀλλήλαις μὲν κατὰ τὸ Ο, τῷ Αἴξονι δὲ κατὰ τὸ Π καὶ Σ σημεῖα συμβάλλουσαι· πρὸς ὁρθὰς δὲ αὐταῖς αἱ ΑΚ, ΒΚ, κατὰ τὸ Κ συμπέπτεσαι· τῶν γινόμεναι δὲ αἱ ΑΕ, ΒΜ, κατὰ τὸ Φ καὶ Ζ σημεῖα συμβάλλουσαι τῇ ΚΦ, τῇ ἀπὸ τῷ Κ ἀχθείσῃ παραλλήλῳ τῷ ΣΛ Ἀξονι. ἤχθω δὲ καὶ ἡ ΑΓ ὀπίσθας τῶν ΣΛ, ΦΚ παράλληλος. καὶ ἔσω ἡ μὲν ΑΕ = Χ, ἡ δὲ ΑΡ = Υ, ἡ δὲ ΑΦ = Ζ, ἡ δὲ ΑΚ = Η. Ἐκὼν ἡ μὲν ΕΜ = ΑΗ = δχ, ἡ δὲ ΒΗ = δγ + δλ. ἐπεὶ δὲ ὡς ΑΕ: ΕΝ:: ΑΦ: ΦΚ· ἀλλ' ἡ ΕΝ ὑποκάθετος ἔσται, ἴση ἐστὶ τῇ καθολικῇ ὑποκάθετῳ, εἴην τῷ γδγ, (φ. 85.) ὡς

ἄρα γ: $\frac{\gamma\delta\gamma}{\delta\chi}$: Ζ: ΦΚ. διὸ ἡ ΦΚ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Υ.

(πίν. 10.) ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΗ: ΑΒ:: ΑΦ: ΑΚ, (ὡς ἐνθάδε γὰρ ἐκλαμβάνομένης τῆς ΑΒ, ὁμοιά εἰσι τὰ ΒΑΗ, ΑΦΚ τρίγωνα.) ἥτοι ὡς δχ: δσ:: Ζ: ΑΚ. ἡ ἄρα ΑΚ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Φ. εἰάν ἔν ληφθῇ τὸ αὐτῆς ἀπειροσὸν ἴσον ἔσται τῷ κέντρῳ, αὐτῇ παραλιθόμενον. διὸ ἡ κατὰ τὸ χ ἐξίσωσις σηνίσσεται, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Ψ γίνεσθαι, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Ω, τοθενίος δὴθεν ἀντὶ τῷ Δε τῷ δγ. ἐν τῇ κατὰ τὸ Φ ἔν ἐξίσωσις, τοθενίος ἀντὶ τῷ Ζ, τῷ ἴσθ αὐτῷ, ἔσθαι ἡ ΑΚ = Η, ἴση τοῖς κατὰ τὸ α.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'.

φ. 135. Ἦν κατὰ τὸ Σ ἡ Υ ἔκθεσις, ὡσαύτως καὶ ἡ κατὰ τὸ α τὴν Φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαίνει· ἀλλ' ἐν μὲν τῇ εὐρέσει τῆς κατὰ τὸ Σ ἐν τῶν ἀπειροσῶν. ἥτοι τὸ δχ ὡς ἀμειλίβλητον ἐλογίσθη, ὅπερ ἐστὶν ἀπὸ

ἀπειροσὸν αὐτῆ ἐλήφθη· ἐν δὲ τῇ εὐθείᾳ τῆς κατὰ τὸ α εὐθὺν ἀμετάβλητον λελογίσαι.

Σ Η Μ Β Ι Ω Σ Ι Ξ Β'.

§. 136. Τῆς δοθείσης δὲ ἐξισώσεως τὰ ἀπειροσὰ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως λαμβάνειν διτ', καὶ αὐτὶ τῷ δχ, δχ² καὶ διγ, ἢ δδγ, ἢ δδχ. ἵα ἴσα αὐτοῖς τιθέναι ἐν ταῖς εὐθεσίαις ἐκδέσσει ταῖς τὴν φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαινέσαι, ὅπως ἂν ἡ φιλοῦσα εὐθεὺς ἡμιδιάμετρος τῆς ὑπὸ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐμφαινομένης καμπύλης. καὶ εἰάν μὲν τῇ κατὰ τὸ α ἐκδέσει χρώμεθα, εὐθὺν ἀμετάβλητον λογιζέμεν τῶν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ἀγνώστων· εἰάν δὲ τῇ κατὰ τὸ Σ, τὸ δχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

§. 137. Τὴν ἐκθεσιν εὐκλῆ, τὴν ἐμφαινέσαν τὴν φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον πάσης καμπύλης, διὰ τῆς Ε' εἰσας γεγραμμένης.

Ἔστω καμπύλη ὁποιαῦν ἡ ΒΕΖ, διὰ τῆς Ε' εἰσας Α (πίν. κ. χ. 3.) ἀναγεγραμμένη. ἀπὸ δὲ τῶν ἐγγυτάτων αὐτῇ σημείων Β, Ε, Ζ ἐπὶ τὸ Α ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΕΑ, ΖΑ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήμασι δὲ τις ΑΒ, ΑΕ, τίς τε κύκλων γεγραφθῶ τῷ ΒΓ, ΕΦ, ἥχθωσαν δὲ αἱ τῶν Β καὶ Ε σημείων πρὸς ὁρθὰς ταῖς ΑΕ, ΑΖ αἱ ΒΜ, ΕΟ. ἐπιζεύχθω δὲ ἡ χορδὴ ΒΕ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ ΑΖ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Λ, καὶ συνεστώτω γωνία ἡ ΟΕΠ = ΜΒΕ. ἐπιζεύχθω δὲ ἡ ΕΖ χορδὴ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΖ τόξον κύκλου γεγραφθῶ τὸ ΖΡ, καὶ νενοήθωσαν αἱ ΕΨ, ΖΨ πρὸς ὁρθὰς ταῖς κατὰ τὰ Ε καὶ Ζ σημῶσι ἰφαπτομέναις τῆς καμπύλης. ἴσῳ δὲ ἡ μὲν ΑΒ = γ, ἡ δὲ ΕΖ = δσ, τὸ δὲ τόξον ΕΦ = δχ, ἡ δὲ ΕΨ = Η. κείδω δὲ ἡ ΒΜ = ΕΟ. Καί

καὶ ἐπεὶ τὸν ΕΒΜ, ΠΕΘ τριγώνων αἱ μὲν πρὸς τοῖς
Μ καὶ Ο γωνίαι ἰσαί, ἢ δὲ ΕΒΜ = ΠΕΘ, ἐστὶ δὲ καὶ
ΒΜ = ΗΟ, ἀρα καὶ ΗΒΜ = ΗΠΟ, καὶ ΗΒΜ = ΗΟ.
διὸ καὶ Η ΗΙ = ΗΠ, (αἱ γὰρ ΗΜ, ΦΟ ἀπὸ τοῦ αἵματος
ταῖς ΕΙ, ΦΠ παρὰ τὴν ΕΙ, ΕΠ, ΕΚ, ΕΝ, ΕΞ, ΕΥ, ΕΦ, ΕΘ
ΦΖ-ΕΓ, ΑΒ καὶ ΗΦΖ-ΦΗ = ΖΗ ἀρα καὶ ΗΦΖ-ΕΙ =
ΖΗ, καὶ δὲ Η ΠΑ = ΠΕΑ + ΕΑΑ, ἐστὶ δὲ Η ΒΕΑ,
ἐπεὶ ἡ ΒΕΜ = ΕΠΑ, ὡς δὲ δεικνύται, αἱ ἀρα ΕΑΠ +
ΕΑΑ = ΠΕΑ + ΕΑΑ, ἔκβν ἡ ΕΑΠ = ΠΕΑ, οἱ ἀρα
τομήτες ΑΕΦ, ΕΠ ὁμοιοὶ ἀλλήλοις ἐσίν, ὡς ἀρα ΑΕ:
ΕΠ :: ΕΓ: ΠΙ, ἢ τοῖς ὡς γ: δχ :: δα: ΠΙ, τὸ ἀρα ΠΙ =
δχδρ, ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΕΗ: ΕΠ :: ΖΗ: ΖΙ, (ὡς

εὐθετῶν γὰρ ἐκ ἀκμολογικῶν τῶν ΕΦ, ΖΙ τοῦτων, ὁμοιο-
ἐσιν τὰ ΗΕΦ, ΗΠΖ τριγώνων) ἔτιν ὡς ΕΖ: ΕΦ ::
ΖΗ: ΖΙ, (ἰαν γὰρ ἡ ΕΗ τῇ ΕΖ, κατὰ τὸ §. 121.)
ἀρα καὶ ὡς δ: δχ :: -δδγ: ΖΙ, τὸ ἀρα ΖΙ =
-δχδδγ ὅλον ἀρα τὸ τοῦτον ΕΖ = δχδρ - δχδδγ, ἐπεὶ
δὲ ἡ γωνία ΑΕΖ = ΕΨΖ, (§. 133.) οἱ τομήτες ἀρα
ΨΕΖ, ΕΠΖ ὁμοιοὶ ἐσίν, διὸ ὡς ΨΕ: ΕΖ :: ΖΠ:
ΖΟΙ ὡς Η: δα :: δα: δχδρ - δχδδγ, ἐστὶ δὲ δὴ λαν, ἐστὶ

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 138. Πν τῇ εὐθετείᾳ ἐκδοῦν τὸ δχ ὡς μὲν
ταβλῆντον ἐλῆφθῃ. εὐθετήσεται δὲ ἡ αὐτὴ ἐκδοῦν τῇ

μὲν $\delta\gamma$, ἢ τῷ $\delta\sigma$ ὡς ἀμεταβλήτῃ ληφθέντων, τῷ δὲ $\delta\chi$, ὡς μεταβλητῇ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

§. 139. Ἐμφαινέτω ἡ ΒΕΖ ἐποικανὲν καμπύλην. (πίν. κ'. χ. 4.) ἀπὸ δὲ τῆς Ἑσίας αὐτῆς Α ἐπὶ τὰ ἐγγιστα σημεῖα β , Γ , Δ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΑΕ$, $ΑΖ$, καὶ ἡχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ $ΜΒΗ$, $ΟΕΚ$, $ΖΔ$, ἀλλήλαις συμβάλλουσαι κατὰ τὰ Η καὶ Δ σημεῖα. ἐπιζεύχθω δὲ ἡγε χορδὴ $ΕΖ$, καὶ ἡ $ΒΕ$, ἑκατέρωθεν αὐτῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβεβλήθω. καὶ ἀπὸ μὲν τῷ Α ἡχθωσαν πρὸς ὁρθὰς ταῖς $ΜΗ$, $ΝΑ$, $ΟΚ$, $ΙΖ$ αἱ $ΑΜ$, $ΑΝ$, $ΑΟ$, $ΑΠ$. ἀπὸ δὲ τῶν β , Γ , Δ ταῖς $ΜΗ$, $ΟΔ$, $ΔΖ$ αἱ $ΒΧ$, $\Gamma\chi$, $\Delta\Psi$, κατὰ τὰ Χ καὶ Ψ σημεῖα ἀλλήλαις συμβάλλουσαι. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήμασι δὲ τοῖς $ΑΒ$, $ΑΕ$ τόξα κύκλων γεγραφθῶ τὰ ΒΓ, ΕΦ. ὡσαύτως κέντρῳ τὸ Η, καὶ διαστήματι τῷ ΗΗ γεγραφθῶ τόξον τὸ ΙΘ. Ἴδω δὲ ἡ μὲν $ΑΜ = Π$, ἡ δὲ $ΕΨ$. $Η$, ἡ δὲ $ΗΘ = τ$ ἡ δὲ $ΒΕ = \delta\sigma$ ἡ δὲ $ΑΒ = \gamma$ ἐκέν· ἡ μὲν $ΟΙ = \delta\pi$, ἡ δὲ $ΕΓ = \delta\gamma$. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΟΗΙ$ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς $ΗΕΒ$, (ὄρα τὸ 125. §.) εἴτην τῆς $ΠΕΚ = ΚΕΖ$ (§. 131.) διπλασία δὲ τῆς $ΚΕΖ$ ἡ $ΚΔΖ$, ἡ ἄρα $ΟΗΙ = ΚΔΖ$. ἀλλὰ τῷ $ΚΔΖ = ΕΨΖ$, (ὄρα τὴν 125. §.) ἡ ἄρα, $ΟΗΙ = ΕΨΖ$. καὶ εἰ τομῆσιν ἄρα $ΨΕ$, $ΗΙΘ$ ὅμοιοι εἰσιν. ἐκέν ὡς $ΗΘ : ΟΙ :: ΨΕ : ΕΖ$, (ἀντὶ τῷ $ΘΙ$ τόξῳ ἡ $ΟΙ$ εὐθεῖα ἐκλαμβάνεται, ὡς ἀπειροσῶ αὐτῇ διαφέρουσα) ἥτοι ὡς $\tau : \delta\pi :: Η : \delta\sigma$. ἔστι δὲ καὶ ὡς $ΒΕ : ΕΓ :: ΑΕ : ΕΝ$, (διὰ τὴν τῶν τριγώνων $ΕΒΓ$, $ΕΝΑ$ ὁμοιότητα) εἴτην ὡς $\delta\sigma : \delta\gamma :: \gamma : \tau$. (ἀντὶ τῆς $ΕΝ$ ἢ $ΗΘ$, εἴτην τὸ τ ἐκλαμβάνεται. ἔστι γὰρ τὸ μὲν $ΕΝ^2 = ΑΕ^2 - ΑΝ^2$, τὸ δὲ $ΕΘ^2 = ΑΕ^2 - ΑΟ^2$, ἴση δὲ ἡ $ΑΟ$ τῇ $ΑΝ$ λογίζεται, ὡς αὐτῆς ὑπερέχουσα τῷ ἀπειροσῶ $ΟΥ$, διὸ καὶ ἡ $ΕΝ = ΕΘ$, εἴτην τῇ $ΗΘ$. ἀλογεῖται γὰρ ἡ $ΗΕ$ ὡς ἀπειρο-

σον, καὶ προσκεταὶ τῷ ἀπειροσύν ΟΘ.) ἐκ μὲν ἔν τῆς πρώτης ἀνχλογίας ἡ κατὰ τὸ γ ἐξίσωσις γίνεται, (πίν. ιδ.) ἐκ δὲ τῆς δευτέρας ἡ κατὰ τὸ δ, ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ κατὰ τὸ ε. ἐπεὶ δὲ ἡ ΑΜ ὑφαπτομένη ἔσα, ἴση ἐστὶ τῇ καθολικῇ τῆς ὑφαπτομένης ἐκθέσει τῇ κατὰ τὸ ζ, (β. υι.) τεθέντος ἀντὶ μὲν τῷ z καὶ dz^2 τῷ y καὶ dy^2 , ἀντὶ δὲ τῷ dk , καὶ dk^2 τῷ dx καὶ dx^2 , γίνεται ἡ ΑΜ, ἔτεν το π ἴσον τοῖς κατὰ τὸ η . ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν, ἀμεταβλήτῃ λογιθέντος τῷ dx , ἔσεται τὸ $\delta\pi$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ θ , ἢ τοῖς κατὰ τὸ ι , τεθέντος ἀντὶ τῆς $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ τῷ ἴσῃ αὐτῇ, ἔτεν τῷ $\delta\sigma$ ἰσάντως εἰάν μὲν ἀμετάβλητον λογιθῇ τὸ dy , ἔσεται τὸ $\delta\pi$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ κ , ἔτεν τοῖς κατὰ τὸ λ , ἢ τοῖς κατὰ τὸ μ : εἰάν δὲ το $\delta\sigma$, ἦτοι ἡ $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ἴσεται τὸ $\delta\pi$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ν . ἐπεὶ δὲ τὸ $\delta\sigma^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ξ , τῶν ἀπειροσῶν ληφθέντων, ἔσεται τὸ $\delta\delta x$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ $\omicron$. τεθέντων ἔν ἐν τῇ κατὰ τὸ ν ἐξίσωσει ἀντὶ τῶν $\delta\delta x$ καὶ $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ τῶν ἴσων αὐτοῖς, ἔσεται τὸ $\delta\pi$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ π . ἐν τῇ κατὰ τὸ ϵ ἔν ἐξίσωσει εἰάν μὲν τεθῇ τὸ κατὰ τὸ ι ἴσον τῷ $\delta\pi$, προκύψει ἡ κατὰ τὸ ρ ἐξίσωσις. εἰάν δὲ τὸ κατὰ τὸ μ , ἢ κατὰ τὸ σ εἰάν δὲ τὸ κατὰ τὸ π , ἢ κατὰ τὸ τ .

