

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ
ΑΛΓΕΒΡΗΣ

ἑκδοστὲντα

ἰπὶ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ
Ἱεροδιακόνου τοῦ Θεσσαλοῦ,

ΤΟΜΟΣ Α΄.

ἘΝ ΒΙΕΝΝῃ ΤΗΣ ἈΟΥΣΤΡΙΑΣ
Ἐκ τῆς Τυπογραφίας τοῦ Ἰωάν. Βαρθ. Τζβιέκκου,

1816.

κ

Τῷ Πανιερωτάτῳ καὶ Σεβασμιωτάτῳ μοι ἁ-
γίῳ Εἰρηνοπόλεως κυρίῳ κυρίῳ ΓΡΗΓΟΡΙῳ,
τὴν ὀφειλομένην μοι ταπεινὴν
προσκύνησιν.

Παλιὸς Νόμος, καὶ καλῶς ἔχων, Σεβασμιώτατέ μοι
Πάτερ καὶ Δέσποτα, τοῖς συγγραφεμένοις ἀνατιθέναι τινὶ
τῶν ὑπερεχόντων τὸ Σύγγραμμα, ἵν' αὐτὸ ἐπισκιάζωσι.
Πολλῶν τοίνυν διαφερόντων ἐμοί, καὶ κοινῇ καὶ ἰδίᾳ, καὶ
λαμπρῶν, οἳ καὶ ὑπερασπίζουσιν τοῦ Συγγράμματος ἱκανοί,
καὶ κοσμεῖν αὐτὸ τῇ ἰδίᾳ ἐπωνυμίᾳ ἐχέγγυοι, αὐτὸς ὅμως
ἐτέραν βαδίσας, Σὲ τὸν ἐμὸν φίλον, πατέρα, καὶ Ἀρχιε-
ρεᾶ ἐξελεξάμην. Αἵτιον δὲ, ὅτι οὐ μόνον φιλόμουσος Σὺ,
ἀλλὰ καὶ μουσοτρόφος, οὐχ ὅπως λόγιος, ἀλλὰ καὶ φιλο-
λόγος. Καὶ ἵνα τὸ πᾶν συνελὼν εἶπω, ὅτι Βατοπαιδινὸς
μὲν ἐγὼ ἐκ παιδῶν, καὶ κεκαρμένος παρὰ τῇ μεγίστῃ ἐκεί-
νῃ Λαύρᾳ, Σὺ δὲ Βατοπαιδίου Ἀρχιερεὺς, καὶ ἔφορος,
καὶ πολλοῖς ἄλλοις κεκοσμημένος πλεονεκτημασι. Τοιγα-
ροῦν διὰ ταῦτα, ταύτην τὴν περὶ Μαθηματικῆς μου Βίβλον
ἀνατίθηναι σοί, καὶ διὰ σοῦ τῇ ἱερᾷ βασιλικῇ, καὶ πατριαρ-
χικῇ μεγίστῃ μονῇ τοῦ Βατοπαιδίου, εὐγνωμονῶν, διὰ
ταῦτα φημί, καὶ πολλῶν ἄλλων ἔνεκα χαρίτων καὶ εὐποι-
σιῶν Ὑμῶν. Δέξαιο τοίνυν, ἀνδρῶν ἐλλογιμώτατε, καὶ

β'

ἐμοὶ προσφιλέστατε, ταύτην τὴν συγγενικὴν, ὡς ἂν εἴποι τις
προσφωρὰν, ἀπαρχὴν οὖσαν τῶν ἐμῶν πόνων. Ἀσπασαι τὸ
δωρούμενον, καὶ μέμνησο τοῦ Συγγραψάντος ἐν ταῖς πρὸς
κύριον Θεοπειθέσιν εὐχαῖς σου, καὶ δεήσεσι· μᾶλλον δὲ εὐ-
χου καὶ ὑπὲρ ἐκείνου, καὶ τῶν εὐτευζομένων, ὅπως τῷ
μὲν, σάχυν ὥριμον, καὶ ἀκοῆς ἄξιον φέρειν τὸ γεώργιον,
τοῖς δὲ σοφίας δρέπεσθαι καρπὸν ἡδίστον καὶ πολυφόρου
γίνεται.

ἔρρωσο.

τῆς Ἐμετέρας Πανισότητος

δοῦλος ταπεινὸς

ὁ
ΣΤΕΦΑΝΟΣ.

Περὶ Μαθηματικῆς, καὶ πῶς αὕτη εἰς δύο μέρη τὸ πρῶτον διακρίνεται.

§. 1. **Δ**ιὰ τὴν ὁμιλήσῃ τινὰς ἐντελῶς περὶ Μαθηματικῆς, πρέπει πρῶτον νὰ ἀναπτύξῃ τὰς ἰδέας ἐκείνας, ἀπὸ τὰς ὁποίας αὕτη ἀπαρτίζεται ἐντελῶς, καὶ οὕτω νὰ προβῇ περαιτέρω εἰς ὅλας τὰς Μεθόδους αὐτῆς. Ἄε ἰδέαι ὅμως αἱ ἀρχικαὶ αὐτῆς εἶναι οὕτως ἀπλαῖ καὶ ἀφηρημέναι, ὥς πολλοὶ τῶν Μαθηματικῶν, θελόντες αὐτὰς νὰ ἀναπτύξωσι, μᾶλλον ἐσκότισαν τὸ πρᾶγμα, ἢ τὸ ἐλεύκαναν. Διὸ καὶ ἕτεροι, καλῶς ποιοῦντες, μόνον διηγηματικῶς περὶ τούτων ἔγραψαν. Ἐπειδὴ καὶ ἕκαστος ἀπὸ γεννησεως, αὐτὸς ἀφ' ἑαυτοῦ μαθαίνει τὰ τοιαῦτα νοήματα. "Οθεν καὶ ὅτι εἶναι τὰ τοιαῦτα, ὅλοι μὲν κοινῶς λέγουσι καὶ ἀποδέχονται· τί δὲ εἶναι ταῦτα, οὐδεὶς ἡμᾶς μέχρι τοῦδε ἐδίδαξε. Διότι γὰρ εἰπῇ τινὰς μετὰ βεβαιότητος τὴν φύσιν αὐτῶν τῶν ἰδεῶν, καὶ ἔννοιαν, πρέπει νὰ προαναπτύξῃ πρῶτον, τί Χρόνος, τί Τόπος, τί Κίνησις, καὶ τὰ λοιπὰ γενικῶς, καὶ ἅμα τί Ὁργανισμὸς τοῦ ἀνθρώπου, καὶ οὕτω, ἐκ τῶν προτέρων νὰ εὕρῃ καὶ τούτων τὸ σημαίνον. Ἐπειδὴ ὅμως τούτων ὅλων ἡ θεωρία εἰς τὴν γενικὴν φιλοσοφίαν γίνεται, καὶ ἡμεῖς ταῦτα γράφοντες, παίδας πρωτοπείρους καὶ ἀρχαρίους προετοιμάζομεν, διὰ τὴν

Τόμ. Α'.

δυνηθῶσι νὰ εἰσέλθωσι βαθμηδὸν εἰς τὰ μυστήρια αὐτῆς τῆς Φιλοσοφίας, ὅλην αὐτὴν τὴν ἀνάπτυξιν εἰς τὴν διδασκαλίαν τῆς φιλοσοφίας ἀπεταμιεύσαμεν. Ἐἰς δὲ τὴν ἀρχὴν τοῦδε τοῦ Συγγράμματος μένου τοῦτο λέγομεν ἐκ τῶν ὑστέρων ἀρχόμενοι, ὅτι εὐθὺς ὁποῦ εἰς τὸν κόσμον ἐξέλθωμεν, ἔμμεσα καὶ πρῶτα ὄργανα ἔχομεν τῆς νοήσεως τὴν Ἀφῆν, καὶ τὴν Ὅρασιν. Μὲ αὐτὰς ἀρχεται πρῶτον ὁ νοῦς ὁ ἀόριστος νὰ περιορίζηται, καὶ νὰ μερικευῆται, καὶ νὰ νοῇ μερικὰ νοήματα. Μὲ αὐτὰς νοεῖ πρῶτον ὁ παῖς, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἕτερος κόσμος ἐκτὸς ἑαυτοῦ. Διότι μὲ τὴν Ὅρασιν περιορίζεται ὁ νοῦς τοῦ παιδὸς εἰς τὴν μητέρα, εἰς τὸν πατέρα, εἰς τὸν θάλαμον, καὶ εἰς ὅλα τὰ λοιπὰ πράγματα, ἀπὸ ἑνα ἑνα κατὰ μέρος καὶ χωριστά. Μὲ αὐτὴν μαθαίνει πρῶτον, ὅτι τὸ ἑνα εἶναι χωριστὸν ἀπὸ τοῦ ἄλλου, καὶ τοῦτο ἀπὸ ἄλλου, καὶ ἀκολουθῶς ὅτι ἕκαστον εἶναι ἐκτοῦς τοῦ ἄλλου. Καὶ ὅπου τοῦτο ἴσεται, τὸ ἄλλο δὲν εἶναι ἐκεῖ, ἀλλὰ μακρύτερα, ἢ σιμώτερα. Διὰ δὲ τῆς Ἀφῆς μὲ τὸ ἄπλωμα τῆς χειρὸς τοῦ εἰς τοῦτο καὶ εἰς ἐκεῖνο μαθαίνει τὸ Μῆκος· διότι ἐκεῖνο ὁποῦ πιάσῃ, κρίνει ἐγγύτερον, καὶ ἐκεῖνο ὁποῦ δὲν φθάνει, κρίνει ἀπώτερον. Καὶ οὕτω μὲ τὴν Ὅρασιν καὶ τὴν Ἀφῆν περιορίζεται ὁ νοῦς εἰς μίαν ἰδέαν, ἣν Διάστημα ὀνομάζομεν. Ἐπειδὴ ὁμῶς τὸ Διάστημα τὸ διακρίνει, καθ' ὃ ἀπλώνει τὸ χεῖρι του, ἢ ἐκτείνει αὐτὸ εἰς ἓν πρᾶγμα ἐξωτερικὸν διὰ νὰ τὸ φθάσῃ, περιορίζεται ὁ νοῦς εἰς μίαν ἄλλην ἰδέαν, ὁποῦ ὀνομάζομεν Ἑκτασιν. Ὅθεν ὅσω περισσότερον ἐκτείνεται, μεγαλητέραν κρίνει τὴν Ἑκτασιν, ὅσω δὲ ὀλιγώτερον, μικρωτέραν. Καὶ ἀπὸ τοῦτο μαθαίνει δύο ἄλλας ιδέας, τὸ Μεγάλον, καὶ Μικρόν. Καὶ μεγάλον μὲν νοεῖ εἰς τὸ ἐξῆς,

ἐκεῖνο ὅπου ἔχει μεγαλητέραν ἔκτασιν· μικρὸν δὲ, ἐκεῖνο ὅπου ἔχει μικροτέραν. "Οὕτω λοιπὸν ἀνεπαισθήτως συνηθίζει ὁ παῖς εἰς αὐτὰ τὰ νοήματα αἰσθητῶς, τὰ ὁποῖα ἡμεῖς εἰς τὴν Φιλοσοφίαν ἀναπτύξομεν.

§. 2. Ἐὰν ἡμεῖς ταῦτα ὀρθῶς πολυπραγμονήσωμεν, εὐρίσκομεν, ὅτι Διάστημα καὶ Ἑκτασις, καὶ συμφωνοῦσιν ἀλλήλοις, καὶ διαφέρουσι. Διότι Διάστημα λέγομεν μίαν ἔκτασιν, ὅπου εὐρίσκεται εἰς δύο πράγματα μεταξύ. "Οὕτως ὁ Τόπος ἐκεῖνος, ὅπου εἶναι ἀπὸ τὴν θύραν τοῦ ὀσπητείου, ἕως εἰς τὴν θύραν τοῦ Θαλάμου, λέγεται Διάστημα· διότι εἶναι μία ἔκτασις μεταξύ εἰς τὰς δύο θύρας· καὶ ὁ Τόπος, ὅπου εἶναι ἀπὸ τὸ ἐν ἄκρον τοῦ μαχαίριου ἀπὸ τὰ μανίκια ἕως εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον. Ἡ ἔκτασις λοιπὸν τούτων τῶν δύο ἄκρων τοῦ μαχαίριου καλεῖται Διάστημα. "Οθεν Διάστημα λέγομεν κάθε ἔκτασιν, ὅπου εὐρίσκεται μεταξύ εἰς δύο μέρη σερεά. Ἀυτὰ δὲ τὰ δύο μέρη διαφόρως ὀνομάζονται· λέγονται "Οροι, καὶ ἐκ τούτων καλοῦσι τὰ "Ορια, καὶ "Οροθέσια ἐνὸς ἀμπελίου, ἐνὸς χωραφίου, μιᾶς ἐπαρχίας κτ. "Οταν δὲ γένηται ἡ κίνησις εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ τὸ ἐν ἄκρον εἰς τὸ ἄλλο, λέγεται ἐκεῖνο μὲν "Ορος ἀφ' οὗ, τοῦτο δὲ, ὅπου ὕψρον καταντοῦμεν, λέγεται "Ορος πρὸς ὃν. Καλοῦνται καὶ Πέρατα, καὶ Ἀκρα· καλοῦνται τέλος καὶ Διορισμοί. "Οθεν ὅταν λέγομεν περιορίζω, περατῶ, διορίζω, ὅρια καὶ πέρατα βάλλομεν εἰς μίαν ἔκτασιν· τί δὲ καὶ Ἀέρινον, καὶ Ἀπειρον, ἀπ' αὐτὰ μαθαίνομεν εὐκόλα.

§. 3. "Ολα αὐτὰ τὰ μαθαίνομεν ἀπὸ γεννήσεως μόνου διὰ μέσου τῆς Ἀφῆς καὶ τῆς Ὁράσεως. Ἡ ὄρασις ὁμῶς βλέπει μόνον τὸ ἔξω τῶν πραγμάτων, ἥτοι τὸ Σχῆ-

μα, καὶ τὴν Μορφήν, ὅπου ἔχει καθ' ἓνα. Βλέπει εἰς αὐτὸ, ὅτι πανταχόθεν ἔχει ὅρους, ἢ περιορισμούς, ἥτοι πανταχόθεν διάστημα, ἥτοι ἑκτάσιν με ὅρους. Ὄθεν ἐπειδὴ πανταχοῦ βλέπει ὅρους, μαθαίνει τι εἶναι τὸ περιορισμένον. Καὶ τοῦτο εἰς τὴν Φιλοσοφικὴν Γλῶσσαν ὀνομάζεται "Ατομον, ἢ Ἀτομικὸν καὶ Μερικὸν ἢ Κατὰ μέρος. Οὕτω λοιπὸν ἀπὸ τὴν μορφήν λαμβάνει ἄλλην μίαν ιδέαν, ὅπου ὀνομάζωμεν "Ομοιοειδὸν καὶ Ἀνόμοιον. Διότι ὅταν ἰδῇ δύο πράγματα ἐπὶ σῆς περιωρισμένα, ἥτοι νὰ ἔχωσι μίαν μορφήν, κρίνει αὐτὰ ὅμοια· ὅταν δὲ ἰδῇ δύο τινα, ὅπου δὲν ἔχουσι μίαν μορφήν, καλεῖ αὐτὰ ὀνόμοια. Οὕτως ἰδὼν ὁ παῖς τὴν μορφήν τοῦ ἀνθρώπου εἰς τὴν μητέρα, ἐηλ: πρόσωπον, μύτην, σῶμα, χεῖρας, πόδας κτ. Ἐὰν καὶ ταῦτα ὅλα ἰδῇ πεπλασμένα εἰς ταῖς κούκλαις, καὶ ζωγραφίαις, κρίνει αὐτὰ ὅλα ὁμοῦ ἀνθρώπου. Οὕτως ἰδὼν ἅπαξ "Αμαξαν, ὅλα, ὅσα τροχοὺς καὶ τὰ λοιπὰ ἔχουσιν, "Αμάξια καλεῖ. Οὕτω καλεῖ καὶ χολιάρια ὅλα ὅσα τὸ σχῆμα τοῦ χολιαρίου ἔχουν, καὶ τὰ λοιπὰ. Πλὴν με ὅλα αὐτὰ δὲν συγχέζει τὴν ιδέαν τῆς ἐκτάσεως καὶ τοῦ διαστήματος με τὴν μορφήν· διότι ἀπὸ τοῦ διαστήματος λέγει, τοῦτο τὸ Ἀμάξιον μικρότερον, ἢ μεγαλύτερον, ἥτοι μείζον καὶ ἔλαττον. ἀπὸ δὲ τῆς ιδέας τοῦ σχήματος ὅμοιον καὶ ἀνόμοιον. Διότι καὶ ὅσα εἶναι ὅμοια, ὅλα ὁμοῦ ὀνομάζονται με ἐν ἑνὶ ὀνόματι· ὡς ὅλα ὅσα ἔχουσι τὴν μορφήν τοῦ ἀνθρώπου, με τὸ ὄνομα ἀνθρώπου ὀνομάζονται. Καὶ ὅσα ἔχουσι τὴν μορφήν τοῦ προσκεφαλαίου, με τὰ ὄνομα προσκεφάλαιον λέγονται. Ἡμεῖς ὅμως πολυπραγμονοῦντες καὶ ταῦτα, δύο τινα μαθαίνομεν. Πρῶτον ἐν ὀνόματι, ὅπου εἶναι κοινὸν εἰς

πολλὰ, ὡς τὸ ὄνομα ἄνθρωπος, ὅπου ἀρμόζει καὶ εἰς τὸν Παῦλον, Γεώργιον, καὶ Κωνσταντῖνον κτ. Καὶ δευτέρου πολλὰ, ὅπου εἶναι εἰς τοῦτο τὸ ὄνομα, καθὼς καὶ ὁ Παῦλος, ὁ Πέτρος, καὶ Γεώργιος, κτ. εὐρίσκονται εἰς τὸ ὄνομα ἄνθρωπος. Εἰς τὴν Φιλοσοφικὴν ὁμῶς Γλῶσσαν τὰ τοιαῦτα ὀνόματα λέγονται καθόλου, Γενικά, Ἀόριστα· τὰ δὲ πολλὰ, Μερικά, ἢ ὁμοῦ ὅλα Πληθύν. Ὅθεν ὅπου ὄνομα καθόλου, ἐκεῖ καὶ πληθὺς, καὶ ὅπου Πληθὺς, ἀνάγκη καὶ ὄνομα νὰ ᾔηται καθολικόν. Λοιπὸν ἀπὸ μὲν τοῦ διαστήματος, μαυθάνομεν τὸ μέγαλον καὶ μικρὸν (§ 1..) πλὴν περιωρισμένου· ἀπὸ δὲ τῆς μορφῆς τὸ ὅμοιον καὶ ἀνόμοιον, καὶ ἐκ τούτων τὸ πλῆθος, πλὴν ἀπεριόριστον.

§. 4. Ἐὰν ἤδη τὸ διάστημα καὶ τὴν πληθύν λάθωμεν, καὶ ταῦτα ἀλλήλοις παραβάλλωμεν, εὐρίσκομεν καὶ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο νὰ συνίσταται ἀπὸ μέρη· οὕτως ἓν ῥάμμα, ὡς διάστημα τὸ κόπτομεν εἰς πληθύν, καὶ πάλιν μίαν πληθύν διακρίνομεν εἰς τὰ μέρη τῆς, ὡς λίθων σωρόν. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο ἔχουσι μέρη, Ὁ λ ο υ ἐκτεῖνα πρὸς τὰ μέρη τῶν λέγονται. Καὶ τοῦ μὲν διαστήματος τὸ ὅλον παρασατικόν, τὰ δὲ μέρη ἀπαράστα· τῆς δὲ πληθύνος, τὰ μέρη παρασατικά, τὸ δ' ὅλον ἀπαράστατον, ὅθεν καὶ διαφέρουσιν. Ἀλλ' ὁ παῖς ἐκ τούτων λαμβάνει ἔτι δύο ἰδέας, ὅς κοινῶς Ὁλον, καὶ Μέρος καλοῦσι, διὰ τὸ μὴ εἶναι ὅλον ἄνευ μερῶν, καὶ μέρη ἄνευ ὅλου. Ὅθεν καὶ ὁ παῖς ἀπὸ τὰ μέρη τὸ ὅλον νοεῖ, καὶ ἀνάπαλιν· διὸ καὶ ὅταν τις κόψῃ ἓν πωρικόν, ὅπου τοῦ δίδεται, αὐτὸς φωνάζει ὅλον τὸ θέλω κτ. Ἡμεῖς ὁμῶς αὐτοῦ βλέπομεν καὶ τὴν συγγένειαν, ὅπου ἔχει τὸ διάστημα μὲ τὴν πληθύν. Τὸ αὐτὸ ῥάμμα ὡς διάστημα κοπτόμενον εἰς πληθύν μεταβαίνει, καὶ ὁ Σω-

ρὸς τῶν λίθων, ἤτοι ἡ πληθὺς, εἰς τυῖχον κτιζόμενος εἰς διάστημα μεταβαίνει. Βλέπομεν ἔτι καὶ τὴν διαφωνίαν· διότι τὸ μὲν διάστημα ὡς ὅλον περιωρισμένον, καὶ τὸ μέρος αὐτοῦ ἀπαράστατα, τῆς δὲ ὡς ὅλον ἀπαράστατον, καὶ περιωρισμένα τὰ μέρη αὐτῆς. Ἐπειδὴ λοιπὸν οὕτω καὶ τὸ διάστημα, καὶ ἡ πληθὺς ἔχουσι συγγένειαν, καὶ διαφωνίαν, πρέπει νὰ ἦναι ὑποκάτω εἰς ἓνα ἕτερον, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ἡ πληθὺς καὶ τὸ διάστημα εὐρίσκονται, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ Ποσό. Ὅθεν κάθε πράγματι ὅπου εἶναι ἅμα ὅλον, καὶ ἔχει μέρη, Ποσὸν λέγεται· καὶ πάλιν ὅ, τι πράγμα ἀγάγεται εἰς ἐρώτησιν, Ποσὸν εἶναι; ποσὸν λέγεται· πασὸν ὅρα εἶναι τὸ διάστημα, ἐπειδὴ ἐρωτοῦμεν πόσον εἶναι· ποσὸν καὶ ἡ πληθὺς, ἐπειδὴ ἐρωτῶμεν, Πόση εἶναι; καὶ ὅλα ὅσα ἀνάγονται εἰς τὴν ἐρώτησιν, Ποσὸν εἶναι; Ἡ Ἐπιστήμη λοιπὸν ὅπου καταγίνεται εἰς τὸ ποσὸν, ὀνομάζεται Μαθηματική· καί μοι φαίνεται, καλῶς οἱ Ἕλληνες αὐτὴν Μαθηματικὴν ὀνόμασαν· ὥσαν ὅπου οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ γεννήσεως τὰς πρώτας ἀρχὰς αὐτῆς διὰ τῶν αἰσθήσεων μανθάνουσι, καὶ πρῶτον Μάθημα αὕτη γίνεται· διὰ τοῦτο καὶ ἀποδεδεικτικωτάτη, καὶ ἑκάστης νουνεχῆς αὐτομαθῆς εἰς αὐτὴν γίνεται.

§. 5. Ἐπειδὴ δὲ ἡμεῖς μέλλομεν Σύστημα Μαθηματικὸν νὰ κατασρώσωμεν, καὶ εὐρώμεν τὸ Ἀντικείμενον αὐτῆς τὸ ποσὸν, ἀνάγκη τοῦτο ὡς γενικόν νὰ διαιρηται καὶ νὰ ὑποδιαιρηται κατὰ τὴν φύσιν τῶν Γενικῶν. Πλὴν πρέπει νὰ ἰδῶμεν πρῶτον, τί τὸ ἰδιωμα τοῦ ποσοῦ, καὶ εἴτα ἂν αὐτὸ καὶ εἰς τὰ μέρη τοῦ ποσοῦ εὐρίσκηται. Ἰδιοῦ δὲ τοῦ ποσοῦ εἶναι πρῶτον καὶ ἀναγκαῖον, τὸ νὰ ἐπιδέχεται αὐξήσιν καὶ μείωσιν, ἥτοι ἐλάττωσιν· καὶ τοῦτο εὐρί-

σκέται τῷ ὄντι εἰς ὅλα, ὅσα εἰς τὴν ἐρώτησιν, Πόσον εἶναι; ἀνύγονται· καθὼς εἰς τὰ σκόλουθα θέλομεν εἰπῆ· διαιρεῖται τὸ λοιπὸν εἰς τὸ διάστημα καὶ εἰς τὴν πληθύν. Καὶ διάστημα εἶναι ποσὸν διωρισμένου, τοῦ ὁποῦ τὰ μέρη εἶναι κατὰ συνέχειαν ἀδιόριστα· ἡ δὲ πληθὺς ποσὸν ἀδιόριστον, τοῦ ὁποῦ τὰ μέρη εἶναι διωρισμένα. Ἐκείνου μὲν τὰ μέρη ἀδιόριστα, καὶ αὐτὸ ὡς ὅλον διωρισμένου· ταύτης δὲ τὰ μέρη διακεκριμένα, καὶ αὐτὸ ὡς ὅλον ἀδιόριστον· καὶ φαίνεται φανερά, ὅτι τὸ ἐν ἐναντίον τοῦ ἄλλου, καὶ ἐπομένως μέρη ἀντιδιαιρούμενα. Εἰς τὸ Σύστημα μᾶς ἐδείξαμεν, πόθεν ταῦτα παράγονται, καὶ ὅτι τὸ μὲν διάστημα ἐξωτερικόν, ἡ δὲ πληθὺς ἐσωτερικόν, καὶ ἄλλα πολλὰ ἀρμόδια εἰς αὐτὰ, τὰ ὅποια ἐνταῦθα σιωπῶμεν· διότι ἡ παρούσα διδασκαλία διὰ τοὺς πρωτοπεύρους γίνεσθαι.

§. 6. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ποσὸν αἰμέσως διαιρεῖται εἰς τὸ Διάστημα καὶ εἰς τὴν Πληθύν, ἡ δὲ ἐπισήμη ὁποῦ ἔχει ἀντικείμενον τὸ Ποσὸν, Μαθηματικὴ ὀνομαζεται· ἄρα διαιρεῖται αἰμέσως ἡ Μαθηματικὴ εἰς δύο, εἰς τὴν ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΝ, καὶ ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ· καὶ ἡ μὲν ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ἔχει ἀντικείμενον τὸ διάστημα, ἡ δ' ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗ, τὴν πληθύν. Ὅθεν καὶ τοῦτο ὅλον τὸ Σύγγραμμα εἰς δύο διαιρούμεν μέρη καθολικά, εἰς τὴν ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΝ καὶ ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΑΛΓΕΒΡΑΝ, ἥτοι εἰς τὴν ἐν γένει Ἀριθμητικὴν, ἐν ἣ ἦτε Ἀριθμητικὴ καὶ Ἀλγεβρα περιλαμβάνεται· καὶ καθὲς ἓνα πάλιν κατὰ τάξιν θέλομεν τὰ ὑποδιαίρεσαι εἰς ἄλλα πάμπολλα, πλὴν ἐν τῷ παρόντι γράφοντες μόνον πρὸς ὄφελος, περιττὰ δὲν γράφομεν, καὶ διὰ τοῦτο τὰς λεπτολογίας καὶ περιττολογίας τῶν παλαιῶν καὶ νεωτέρων, καὶ μάλιστα ἐκείνων, ὁποῦ ἔγραψαν πρὸς ἐπίδειξιν,

καὶ ἐπλήρωσαν τὰς βιβλους των με ἀνωφελῆ λόγια, ἐδῶ δὲν γράφομεν. Πρὸς τι ὠφελεῖ ἐὰν εἴπωμεν, ἐκεῖνος οὕτως εἶπε τὸν κυῖον, οὗτος ἄλλως εἶπεν ἑτερον, καὶ ἕτερος ἄλλο, καὶ νὰ ἀμελήσωμεν τὰ ἀναγκαῖα, ὅπου οἱ τοιοῦτοι εἰς τὰς βιβλους των δὲν ἔγραψαν; φθάνει ὁ Μαθητὴς νὰ μάθῃ ἐντελῶς τὴν ἐπιστήμην, καὶ εἶτα ὡς ἀναγνώσῃ μίαν ἱστορικὴν Μαθηματικὴν, ἵνα εὖρῃ πάμπολλα ἀπὸ ἐκεῖνα, ὅπου οὗτοι ἀλόγως εἰς τὰ Βιβλία των γράφουσιν. Ἐν μόνον ἔδῶ λέγομεν, ὅτι ἐπειδὴ πρὸς μᾶται ἡ Μαθηματικὴ εἰς τὰς ἐπιστήμας, ὡς πολλοὶ τοῦτο θέλουσιν, ἡ δὲ διαιρεῖται εἰς δύο, εἰς ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ καὶ Ἀριθμητικὰλγεβραν πρέπει καὶ ἀπὸ τῶν δύο τούτων νὰ προμάθωμεν τὴν Ἀριθμητικὴν. Διότι ἄνευ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Ἀριθμητικὴν μαθαίνομεν, ἄνευ δ' Ἀριθμητικῆς οὐδέποτε. Καὶ γὰρ ἔαν τις μὴ προμάθῃ τί τρία, τί τέσσαρα, τί ἑκατὸν κτ. οὔτε τριγώνου, καὶ τετράγωνου, καὶ ἑκατογώνιον ἤμπορεῖ νὰ μάθῃ. Καὶ ἔτι εἰς μὲν τὴν Ἀριθμητικὴν τὸ ἴσον καὶ ἄνισον μόνον ἐξετάζομεν· εἰς δὲ τὴν ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ πρὸς αὐτοῖς τούτοις, καὶ τὸ ὁμοῖον καὶ ἀνόμοιον. (§. 3.)

Ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν ποτὲ δὲν δεχόμεθα πράγματα πρωθύτερα ὡς εἰς πολλοὺς τοῦτο βλέπομεν. Οὗται γὰρ πολλαπλασιασμὸν, καὶ διαίρεσιν γράφοντες, προβάλλουσι παραδείγματα Ἐπιφανειῶν, Στερεῶν, καὶ ἄλλα ψυχρὰ ἀνεπιστημόνως, ὅπου εἰς τὰς βιβλους τῶν ἄλλων εὐρίσκουσι, μὴ εἰδότες ὅτι ταῦτα μετὰ τὴν Ἀλγεβραν λέγονται, ὅταν ἐπιφανείας, καὶ στερεὰ οἱ μαθηταὶ μάθωσιν· ἔτι Ἀριθμητικὴν καὶ Ἀλγεβραν ἡμεῖς δὲν διακρίνομεν. Διότι ἡ αὐτὴ διδασκαλία καὶ αἱ μέθοδοι εὐρίσκονται καὶ εἰς τὰς δύο· καὶ ἡ μία διὰ τῆς ἑτέρας, καὶ ἀνάπαλιν θαυμαστίως καὶ εὖ·

κόλως μαυθάνεται, ὡς ἡ ἡμετέρα δείξει μέθοδος· διὸ καὶ Ἀριθμητικὰ λυθραν ταύτην ἡμεῖς ἐκαλέσαμεν. Κατὰ τὴν ὁμῶς ἡ μία τῆς ἐτέρας διαφέρει, εἰς τὸ ἐξῆς δηλώσωμεν. Καὶ τέλος ἐλπίζομεν διὰ τῆς ἡμετέρας μεθόδου οἱ μαθηταὶ καὶ ἀναγνώσαι νὰ εἰσέλθωσιν ἀκόπως καὶ εἰς αὐτὰ τὰ δυσδιάλυτα καὶ ἀπόρρητα τῆς Μαθηματικῆς, χωρὶς νὰ ἀπαυδῇσιν, καθὼς συμβαίνει εἰς πολλοὺς:

Μ Ε Ρ Ο Σ Α'.

Περὶ τῆς Ἐπισήμης τῆς Ἀριθμητικῆς, ἅμα καὶ Ἀλγέβρης καὶ τοῦ ἐν γένει Ἀριθμοῦ, καὶ παραστάσεως αὐτοῦ.

§. 7. **Α**νωτέρω (§. 6.) ἐμάθομεν, ὅτι ἡ Ἀριθμητικὴ καταγίνεται εἰς τὸ ποσὸν, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη διακεκριμένως ἀδιόριστα. Τοῦτο δὲ τὸ ποσὸν Πληθὺς εὐρέθη ἀπὸ τὰ πράγματα· ἀπὸ τοῦ νοὸς ὁμῶς αὐτοῦ τοῦ καθόλου, καὶ ἐσωτερικοῦ, Ἀριθμὸς εἶναι καὶ λέγεται· διότι ὃν λόγου ἔχει ἡ πληθὺς πρὸς τὰ πράγματα, τὸν αὐτὸν καὶ ὁ Ἀριθμὸς πρὸς τὸν νοῦν· καὶ ὡς εἰς τὴν πληθὺν τὸ ποσὸν ἀόριστον, καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ διακεκριμένα, οὕτω καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν καθόλου, καὶ μὴ διωρισμένον, τὸ ποσὸν ἀόριστον, καὶ τὰ μέρη διακεκριμένα. Λαμβάνομεν ὅ ἐνταῦθα τὸν Ἀριθμὸν γενικῶς, καὶ οὐχὶ μερικῶς· διότι ὁ Ἀριθμὸς 5, 100 κτ. μερικὸς εἶναι, καὶ οὐχὶ καθόλου. Διὰ τοῦτο λοιπὸν καὶ ὅπου νοῦς δὲν εἶναι, μήτε Ἀριθμὸς, διὰ τοῦτο καὶ τὰ ἄλογα ζῶα δὲν ἀριθμεῦσι, μήτε μετροῦσιν. Ὅθεν καὶ οἱ Βλάκες εἰς τὸν Ἀριθμὸν ἀνεπιτήδευτοι κτ. ὅτι ὁ Ἀριθμὸς ἔργου νοὸς, καὶ πλέον οὐ·

Πῶς δὲ οὗτος γίνεται, ἐν τῇ Ψυχολογίᾳ δείξομεν. Ἄρα καὶ ὁ Ἀριθμὸς ἐσωτερικὸς, ὡς καὶ ἡ ἀνάλογος αὐτοῦ Πληθὺς. (§. 5.).

§. 8. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ Πληθὺς, καὶ ὁ Ἀριθμὸς ἐσωτερικά, καὶ τὸ ἐσωτερικὸν Ἀόριστον, καὶ Ἀπαράστατον, εἰ μὴ εἰς διορισθῇ καὶ μερικευθῇ· οἱ δὲ διορισμοὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ ποικίλως, καὶ ἀπείρως διορίζεται· ἄρα καὶ ὁ Ἀριθμὸς, καὶ ἡ πληθὺς ποικίλως καὶ ἀπείρως διορίζεται, καὶ οὗτοι οἱ διορισμοὶ εἶναι οἱ κατὰ μέρος Ἀριθμοί, καὶ αἱ σωρεῖαι τῆς πληθύος αἱ διάφοροι.

§. 9. Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ γεννήσεως ὄρχεται· ἡ γυνῶσις νὰ ἐκτυλήται, ἥτοι νὰ παρίσταται εἰς τὰ κατὰ μέρος πράγματα, εἰς τὰ διωρισμένα, καὶ μοναδικά, γίνεται ἡ ἰδέα τοῦ ενός· ὅθεν ὡς ἡ πληθὺς ἀπὸ πολλὰ ἐν ὁμοιογενεῖται, οὕτω καὶ ὁ Ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδας πολλὰς· ἄρα καὶ ἡ ἰδέα τῆς μονάδος ἀπὸ τοῦ νοός ἐξέρχεται. Λοιπὸν ὃν λόγον ἔχει τὸ ἐν πρὸς τὰ πράγματα, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ μονὰς πρὸς τὸν νοῦν. Καὶ ὡς ἡ πληθὺς σύγκειται ἀπὸ πολλὰ ἐν, οὕτω καὶ ὁ Ἀριθμὸς ἀπὸ πολλὰς μονάδας. Λοιπὸν τὸ μὲν ἐν θεωρεῖται εἰς τὰ πράγματα, ἡ δὲ μονὰς εἰς μόνον τὸν Ἀριθμόν· καὶ πάλιν ἕκαστον μέρος τῆς πληθύος ἐν λέγεται, ἕκαστον δὲ μέρος τοῦ Ἀριθμοῦ μονὰς. Ἐν δὲ καὶ μονὰς ταυτὸν, πλην ἐκεῖνο πρὸς τὰ πράγματα, αὕτη πρὸς τὸν Ἀριθμόν· ἐκεῖνο συγκεκριμένη ἰδέα, αὕτη ἀφηρημένη.

§. 10. Ἐπειδὴ πληθὺς λέγεται, οὔτε τὸ ἐν, οὔτε τὰ δύο, διότι παρεπόμενον εἰς τὸ πληθὺς εἶναι, τὸ νὰ ᾔναι πολλά· καὶ τὸ ἐν καὶ δύο πολλὰ δὲν λέγονται, ἀλλὰ ἀπὸ τὰ τρία τὸ πολλὰ ἄρχεται· ἄρα καὶ ἡ μονὰς καὶ ἡ δυὰς ἀ-

ριθμὸς δὲν λέγεται, καὶ μόνον ἀπὸ τοῦ τρία ὁ Ἀριθμὸς ἄρχεται. Διὸ καὶ οἱ παλαιοὶ καλῶς τὸν Ἀριθμὸν σωρείαν μονάδων ὥρισαν. Κατωτέρω δὲ θέλομεν μάθῃ κάλλιον, διὰ τί ἡ μονὰς καὶ ἡ δυὰς ἀριθμοὶ δὲν λέγονται.

§. 11. Ἐπειδὴ δὲ ὁ Ἀριθμὸς καὶ ἡ Πληθὺς ταυτίζονται (§. 7.), δυνάμεθα καὶ τὸν Ἀριθμὸν μόνον νὰ λάβωμεν, καὶ ἐτι τὸν Ἀριθμὸν ὁμοῦ μὲ τὴν Πληθύν. Ὅταν δὲ τὸν Ἀριθμὸν μόνον λαμβάνωμεν, καλεῖται ἀφηρημένος Ἀριθμὸς, ὡς πέντε, δέκα, εἴκοσι κτ. χωρὶς νὰ ὀνομάσωμεν, τί πέντε, εἴκοσι κτ. Ὅταν δὲ ὀνομάσωμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸ κοινὸν ὄνομα τῆς Πληθύος ὡς πέντε ἄνθρωποι δέκα Γυναικες, εἴκοσι ἔπποι κτ. τότε καλεῖται ὁ Ἀριθμὸς Συγκεκριμένος. Ἐτι τὰ μὲν μέρη τοῦ ἀριθμοῦ μοναδικὰ, ἡ Ἀριθμοῦ μενὰ λέγονται· τὰ δὲ τῆς Πληθύος Ἀριθμητὰ, καθ' ἃ ἀριθμοῦνται.

§. 12. Τὸ ὄνομα, μὲ τὸ ὁποῖον ὀνομάζονται αἱ μονάδες τῆς Πληθύος ἀριθμούμεναι, Μέτρον καλεῖται, ἡ Μονάδες μετρικαί, ἡ Μονάδες ἀπλῶς. Ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ ὄνομα μετρεῖ ὅλον τὸν Σωρὸν τῆς πληθύος ἐπίσης· τοῦτο δὲ ἡ ὁμοίον πρέπει νὰ ἦναι, ἡ ὁμοῦ ὁμοίον καὶ ἴσον. Ὅπως ὅταν λέγωμεν ἕξ ἄνθρωποι· τὸ ἄνθρωπος ἡ μονὰς, ἡτις ὡς ὁμοία διορίζει καὶ μετρεῖ αὐτὴν τὴν Σωρείαν τῶν αὐτῶν· ὅταν δὲ λέγωμεν τὸ Βαρέλλιον τοῦτο εἶναι διακόσιαι ὁκάδες, τὸ ὄνομα ὁκά εἶναι ἴσον καὶ ὁμοίον· καὶ δι' αὐτοῦ μετρεῖται τὸ Βαρέλλιον· καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀφηρημένου, μονὰς λέγεται, ἡ δὲ μονὰς τοῦ συγκεκριμένου, μέτρον. Πλὴν πολλοὶ τὸ μέτρον καὶ τὴν μονάδα ἀδιαφόρως λαμβάνουσι, καὶ αὐτὴ μέτρον μονάδα λέγουσιν. Ἀνάγκη ὅμως, νὰ ἦναι ἡ μονὰς

τοῦ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ τῆς αὐτῆς φύσεως, ἦτοι τοῦ αὐτοῦ εἶδους μὲ τὰ μετρητὰ τῆς Πληθύος· δηλ. ἡ βαρύτης μὲ τὴν βαρύτητα, τὸ διάστημα μὲ τὸ διάστημα, τὸ χωρητικὸν μὲ τὸ χωρητικὸν κτ. ὡς ὁ λίθος οὗτος πέντε λίτρας· τὸ φόρεμα δύο πήχεις· τὸ σιτάρι δύο κοίλα κτ. Διότι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ εἰπῶμεν ὅτι τὸ κρασί τοῦτο εἶναι τρεῖς πήχεις, ὁ δρόμος οὗτος τέσσαρες ὁκάδες κτ. ὅτι ἄλλο εἶδος ἢ ὁκά, καὶ ἄλλο ὁ δρόμος, καὶ τὰ εἴη. Καὶ φανερόν ὅτι ἡ μονὰς τοῦ συγκεκριμένου Ἀριθμοῦ ἐν μέρει μόνον τῆς πληθύος σημαίνει. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ τὸ ἐν εἰς πολλὰ μέρη κόπτεται, ἄρα καὶ ἡ μονὰς τοῦ συγκεκριμένου ἀριθμοῦ ὡς ὅλον τι λαμβάνεται, καὶ γίνεται τὸ μέρος αὐτῆς ἑτέρα μονὰς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ. "Οὕτω λέγομεν τετρακόσια δράμια ἢ ὁκά· ὁκτώ ρούπια ἢ πήχη κτ. καὶ γίνεται τὸ ἐν μέρος τῆς πληθύος ὡς ὅλον, καὶ διαιρούμενον εἰς τὰ μέρη του, γίνεται ἑτέρα πληθὺς, καὶ τὸ μέρος· πάλιν αὐτῆς, ἑτέρα πληθὺς πολλαχῶς, ὡς κατωτέρω δεῖξομεν. Κατὰ τοῦτο λοιπὸν ὁ Βόλφιος ὥριζε τὸν Ἀριθμὸν, ὅτι πρὸς μονάδα ἀναφέρεται· πλὴν οὗτος ὁ ὀρισμὸς φανερῶνει τὴν ἀληθείαν τὸν ὠρισμένον ἀριθμὸν, καὶ οὐχὶ τὸν καθόλου, ὅπου ἡμεῖς ἐκλαμβάνομεν, καὶ μενέτω ὀρθὸς ὁ ὀρισμὸς τῶν παλαιῶν· (§. 10.) Ἀριθμητικὴ ἄρα εἶναι ἡ ἐπισήμη, ἥτις πολυπραγμονεῖ τὰ ποικίλα πάθη καὶ ἰδιώματα τοῦ Ἀριθμοῦ.

§. 13. "Οτι ὁ Ἀριθμὸς ἐσωτερικὸς καὶ καθόλου, εἶδομεν (§. 7.), καὶ ὅτι παρίσταται διοριζόμενος (§. 8.). ἄρα διὰ τὸ καθολικὸν αὐτοῦ παικίλοι καὶ ὑπεριόριστοι οἱ διορισμοὶ αὐτοῦ, ὡς πέντε, ἕξ, ἑξήντα κτ. καὶ ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς ἢ ἀφηρημένος εἶναι, ἢ συγκεκριμένος (§. 11.) καὶ

οἱ περιορισμοὶ ἢ ἀφηρημένοι εἶναι ὡς πέντε, δέκα κτ. ἢ συγκεκριμένοι, ὡς πέντε ἄνθρωποι, ἑξ γρόσια κτ. ὅθεν ὁ καθόλου Ἀριθμὸς διοριζόμενος γίνεται, ἢ συγκεκριμένως, ἢ ἀόριστος, περὶ τῶν τριῶν τούτων, κατωτέρω θελούμεν πραγματευθῆ.

§. 14. Ἐδέχθη (§. 7.) ὅτι ὁ Ἀριθμὸς ἐσωτερικὸς, καὶ νοερὸς, καὶ οἱ διορισμοὶ αὐτοῦ ποικίλοι, καὶ ἄπειροι· πλὴν τὸ ἐσωτερικόν, εἰδείξαμεν εἰς ἄλλο σύγγραμμα, ὅτι εἰς περιόδους παρέξεται, εἰς τὴν ἡμετέραν Φυσικὴν· ἄρα καὶ οὗτος κατὰ περιόδους παρέξεται. Πρὶν ὁμῶς νὰ μάθωμεν τὸν νόμον τῶν περιόδων τοῦ Ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν πρῶτον ὅτι ὁ Ἀριθμὸς ποσότης διακεκριμένη εἶναι (§. 13.), καὶ ἡ ποσότης ἐπιδέχεται αὐξήσιν καὶ μείωσιν· ὅθεν αἱ περίοδοι τοῦ ἀριθμοῦ ἢ κατ' αὐξήσιν, ἢ κατὰ μείωσιν γίνονται. Β'. ἐπειδὴ ὁ Ἀριθμὸς ἐσωτερικὸς (§. 7.), καὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ μόνου ἐν ἰδίῳ μα ἔχομεν· δηλ: ἢ ὑπάρχει, ἢ δὲν ὑπάρχει (μὴ νοήσῃ τις τὴν ὑπαρξιν εἶναι)· δηλ: ἢ θέσις εἶναι, ἢ ἄρσις ἢ κατὰ τὸν Διόφαντον, ἢ ὑπαρξίς εἶναι, ἢ λείψις· ἢ κατὰ τοὺς Νεωτέρους, ἢ κατάφασις, ἢ ἀπόφασις· ἄρα καὶ ὁ Ἀριθμὸς ἢ καταφατικὸς εἶναι, ἢ ἀποφατικός· καὶ λοιπὸν αἱ περίοδοι τοῦ Ἀριθμοῦ παρέξονται ἢ καταφατικαί, ἢ ἀποφατικαί. ΣΤ'. Ἐμάθομεν (§. 12.) ὅτι ἑκάστη πληθὺς σύγκειται ἀπὸ μέρη, καὶ ἕκαστον μέρος ἔτι ἀπὸ μέρη· ἄρα καὶ τὸ μέρος ὡς πληθὺς ἐκλαμβάνεται, καὶ εἶναι τὸ μὲν μέρος πρὸς τὴν Πληθὺν μέρος, πρὸς δὲ τὰ μέρη αὐτοῦ, Πληθὺς· τὸ αὐτὲ γίνεται καὶ τὸ μέρος τούτου τοῦ μέρους πληθὺς, καὶ ἀνάπαλιν πολλὰ μέρη ἴσα ἀποτελοῦσι μίαν πληθὺν, καὶ πολλαὶ πληθῦς ἀποτελοῦσιν ἑωτέρα

Πληθὺν καὶ ἔτι ἑτέραν· ὥς ἡ ὁκὰ πρὸς τὰς λίτρας πλη-
 θὺς, ἡ δὲ λίτρα πρὸς τὰ δράμια Πληθὺς· κτ. ὥς καὶ αἱ
 περίοδοι τοῦ χρόνου παρίσανται εἰς τοῦτο τὸ ἰδίωμα. Ὁ-
 θεὺν αὖ περίοδοι τοῦ Ἀριθμοῦ πρέπει νὰ γίνωνται Α', ἡ ἐν
 αὐξήσει, ἡ ἐν μειώσει· Β', ἡ καταφατικαὶ, ἡ ἀποφατι-
 καί· Γ', ἡ ἡ πληθὺς νὰ γίνηται μέρη, καὶ πολλὰ ἴσα μέ-
 ρη τοιαῦτα νὰ γίνωνται μία Πληθὺς, καὶ ἔτι πολλαὶ Πλη-
 θύες ὁμοῦ, ἑτέρα Πληθὺς, καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ τῷ ὄντι
 τοιαῦται αἱ περιδικαὶ παραστάσεις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπου ἀπὸ
 γεννήσεως ἐκφράζομεν, ὅταν λέγωμεν τὴν μίαν περίοδον
 ἐν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐν-
 νεὰ, δέκα περίοδος πρώτη, τῆς ὁποίας τὰ μέρη μονάδες
 λέγονται, τὸ δὲ τέλος τῆς περιόδου δεκάς. Ἐὰν δὲ δέκα
 δεκάδας ὁμοῦ ἐκλάβωμεν ἀποτερματίζεται δευτέρα περίο-
 δος, τῆς ὁποίας τὰ μέρη δεκάδας λέγομεν· τὸ δὲ τέλος
 αὐτῆς ἑκατοντάδα, ἡ ἑκατοσὺν, τὰ δὲ μέρη αὐτῆς καλοῦ-
 μεν, τὸ μὲν πρῶτον, δέκα, τὸ ἕξῃς, εἴκοσι, καὶ τέλος
 τριάντα, ἡ τριάκοντα, καὶ ἀκολουθῶς σαράντα, ἡ τεσσα-
 ράκοντα· πενήντα, ἡ πενήκοντα· ἑξήντα, ἡ ἐξήκοντα·
 ἑβδομήντα, ἡ ἑβδομήκοντα· ὀγδοήντα, ἡ ὀγδοήκοντα·
 ἑννεήντα, ἡ ἑννεήκοντα· καὶ τέλος ἑκατόν. Ἐπειδὴ ὁ-
 μως ἐκάςῃ δεκάς αὐτῆς τῆς περιόδου ἔχει καὶ τὰ μοναδι-
 κά μέρη τῆς, ἐκφράζομεν αὐτὰ κατὰ συνέχειαν μετὰ τῇ
 μονάδῃ· ὥς εἴκοσι ἐν, εἴκοσι δύο κτ. πενήντα τρία, πε-
 νήντα ἕξ κτ. ἔκτος ὁμῶς τοῦ δωδεκά καὶ ἑνδεκά, ὅπου τὰ
 μοναδικὰ μέρη προεκφράζονται. Ἐὰν δὲ πάλιν δέκα ἑκα-
 τοντάδας ὁμοῦ ἐκλάβωμεν, ἀποτελεῖται ἡ τρίτη περίοδος
 τῆς παραστάσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τῆς ὁποίας, τὰ μὲν μέρη
 ἑκατοντάδες λέγονται, τὸ δὲ τέλος, χιλιάς· καὶ καλοῦμεν

τὸ πρῶτον μέρος ἑκατὸν, τὸ δεύτερον διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια κτ. καὶ αὐτοῦ προεκφράζονται αἱ ἀνώτεροι περίοδοι, καὶ ἐπομένως τὰ μέρη αὐτῶν ὡς πεντακόσια ὀγδοῆντα πέντε κτ. Ἐὰν δ' ἔτι δέκα χιλιάδας ὁμοῦ ἐκλάβωμεν, ἀποτελεῖται τετάρτη περίοδος, ἧς τὸ τέλος μυριάς· καὶ δέκα μυριάδας ὁμοῦ, ἀποτελεῖται ἑτέρα περίοδος, ἧς τὸ τέλος δεκάδα μυριάδων λέγομεν· καὶ ἔτι δέκα δεκάδας ἐὰν ὁμοῦ λάβωμεν, γίνεται ἑτέρα περίοδος, τῆς ὁποίας τὸ τέλος κατὰ τοὺς Ἑτερογλώσσους, **Μιλλιόνιον**, ἥτοι χιλιάς χιλιάδων. Λοιπὸν ἐὰν οὕτω λαμβάνωμεν δέκα ὁμοῦ περιόδους πάντοτε, προβαίνομεν ἐπ' ἄπειρον εἰς διλλιόνια, τριλλιόνια κτ. καθὼς κατωτέρω δεῖξομεν. Ὅθεν ἐὰν ἀκριδῶς τὰς περιόδους αὐτὰς ἐξετάσωμεν, εὐρίσκομεν ὅλα τὰ ἄνω ἰδιώματα· καὶ ἐκάστη περίοδος μόνον εἰς δέκα περικλείεται.

§. 15. Ἡ ἐσχάτη διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ εἰς καταφατικὸν καὶ ἀποφατικόν, θέλει ἀναπτυχθῇ κατωτέρω σαφέςατα· ἐδῶ μόνον λέγομεν ὅτι τὸ ἐν πάντῃ ἐναντίον εἶναι ἀπὸ τοῦ ἄλλου, καὶ ὅ,τι τὸ ἐν θέτει, τοῦτο τὸ ἕτερον ἀναιρεῖ· ὅμοιον ὡς ὅταν τις κτίζῃ, καὶ ἅμα ξεκτίζῃ· ἐκεῖνο ὁποῦ θέτει εἰς τὸ κτίζειν, τοῦτο σηκώνει εἰς τὸ ξεκτίζειν, καὶ τοῦτο λέγεται Θέσις, καὶ Ἄρσις· τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ ὅταν τις ἀπὸ τοῦ σημείου α, προβαίνῃ εἰς τὸ σημείου β, α—β καὶ τοῦ σημείου β, ὀπισθοδρομεῖ πάλιν εἰς τὸ α. αὐτοῦ ἡ κίνησις ἢ μία πρὸς τὸ β καταφατικῆ· τὸν δρόμον ὁποῦ ἔβηκεν εἰς τὸ σημείου β. ἀνεῖλε γυρίζων εἰς τὸ σημείου α. καὶ ἐγένεν ὡσαύτῃ ἔσατο εἰς τὸ σημείου α. οὕτω καὶ ὅταν τις εἰς μίαν σκάλαν ἀνεβαίνῃ, ἢ θέσις τῆς ἀναβάσεως ἀνηρέθῃ μετὰ τὴν θέσιν τῆς καταβάσε-

ως· καὶ εἰς αὐτὰ ἤμποροῦμεν νὰ εἰπῶμεν τὸ κτισιμον, τὴν
 πρόοδον καὶ τὴν ἀνάδασιν, καταφατικὴν· τὴν δὲ ξέκτισιν,
 τὴν ὀπισθοδρόμησιν καὶ κατάδασιν, ἀποφατικὴν. Τὸ αὐ-
 τὸ ἀκολουθεῖ καὶ ὅταν ἔχῃ τις 10 γρόσια καὶ χρεωσῇ ἕτερα
 δέκα· ὅρα ἡ περιουσία ἀναιρεῖται ἀπὸ τὸ χρέος, καὶ εἶ-
 ναι ὥσαν νὰ μὲν εἶχε τίποτες, καὶ καλεῖται ἡ περιουσία κα-
 αφατικὴ, τὸ δὲ χρέος ἀποφατικόν· καὶ εἶναι τὸ ἐν πάν-
 τη ἐναντίον τοῦ ἑτέρου. Ὅπου λοιπὸν εἰς ἓνα καὶ τὸ αὐ-
 τὸ συμβαίνουσι δύο πληθύνες πάντῃ ἐναντίαι, ἐκεῖ τὴν μίαν
 καλοῦμεν καταφατικὴν, τὴν δ' ἑτέραν ἀποφατικὴν, καθὼς
 εἰς τὸν αὐτὸν ἄνθρωπον θεωρεῖται ἡ πληθὺς περιουσία, καὶ
 ἡ πληθὺς τὸ χρέος, καὶ ἐκεῖνῃ ἐναντία ἀπὸ αὐτὴν· ὁμοί-
 ως καὶ εἰς τὴν κίνησιν καὶ τὰ λοιπά· τοῦτο κάλλιον φαί-
 νεται εἰς τὴν ζυγαριάν· τὸ ἐν βάρος ἀναίρει τὸ ἕτερον,
 καὶ γίνεται ἰσοσαθμία· ἄρα τὰ βάρη ἐναντία μόνον πρὸς
 τὴν ζυγαριάν, καὶ πρὸς αὐτὴν ὀνομάζεται τὸ ἐν καταφα-
 τικόν, καὶ τὸ ἕτερον ἀποφατικόν· καὶ ἐπειδὴ καὶ τὸ ἐν,
 καὶ τὸ ἄλλο αὐξήσιν, καὶ μείωσιν ἐπιδέχεται· ἄρα καὶ τὸ
 ἓνα καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὰ μέρη τοῦ Πληθὺς γίνεται, ἄρα
 καὶ τὸ ἄλλο ἀριθμὸν ἐπιδέχεται· καὶ εἶναι ὁ μὲν εἰς ἀ-
 ριθμὸς καταφατικὸς, ὁ δ' ἀποφατικὸς. Καὶ λοιπὸν καὶ ὁ
 ἀποφατικὸς καὶ ὁ καταφατικὸς παρίσταται ὁμοίως εἰς τὰς
 ἀνωτέρω περιόδους, εἰ μὴ ὁ εἰς πάντῃ ἐναντίος τοῦ ἄλ-
 λου, καὶ ὁ εἰς ἀναίρει τὸν ἄλλον, καὶ ἐκεῖνο ὅπου θέτει
 ὁ εἰς, σηκώνει ὁ ἄλλος. Ἡ ταυτότης λοιπὸν τοῦ καταφατι-
 κοῦ καὶ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ Μηδέν, καθὼς εἰς τὴν
 ζυγαριάν ἡ ἰσοσαθμία, ἡ ταυτότης τοῦ ἐνὸς καὶ τοῦ ἑτέ-
 ρου βάρους, τοῦ ἀποφατικοῦ καὶ καταφατικοῦ· καὶ ὅταν
 τὸ ἐν πλεονάσῃ τὸ βάρος, χαλὰ καὶ ἡ ταυτότης, καὶ ἄ-

μα ἡ ἰσοσθημία· οὕτω λέγομεν καὶ τὸν ἄνθρωπον, ὅτι μηδὲν ἔχει, εἰς ἔχῃ δέκα γρόσια, καὶ χρεωσῇ ἄλλα δέκα· ὅθεν τὸ μηδὲν ἐν τῷ Ἀριθμῷ γίνεται ἐκ τῆς ταυτότητος τοῦ καταφατικοῦ καὶ ἀποφατικοῦ. Τοῦτο τὸ μηδὲν τὸ χαρακτηρισίζουσιν οἱ Ἀριθμητικοὶ μὲ τὸν χαρακτήρα 0, ὁ μηδενικὸν Σημεῖον ὀνομάζουσι, καὶ τοῦτο οὔτε καταφατικὸν εἶναι, οὔτε ἀποφατικόν· ἀλλ' ἡ ταυτότης τοῦ καταφατικοῦ, καὶ ἀποφατικοῦ, ἦτοι σημεῖον ἀμερὲς τῆς ἰσοσθημίας, ἀφ' οὗ παρίσανται ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ, καὶ εἶναι τὸ μεταίχμιον, καὶ μέσον, καὶ πηγὴ, καὶ ἀρχὴ τῶν καταφατικῶν καὶ ἀποφατικῶν ἀριθμῶν· ὡς κατωτέρω δεῖξομεν.