Οὐκ ἔν ἡ μὲν κατὰ τὸ ρ ἐκθεσις ἐμφαίνει τὴν φιλοῦσαν ἡμιδιάμετρον, τῷ dx ἀμεταβλήτῃ λογιθέντος· εἰ δὲ κατὰ τὸ σ , τῷ dy ἢ δὲ κατὰ τὸ τ , τῷ $\delta\sigma$.

Κ Ε Φ. Ι'.

Περὶ τῆς εὐρέσεως τῆς Φιλῶσης ἡμιδιαμέ-
τρῃ διὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ τῶν
ἄρτι εὐρεθεισῶν ἐκθέσεων.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Α'.

§. 140. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Α. (πίν. κα.) ἐξισώ-
σεως, τῆς καμπύλην ἐμφανέσης διὰ τῆς Ἀξονος γα-
γραμμένην, εὐρεῖν τὴν Φιλῶσαν ἡμιδιάμετρον.

Προκείμεναι ἔκθεσις τὴν Φιλῶσαν ἡμιδιάμετρον ἐμφαι-
νεσα ἢ κατὰ τὸ Β, (§. 135.) ἐν ἣ τὸ $\delta\chi$ ἀμετά-
βλητον ἐλογίσθη. εἰλήφθη δὲ τὰ ἀπείρουσά τῆς κατὰ
τὸ Α δοθείσης ἐξισώσεως. ἔκθεν περὶκύψει ἢ κατὰ τὸ
Γ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Δ γίνεταί. ἐπεὶ δὲ τὸ
 $\delta\sigma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε, τεθέντος ἀντὶ τῆς $\delta\chi^2$ τῆς
ἴσης αὐτῷ, ἔσεται τὸ μὲν $\delta\sigma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ζ,
τὸ δὲ $\delta\sigma^3$ τοῖς κατὰ τὸ Η. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπεί-
ρουσῶν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώ-
σεως, τῆς $\delta\chi$ ἀμεταβλήτου λογιθέντος, ἢ κατὰ τὸ
Θ ἐξίσωσις γίνεταί, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Ι, ἐξ αὐτῆς
δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Γ, ἢ κατὰ τὸ Κ. ἐξ αὐτῆς δὲ
καὶ τῆς κατὰ τὸ Η, ἢ κατὰ τὸ Λ. ἔκθεν ἢ ζητη-
μένη Φηλῶσα ἡμιδιάμετρος ἴση τοῖς κατὰ τὸ Μ.

Προκείμεναι δὲ ἔκθεσις, τὴν Φιλῶσαν ἡμιδιάμετρον
σημαίνουσα, (§. 135.) ἢ κατὰ τὸ Ν, ἐν ἣ ἔδεν τῶν
ἀγνώστων ἀμετάβλητον ἐλογίσθη. καὶ ἐπεὶ τὸ $\delta\sigma$ ἴσον
τοῖς κατὰ τὸ Ε, τὸ δὲ $\delta\chi^2$, τοῖς κατὰ τὸ Δ, ἔσε-
ταί τὸ $\delta\sigma^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ξ. διὸ τὸ $\delta\mu\delta\sigma^2$ ἴσον
τοῖς κατὰ τὸ Ο. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπείρουσῶν τῆς
κατὰ τὸ Ζ ἐξισώσεως, ἔσεται τὸ $\delta\delta\sigma$ ἴσον τοῖς
κατὰ τὸ Π. διὸ ἐκ τῶν κατὰ τὸ Π καὶ Γ ἐξισώσεων

ἡ κατὰ τὸ Ρ γίνεται. ληφθέντων δὲ τῶν ἀπαιροῶν τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως, τῷ $\delta\chi$ μεταβλητῷ λογιζόμεντος, ἡ κατὰ τὸ Σ ἐξίσωσις γίνεται. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ζ ἢ κατὰ τὸ Τ. ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ρ ἢ κατὰ τὸ Υ, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ Φ. ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ τῆς κατὰ τὸ Ο, ἢ κατὰ τὸ Χ γίνεται, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ν, ἢ κατὰ τὸ Ψ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.

141. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Ω ἐξισώσεως, τῆς καμπύλης ἐμφανέσεως, διὰ τῆς Ἑξίας γεγραμμένη, τὴν Φιλέσαν ἡμιδιάμετρον εὑρεῖν.

Προκείμεναι ἐκθέσεις ἢ κατὰ τὸ α, ἐν ᾗ τὸ $\delta\chi$ ἀμετάβλητον ἐλογιάθη (§. 137.) καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν $\delta\sigma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ β, τὸ δὲ $\delta\chi^2$ τοῖς κατὰ τὸ γ, διὰ τὴν κατὰ τὸ Ω ἐξίσωσιν, ἔσται τὸ μὲν $\delta\sigma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ δ, τὸ δὲ $\delta\sigma^3$ τοῖς κατὰ τὸ ε. διὸ τὸ $\delta\chi\delta\sigma^2$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ ζ. τῶν ἀπαιροῶν δὲ τῆς δευτέρας τάξεως τῆς κατὰ τὸ Ω ἐξισώσεως ληφθέντων, ἔσται τὸ $\beta\epsilon\delta\gamma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ η. τὸ γὰρ $\delta\chi$ ὡς ἀμετάβλητον λογιζέμεν. (§. 136.) ἐξ ὧν δὴλον ὅτι καὶ τὸ $\gamma\delta\chi\delta\delta\gamma=0$. ἔκιν τὸ Η ἴσον τοῖς κατὰ τὸ θ, ἢ τῶν κατὰ τὸ ι.

Τῶν αὐτῶν δὲ τρόπῳ εὑρεθήσεται ἡ Φιλέσα ἡμιδιάμετρος, ληφθείσης τῆς ἐκθέσεως, ἐν ᾗ τὸ $\delta\gamma$, ἢ τὸ $\delta\sigma$ ἀμετάβλητον ἐλογιάθη.

Κ Ε Φ. ΙΑ΄.

Περὶ τῆς εὐρέσεως τῆς καμπῆς, εἴπην τῶν σημείων, ἐν ᾧ ἡ καμπύλη μεταβάλλα τὸ κοῖλον εἰς κυρτὸν, ἢ τὸ κυρτὸν εἰς κοῖλον.

ΣΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

142. Τὸ πάσης τεταγμένης ἀπειροσὺν τῆς δευτέρας τάξεως καταφατικὸν μὲν ἐστίν, εἰάν τὸ κυρτὸν τῆς καμπύλης ἐπὶ τὸν Ἀξονα, ἢ τὴν Ἐξίαν ἐτραμμένον ᾧ ἀποφατικὸν δὲ, εἰάν τὸ κοῖλον. (ὄρα τὴν δαξ. τῆ δ. 126.) ἐπεὶ δὲ ἔδεν τῶν μεγεθῶν ἐκ καταφατικῶ ἀποφατικὸν γίνεται, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, μὴ κρείτερον ἢτοι τῷ μηδενί, ἢ ἀπείρῳ μεγέθει ἴσον γεγνημένον, διὰ τὸτο τὸ εἰρημνικὸν τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροσὺν, πρὶν ἢ τὴν διαληφθεῖσαν παθεῖν μεταβολὴν ἢτοι τῷ ἔδενι ἴσον γίνεται, ἢ μεγέθει ἀπείρῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

143. Ἐντεῦθεν ἡ τῆς καμπῆς εὐρεσις πορίζεται. ἠφθέντων γάρ τῶν τῆς δευτέρας τάξεως ἀπειροσῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τῷ δὲ ἀμεταβλήτῳ λογιζόμεντοι, τίθεται τὸ δδγ ἢτοι τὸ ο, ἢ τῷ οο ἴσον. ἐκατέρω δὲ τῶν καμένων, τὰ ἴσα τῷ Χ, εἴτεν τῇ ἀποτετμημένῃ πορίζονται, καὶ εἰάν μὲν τὰ ποριζόμενα πραγματιώδη ᾧσι, τοσαύτας ἡ καμπύλη ἔχει καμπάς, ὅσα τὰ εὐρεθόμενα ἴσα τῷ χ· εἰάν δὲ ἐπίπλασα, δῆλον ὅτι ἑδεμίαν καμπὴν ἔχει καμπύλη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

144. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ κ ἐξισώσεως, τῆς ἠμφαινέσης καμπύλην διὰ τῷ Ἀξονος γεγραμμένην, εὐρεῖν τὴν ἐν αὐτῇ καμπυλὴν.

Εἰλήφθω τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τὰ ἀπειροσὰ τῆς πρώτης τάξεως, τὰ κατὰ τὸ λ, ὁμοίως καὶ τὰ τῆς δευτέρας, τὰ κατὰ τὸ μ. κείω δὲ τὸ δδγ = ο. ἐκὼν καὶ τὸ $-2αδχ^2 = ο$. διὸ τὸ $χ = ο$. κείω πάλιν τὸ δδγ = οο. ἐκ τούτου ἢ κατὰ τὸ ν ἐξίσωσις γίνεται, ἐξ ἧς ἢ κατὰ τὸ ζ. ἐν τῇ κατὰ τὸ κ ἐν ἐξισώσει τε-

θέντος ἀντὶ τῆς χ τῆς ἴσης αὐτῶν, ἡ κατὰ τὸ οἰσώσεως γίνεται

Ἐάν ἔν ἡ ΖΚΔ καμπύλη γραφῇ, (πίν. κ'. χ. 5.) ἡ ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ κ' ἐξισώσεως ἐμφαινόμενη, (παραβολὴ γὰρ ἐστὶ τρίτε β. 299. τῆς 1. βιβλ. εἰάν γὰρ τῆς $y - a = z$, καὶ $\chi - a = \Phi$ εἰς τὴν κατὰ τὸ π' μεταβάλλεται.) (πίν. κα'.) ληφθῆσα δὲ ἡ ΓΚ = $\chi = a$, ἀχθῇ ἡ ΓΑ = $y = a$, καὶ ἡ ΛΕ τῇ ΘΙ παράλληλος, ληφθῇ δὲ ἡ ΛΒ = ΓΚ, ἡ ἀπὸ τῆς Β ἀγομένη τῇ ΓΑ παράλληλος, εἴτεν ἡ ΒΚ ἔσεται ἴση τῇ y . διὸ τὸ Κ σημεῖον ἐστὶν ἡ ζητούμενη καμπή. κατ' αὐτὸ γὰρ ἡ ΔΚ καμπύλη καμψθῆσα μεταβάλλει τὸ κοῖλον εἰς κυρτόν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

§. 145. Τὴν ἔκθεσιν εὐρεῖν, δι' ἧς τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον πορίζεται ἐν ταῖς διὰ τῆς Ἐξίας γραφείσας καμπύλαις.

Ἐξω ἡ ΔΕ καμπύλη ὅποια ἔν, διὰ τῆς Α (πίν. κ. χ. 6.) Ἐξίας γεγραμμένη. ἀπὸ δὲ τῶν ἐγγυτάτων σημείων Δ, Ε ἐπεξεύχθωσαν μὲν ἐπὶ τὸ Α αἱ ΔΑ, ΕΑ, ἡχθῶσαν δὲ τῆς καμπύλης ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΒ, ΕΓ. καὶ ἀπὸ τῆς Α σημεία ἡχθῶ ἡ μὲν ΑΓ πρὸς ὁρθῆς τῇ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΔ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήμασι δὲ τοῖς ΑΔ, ΑΒ τόξα κύκλων γεγραφθῶ τὰ ΔΚ, ΒΦ. καὶ ἔξω ἡ μὲν ΑΔ = y , τὸ δὲ τόξον ΔΚ = $\delta\chi$. ἔκῃν ἡ ΚΕ = δy .

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔΚ ὡς ὁρθῇ λογίζεται, ἡ ἄρα ΑΔΒ σὺν τῇ ΚΔΕ μιᾷ ὁρθῇ ἴση. (ἡ ΔΕ ὡς εὐθεῖα τῇ ΒΔ συνεχιζομένη ἐκλαμβάνεται διὰ τὴν ἰαυτῆς σμικρότητα) αἱ δὲ ἡ ΑΔΒ σὺν τῇ ΑΒΔ μιᾷ ὁρθῇ ἴση, ἡ ἄρα ΑΒΔ = ΕΔΚ. ὁμοίᾳ ἄρα τὰ ΕΚΔ, ΔΑΒ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ΕΑΒ ὁμοίον ἐκάτέρῳ τῶν ΕΚΔ, ΒΦΟ, ἄρα καὶ τὰ ΕΚΔ,

ΕΚΔ, ΒΦΟ ὁμοιά εἰσιν. ἔκῃν ὡς ΕΚ : ΚΔ :: ΔΑ :
ΑΒ, ἥτοι ὡς $\delta\gamma$: $\delta\chi$:: γ : ΑΒ. ἡ ἄρα ΑΒ = $\frac{\gamma\delta\chi}{\delta\gamma}$.

ἔστι δὲ καὶ ὡς ΑΔ : ΔΚ :: ΑΒ : ΒΦ, (διὰ τὴν τῶν
ΑΔΚ, ΑΒΦ τομέων ὁμοιότητα) ἥτοι ὡς γ : $\delta\chi$:: $\frac{\gamma\delta\chi}{\delta\gamma}$:

ΒΦ, ἡ ἄρα ΒΦ = $\frac{\delta\chi^2}{\delta\gamma}$. ἐπεὶ δὲ καὶ ὡς ΕΚ : ΚΔ ::

ΒΦ : ΦΟ, ἥτοι $\delta\gamma$: $\delta\chi$:: $\frac{\delta\chi^2}{\delta\gamma}$: ΦΟ. διὸ ἡ ΦΟ =

$\frac{\delta\chi^3}{\delta\gamma^2}$. εἰάν ᾖν τὰ ἀπειροσά ληφθῇ τῆς ἄρτι εὐρεθεί-

σης ἐκθέσεως, τῆς τὴν ΑΒ ἐμφανέσεως, τῷ $\delta\chi$ ἀμε-
ταβλήτῃ λογιθέντος, ἔσεται ἡ ΓΦ ἴση τοῖς κατὰ
τὸ Α. (πίν. κβ.) διὸ ἡ ΓΟ ἴση τοῖς κατὰ τὸ Β.

Ἐστὶ δὲ ἡ ΓΟ, ἡ ὑπὸ τῶν ἐγγυτάτων ἐφαπτομέ-
ων ΕΓ, ΔΒ περατεμένη καταφατική μὲν, εἰάν τὸ
τῆς καμπύλης κοῖλον ἐπὶ τὴν Ἑσίαν Α ἐτραμμένον ᾖ
ἀποφατική δὲ, εἰάν τὸ κυρτόν. ἵνα δὲ ἐκ καταφατι-
κῆς ἀποφατικὴ γένηται, ἥτοι τὰ ὑδενὶ, ἢ τῷ ἀπεί-
ρῳ πρότερον ἐξισῶται. ἔστιν ἄρα ἡ κατὰ τὸ Β ἐκθε-
σις ἡ ζητούμενη, δι' ἧς τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον πορί-
ζεται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

§. 146. Ἐυρεθήσεται τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον, εἰάν
ἡ δοθεῖσα ἐκθεσις ἡ κατὰ τὸ Β ἴση τῷ ὑδενὶ ἢ τῷ
ἀπείρῳ τεθῇ, ληφθέντων δὲ τῶν ἀπειροσῶν τῆς δο-
θείσης ἐξισώσεως, τὰ ἴσα τῷ $\delta\chi$, $\delta\gamma$, καὶ $\delta\delta\gamma$ ἐν
αὐτῇ τῇ ἐκθέσει τεθῇ.

Λ Η Μ Μ Α.

§. 147. Ἐστω κύκλος τόξον τὸ (πίν. κ. χ. 7.) ΛΕΔ, ἔκέντρον μὲν τὸ Β, ἡμιδιάμετρος δὲ ἡ ΒΛ. νενοήσω δὲ καὶ καμπύλη ἡ ΑΦΚ τοιαύτη, ὥστε ἀχθῆσης ἡμιδιαμέτρος τινὸς, οἷον τῆς ΒΕ, εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΦ, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῶν δύο καμπύλων, τετράγωνον ἴσον ὀρθογωνίῳ $\Gamma\alpha$ ὑπὸ τινος εὐθείας γνωστῆς καὶ ἐτέρας ἴσης τῷ ΛΕ τόξῳ. ἔστω δὲ ἡ μὲν $ΒΛ=ΒΕ=\alpha$, ἡ δὲ $ΒΦ=\gamma$, τὸ δὲ τόξον $ΛΕ=Z$, ἡ δὲ ῥηθεῖσα γνωστὴ εὐθεῖα ἴση β. ἔκῃν ἡ $ΕΦ=\alpha-\gamma$. διὸ τὸ βλ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Γ. (πίν. κβ.)

Ἡ ἐξίσωσις ἔν αὐτῇ τὴν ΑΦΚ καμπύλην ἐμφαίνει, τὴν ἀναγραφθεῖσαν διὰ τῆς κέντρος Β ὡς δι' Ἐπίτας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

148. Δοθείσης τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως, εὐρεῖν τὴν καμπὴν ἐν τῇ καμπύλῃ τῇ ὑπ' αὐτῆς ἐμφαινόμενη.

Τῶν αὐτῶν καμένων, τῶν καὶ ἐν τῇ προλαβόντι λήμματι, ἤχθω ἡ Βε ἔγγιστα τῆς ΒΕ. καὶ κέντρον μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΦ τόξον κύκλου γιγρῶμεθα τὸ ΦΖ, ὃ κείωται ἴσον τῷ δχ. καὶ εἰλείψωμεν τὰ ἀπαιροῦσά τῆς κατὰ τὸ Γ ἐξισώσεως. ἔκῃν ἔσται τὸ $\delta\lambda = Εε$, ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ δὲ ὡς $ΒΕ:ΒΦ::Εε:ΦΖ$, (διὰ τὴν τῶν ΒΕε, ΒΦΖ τομέων ὁμοιότητα) ἦτοι ὡς $\alpha:\gamma::\frac{\alpha\gamma\delta\gamma}{\beta}-\alpha\alpha\delta\gamma:\delta\chi$. τὸ

β

ἄρα δχ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Ε. ληφθέντων ἔν τῶν ἀπαιροῦσάν τῆς δευτέρας τάξεως τῆς κατὰ τὸ Ε ἐξισώσεως, τῇ δχ ἀμεταβλήτῃ λογιζόμεντος, ἡ κατὰ τὸ Ζ προκύπτει ἐξίσωσις. ἐξ ἧς πορίζομεθα τὸ $\gamma\delta\delta\gamma$ ἴσον τοῖς κατὰ τὸ Η. κείωται ἡ εὐρεθεῖσα ἐκθεσις (§. 145.)

ἴση

ἴση τῇ ἐδενί, (δ. 146.) ὡς ἐν τῷ Θ εῖραται. ἐν ταύτῃ δὲ τῆς ἐξισώσεως ἡ κατὰ τὸ I γίνεται, ἐν ᾗ τεθέντος ἀντὶ μὲν τῷ δχ² τῷ ἴσθ αὐτῷ, τῷ ἐκ τῆς κατὰ τὸ F. ἐξισώσεως περιζομένῃ, ἀντὶ δὲ τῷ γδδγ τῷ ἴσθ αὐτῷ τῷ ἐν τῇ Η, ἡ κατὰ τὸ K γίνεται ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἡ κατὰ τὸ Λ, ἐξ αὐτῆς δὲ ἡ κατὰ τὸ Μ, πέμπτη βαθμὶς ἔσται. δι' αὐτῆς ἔν ἐυρεθέντος τῷ ἀγνώστῳ γ, (135. τῷ 1. βιβλ.) γνωθῆσεται ἡ ΒΦ· ἐξ ἧς δῆλον γίνεται τὸ τῆς καμπῆς σημεῖον.

Ταῦτα μὲν δὴ τὰ τῆς Ἀναλύσεως σοιχεῖα ἱκανὰ ταῖς πρωτοπείρσις. ὁ δὲ ἀπαρτίναι ἑαυτὸν βεβλόμενος, καὶ ἐπὶ τὸ τελειότερον πραγμαγεῖν, τὰς περὶ αὐτῆς συγγράψαντας μετερχέσθω, ἰδίῳ πόνῳ καὶ μελέτῃ τὰ ὑπ' αὐτῶν προτιθέμενα ἐπιλύων προβλήματα. τῷτο γὰρ πάντων τῶν γυμνασμάτων συμφωρότερον, καὶ ἔξιν μαθηματικῆς ἑμπειῆσαι δυνάμενον ἐπισήμης.

Τ Ε Λ Ο Σ.



- (A) $\delta^{-1}x, \delta^{-1}y, \delta^{-1}z, \delta^{-1}\Omega$ | (B) ϕ, x, ψ, Ω | (Γ) $\delta^0\phi, \delta^0x, \delta^0\psi, \delta^0\Omega$
 (Δ) $\delta^1x, \delta^1y, \delta^1z, \delta^1\psi$ | (E) $\delta^2x, \delta^2y, \delta^2z, \delta^2\psi$ | (Z) $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\Omega}, \dot{\psi}$
 (H) $\delta\delta x, \delta\delta y, \delta\delta z, \delta\delta\Omega$ | (Θ) $\delta^2x, \delta^2y, \delta^2z, \delta^2\Omega$ | (I) $\delta\delta\delta x, \delta\delta\delta y, \delta\delta\delta z, \delta\delta\delta\Omega$
 (K) $\delta^3x, \delta^3y, \delta^3z, \delta^3\Omega$ | (Λ) $\delta^{-5}x, \delta^{-4}x, \delta^{-3}x, \delta^{-2}x, \delta^{-1}x, \delta^0x, \delta^1x, \delta^2x, \delta^3x, \delta^4x, \delta^5x$
 (M) $\alpha + x + y + \Omega$ | (N) $\alpha + \delta^0x + \delta^0y + \delta^0\Omega$ | (Ξ) $\delta^1x + \delta^1y + \delta^1\Omega$ | (O) $\delta^2x, \delta^2y, \delta^2\Omega$
 (Π) $\beta + \alpha x + z - \Omega$ | (P) $\alpha\delta x + \delta z - \delta\Omega$ | (Σ) $\delta^2y + \delta^2x - \delta^2\Omega$ | (Τ) $\delta^3y + \delta^3x - \delta^3\Omega$
 (Υ) $\delta x + \delta\Omega - \delta y$ | (Φ) $\delta\delta\Omega - \delta\delta y$ | (X) $\delta z + \delta\Omega - \delta y$ | (Ψ) $\delta\delta z + \delta\delta\Omega$ | (Ω) xy
 (α) $x\delta y + y\delta x$ | (β) $xy + x\delta y + y\delta x + \delta y\delta x$ | (γ) $x\delta y + y\delta x + \delta y\delta x$
 (δ) xyz | (ε) $xy\delta z + xz\delta y + yz\delta x$ | (ζ) $xy = \Omega$ | (η) $xyz = \Omega z$ | (θ) $x\delta y + y\delta x = \delta\Omega$
 (ι) $\Delta xyz = \Omega\delta z + z\delta\Omega$ | (κ) $\Delta xyz = xy\delta z + xz\delta y + yz\delta x$ | (λ) $xyz\Omega$
 (μ) $xyz\delta\Omega + xy\Omega\delta z + xz\Omega\delta y + yz\Omega\delta x$ | (ν) αxyz | (ξ) $\alpha x y \delta z + \alpha x z \delta y + \alpha y z \delta x$
 (ο) $\frac{xy}{\alpha}$ | (π) $\frac{x\delta y + y\delta x}{\alpha}$ | (ρ) x^2 | (σ) $2x\delta x$ | (τ) $3y^2\delta y$ | (γ) $\frac{4\alpha x^3\delta x}{\beta}$
 (φ) $\nu \alpha x^{\nu-1} \delta x$ | (χ) $\nu \cdot \overline{\alpha + x^{\nu-1}} \cdot \delta x$ | (ψ) $\nu \cdot \alpha x^{\nu} \delta x = \nu \cdot \overline{\alpha x^{\nu}} \cdot \delta x$
 (ω) $\frac{\mu \cdot \overline{\alpha + x^{\mu-1}}}{\nu} \delta x = \frac{\mu}{\nu} \cdot \overline{\alpha + x^{\mu-1}} \cdot \delta x$ | (Α) $\frac{\mu}{\nu} \cdot \overline{\alpha^{\nu} + x^{\nu-1}} \cdot \delta x = \frac{\mu}{\nu} \cdot \overline{\alpha^{\nu} + x^{\nu-1}} \cdot \delta x$

- (A) $\frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}-1} \delta y = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} \delta y = \frac{3}{2} \delta y \sqrt{y}$ | (B) $\frac{\mu}{\nu} \chi^{\frac{\mu-1}{\nu}} \delta \chi = \frac{\mu}{\nu} \chi^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \delta \chi = \frac{\mu}{\nu} \delta \chi \sqrt[\nu]{\chi^{\mu-\nu}}$
- (Γ) $\frac{1}{\mu} \frac{1}{\alpha^{\nu} + y^{\nu} \frac{1}{\mu} - 1} \cdot \nu y^{\nu-1} \delta y = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\alpha^{\nu} + y^{\nu} \frac{1}{\mu} - \mu} \cdot \nu y^{\nu-1} \delta y = \frac{1}{\mu} y^{\nu-1} \delta y \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu} + y^{\nu} \frac{1}{\mu} - \mu}$
- (Δ) $\frac{\mu}{\nu} \frac{1}{\alpha^{\nu} + y^{\nu} \frac{\mu-1}{\nu} - 1} \cdot \nu y^{\nu-1} \delta y = \frac{\mu}{\nu} \frac{1}{\alpha^{\nu} + y^{\nu} \frac{\mu-\nu}{\nu} - \nu} \cdot \nu y^{\nu-1} \delta y = \mu y^{\nu-1} \delta y \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} + y^{\nu} \frac{\mu-\nu}{\nu} - \nu}$
- (E) $2\chi \delta \chi + \chi^2 \delta y$ | (Z) $\alpha \nu y \chi^{\nu-1} \delta \chi + \alpha \chi^{\nu} \delta y$ | (II) χ | (Θ) $\frac{y \delta \chi - \chi \delta y}{y^2}$
- (I) $\chi = \chi y^{-1}$ | (K) $y^{-1} \delta \chi - 1 \cdot \chi y^{-2} \delta y = -1 \delta \chi - \chi \delta y \cdot \frac{1}{y} = \frac{y \delta \chi - \chi \delta y}{y^2}$
- (Λ) $\chi = z$ | (M) $\chi = yz$ | (N) $\delta \chi = y \delta z + z \delta y$ | (Ξ) $\delta \chi - z \delta y = y \delta z$
- (O) $\delta \chi - \chi \delta y = y \delta z$ | (Π) $\frac{y \delta \chi - \chi \delta y}{y^2} = \delta z$ | (P) $\frac{\alpha \chi}{y}$ | (Σ) $\frac{\alpha y \delta \chi - \alpha \chi \delta y}{y^2}$
- (Τ) $\frac{\chi}{\alpha y}$ | (Υ) $\frac{y \delta \chi - \chi \delta y}{\alpha y^2}$ | (Φ) $\frac{z \Omega \chi \delta y + \nu \Omega y \delta \chi - \chi y \nu \delta \Omega - \chi y \Omega \delta z}{z' \Omega^2}$
- (X) $\frac{\chi y}{z \Omega}$ | (Ψ) $\delta \chi + \delta y$ | (Ω) $\delta \delta \chi + \delta \delta y$ | (α) $\alpha \delta \chi \delta y$ | (β) $\alpha \delta \chi \delta \delta y + \alpha \delta y \delta \delta \chi$
- (γ) $\frac{1}{\alpha} \frac{\delta \chi^2}{\frac{\mu-1}{\nu}} (\delta) \frac{2 \delta \chi \delta \delta \chi}{\alpha} (\epsilon) \frac{\delta \chi}{\frac{\delta y}{\delta y^2}} (\zeta) \frac{\delta y \delta \delta \chi - \delta \chi \delta \delta y}{\delta y^2} (\eta) \sqrt[\nu]{\delta \chi^{\mu}}$
- (θ) $\frac{\mu}{\nu} \delta \chi^{\frac{\mu-1}{\nu}} \cdot \delta \delta \chi = \frac{\mu}{\nu} \delta \chi^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \delta \delta \chi$ (ι) $\delta^1 \chi$ (κ) $\delta^2 \chi = \chi$ (λ) $\alpha \delta \chi$
- (μ) $\alpha \chi$ | (ν) $\delta \chi + \delta z + \delta \Omega$ | (ξ) $\delta^{\circ} \chi + \delta^{\circ} z + \delta^{\circ} \Omega = \chi + z + \Omega$
- (ο) $\alpha \delta^2 \chi + \beta \delta^2 \Omega - \beta \delta^2 z$ | (π) $\alpha \delta^2 \chi + \beta \delta^2 \Omega - \beta \delta^2 z = \alpha \delta^2 \chi + \beta \delta^2 \Omega - \beta \delta^2 z$