§. 16. Ἐμάθομεν σχεδὸν ἱκανῶς τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὅτι παρίσεται εἰς περιόδους δεκαδικὰς (§. 14.), καὶ ὡς ἀνωτέρω ἐκφράζεται. Ἀλλ' ἡ ἔκφρασις αὐτῇ ἐπειδὴ κεῖται αἰεὶ ὡς ἡχος ἐν ῥοῇ, καὶ παρέρχεται, οὔτε παρωχηκυῖα, οὔτε μέλλουσα γίνεται· διὸ καὶ μόνου τῆς ἀκοῆς γίνεται ἀντικείμενον. Ὅθεν διὰ τὰ πηξῶσιν οἱ ἄνθρωποι καὶ τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν ἐν μνηῇ, καὶ νὰ γένῃ· καὶ τῆς ὁράσεως ἀντικείμενον, δι' ἧς οἱ εἰσὶν ὥντες, πρῶτ' εἰσὶν ὥντες, καὶ ἐπόμενοι εἰς ἐν συνέρχονται, χαρακτηρὰς τινὰς ἐπενόησαν. Διὸ καὶ ἡ μὲν ἔκφρασις τῆς παρασάσεως τοῦ ἀριθμοῦ φυσικὴ· διότι ὅλοι οἱ ἄνθρωποι κατὰ τὰς δεκαδικὰς περιόδους τὸν ἀριθμὸν ἐκφράζουσι· ἡ δὲ χαρακτηριστικὴ ἔκφρασις τοῦ ἀριθμοῦ τεχνικὴ· ὅθεν καὶ εἰς διάφορα ἔθνη διάφοροι οἱ χαρακτήρες ἐπενοήθησαν. Καὶ οἱ μὲν Ἕλληνες ἐχαρακτήριζον τοὺς ἀριθμοὺς μετὰ στοιχείοις τοῦ αλφαβήτου, α', ἐν. β, δύο· γ', τρία· δ', τέσσαρα· ε', πέντε· ς', ἕξ. ζ, ἑπτὰ· κτ. καὶ οἱ παλαιοὶ ὅλας τὰς πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς μὲ τούτους χαρακτήρας τρυτούς ἐτέλουν· οἱ δὲ

Νεώτεροι μόνον εἰς τὰ κεφάλαια τῶν Βιβλίων, καὶ εἰς ἕτερό τινα αὐτοὺς ἐκλαμβάνουσι. Ἀλλὰ τὸ σύστημα τῶν χαρακτηριστῶν δὲν συμφωνεῖ μετὰ τὸ φυσικὸν σύστημα τῶν Ἀριθμῶν, διὸ καὶ ἀπεβλήθη ἀπὸ τῆς Ἀριθμητικῆς. Οἱ Λατῖνοι δ' ἔλαβον μόνον ἑπτὰ γράμματα εἰς τὴν ἔκφρασιν τῶν Ἀριθμῶν τὸ I, V, X, L, C, P, M, καὶ ἐκφράζουσι, τὸ μὲν I, ἓν· τὸ δὲ V πέντε· τὸ δὲ X δέκα· τὸ δὲ L πενήντα, τὸ δὲ C ἑκατόν· τὸ δὲ P πεντακόσια, καὶ M χίλια· καὶ ἀριθμοῦσιν ὁμοῦ τὰ στοιχεῖα, ὅταν πρὸς ἀλλήλα θέτῳνται. II. δύο. III. τρία. VI. ἕξ. XXVII. εἰκοσιεπτὰ κτ. ὅταν ὁμως ὁ ἐλάττω χαρακτήρ προτίθεται τοῦ μείζονος, τότε ἀφαιροῦσι τὸν ἐλάττω ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὡς IV. τέσσαρα. IX. ἑννέα, XL. σαράντα κτ. ἀλλὰ καὶ οὗτοι οἱ χαρακτήρες δὲν συμφωνοῦσιν εἰς τὸ φυσικὸν σύστημα τῶν Ἀριθμῶν, καὶ εἶναι εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἄχρηστοι· διὸ καὶ ἀπεβλήθησαν, καὶ μόνον εἰς τὰς ἐπιγραφὰς τῶν Βιβλίων γράφονται. Ἄλλοι δὲ καὶ δυαδικόν, καὶ τριαδικόν σύστημα ἐπενόησαν, τὰ ὅποια ὡς ἀσύμφωνα εἰς τὴν φυσικὴν ἔκφρασιν τῶν Ἀριθμῶν, ἀλυσιτελῆ ἐφάνησαν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν. Διὰ τὴν λάβην ἰδεῖν τινα τούτων τῶν συστημάτων ὁ πρωτόπειρος, ὡς ἀναγνώσῃ τὰς ἀρχὰς τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅπου ὁ κύριος Ζήσης Κάβρας, ἐκ τοῦ Γερμανικοῦ ἐρανίστατο.

§. 17. Οἱ χαρακτήρες ὁμως ὅπου ἐπακριδῆς συμφωνοῦσιν εἰς τὸ σύστημα τὸ φυσικόν, εἶναι ἐκεῖνοι, οὓς ἡμεῖς ἀπὸ τούτων Ἀραβας ἀλάβομεν. Δαιμόνιος τῇ ἀληθείᾳ ὁ εὐρέτης αὐτοῦ τοῦ συστήματος! τὸ πλῆθος μὲν τούτων τῶν χαρακτηριστῶν εἰς ἑννέα συνίσταται, εἰμὴ ἐάν τις λόβῃ καὶ τὸ μηδενικὸν σημεῖον ὁ ὁμοῦ, καὶ ἀπὸ δέκα συσταθῇ· πλὴν ἢ πολὺπλοκος τούτων σύνθεσις ἀνεξάνλητος· ὅτι διὰ

τούτων τῶν δέκα χαρακτήρων μόνον ὅλαι αἱ ἄπειροι παραστατικαὶ περίοδοι τοῦ Ἀριθμοῦ ἐκφράζονται. Χαρακτηρίζουσι δὲ τὴν μὲν μοναδικὴν μονάδα μὲ τὸν χαρακτήρα 1, τὰς δὲ δύο μονάδας μὲ τὸν χαρακτήρα 2 ἢ δύο· τρία δὲ μὲ τὸν 3. τέσσαρα δὲ μὲ τὸν 4. πέντε μὲ τὸν 5. ἕξ μὲ τὸν 6. ἐπτά μὲ τὸν 7. ὀκτώ μὲ τὸν 8. ἐννέα μὲ τὸν 9. δέκα δὲ μὲ τὸν χαρακτήρα 1 καὶ ἅμα μὲ τὸ 0, οὕτω 10. καὶ οὕτως ἀπαρτίζεται ἡ πρώτη περίοδος· ὡς τὸ διάγραμμα παρίσχησιν.

A

§. 18. Πρὶν ὅμως νὰ μάθωμεν τὸν	1	ἕν.
χαρακτηρισμὸν τῶν ἐξῆς περιόδων, πρέπει	2	δύο.
νὰ παρατηρήσωμεν τοὺς νόμους, καθ' οὓς	3	τρία.
ἐκτυλίσσεται ἡ περίοδος, τοὺς ὁποίους οἱ μὲν	4	τέσσαρα.
ξυγγραφεῖς ἀμελοῦσιν, εἰς τὰς ἀποδείξεις μας	5	πέντε.
ὅμως πολὺ εἰς τὴν σαφήνειαν χρησιμεύου-	6	ἕξ.
σιν. Ὅθεν ἐὰν παρατηρήσωμεν αὐτὴν τὴν	7	ἐπτά.
περίοδον, εὐρίσκομεν Α'. καὶ τὴν ἀρχὴν καὶ	8	ὀκτώ.
τὸ τέλος αὐτῆς τῆς περιόδου μὲ τὸ αὐτὸ	9	ἐννέα.
σημεῖον 1 νὰ χαρακτηρίζεται κατὰ τὴν φύ-	10	δέκα.

σιν τὴν περιοδικὴν· διότι περίοδος λέγεται ἐκεῖνη, ὅπου ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἄρχεται, καὶ εἰς τὸ αὐτὸ καταπτά· διὰ τοῦτο λοιπὸν εἰς τὸ τέλος γράφεται τὸ μηδενικὸν σημεῖον 0 εἰς κύκλον τινὰ, διὰ νὰ παρίσχησιν ἐντελὴν περίοδον τὴν μίαν· Β'. τὸ μηδενικὸν σημεῖον δὲν σημαίνει τιποτε, ὡς μηδὲν, ἀλλὰ τόπον περιεργίζει· λοιπὸν διαφέρει ἡ ἀρχὴ τῆς περιόδου ἀπὸ τὸ τέλος μόνον κατὰ τὸν τόπον, καθ' ὃ ἐκεῖνη ἔχει τὸν πρῶτον, καὶ αὕτη τὸν δευτέρου· καὶ τῷ ὄντι ἡ περίοδος ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον εἰς μὲν τὴν ἀρχὴν πρῶτον, εἰς δὲ τὸ τέλος

δεύτερον· ὡς ὅταν τις περιοδεύσῃ τι, καὶ καταντήσῃ πάλιν
 εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, κατὰ δεύτερον λόγον εὐρίσκει αὐτό.
 Ἄρα ὁ δεύτερος τόπος δεκάδας σημαίνει πάντοτε, καὶ ὁ
 πρῶτος μονάδας. Ὅθεν οἱ μὲν χαρακτῆρες 1, 2, 3, 4,
 5, 6, 7, 8, 9. ἐπειδὴ τὸν πρῶτον τόπον ἔχουσι, μο-
 νάδας ἀπλᾶς σημαίνουσι· δηλ. δύο μονάδας, τρεῖς, τέσ-
 σαραι κτ. οἱ δὲ χαρακτῆρες οἱ αὐτοὶ ὅταν ἔχωσι τὸν δεύ-
 τερον τόπον οὕτω, 10, 20, 30, 40, 50, 60,
 70, 80, 90. δεκάδας ἀπλᾶς σημαίνουσι· δηλ. μίαν δε-
 κάδα, ἦτοι δέκα· δύο δεκάδας, ἦτοι εἴκοσι· τρεῖς δεκά-
 δας, ἦτοι τριάντα κτ. καὶ ἐκ τούτων γίνεταί φανερόν, ὅτι
 εἰάν καὶ ὁ δεύτερος τόπος μὲ χαρακτῆρας σημειοῦται, ἐκ-
 φράζομεν τὸν μὲν δεύτερον τόπον μὲ δεκάδας, τὸν δὲ πρῶ-
 τον μὲ μονάδας, οὕτω 14, δεκατέσσαρα, 26, εἴκοσι ἑξ.
 97 ἐννεήντα ἑπτὰ κτ. Γ'. εἰς τὴν αὐτὴν περιόδον εὐρίσκο-
 μεν καὶ τὸ ἰδίωμα τοῦ πλεονασμοῦ, καὶ μειώσεως (§. 14)·
 διότι εἰάν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τὰ μέρη τῆς περιόδου θεωρήσω-
 μεν, εὐρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὰ ἐξῆς μέρη νὰ πλεονάζω-
 σι μὲ μίαν μονάδα· ὡς τὰ 2, πλεονάζουσι μίαν μονάδα
 τῆς 1. καὶ τὰ 3 τῶν 2. καὶ τὰ 4 τῶν 3, ὁ Ἀριθμὸς,
 ὁποῦ κατὰ πλεονάδας ἐκτυλίσσεται, καλεῖται ἀπὸ τοὺς Ἀριθ-
 μητικοὺς Φυσικός. Ἐάν ὁμῶς ἀνάπαλιν, ἀπὸ τὸ τέλος αὐ-
 τῆς τῆς περιόδου μέχρι τῆς ἀρχῆς αὐτῆς παρατηρήσωμεν,
 εὐρίσκομεν τὴν μείωσιν· οὕτως ὁ 9 ἐλάττων ἀριθμὸς τοῦ
 10 κατὰ μονάδα, καὶ ὁ 8 τοῦ 9 καὶ ὁ 7 τοῦ 8 κτ. Ἄρα
 ὁ πλεονασμὸς ἐναντίον τῆς μειώσεως, καθότι ἐκεῖνος ἄρ-
 χεται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, οὗτος ἀπὸ τοῦ τέλους κτ. καὶ ἄρ-
 μόζει καὶ αὐτοῦ διὰ τὰ ἀνωτέρω (§. 14) τὸ καταφατι-
 κόν· καὶ εἰς αὐτὰ τὸ καταφατικὸν σημαίνει πλεονασμόν,

τὸ δ' ἀποφατικὸν μέλῳσιν· ἐκεῖνο θέσιν, τοῦτο ἄρσιν, ἦ-
 τοι θέτοντες μονάδα εἰς τοὺς χαρακτῆρας κατανοοῦμεν εἰς
 τὸ τέλος τῆς περιόδου, αἶρουτες δὲ μονάδα ἀπὸ τοῦ τέλους
 τῆς περιόδου, κατανοοῦμεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς. Οἱ τεχ-
 νικοὶ δὲ διὰ τὰ γράφωσι καὶ τὴν θέσιν καὶ τὴν ἄρσιν, ἐ-
 ξέλαθον καὶ χαρακτῆρας κατὰ συνθήκην, καὶ χαρακτηρίζου-
 σι τὴν μὲν θέσιν μὲ τὸ σημεῖον $+$, τὴν δ' ἄρσιν μὲ τὸ
 σημεῖον $-$. ὅθεν ὅπου τὸ σημεῖον $+$ προγράφεται ἐνὸς
 ἀριθμοῦ, σημαίνει ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς προστίθεται εἰς
 τὸν προηγούμενον οὕτω $3+2$, τὸ σημεῖον $+$ σημαίνει ὅ-
 τι τὰ δύο ἐννοοῦνται ὁμοῦ μὲ τὰ τρία, καὶ τοῦτο $3+2$
 ἐκφράζεται 5. ὁμοίως καὶ τὸ $7+3$, ἐκφράζεται 10. Τὸ
 δὲ σημεῖον $+$ οἱ μὲν ἐκφράζουσι Μαλλον, οἱ δὲ Μετὰ, οἱ
 δὲ Σύν, ἀπλῶς δὲ, Καί· ἡμεῖς ὁμῶς ἐκφράζομεν αὐτὸ
 εἰς τὸ ἐξῆς διὰ τὸ σύνταγμα Σύν· ἢ κάλλιον, ὡς ἡμεῖς
 ὁμιλοῦμεν διὰ τοῦ Καὶ συνδέσμου· ὅθεν τοῦτο $2+3+5$
 ἐκφράζομεν δύο, σὺν τρισὶ, σὺν πέντε, καὶ τὸ ὅλον ὁμοῦ
 10, καὶ κάλλιον δύο καὶ τρία καὶ πέντε, καὶ τὸ ὅλον δέ-
 κα· ἢ δύο καὶ τρία καὶ πέντε γίνονται δέκα· τὸν αὐτὸν
 τρόπον καὶ εἰς τὰ λοιπὰ. Ὅπου δὲ τὸ σημεῖον $-$ πρὸ τοῦ
 ἀριθμοῦ γράφεται, σημαίνει ὅτι ὁ μετ' αὐτὸ ἀριθμὸς νὰ ἀ-
 φαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, $3-2$, τὸ σημεῖον $-$ σημαί-
 νει νὰ ἀφέλῳμεν τὰ δύο ἀπὸ τοῦ 3, καὶ τοῦτο ὅλον ἐκ-
 φράζομεν 1. ὁμοίως καὶ τὸ $7-3$, ἐκφράζομεν 4. καὶ ἐκφράζε-
 ται καὶ τοῦτο τὸ σημεῖον—ὅτε διὰ τοῦ Ἡττον, ὅτε διὰ τοῦ Ἐ-
 λαττον, ὅτε διὰ τοῦ Ἄνευ, ὅτε διὰ τοῦ Παρὰ, καὶ ὅτε διὰ τοῦ
 Πλὴν· ἡμεῖς ὁμῶς ἐκφράσωμεν εἰς τὸ ἐξῆς καὶ τοῦτο μὲ
 τὸ Πλὴν, καὶ κάλλιον μὲ τὴν Παρὰ, ὡς ὅταν λέγομεν 12
 ὥραις παρὰ 10 λεπτά, ἢ 7 παρὰ 3. οὕτως ἀπαγγέλλομεν

τοῦτο $7-3$ ἑπτὰ πλὴν τριῶν, καὶ ἔτι τοῦτο $8-2-3$,
 ὀκτὼ πλὴν δύο πλὴν τριῶν, ἢ 8 παρὰ δύο παρὰ τρία·
 καὶ τὸ ὅλον 3. Καὶ καλεῖται τὸ μὲν $+$, σημεῖον προσθέ-
 σεως, ἢ ὑπάρξεως· τὸ δὲ $-$ σημεῖον ἀφαιρέσεως, ἢ λή-
 ψεως. Δ'. Με αὐτὰ λοιπὸν τὰ σημεία ἡμποροῦμεν νὰ πα-
 ραστήσωμεν τὴν πρώτην αὐτῆν περίοδον 1, 2, 3, 4, 5,
 6, 7, 8, 9, 10 διαφόρως οὕτω. 1. ($| + |$),
 ($| + | + |$), ($| + | \times | + |$),
 ($| + | + | + | + |$), ($| + | + | + | + | + |$),
 ($| + | + | + | + | + | + |$),
 ($| + | + | + | + | + | + | + |$),
 ($| + | + | + | + | + | + | + | + |$),
 ($| + | + | + | + | + | + | + | + | + |$), καὶ οὕ-
 τως 1, $1+1$, $2+1$, $3+1$, $4+1$, $5+1$, $6+1$, $7+1$,
 $8+1$, $9+1$. καὶ οὕτω $10-9$, $10-8$, $10-7$,
 $10-6$, $10-5$, $10-4$, $10-3$, $10-2$, $10-1$
 καὶ διάφορος ἄλλως· ὅθεν σημειωτέον.

Α'. Τὸ σημεῖον τοῦτο () καλεῖται Παρένθεσις,
 καὶ ὅσα εἰς αὐτὸ περιχλύνονται, ὡς εἰς χαρακτήρ ἐκλαμβά-
 νεται οὕτως ($| + | + | + | + |$) ἀνωτέρω, ὡς ὁ χα-
 ρακτήρ 5 ἐκλαμβάνεται, καὶ εἶναι ἡ παρένθεσις ἴση μετὸν
 5. πλὴν διαφέρει, καθ' ὃ ἐν τῇ παρενθέσει τὰ μέρη τοῦ
 ἀριθμοῦ εἶναι ἀνεπτυγμένα, εἰς δὲ τοῦ 5, τὰ μέρη εἶναι
 συνεπτυγμένα.

Β'. Ἐπειδὴ δὲ ὁ Ἀριθμὸς τῆς παρενθέσεως ἴσος μετὸν
 5, ἀδιάφορον εἶναι λοιπὸν, ἢ οὕτω τὸν Ἀριθμὸν πέντε,
 καὶ ὅποιον ἄλλον νὰ ἐκθῶμεν, εἰς μόνον τὴν αὐτὴν τι-
 μὴν, καὶ τὰς αὐτὰς μονάδας περιέχῃ ὁ Ἀριθμὸς. Ὅθεν
 καὶ πρῶτον ὅξωμα ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, Τὰ ἴσα ὄντι τῶν ἴσων

σων τίθενται. Ἀδιάφορον δὲ εἶναι ἢ ἐν γρόσι νὰ λάβω, ἢ 40 παράδες, ἢ τέσσαρα ρούπια, ἢ ὀκτὼ πεντάρια· ταῦτα γὰρ ὅλα εἶναι ἴσα· μάλις αὖ ἐυδοκιμεῖ ἐκεῖνος εἰς τὴν Μαθηματικὴν, ὅποιος εἶναι ἐπιτηδεῖος νὰ ἐκφράξῃ διαφόρως τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

Γ'. Οἱ τεχνικοὶ διὰ τὴν μεγίστην χρῆσιν τῆς ἰσότητος, ἐπενόησαν καὶ σημεῖον τῆς ἰσότητος τὰς δύο παραλλήλους $=$, τὰς ὁποίας παρενθίεασιν μεταξύ τῶν δύο ἰσῶν ἀριθμῶν ὅθεν ὁ $5 = | + | + | + | + | = 3 + 2 = 7 - 2$, καὶ ποικίλως ἄλλως ἐκφράζεται ὅ, τε πέντε, καὶ ἕκαστος Ἀριθμός. Ἀλλὰ καὶ ἡ μονὰς διαφόρως ἐκφράζεται οὕτως $1 = 10 - 9 = 5 - 4 = 3 - 2 = 2 + 4 - 5$ κτ. ὅσω μᾶλλον εἰς αὐτὰ οἱ πρωτόπειροι γυμνάζονται, τόσω περισσότερον εἰς τὰ ἐνδότερα προχωροῦσιν.

Δ'. Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης χωρὶς ἀνισότητα δὲν νοεῖται, ἐπενόησαν οἱ τεχνικοὶ καὶ σημεῖον τῆς ἀνισότητος μίαν γωνίαν οὕτω $>$, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀνισότης πρὸς δύο θεωρεῖται, ἀπὸ τὰ ὅποια τὸ μὲν μείζον, τὸ δ' ἔλλαιττον, συνηθίζουσι νὰ θέτωσι τὸ μείζον εἰς τὰ σκέλη τῆς γωνίας, καὶ τὸ ἔλλαιττον εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, οὕτω $5 > 3$, καὶ $9 < 10$ καὶ ἐκφράζεται ἐκεῖνο μείζον, τοῦτο ἔλλαιττον· δηλ· ὁ 5 μείζων τοῦ 3, ὁ 9 ἐλάττων τοῦ 10. Τίθεμεν τοῦτο τὸ σημεῖον καὶ μεταξύ ὁλοκληρῶν παρενθέσεων, καὶ μεταξύ συμπλεγμένων Ἀριθμῶν, καθὼς εἰς τὸ ἐξῆς θελομεν ἰδῆ.

Ε'. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὴν περίοδον αὐτὴν τὸ τέλος αὐτῆς 10 λάβωμεν, ἀφέλωμεν μίαν μονάδα $10 - 1$ μένει 9. εἰάν ἔτι μίαν $9 - 1$ ἢ $10 - 2$ μένει 8. εἰάν ἔτι μίαν $8 - 1$, ἢ $10 - 3$ μένει 7. καὶ ἔτι μίαν $7 - 1$, ἢ $10 - 4$, μένει 6. καὶ ἔτι μίαν $6 - 1$, ἢ $10 - 5$, μένει 5. καὶ ἔτι $5 - 1$ ἢ

10—6, μένει 4. καὶ ἔτι 4—1 ἢ 10—7 μένει 3. καὶ ἔτι 3—1 ἢ 10—8 μένει 2. καὶ ἔτι 2—1 ἢ 10—9 μένει 1. καὶ τέλος ἔτι μίαν 1—1 ἢ 10—10 μένει τίποτες, ἢ τὸ μηδενικὸν σημεῖον 0. Φανεροῦ λοιπὸν διὰ τῆς ἀφαιρέσεως κατὰ συνέχειαν μιᾶς μονάδος τὸ μηδενικὸν σημεῖον, ὅπου εἶναι εἰς τὸν 10 εἰς τὸν δευτέρου τύπου, κατανατᾷ εἰς τὸν πρῶτου 0. ἀλλ' ἐνταῦθα μηδὲν σημαίνει· ἄρα τὸ μηδενικὸν σημεῖον εἰς τὸν πρῶτον τύπον σημαίνει μηδέν· καὶ διὰ τοῦτο πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ γραφόμενον, δὲν σημαίνει τίποτες· οὕτως 01, ἢ 02 ἢ 013. ἢ 054. ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ τύπῳ μονάδες ἐμπεριέχονται, εἰς δὲ τὸ μηδενικὸν σημεῖον οὐδεμία μονάς, ὅθεν καὶ τότε παντελῶς ὁ πρῶτος τύπος ἀσημαντος.

ΣΤ'. Εἰς δὲ ἀκόμῃ καὶ ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μίαν μονάδα ἐκβάλλωμεν, τί γίνεται; ἢ τί μένει; τοῦτο γράψωμεν οὕτω, 0—1. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μηδενικὸν δὲν σημαίνει τίποτες, ἡμπορεῖ καὶ νὰ λείψῃ, καὶ μένει λοιπὸν —1, ἥτοι μονὰς ἀποφατικὴ· οὕτω καὶ εἰς δύο ἐκβάλλωμεν. 0—2, μένουσι —2 ἀποφατικά· οὕτω καὶ εἰς τρία, οὕτω 0—3.—3. καὶ 0—4=—4. καὶ 0—5=—5. καὶ 0—6=—6. καὶ 0—7=—7. καὶ 0—8=—8. καὶ 0—9=—9. καὶ 0—10=—10. καὶ οὕτως ἔχομεν ἑτέραν περιόδου πρώτην, πλὴν ἀποφατικὴν —1, —2, —3, —4, —5, —6, —7, —8, —9, —10, τοῦτο καὶ εἰς τὴν πείραν εἶναι γνωστὸν. Ἐξω γὰρ ἔχη εἷς ἄνθρωπος 10 γρόσια περισσεύει, εἰς λάβωμεν ἀπ' αὐτοῦ τὰ δέκα γρόσια, ἔχει ὁ ἄνθρωπος οὐδέν· εἰς δ' ἔτι ἐν λάβωμεν, ἔχει ἐν χρέος· εἰς δύο, ἔχει 2 χρέος· καὶ εἰς δέκα, ἔχει 10 χρέος· τὸ δὲ χρέος καὶ ἡ περισσεύει εἶναι πάντῃ ἐναντία (§. 15.)· ἐκεῖνο ἀποφατικόν,

τοῦτο καταφατικόν. Ὅθεν ὁ Ἀριθμὸς ὅπου ἔχει τὸ σημεῖον $+$ καλεῖται Καταφατικὸς, ἐκεῖνος δὲ, ὅπου ἔχει τὸ $-$, καλεῖται Ἀποφατικὸς· οὕτως ὁ μὲν $+15$, καταφατικὸς, ὁ δὲ -23 ἀποφατικὸς· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁ αὐτὸς νόμος τηρεῖται, πλην ὁ ἀριθμὸς, ὅπου δὲν ἔχει ἐν τῇ ἀρχῇ οὔτε τὸ σημεῖον $+$, οὔτε τὸ $-$, εἶναι ἀεὶ καταφατικὸς.

Ζ'. Αὐτοῦ δὲ γίνεται φανερόν, ὅτι τὸ μηδενικὸν σημεῖον δὲν σημαίνει μὲν τίποτες, ὡς ταυτότης τοῦ καταφατικοῦ καὶ ἀποφατικοῦ· γίνεται ὅμως ἀρχὴ καὶ ρίζα τοῦ καταφατικοῦ καὶ ἀποφατικοῦ ἀριθμοῦ· διότι εἰς τὸ μηδενικὸν σημεῖον μονάδα θῶμεν καταφατικὴν, καὶ ἔτι ἑτέραν καὶ ἑτέραν, γεννᾶται ἡ πρώτη περίοδος ἡ καταφατικὴ· εἰς δ' ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν μονάδα, καὶ ἔτι ἑτέραν καὶ ἑτέραν, γεννᾶται ἡ πρώτη περίοδος ἡ ἀποφατικὴ· ὡς εἰς τὸ παρὸν διάγραμμα.

Ο

Καὶ εἰς αὐτὰς φαίνεται ὅτι ἡ μία καὶ	$+1$	-1
ἡ ἑτέρα ἔχει τοὺς αὐτοὺς νόμους, καὶ τὴν	$+2$	-2
αὐτὴν τιμὴν, καὶ μόνον κατὰ τὰ σημεῖα	$+3$	-3
$+$ καὶ $-$ διαφέρουσι. Ὅθεν ἰδιαίτερος	$+4$	-4
οἱ Ἀριθμητικοὶ τὴν τιμὴν τῶν ἀριθμῶν	$+5$	-5
Ποσὸν καλοῦσιν, καὶ ἕκαστον ἀριθμὸν πο-	$+6$	-6
σίστηται, καὶ ποσά, τὰ δὲ σημεῖα $+$ καὶ	$+7$	-7
$-$ ποιοῦν. Λοιπὸν κατὰ τὴν Γλῶσσαν	$+8$	-8
τῶν Ἀριθμητικῶν αἱ περίοδοι αὐταί, κα-	$+9$	-9
τὸ τὸ ποσὸν δὲν διαφέρουσιν, ἀλλὰ κα-	$+10$	-10

τὰ τὸ ποιοῦν· ἐν δὲ τῷ μηδενικῷ ἅμα εὐρίσκεται καὶ ποσὸν καὶ ποιοῦν, πλην ἀδιακρίτως, ὅτι σκότος ἐπάνω τῆς Ἀδύσιου ἐπέκειται. Τὸ μυστήριον τοῦτο ἐν ἄλλοις ἀναπτύξομεν· ἐνταῦθα μόνον φαίνεται ὅτι τὸ μηδενικὸν ταυτότης τοῦτα

καταφατικού και ἀποφατικού ἀριθμοῦ, καὶ γένος ἀνώτερον τοῦ ποιῶν καὶ ποσοῦ.

Η'. Καὶ τέλος φανερόν, ὅτι τὰ ἴσα ποσὰ ἔχοντα διάφορον ποιῶν ἦτοι διάφορα σημεῖα, συναναιρούνται καὶ γίνονται μηδέν, ὡς $+9-9=0$. καὶ $+3-3=0$. καὶ $+10-10=0$. καὶ τοῦτο, ὅπερ ἐλέγομεν (§. 11.) ὅτι τὸ μηδενικὸν σημεῖον ταυτότης τοῦ καταφατικοῦ καὶ ἀποφατικοῦ. Ἐὰν δὲ ἀνίστα τὰ ποσά, καὶ ἔχῃσι διάφορα σημεῖα, τότε τὸ μείζον ποσὸν ἀναιρεῖ ὅλον τὸ ἑλάττω ποσόν, καὶ μένει μόνον ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος· καθ' ἣν ὑπερέχει τοῦ ἐλάττωτος, μετὰ τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος· οὕτω $+8-5=+3$. ἢ $-8+5=-3$ κτ. Ἀυτὴν τὴν θεωρίαν πρέπει ὁ μαθητὴς καλῶς νὰ παρατηρήσῃ διὰ νὰ μὴ δυσκολευθῇ εἰς τὰ ἀκόλουθα· ἡμεῖς δὲ εἰς τὰς ἐξῆς περιόδους ἔλθωμεν.

§. 19. Μαθόντες τὴν Γέννησιν τῆς πρώτης περιόδου, εὐκόλως καὶ τὴν Γέννησιν τῶν ἐξῆς περιόδων μαθησόμεν· καὶ ἐπειδὴ εἰς ἐκείνην ἡ ἀρχὴ γέγονε τέλος ἡ αὐτὴ μόνον μετὰ τὸ μηδενικὸν σημεῖον, καὶ ἔτι εἰς τὰ μέρη τῆς ὅλας, ὅτε ἐτέθη τὸ μηδενικὸν σημεῖον, ὅλα ἐδεκαπλασιάσθησαν, ὡς 20, 30, 40 κτ. φανερόν καὶ τὸ τέλος αὐτῆς 10 θέλει δεκαπλασιασθῇ, ἐὰν ἔτι ἐν μηδενικὸν σημεῖον προσθῶμεν οὕτω 100:

ἄρα ὁ ἀριθμὸς 100 δεκαπλάσιος τοῦ	$+ 10$	δέκα
10, καὶ τοιαύτη ἡ φύσις τῶ ὄντι τῆς	$+ 20$	εἴκοσι
δευτέρας περιόδου, νὰ ληφθῇ τὸ ἔσχα-	$+ 30$	τριάντα
τον τῆς πρώτης ἀρχὴ τῆς δευτέρας,	$+ 40$	σαράντα
καὶ νὰ δεκαπλασιασθῇ, νὰ γένη τὸ ἔ-	$+ 50$	πενήντα
σχατον, ὅπερ ἑκατὸν ἐκφράζομεν. Τὰ	$+ 60$	ἑξήντα
μέρη λοιπὸν τῆς δευτέρας περιόδου ἀ-	$+ 70$	εἰβδομήντα
πὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τέλους ἐκφράζου-	$+ 80$	ὀγδοήντα
ται, καὶ λέγονται κατὰ τὸ ἐξῆς διὰ	$+ 90$	ἐννεμήντα
γράμμα· ἐὰν ὁμῶς καὶ αὐτὴν τὴν πε-	$+ 100$	ἑκατόν.