$$(A) \chi^v \delta \chi \mid (B) A \chi^v \mid (\Gamma) \pi A \chi^{v-1} \delta \chi = \chi^v \delta \chi \mid (\Delta) \frac{1}{v+1} \chi^{v+1}$$

$$(E) \alpha \chi^3 \delta \chi \mid (Z) \frac{\alpha \chi^{3+1}}{3+1} = \frac{\alpha}{4} \chi^4 \mid (H) \frac{\alpha}{\beta} \chi^4 \delta \chi \mid (\Theta) \frac{\alpha}{4+1, \beta} \chi^{4+1} = \frac{\alpha}{5\beta} \chi^5 \mid (I) \beta \chi^{-3} \delta \chi$$

$$(K) \frac{\beta}{-3+1} \chi^{-3+1} = \frac{\beta}{-2} \chi^{-2} - \frac{\beta}{2\chi^2} \mid (\Lambda) \alpha \chi^{\frac{1}{2}} \delta \chi \mid (M) \frac{1}{2} + 1: \alpha \chi^{\frac{1}{2}} = 2 \alpha \chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2\alpha}{3} V \chi^3$$

$$(N) \alpha \chi^{\frac{-1}{2}} \delta \chi \mid (\Xi) -\frac{1}{3} + 1: \alpha \chi^{\frac{-1}{2}} = 2 \alpha \chi^{\frac{1}{2}} \mid (O) \frac{\mu}{v} V_{\alpha^v + \chi^v}^{\mu-v} \chi^{v-1} \delta \chi$$

$$(\Pi) \frac{\mu}{v} V_{\alpha^v + \chi^v}^{\mu-v} \chi^{v-1} \delta \chi - \mu \cdot \frac{\mu-v}{v} \cdot \chi^{v-1} \delta \chi$$

$$(P) \frac{\mu-v+1}{v}: \mu \frac{\alpha^v + \chi^v}{v}^{\mu-v+1} = \frac{\alpha^v + \chi^v}{v}^{\mu} \mid (\Sigma) \frac{3}{2} \cdot 2 \chi \delta \chi V \overline{\alpha^2 + \chi^2}$$

$$(T) \frac{3}{2} \cdot 2 \chi \delta \chi \cdot \overline{\alpha^2 + \chi^2}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2 \chi \delta \chi V \overline{\alpha^2 + \chi^2} \mid (\Upsilon) \frac{1}{2} + 1: \frac{3}{2} \cdot \overline{\alpha^2 + \chi^2}^{\frac{1}{2}} = \overline{\alpha^2 + \chi^2}^{\frac{3}{2}}$$

$$(\Phi) \frac{\alpha \delta \chi + 2 \chi \delta \chi}{\alpha \chi + \chi^2} V \overline{\alpha \chi + \chi^2} = \frac{\alpha \delta \chi + 2 \chi \delta \chi}{\alpha \chi + \chi^2} \cdot \overline{\alpha \chi + \chi^2}^{\frac{1}{2}}$$

$$(X) \frac{2}{3} \cdot \overline{\alpha \chi + \chi^2}^{\frac{3}{2}} \mid (\Psi) 2 \delta \chi V \overline{\alpha^2 \chi^2 + \chi^4} \mid (\Omega) 2 \chi \delta \chi V \overline{\alpha^2 + \chi^2} = 2 \chi \delta \chi \cdot \overline{\alpha^2 + \chi^2}^{\frac{1}{2}}$$

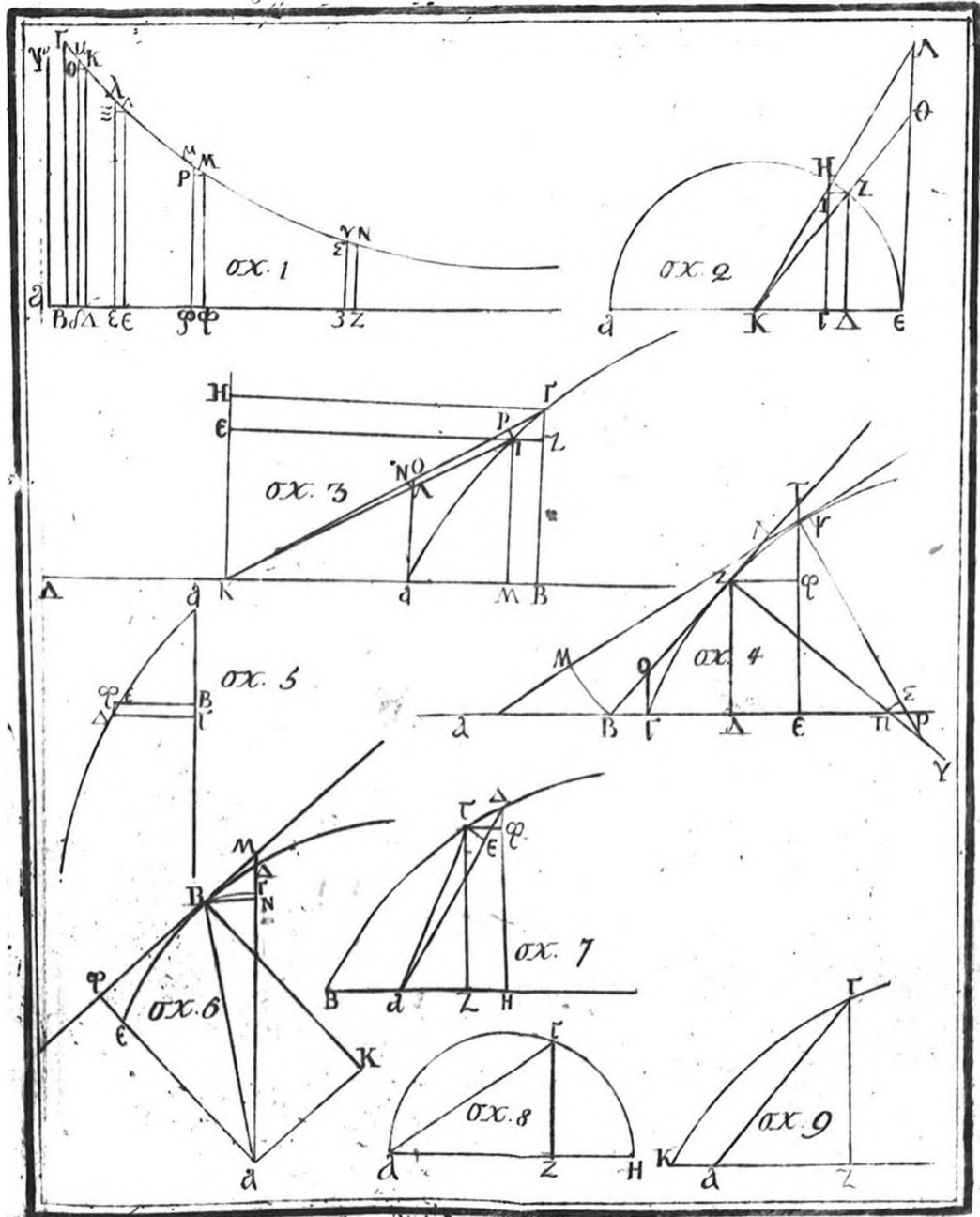
$$(\alpha) \frac{2}{3} \cdot \overline{\alpha^2 + \chi^2}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot V \overline{\alpha^4 \chi^4}^3 \mid (\beta) 3 \alpha \chi^3 \delta \chi + 4 \chi^4 \delta \chi V \overline{\alpha \chi + \chi^2}$$

$$(\gamma) 3 \alpha \chi^2 \delta \chi + 4 \chi^3 \delta \chi V \overline{\alpha \chi^3 + \chi^4} = 3 \alpha \chi^2 \delta \chi + 4 \chi^3 \delta \chi \cdot \overline{\alpha \chi^3 + \chi^4}^{\frac{1}{2}}$$

$$(\delta) \frac{2}{3} \cdot \overline{\alpha \chi^3 + \chi^4}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} V \overline{\alpha \chi^3 + \chi^4}^3$$

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & \overline{\alpha\chi + \chi} \cdot \delta\chi \sqrt{\alpha + \chi} \mid (B) \quad \sqrt{\alpha + \chi} = y \mid (F) \quad \alpha + \chi = y^2 \mid (\Delta) \quad \chi = y^2 - \alpha \\
 (E) \quad & \chi^2 = y^4 - 2\alpha y^2 + \alpha^2 \mid (Z) \quad \delta\chi = 2y\delta y \mid (H) \quad \alpha\chi^{\frac{1}{2}}\chi^2 \cdot \delta\chi \sqrt{\alpha^{\frac{1}{2}}\chi - \alpha y^2 - \alpha^{\frac{1}{2}}y^4 - 2\alpha y^2 + \alpha^2} \cdot 2y^2\delta y \\
 (\Theta) \quad & 2y^6\delta y - 2\alpha y^4\delta y \mid (I) \quad \frac{1}{2}y^7 - \frac{5}{2}\alpha y^5 \mid (K) \quad \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\chi - \frac{5}{2}\alpha \cdot \alpha + \chi^2 \cdot \alpha + \chi^2 \\
 (V) \quad & \frac{1}{2}\alpha + \chi^2 - \frac{5}{2}\alpha \cdot \alpha + \chi^2 \mid (M) \quad \alpha^3\delta\chi \mid (N) \quad \sqrt{\alpha\chi - \chi^2} = \frac{y}{\alpha} \\
 (\Xi) \quad & \sqrt{\alpha\chi - \chi^2} = z\chi \mid (O) \quad \alpha\chi - \chi^2 = \alpha^2\chi^2 \mid (P) \quad \alpha - \chi = \alpha^2\chi \mid (Q) \quad \alpha^2\delta y = \alpha^3\delta\chi \\
 (\Sigma) \quad & 2y\delta y = \alpha^3\delta\chi \mid (T) \quad \alpha - \chi^2 = \alpha^4\chi^2 \cdot 2y\delta y = \alpha^3\delta\chi \\
 (\Phi) \quad & \alpha^4\chi \cdot 2\delta y = \alpha^3\delta\chi \mid (X) \quad \alpha^4\chi \cdot 2\delta y \cdot y = \alpha^3\delta\chi \\
 (\Psi) \quad & 2\alpha^2\delta y = \alpha^3\delta\chi \mid (Y) \quad 2\alpha^3\delta y \cdot y^2 = \alpha^3\delta\chi \\
 (a) \quad & 2\alpha^3 y^{-2+1} - 2\alpha^3 y^{-1-2} = -2\alpha^3 \mid (\delta) \quad -2\alpha^3 = -2\alpha^3 \sqrt{\alpha\chi - \chi^2} = -2\alpha^3 \sqrt{\alpha\chi - \chi^2} \\
 (y) \quad & \alpha\chi - \chi^2 = z^2\chi^2 \mid (\delta) \quad \alpha - \chi = z^2\chi \mid (\varepsilon) \quad \alpha\delta^2 - \beta^2 = z^2 \mid (\zeta) \quad -\alpha\delta^2\beta^2 = z^2\delta^2 \\
 (4) \quad & \chi\delta - \alpha\delta^2 = \frac{\delta^2 - z^2}{\alpha\delta^2} \mid (i) \quad \frac{\chi - \alpha}{\chi\delta^2} = \frac{\alpha\delta^2 - z^2}{\alpha\delta^2 \cdot \delta^2 \cdot \beta^2} = \frac{\alpha\delta^2 - z^2}{\alpha\delta^2 \cdot \beta^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{A}) \quad -\alpha^3 \delta x &= 2 \alpha^3 \beta \delta z \mid (\text{B}) \quad -\alpha^3 \delta x = 2 \alpha^3 \beta \delta z, z - \partial^2 \\
&\quad \frac{\chi \sqrt{\alpha x - x^2}}{\beta} = 2 \alpha^2 \delta z \mid (\Delta) \quad \frac{\chi \sqrt{\alpha x - x^2}}{\beta} = -2 \alpha^2 \delta z \mid (\text{E}) \quad -2 \alpha^2 z \\
(\text{F}) \quad -\alpha^3 \delta x &= 2 \alpha^2 \delta z \mid (\text{G}) \quad \frac{\chi \sqrt{\alpha x - x^2}}{\beta} = -2 \alpha^2 \delta z \mid (\text{H}) \quad \frac{\chi}{\alpha \delta x} \mid (\text{I}) \quad \alpha \theta = \alpha^2 \chi \cdot \kappa \Delta \\
(\text{Z}) \quad -2 \alpha^2 \cdot \beta \sqrt{\alpha x - x^2} &= -2 \alpha^2 \sqrt{\alpha x - x^2} \mid (\text{H}) \quad \frac{\chi}{\alpha \delta x} \mid (\text{O}) \quad \alpha \lambda x \mid (\text{I}) \quad \alpha \theta = \alpha^2 \chi \cdot \kappa \Delta \\
(\text{K}) \quad \alpha \beta &= \frac{\alpha}{1 + \alpha + x} \cdot \text{FA} \mid (\text{A}) \quad \alpha \beta = 1 \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha + x} \cdot \Phi \text{M} \mid (\text{M}) \quad \alpha \beta = 1 \cdot \frac{\alpha + x}{\alpha} \cdot \text{ZN} \\
(\text{N}) \quad \kappa \Delta &= \alpha \beta \mid (\Xi) \quad \text{FA} = \alpha^2 \beta \mid (\text{O}) \quad \Phi \text{M} = \alpha^2 \beta \mid (\text{II}) \quad \text{ZN} = \alpha \beta \\
(\text{P}) \quad \delta x &= \alpha \beta \delta x \mid (\Sigma) \quad \varepsilon \Delta = 2 \alpha \beta \delta x \mid (\text{T}) \quad \Phi \text{M} = 3 \alpha \beta \delta x \\
(\text{J}) \quad \delta \text{N} &= 4 \alpha \beta \delta x \mid (\Phi) \quad \frac{\alpha \beta \delta x}{\chi + \alpha} = \Delta \mid (\text{X}) \quad \frac{2 \alpha \beta \delta x}{\chi + \alpha} = \Delta \mid 1 \cdot \frac{\alpha}{\chi + \alpha} \\
(\Psi) \quad \frac{\alpha \beta \delta x}{\chi + \alpha} &= \Delta \mid 1 \cdot \frac{\alpha}{\chi + \alpha} \mid (\Theta) \quad \frac{4 \alpha \beta \delta x}{\chi + \alpha} = \Delta \mid 1 \cdot \frac{\alpha}{\chi + \alpha} \\
(\alpha) \quad 0 \alpha \beta \delta x &= \alpha \beta \lambda \alpha + \chi \mid (\beta) \quad 0 \frac{\alpha \beta \delta x}{2 \alpha \beta} = \alpha \beta \lambda \alpha + \chi \\
(\gamma) \quad 0 \frac{\alpha \beta \delta x}{5 \alpha \beta} &= \alpha \beta \cdot \lambda \alpha + \chi \mid (\delta) \quad 0 \frac{4 \alpha \beta \delta x}{\chi + \alpha} = \alpha \beta \lambda \alpha + \chi \mid (\varepsilon) \quad \frac{2 \chi \delta x}{\chi + \alpha} \\
(\zeta) \quad 1 \cdot \lambda \alpha + \chi &= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi \delta x} \mid (\eta) \quad -2 \chi \delta x \mid (\theta) \quad 1 \cdot \lambda \alpha + \chi = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{4 \chi \delta x} \mid (\iota) \quad 2 \cdot \lambda \alpha + \chi = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi \delta x}
\end{aligned}$$



$$(A) x\delta y + y\delta x \mid (B) x\delta y + y\delta x = \frac{\delta y}{y} + \frac{\delta x}{x} \cdot xy \mid (\Gamma) \frac{\delta y}{y} + \frac{\delta x}{x} = \frac{\delta z}{z}$$

$$(\Delta) \lambda y + \lambda x = \lambda z \mid (E) yx = z \mid (Z) \frac{\delta y}{y} + \frac{\delta x}{x} \cdot xy = z \cdot \frac{\delta z}{z} \mid (H) x\delta y + y\delta x = \delta z$$

$$(\Theta) \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2} \mid (I) \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2} = \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta y}{y} \cdot \frac{xy}{y^2} \mid (K) \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta y}{y} = \frac{\delta z}{z}$$

$$(\Lambda) \lambda x - \lambda y = \lambda z \mid (M) \frac{x}{y} = z \mid (N) \frac{xy}{y^2} = \frac{zy}{y} \mid (\Xi) \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta y}{y} \cdot \frac{xy}{y^2} = \frac{\delta z}{z} \cdot \frac{zy}{y}$$

$$(O) \frac{\beta\delta x}{\alpha + x} = \frac{\beta\delta x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} x\delta x + \frac{\beta}{\alpha^3} x^2\delta x - \frac{\beta}{\alpha^4} x^3\delta x, \kappa\tau. \mid (P) \frac{\alpha\delta x}{x^2 + \alpha^2}$$

$$(\Pi) 0 \frac{\beta\delta x}{\alpha + x} = \frac{\beta x - \beta x^2 + \beta x^3 - \beta x^4}{\alpha \quad 2\alpha^2 \quad 3\alpha^3 \quad 4\alpha^4}, \kappa\tau. \mid (\Sigma) \frac{\alpha\delta x}{x^2 + \alpha^2} = \frac{A\delta x}{x + c} + \frac{D\delta x}{x - c}$$

$$(T) \frac{\alpha\delta x}{x^2 + \alpha^2} = \frac{A x\delta x - A c\delta x + D x\delta x + D c\delta x}{x^2 - c^2} \mid (\Upsilon) A + D = 0 \mid (\Phi) Dc - Ac = \alpha$$

$$(X) -c^2 = \pm \alpha^2 \mid (\Psi) D = -A \mid (\Omega) c = \alpha \sqrt{\mp 1} \mid (\alpha) -2 A \alpha \sqrt{\mp 1} = \alpha \mid (\beta) A = -\frac{\alpha}{2\alpha\sqrt{\mp 1}}$$

$$(\gamma) A = -\frac{1}{2\sqrt{\mp 1}} \mid (d) D = \frac{1}{2\sqrt{\mp 1}} \mid (\varepsilon) \frac{\alpha\delta x}{x^2 \pm \alpha^2} = -\frac{1}{2\sqrt{\mp 1}} \cdot \frac{\delta x}{x + \alpha\sqrt{\mp 1}} + \frac{1}{2\sqrt{\mp 1}} \cdot \frac{\delta x}{x - \alpha\sqrt{\mp 1}}$$

$$(\zeta) 0 \cdot \frac{\alpha\delta x}{x^2 \pm \alpha^2} = -\frac{1}{2\sqrt{\mp 1}} \lambda \sqrt{x + \alpha\sqrt{\mp 1}} + \frac{1}{2\sqrt{\mp 1}} \lambda \sqrt{x - \alpha\sqrt{\mp 1}}$$

$$(A) \frac{x \delta x + 3 \alpha \delta x}{4 \alpha \cdot x^2 + 2 \alpha x - \alpha^2} \mid (B) x = y - \alpha \mid (\Gamma) \delta x = \delta y \mid (\Delta) x \delta x = \overline{y - \alpha} \delta y$$

$$(E) x \delta x + 3 \alpha \delta x = \overline{y - \alpha} \cdot \delta y + 3 \alpha \delta y \mid (Z) x \delta x - 3 \alpha \delta x = \overline{y + 2 \alpha} \cdot \delta y$$

$$(H) \frac{x \delta x + 3 \alpha \delta x}{4 \alpha \cdot x^2 + 2 \alpha x - \alpha^2} = \frac{y \delta y + 2 \alpha \delta y}{4 \alpha \cdot y^2 - 2 \alpha^2} \mid (\Theta) \frac{x \delta x + 3 \alpha \delta x}{4 \alpha \cdot x^2 + 2 \alpha x - \alpha^2} = \frac{y \delta y}{4 \alpha \cdot y^2 - 2 \alpha^2} + \frac{\delta y}{2 \cdot y^2 - 2 \alpha^2}$$

$$(I) \frac{\delta y}{2 \cdot y^2 - 2 \alpha^2} = \frac{\delta y}{2 \sqrt{2 \alpha^2} \cdot y - \alpha \sqrt{2}} - \frac{\delta y}{2 \sqrt{2 \alpha^2} \cdot y + \alpha \sqrt{2}}$$

$$(K) \frac{x \delta x + 3 \alpha \delta x}{4 \alpha \cdot x^2 + 2 \alpha x - \alpha^2} = \frac{y \delta y}{4 \alpha \cdot y^2 - 2 \alpha^2} + \frac{\delta y}{2 \alpha \sqrt{2} \cdot y - \alpha \sqrt{2}} - \frac{\delta y}{2 \alpha \sqrt{2} \cdot y + \alpha \sqrt{2}}$$

$$(\Lambda) \frac{1}{4 \alpha} \lambda \sqrt{y^2 - 2 \alpha^2} + \frac{1}{2 \alpha \sqrt{2}} \lambda \sqrt{y - \alpha \sqrt{2}} - \frac{1}{2 \alpha \sqrt{2}} \lambda \sqrt{y + \alpha \sqrt{2}}$$

$$(M) \frac{1}{4 \alpha} \lambda \sqrt{x^2 + 2 \alpha x - \alpha^2} + \frac{1}{2 \alpha \sqrt{2}} \lambda \sqrt{x + \alpha - \alpha \sqrt{2}} - \frac{1}{2 \alpha \sqrt{2}} \lambda \sqrt{x + \alpha + \alpha \sqrt{2}}$$

$$(N) \frac{\alpha \delta x}{x^2 - \gamma x + \beta^2} \mid (\Xi) \frac{\alpha \delta x}{x^2 - \gamma x + \beta^2} = \frac{\alpha \delta x}{x^2 - \gamma x + \frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 + \beta^2} \mid (O) x - \frac{1}{2} \gamma = z \mid (\Pi) \beta^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 = \epsilon^2$$

$$(P) \frac{\alpha \delta x}{x^2 - \gamma x + \beta^2} = \frac{\alpha \delta z}{z^2 + \epsilon^2}$$

$$(A) \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} \quad | \quad (B) \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} = \frac{A\chi \delta \chi + B\delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} + \frac{\Gamma \chi \delta \chi + \Delta \delta \chi}{\chi^2 + \alpha^2}$$

$$(C) \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} = \frac{\Lambda}{\Gamma} \left| \begin{array}{c} \chi^2 + B \\ + \Delta \\ + 2\Gamma^2 \end{array} \right| \frac{\chi^2 + A\chi^2}{+ 2\Delta\chi - \Gamma\alpha^2} \left| \begin{array}{c} \chi + B \\ - \Delta \\ - \Gamma\alpha^2 \end{array} \right| \frac{\alpha^2}{\chi^2 + \alpha^2} \delta \chi$$

$$(\Delta) \Lambda + \Gamma = 0 \quad | \quad (E) B + \Delta + 2\Gamma\alpha = 0 \quad | \quad (Z) A\alpha^2 + 2\Delta\alpha - \Gamma\alpha^2 = 0 \quad | \quad (H) \overline{B - \Delta} \alpha^2 = \alpha^2 \quad | \quad (\Theta) \Gamma = -A$$

$$(I) B = 2\Lambda\alpha - \Delta \quad | \quad (K) \Gamma = A + \frac{2}{\alpha}\Delta \quad | \quad (\Lambda) \Delta = B - \Gamma \quad | \quad (M) \Delta = 2A\alpha - \Delta - \Gamma \quad | \quad (N) \Delta = A\alpha - \frac{\Gamma}{2}$$

$$(\Xi) \Gamma = \frac{3\Lambda\alpha - 1}{\alpha} \quad | \quad (O) \frac{3\Lambda\alpha - 1}{\alpha} = -A \quad | \quad (\Pi) A = \frac{1}{4\alpha} \quad | \quad (P) \Gamma = -\frac{1}{4\alpha} \quad | \quad (\Sigma) \Delta = -\frac{1}{4} \quad | \quad (T) B = \frac{3}{4}$$

$$(Y) \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} = \frac{\chi \delta \chi + 3\alpha \delta \chi}{4\alpha \cdot \chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} - \frac{\chi \delta \chi}{4\alpha \cdot \chi^2 + \alpha^2} - \frac{\delta \chi}{4 \cdot \chi^2 + \alpha^2}$$

$$(\Phi) \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} = \frac{\chi \delta \chi}{4\alpha \cdot \chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} + \frac{3\alpha \delta \chi}{4\alpha \cdot \chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} - \frac{\chi \delta \chi}{4\alpha \cdot \chi^2 + \alpha^2} - \frac{\delta \chi}{4 \cdot \chi^2 + \alpha^2}$$

$$(X) \frac{O \alpha^2 \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} = \frac{1}{4} \lambda \sqrt{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} + \frac{\Gamma}{2\alpha \sqrt{2}} \lambda \sqrt{\chi^2 + \alpha^2} - \frac{\Gamma}{2\alpha \sqrt{2}} \lambda \sqrt{\chi^2 + \alpha^2} - \frac{1}{4} \lambda \sqrt{\chi^2 + \alpha^2} - O \delta \chi$$

$$(\Psi) \frac{\alpha^2 \chi' \delta \chi}{\chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} \quad | \quad (\Omega) \frac{\alpha^2 \delta \chi}{\chi' \cdot \chi^2 + 2\alpha\chi - \alpha^2} \quad | \quad \chi^2 + \alpha^2$$

$$(A) \alpha \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^\mu | (B) \{ \chi^\pi \lambda \chi^\pi | (\Gamma) \text{mf} \chi^{\pi-1} \delta \chi \lambda \chi^\pi + \text{cf} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\pi-1}$$

$$(\Delta) \text{mf} = \alpha | (E) \text{m} - 1 = \pi | (Z) \text{e} = \mu | (H) \text{m} = \pi + 1 | (\Theta) \text{f} = \frac{\alpha}{\pi+1} | (I) \frac{\alpha}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^\mu$$

$$(K) 0 \alpha \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^\mu = \frac{\alpha}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^\mu - \frac{0 \alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-1} | (\Lambda) \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-1}$$

$$(M) \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^\pi = \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi | (N) \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} | (\Xi) \frac{\alpha \chi^\pi \lambda \chi^\mu}{\pi+1} - \frac{\alpha \mu \chi^{\pi+1}}{\pi+1}$$

$$(O) \text{mf} \chi^{\pi-1} \delta \chi + \text{cf} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\pi-1} | (\Pi) \text{mf} = \frac{\alpha \mu}{\pi+1} | (P) \text{m} - 1 = \pi | (\Sigma) \text{e} = \mu - 1$$

$$(T) \text{m} = \pi + 1 | (Y) \text{f} = \frac{\alpha \mu}{\pi+1} | (\Phi) \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} | (X) \text{cf} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\pi-1} = \text{cf} \chi^{\pi-1} \delta \chi \lambda \chi^{\pi-1}$$

$$(\Psi) 0 \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-1} = \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} 0 \text{cf} \chi^{\pi-1} \delta \chi \lambda \chi^{\pi-1}$$

$$(\Omega) 0 \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-1} = \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} - \frac{0 \mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-2}$$

$$(\alpha) 0 \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-1} = \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} - \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1}$$

$$(\beta) 0 \alpha \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^\mu = \frac{\alpha}{\pi+1} \chi^\pi \lambda \chi^\mu - \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} + \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1}$$

$$(\gamma) 0 \alpha \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^\mu = \frac{\alpha}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^\mu - \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} + 0 \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-2}$$

$$(\delta) 0 \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-2} = \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-2} - 0 \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\mu - 2}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-3}$$

$$(\epsilon) 0 \alpha \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^\mu = \frac{\alpha}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^\mu - \frac{\mu \alpha}{\pi+1} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} + \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\alpha \mu}{\pi+1} \chi^\pi \lambda \chi^{\mu-2} + 0 \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\mu - 2}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-3}$$

$$(\zeta) \frac{\mu - 1}{\pi+1} \frac{\mu - 2}{\pi+1} \chi^\pi \delta \chi \lambda \chi^{\mu-3}$$