ρόδον παρατηρήσωμεν, εὐρίσκουμεν ὅλους ἐκεῖνους τοὺς νό-
 μους· δηλ. ὅτι γίνεται ἡ περίοδος καὶ καταφατική, καὶ
 ἀποφατική· καὶ τοῦτο σημαίνουσι τὰ δύο σημεῖα ὁμοῦ +·
 διὰ νὰ μὴ ματαιοπονῶμεν δύο περιόδους γράφοντες· τοῦτο
 πρέπει νὰ παρατηρηθῇ εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμούς, ὅπου γρά-
 φονται τὰ δύο σημεῖα + ὁμοῦ· διότι σημαίνουσιν, ὅτι ὁ
 αὐτὸς ἀριθμὸς δύναται καὶ καταφατικὸς καὶ ἀποφατικὸς νὰ
 ληφθῇ. Δεύτερον ἐκεῖνοι πάλιν οἱ χαρακτῆρες λαμβάνονται,
 ὅπου καὶ εἰς τὴν πρώτην ἐλάβομεν. Τρίτου ἡ ἀρχή, ἥτοι
 τὸ πρῶτον μέρος γίνεται ἔσχατον μὲ ἐν μηδενικὸν κατὰ
 τὴν φύσιν τοῦ περιόδου, δηλ. ὁ 10 ἔγινεν 100· διαφέ-
 ρει δὲ τῆς πρώτης, καθότι ἐκείνης τὰ μέλη ἠΰξανον κα-
 τὰ μονάδα, καὶ ἐλαττοῦντο· ταύτης δὲ κατὰ δεκάδα
 $10 + 10 = 20$ — $20 + 10 = 30$ · ἢ $30 - 10 = 20$. Τέ-
 τάρτον, εἰς τὸ ἔσχατον εὐρίσκονται δύο μηδενικά, διὰ νὰ γνωρί-
 ζηται ἡ δευτέρα περίοδος· ὅθεν καὶ οὕτως εἰς γράψωμεν
 10^2 πάλιν ἑκατὸν σημαίνει, ὅτι $10^2 = 100$. Διότι ὁ ἀ-
 ριθμὸς ὅσω τοῦ μηδενικοῦ σημαίνει νὰ ληφθῇ δις τὸ μη-
 δενικόν· καὶ καλοῦσιν οἱ τεχνικοὶ τὸν ἀριθμὸν, ὅπου γρά-
 φεται ἐπάνω τοῦ ἀριθμοῦ Ἐκθέτην, διὰ τὸ ὅποιον εἰς ἄλ-
 λο μέρος ἐροῦμεν περισσότερα. Ε. καθὼς εἰς τὴν πρώτην
 περίοδον ὁ δεύτερος τόπος ἀπὸ τὰ δεξιὰ εἰς τὰ ἀριστερὰ ἐ-
 σήμαινε τὰς δεκάδας, οὕτω εἰς τὴν δεύτερην περίοδον ὁ
 δεύτερος τόπος σημαίνει δεκάδας, εἰς τὸν τρίτον δ' ἑκατόν.
 Ἄρα ἕκαστος ἀριθμὸς μοναδικὸς εἰς μὲν τὸν δεύτερον τόπον
 δεκαπλασιάζεται, εἰς δὲ τὸν τρίτον ἑκατονταπλασιάζεται·
 διὸ καὶ τὰ 2 εἰς τὸν τρίτον τόπον οὕτω 200 δύο ἑκατον-
 τάδας σημαίνει, ἥτοι διακόσια· καὶ τὰ 3, οὕτω 300,
 τριακόσια· καὶ καθεξῆς 500, 600 κτ. Μαθόντες, λοιπὸν

ὅτι ὁ πρῶτος τόπος μονάδας ἀπλῶς σημαίνει, ὁ δεύτερος δεκάδας, καὶ ὁ τρίτος ἑκατοντάδας, εὐκόλως ἕκαστον γεγραμμένον ἀριθμὸν ἐν τρισὶ χαρακτῆρσιν ἐκφράζομεν: τὸν μὲν 252, ἐκφράζομεν διακόσια πενήντα δύο, τὸν δὲ 642 ἑξακόσια σαράντα δύο, κτ. εἰς ὅμως τόπος τις γραφῇ μὲν ἐν μηδενικὸν σημεῖον, ὁ τόπος ἐκεῖνος δὲν ἐκφράζεται, ὡς 405 τετρακόσια πέντε, 720 ἑπτακόσια εἴκοσι· διότι εἰς μὲν τὸν 405 κενὸς ὁ τόπος ἀπὸ δεκάδας, εἰς δὲ τὸν 720 κενὸς ὁ Πρῶτος ἀπὸ μονάδας· οὕτω καὶ εἰς τοὺς λοιπούς.

§. 20. Τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτυλίσσεται καὶ ἡ τρίτη περίοδος, εἰς τὴν μονάδα προσγραφῶσι τρία μηδενικά, οὕτω 1000, ἢ οὕτω 10^3 , καὶ ἡ μονὰς ἔχη τὸν τέταρτον τόπον. Ἄρα ὁ χαρακτήρ εἰς τὸν τέταρτον τόπον χιλιάδας σημαίνει· λοιπὸν 5000, σημαίνει πέντε χιλιάδας, 6000 ἕξ· 9000 ἐννέα κτ. καὶ οὕτως ἡ τρίτη περίοδος ἐκφράζεται κατὰ τὸ ἐξῆς διάγραμμα.

ὅπου ἡ ἀρχὴ 100 δεκαπλασία εἶναι εἰς	100	ἑκατὸν
τὸ τέλος αὐτῆς, 1000· καὶ ἡ ἀρχὴ αὐ-	200	διακόσια
τῆς μονὰς ἡ αὐτὴ εὐρίσκεται καὶ εἰς τὸ	300	τριακόσ.
τέλος, πλὴν τὸν τόπον μόνον μετέβα-	400	τετρακόσ.
λεν ἀπὸ τὸν τρίτον εἰς τὸν τέταρτον·	500	πεντακόσ.
καὶ ὡς ἐλέγομεν, ὁ μὲν πρῶτον τόπος	600	ἑξακόσια
μονάδας σημαίνει, ὁ δεύτερος δεκάδας,	700	ἑπτακόσια
ὁ τρίτος ἑκατοντάδας, καὶ ὁ τέταρτος	800	ὀκτακόσια
χιλιάδας· καὶ ἐκφράζομεν οὕτω τὸν	900	ἐννεακόσ.
μὲν 1523 χίλια πεντακόσια εἴκοσι τρία·	1000	χίλια.

τὸν δὲ 7341 ἑπτὰ χιλιάδες καὶ τριακόσια σαράντα πέντε· ὅπου δὲ ὁ τόπος ἔχει σημεῖον μηδενικὸν, ὁ τόπος ἐκεῖνος σιωπείται· ὡς 1230 χίλια διακόσια τριάντα· 2503 δύο χί-

λιάδες και πεντακόσια τρία· 4057 τέσσαρες χιλιάδες πε-
νήντα· επτά· 3008, τρεις χιλιάδες και ὀκτώ κτ.

§. 21. Ἡ δὲ τετάρτη περίοδος γίνεται, εἰς μετα-
τὴν μονάδα τέσσαρα μηδενικά γράψωμεν 10000, ἢ 10^4 .
καὶ καλεῖται μυριάς, ἢ δέκα χιλιάδες·

τὰ δὲ λοιπὰ κἀνταῦθα συμβαίνου-	1000	χίλια
σιν, ὡς εἰς τὰς πρώτας περιόδους.	2000	δύο χιλ:
Ἡ πέμπτη δὲ παρίσταται μὲ πέντε	3000	τρεις χιλ:
μηδενικά 100000, ἢ 10^5 , καὶ	4000	τέσσαρες χιλ:
ἐκφράζεται ἑκατὸν χιλιάδες. Ἡ δ'	5000	πέντε χιλ:
ἕκτη μὲ ἕξ μηδενικά 1000000,	6000	ἕξ χιλ:
ἢ 10^6 , καὶ ἐκφράζεται μιλλιόνιον.	7000	επτά χιλ:
Ἡ ἑβδόμη δὲ μὲ επτά, καὶ ἐκφρά-	8000	ὀκτώ χιλ:
ζεται 10000000· ἢ 10^7 δέκα	9000	ἐννέα χιλ:
μιλλιόνια ἢ ὀγδόη δὲ μὲ ὀκτώ	10000	δέκα χιλ:

100000000, ἢ 10^8 καὶ ἐκφράζεται ἑκατὸν μιλλιόνια. Ἡ
ἐννάτη μὲ ἐννέα μηδενικά 1000000000, ἢ 10^9 . καὶ ἐκ-
φράζεται χίλια μιλλιόνια. Ἡ δεκάτη μὲ δέκα 100000000000,
ἢ 10^{10} , καὶ ἐκφράζεται δέκα χιλιάδες μιλλιόνια· ἢ ἐνδε-
κάτη δὲ μὲ ἐνδεκα μηδενικά 1000000000000, ἢ 10^{11} .
καὶ ἐκφράζεται ἑκατὸν χιλιάδες μιλλιόνια· ἢ δὲ δωδεκάτη
μὲ δώδεκα μηδενικά οὕτω 10000000000000, ἢ 10^{12}
καὶ ἐκφράζεται διλλιόνιον. Καὶ οὕτως εἰς τὸν ἐν μηδενι-
κὸν προσθῶμεν, γίνεται ἑτέρα περίοδος ἀνωτέρα κατὰ τὸ
ἐξῆς διάγραμμα τῶν περιόδων.

„Ἀπὸ αὐτὸ λοιπὸν τὸ διάγραμμα μαθαίνομεν, ὅτι ἡ
„μονὰς αὐτὴ μεταβάλλει τοὺς τόπους, καὶ γίνεται ἡ ἑτέρα
„περίοδος· καθὼς ἡ μονὰς εἰς τὸν δευτέρου τόπον λέγε-
„ται δεκάς, ἥτοι δεκαπλασιάζεται, εἰς τὸν τρίτον ἑκατον-

ՆԱԽԱՐԱՀԱՅԻՄՈՒՆՔԵՐ

Εάν δε του τόπου της κοιτάδος προς τα ὄριστα ἐν
προσάγωμαι, γίνετα κοιτάς χαλκός επιχρυσωτός, ὅσας
χαλκὸς ἐπιχρυσωτός, καὶ κατασκευάζεται χαλκὸς ἐν

[illegible][illegible]

522 523 אמן 524 525 'אמא' 526 527 'אמא' 528 529 'אמא' 530 531 'אמא' 532 533 'אמא' 534 535 'אמא' 536 537 'אמא' 538 539 'אמא' 540 541 'אמא' 542 543 'אמא' 544 545 'אמא' 546 547 'אמא' 548 549 'אמא' 550 551 'אמא' 552 553 'אמא' 554 555 'אמא' 556 557 'אמא' 558 559 'אמא' 560 561 'אמא' 562 563 'אמא' 564 565 'אמא' 566 567 'אמא' 568 569 'אמא' 570 571 'אמא' 572 573 'אמא' 574 575 'אמא' 576 577 'אמא' 578 579 'אמא' 580 581 'אמא' 582 583 'אמא' 584 585 'אמא' 586 587 'אמא' 588 589 'אמא' 590 591 'אמא' 592 593 'אמא' 594 595 'אמא' 596 597 'אמא' 598 599 'אמא' 600 601 'אמא' 602 603 'אמא' 604 605 'אמא' 606 607 'אמא' 608 609 'אמא' 610 611 'אמא' 612 613 'אמא' 614 615 'אמא' 616 617 'אמא' 618 619 'אמא' 620 621 'אמא' 622 623 'אמא' 624 625 'אמא' 626 627 'אמא' 628 629 'אמא' 630 631 'אמא' 632 633 'אמא' 634 635 'אמא' 636 637 'אמא' 638 639 'אמא' 640 641 'אמא' 642 643 'אמא' 644 645 'אמא' 646 647 'אמא' 648 649 'אמא' 650 651 'אמא' 652 653 'אמא' 654 655 'אמא' 656 657 'אמא' 658 659 'אמא' 660 661 'אמא' 662 663 'אמא' 664 665 'אמא' 666 667 'אמא' 668 669 'אמא' 670 671 'אמא' 672 673 'אמא' 674 675 'אמא' 676 677 'אמא' 678 679 'אמא' 680 681 'אמא' 682 683 'אמא' 684 685 'אמא' 686 687 'אמא' 688 689 'אמא' 690 691 'אמא' 692 693 'אמא' 694 695 'אמא' 696 697 'אמא' 698 699 'אמא' 700 701 'אמא' 702 703 'אמא' 704 705 'אמא' 706 707 'אמא' 708 709 'אמא' 710 711 'אמא' 712 713 'אמא' 714 715 'אמא' 716 717 'אמא' 718 719 'אמא' 720 721 'אמא' 722 723 'אמא' 724 725 'אמא' 726 727 'אמא' 728 729 'אמא' 730 731 'אמא' 732 733 'אמא' 734 735 'אמא' 736 737 'אמא' 738 739 'אמא' 740 741 'אמא' 742 743 'אמא' 744 745 'אמא' 746 747 'אמא' 748 749 'אמא' 750 751 'אמא' 752 753 'אמא' 754 755 'אמא' 756 757 'אמא' 758 759 'אמא' 760 761 'אמא' 762 763 'אמא' 764 765 'אמא' 766 767 'אמא' 768 769 'אמא' 770 771 'אמא' 772 773 'אמא' 774 775 'אמא' 776 777 'אמא' 778 779 'אמא' 780 781 'אמא' 782 783 'אמא' 784 785 'אמא' 786 787 'אמא' 788 789 'אמא' 790 791 'אמא' 792 793 'אמא' 794 795 'אמא' 796 797 'אמא' 798 799 'אמא' 800 801 'אמא' 802 803 'אמא' 804 805 'אמא' 806 807 'אמא' 808 809 'אמא' 810 811 'אמא' 812 813 'אמא' 814 815 'אמא' 816 817 'אמא' 818 819 'אמא' 820 821 'אמא' 822 823 'אמא' 824 825 'אמא' 826 827 'אמא' 828 829 'אמא' 830 831 'אמא' 832 833 'אמא' 834 835 'אמא' 836 837 'אמא' 838 839 'אמא' 840 841 'אמא' 842 843 'אמא' 844 845 'אמא' 846 847 'אמא' 848 849 'אמא' 850 851 'אמא' 852 853 'אמא' 854 855 'אמא' 856 857 'אמא' 858 859 'אמא' 860 861 'אמא' 862 863 'אמא' 864 865 'אמא' 866 867 'אמא' 868 869 'אמא' 870 871 'אמא' 872 873 'אמא' 874 875 'אמא' 876 877 'אמא' 878 879 'אמא' 880 881 'אמא' 882 883 'אמא' 884 885 'אמא' 886 887 'אמא' 888 889 'אמא' 890 891 'אמא' 892 893 'אמא' 894 895 'אמא' 896 897 'אמא' 898 899 'אמא' 900 901 'אמא' 902 903 'אמא' 904 905 'אמא' 906 907 'אמא' 908 909 'אמא' 910 911 'אמא' 912 913 'אמא' 914 915 'אמא' 916 917 'אמא' 918 919 'אמא' 920 921 'אמא' 922 923 'אמא' 924 925 'אמא' 926 927 'אמא' 928 929 'אמא' 930 931 'אמא' 932 933 'אמא' 934 935 'אמא' 936 937 'אמא' 938 939 'אמא' 940 941 'אמא' 942 943 'אמא' 944 945 'אמא' 946 947 'אמא' 948 949 'אמא' 950 951 'אמא' 952 953 'אמא' 954 955 'אמא' 956 957 'אמא' 958 959 'אמא' 960 961 'אמא' 962 963 'אמא' 964 965 'אמא' 966 967 'אמא' 968 969 'אמא' 970 971 'אמא' 972 973 'אמא' 974 975 'אמא' 976 977 'אמא' 978 979 'אמא' 980 981 'אמא' 982 983 'אמא' 984 985 'אמא' 986 987 'אמא' 988 989 'אמא' 990 991 'אמא' 992 993 'אמא' 994 995 'אמא' 996 997 'אמא' 998 999 'אמא' 1000 1001 'אמא' 1002 1003 'אמא' 1004 1005 'אמא' 1006 1007 'אמא' 1008 1009 'אמא' 1010 1011 'אמא' 1012 1013 'אמא' 1014 1015 'אמא' 1016 1017 'אמא' 1018 1019 'אמא' 1020 1021 'אמא' 1022 1023 'אמא' 1024 1025 'אמא' 1026 1027 'אמא' 1028 1029 'אמא' 1030 1031 'אמא' 1032 1033 'אמא' 1034 1035 'אמא' 1036 1037 'אמא' 1038 1039 'אמא' 1040 1041 'אמא' 1042 1043 'אמא' 1044 1045 'אמא' 1046 1047 'אמא' 1048 1049 'אמא' 1050 1051 'אמא' 1052 1053 'אמא' 1054 1055 'אמא' 1056 1057 'אמא' 1058 1059 'אמא' 1060 1061 'אמא' 1062 1063 'אמא' 1064 1065 'אמא' 1066 1067 'אמא' 1068 1069 'אמא' 1070 1071 'אמא' 1072 1073 'אמא' 1074 1075 'אמא' 1076 1077 'אמא' 1078 1079 'אמא' 1080 1081 'אמא' 1082 1083 'אמא' 1084 1085 'אמא' 1086 1087 'אמא' 1088 1089 'אמא' 1090 1091 'אמא' 1092 1093 'אמא' 1094 1095 'אמא' 1096 1097 'אמא' 1098 1099 'אמא' 1100 1101 'אמא' 1102 1103 'אמא' 1104 1105 'אמא' 1106 1107 'אמא' 1108 1109 'אמא' 1110 1111 'אמא' 1112 1113 'אמא' 1114 1115 'אמא' 1116 1117 'אמא' 1118 1119 'אמא' 1120 1121 'אמא' 1122 1123 'אמא' 1124 1125 'אמא' 1126 1127 'אמא' 1128 1129 'אמא' 1130 1131 'אמ

ζεται ἡ μὲν πρώτη περίοδος μόνου μὲ τὸ μονάς, δεκάς, ἑκατοντάς· ἡ δευτέρα ὁμοῦ μὲ τὸ μονάς, δεκάς, ἑκατοντάς, ἐκφράζεται χιλιάς· ὡς μονάς χιλιάδος, δεκάς χιλιάδος κτ. ὅθεν ἡ δευτέρα περίοδος περιέχει τὰς χιλιάδας· ἡ δὲ τρίτη ἐκφράζει ὁμοῦ καὶ τὰ μυλλιόνια· καὶ ἡ τετάρτη τὰς χιλιάδας τῶν μυλλιούων· ἡ πέμπτη δὲ τὰ διλλιόνια, καὶ ἡ ἕκτη τὰς χιλιάδας τῶν διλλιούων· καὶ ἡ ἑβδόμη τὰ τριλλιόνια κτ. οὕτως

100, 000, 000, 000, 000, 000, 000 · καὶ οὕτω

εδμ εδμ εδμ εδμ εδμ εδμ εδμ

ἑριλ. χιλ. διλ. διλλ. χιλ. μιλ. μιλ. διλ.

γίνεται εὐκόλουν καὶ νὰ γνωρίζωμεν κόθῃ ἀριθμὸν, καὶ νὰ τὸν ἀπαγγέλωμεν, εἰς καλῶς νοήσωμεν τὴν τάξιν αὐτῶν τῶν περιόδων ἀπὸ τρεῖς τρεῖς χαρακτήρας· διότι ἡ μὲν α. περίοδος ἔχει μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἀπλᾶς· ἡ β. τὰς αὐτὰς μὲ χιλιάδας, ἡ γ. μὲ μυλλιόνια, ἡ τετάρτη μὲ χιλιάδας μυλλιόνια, ἡ πέμπτη μὲ διλλιόνια, ἡ ἕκτη μὲ χιλιάδας διλλιόνια κτ. καὶ οὕτως ἀπὸ τὸν ἕκτον τόπον ἄρχονται τὰ μυλλιόνια, καὶ μετὰ ἕξ τόπους πάλιν ἄρχονται τὰ διλλιόνια, καὶ μετὰ ἕξ· πάλιν τὰ τριλλιόνια κτ. καὶ λοιπὸν φθάνει μόνου νὰ ἡξεύρωμεν τοὺς ἕξ τόπους καλῶς, καὶ εὐρίσκομεν μυλλιόνια, διλλιόνια, τριλλιόνια κτ. ὅταν ἀπὸ ἕξ τοὺς τρεῖς μόνου μὲ μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας χαρακτηρίζομεν, τοὺς δὲ τρεῖς ἅμα μὲ τὰς χιλιάδας, δια τοῦτο καὶ πολλοὶ ἀπὸ ἕξ ἕξ τόπους διασέλλουσι οὕτω.

100, 000000, 000000· καὶ οἱ μὲν πρῶτοι ἕξ χαρακτήρες ἕως εἰς τὰς χιλιάδας καταντῶσι· οἱ δεῦτεροι ἕξ, εἰς τὰ μυλλιόνια, οἱ τρίτοι ἕξ, εἰς τὰ διλλιόνια, οἱ τέταρτοι ἕξ, εἰς τὰ τριλλιόνια κτ. Διὰ αὐτὴν λοιπὸν τὴν τάξιν καὶ

ἄλλα, ἡμεῖς δὲν ἀκολουθοῦμεν τοῖς Γάλλοις, οἱ ὅποιοι ἀλλέως ἐκλαμβάνουσι τὰ διλλιόνια, καὶ τριλλιόνια· διότι ἐκεῖνοι μετὰ τὴν πρώτην ἐξάδα πρὸς ἀριστερὰ προβαίνουσιν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας εἰς τὰ διλλιόνια, τριλλιόνια κτ. "Όταν λοιπὸν οὕτως ἀκριβῶς ἐννοήσωμεν ὅλα, ὅσα εἶπομεν, εὐκόλως τὰ ἐξῆς προβλήματα λύομεν.

§. 23. Πρόβλημα καλοῦσιν οἱ μαθηματικοὶ· ἐκεῖνην τὴν πρᾶξιν, ὅπου κάμνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἓνα ἄγνωστον πρᾶγμα, ὅταν μᾶς δοθῇ ἓν γνωστὸν· καὶ ὅταν τὸ ἄγνωστον εὕρωμεν, νὰ τὸ ἀποδείξωμεν ἐν τ' αὐτῷ ὅτι ἔτσι εἶναι· δηλ: μᾶς προβάλλουσι τρία καρπούζια ἀπὸ δύο παράδες, πόσους παράδες δώσομεν; αὐτοῦ λοιπὸν γνωστὰ εἶναι τὰ τρία καρπούζια, καὶ οἱ δύο παράδες εἰς τὸ κάθε ἓνα, ἄγνωστον πόσοι εἶναι οἱ παράδες, ὅπου πρέπει νὰ δώσωμεν. Ἐυρίσκομεν ὅτι θέλομεν δώσει δι' αὐτὰ ἕξ παράδες· καὶ εὐρέθη τὸ ἄγνωστον ἕξ. αὕτη ὅμως ἡ εὕρεσις λέγεται λύσις. Λεῖπεται ἔτι ἡ ἀπόδειξις διὰ τι ἕξ, καὶ ὄχι ἄλλος ἀριθμὸς· ἐπειδὴ λέγομεν δύο παράδες διὰ τὸ ἓν καρπούζι, καὶ δύο διὰ τὸ ἄλλο τέσσαρες, καὶ δύο διὰ τὸ τρίτον ὅλοι ἕξ γίνονται· λοιπὸν κάθε πρόβλημα ἔχει λύσιν, καὶ ἀποδείξιν· ἐν τοῖς ἐξῆς θέλομεν μάθῃ πολλὰ προβλήματα.

§. 24. Πρόβλημα α'.

„Κάθε γεγραμμένον ἀριθμὸν νὰ τὸν ἀπαγγέλλωμεν.

α'. Διαξέλλομεν αὐτὸν ἀπὸ τὰ δεξιά πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας (§. 22) καὶ εἰς τὰς ἐξάδας ἀνὰ ἕξ.

β'. Θεωροῦμεν, εἴαν εἰς τὴν πρώτην ἐξάδα τελειώσῃ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἢ εἶναι ἡ πρώτη τριάς, ἢ ἡ δευτέρα· εἰ μὲν ἡ πρώτη, μέχρι τῆς ἑκατοντάδος καταντᾷ (§. 21), ἀπαγγέλλεται ὁ μὲν πρῶτος τόπος μονάδες, ὁ δευτερος δεκάδες,

^{· δ μ} ὁ τρίτος ἑκατοντάδες· ὡς ^{· δ μ} 356 τριακόσια πενήντα ἕξ. ἢ 405 ^{· δ μ} τετρακόσια πέντε. ὅτι ὁ τόπος τῶν δεκάδων ἴσος μηδενί. Ἐὐὶ δὲ καὶ ἡ δευτέρα τριάς ὁμοῦ, ἐν αὐτῇ ἡ χιλιάς εὐρίσκειται, ἡ μοναδική, ἡ δεκαδική, ἡ ἑκατονταδική· ὡς

χ

^{· δ μ} ^{· δ μ}

356 450. τριακόσιαι πενήντα ἕξ χιλιάδες ^{· δ μ} τετρακόσια πενήντα· ἐπεὶ δὲ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τελειώνει εἰς τὸ ἑκατοντάδες χιλιάδος, ἄρα τρεῖς ἑκατοντάδες χιλιάδος· ὁ δὲ δεύτερος ἔχει δεκάδας χιλιάδος, ἄρα καὶ πενήντα χιλιάδες, ὁ τρίτος δὲ μονάδες χιλιάδος, ἄρα καὶ 6 χιλιάδες, κτ. Ἐὐὶ δὲ ἡ τοῦτο τὸ παράδειγμα

χ

^{· δ μ} ^{· δ μ}

53 148 καὶ ὁ ἔσχατος τελειώνει εἰς τὸ δεκάς χιλιάδος, ἀρχόμεθα ἀπὸ τὰς πενήντα χιλιάδας καὶ καθ' ἑξῆς οὕτω. πενήντα τρεῖς χιλιάδες καὶ ἑκατὸν σαράντα ὀκτώ· ὁ τόπος

χ

^{· δ μ} ^{· δ μ}

ὁμοῦ ὅπου ἔχει μηδενικά δὲν ἐκφράζεται, ὡς 300, 203. τριακόσιαι χιλιάδες, καὶ διακόσια τρία· ὅτι μόνου ὁ τόπος τῆς ἑκατοντάδος χιλιάδος, καὶ τῆς ἑκατοντάδος, καὶ τῆς μονάδος εὐρίσκειται, καὶ οὕτως ἐκφράζεται ἡ πρώτη ἐξὰς. Ἐὐὶ ὁμοῦ εἶναι καὶ ἡ δευτέρα ἐξὰς, εἰς αὐτὴν ἐκφράζονται τὰ μιλλιόνια, καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην τριάδα αὐτῆς ἀπλῶς μιλλιόνια, εἰς δὲ τὴν δευτέραν χιλιάδες μιλλιόνια·

μιλ:

χ

^{· δ μ} ^{· δ μ} ^{· δ μ}

καὶ εἰς τὴν πρώτην οὕτω. 563, 256, 712, ἐπεὶ δὲ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς ἔχει ἑκατοντάδα μιλλιουνίου, ἀρχόμεθα, πεντακόσια ἑξήντα τρία μιλλιόνια, καὶ διακόσιαι πενήντα ἕξ χιλιάδες, καὶ ἑπτακόσια δώδεκα· εἰς δὲ τὴν δευτέραν οὕτω.

$\chi: \mu\lambda \quad \mu\lambda \quad \chi$
 $\begin{array}{cccc} \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu \end{array}$
 256, 321, 567, 123, διακόσιαι πενήντα ἕξ χιλιάδες
 μιλίονια, καὶ τριακόσια εἴκοσι ἕν μιλλιόνιον, καὶ πεντα-
 κόσιαι ἑξήντα ἑπτὰ χιλιάδες, καὶ 123. εἰς δὲ τὴν τρίτην
 ἑξάδα εὐρίσκονται τὰ διλλιόνια, πλὴν εἰς μὲν τὴν πρώτην
 τριάδα ἀπλῶς διλλιόνια, εἰς τὴν δευτέραν χιλιάδες διλλιό-
 νια, ὡς ἔχουσι τὰ παραδείγματα.

$\text{διλ.} \quad \chi: \mu: \quad \mu\lambda: \quad \chi$
 $\begin{array}{cccccc} \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu \end{array}$
 532, 613, 512, 789, 123.

$\chi: \text{διλ.} \quad \chi: \text{διλ.} \quad \chi: \mu. \quad \mu \quad \chi$
 $\begin{array}{cccccc} \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu & \circ\delta\mu \end{array}$
 καὶ 231, 789, 235, 156, 765, 431.

καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἀπαγγέλλεται 532 διλλιόνια, καὶ ἑξα-
 κόσιαι δεκατρεῖς χιλ: καὶ 512 μιλλιόνια καὶ 789 χιλιάδες,
 καὶ 123· τὸ δεύτερον ἀπαγγέλλεται 231 χιλιάδες καὶ 789
 διλλιόνια, καὶ 235 χιλιάδες καὶ 156 μιλλιόνια καὶ 765
 χιλιάδες καὶ 431. φανερὸν ὅρα, ὅτι πάντοτε ἀπὸ τρεῖς τρεῖς
 χαρακτῆρες ἀπαγγέλλονται, καθὼς οἱ πρῶτοι, πλὴν εἰς τὰς
 ἑξῆς τριάδας προσθέτομεν καὶ τὰ λοιπὰ, χιλιάδες μιλλιόνια
 κτ. καθὼς ὁ τόπος τῆς τριάδος ἀπαιτεῖ. Ἐξω ἔτι ὁ ἀριθ-
 μὸς 3781043. καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ τὸν ἐκφράσωμεν. Πρῶ-
 του βλέπομεν, ὅτι ὁ ἔσχατος πρὸς τὰ ἀριστερὰ χαρακτῆρ
 3 εὐρίσκεται εἰς τὴν δευτέραν ἑξάδα, ὅρα εἰς τὰ μιλλιόνια
 (§. 21.) ἔτι αὐτὸς εἶναι μόνος καὶ πρῶτος τῆς ἑξάδος, ἄ-
 ρα μονὰς μιλλιουνίου· λοιπὸν λέγομεν τρία μιλλιόνια καὶ
 781 χιλ: καὶ σαράντα τρία· ὅτι ἡ ἑκατοντὰς ἔχει μηδενι-
 κόν. Δεδόσθω οὗτος 45398520451. καὶ ζητεῖ-
 ται νὰ ἐκφράσωμεν· βλέπομεν καὶ αὐτοῦ ὁ ἔσχατος χα-

ρακτῆρ 4 εἶναι εἰς τὴν δευτέραν ἐξάδα, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν δευτέραν τριάδα αὐτῆς τῆς ἐξάδος ὅπου περιστάνει τὰς χιλ: τῶν μυλλιουνίων καὶ σχεδὸν εἰς τὸν τόπον τῆς δεκάδος, ἄρα 45 χιλ: καὶ 398 μυλλ: καὶ 520 χιλιάδες καὶ 451. εἰς αὐτὰς τὰς ἀρχὰς πρέπει ὁ μαθητὴς νὰ γυμνασθῇ πολλὰ καλὰ, εἰὰν θέλῃ νὰ προχωρήσῃ χωρὶς κόπου εἰς τὰ ὑψηλότερα.

§. 25. Πρόβλημα β'.

Νὰ γράψωμεν ὅ,τι ἀριθμὸν μᾶς ἐκφράσωσιν* (λύσις)

α'. Ἀπὸ ὅλου τὸν ἀριθμὸν, ὅπου μᾶς προβάλλουσι, πρέπει πρῶτον εἰς τὸν πρῶτον χαρακτῆρα νὰ προσέξωμεν. (§. 24).

β'. Εἰς ποίαν ἐξάδα ἀνήκει αὐτὸς ὁ πρῶτος;

γ'. Εἰς ποίαν τριάδα αὐτῆς τῆς ἐξάδος.

δ'. Εἰς ποῖον τόπον αὐτῆς τῆς τριάδος, διὰ νὰ διωρίσωμεν τὸν πρῶτον τόπον ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ εἰς τὰ δεξιὰ.

ε'. Ἐπειτα νὰ καταγράψωμεν καὶ τοὺς λοιποὺς τόπους, καθὼς ἐκεῖνος ἐκφράζει· δηλ. τρεῖς, τρεῖς καθὼς καὶ ἡ ἐκφρασις τοῦ καί, ὅστις εἰς τρεῖς χωρίζει τοὺς ἀριθμοὺς· ὅπου δὲ αὐτὸς εἰς τὸ μεταξὺ τόπον δὲν ἐκφέρει, πρέπει μὲ τὸ μηδενικὸν σημεῖον νὰ τὸν σημειώσωμεν· καὶ οὕτω γράφομεν κάθε ἀριθμὸν. Δεδόσθω ὅτι μᾶς λέγει τις νὰ γράψωμεν ἑπτακόσια πενήντα τρία· εὐθὺς νοοῦμεν ὅτι εἶναι εἰς τὴν πρώτην ἐξάδα, καὶ εἰς τὴν πρώτην τριάδα αὐτῆς τῆς ἐξάδος· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἑπτακόσια ἑκατοντὰς, τὰ πενήντα δεκάς, καὶ τὰ τρία μονάς, γράφομεν 753. Ἐὰν δὲ εἴπῃ ἑπτακόσια τρία, ἑλλείπει ὁ τόπος τῶν δεκάδων, καὶ γρόφομεν αὐτὸν μὲ μηδενικὸν σημεῖον, οὕτω. 703. Μᾶς λέγει ἄλλος ἑβδομήντα χιλιάδες καὶ τριακόσια δύο· ὁ πρῶτος ἀ-

ριθμός, σαχαζόμεθα, ἀνήκει εἰς τὴν δευτέραν τριάδα τῆς
 πρώτης ἐξάδος· καὶ ἔτι εἰς τὸν δεύτερον τρόπον αὐτῆς διὰ
 τὰς δεκάδας· ἄρα θέτομεν 7. καὶ ἐπειδὴ αὐτοῦ τρόπου τῆς
 μονάδος χιλιάδος δὲν εἶπε, θέτομεν μηδενικόν, οὕτω 70.
 καὶ ἔτι τριακόσια δύο, οὕτω 70302. Ἐὰν δὲ εἴπῃ ὀκτακό-
 σιαι ἐννευήκοντα χιλιάδες καὶ πεντακόσια σαράντα ἑπτὰ,
 νοοῦμεν ὅτι ἀρχεται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ὀκτακόσια ἀπὸ τὸν
 ἔσχατον τρόπον τῆς δευτέρας τριάδος τῆς πρώτης ἐξάδος,
 οὕτω 890. εἰ δὲ καὶ τὴν δευτέραν τριάδα θῶμεν 547,
 γίνεται ἐν τελῆς 890547. εἰ δὲ εἴπῃ ὀκτὼ μιλλιόνια καὶ
 ἐξακόσiai εἴκοσι δύο χιλιάδες καὶ ὀκτὼ· αὐτοῦ τρεῖς τριά-
 δας νοοῦμεν· ἡ πρώτη ἔχει μόνον μονάδας, δεκάδας καὶ
 ἑκατοντόδας, ἦτοι 622. ἡ δὲ τρίτη μόνον μονάδας, αἱ
 δὲ λοιπαὶ δὲν ἐκφράσθησαν, ὅθεν καὶ μὲ μηδενικά πληροῦ-
 μεν ἐκείνους τοὺς τρόπους, οὕτω 008. εἰ δὲ λοιπὸν ὅλας τὰς
 τριάδας κατὰ σειρὰν θῶμεν, οὕτω 8622008, ἐγράψαμεν
 ἐκεῖνο, ὅπου μὲς εἶπεν· εἰ δὲ εἴπῃ ὀγδοῆντα ἐννέα διλλιό-
 νια, καὶ ἑπτακόσiai χιλιάδες μιλλιόνια, καὶ ἑκατὸν σαράν-
 τα χιλ· καὶ πεντακόσια σαράντα ὀκτὼ, βλέπομεν ὅτι εἶναι
 πέντε τριάδες, διότι ὁ καὶ, χωρίζει τὰς τριάδας· ἄρα ὀγ-
 δοῆντα ἐννέα διλλιόνια μία τριάς, καὶ γράφεται 89. καὶ
 ἑπτακόσiai χιλιάδες μιλλ· δύο τριάδες, καὶ γράφεται 700,
 ὅτι ἡ δεκάς καὶ ἡ μονὰς λείπει· καὶ τριαντατέσσαρα μιλλ·
 τρεῖς τριάδες, καὶ γράφεται 034, ὅτι ἡ ἑκατοντὰς λεί-
 πει· καὶ ἑκατὸν σαράντα χιλ. τέσσαρες τριάδες, καὶ γρά-
 φεται 140, ἦτοι ἡ μονὰς λείπει· καὶ πεντακόσια σαράντα
 ὀκτὼ, πέντε τριάδες, καὶ γράφεται 548· εἰ δὲ ὅλας τὰς
 τριάδας κατὰ σειρὰν θῶμεν, οὕτω 89, 700, 034, 140, 548
 ἐγράφη ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Πρέπει λοιπὸν νὰ προ-

σείχη ὁ πρωτόπειρος, πρῶτον πόσαι εἶναι ἡ τριάδες, καὶ ἔπειτα νὰ τὸς γράφῃ κατὰ μέρος, καὶ τέλος νὰ τὸς κατα-
 ερῶνῃ κατὰ σειράν. Σιωπῶ, ὅτι ἡ γύμνασις εἰς αὐτὰ πο-
 λὺ ὀξύνει τὸν νοῦν τοῦ μαθητοῦ καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα. Ἀπο-
 ρῶ πῶς τοῦτο τὸ εἶδος ἀμελεῖται εἰς τὰς ἐκδεδομένας ἀ-
 ριθμητικὰς· καὶ πολλοὶ δὲ τοιοῦτοι γενόμενοι συγγραφεῖς,
 ἀμελοῦσι μὲν τὰ στοιχειώδη καὶ ἀρχικὰ, παρενεύρουσιν ἑ-
 τέρα περιττὰ, καὶ γίνονται σκοτεινοὶ εἰς τοὺς ἀναγνώσκοντας.

§. 26. Ἦδη ἐμάθομεν καὶ πῶς ἐκφράζεται ὁ ἀριθ-
 μὸς (§. 24.), καὶ πῶς γράφεται (§. 25.). Ἐμάθομεν ἐπὶ
 τούτοις, καὶ ὅτι ἕκαστος τύπος πρὸς τὰ ἀριστερὰ δεκαπλό-
 σιος γίνεται τοῦ ἐγγύς τόπου πρὸς τὰ δεξιὰ (§. 18.). εἰαν
 δὲ τοῦτο τὸ ἰδίωμα καλῶς ἐξετάσωμεν, εὐρίσκομεν τὰ ἐ-
 ξῆς, ὅπου εἰς τὰ ἀκόλουθα ἡμᾶς ὠφελήσει τὰ μέγιστα. Ἐ-
 σω ὁ ἀριθμὸς 56345, εἰς τὸν πρῶτον τρόπον εὐρίσκομεν
 τὸν χαρακτήρα 5, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη εἶναι ἀπλῶς μονά-
 δες· εὐρίσκομεν δὲ καὶ εἰς τὸν δεύτερον τρόπον τοῦ χαρακ-
 τήρα 4, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη εἶναι δεκάδες (§. 18.). Ἄρα
 ἐν μέρος τοῦ 4 εἰς τὸν β'. τρόπον εἶναι δεκαπλάσιον ἀπὸ τὸ
 ἐν μέρος τοῦ 5 τοῦ πρώτου τόπου· ἦτοι δέκα μέρη τοῦ
 πρώτου τόπου κάμνουσιν ἐν μέρος τοῦ δευτέρου τόπου, ὅ-
 τι δέκα μονάδες μίαν δεκάδα ἀποτελοῦσιν· ἐτι δέκα μέρη
 τοῦ δευτέρου τόπου κάμνουσιν ἐν μέρος τοῦ γ'. τόπου, ἦ-
 τοι δέκα δεκάδες ἀποτελοῦσι μίαν ἑκατοντάδα· καὶ ἑκατὸν
 μέρη τοῦ γ'. τόπου· ἐτι δέκα μέρη τοῦ γ'. τόπου, κάμνου-
 σιν ἐν μέρος τοῦ δ', ὅτι δέκα ἑκατοντάδες ποιοῦσι μίαν χι-
 λιάδα· καὶ ἑκατὸν μέρη τοῦ β', ποιοῦσι μίαν μονάδα τοῦ
 τετάρτου, ὅτι ἑκατὸν δεκάδες κάμνουσι μίαν χιλιάδα· καὶ
 χίλια μέρη τοῦ πρώτου τόπου, ποιοῦσι μίαν τοῦ δ', ὅτι χί-

λαι μονάδες, μίαν χιλιάδα κάμνουσιν· ὅθεν πάντοτε ὁ ἐγγὺς ἐπόμενος τόπος πρὸς τὰ ἄρισερά, εἶναι δεκαπλάσιος ἀπὸ τοῦ ἐγγὺς ἡγουμένου πρὸς τὰ δεξιά. Ἄι δὲ μονάδες ἐκείνων τῶν τόπων, λέγονται μονάδες ἀνωτέρας τάξεως, αἱ δὲ μονάδες τούτων, μονάδες κατωτέρας τάξεως. Καὶ μέχρι τοῦδε ἄρκετὴ ἡ θεωρία τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος· τὰ λοιπὰ ὅμως εἰς τὸν ὁρμόδιον τόπον πάλιν ἀναπολήσομεν.

§. 27. Καλοῦμεν τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ ἔχει μόνον μίαν μονάδα μὲ μηδενικά σημεῖα, Περιδικὸν ἀριθμὸν, ὡς τὸν 10, 100, 10000 κτ. ἐκεῖνον δὲ, ὁποῦ δὲν ἔχει μονάδα, ἀλλ' ἕτερου χαρακτῆρα, καὶ εἰς τὸ τέλος μηδενικὸν σημεῖον ἀριθρικὸν, ὡς 50, 200, 350, 1600 κτ. ποῦ χρησιμεύει αὐτὴ ἡ διάκρισις εἰς τὸ ἐξῆς μαυθάνομεν.

§. 28. Ἐκαστος ἀριθμὸς ἢ Ἄρτιος εἶναι, ἢ Περιττός. Ἄρτιον λέγουσι τὸν ζυγὸν ἀριθμὸν, ἢ ἐκεῖνον, ὁποῦ γίνε-
ται ζευγάρια, (σδιχα διαιρούμενος)· ὡς ὁ 2, 4, 6, 8, 10, καὶ κάθε ἄλλον ἀριθμὸν, ὁποῦ ἔχει εἰς τὸ τέλος, ἢ μηδενικὸν σημεῖον, ἢ ἕνα τῶν 2, 4, 6, 8. Περιττὸν δὲ λέγουσι τὸν μόνον, ἢ τοι ἐκεῖνον, ὁποῦ εἰς δύο δὲν κόπτεται, ὡς 3, 5, 7, 9 κτ.

§. 29. Εἴπομεν (§. 8.) ὁνωτέρω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς καθόλου ὦν μερικεύεται, καὶ ἐκφράζεται ὑπὸ τοὺς ὁνωτέρω χαρακτῆρας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος (§. 18.). ἄρα δὲν χαρακτηρίζεται καὶ ὅλα καθόλου μὲ χαρακτῆρας τινάς; τοῦτον τῇ ἀληθείᾳ χαρακτηρίζουσι μὲ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου α, β, γ, κτ. καὶ οὗτοι αἱ χαρακτῆρες ὅλοι εἶναι καθόλου, καὶ γενικοὶ κατὰ τὴν φύσιν τοῦ καθόλου ἀριθμοῦ· διότι εἰς ἓν γράμμα ὁποῦνδήποτε, εἰς τὸ α δηλ. ἢ β, ἢ γ, ἢ δ, ἢ ε, νοοῦμεν ὅ, τι ἀριθμὸν θέλωμεν, καὶ τε μικρὸν,

καὶ τε ἀποφατικόν, καὶ τε καταφατικόν· λοιπὸν ἡ ἐπισήμη, ὅπου καταγίνεται μετὰ αὐτοὺς τοὺς χαρακτῆρας καλεῖται "Αλγεβρα" καὶ ἐκείνη, ὅπου καταγίνεται μετὰ τοὺς ἀραβικοὺς χαρακτῆρας καλεῖται Ἀριθμητική· ἐκείνη μὲν κάμνει τὰς μεθόδους μετὰ τοὺς χαρακτῆρας τοὺς μερικοὺς, διότι εἰς αὐτὴν ὅσα γραφῇ τὸν χαρακτῆρα 5, δὲν ἡμπορεῖ νὰ νοήσῃ ἐκτὸς τοῦ πέντε ἕτερον ἀριθμὸν, ἐκείνη δὲ, εἰς αὐτὴν γραφῇ 6 ἐννοεῖ εἰς τὸν 6 χαρακτῆρα, ὅτι ἀριθμὸν 6 εἶναι· εἰς ὅμως ὅσα τὸν 6 διορίσωμεν, νὰ σημαίνῃ ἕνα ἀριθμὸν, τότε μερικεύεται ὁ 6, καὶ δὲν σημαίνει, ἐκτὸς τοῦ ἀριθμοῦ, κανένα ἄλλον ἀριθμὸν· ὅθεν καὶ λέγουσιν, ὅταν διορίσωμεν ἕνα γενικὸν χαρακτῆρα, πρέπει νὰ μένωμεν εἰς αὐτὸν τὸν διορισμόν· λοιπὸν ἡ "Αλγεβρα" δὲν εἶναι ἄλλο, εἰμὴ καθόλου Ἀριθμητική, καὶ διὰ τοῦτο ἡμεῖς τὴν Ἀριθμητικὴν, καὶ Ἀλγεβραν ὁμοῦ, καὶ ὅχι χωριστὰ πραγματευόμεθα, διὰ νὰ μὴ φοβῶνται οἱ μαθηταί μας ἀκούοντες Ἀλγεβραν, καὶ νομίζωσιν ἕτερον μάθημα εἶναι ἀπὸ τῆς Ἀριθμητικῆς· καὶ μάλιστα ἡ πεῖρα δείξει, ὅτι αὕτη ἡ μέθοδος εὐκολύνει τοὺς μαθητὰς εἰς πολλὰ σκοτεῖνα τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς.

§. 30, Τριχῶς λοιπὸν ἐκλαμβάνεται ὁ ἀριθμὸς, ἡ συγκεκριμένος (§. 13.) ἡ ἀφηρημένος, ἡ καθόλου (§. 29.). Καὶ ὁ συγκεκριμένος εἶναι ὁ μερικώτατος, καὶ πλέον διωρισμένος, ὡς 5 ἄνθρωποι, τρεῖς γροσ: κτ. καθ' ὃ, ἐκτὸς μόνον τῶν 5 ἀνθρώπων καὶ τριῶν γροσίων οὐδὲν ἕτερον ἐννοεῖται. Ὁ δ' ἀφηρημένος εἶναι μᾶλλον ἀόριστος, καὶ ἀδιορίστος, ὡς ὅταν λέγωμεν ἀπλῶς 5, εἰς τὸ ὅποιον νοοῦμεν ὅτι θελομεν ἢ 5 ἀνθρώπους, ἢ 5 γρό: ἢ πέντε ἔπους κτ. πλὴν διορίζεται μόνον κατὰ τὰ παρὸν 5, καὶ

πλέον τῶν πέντε δὲν δέχεται ἕτερον. Ὁ δὲ γενικὸς, καὶ ἀλγεβραϊκὸς περιλαμβάνει ὅλα, ὅσα καὶ ἂν ᾖναι ἢ ὑπὸ τὸ ποσόν, ἢ ὑπὸ τὸ πρῶτον· κατὰ τοῦτο μόνον οὗτος διορίζεται, καθὼς, ὅταν ληφθῇ εἰς χαρακτήρ ὁ α, καὶ ὁ β, εἰς τὸν α, ἢ εἰς τὸν β δὲν λαμβάνομεν ἅμα καὶ τὸν γ, ἢ ἄλλων· διότι ἀόριστος, καὶ ὁ α, καὶ ὁ β, καὶ ὁ γ κτ. πλὴν πάντῃ ἕτερος ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλον· ὅθεν, ὅπου εὐρίσκονται δύο ἢ πολλὰ ζοιχεῖα τοῦ ἀλφαβήτου, ἄλλην ποσότητα εὐνοοῦμεν εἰς τὸ ἕνα, καὶ ἄλλην εἰς τὸ ἕτερον κτ. Διὸ ἔπεται καθὲ ἀριθμὸς, καὶ καθὲ χαρακτήρ ἢ μερικὸς, ὡς 5, 6 κτ. ἢ καθόλου, ὡς α, β, γ κτ. εἶναι αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν ἀμετάβλητος, καὶ διὰ τοῦτο ἔπεται ἐκεῖνο τὸ ἀξίωμα. „Τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, ἢ ἀριθμὸς, εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἑαυτὸν του. ὡς $8=8$ καὶ $a=a$ καὶ $3=3$ κτ.

§. 31. Ἐὰν ἕνα πρᾶγμα πρὸς ἄλλο παρατηρήσωμεν, καὶ κρίνωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἢ μεγαλύτερον ἀπὸ ἐκεῖνο, ἢ μικρότερον, ἢ ἴσον, ἢ ὅμοιον κτ. τότε αὕτη ἡ ἐργασία τοῦ νοῦς καλεῖται Παραβολή, ἢ Σύγκρισις· οὕτω παραβαλλόμεν πρῶτον τὸν 5 πρὸς τὸν 8, εἴτα κρίνωμεν ὅτι ὁ 5 μικρότερος ἀπὸ τὸν 8. ὅθεν ἡ παραβολὴ καὶ ἡ σύγκρισις πάντοτε τοῦλάχιστον εἰς δύο ἵνα γίνεταί· καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἡ ἐνέργεια τοῦ νοῦς περατοῦται ἀπὸ τούτων τῶν πραγμάτων, ταῦτα πέρατα, καὶ ὅροι τῆς παραβολῆς λέγονται. Ἐπειδὴ δὲ καὶ εἰς τὰς ποσότητας ἡ παραβολὴ ἐμφιλοχωρεῖ πάντοτε, διὰ τοῦτο καὶ καθὲ ἀριθμὸς ποσότης (§. 4.), καὶ ὅρος λέγεται.

§. 32. Ἡ παραβολή, ὅπου γίνεται εἰς τὸ ποσόν, γίνεταί ἢ κατὰ μείζον καὶ ἑλάττω, ἢ κατὰ τὸ ἀπλοῦν, καὶ πολλαπλοῦν, ἢ κατὰ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον, ἢ κατὰ τὸ

ἀποφατικόν, καὶ καταφατικόν· ὅθεν τὰ πράγματα, ἢ αἱ ποσότητες, ὅπου δέχονται τὴν παραβολὴν, καλοῦνται ὁμογενεῖς, ἢ ὁμοειδεῖς. Καὶ ὁμογενεῖς μὲν ποσότητες εἶναι ἐκεῖναι, ὧν τὰ ιδιώματα ταῦτά· ὡς 5 ὄργυιαι, πρὸς 10 ὄργυιαι· 10 γρόσια πρὸς 100 γροί· κτ. Ἐκεῖναι δὲ, ὅπου δὲν δέχονται αὐτὴν τὴν παραβολὴν, καλοῦνται ἑτερογενεῖς, ἢ ἀνομοιοειδεῖς· τοιαῦται εἶναι ἐκεῖναι αἱ ποσότητες, ὧν καὶ ἡ φύσις καὶ αἱ διαφοραὶ καὶ τὰ ιδιώματα διάφορα, ὡς ὁκάδες πρὸς πῆχες κτ. διότι ποτὲ δὲν παραβάλλομεν γὰρ ἰδῶμεν, ἂν ἡ ὁκά εἶναι μεγαλητέρα, ἢ μικροτέρα ἀπὸ τὴν πῆχην, ἢ πόσαι ὁκάδες εἶναι ὁ δρόμος ἀπὸ τοῦ οἴκου μου ἕως εἰς τὴν ἀγοράν. Ὅθεν λέγουσιν, ὁμογενεῖς μὲν ποσότητες εἶναι ἐκεῖναι, ὅπου ἔχουσιν ἓνα κοινὸν ὄνομα καὶ τὴν αὐτὴν φύσιν, ὡς 5 ἄνθρωποι, καὶ 8 ἄνθρωποι· 7 ἑκάδες, καὶ 19 ὁκάδες. Ἐτερογενεῖς δὲ, ὅσαι ἔχουσιν ἕτερον ὄνομα καὶ ἕτερα φύσιν, ὡς 5 ἄνθρωποι, καὶ 10 βιβλίοι. Κυρίως ὁμογενεῖς ἀριθμοὺς λέγομεν ἐκείνους, ὅπου ὁμοῦ συνάπτονται εἰς ἓν, ὡς 5 ἄνθρωποι καὶ ἔτι 3 γίνονται 8. 10 ἵπποι καὶ ἔτι 4 γίνονται 14. Ἐτερογενεῖς δὲ ἐκείνους, ὅπου δὲν συνάπτονται, ὡς 5 κόλλαις καὶ 6 κουνύλια δὲν γίνονται ἑνδεκα, οὔτε 7 σκαμνία καὶ 8 βιβλία γίνονται 15· ὅτι τὰ 15 οὔτε σκαμνία, οὔτε βιβλία λέγονται· ὅθεν οἱ ἑτερογενεῖς ἀριθμοὶ δὲν συνάπτονται οὔτε μὲ τὸ σημεῖον =, οὔτε μὲ τὸ >, οὔτε μὲ τὸ +, οὔτε μὲ τὸ —. Σημειῶσαι ὅμως, ὅτι τὸ ὁμογενεῖς καὶ ἑτερογενεῖς μόνον εἰς τοὺς συγκακριμένους ἀριθμοὺς συμβαίνει.

§. 33. Εἶναι δὲ πολαὶ ποσότητες, ὅπου ἔχουσιν ἕτερον ὄνομα, πλὴν δέχονται τὰ σημεῖα = καὶ < καὶ + καὶ —.

ὡς γρόσιον καὶ παράδες· διότι παράδες $40 = 1$ γρόσιον· καὶ παράδες $15 < 1$ γρόσιον· παράδες $50 > 1$ γρο· καὶ γρόσια $5 + 7$ παράδες. — 2 παράδες. Αἱ ποσότητες λοιπὸν, ὅπου ἔχουσιν ἕτερον ὄνομα, καὶ λαμβάνουσιν, ἥτοι συνάπτονται μὲ τὰ σημεῖα $=$, καὶ $>$, καὶ $+$, καὶ $-$, πρέπει νὰ ᾔναι ὁ ἓνας μέρος, καὶ ὁ ἕτερος ὅλον, ὡς οἱ παράδες μέρη τοῦ γροσίου.

§. 34. Ὅλον λέγομεν μίαν ποσόσητα, ὅπου ἔχει μέρη, ἢ ὅπου δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη, ὡς ἡ ὁκτὼ ἔχει μέρη λίτρας, δράμια κτ. μέρος δὲ, ὅταν ἐπαναληφθῇ πολλάκις, ἀποτελεῖ τὸ ὅλον, ὡς ἡ μονάς, εἰς δέκα φοραῖς ληφθῇ, γίνεται ὁ δέκα ἀριθμός, ἢ τὸ ρούπι· εἰς τέσσαρες φοραῖς ληφθῇ, γίνεται τὸ γρόσι· πρὸς τὸ ρούπι ὅλον λέγεται, τὸ δὲ ρούπι πρὸς τὸ γρόσι μέρος· ὅθεν τὸ μέρος πρὸς τὸ ὅλον λέγεται μέρος, καὶ ὅλον πρὸς τὰ μέρη, καὶ κατ' αὐτὸ τὸ νόημα ἐν καὶ τὸ αὐτὸ λέγεται μέρος, πρὸς ἄλλο δὲ ὅλον· ὡς τὸ γρόσι πρὸς μὲν τὸ ἑκατοσάρι λέγεται μέρος, πρὸς δὲ τὸ ρούπι λέγεται ὅλον· Ἰδίωμα δὲ κύριον καὶ καθ' αὐτὸ τοῦ ὅλου καὶ τοῦ μέρους εἶναι τὸ νὰ ᾔναι ἑκείνο μὲν μεῖζον, τοῦτο δὲ ἔλαττον· καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐξέρχονται τὰ ἐξῆς ἀξιώματα.

α'. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μετὰ ἰδιάτου μέρη, ὡς $8 = 3 + 5$, ἢ ἐν γρόσι $= 4$ ρούπια.

β'. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλῆτερον ἀπὸ τὸ μέρος ὁποῖον· δῆποτε· ἐπειδὴ $10 = 3 + 7$. ἄρα τὸ $10 > 3$, καὶ $10 > 7$. ὅτι καὶ τὸ γρόσι μεγαλῆτερον ἀπὸ τὸ ρούπι.

γ'. Τὸ μέρος ἔλαττον ἀπὸ τὸ ὅλον, ὡς $3 < 10$, καὶ $7 < 10$. καὶ ἔτι τὸ ρούπι ἔλαττον τοῦ γροσίου.

δ'. Τὰ μέρη πρὸς ἀλλήλα δύνανται εἶναι καὶ ἴσα, καὶ

ἄνισα, ὡς τὰ μέρη τοῦ 10, εἰάν ἦναι $10=7+3$, τὰ μέρη εἶναι ἄνισα, εἰάν δὲ ἦναι $10=7+3$, τὰ μέρη εἶναι ἄνισα, εἰάν δὲ ἦναι $10=5+5$ τὰ μέρη εἶναι ἴσα.

§. 35. Τὸ ὅλον, ὁποῦ ἔχει ἴσα μέρη, λέγεται ὅλον, ὁποῦ καταμετρεῖται ἐπ' ἀκριβὲς ἀπὸ τὸ ἰδίον του μέρος, ὡς τὰ 10 καταμετρεῖται ἀπὸ τὸν 5 δύο φοραῖς, καὶ δὲν μένει τίποτες. Ἐάν δ' ἔχῃ μέρη ἄνισα, πολλάκις ὑπὸ τὸ μέρος δὲν καταμετρεῖται ἐπ' ἀκριβὲς, ὡς τὰ ἴδια 10 εἰάν ἦναι $=7+3$, οὔτε τὰ 7 μετρεῖ ἐπ' ἀκριβὲς τὸν 10, οὔτε τὸ 3. διότι μένει τι, ὅπερ εἰς ἄλλο μέρος κλάσμα ὀνομάσσομεν. Διὸ καὶ ἕκαστος ἀριθμὸς ἢ ἀκέραιος, ἢ κλασματικὸς λέγεται· ἐδῶ ὅμως μόνον περὶ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ὁ λόγος. Πλὴν πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ καταμετρεῖται ἀπὸ ἑτερου ἀριθμὸν, ἢ καὶ ἀπὸ τὴν μονάδα αὐτὴν λέγεται καταμετρητὸς, καὶ ῥητὸς, καὶ λογικός. ὁ δὲ μὴ οὕτω καταμετροῦμενος, λέγεται ἀκαταμετρητὸς, ἄρρητος, ἄλογος, Γέωμετρικὸς καὶ παρ' ἄλλων κωφός· ἡ γνῶσις τούτων ἐν τοῖς ἐξῆς γενήσεται σαφής.