- (A) $\text{ef} \chi^{\pi-1} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\pi-1} + \text{mf} \chi^{\pi-1} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\pi} \mid$ (B) $\text{ef} = \alpha \mid$ (Γ) $\text{m} - \text{I} = \pi \mid$ (Δ) $\text{e} - \text{I} = \mu$
- (E) $\text{e} = \mu + 1 \mid$ (Z) $\text{f} = \alpha \mid$ (II) $\text{m} = \pi + 1 \mid$ (Θ) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\mu} = \alpha \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu+1} - \text{O} \pi + 1. \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\mu+1}$
- (I) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\mu} = \alpha \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu+1} - \text{O} \pi + 1. \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \chi \mid$ (K) $\frac{\pi+1}{\mu+1} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \chi$
- (Λ) $\alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^2 \mid$ (M) $\text{mf} \chi^{\pi-1} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\pi} + \text{cf} \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\pi-1}$
- (N) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^2 = \text{I} \alpha \chi^{\pi} \lambda \chi^2 - \text{O} \text{I} \alpha \chi^3 \delta_{\lambda} \lambda \chi^{2-1} \mid$ (Ξ) $\text{O} \alpha \chi^2 \delta_{\lambda} \lambda \chi^2 = \text{I} \alpha \chi^4 \lambda \chi^2 - \text{I} \alpha \chi^4 \lambda \chi + \text{I} \alpha \chi^4$
- (O) $\alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{-2} \mid$ (Π) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{-2} = -\alpha \chi^{\pi} \lambda \chi^{-1} - \text{O} 3 + 1 \alpha \chi^3 \delta_{\lambda} \lambda \chi^{-2}$
- (P) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{-2} = -\alpha \chi^4 + \text{O} 4 \alpha \chi^3 \delta_{\lambda} \chi \mid$ (Σ) $\alpha \chi^3 \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\frac{1}{2}}$
- (T) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\mu} = \text{f} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu} - \text{g} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-1} + \text{h} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu-2} \dots \text{I} \chi^{\pi+1}$
- (Υ) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \lambda \chi^{\mu} = \text{f} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu+1} - \text{g} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu+2} + \text{h} \chi^{\pi+1} \lambda \chi^{\mu+3} \dots \text{LO} \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \chi$
- (Φ) $\alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu} \mid$ (X) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu} = \text{f} \chi^{\pi} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu-1}$
- (Ψ) $\alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu} = \text{q} \text{f} \zeta \nu \chi^{\pi+\nu-1} \cdot \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu-1} + \text{cf} \chi^{\pi-1} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu-1}$
- (Ω) $\text{q} \text{f} \zeta \nu = \alpha \mid$ (α) $\text{e} + \nu - \text{I} = \pi \mid$ (β) $\text{q} - \text{I} = \mu \mid$ (γ) $\text{q} = \mu + 1 \mid$ (δ) $\text{f} = \frac{\alpha}{3\nu \cdot \mu + 1}$
- (ε) $\text{e} = \pi - \nu + 1 \mid$ (ζ) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu} = \frac{\alpha}{\nu \zeta \cdot \mu + 1} \chi^{\pi-1+1} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu+1} - \alpha \cdot \frac{\pi - \nu + 1}{\nu \zeta \cdot \mu + 1} \text{O} \chi^{\pi-\nu} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu+1}$
- (η) $\text{O} \alpha \chi^{\pi} \delta_{\lambda} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu} = \frac{\alpha}{\nu \zeta \cdot \mu + 1} \chi^{\pi-1+1} \cdot \overline{\varepsilon + \zeta \chi'}^{\mu+1} - \frac{\alpha \cdot \pi - \nu + 1}{\nu \zeta \cdot \mu + 1} \text{O} \chi^{\pi-1} \delta_{\lambda}$

[illegible]

$$(A) \chi^4 \delta y^2 + 2\chi^3 \delta \chi \delta y = \alpha^4 \delta \chi^3 - \chi^3 y^2 \delta \chi^2 \mid (B) \chi^2 \delta y^2 + 2\chi \delta \chi \delta y + y^2 \delta \chi^2 = \alpha^4 \delta \chi^3$$

$$(\Gamma) \chi \delta y + y \delta \chi = \alpha^2 \delta \chi \mid (\Delta) y \chi = \alpha^2 \lambda \chi \mid (E) \chi \delta y^2 + 2y \delta y \delta \chi + y^2 \delta \chi^2 = \alpha^2 \chi \delta \chi^2$$

$$(Z) \chi^2 \delta y^2 + 2\chi y \delta y \delta \chi + y^2 \delta \chi^2 = \alpha^2 \chi^2 \delta \chi^2 \mid (H) \chi \delta y + y \delta \chi = \alpha \chi \delta \chi$$

$$(\Theta) \chi y = \frac{1}{2} \alpha \chi^2 \mid (I) \frac{\delta \chi + \delta y}{\chi + y} \mid (K) \chi + y = z \mid (\Lambda) \delta \chi + \delta y = \delta z$$

$$(M) \frac{\delta \chi + \delta y}{\chi + y} = \frac{\delta z}{z} \mid (N) \frac{\delta \chi + \delta y}{\chi + y} = \lambda z = \lambda \overline{\chi + y}$$

$$(\Xi) \chi^2 \delta y = y \delta \chi + \chi y \delta \chi \mid (O) \alpha y = \chi z \mid (\Pi) \alpha^2 y^2 + \chi^2 z^2 \mid$$

$$(P) \delta y = \frac{\chi \delta z + z \delta \chi}{\alpha} \mid (\Sigma) \frac{\chi^3 \delta z + \chi^2 z \delta \chi}{\alpha^2} = \frac{\chi^2 z^2 \delta \chi}{\alpha} + \frac{\chi^2 z \delta \chi}{\alpha}$$

$$(T) \alpha \chi^2 \delta z = \chi^2 z^2 \delta z \mid (Υ) \alpha \chi \delta z = z^2 \delta \chi \mid (\Phi) \frac{\delta z}{z^2} = \frac{\delta \chi}{\alpha \chi} \mid (X) \frac{-1}{z} = \frac{1}{\alpha} \lambda \chi$$

$$(\Psi) \frac{-\chi}{\alpha y} = \frac{1}{\alpha} \lambda \chi \mid (\Omega) \frac{-\chi}{y} = \lambda \chi \mid (\alpha) \chi^2 \delta y^2 + \chi y \delta \chi \delta y = \chi^2 \delta \chi^2$$

$$(\beta) \alpha \chi^2 \delta y^2 + \chi^2 z \delta \chi \delta y = \alpha \chi^2 \delta \chi^2 \mid (\gamma) \alpha \delta y^2 + z \delta \chi \delta y = \alpha \delta \chi^2 \mid (\delta) \frac{\chi \delta z}{\alpha} = \delta \tau$$

$$(\epsilon) \delta y = \frac{\alpha \delta \tau + z \delta \chi}{\alpha^2} \mid (\zeta) \delta y^2 = \frac{\alpha^2 \delta \tau^2 + 2\alpha z \delta \chi \delta \tau + z^2 \delta \chi^2}{\alpha^2}$$

$$(\eta) \frac{\alpha^2 \delta \tau^2 + 2\alpha z \delta \chi \delta \tau + z^2 \delta \chi^2}{\alpha^2} + \frac{z^2 \delta \chi^2 + \alpha z \delta \chi \delta \tau}{\alpha^2} = \alpha \delta \chi^2$$

$$(\theta) 2z^2 \delta \chi^2 + 3\alpha z \delta \chi \delta \tau + \alpha^2 \delta \tau^2 = \alpha^2 \delta \chi^2 \mid (\iota) \delta \tau = \frac{\sigma \delta \chi}{\alpha} \mid (\kappa) \delta \tau^2 = \frac{\sigma^2 \delta \chi^2}{\alpha^2}$$

$$(\lambda) 2z^2 \delta \chi^2 + 3\sigma z \delta \chi^2 + \sigma^2 \delta \chi^2 = \alpha^2 \delta \chi^2 \mid (\mu) 2z^2 + 3\sigma z + \sigma^2 = \alpha^2$$

$$(\nu) 2\alpha^2 y^2 + 3\alpha \chi y \sigma + \chi^2 \sigma^2 = \alpha^2 \chi^2$$

$$(A) 2a^2y^2 + 3axy \cdot \frac{x\delta z}{\delta x} + x^4 \cdot \frac{x^2\delta z^2}{\delta x^2} = a^2x^3$$

$$(B) 2a^2y^2\delta x^2 + 3ax^2y\delta x \cdot \delta z + x^4 \cdot \delta z^2 = a^2x^2\delta x^2$$

$$(\Gamma) 2a^2y^2\delta x^2 + 3axyx^2\delta x \cdot \frac{ax\delta y - ay\delta x}{x^2} + x^4 \cdot \frac{a^2x^2\delta y^2 - 2a^2xy\delta y\delta x + a^2y^2\delta x^2}{x^4} = a^2x^2\delta x^2$$

$$(\Delta) x^2\delta y^2 + xy\delta x\delta y = x^2\delta x^2 \mid (E) x = y \cdot \frac{3\delta x^3 - 2\delta y^3}{\delta x^2\delta y + \delta x\delta y^2} \mid (Z) x = 0\tau\delta y$$

$$(H) \delta x = \tau\delta y \mid (\Theta) \delta x^2 = \tau^2\delta y^2 \mid (I) \delta x^3 = \tau^3\delta y^3 \mid (K) 0\tau\delta y = y \cdot \frac{3\tau^3\delta y^3 - 2\delta y^3}{\tau^2\delta y^3 + \tau\delta y^3}$$

$$(\Lambda) 0\tau\delta y = y \cdot \frac{3\tau^3 - 2}{\tau^2 + \tau} \mid (M) \tau\delta y = \delta y \cdot \frac{3\tau^3 - 2}{\tau^2 + \tau} + y \cdot \frac{3\tau^4 + 6\tau^3 + 4\tau + 2}{\tau^4 + \tau} \cdot \delta \tau$$

$$(N) \frac{\tau - 3\tau^3 + 2}{\tau^2 + \tau} \cdot \delta y = y \cdot \frac{3\tau^4 + 6\tau^3 + 4\tau + 2}{\tau^2 + \tau^2} \cdot \delta \tau$$

$$(\Xi) \frac{\delta y}{y} = \frac{3\tau^4 + 6\tau^3 + 4\tau + 2}{\tau^2 + \tau \cdot \tau^2 - 2\tau + 2} \cdot \delta \tau \mid (O) B\Delta = y \frac{\delta x}{\delta y} \mid PZ = y \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}{\delta y}$$

$$(P) B\Delta = y \frac{\delta y}{\delta x} \mid (\Sigma) Z\Pi = y \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}{\delta x} \mid (T) Z\Psi = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \mid (\Upsilon) B\Gamma = y \frac{\delta x - x\delta y}{\delta y}$$

$$(\Phi) \Gamma O = y \frac{\delta x - x\delta y}{\delta x} \mid (X) \Delta\Phi = y\delta x \mid (\Psi) Z\Pi\Sigma\Psi = \frac{\pi\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} + y\delta \tau}{2} \mid (\Omega) \frac{\pi y^2\delta x}{2\eta}$$

$$(\alpha) \pi\delta\epsilon = \delta\kappa \mid (\beta) B\Delta = \sqrt{\delta\kappa^2 + \delta z^2} \mid (\gamma) \Phi A = z\delta\kappa \mid (\delta) B\Phi = \frac{z\delta z}{\sqrt{\delta\kappa^2 + \delta z^2}}$$

$$(\epsilon) AB\Gamma = \frac{1}{2} z\delta\kappa$$

$$\begin{aligned}
& \kappa \rho = \frac{z^2 - z^2}{z \delta z} (\gamma) \mid \frac{z^2 - z^2}{z} = u (\kappa) \mid \frac{z^2 - z^2}{z \delta} = z \rho u (1) \mid \phi \rho = z \rho (\gamma) \mid \phi_i = z (\kappa) \\
& \phi = z (\delta) \mid \phi_z = z (\delta) \mid \chi u = z (\delta) \mid z^2 - z : u :: \chi : \frac{z}{1} (\lambda) \\
& \frac{z}{z^2 - z} = \chi u (\delta) \mid \chi = \frac{z}{\chi u} (u) \mid \frac{z^2 - z}{\chi u} = z \delta \chi - \chi \delta z = \frac{z^2 - z}{\chi \delta \chi u} (5) \\
& \frac{z^2 - z}{\chi \delta \chi u} = \chi - z \delta \chi (\delta) \mid \frac{z^2 - z}{\chi u} = z u (X) \mid \frac{z^2 - z}{\chi \delta} = z \delta (\Phi) \\
& \frac{z^2 - z}{\chi} = z (\chi) \mid \chi = z^2 - z (\chi) \mid z^2 u = \chi - z (\chi) \mid z u = \chi - z \delta \chi (\delta) \\
& \frac{z^2}{z \delta \chi - \chi \delta z} = \chi - z \delta \chi (\delta) \mid \frac{z^2 - z}{z \delta \chi - \chi \delta z} = z \delta z (\delta) \mid \frac{z^2 - z}{\phi \rho} = z \delta z (\delta) \\
& \frac{z^2}{z \delta \phi + \phi \delta z} = z \delta (\delta) \mid \frac{z^2}{\phi \rho} = \chi (\delta) \mid \frac{z^2}{\phi \rho} = \chi (\delta) \mid \frac{z^2}{\phi \rho} = z \delta z (\delta) \\
& \frac{z^2}{z \delta \chi + \chi \delta z} = z \delta z (\delta) \mid \frac{z^2}{\chi \delta \chi + \chi \delta z} = z \delta z (\delta) \mid \frac{z^2}{\chi \delta \chi + \chi \delta z} = z \delta z (\delta) \\
& \frac{z^2}{\chi \delta \chi + \chi \delta z} = z \delta z (\delta) \mid \frac{z^2}{\chi \delta \chi + \chi \delta z} = z \delta z (\delta) \mid \frac{z^2}{\chi \delta \chi + \chi \delta z} = z \delta z (\delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A) \alpha \pm \frac{\gamma}{\beta} \chi = \sqrt{\chi^2 + \gamma^2} \mid (B) z = \sqrt{\chi^2 + \gamma^2} \mid (\Gamma) z = \alpha \pm \frac{\gamma}{\beta} \chi \mid (\Delta) z = \alpha \pm \frac{\gamma}{\alpha \beta} \chi \psi \\
 & (E) \psi = \pm \frac{\alpha \beta}{\gamma} = \frac{\alpha^2 \beta}{\gamma^2} \mid (Z) \delta \psi = \pm \frac{\beta \alpha^2 \delta z}{\gamma^2} \mid (H) \psi^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - 2 \alpha^3 \beta^2 + \alpha^4 \beta^2}{\gamma^2} \\
 & (\Theta) \alpha^2 - \psi^2 = \frac{\alpha^2 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\gamma^2} + \frac{2 \alpha^3 \beta^2 - \alpha^4 \beta^2}{\gamma^2}}{\gamma^2} \mid (I) \alpha^2 - \psi^2 = \frac{\alpha^4 \gamma^2 - \alpha^2 \beta^2}{\gamma^2} \cdot \frac{z^2 + 2 \alpha^3 \beta^2 - \alpha^4 \beta^2}{\gamma^2} \\
 & (K) \sqrt{\alpha^2 - \psi^2} = \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{\alpha^4 \gamma^2 - \alpha^2 \beta^2 \cdot z^2 + 2 \alpha^3 \beta^2 - \alpha^4 \beta^2} \mid (\Lambda) \frac{\pi \delta z}{z} = \frac{\delta \psi}{\sqrt{\alpha^2 - \psi^2}} \\
 & (M) \frac{\pi \delta z}{z} = \pm \frac{\beta \alpha^2 \delta z}{\gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\sqrt{\alpha^4 \gamma^2 - \alpha^2 \beta^2 \cdot z^2 + 2 \alpha^3 \beta^2 - \alpha^4 \beta^2}} \mid (N) \pi \delta z = \frac{\beta \alpha^2 \delta z}{\sqrt{\alpha^4 \gamma^2 - \alpha^2 \beta^2 \cdot z^2 + 2 \alpha^3 \beta^2 - \alpha^4 \beta^2}} \\
 & (\Xi) \pi \delta z = \delta u \mid (O) \delta u = \frac{\beta \alpha \delta z}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2 \cdot z^2 + 2 \alpha^3 \beta^2 - \alpha^4 \beta^2}} \mid (\Pi) \alpha \pm \chi = \sqrt{\chi^2 + \gamma^2} \\
 & (P) \alpha^2 \pm 2 \alpha \chi + \chi^2 = \chi^2 + \gamma^2 \mid (\Sigma) 2 \alpha \cdot \frac{1}{2} \alpha \pm \chi = \gamma^2 \mid (T) 2 \alpha z = \gamma^2 \mid (Y) \alpha \beta \pm \gamma \chi = \beta \sqrt{\chi^2 + \gamma^2} \\
 & (\Phi) \alpha^2 \beta^2 \pm 2 \alpha \beta \gamma \chi + \gamma^2 \chi^2 = \beta^2 \chi^2 + \beta^2 \gamma^2 \mid (X) \beta^2 - \gamma^2 \cdot \chi^2 + 2 \alpha \beta \gamma \chi = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \gamma^2 \\
 & (\Psi) \chi^2 + \frac{2 \alpha \beta \gamma \chi + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{\beta - \gamma^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \mid (\Omega) \chi \mp \alpha \beta \gamma = z \\
 & (a) z^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \gamma^2 + \alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \mid (\beta) z^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2 - \beta^2 \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} \\
 & (\gamma) \gamma^2 \cdot \frac{\beta^2}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 - z^2}{\beta^2 - \gamma^2} \mid (\delta) \frac{\beta^2 \gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 - z^2}{\beta^2 - \gamma^2} \\
 & (\epsilon) \frac{\beta^2 \gamma^2}{\gamma^2 - \beta^2} = \frac{z^2 - \alpha^2 \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2} \mid (\zeta) \alpha = \sqrt{\chi^2 + \gamma^2} \mid (\eta) \alpha^2 = \chi^2 + \gamma^2 \mid (\theta) \gamma^2 = \alpha^2 - \chi^2
 \end{aligned}$$