§. 36. Ἐμάθομεν (§. 34.) ὅτι ἕκαστος ἀριθμὸς εἴτε ἀφηρημένος, εἴτε συγκεκρημένος, ἢ καθόλου, δύναται ὁ αὐτὸς, ὡς ὅλον καὶ μέρος ἐκλαμβάνεσθαι· ὅρα τούτων ὅλων αἱ ἐργασίαι δύο αἱ γενικώταται, δηλ: ἢ ἀπὸ τὰ μέρη τὸ ὅλον νὰ εὗρωμεν, ἢ ἀνὸ παλιν, ὑπὸ τὸ ὅλον τὰ μέρη νὰ ἀνιχνεύσωμεν, κατὰ τὰ δύο ἀρχικά τοῦ ποσοῦ ἰδιώματα, αὐξήσειν καὶ μείωσιν ἐπιδέχεσθαι (§. 5.). Καθότι ἡ μὲν εὗρεσις τοῦ ὅλου εἰς τὴν αὐξήσειν, ἡ δὲ τῶν μερῶν εἰς τὴν μείωσιν ἀνάγεται τοῦ ποσοῦ· καὶ ἡ μὲν τοῦ ὅλου εὗρεσις φιλοτεχνεῖται διχῶς, ἢ ὅταν μᾶς δοθῶσι μέρη πολ-

λὰ ἤτοι ἴσα, ἢ ἄνισα, καὶ μᾶς ζητῶσι τὸ ὅλον, τότε συνάπτομεν εἰς ἓν αὐτὰ, καὶ εὐρίσκομεν τὸ ὅλον, ὡς εἰάν δοθῶσι 5 καὶ 3 καὶ 2, καὶ ζητῶσι τούτων τὸ ὅλον, εὐρίσκομεν τοῦτο, οὕτω $5+3+2=10$. ἢ εἰάν δοθῶσι 3 καὶ 3 καὶ 3, καὶ ζητῶσι τὸ ὅλον, καὶ τοῦτο πάλιν οὕτω εὐρίσκεται $3+3+3=9$, καὶ αὕτη ἡ ἐργασία τοῦ νὰ συνάπτομεν τὰ μέρη εἰς ἓν ὅλον καλεῖται Π ρ ό σ θ ε σ ι ς, ἢ Σ ύ ν α ψ ι ς· διότι συνάπτομεν, ἢ προσθέτομεν ὅλα αὐτὰ, καὶ τὸ ὅλον εὐρίσκεται. Ἡ δεύτερον, ὅταν μᾶς δοθῇ εἰς ἀριθμὸς οἰοσδήποτε, καὶ ζητεῖται τὸ ὅλον αὐτοῦ, εἰάν αὐτὸν δις, ἢ τρίς, ἢ πολλάκις ἐκλάβωμεν, ὡς ὅταν ζητῇται ποῦον τὸ ὅλον τοῦ 4, εἰάν αὐτὸν τρεῖς φοαῖς ἐκλάβωμεν, λέγομεν $=12$. καὶ αὕτη ἡ ἐργασία, καθ' ἣν ὁ ἀριθμὸς πολλάκις λαμβάνεται, Πολλαπλασιασμὸς ὠνόμασαι. Συγγενεὺς ὅμως ἡ Σύναψις τῷ πολλαπλασιασμῷ· καθότι ἄμφω εἰς τὴν αὐξήσιν καταγίνονται τοῦ ποσοῦ, καὶ καθότι καὶ εἰς τὰς δύο ὅλουτι εὐρίσκεται. Διαφωναῖσι δὲ, καθότι ἡ μὲν ἀπὸ μέρη πολλὰ συντίθεται, ὁ δὲ ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολλάκις λαμβανόμενον. Τὰς δὲ λοιπὰς διαφορὰς ἐν τοῖς ἐξῆς γνωσόμεθα. Ἡ δὲ τῶν μερῶν ἀπὸ τοῦ ὅλου εὐρεσις φιλοτεχνεῖται καὶ αὕτη διχῶς, ἢ ὅταν μᾶς δίδεται ἐν ὅλον καὶ μέρος, καὶ ζητεῖται νὰ χωρίσωμεν αὐτὸ τὸ μέρος, ἢ νὰ ἀφείλωμεν ἀπὸ τοῦ ὅλου, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸ ἕτερον μέρος, ὡς ὅταν μᾶς δοθῇ τὸ ὅλον 10 καὶ τὸ μέρος 7, καὶ ζητῇται τὸ ἕτερον μέρος τοῦ 10 νὰ μάθωμεν· διότι τότε εὐρίσκομεν αὐτὸ οὕτω $10-7=3$ · ἢτοι ἀφαιροῦμεν τὸν 7 ἀπὸ τὸν 10 εὐρίσκεται ὁ 3· καὶ ταύτην τὴν ἐργασίαν Ἀ φ α ί ρ ε σ ι ν ὀνομάζουσιν· ἢ δεύτερον· ὅταν μᾶς δίδωσιν ἐν ὅλον, καὶ ἐπιτάττωσιν ἡμῖν

να κόψωμεν αὐτὸ εἰς πολλὰ μέρη ἴσα εἰς 2, ἢ 3, ἢ πολλὰ, καὶ να λάβωμεν ἐν ἐξ αὐτῶν, ὡς ὅταν μᾶς δίδωσι 12, καὶ λέγουσι να κόψωμεν αὐτὸν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, ποῖον εἶναι τὸ μέρος τούτων τὸ ἐν; λέγομεν $\equiv 3$, καὶ ταύτην τὴν ἐργασίαν καλοῦσι Διαίρεσιν· ἀλλὰ κἀνταῦθα ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις συμφωνοῦσιν ἀλλήλαις, καὶ διαφέρουσι· συμφωνοῦσι μὲν, καθότι εἰς τὴν μείωσιν ἀνάγονται τοῦ προσοῦ, καὶ εἰς τὰς ἐργασίας μέρος εὐρίσκονται· διαφέρουσι δὲ, καθότι εἰς ἐκείνην ἀπὸ ἐν μέρος τὸ ἕτερον εὐρίσκεται, εἰς ταύτην δὲ σχίζεται πρῶτον τὸ ὅλον εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, καὶ τὸ ἐν τότε εὐρίσκεται· τὰ δὲ λοιπὰ ὑστερον. Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν ὅτι, τέσσαρες ἀρχικαί, καὶ σοιχειώδεις ἐργασίαι ἡ Πρόσθεσις, Ἀφαίρεσις, ὁ Πολλαπλασιασμός, καὶ ἡ Διαίρεσις εἶναι, καὶ ἐφαπλοῦται εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὅλην, καὶ Ἀλγεβραν, εἰς τε τοὺς Ἀφηρημένους, Συγκεκριμένους, γενικοὺς καὶ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς, καὶ τε κεκλασμένοι ὧσι, καὶ τε ἀκέραιοι.

§. 37. Ἐὰν δέ τις καλῶς ἐνατενίσῃ εἰς ὅλην τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ Ἀλγεβρης, ὡς εἰς τὰ ἐξῆς φανερόν γενήσεται τὸ λεγόμενον, εὐρίσκει γενικωτάτην, καὶ περιεκτικωτάτην τούτων ὅλων τὴν ἐργασίαν τῆς ἐξίσωσεως· ὅτι ἡ ἐξίσωσις διὰ τῶν τεσσάρων τούτων ἐργασιῶν περιπλέκεται, καὶ ἐν αὐτῇ ὅλαι αὗται αἱ ἐργασίαι ἐμπεριλαμβάνονται· ἄρα περιεκτικωτάτη ἐργασία ἡ ἐξίσωσις, καὶ αὕτη πρέπει να προηγηθῇ εἰς ὅλας τὰς μεθόδους τοῦ μαθηματικοῦ. Διὸ καὶ κακῶς ποιοῦσιν, ὅσοι αὐτὴν εἰς τὰ μέσα, ἢ εἰς τὸ τέλος τῆς ἐπισήμης πραγματεύονται. Ἡμεῖς ὁμῶς ἵνα μὴ πέσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄτοπον, ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους τὴν ἐξίσωσιν, ὡς κλεῖδα τῶν μεθόδων ὅλων,

καὶ τῶν ἐργασιῶν ὁ δὴγὸν αὐτὴν ἐκλαμβάνομεν· διότι τι ἄλλο αἱ ἐργασίαι καὶ αἱ μέθοδοι, ἢ ἐξίσωσις ἐν γένει αὐτόχρημα; Ἐν τοῖς ἐξῆς θέλομεν μάθῃ, πῶς ἀρχόμενοι ἀπὸ ἀπλῶς ἐξισώσεις καταναυόμεν τέλος εἰς αὐτὰς τὰς πολυπλόκους, καὶ δυσδιαλύτους ἀνεπαισθήτως βαθμηδόν. Διὰ τοῦτο λοιπὸν καὶ εἰς τρία βιβλία διαιροῦμεν ὅλην τὴν ἡμετέραν Ἀριθμητικαλγέβραν· εἰς μὲν τὸ πρῶτον μαυθάνομεν, πῶς διαφόρως περιπλέκεται ἡ ἐξίσωσις ἀπὸ τῶν ἀρχαιοδεσέρων τεσσάρων ἐκείνων ἐργασιῶν (§. 35.)· ὅθεν καὶ εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν ἐπιγράφομεν· εἰς δὲ τὸ δεύτερον μαυθάνομεν τοὺς λόγους, ἀναφορὰς καὶ σχέσεις, ὅπου πρὸς ἀλλήλας αἱ ἐργασίαι αὗται ἔχουσιν· ὅθεν καὶ περὶ λόγου τὸ δεύτερον ἐπιγράφομεν· εἰς δὲ τὸ γ'. μαυθάνομεν πῶς ἡ ἐξίσωσις εἰς τὸ μηδὲν ἀγομένη ποικιλαχῶς, καὶ ἀπείρως λύεται ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ μηδὲν ἄπειρον, περὶ ἀπείρου καὶ τόδε ἐπιγράφομεν· καὶ οὕτως ἐλπίζομεν ἐν τοῖς τρισὶ τούτοις βιβλίοις ὅλη ἡ ἰδέα τῆς Ἀριθμητικαλγέβρης ἀναπτυχθήσεται.

B I B Λ Ι Ο Ν. Α'.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν.

§. 38. **Ο**τι δὲ αἱ τέσσαρες αὗται ἐργασίαι εἰς ὅλους ἐπίσης τοὺς ἀριθμοὺς ἐμφιλοχωροῦσι, καὶ δι' αὐτῶν ὅλαι αἱ μέθοδοι γίνονται, καὶ ἀνωτέρω εἶπομεν (§. 36.), καὶ ἐν τοῖς ἐξῆς γενήσεται φανερόν. Ἐιρηται δὲ καὶ ὅτι ὁ ἀριθμὸς, εἴτε ἀφηρημένος, εἴτε συγκεκριμένος, ἢ καθόλου εἰς, διαιρεῖται ἀπὸ τῆς ἰδέας τοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἀκέραιον καὶ

κεκλασμένον (§. 35.). Ἐπειδὴ ὁμῶς καὶ ἀπὸ τὴν γραφὴν τῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμοῦ εὐρίσκονται τοιοῦτοι ἀριθμοὶ, οἳ τινες μικρὸν ὑπερθεῖν πρὸς τὰ δεξιὰ ἔχουσιν ἀριθμὸν προσκείμενον, ὡς 5³. καὶ 2⁴. κτ. (τὶ δὲ οὗτοι σημαίνουσιν ὕστερον γενήσεται φανερόν.) καὶ τοῦτον τὸν προσκείμενον ἀριθμὸν Ἐκδέτην καλοῦσι, καὶ ἐπομένως εἰς αὐτοὺς αἱ τέσσαραις ἐργασίαι ἐφαπλοῦνται. Διὰ τοῦτο καὶ ἡμεῖς ὅλον τοῦτο τὸ πρῶτον βιβλίον εἰς τρία διαιροῦμεν τμήματα. καὶ τὸ μὲν πρῶτον περιλαμβάνει τοὺς ὀλοσχερεῖς, ἥτοι ἀκεραίους ἀριθμούς· τὸ δὲ δεύτερον τοὺς κέκλασμένους, καὶ τὸ τρίτον αὐτοὺς τοὺς ἐκθετικούς.

Τ Μ Η Μ Α Α΄.

Περὶ ὀλοσχερῶν ἀριθμῶν.

§. 39. Ἀριθμὸν ὀλοσχερῇ, ἢ ὀλόκληρου καλοῦμεν ἐκεῖνον, ὅστις ἔχει τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ὅλας ἴσας, ὡς 50, 20, 40, 56 κτ. ἢ καὶ οὕτως, Ἀριθμὸν ὀλοσχερῇ λέγομεν ἐκεῖνον, ὃν τοῦλάχιστον καταμετρεῖ ἡ μονὰς (§. 35.). ὅθεν τὸ παρὸν τμήμα εἰς τοιούτους ἀριθμούς καταγίνεται. Διαιρεῖται δὲ καὶ τοῦτο τὸ τμήμα εἰς τρία μέρη κατὰ τὰς τρεῖς διαφορὰς τοῦ ἀριθμοῦ (§. 30), ἀφηρημένου καθόλου καὶ συγκεκριμένου· καὶ κάθε μέρος ὑποδιαιρεῖται πάλιν εἰς κεφάλαια, κατὰ τὰς ἐργασίας ἐκείνας τὰς ἀρχικάς, ὅπου εἰς τὸ (§. 36.) εἵπομεν.

Μ Ε Ρ Ο Σ Α΄.

Περὶ ἀφηρημένων ἀριθμῶν.

§. 40. **Τ**ὶ ἀφηρημένος ἀριθμὸς, ὑπὸ πολλῶν ἡμῶν ἐγένε φανερὸν· εἰς τὸ παρὸν ὅμως μέρος θέλομεν μάθῃ, πῶς οἱ ἀφηρημένοι ἀριθμοὶ συνάπτονται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται καὶ διαιροῦνται· ὅθεν καὶ εἰς τέσσαρα κεφάλαια τὸ παρὸν μέρος διαιρεῖται.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Α΄.

Περὶ Προσθέσεως τῶν ἀφηρημένων ἀριθμῶν.

§. 41. **Σ**ύναψιν, ἥ Πρόσθεσιν εἵπομεν ἐκείνην τὴν μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας πολλὰ μέρη συνάπτοντες, τὸ ὅλον εὐρίσκομεν (§. 36.). ὡς τὸ ὅλον τοῦ 3 καὶ 2 εἶναι 5, διότι $3+2=5$. ὅθεν τὰ μέρη καλοῦνται ἀριθμοὶ Προσθετέοι, ὁ δὲ ζητούμενος ἀριθμὸς ὁ 5, τὸ ὅλον, καλεῖται Κεφάλαιον, ἥ Ἀθροισμα· σημείου δὲ τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ + σύν· διὸ καὶ δι' αὐτοῦ τελεῖται ὅλη ἡ πρόσθεσις.

§. 42. Ὁ ἀριθμὸς ὁποῦ συνίσταται ἀπὸ μόνου ἑνα χαρακτῆρα, λέγεται ἀπλοῦς, ὡς 3, 4 κτ, ὅταν δ' ἔχῃ πολλοὺς χαρακτῆρας, λέγεται σύνθετος ὡς 25, 156, 357. κτ.

§. 43. Ἐὰν οἱ δοθέντες προσθετέοι εἶναι ἀπλοῖ, καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον, ἀνεύ κόπου καὶ προπαρασκευῆς εὐρίσκεται· διότι εἰς 5 καὶ 8, εὐρίσκεται ἀμέσως τὸ κεφάλαιον 13. ὅτι $5+8=13$. εἰς 5 καὶ 4 εὐρίσκε-

ται 9. 5 καὶ 3, 8. καὶ 4, 12. ἄρα $5+3+4=12$. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως· αὐτοῦ γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ πρόσθεσις διὰ μὲν τοῦ + γράφεται, διὰ δὲ τοῦ Καί, ἐκφράζεται. Ὁ πρωτόπειρος μαθητὴς ὡς ἀγωνισθῇ μόνος νὰ συνάπτῃ πολλοὺς ἀπλοὺς ἀριθμοὺς κατ' ἰδίαν διὰ τοῦ νοῦς· διότι αὐτὴ ἡ ὀλίγη πρᾶξις δίδει μεγάλην εὐκολίαν εἰς τὰ λοιπὰ.

§. 44. Ἐὰν δὲ δοθῶσι σύνθετοι καὶ μεγάλοι ἀριθμοὶ πολλοὶ νὰ προσεθῶσιν, εὐρίσκεται τὸ κεφάλαιον κατὰ τοὺς ἐξῆς κανόνας.

α'. Γράφον τοὺς προσθετέους ὅλους ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον πρὸς τὰ κάτω, ὥς αἱ μονάδες νὰ ἴστανται εἰς ἕνα σῦλον, καὶ αἱ δεκάδες εἰς τὸν δεύτερον σῦλον, καὶ αἱ ἑκατοντάδες εἰς τὸν τρίτον. καὶ αἱ λοιπαὶ ὁμοίως, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα φαίνονται· αἱ μὲν μονάδες, εἰς τὸν Α' σῦλον, αἱ δὲ δεκάδες εἰς τὸν β κτ. ἐπειδὴ μόνον τὰ ὁμοειδῆ συνόπτονται. (§ 32.).

ε δ γ β α	
92164	7001
321 προσθετέαι	1505 προσθετέαι
5413	301
97898 κερ.	61101
	69909 κερ.

β'. Αποκάτω ἀπὸ αὐτοὺς ἀχθήτω μία γραμμὴ, διὰ νὰ γράψῃς ὑποκάτω αὐτῆς τὸ κεφάλαιον.

γ'. Συναψαὶ πρῶτον τὴν σήλην τῶν μονάδων ἀρχόμενος ἀπὸ κάτω ἄνω, ἢ ἄνω κάτω, κατὰ τὴν συναψιν τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν (§. 43), καὶ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν γράψον εἰς τὸν τύπον τῶν μονάδων ὑπὸ τὴν γραμμὴν· οὕτως εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα $3+1+4=8$. καὶ ἐπειδὴ τὸ κεφά-

λαιον 8 εἶναι μονάδων κεφάλαιον, γράψον αὐτὸ εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων (§. 32.), εἴτα συναψον καὶ τὴν στήλην τῶν δεκάδων ὁμοίως $1+2+6=9$. καὶ ἐπειδὴ ὁ 9 τὸ κεφάλαιον τῶν δεκάδων εἶναι, γράψον αὐτὸ εἰς τὸν δεύτερον τόπον τῶν δεκάδων (§. 32)· εἴτα συναψον καὶ τὰς ἑκατοντάδας ὁμοίως $4+3+1=8$, γράψον τὸ κεφάλαιον τῶν ἑκατοντάδων 8 εἰς τὸν γ'. τόπον· εἴτα ὁμοίως καὶ τὰς χιλιάδας 7 εἰς τὸν τέταρτον τόπον κτ. καὶ εὐρίσκεται ὅλον τὸ κεφάλαιον τῶν μερῶν $92164+321+5413=97898$. ἡ δεῖξις αὐτοῦ φανερά ἀπὸ τὸ ἀξίωμα (§. 34.) τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίαις μέρεσιν· διότι εἰς τὸ κεφάλαιον ἐτέθησαν ὅλαι αἱ μονάδες, ὅλαι αἱ δεκάδες, αἱ ἑκατοντάδες κτ.

§. 45. Ἐὰν δὲ εἰς μίαν στήλην εὐρίσκωνται μόνον μηδενικά σημεῖα, ὑποκάτω τῆς στήλης αὐτῆς εἰς τὸ κεφάλαιον γράφομεν μόνον μηδενικόν, ὡς εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα· τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν μονάδων $+1+2+5+1=9$, καὶ γράφεται εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων· εἰς δὲ τὴν στήλην τῶν δεκάδων εὐρίσκονται μόνον μηδενικά σημεῖα· ἄρα μηδενικὸν σημεῖον εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων ἐν τῷ κεφαλαίῳ γράφεται, τὰ δὲ λοιπὰ γίνονται ὡς ἄνωτέρω, δηλ· τὸ κεφάλαιον τῶν ἑκατοντάδων $1+3+5=9$, τῶν δὲ χιλιάδων $1+1+7=9$, καὶ τῶν μυριάδων $=6$. καὶ ἔσαι τὸ κεφάλαιον τῶν προσθετέων $7001+1505+302+61101=69909$ · ἡ δὲ δεῖξις ὡς ἄνωτέρω (§. 43.)

§. 46. Ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον μιᾶς στήλης εἶναι σύνθετος ἀριθμὸς, ἥτοι συνίσταται ἀπὸ δύο ἀριθμοῦς, τότε γράφομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ πρώτου τόπου εἰς τὸν τόπον τῆς στήλης, ὅπου εὐρέθη τοῦτο τὸ κεφάλαιον· τὸν δ' ἀριθμὸν τοῦ δευτέρου τόπου προσθέτομεν εἰς τὴν ἐγγὺς ἀ-

κόλουθον σήλην πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ὡς φαίνεται εἰς τὸ
 γ'. παράδειγμα· διότι ὡς ἀνωτέρω λέγομεν γ'
 $6+1+7+8+6=28$. τὸ κεφάλαιον τῆς σήλης 4456
 τῶν μονάδων ἀπὸ δύο ἀριθμούς· ἔθεν γράφο- 2868
 μεν μόνον τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τῶν μονάδων 8 37
 ὑπὸ τὴν σήλην τῶν μονάδων· τὸν δὲ δεύτερον 481
 2, ὡς δεκάδας δύο προσθέτομεν εἰς τὴν σήλην 1526
 τῶν δεκάδων· διότι μόνον τὰ ὁμώνυμα συναπτοῦνται (§. 32.)
 ὅθεν λέγομεν $2+2+8+3+6+5=26$. γράφομεν πάλιν τὸν
 6 εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων, τὰς δὲ δύο ἑκατοντάδας
 προσθέτομεν εἰς τὴν σήλην τῶν ἑκατοντάδων· διότι ὡς
 20 δεκάδες δύο ἑκατοντάδας ποιοῦσι (§. 26.) λοιπὸν λέ-
 γομεν πάλιν $2+5+4+8+4=23$. γράφομεν αὐτοῦ τὸν 3,
 καὶ τὸν 2 προσθέτομεν εἰς τὴν ἐξῆς σήλην, οὕτω
 $2+1+2+4=9$, καὶ γράφεται τοῦτο τὸ κεφάλαιον· καὶ ἔσαι
 κατὰ τὰ ἀνωτέρω $4456+2868+37+481+1526=9368$.

Σημεῖωσαι, ὅτι εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν, ὅταν προσθέτω-
 σι τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ προσθέτομεν εἰς τὴν ἐξῆς σήλην,
 λέγουσι, κρατοῦμεν δύο εἰς τὸ χέρι, καὶ γράφουσι τὸν πρῶ-
 τον. δηλ· εἰς τὸ ἀνω παράδειγμα λέγουσι· 6 καὶ 1 ἑπτὰ,
 καὶ 7, δεκατέσσαρα, καὶ 8, εἰκοσιδύο, καὶ 6, εἴκοσι
 ὀκτὼ, γράφουσι τὰ 8, καὶ λέγουσιν ἔχομεν δύο εἰς τὸ χέ-
 ρι, καὶ 5, ἑπτὰ, καὶ 4, ἑνδεκά, καὶ 8, δεκαθυσία, καὶ
 4 εἰκοσιτρία. τρία, καὶ ἔχομεν 2, καὶ 1 τρία καὶ 2,
 πέντε καὶ 4 ἑννέα, καὶ γράφουσιν 9 κτ.

§. 47. Ἐὰν δὲ τις σήλην ἔχῃ μόνον μηδενικὰ σημεῖα,
 καὶ μένῃ ἀριθμὸς ἀπὸ τὴν προηγουμένην σήλην, τοῦτον
 μόνον γράφομεν ὑποκάτω εἰς αὐτὴν τὴν σήλην τῶν μηδε-
 νικων, ὡς εἰς τὸ δ'. παράδειγμα φαίνεται $5+3+4=12$.

γράφομεν τὰ δύο, καὶ τὸ ἐν εἰς τὴν ἐξῆς σήλην προσθέτο-
μεν οὕτω $1+9+6+8=24$, γράφομεν 4, καὶ 2 προσθέτο-
μεν εἰς τὴν ἐξῆς σήλην· ἐπειδὴ ὅμως ἔχει μηδενικὰ γρά-
φομεν μόνον 2. εἴτα $8+2+3=13$ καὶ ταῦτα γράφομεν κα-
τὰ σειράν, ὅτι δὲν εἶναι ἑτέρα σήλη. δ

3084

2063

8095

13242

„Ἐὰν δὲ εὐρεθῇ τὸ κεφάλαιον μιᾶς σήλης μὲ τρεῖς χα-
ρακτῆρας· δηλ: 135, τότε γράφομεν ὑποκάτω αὐτῆς τῆς
σήλης μόνον τὸν χαρακτῆρα 5 τοῦ πρώτου τόπου, τοὺς
δὲ ἐξῆς 13 ὁμοῦ προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ
ἀριστερὰ σήλην.

§. 48. Ἐὰν δὲ τέλος δοθῶσι πολλοὶ προσθετέοι, ὡς
 $87569+5498+3698+95678+3097+909+3278$
 $+78567+4039+97908+21706+69578+59857$ κτ.
διὰ τὰ μὴ γένῃ σύγχυσις, γράφομεν ὡς ἀνωτέρω μερικοὺς,
καὶ εὐρίσκομεν πρῶτον αὐτῶν τὸ κεφάλαιον, ἔπειτα ὑπὸ
τὸ κεφάλαιον αὐτὸ γράφομεν ἔτι μερικοὺς, καὶ εὐρίσκο-
μεν αὐτῶν μετὰ τοῦ πρώτου κεφαλαίου τὸ κεφ. καὶ οὕ-
τως ἐξακολουθοῦμεν μέχρι τέλους τὴν ἐργασίαν μας, κα-
θὼς εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα φαίνεται.

§. 49. Ἐὰν δέ τις ἀμφιβάλλῃ, ἂν ἡ πρόσθεσις ὀρθῶς ἔγινεν, ἢμπορεῖ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ξαναπροσθέσῃ τοὺς προσθετέους ἀπὸ τὰ ἄνω εἰς τὰ κάτω, εἰὰν τὴν πρώτην ἀπὸ τὰ κάτω εἰς τὰ ἄνω ἔγινεν· καὶ οὕτως εἰὰν εὖρῃ πάλιν τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, κρίνει ὅτι ὀρθὴ ἡ πρόσθεσις· ὁ μαθητὴς δὲ ἄς κάμνῃ πολλὰ παραδείγματα διὰ νὰ γυμνασθῇ ἐντελῶς εἰς αὐτοὺς τοὺς νόμους, καὶ εἰς αὐτὰς τὰς ἀρχάς.

$$\begin{array}{r}
 87569 \\
 5498 \\
 3695 \\
 \hline
 95678 \\
 192440^{\circ} \\
 3097 \\
 909 \\
 3278 \\
 78567 \\
 \hline
 278291 \\
 4039 \\
 97908 \\
 21706 \\
 \hline
 401944 \\
 69578 \\
 59857 \\
 \hline
 531379
 \end{array}$$

§. 50. Ἐκ τῶν αὐτῶν παραδειγμάτων φαίνεται, ὅτι δύο μεθόδους τῆς προσθέσεως ἔχομεν. ἡ μὲν εἶναι αὐτὴ, καθ' ἣν καταγράφονται οἱ προσθετέοι κατὰ τάξιν τῶν μονάδων, δεξί κτ. καὶ ὑπὸ τῆς γραμμῆς τοὺς συνάπτομεν εἰς κεφάλαιον· καὶ αὕτη ἡ μέθοδος λέγεται ἐνεργεῖα πρόσθεσις, ἥτοι πραγματικῶς, καὶ φανερά εὐρίσκομεν τὸ κεφάλαιον· ἡ δὲ ἑτέρα μέθοδος εἶναι, ὅταν συνάπτωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους μετὰ τὸ σημεῖον†, ὡς 250†300†50, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὅλα ὁμοῦ τὸ κῆφ. σημαίνουσι, πλὴν τοῦτο δὲν εἶναι ἀκόμη φανερόν· διὰ τοῦτο αὐτὴ ἡ πρόσθεσις, δυνάμει λέγεται, εἰς τὴν πρώτην εἶναι καὶ τὰ μέρη, καὶ τὸ ὅλον φανερόν, ὡς εἰς τὸ α' παράδειγμα, εἰς τὴν δευτέραν τὰ μέρη μόνον.

Πολλάκις οἱ ἀριθμητικοὶ περικλείουσιν αὐτὰ τὰ
 μέρη εἰς μίαν παρένθεσιν οὕτω (250+300+50),
 καὶ λαμβάνουσιν ὅλην τὴν παρένθεσιν ὡς ἓνα ἀ-
 ριθμὸν, ὡς κατωτέρω γνωρίσομεν. Πλὴν ὥς ση-
 μεῖωση, ὅτι καὶ ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη μέθοδος χρη-
 σημεύει εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῆς ἀριθμητικῆς· καὶ εἰς
 τὰς πράξεις θέλομεν μάθῃ ποῦ ἡ μία, καὶ ἡ ἑτέρα χρήσιμος.

§. 51. Διαφόρως οἱ πρακτικοὶ βασανίζουσι τὴν πρό-
 σθεσιν, ἂν ᾖται ὀρθή, ἢ ὄχι· καὶ τοῦτο τὸ λέγουσι δοκιμὴν·
 ἡ καλλιτέρα δοκιμὴ εἶναι, εἰς ὅλους τοὺς χαρακτῆρες τῶν προ-
 σθετέων συναψόμεν, καὶ ἀπορρίψωμεν ὅλα τὰ ἐννέα, καὶ τὸ μέ-
 νον γράψωμεν· εἰτα συνάπτομεν καὶ ὅλους τοὺς χαρακτῆρας
 τοῦ κεφαλαίου, καὶ ὁμοίως ρίπτομεν τὰ ἐννέα, καὶ εἰς
 μεῖνῃ ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὸ λείψανον τῶν προσθετέων, κρί-
 νουσιν, ὅτι εἶναι ὀρθή ἡ πρόσθεσις, ὡς εἰς τὸ παράδειγ-
 μα φαίνεται· ἡ ἀπόδειξις αὐτῆς τῆς δοκι-
 μῆς γίνεται ἀπὸ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, καὶ
 τῇ ἀληθείᾳ εἶναι σχεδὸν ὀρθή· πλὴν ἐπει-
 δὴ σπανίως καὶ ἀπάτη συμβαίνει, οἱ μα-

$$\begin{array}{r} \alpha' \\ 250 \\ 300 \\ 150 \\ \hline 600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 356 \\ \cdot 17 \frac{4}{5} \\ 180 \\ \hline 553 \end{array}$$

θηματικοὶ δὲν τὴν ἐγκρίνουσιν· ἐπειδὴ καὶ θέλουσι παντε-
 λῶς τὸ ἀπταισιν. Τοῦτο δὲ εὐρίσκουσι κατὰ τὸν ἐξῆς τρό-
 που. Ἡ πρόσθεσις εἶναι σύναψις μερῶν εἰς ἓν ὅλον (§. 41.).
 λοιπὸν διὰ τὰ μάθωμεν ἂν τὸ ὅλον ᾖται τῇ ἀληθείᾳ μόνον
 ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη συνθεμένου, πρέπει εἰς τὸ ὅλον τὰ μέ-
 ρη καὶ ἐξετάσωμεν· δηλ: ὁ 10 ὡς ὅλον συνάπτεται ἀπὸ δύο
 μέρη 7 καὶ 3. ὅτι $7+3=10$. διὰ τὰ μάθωμεν ἂν τῇ ἀ-
 ληθείᾳ τὸ ὅλον 10 συνάπτηται μόνον ἀπὸ τὰ 7 καὶ 3,
 πρέπει καὶ εὐγάλωμεν ἀπὸ τὰ 10 ἓν μέρος τὸ 7, ἢ 3,
 καὶ εἰς μόνον τὸ ἕτερον μένῃ οὕτω $10-7=3$ ἢ $10-3=7$,

κρίνομεν ὀρθῶς ὅτι τὸ ὅλον 10 καλῶς συνήφθη ἀπὸ τοῦ 7 καὶ 3. Ἐὰν λοιπὸν αὐτὰς τὰς δύο ἐξισώσεις τροχασθῶμεν $7+3=10$ καὶ $10+7=3$, εὐρίσκομεν εἰς τὴν μίαν τὴν πρόσθεσιν, διότι $7+3$ εἶναι τὰ μέρη ἥτοι οἱ προσθετέοι, 10 δὲ τὸ ὅλον ἥτοι τὸ κεφάλαιον· εἰς δὲ τὴν ἑτέραν τὴν ἀφαίρεσιν· διότι $10-7$ εἶναι τὸ ὅλον ὑπὸ τὸ ὁποῖον εὐγάζομεν ἓν μέρος, νὰ εὐρώμεν τὸ ἕτερον, ὅπου εἶναι 3, καὶ τοῦτο ἀφαίρεσις· (§. 36.). Ἄρα ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἡ καθ' αὐτὸ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως, περὶ ἧς τὸ ἐξῆς κεφάλαιον θέλει πραγματευθῆ.

§. 52. Πρὶν ὁμῶς εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἔλθωμεν, ἅς ἐξετάσωμεν αὐτοὺς τοὺς τύπους $7+3=10$, καὶ $10-7=3$ · εἰς μὲν τὸν πρῶτον εὐρίσκομεν τὸ σημεῖον +, εἰς δὲ τὸν δεύτερον τὸ —· ταῦτα δὲ πάντα ἐναντία (§. 15.) ἄρα μαθαίνομεν.

Α'. Ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐναντία τῆς ἀφαίρεσεως, καὶ βέβαια ἐκεῖνα, ὅπου ἡ πρόσθεσις συνάπτει εἰς ἓν, αὕτη τὰ ξεσυνάπτει.

Β'. Μαθαίνομεν, ὅτι καὶ ὁ τύπος $7+3=10$ · καὶ ὁ τύπος $10-3=7$ ἔχει τοὺς ἰδίους χαρακτῆρας, καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος =· τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον σημαίνει, ὅτι ὁ πρὸ αὐτοῦ ὅλος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν μετ' αὐτὸ ἀριθμὸν, ὡς ὁ $10-3=7$ · καὶ ἐπειδὴ τὰ ἴσα αὐτὶ τῶν ἴσων τίθενται (§. 30.), ἡμποροῦμεν καὶ τὸν ἓνα καὶ τὸν ἄλλον νὰ προτάξωμεν εἰς τὸ σημεῖον =· ὅθεν ἀδιάφορον, ἢ ὕτω $10-3=7$, ἢ οὕτω $7=10-3$ νὰ γράψωμεν· τοῦτο ὅλον, δηλ· καὶ τοὺς ἀριθμοὺς, καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος καλοῦσιν οἱ Ἀριθμητικοὶ ἐξίσωσιν· ὅθεν ἐξίσωσις εἶναι, νὰ εὐρώμεν ἓνα πρὸς ἓν ἴσον μὲ ἓνα ἕτερον· ἄρα ἡ

ἐξίσωσις ἔχει δύο σκέλη, τὸ μὲν ἐν πρὶν τοῦ σημείου — καὶ τὸ ἕτερον μετὰ τὸ σημεῖον =, ὡς $10-3=7$. ἕκαστον δὲ σκέλος τῆς ἐξίσωσεως ἡμπορεῖ νὰ ἔχῃ καὶ ἓνα μόνον ἀριθμὸν, ὅπερ μέρος τοῦ σκέλους καλεῖται, καὶ πολλὰ ἡνωμένα μὲ τὰ σημεῖα + καὶ —, ὡς $7+3=10$. ὅπου τὸ ἐν σκέλος $7+3$ εἶναι ἀπὸ δύο μέρη, τὸ δὲ 10 ἀπὸ ἓν μόνον.

Γ'. Μαυθάνομεν, ὅτι καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαιρέσις ἐκφράζεται ὡς μία ἐξίσωσις, ὡς $7+3=10$. καὶ $10-3=7$. Ἐὰν δ' εὖρωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει χώραν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ διαίρεσιν, ὡς ἐκεῖ δεῖξομεν, φαίνεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἡ γενικὴ μέθοδος τῆς Ἀριθμητικῆς, καὶ ἡ γνώσις αὐτῆς ἀναγκαῖα εἰς τὸν Ἀριθμητικὸν, καὶ Μαθηματικὸν (§. 37.). διότι μὲ αὐτὴν μόνην προφητεύει ὁ Μαθηματικός.

Δ'. Ἐὰν τὰς ἐξίσωσεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἐξετάσωμεν, εὐρίσκωμεν, ὅτι ἔχουσι μεγάλην συγγένειαν ἀναμεταξύ. ἔσω ἡ ἐξίσωσις τῆς προσθέσεως $7+3=10$, καὶ ἡ τῆς ἀφαιρέσεως $7=10+3$, εἶναι τῇ ἀληθείᾳ ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις, εἰμὴ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς προσθέσεως μετεβήκαμεν τὸ ἐν μέρος τοῦ πρότου σκέλους τῆς ἐξίσωσεως εἰς τὸ ἕτερον σκέλος μὲ τὸ ἐναντίου σημεῖον· διότι τὸ αὐτὸ 3, εἰς μὲν τὴν ἐξίσωσιν τῆς προσθέσεως εὐρίσκεται πρὶν τοῦ =, καταφατικῶς +3· εἰς δὲ τὴν τῆς ἀφαιρέσεως μετὰ τὸ σημεῖον ἀποφατικῶς —3. εἰ δὲ ἀνάπαλιν ποιήσωμεν, μεταβαίνει ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς προσθέσεως.

Ε'. Μαυθάνομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ, εἰ ἓνα μέρος σηκώσωμεν ἀπὸ τὸ ἐν σκέλος τῆς ἐξίσωσεως, καὶ θώ-

μεν αὐτὸ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως μετὰ τὸ ἐναντίον σημεῖον· οὕτω καὶ $10-3=7$, καὶ $10=7+3$.

ΣΤ'. Ἡ ἐξισωσις δὲν χαλᾷ, καὶ ἐσὺν πολλὰ μέρη ἀπὸ τὸ ἐν σκέλος τῆς ἐξισώσεως θῶμεν εἰς τὸ ἕτερον σκέλος μετὰ τὸ ἐναντίον σημεῖον οὕτω, $7+8+3=18$. καὶ $7=18-8-3$. καὶ $8=18-7-3$, καὶ ἀνάπαλιν.

Ζ'. Καὶ ἐκ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐν ὅλῳ ὅπου συντίθεται ἀπὸ πολλὰ μέρη, διὰ τὰ μάθωμεν αὖ τὸ ὅλον ὀρθῶς εὐρέθῃ, πρέπει νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ τὸ ὅλον μέρη τινα, ἕως ὅπου νὰ εὐρεθῇ τὸ μέρος, ὅπου δὲν ἀφῆρέθῃ τὸ αὐτό. δηλ: $7+8+3=18$. ὁ 18 συντίθεται ἀπὸ 7 καὶ 8 καὶ 3. ὅταν δ' ἀφέλωμεν τὸν 8 καὶ 3 καὶ μένει ὁ 7, ὡς ἡ ἐξίσωσις δείκνυσι $7=18-8-3$. φανερὸν ὅτι ὀρθῶς ὅλον 18 εὐρέθῃ. πῶς ὁμως ἀφαιροῦμεν ὁρισμοὺς ἀπὸ ἀριθμῶν τὸ ἐξῆς κεφάλαιον διδάξει ἡμᾶς.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Β'.

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 53. **Α**φαίρεσιν καλοῦμεν τὴν μέθοδον ἐκείνην, καθ' ἣν εὐρίσκομεν ἀπὸ τὸ ὅλον ἐν μέρος (§. 36.), εἰάν ἕτερον μέρος δοθῇ, ὡς $10-7=3$. Ὅλον αὐτοῦ ὁ 10, μέρη δὲ ὁ 7 καὶ 3. εἰάν δοθῇ δὲ ὁ 7, εὐρίσκομεν τὸν 3· ἢ δοθῇ ὁ 3, εὐρίσκεται ὁ 7 οὕτω, $10-3=7$. ἢ καὶ οὕτως· εἰάν δοθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ εἰς προσθετός, τὸν ἕτερον προσθετέον εὐρεῖν· ἢ ὡς ἕτεροι, καὶ οὗτοι χαλῶς λέγοντες, ὀρίζουσι. Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ σύγκρισις δύο ἀριθμῶν ἀνίσων, κατὰ τὴν ὑπερέχει ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου· δηλ: ὅταν συγ-

κρύνωμεν τὸν 15 μὲ τὸν 10, καὶ ἐκεῖνος ὑπερέχει τοῦ 10 κατὰ 5. δηλ. εἰν ἀφέλωμεν τὸν 10 ἀπὸ τὸν 15, μένουσι 5. καθ' οἷον δὴποτε τρόπον γίνεται φανερόν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ δίδονται, καὶ εἰς ἄγνωστος ζητεῖται· ἀπὸ μὲν τοὺς δύο δεδομένους, ἐκεῖνος, ὅπου τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, καλεῖται Μειωτέος, καὶ ὁ ἕτερος ὅπου ἀφαιρεῖται, Ἀφαιρετέος· ἐκεῖνος δὲ, ὅπου ζητεῖται, καλεῖται Διαφορὰ, ἢ Ὑπεροχή, ἢ Ὑπόλοιπον, ἢ Λείψανον· ἡμῖς ὅμως αἰεὶ Λείψανον αὐτὸν καλέσωμεν· σημείον τῆς ἀφαιρέσεως ἔχομεν τὸ —.

§. 54. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι καὶ οἱ δύο ἀπλοῖ (§. 42.), εὐκόλως γίνεται ἡ ἀφαίρεσις· δηλ. Ἐὰν δοθῇ ὁ 5 καὶ ὁ 2, καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ λείψανον, ἀφαιρῶντες τὸν 2 ἀπὸ τοῦ 5, λέγομεν 2 ἀπὸ τοῦ 5 μένουσι 3· καὶ τὸ 3 λείψανον· ὁμοίως καὶ 5 ἀπὸ τοῦ 9 μένουσι 4 τὸ λείψανον· ὅτι $5 - 2 = 3$ · καὶ $9 - 5 = 4$.

§. 55. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ μειωτέος σύνθετος ἀριθμὸς, ὁ δ' ἀφαιρετέος ἀπλοῦς, πάλιν εὐκόλος ἡ ἀφαίρεσις γίνεται· διότι εἰν ζητηθῇ ἡ διαφορὰ, ἢ τὸ λείψανον ἀπὸ τοῦ 18, ὅταν ἀφέλωμεν τὸν 5, εὐκόλως εὐρίσκομεν, 5 ἀπὸ τοῦ 18 μένουσι 13· ὅτι $18 - 5 = 13$ · ὁμοίως καὶ 6 ἀπὸ τοῦ 42, μένουσι 36· ὅτι $42 - 6 = 36$ · καὶ ἔτι 7 ἀπὸ τοῦ 145, μένουσι 138, ὅτι $145 - 7 = 138$ · ὁμοίως καὶ εἰς τὰ λοιπὰ. Οἱ μαθηταὶ εἰς αὐτὰ πρέπει μόνοι τους νὰ γυμνασθῶσι, διὰ νὰ ἀφαιρῶσι πρόχειρα κάθε ἀριθμόν.

§. 56. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μειωτέος τὸ κεφάλαιον εἶναι, καὶ ὁ ἀφαιρετέος ἐν μέρος τοῦ κεφαλαίου, τὰ δὲ μέρη ὁμώνυμα εἶναι μὲ τὸ κεφάλαιον (§. 32.)· ἄρα ἀριθμὸς ὁμώνυμος ἀπὸ ὁμώνυμον ἀφαιρεῖται, καὶ οὐχὶ ἑτερόνυμος· διότι σύγκρισις μεταξὺ ἑτεροειδῶν δὲν γίνεται.

§. 57. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος συνθετοὶ ἀριθμοὶ, τότε γίνεται ἡ ἀφαίρεσις κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον.

α'. Καταγραφῆτω ὁ ἀφαιρετέος ὑπὸ τὸν μειωτέον, δηλ: ὡς εἰς τὴν σύναψιν, αἱ μονάδες ὑπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς δεκάδας, αἱ ἑκατοντάδες ὑπὸ τὰς ἑκατ: κτ. (§. 40.) ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα φαίνεται· διότι ὁ μωνύμου ἀπὸ ὁ μωνύμου ἀφαιρεῖται (§. 32.)

$$\begin{array}{r} 6945 \text{ μειωτέος} \\ \text{προσθετέοι } 2432 \text{ ἀφαιρετέος} \\ \hline 4513 \text{ λείψανον} \end{array}$$

κεφ. 6945

β'. Ὑποκάτω ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ἄς τραβιχθῇ μία γραμμὴ.

γ'. Ἀς ἀφαιρεθῶσιν αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου, καὶ τὸ λείψανον ἄς γραφῇ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς· ἄς γένῃ οὕτω καὶ εἰς τὰς δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας κτ. καὶ ὁ ἀριθμὸς, ὅπου γραφῇ ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὸ λείψανον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς μειωτέως 6945, καὶ ὁ ἀφαιρετέος 2432, καὶ ἄς γραφῶσι κατὰ τάξιν αἱ μονάδες, δεκάδες κτ. ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται· καὶ ἀφ' οὗ τραβιχθῇ ἡ γραμμὴ, λέγομεν, 2 ἀπὸ 5 ἀφαιρουῦντες, λαμβάνομεν 3, τοῦτο γράφεται ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἰς τὸν τόπον τῆς μονάδος· ἔτι 3 ἀπὸ 4 μένει 1, καὶ γράφεται εἰς τὰς δεκάδας· ἔτι 4 ἀπὸ 9 μένει 5, καὶ γράφεται εἰς τὰς ἑκατοντάδας· ἔτι 2 ἀπὸ 6 μένει 4, καὶ γράφεται ἔτι εἰς τὰς χιλιάδας· ἄρα ὁ ἀριθμὸς ὅλος ὑπὸ τὴν γραμμὴν 4513 εἶναι τὸ λείψανον, ὅπου ζητεῖται· διότι $6945 - 2432 = 4513$.

ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀφαιρέσεως (§. 52.). ὅμως ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ καὶ οὕτω, $6945=4513+2432$ (§. 32.)· ἡτοι ὁ μειωτέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ λείψανον καὶ μὲ τὸν ἀφαιρετέον· λοιπὸν ὅν συνάψωμεν τὸ λείψανον καὶ τὸν ἀφαιρετέον, καὶ γένῃ τὸ κεφάλαιον ἴσον μὲ τὸν μειωτέον, ἐγινεν ὀρθὴ ἡ ἀφαίρεσις· εἰ δὲ μὴ ἦναι ἴσον, ἐσφαλμένη. Διὰ τοῦτο εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα ἐσυνάψαμεν τὸ λείψανον, καὶ τὸν ἀφαιρετέον ὡς προσθετέους, καὶ ἐξῆλθε τὸ κεφ. ἴσον μὲ τὸν μειωτέον·

5632	7862
421	31
5211	7831
5632	7862

καὶ αὕτη εἶναι ἡ δεῖξις, καὶ ἡ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως. Τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται ἡ ἀφαίρεσις καὶ τῶν δύο τούτων παραδειγμάτων, καὶ τῶν λοιπῶν· διότι $5632-421=5211$ · καὶ $7862-31=7831$.

§. 58. Ἐὰν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐξήσωμεν ἓνα χαρακτῆρα τοῦ μειωτέου, καὶ ἓνα τοῦ ἀφαιρετέου τῆς αὐτῆς τάξεως, τὸ λείψανον δὲν μεταβάλλεται· ἔσῃ ἀφαιρετέος ὁ 7 καὶ μειωτέος ὁ 12· ἡ διαφορὰ, ἦτοι τὸ λείψανον $12-7=5$ · ἄς αὐξηθῇ τῶρα καὶ ὁ μειωτέος 12 μὲ 3, καὶ ὁ ἀφαιρετέος μὲ τὸν αὐτὸν 3, διὰ τὴν γένῃ ὁ μὲν μειωτέος 15, ὁ δ' ἀφαιρετέος 10· ἄρα ἡ διαφορὰ πάλιν 5. ὅτι $15-10=5$ · δευδὸσθω πάλιν ὁ μειωτέος 6564, καὶ ὁ ἀφαιρετέος 3432· ἔσαι τὸ λείψανον 3132· ἄς αὐξηθῇ ὁ δεκαδικὸς τόπος τοῦ μειωτέου μὲ 1, ἢ 2, ἢ 3. τὸ λείψανον πάλιν τὸ αὐτὸ εὐρίσκεται· τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τοὺς ἀνωτέρω· τύπους.

μειω: 6564	6584	6594
ἀφαιρ: 3432	3452	3462
λείψ: 3132	3132	3132

§. 59. Ἐὰν ὁ χαρακτήρ τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄνω χαρακτήρα τοῦ μειωτέου, καὶ δὲν ἀφαιρεῖται· με μίαν δεκάδα συνάπτομεν τὸν χαρακτήρα τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ τὸ λείψανον γράφομεν τακτικῶς ὡς ἄνωτέρω· εἰτα προσθετομεν εἰς τὸν ἐγγὺς χαρακτήρα τοῦ ἀφαιρετέου μίαν μονάδα, καὶ οὗτος ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἄνω, εἰάν ἦναι μεγαλύτερος· Ἐὰν δὲ καὶ οὗτος μικρότερος πάλιν προσθετομεν αὐτὸν εἰς, δέκα, καὶ ἀφαιροῦμεν· ὁ λόγος ἐκ τοῦ ἄνωτέρου (§. 58.). ἔσω ὁ μειωτέος 5347, ὁ δὲ ἀφαιρετέος 3679. ἐπει- μειωτ: 5347
 δὴ λοιπὸν τὰ 9 ἀπὸ τῶν 7 δεν ἀφαιρουν- 3679
 ται, λέγομεν 9 ἀπὸ τοῦ 17 μένει 8, καὶ 1068
 γράφεται· τὴν μίαν δεκάδα, ὅπου ἔλαβο- 5347
 μεν εἰς τὸν μειωτέου, τὴν προσθετομεν εἰς τὸν ἐξῆς χα-
 ρακτήρα τοῦ ἀφαιρετέου· ὅθεν δὲν λέγομεν 7, ἀλλὰ 8.
 καὶ ἐπειδὴ ὁ ἄνω τέσσαρα μικρότερος, συνάπτομεν ἔτι μί-
 αν δεκάδα, καὶ λέγομεν 8 ἀπὸ τοῦ 14, μένει 6 καὶ γρά-
 φεται· καὶ ἔτι 4 ἀπὸ τοῦ 5, μένει 1 καὶ γράφεται· καὶ
 ἔσαι τὸ λείψανον 1668. ὅτι δὲ εἶναι ὀρθὸν, συνάπτομεν
 τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ λείψανον (§. 57.), καὶ εὐρίσκεται
 ὁ μειωτέος 5347. "Οὕτως ἀφαιρεῖται καὶ ἀ- 56794
 πὸ τοῦ 56794 ὁ 53975. λέγομεν 5 ἀπὸ 53975
 τοῦ 14 μένει 9, καὶ γράφεται· 8 δὲ ἀπὸ 2819
 τοῦ 9 μένει 1, καὶ γράφεται· 9 ἀπὸ τοῦ 56794
 17 μένει 8, καὶ γράφεται· 4 ἀπὸ τοῦ 6 μένει 2, καὶ
 γράφεται· 5 ἀπὸ τοῦ 5 μένει 0, καὶ γράφεται· οὕτως ἀ-
 φαιρεῖται καὶ 73876 ἀπὸ τοῦ 1286328. διότι 6 ἀπὸ 8,
 2· ἔτι 7 ἀπὸ 12, 5. ἔτι 9 ἀπὸ 13, 4. ἔτι 4, ἀπὸ
 6, 2. καὶ ἔτι 7 ἀπὸ 9, 2. καὶ τὰ λοιπὰ γράφονται, ἢ

δὲ δοκιμὴ γίνεται, εἴαν συνάψωμεν τὸ λείψανον καὶ τὸν ἀφαιρετέον (§. 57.).

1296328

73876

1222452

1296328

§. 60. Φανερόν δὲ, εἴαν ὁ μειωτέος ἔχη μηδενικὰ, καὶ ὁ ἀφαιρετέος χαρακτήρα, καὶ τότε δέκα λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ μηδενικοῦ, καὶ προσθέτομεν ὁμοίως μονάδα εἰς τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ ἀφαιρετέου. Εἴαν δὲ μηδενικὸν ἔχη ὁ ἀφαιρετέος, καὶ ἄνω αὐτοῦ εὐρίσκεται χαρακτήρ, τότε γράφεται εἰς τὸ λείψανον ὁ χαρακτήρ τοῦ μειωτέου, εἰμὴ εἴαν ἔχωμεν μονάδα προηγουμένην, ὅπου εἰς τὸν πρὸ αὐτοῦ δεκάδα ἐλάβομεν, εἴαν δὲ μηδενικὸν ἔχη καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος, γράφεται μηδενικὸν καὶ εἰς τὸ λείψανον. Ὅταν τέλος ἴσοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ τοῦ μειωτέου, καὶ ἀφαιρετέου, τὸ λείψανον εἶναι σημεῖον μηδενικόν. καὶ

εἰς μὲν τὸ Α'. παράδειγμα λέγομεν 4 ἀπὸ 10,	6030
μένουσιν 6 λείψανον· 2 ἀπὸ 3 μένει 1 λείψανον· 0 ἀπὸ 0 μένει 0. 2 ἀπὸ 6 μένει	2014
4· καὶ ἔσαι 6030—2014=4016. εἰς δὲ	<u>4016</u>
τὸ δεύτερον λέγομεν 7 ἀπὸ 15, μένει 8.	β'. 8115
6 ἀπὸ 11 μένει 5. 1 ἀπὸ 1 μένει 0. 2	2057
ἀπὸ 8, μένει 6 καὶ ἔσαι τὸ λείψανον·	<u>6058</u>
6058. Εἰς δὲ τὸ Γ'. λέγομεν 6 ἀπὸ 14	γ' 6704
μένει 8· 6 ἀπὸ 10, μένει 4· 4 ἀπὸ 7	6356
μένει 3· καὶ 6 ἀπὸ 6 μένει 0. Εἰς δὲ τὸ	<u>0348</u>
Δ'. λέγομεν 8 ἀπὸ 16 μένει 8· 4 ἀπὸ	δ' 9000800106
10 μένει 6· 7 ἀπὸ 11 μένει 4· 2 ἀπὸ	43491638
10 μένει 8· 10 ἀπὸ 10 μένει 0· 5 ἀπὸ	<u>8957308468</u>
8 μένει 3· 3 ἀπὸ 10 μένει 7· 5 ἀπὸ 10	

μένει 5 · 1 ὅπὸ 10 μένει 9 · 1 ἀπὸ 9 μένει 8 · καὶ ἔσται τὸ λείψανον 8957308468 ἡ δοκιμὴ γενέσθω ὡς πρότερον (§. 52.)

§. 61. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν πολλοὺς ἀφαιτέους, νὰ ἀφέλωμεν ἀπὸ ἐνὸς μειωτέου, τότε ἡ ἀφαιρούμεν πρῶτον τὸν ἕνα ἀπὸ τοῦ μειωτέου, καὶ ἀπὸ τοῦ λειψάνου ἀφαιρούμεν ἕτερον, καὶ ἀπὸ τούτου τοῦ λειψάνου ἔτι ἕτερον καὶ καθεξῆς, ἕως νὰ ἀφαιρεθῶσιν ὅλοι οἱ ἀφαιρετέοι, ὡς ὅταν φέλωμεν ὅπὸ τῶν 45 νὰ ἀφέλωμεν τὸν 5 καὶ 8 καὶ 10 καὶ 4, ἀφαιρούμεν ὅπὸ τοῦ 45 πρῶτον τὸν 5, καὶ μένει λείψανον 40. καὶ ἀφαιρούμεν ἔτι ἀπὸ τοῦ 40 τὸν 8, καὶ μένει 32. καὶ ἔτι ὅπὸ τούτου τὸν 10, καὶ μένει 22. καὶ ἀπὸ τούτου τὸν 4, καὶ μένει 18. καὶ οὕτω

$45 - 5 - 8 - 10 - 4 = 18$. ἡ δεύτερον προσθέτομεν ὅλους τοὺς ἀφαιρετέους εἰς ἕνα κεφάλαιον, καὶ τοῦτο ἀφαιρούμεν κατὰ τοὺς ἀνωτέρω κανόνας ἀπὸ τοῦ μειωτέου, ὡς τὸ ἄνω παράδειγμα $5 + 8 + 10 + 4 = 27$ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν ἀφαιρετέων · τοῦτο δὲ ἀπὸ τοῦ 45 ἀφαιρεῖται οὕτω $45 - 27 = 18$. ὡς καὶ ἀνωτέρω εὗρομεν · καὶ ἀπὸ τούτου μαθηάνομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, ὅπου ἔχουσιν ὅμοια σημεῖα συνάπτονται εἰς ἓν, καὶ εἰς τὸ κεφ. προτίθεται τὸ κοινὸν σημεῖον ἡ καταφατικὸν εἶναι, ἡ ἀποφατικὸν, ὡς τὰ $-5 - 8 - 10 - 4$. ἐσυνάφθησαν εἰς κεφ. 27. καὶ τίθεται τὸ σημεῖον τὸ κοινὸν — οὕτω -27 . οἱ δ' ἀριθμοὶ, ὅπου ἔχουσι σημεῖα ἀνόμοια ἀφαιροῦνται, καὶ εἰς τὸ λείψανον προτίθεται τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ · ὡς ἄνω $45 - 27 = 18$. εἰ δὲ τὸ καταφατικὸν ἔλαττον, καὶ τὸ ἀποφατικὸν μείζον, ὡς $58 - 72$, τότε ἀφαιρούμεν τὸν καταφατικὸν ἀπὸ τοῦ ἀποφατικοῦ, καὶ εἰς τὸ λείψανον προτίθεμεν τὸ ἀποφατικὸν οὕτω

58—72=—14· ἐκφράζεται ἀπὸ τοὺς ἀριθμητικοὺς αὐ-
τοὺς ὁ κανὼν, τὰ ὅμοια συνάπτονται, τὰ δ' ἀνόμοια ἀ-
φαιροῦνται, καὶ τῷ λειψόνῳ προτίθεται τὸ σημεῖον τοῦ
μείζονος.

§. 62. Κατ' αὐτὸν τὸν κανόνα γίνεται καὶ ἡ Ἀπα-
γωγὴ τῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ ἀπλούσερον. Ἀπαγωγὴν δὲ
εἰς τὸ ἀπλούσερον λέγουσιν οἱ ἀριθμητικοί, ὅταν ἔχωμεν
πολλοὺς ἀριθμοὺς μὲ σημεῖα + καὶ —, καὶ συνάπτωμεν
ὅλους τοὺς καταφατικούς εἰς ἓν, καὶ ὅλους τοὺς ἀποφα-
τικούς εἰς ἓν, ὡς εἰς αὐτὴν τὴν σειράν.

—5+32+3—12+6—7—9. συνάπτομεν ἤδη τοὺς κα-
ταφατικούς +32+3+6=+41· καὶ τοὺς ἀποφατικούς
—5—12—7—9=—33, καὶ οὕτως ἡ ἔκφρασις

—5+32+3—12+6—7—9=41—33· καὶ φανερὸν ὅτι
ἀπλουστέρα ἡ ἔκφρασις 41—33, ἢ ἡ

—5+32+3—12+6—7—9. μ' ὅλον ὁποῦ εἶναι ἴσαι καὶ
αἱ δύο· ὁμοίως καὶ 534—152—312+33—28 εἰς ἀ-

πλούσερον ἀνάγεται, εἰάν τὰ ὁ-
μοια συνάψωμεν, ὡς εἰς τὸ πα-

ράδειγμα Α' καὶ Β' φαίνεται·

καὶ εἴτα τὰ ὅμοια ἀφείλωμεν οὕ-
τω 567—492. ἢ ἡ ἐνεργεῖα ἀ-

φαίρεσις, ὡς εἰς τὸ Γ'

567—492=75· καὶ εἶναι τῇ

ἀληθείᾳ

Α'	Β'
+ 534	— 152
33	— 312
567	— 28
	492

Γ'
567
— 492
075

534—152—312=33—28=567—492=75.