$$(A) \alpha\chi = y^2 \mid (B) \alpha\delta\chi = 2y\delta y \mid (\Gamma) \delta\chi = \frac{2y\delta y}{\alpha} \mid (\Delta) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{y}{\delta y} \cdot \frac{2y\delta y}{\alpha} = \frac{2y^2}{\alpha}$$

$$(E) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = 2\chi \mid (Z) y^2 = \frac{\chi^3}{\alpha - \chi} \mid (H) 2y\delta y = \frac{3\alpha\chi^2 - 2\chi^3}{\alpha - \chi^2} \cdot \delta\chi \mid (\Theta) \delta\chi = \frac{\alpha - \chi^2}{3\alpha\chi^2 - 2\chi^3} \cdot \frac{2y\delta y}{\alpha}$$

$$(I) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{y}{\delta y} \cdot \frac{\alpha - \chi^2}{3\alpha\chi^2 - 2\chi^3} \cdot 2y\delta y = 2y^2 \cdot \frac{\alpha - \chi^2}{3\alpha\chi^2 - 2\chi^3} \mid (K) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = \frac{2\chi^3}{\alpha - \chi} \cdot \frac{\alpha - \chi^2}{3\alpha\chi^2 - 2\chi^3} = \frac{2\chi \cdot \alpha - \chi^2}{3\alpha - 2\chi}$$

$$(\Lambda) \frac{y\delta y}{\delta\chi} = \frac{\alpha\delta\chi}{2\delta\chi} = \frac{1}{2} \alpha \mid (M) \frac{y}{\delta y} \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2} = \frac{y\delta y}{\alpha\delta y} \sqrt{4y^2 + \alpha^2} = \frac{y}{\alpha} \sqrt{4y^2 + \alpha^2}$$

$$(N) \frac{y}{\delta y} \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2} = \sqrt{4\chi^2 + \alpha\chi} \mid (\Xi) \frac{y}{\delta\chi} \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2} = \sqrt{4y^2 + \alpha^2} = \sqrt{4\chi + \alpha^2} \mid (O) \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2} = \frac{\delta y}{\alpha} \sqrt{4y^2 + \alpha^2}$$

$$(\Pi) \frac{\alpha}{5} \lambda z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{\alpha} \mid (P) y\delta\chi = y \cdot \frac{2y\delta y}{\alpha} = 2y^2\delta y \mid (\Sigma) \alpha y\delta\chi = \frac{2y^3}{3\alpha} \mid (T) \alpha y\delta\chi = \frac{2}{3} \chi y$$

$$(\Upsilon) \frac{\pi y^2\delta\chi}{2\eta} = \frac{\pi y^2}{2\eta} \cdot \frac{2y\delta y}{\alpha} = \frac{\pi y^3\delta y}{\alpha\eta} \mid (\Phi) \frac{C\pi y^2\delta\chi}{2\eta} = \frac{\pi y^4}{4\alpha\eta} \mid (X) \frac{C\pi y^2\delta\chi}{2\alpha\eta} = \frac{\pi y^2\chi}{4\eta}$$

$$(\Psi) \frac{y\delta\chi}{\delta y} = 2\chi \mid (\Omega) \frac{y}{2\delta y} = \frac{\chi}{\delta\chi} \mid (\alpha) 2\lambda y = \lambda\chi + \lambda\alpha \mid (\beta) y^2 = \alpha\chi \mid (\gamma) \frac{y\delta y}{\delta\chi} = \frac{1}{2} \alpha$$

$$(\delta) y\delta y = \frac{1}{2} \alpha\delta\chi \mid (\epsilon) \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \alpha\chi \mid (\zeta) y^2 = \alpha\chi \mid (\eta) 2\alpha\chi - \chi^2 = y^2 \mid (\theta) \alpha\delta\chi - \chi\delta\chi = y\delta y$$

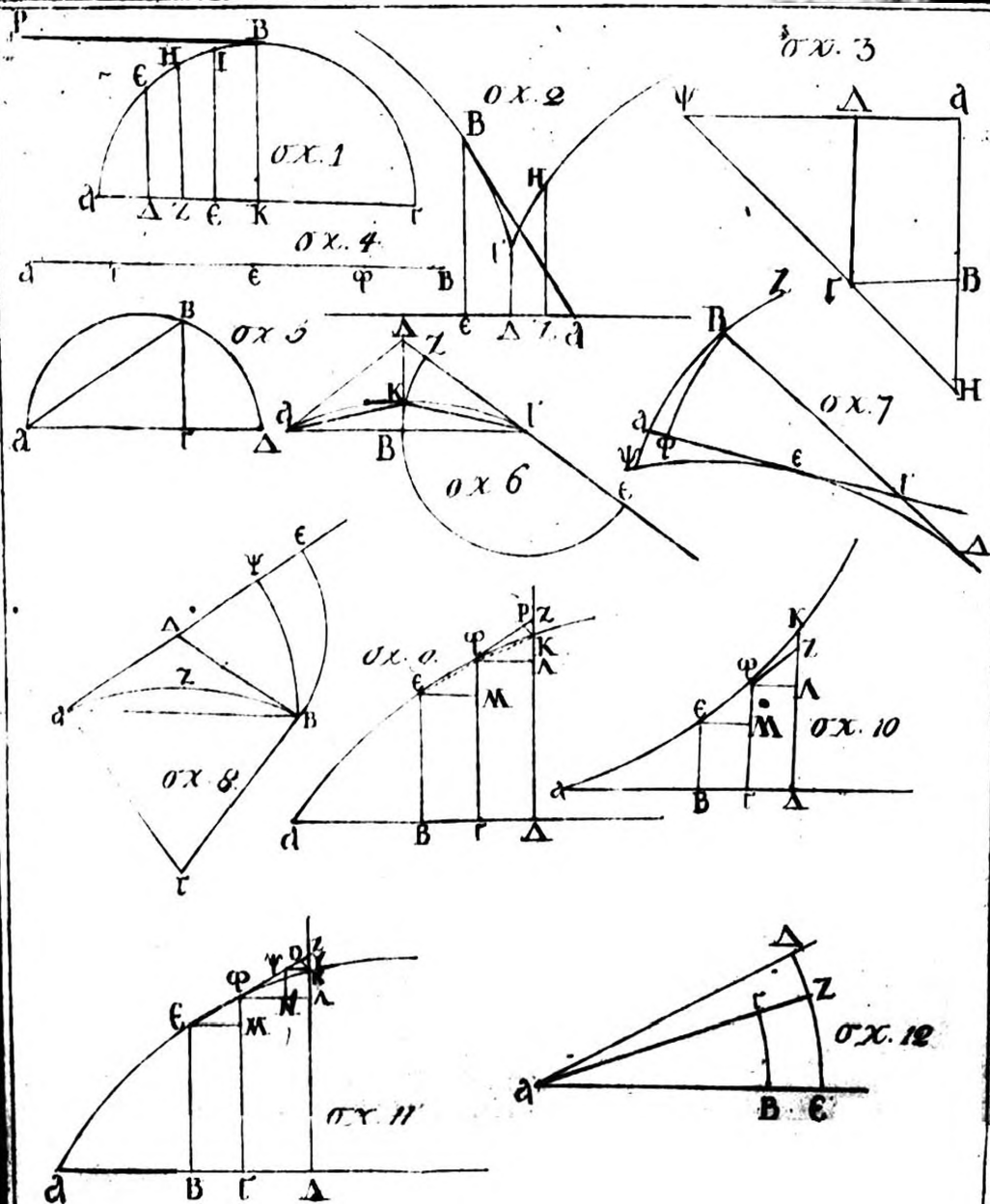
$$(\iota) \alpha = \chi \mid (\kappa) 2\alpha^2 - \alpha^2 = y^2 \mid (\lambda) y = \alpha \mid (\mu) z^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 = y^2 \mid (\nu) z\delta z = y\delta y$$

$$(\xi) y\chi = \frac{\alpha + \chi}{\chi} \sqrt{\beta^2 + \chi^2} \mid (\omicron) y = \frac{\chi + \alpha}{\chi} \sqrt{\beta^2 + \chi^2} \mid (\pi) \delta y = \frac{\chi^3 - \alpha\beta^2}{\chi^2\sqrt{\beta^2 + \chi^2}} \cdot \delta\chi \mid (\rho) \frac{\chi^3 - \alpha\beta^2}{\chi^2\sqrt{\beta^2 + \chi^2}} \cdot \delta\chi = 0$$

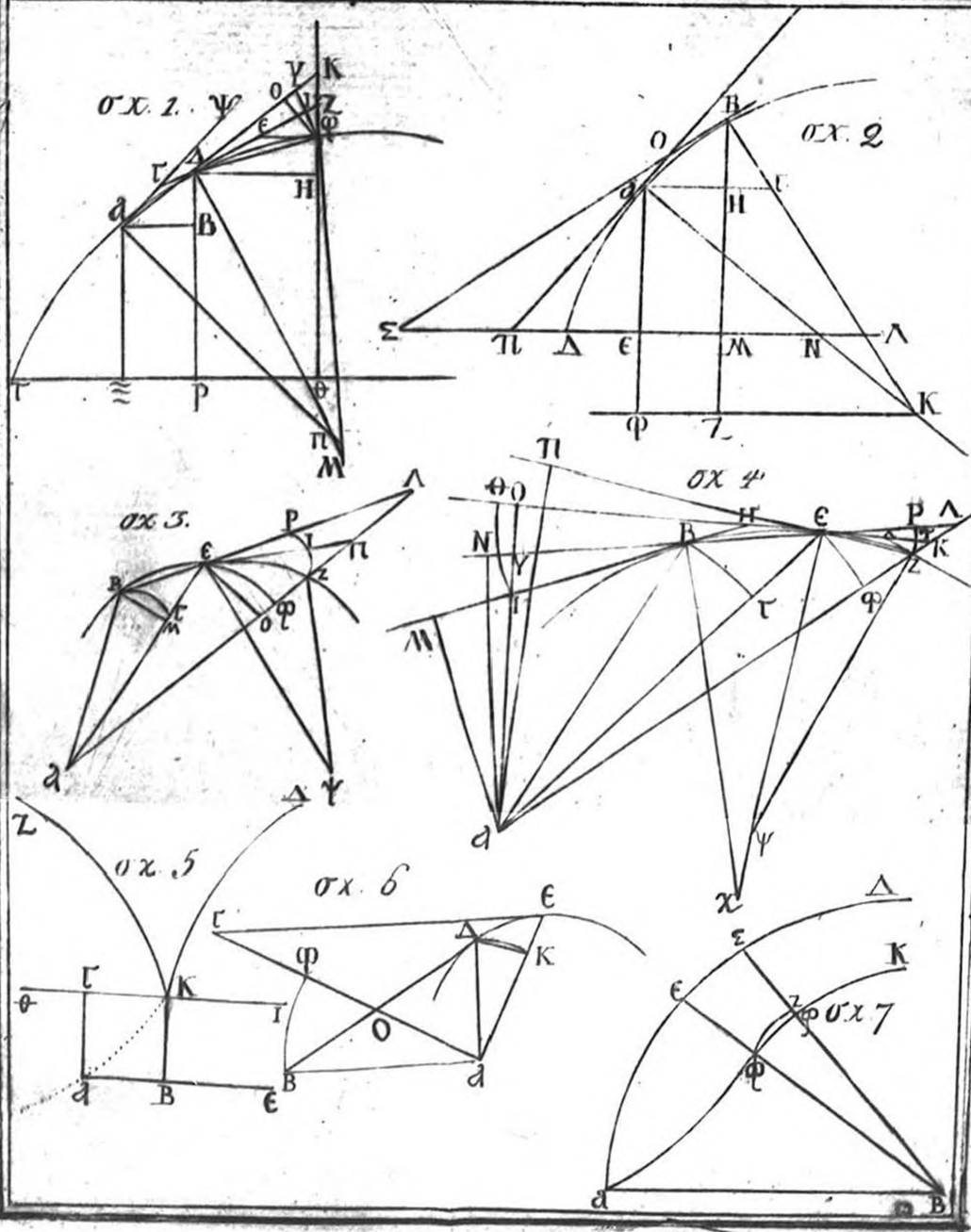
$$(\sigma) \chi = \sqrt{\alpha\beta^2} \mid (\tau) \frac{\chi + \alpha}{\chi} \sqrt{\beta^2 + \chi^2} = 0 \mid (\upsilon) \beta^2 + \chi^2 = 0 \mid (\phi) \chi = \sqrt{-\beta^2} \mid (\chi) \frac{\alpha + \chi \cdot \gamma - \chi}{\chi \cdot \beta - \chi}$$

$$(\psi) \frac{\alpha\gamma + \gamma\chi - \alpha\chi - \chi^2}{\beta\chi - \chi^2} \mid (\omega) \frac{\gamma\chi^2 - \beta\chi^2 - \alpha\chi^2 + 2\alpha\gamma\chi - \alpha\beta\gamma}{\delta\chi - \chi^2} \cdot \delta\chi \mid (A) \frac{\gamma\chi^2 - \beta\chi^2 - \alpha\chi^2 + 2\alpha\gamma\chi - \alpha\beta\gamma}{\delta\chi} \cdot \delta\chi = 0$$

$$(C) \frac{\chi^2 + 2\alpha\gamma\chi}{\gamma - \beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma - \beta - \alpha} \mid (D) \frac{\chi^2 + 2\alpha\gamma\chi}{\gamma - \beta - \alpha} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\gamma - \beta - \alpha^2} = \frac{\alpha^2\gamma^2}{\gamma \cdot \beta - \alpha^2} + \frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma - \beta - \alpha} \mid (e) \chi = - \frac{\alpha\gamma \pm \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + \alpha\beta\gamma^2 - \alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\beta\gamma}}{\gamma - \beta - \alpha}$$



$$\begin{aligned}
& (A) \beta \chi + \frac{\alpha^3}{\chi} + \frac{\alpha^3}{\beta} \mid (B) \beta \delta \chi - \frac{\alpha^3 \delta \chi}{\chi^2} \mid (\Gamma) \frac{\beta \chi^2 \delta \chi - \alpha^3 \delta \chi}{\chi^2} \mid (\Delta) \frac{\beta \chi^2 - \alpha^3}{\delta \chi} = 0 \mid (E) \chi = \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \\
& (Z) \beta, \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, \frac{\alpha \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \mid (H) \frac{2 \alpha \chi \sqrt{\alpha} + \alpha^3}{\sqrt{\chi}} \mid (\Theta) \frac{\alpha \chi^2 \sqrt{\alpha - \alpha^3 \sqrt{\chi}}}{\chi \sqrt{\chi}} \delta \chi \mid (I) \frac{\alpha \chi^2 \sqrt{\alpha - \alpha \sqrt{\chi}}}{\sqrt{\chi}} \delta \chi = 0 \\
& (K) \frac{\alpha \chi^2 \sqrt{\alpha - \alpha^3 \sqrt{\chi}}}{\sqrt{\chi}} \mid (\Lambda) \alpha^2 \cdot \alpha \cdot \chi^4 = \alpha^5 \cdot \chi \mid (M) \chi = \alpha^1 \mid (N) \sqrt{\alpha \chi} \cdot \sqrt{\alpha \chi - \chi^2} = \sqrt{\alpha^2 \chi^2 - \alpha \chi^3} \\
& (\Xi) \frac{2 \alpha^2 \chi - 3 \alpha \chi^2}{2 \sqrt{\alpha^2 \chi^2 - \alpha \chi^3}} \delta \chi \mid (O) \frac{2 \alpha^2 \chi - 3 \alpha \chi^2}{\delta \chi} = 0 \mid (\Pi) 2 \alpha^2 \chi = 3 \alpha \chi^2 \mid (P) \chi = \frac{2}{3} \alpha \\
& (\Sigma) H = \frac{\delta \sigma^3}{-\delta \chi \delta y} \mid (T) H = \sqrt{\frac{\delta \chi^2 + \delta y^2}{-\delta \chi \delta y}}^3 \mid (\Upsilon) \Phi K = \frac{z \delta y}{\delta \chi} \mid (\Phi) A K = \frac{z \delta \sigma}{\delta \chi} \\
& (X) \frac{\delta \chi \delta z \delta \sigma + z \delta \chi \delta \delta \sigma - z \delta \sigma \delta \delta \chi}{\delta \chi^2} = 0 \mid (\Psi) z = \frac{\delta \chi \delta z \delta \sigma}{\delta \sigma \delta \delta \chi - \delta \chi \delta \delta \sigma} \mid (\Omega) z = \frac{\delta \chi \delta y \delta \sigma}{\delta \sigma \delta \delta \chi - \delta \chi \delta \delta \sigma} \\
& (\alpha) H = \frac{\delta y \delta \sigma^2}{\delta \sigma \delta \delta \chi - \delta \chi \delta \delta \sigma} \mid (\beta) H = \frac{y \delta \sigma^3}{\delta \chi \delta \sigma^2 - y \delta \chi \delta \delta y} \mid (\gamma) \tau \delta \sigma = H \delta \pi \mid (\delta) \tau \delta \sigma = y \delta y \\
& (\epsilon) H = \frac{y \delta y}{\delta \pi} \mid (\zeta) A M = \frac{z \delta \kappa}{\sqrt{\delta \kappa^2 + \delta \lambda^2}} \mid (\eta) \pi = \frac{y \delta \chi}{\sqrt{\delta \chi^2 + \delta y^2}} \mid (\vartheta) \delta \pi = \frac{\delta y \delta \chi \cdot \delta \chi^2 + \delta y^2 - y \delta \chi \delta y \delta \delta y}{\delta \chi^2 + \delta y^2 \sqrt{\delta \chi^2 + \delta y^2}} \\
& (\iota) \delta \pi = \frac{\delta y \delta \chi \delta \sigma^2 - y \delta \chi \delta y \delta \delta y}{\delta \sigma^3} \mid (\kappa) \delta \pi = \frac{y \delta \delta \chi + \delta y \delta \chi \cdot \delta \chi^2 + \delta y^2 - y \delta \chi^2 \delta \delta \chi}{\delta \chi^2 + \delta y^2 \sqrt{\delta \chi^2 + \delta y^2}} \\
& (\lambda) \frac{y \delta y^2 \delta \delta \chi + \delta \chi \delta y \cdot \delta \chi^2 + \delta y^2}{\delta \chi^2 + \delta y^2 \sqrt{\delta \chi^2 + \delta y^2}} = \delta \pi \mid (\mu) \delta y \cdot \frac{y \delta y \delta \delta \chi + \delta \chi \delta \sigma^2}{\delta \sigma^3} = \delta \pi \mid (\nu) \delta \pi = \frac{y \delta \delta \chi + \delta y \delta \chi}{\sqrt{\delta \chi^2 + \delta y^2}} \\
& (\xi) \delta \sigma^2 = \delta \chi^2 + \delta y^2 \mid (\omicron) \delta \delta \chi = -\frac{\delta y \delta \delta y}{\delta \chi} \mid (\pi) \delta \pi = \frac{\delta y \cdot \delta \chi^2 - y \delta \delta y}{\delta \chi \delta \sigma} \mid (\varrho) H = \frac{y \delta \sigma^3}{\delta \chi \delta \sigma^2 - y \delta \chi \delta \delta y} \\
& (\sigma) H = \frac{y \delta \sigma^2}{\delta \chi \delta \sigma^2 + y \delta y \delta \delta \chi} \mid (\tau) H = \frac{y \delta \chi \delta \sigma}{\delta \chi^2 - y \delta \delta y}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (\text{A}) \ 2\alpha\chi &= y^2 \mid (\text{B}) \ H = \frac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta y} \mid (\text{Γ}) \ \alpha\delta\chi = y\delta y \mid (\Delta) \ \delta\chi^2 = \frac{y^2\delta y^2}{\alpha^2} \mid (\text{E}) \ \delta\sigma = \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2} \\
 (\text{Z}) \ \delta\sigma &= \frac{\delta y}{\alpha} \sqrt{y^2 + \alpha^2} \mid (\text{H}) \ \delta\sigma^3 = \frac{\delta y^3}{\alpha^3} \sqrt{y^2 + \alpha^2}^3 \mid (\Theta) \ y\delta\delta y + \delta y^2 = 0 \mid (\text{I}) \ -\delta\delta y = \frac{\delta y^2}{y} \\
 (\text{K}) \ -\delta\chi\delta\delta y &= \frac{\delta y^3}{\alpha} \mid (\Lambda) \ \frac{\delta\sigma^3}{-\delta\chi\delta\delta y} = \frac{\delta y^3}{\alpha^3} \sqrt{y^2 + \alpha^2}^3. \ \alpha = \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{y^2 + \alpha^2}^3 \\
 (\text{M}) \ H &= \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{y^2 + \alpha^2}^3 \mid (\text{N}) \ H = \frac{\delta y \delta\sigma^2}{\delta\sigma\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\sigma} \mid (\Xi) \ \delta\sigma^2 = \frac{\delta y^2}{\alpha^2} \cdot \frac{y^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \mid (\text{O}) \ \delta y \delta\sigma^2 = \frac{\delta y^3}{\alpha^2} \cdot \frac{y^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \\
 (\text{Π}) \ \delta\delta\sigma &= \frac{y\delta y^2 + y^2\delta\delta y + \alpha^2\delta\delta y}{\alpha \sqrt{y^2 + \alpha^2}} \mid (\text{P}) \ -\delta\chi\delta\delta\sigma = \frac{-y^2\delta y^3 - y^3\delta y\delta\delta y - \alpha^3 y\delta y\delta\delta y}{\alpha^2 \sqrt{y^2 + \alpha^2}} \\
 (\Sigma) \ \alpha\delta\delta\chi &= \delta y^2 + y\delta\delta y \mid (\text{T}) \ \delta\sigma\delta\delta\chi = \frac{\delta y^3 \sqrt{y^2 + \alpha^2} + y\delta y\delta\delta y \sqrt{y^2 + \alpha^2}}{\alpha^2} \\
 (\Upsilon) \ \delta\sigma\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\sigma &= \frac{\delta y^3 \sqrt{y^2 + \alpha^2} + y\delta y\delta\delta y \sqrt{y^2 + \alpha^2} - y^2\delta y^3 - y^3\delta y\delta\delta y - \alpha^2 y\delta\delta\delta y}{\alpha^2 \sqrt{y^2 + \alpha^2}} \\
 (\Phi) \ \delta\sigma\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\sigma &= \frac{\delta y^3}{\sqrt{y^2 + \alpha^2}} \mid (\text{X}) \ H = \frac{\delta y \delta\sigma^2}{\delta\sigma\delta\delta\chi - \delta\chi\delta\delta\sigma} = \frac{\delta y^3}{\alpha^2} \cdot \frac{y^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\delta y^3} \sqrt{y^2 + \alpha^2}^3 \\
 (\Psi) \ H &= \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{y^2 + \alpha^2}^3 \mid (\Omega) \ \alpha\delta\chi = \beta\delta y \mid (\alpha) \ H = \frac{y\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\sigma^2 - y\delta\chi\delta\delta y} \mid (\beta) \ \delta\sigma = \sqrt{\delta\chi^2 + \delta y^2} \\
 (\gamma) \ \delta\chi^2 &= \frac{\beta^2\delta y^2}{\alpha^2} \mid (\delta) \ \delta\sigma = \frac{\delta y}{\alpha} \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \mid (\epsilon) \ \delta\sigma^3 = \frac{\delta y^3}{\alpha^3} \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}^3 \mid (\zeta) \ \delta\chi\delta\sigma^2 = \frac{\beta\delta y}{\alpha^3} \cdot \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^3} \\
 (\eta) \ \beta\delta\delta y &= 0 \mid (\theta) \ H = \frac{y\delta\sigma^3}{\delta\chi\delta\sigma^2 - y\delta\chi\delta\delta y} = \frac{y}{\alpha^3} \delta y^3 \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}^3 \cdot \frac{\alpha^3}{\beta\delta y^3 \cdot \beta^2 + \alpha^2} \mid (\iota) \ H = \frac{y}{\beta} \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \\
 (\kappa) \ y &= \alpha + \sqrt{\alpha^3 - 2\alpha^2\chi + \alpha\chi^2} \mid (\lambda) \ \delta y = \frac{-2\alpha^2\delta\chi + 2\alpha\chi\delta\chi}{3 \cdot \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2\chi + \alpha\chi^2}{3}} \mid (\mu) \ \delta\delta y = \frac{-2\alpha\delta\chi^2}{\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2\chi + \alpha\chi^2}{3}} \\
 (\nu) \ 9 \cdot \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2\chi + \alpha\chi^2}{3} &\stackrel{2}{=} 0 \mid (\xi) \ \chi = \alpha \mid (\omicron) \ y = \alpha \mid (\pi) \ z^3 = \alpha\phi^2
 \end{aligned}$$

$$(A) \Gamma\Phi = \frac{\delta y^2}{\delta y^2} \frac{\delta x - y \delta x \delta y}{\delta y^2} \mid (B) \Gamma\Theta = \frac{\delta y^2}{\delta y^2} \frac{\delta x - y \delta x \delta y}{\delta y^2} + \delta x^3$$

$$(\Gamma) \beta z = \alpha^2 - 2\alpha y + y^2 \mid (\Delta) \cdot dz = -2\alpha dy + 2y dy \mid (E) \delta x = 2y^2 \delta y - 2\alpha y \delta y \frac{\alpha \beta}{\alpha \beta}$$

$$(Z) \frac{4y \delta y^2 + 2y^2 \delta y - 2\alpha y \delta y}{\alpha \beta} = 0 \mid (H) y \delta y = \alpha \delta y^2 - 2y \delta y^2 = \frac{\alpha - 2y}{y - \alpha} \cdot \delta y^2$$

$$(\Theta) \frac{\delta y^2 \delta x - y \delta x \delta y}{\delta y^2} + \delta x^3 = 0 \mid (I) \delta y^2 + \delta x^2 - y \delta y = 0$$

$$(K) \delta y^2 + 4y^4 \delta y^2 - 8\alpha y^3 \delta y^2 + 4\alpha^2 y^2 \delta y^2 - \alpha \delta y^2 + 2y \delta y^2 = 0 \frac{\alpha^2 \beta^2}{y - \alpha}$$

$$(V) \frac{4y^5 - 12\alpha y^4 + 12\alpha^2 y^3 - 4\alpha^3 y^2 + 3\alpha^2 \beta^2 y - 2\alpha^3 \beta^2}{\alpha^2 \beta^2 \cdot y - \alpha} = 0$$

$$(M) y^5 - 3\alpha y^4 + 3\alpha^2 y^3 - \alpha^3 y^2 + \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 y = \frac{5}{1} \alpha^3 \beta^2$$