§. 63. Ἐπειδὴ δὲ τὸ καταφατικὸν ἐναντίον τῷ ἀ-
ποφατικῷ (§. 15.), καὶ συναναίροῦνται· ἄρα εἰς τὴν ἀ-
παγωγὴν εἰς τὸ ἀπλούσερον, ὅπου εἶναι ἴσοι ἀριθμοὶ μὲ

έναντία σημεία, σβύονται· ὡς $5-7+2-5+3+7$ · αὐτοῦ τὰ 5 καὶ -5 σβύονται· ὁμοίως τὰ -7 καὶ $+7$ ὡς ἀριθμοὶ ἴσοι καὶ μὲ ἐναντία σημεία· καὶ εἶναι $5-7+2-5+3+7=2+3=5$ · διότι $5+3+2+7=17$ καὶ $-7-5=-12$. ἄρα $17-12=5$. ἄρα μία ἐξίσωσις ἔχει τὰ δύο σκέλη ἴσα (§. 52.), ὡς $7+8-3=10-7+9$ · ἢ καὶ διὰ παρενθέσεως· $(7+8-3)=(10-7+9)$. ἐπειδὴ δὲ ἡ παρένθεσις ὡς εἰς ἀριθμὸς νομίζεται (§. 18.), καὶ εἶναι αἱ δύο ἴσαι· ἄρα εἰάν τὴν μίαν ἀπὸ τὴν ἄλλην ἀφέλωμεν, μένει μηδέν, οὕτω $(7+8-3)-(10-7+9)=0$ καὶ $(10-7+9)-(7+8-3)=0$ καὶ τῇ ἀληθείᾳ συναυairoῦται· διότι $7+8-3=12$ · καὶ $10-7+9=12$. λοιπὸν $12=12$ · καὶ $0=12-12$.

§. 64. Ἐκ τούτων γίνεσθαι φανερόν, ὅτι εἰάν ὅλους τοὺς χαρακτῆρας μετακομίσωμεν τοῦ ἐνὸς σκέλους τῆς ἐξίσωσεως εἰς τὸ ἕτερον μὲ σημεία ἐναντία, ἢ ἐξίσωσις εἶναι ἴση τῷ μηδενί· ὡς $7+8-3=10-7+9$. λοιπὸν ἢ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ (§. 52.) καὶ οὕτω $7+8=10-7+9+3$ · καὶ οὕτω $7=10-7-8+9+3$ ἄρα καὶ οὕτω $0=10-7-8+9+3-7$. ἀλλ' αὕτη ἡ ἐξίσωσις $0=10-7+9+3-8-7$ · εὔρηται (§. 63.) μετὰ παρενθέσεων οὕτω $0=(10-7+9)-(7+8-3)$ · λοιπὸν δύο κανόνας ἀπὸ τούτου εὐρίσκομεν.

α'. Ἡ παρένθεσις, ὁποῦ ἀφαιρεῖται, εἰάν οἱ ἀριθμοὶ γένωσιν ἀφαιρετέοι χωρὶς παρενθέσεως, πρέπει νὰ λάβῃ ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως ἕκαστος τὸ ἐναντίον σημεῖον ἀπὸ ἐκείνου, ὁποῦ ἔχει ἐντὸς τῆς παρενθέσεως, ὡς εἰς τὴν πρώτην φαίνεται ἐξίσωσιν.

β'. Ὁ μειωτέος ἔχει πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἰάν τε

καταφατικὸς ἢ, εἴν τε ἀποφατικός· ὁ δὲ ἀφαιρετέος λαμβάνει τὸ ἐναντίον σημεῖον, ὅπου ἔχει πρὶν τῆς ἀφαιρέσεως· δηλ· εἴν πρὶν τῆς ἀφαιρέσεως ἢν καταφατικός, εἰς τὴν ἀφαιρέσειν γίνεται ἀποφατικός· εἴν δὲ πρὶν τῆς ἀφαιρέσεως ἀποφατικός, εἰς τὴν ἀφαιρέσειν γίνεται καταφατικός. "Οθεν τετραχῶς γίνεται ἡ ἀφαίρεσις· ἢ ἀφαιρούμεν καταφατικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ καταφατικόν, ἢ ἀποφατικόν, ἀπὸ καταφατικόν, ἢ καταφατικόν ἀπὸ ἀποφατικόν, ἢ ἀποφατικόν ἀπὸ ἀποφατικόν.

Α'. "Οταν ἀφαιρούμεν καταφατικὸν ἀπὸ καταφατικόν, ἐπειδὴ ὁ μειωτέος μένει μὲ τὸ σημεῖόν του, καὶ ὁ ἀφαιρετέος λαμβάνει τὸ ἐναντίον σημεῖον πρὶν τῆς ἀφαιρέσεως, γράφεται ὁ ἀφαιρετέος μὲ ἀποφατικὸν σημεῖον· ὡς, ὅταν ἀφαιρῶμεν 7 καταφατικὰ ἀπὸ 13 καταφατικὰ, εἰς τὸ Α' παράδειγμα· καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ἀνόμοια, ἀφαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ, ὡς ἀνωτέρω, καὶ αὕτη ἡ κοινὴ ἀφαίρεσις.

$$\begin{array}{r} \text{Α'.} \\ + 13 \\ + 7 \\ \hline + 6 \end{array}$$

Β'. "Οταν δὲ ἀφαιρούμεν ἀποφατικὸν ἀπὸ καταφατικόν, ὡς εἰς τὸ Β' παράδειγμα, ὁ ἀφαιρετέος μεταβάλλεται εἰς καταφατικόν, καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ὅμοια, προσθέτονται, καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον μεταβάλλεται εἰς πρόσθεσιν ἡ ἀφαίρεσις· διότι τι ἄλλο εἶναι, ὅταν χρέος ἀφαιρούμεν τινος; ἢ τὴν περιουσίαν αὐξάνομεν.

$$\begin{array}{r} \text{Β'.} \\ + 24 \\ + 16 \\ \hline 40 \end{array}$$

Γ'. "Οταν ἀφαιρῶμεν καταφατικὰ ἀπὸ ἀποφατικὰ, γράφομεν τὸν μειωτέον μὲ τὸ σημεῖον του, καὶ τὸν ἀφαιρε-

τέον με τὸ ἐναντίον σημείου, ὡς εἰς τὸ Γ'. παράδειγμα,
 καὶ ἐπειδὴ καὶ αὐτοῦ τὰ σημεία εἶναι ὅμοια, Γ'.
 προσθέτονται, καὶ προτίθεται τὸ κοινὸν σημεῖον — 25
 καὶ τί ἄλλο εἶναι, ὅταν ἀπὸ χρέος ἀφαιρῶμεν $\pm$ 18
 περιουσίαν; ἢ ὅτι τὸ χρέος ἡυξήσαμεν. — 43

Δ'. Ὅταν δὲ ἀφαιρῶμεν ἀπὸ ἀποφατικὸν ἀποφατικὸν γρά-
 φεται ὁ μειωτέος με τὸ σημεῖόν του, καὶ ὁ ἀφαι- Δ'.
 ρετέος με τὸ ἐναντίον σημεῖον ὡς εἰς τὸ Δ'. πα- — 37
 ράδειγμα φαίνεται καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεία ἀνό- $\mp$ 24
 μοια, ἀφαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ καὶ προτίθεται τὸ — 13
 σημεῖον τοῦ μείζονος ὀρθοῦ εἰς τὸ λείψανον (§. 61.).
 Τὶ δὲ καὶ τοῦτο γίνεται ὅταν χρέος ἀφαιρῶμεν, ἢ ὅτι τὸ
 χρέος ἐλαττώνομεν; καὶ φανερόν, ἢ πράξις τοῦ πρώτου
 καὶ ἐσχάτου τρόπου εἶναι τῷ ὄντι ἀφαίρεσις, τοῦ δὲ δευ-
 τέρου καὶ τρίτου, πρόσθεσις· ὁ μαθητὴς ἄς σημειώσῃ κα-
 λῶς αὐτοὺς τοὺς κανόνας διὰ τὰ προχωρήσῃ πολλὰ εὐκολα.

§. 65. Τὶ λοιπὸν εἰάν τις μᾶς εἴπῃ, Θέλω νὰ μοι ἀ-
 φέλητε 57 ἀπὸ 13. ἢ μεγαλύτερον ἀριθμὸν ἀπὸ μικρότε-
 ρον; ἡμεῖς τότε γράφομεν τὸν μειωτέον 13 μετὰ σημεῖόν
 του, καὶ τὸν ἀφαιρετέον μετὰ τὸ ἐναντίον, καὶ ἀφαιροῦμεν
 τὸν μικρότερον ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον, καὶ εἰς τὸ λείψανον
 προσθέμεν τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος (§. 61.)· καὶ οὕτω
 τελοῦμεν καὶ αὐτὴν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς φαίνεται εἰς $\pm$ 13
 τὸ ἐξῆς παράδειγμα 13—57=—44. λέγομεν — 57
 ὅτι εὐγάλαμεν 57 ἀπὸ 13 καὶ ἔμειναν 44. — 44

§. 66. Ἀνωτέρω εἶπομεν, ὅτι ἡ ἀληθὲς ἀτὴ δοκιμὴ
 τῆς προσθέσεως εἶναι ἡ ἀφαίρεσις (§. 52.), ὅταν ἀπὸ τὸ
 κεφ. ἀφέλωμεν μέρη τινὰ πλὴν ἑνὸς, καὶ εἰάν τὸ λείψανον
 εἶναι ἴσον μετὰ τοῦ μέρους, εἶναι ἀληθὲς ἡ πρόσθεσις,

ὡς $5+7+3=15$ καὶ $15-7=8$ καὶ ἔτι ἐὰν πολλοὶ οἱ ἀφαιρετέοι, προσθέτοισιν αὐτοὺς εἰς ἓν κερ·, καὶ τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ὅλου τοῦ κεφαλαίου (β. 61.)· πλὴν καλῶς γίνεται ἀμέσως πρόσθεσις καὶ ἀφαιρέσις, ὅπερ καλεῖται προσθαφαίρεσις· διηλ: ἐὰν (β. 46.)· παρόδεγμα γ',

βέλοισιν καὶ δοκιμάσωμεν τὴν πρόσθεσιν
 $4456+2868+37+481+1526=9368$ αὐτῶν ὁρθή· καὶ
 καὶ ἀφαιρώμεν τὰ μέρη 2868, καὶ 37, καὶ 481 καὶ
 1526 , διὰ καὶ μένη τὸ 4456, διότι

$4456=9368-2868-37-481-1526$ · γράφομεν τὸ
 κερ· ὡς μεωτέον, καὶ τὰ λοιπὰ μέρη ὡς ἀφαιρετέους ὡς
 εἰς τὰ παρὰδείγματα φαίνεται, μονάδας + 9368
 πρὸς μονάδας, δεκάδας πρὸς δεκα· κτ. προ- — 2868
 τίθμεν καὶ εἰς ὅλους τοὺς ἀφαιρετέους τὸ — 37
 σημεῖον —, καὶ ἄγομεν τὴν γραμμὴν· λοι- — 481
 πὸν προσθέτοισιν ὅλας τὰς μονάδας τῶν ἀ- — 1526

4456

(β. 61.) τὸ κεφάλαιον ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου, ἔ-
 τα τὰς δεκάδας, ἐκαιουτάδας κτ. διηλ: λέγομεν 6 καὶ 1
 γίνονται 7, καὶ 7 γίνονται 14 καὶ 8, 22, ἄρα ἀπὸ 28
 μένει 6, καὶ γράφονται ὑπὸ τὴν γραμμὴν· ἐπειδὴ ὅμως
 εἰς τὸν μειωτέον δύο δεκάδας ἐλάδωμεν, λαμβάνομεν καὶ
 εἰς τοὺς ἀφαιρετέους 2 δεκάδας· ὅθεν 2 καὶ 2, 4· καὶ
 8, 12· καὶ 3, 15· καὶ 6, 21· ἄρα 21 ἀπὸ 26, μέ-
 νει 5, καὶ γράφεται· ἔτι ὁ 2 καὶ 5 γίνονται 7, καὶ 4,
 11, καὶ 8, 19· ἄρα 19 ἀπὸ 23 μένει 4, καὶ γράφε-
 ται· ἔτι 2 καὶ 1 γίνονται 3, καὶ 2, 5· ἄρα 5 ἀπὸ 9
 μένει 4, καὶ γράφεται· καὶ οὕτως εὐερίθῃ τὸ λεψάνον 4456,
 τὸ ζῆτονύμενον μίρος, καὶ ἔς· τῷ ὄντι ἀληθὴς ἡ πρόσθεσις.

§. 67. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖον + καὶ — πάντῃ ἐναντία (§. 15.), ἡμποροῦμεν δύο ὑποθέσεις πάντῃ ἐναντίας νὰ σημειώσωμεν τὴν μίαν μὲ τὸ εἶνα, καὶ τὴν ἑτέραν μὲ τὸ ἕτερον· τοῦτο εἶναι ἡ περιουσία καὶ τὸ χρέος, ἡ ζημία καὶ τὸ διάφορον· ἡ δόσις καὶ ἡ λήψις εἰς τὰς ληψοδοσίας, καὶ ἄλλα πολλὰ εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν. Εἰς τὸ πρακτικὸν θελομεν μάθῃ πόσῃ ὠφέλειαν προξενούσιν αὐτὰ εἰς τὴν κοινὴν ζωὴν.

§. 68. Τί εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἐμάθομεν (§. 52.), καὶ ὅτι διαφορῶς μεταβάλλεται, καὶ δὲν χαλᾷ (§. 52.), καὶ ὅτι ἐξ αὐτῆς κανόνας οὐκ ὀλίγους εὗρομεν (αὐτοῦ)· εἰάν ὁμῶς αὐτὴν κατὰ τάξιν ἐξακολουθήσωμεν, θελομεν εὖρη αὐτὴν πηγὴν ἀνεξάντλητον, καὶ δι' αὐτῆς ἀποδεικνύονται ἐπ' ἀληθείας ἅπειρα τοιαῦτα, ὥς ἡμεῖς κινδυνεύομεν νὰ ὀνομάσωμεν αὐτὴν προφητείαν, καὶ κατ' ἄλλους μαυτεῖον Ἀπόλλωνος, καὶ ψυχὴν ὅλης τῆς μαθηματικῆς. Διὰ τοῦτο ἡμεῖς δὲν φρουτίζομεν διὰ τὴν ἐταξίαν τῶν μαθηματικῶν, οἱ ὅποιοι ἀτάκτως καὶ ἀκαίρως αὐτὴν μεταχειρίζονται· ἀλλ' ἐπιμελούμενοι διὰ τὴν πρόοδον τῶν μαθητῶν μας, ὅπου αὐτὴ ἔχει χώραν, δὲν θελομεν παραβλέψαι αὐτὸ, διὰ νὰ γυμνάσωμεν τοὺς μαθητὰς κατ' ὀλίγον, νὰ καταλάβωσιν ἐντελῶς τὴν μεγίστην ὠφέλειαν αὐτῆς· διότι μὲ αὐτὴν ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἀναπόδεικτα ἀξιώματα αὐτῶν· διότι ἐμάθομεν (§. 52.) ὅτι ἡ πρόσθεσις $5+7=12$ εἶναι ἐξίσωσις, καὶ ἡ ἀφαιρέσις $15-8=7$, εἶναι ἐξίσωσις· εἰάν ὁμῶς ληφθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀφαιρέσεως $15-8=7$ γίνεται καὶ $15=7+8$ (§. 52.), τί λοιπὸν ἔγινεν εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἐξισώσεως ἀρθέντος τοῦ —8, ὅμοιου ὡσὰν νὰ ἠυξήσαμεν αὐτὸ τὸ μέ-

ρος μὲ 8, καὶ εἰς τὸ ἕτερον ὁμοίως ἠϋξήσαμεν καὶ αὐτὸ μὲ 8, καὶ δὲν ἐχάλασεν ἡ ἐξίσωσις. Ὅθεν ἐξέρχεται τὸ ἀξίωμα τῶν μαθηματικῶν.

Α'. „Ἐὰν τοῖς ἴσοις ἴσα προσθῇς, τὰ κεφάλαια ἴσα εἰσίν.

$$\begin{array}{r} \text{δὴλ: } 12=8+4 \\ +5=+5 \end{array}$$

$$12+5=8+4+5 \text{ ἥτοι } 17=17$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς προσθέσεως $7+8=15$, ἥτις καὶ οὕτως $7=15-8$ δὲν χαλᾷ, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ 8 ἀφηρέθη καὶ ἀπὸ τὸ ἐν μέρος, καὶ ἀπὸ τὸ ἕτερον τῆς ἐξισώσεως· ὅθεν ἐξέρχεται καὶ τὸ ἕτερον ὁξίωμα τῶν μαθηματικῶν.

Β'. „Ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφέλῃς, τὰ ἐγκαταλείπόμενα ἴσα εἰσίν.

$$\begin{array}{r} \text{δὴλ: } 12=8+4 \\ -5=-5 \end{array}$$

$$12-5=8+4-5, \text{ ὃ εἰς } 7=7$$

Ἐκ τούτων δὲ γίνεται φανερόν καὶ τὸ τρίτον.

Γ'. „Ἐὰν δύο ἐξισώσεων προσθέτομεν τὸ ἕτερον μέρος τῆς μιᾶς μὲ τὸ ἕτερον, καὶ τὸ ἕτερον μὲ τὸ ἕτερον, ἐξέρχεται πάλιν ἐξίσωσις (§. 68. ἐξ . . α'.)

$$\text{ὡς } 5+6-7=10-6$$

$$7-8+13=5+20-13, \text{ ἄρα}$$

$$\text{ὡς } 5+6-7+7-8+13=10-6+5+20-13$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἀπλούσερον ταύτην φέρωμεν (§. 62.), ἔσαι $16=16$.

:Δ'. „Ἐπεται δὲ καὶ ἀνάπαλιν :Δ'. Ἐὰν δύο ἐξισώσεις ἀπ' ἀλλήλων ἀφέλῳμεν μένει καὶ πάλιν ἐξίσωσις ὡς αὗται

$$\begin{array}{r} 5+6-7=10-6 \\ -(7-8+13)=- (5+20-13) \end{array}$$

$$5+6-7-7+8-13=10-6-5-20+13$$

Ἐὰν δὲ καὶ ταύτην εἰς τὸ ἀπλούστερον ἀγάγωμεν, εἶναι $-8=-8$, καὶ ἐκ τούτων ἀκολουθεῖ τὸ Ε'.

Ε'. Τὰ τρίτῳ τινὶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα. $5=8-3$. καὶ $5=14-9$. ἄρα καὶ $8-3=14-9$.

ΣΤ'. Εἰς δύο ἐξισώσεις, εἰάν τὸ ἐν σκέλος τῆς μιᾶς ἴσον τῷ ἐνὶ τῆς ἑτέρας, ἔσαι καὶ τὸ ἕτερον τῆς μιᾶς ἴσον τῷ ἑτέρῳ τῆς ἑτέρας· $4+5=3+6$, καὶ $4+5=8+3-2$. ἄρα καὶ $3+6=8+3-2$. ὅτι τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων τίθενται (§. 68. Α'). διὰ τοῦτο ἔπεται καὶ τὸ Ζ'.

Ζ'. „Ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ, εἰάν ὅλα τὰ σημεῖα τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως μεταβάλλωμεν τὰ καταφατικὰ εἰς ἀποφατικὰ, καὶ ταῦτα εἰς καταφατικὰ (§. 68. α', β', γ', δ'. ἐξ.). εἰς ἡ ἐξίσωσις $5-7+13=9-6+5+3$. αὕτη καὶ οὕτω δὲν χαλᾷ $-5+7-13=-9+6-5-3$. ἐπειδὴ ὁ ἴσος ἀριθμὸς καὶ εἰάν προσέθεται (Α') καὶ εἰάν ἀφαιρῇται, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ λείψανον ἴσον εἶναι· ἔπεται:

Η'. „Ἐὰν τοῖς ἀνίσοις ἴσα προσθῇς, ἢ εἰάν τοῖς ἴσοις ἄνισα προσθῇς, τὸ κεφ. ὅνισον γίνεται, μείζον δὲ τὸ μέγρος ἐκείνου, εἰς ὃ τὸ μείζον προσέθεται,

$$\begin{array}{r} \text{δηλ. } 6+4=10 \text{ ἢ } 8 < 10 \\ +7 > 5 \quad 7+3=4+6 \end{array}$$

ἔπεται τελευταῖον. $6+4+7 > 10+5 \quad 8+7+3 < 10+4+6$

Θ'. „Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἄνισα ἀφέλῃς, ἢ εἰάν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα, τὰ ἐγκαταλείπόμενα ἄνισα εἶναι· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀφαίρεσις ἐναντία τῇ προσθέσει (§. 52.), τὸ μέρος λοιπὸν ἀφ' οὗ ἀφαιρεῖται τὸ μείζον, γίνεται ἔλαττον, καὶ ἀνάπαλιν,

$$\begin{array}{rcl} \text{δηλ: } 7+5=12 & & \text{καὶ } 9>4 \\ -7>-5 & & -(4+3)=-7 \end{array}$$

$$7+5-7<12-5 \quad -4-3+9>-7+4$$

Ἀπὸ τούτων ὅλων γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἔκφρασις, ὅπου ἔχει μεταξύ τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος ἔχει τοὺς ἰδίους κανόνας, ὅσους καὶ ἡ ἐξίσωσις· διαφέρει μόνον καθ' ὃ τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσα, τὰ δὲ μέρη τῆς ἀνισότητος εἶναι ἄνισα· καὶ πρέπει τοῦτο καλῶς νὰ σημειωθῇ· διότι εἰς πολλὰ μέρη εὐρίσκεται ἡ ἀνισότης, καὶ ποικιλοῦται, καὶ μεταβάλλεται κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἐξισώσεως.

§. 69. Εἰς τὰ ἄλλα ἰδιώματα, ὅπου ἔχει ἡ ἐξίσωσις, τὸ κάλλιστον εἶναι ὅπου μὲ αὐτὴν λύομεν τὰ πλεονεκτήματα καὶ περιπλεγμένα προβλήματα. Ὅλη ἡ τέχνη εἶναι, ὅταν τις προβάλλῃ ἓν πρόβλημα, καὶ ζητῇ νὰ μάθῃ ἓνα ἄγνωστον ἀριθμὸν, τοῦτον τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν, νὰ τὸν σημειώσωμεν μὲ τὸ γράμμα χ , καὶ ἔπειτα καθὼς ἐκεῖνος προβάλλει, συνθέτομεν τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ κατασρώσωμεν μίαν ἐξίσωσιν, καὶ εἰς αὐτὴν εὐρίσκεται ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς· εὐκόλα μεταφέρομεν κατὰ τοὺς ἄνω κανόνας (§. 52. ε'. καὶ ζ'.) τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἓν μέρος, καὶ τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν μόνον εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐξισώσεως· καὶ τότε ὁ ἄγνωστος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν γνωστὸν· π.χ. εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην $7+\chi-13=5+12-3$ ζητεῖται τὸ χ πόσον εἶναι· λοιπὸν μετακρίνομεν κατὰ τὰ ἄνω (§. 52.) τὸν 7 καὶ 13 εἰς τὸ ἕτερον μέρος μὲ ἐναντία σημεῖα, καὶ μένει $\chi=5+12-3-7+13$. σύναψυμ τῶρα ὅλον τὸ γνωστὸν μέρος τῆς ἐξισώσεως, $5+12-3-7+13=20$ · ἄρα τὸ $\chi=20$ · ὅλη ἡ δυσκολία λοιπὸν συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὐρώμεν μίαν ἐξίσωσιν,

καὶ ἔπειτα εὐκόλως λύομεν τὸ πρόβλημα. Διὰ τὰ γυμνάζονται ὅμως οἱ μαθηταί, ἃς λύσωμεν εἰς τοῦτο τὸ μέρος δύο προβλήματα, καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν, καὶ διαιρέσειν τότε λύονται περισσότερα.

Π ρ ό θ λ η μ α Α'.

„Ένας ἔχων 60 παραδες, καὶ ἐλθὼν εἰς τὸ παζάρι, ἐξόδευσε 15 παραδες εἰς καρπούζια, 6 εἰς τὸ ψωμί, 18 εἰς χαθιάρι, ἔδωκε δὲ καὶ ἐλεημοσύνην εἰς τοὺς πτωχοὺς, καὶ ἐξέχασε πόσους παραδες ἔδωκεν εἰς αὐτοὺς, ἔμειναν εἰς τὴν τζέπην μόνον 5 παραδες.

Ζητεῖ λοιπὸν νὰ μάθῃ, πόσους ἔδωκεν εἰς πτωχοὺς; αὐτοῦ ζητοῦνται οἱ παραδες οἱ εἰς τοὺς πτωχοὺς, ὡς ἀγνωστοί· καὶ ἔωσαν οὗτοι ἴσοι τῷ χ. Διὰ τὰ εὐρώμεν ὅμως μίαν ἐξίσωσιν, πρέπει νὰ νοήσωμεν ὅτι ἐξόδευσεν ὅλους τοὺς 60 παραδες, πλην τῶν 5, ὅπου ἔμειναν· ἄρα τὸ ἔξοδον ὅλον $60 - 5$. αὐτὸ δὲ ὅλον τὸ ἔξοδον ἐδόθη εἰς καρπούζια, ψωμί, χαθιάρι καὶ πτωχοὺς· λοιπὸν εἶν' ὅλα αὐτὰ τὰ συνάψωμεν, οὕτω $15 + 6 + 18 + \chi$. εἶναι ἴσα μὲ ὅλον τὸ ἔξοδον, $60 - 5$. καὶ ἔγινεν ἡ ἐξίσωσις

$15 + 6 + 18 + \chi = 60 - 5$. Ἀς φέρωμεν τώρα ὅλα τὰ γνωστὰ μέλη τῆς ἐξίσωσεως εἰς τὸ ἕτερον μέρος μὲ ἐναντία σημεῖα (§. 2.), νὰ μείνῃ μόνον τὸ χ οὕτω $\chi = 60 - 5 - 15 - 18 - 6$, καὶ ἃς συνάψωμεν τὰ γνωστὰ· εὐρίσκεται τὸ $\chi + 16$, λοιπὸν 16 παραδες ἔδωκεν εἰς τοὺς πτωχοὺς· διότι $15 + 6 + 18 + 16 = 60 - 5$.

Π ρ ό θ λ η μ α Β'.

„Τρία παιδιὰ εἶχον μῆλα· τὸ μὲν πρῶτον εἶχε 15

μῆλα, τὸ δὲ δεύτερον 25. ἠρώτησαν καὶ τὸν γ'. πόσα μῆλα ἔχεις; εἰς τὸν πρῶτον συνάψῃ τὰ ἐδικά του μῆλα μετὰ τὰ ἐδικά μου εἰς ἓν κεφ.; ὁμοίως καὶ ὁ δεύτερος τὰ ἐδικά του μετὰ τὰ ἐδικά μου εἰς ἕτερον κεφ.; τὰ δύο κεφάλαια ὁμοῦ γίνονται 64. Ζητεῖται πόσα μῆλα εἶχεν ὁ τρίτος. Κατὰ τοὺς λόγους αὐτοῦ εἶχε μῆλα χ· τὰ μῆλα τοῦ πρώτου 15 μετὰ μῆλα τοῦ γ. γίνεται τὸ ἓν κεφάλαιον $15 + \chi$ καὶ τὰ μῆλα τοῦ δευτέρου 25 μετὰ τὰ μῆλα τοῦ γ. γίνεται ἕτερον κεφάλαιον $25 + \chi$ · αὐτὰ λοιπὸν τὰ δύο κεφάλαια ὁμοῦ εἶναι ἴσα μετὰ 64· καὶ εἶναι ἡ ἐξίσωσις $15 + \chi + 25 + \chi = 64$. Λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω μετακομίζονται ὅλοι οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ εἰς ἓν σκέλος, καὶ οἱ γνωστοὶ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως, οὕτω $\chi + \chi = 64 - 15 - 25$, ἥτοι $\chi + \chi = 24$. ὅταν δὲ τὰ δύο χ εἶναι ἴσον 24 τὸ ἓν $\chi = 12$ καὶ 12 μῆλα εἶχεν ὁ γ': διότι $15 + 12 + 25 + 12 = 64$. Πλέον περιπλεγμένα προβλήματα εἰς τοῦτο τὸ μέρος δὲν ἡμποροῦμεν νὰ λύσωμεν, διότι ἀκόμη πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν δὲν ἐμάθομεν· ὕστερον ὅμως θελομεν λύσει πάμπολλα· καὶ διὰ τοῦτο εἰς αὐτὰς τὰς ἐργασίας τῶρα μεταβαίνομεν.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Γ'.

Π ε ρ ῖ Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ο υ.

§. 70. **Α**νωτέρω ἐμάθομεν, ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶναι ἐναντία εἰς τὴν ἀφαίρεσιν (§. 52). ἐκεῖνα ὅπου ἡ πρόσθεσις εἰς ἓν ἡθροίζει, αὕτη τὰ ἐχώριζεν ἡμῖα εἰς τὴν αὕξησιν τοῦ προσοῦ, ἡ ἑτέρα εἰς τὴν μείωσιν (§. 86.). ἐδῶ ὅμως θελομεν ἰδῆ μίαν ἑτέραν συγγένειαν τῆς προσθέσεως μετὰ τὸν

πολλαπλασιασμόν· διότι καὶ ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη καταγίνεται εἰς τὴν αὐξήσιν τοῦ ποσοῦ· ὁ τρόπος ὅμως αὐτῆς τῆς αὐξήσεως γίνεται πάντῃ διάφορος· διότι ἐκεῖνη μόνου μέρη πολλά συναπτει εἰς ἓν κεφ'. καὶ αὐξάνει τὸν ἀριθμόν· ὁ Πολλαπλασιασμός ὅμως αὐξάνει τὸν ἀριθμόν, καθ' ὃ αὐτὸς ὁ ἴδιος ἀριθμὸς εἰς τὸν ἑαυτοῦ του ἐπισωρεύεται πολλααῖς φοραῖς, αὐτὸς ὁ ἴδιος εἰς τὸν ἑαυτοῦ του ἐντυλίεται, καθὼς καὶ ἡ βαρύτες αὐτὴ καθ' ἑαυτὴν ἐπισωρεύεται εἰς τὰ σώματα, ὅπου πίπτουσι. Μία ἐνέργεια λοιπὸν, ὅπου αὐτὴ πρὸς ἑαυτὴν ἐπισωρεύεται, καὶ αὐξάνει, λέγεται ἐσωτερικὴ, καὶ νοητὴ ὡς καὶ ἡ βαρύτες, καὶ πολλαὶ δυνάμεις τῶν ζώων· ὅθεν καὶ καλεῖται ἡ μὲν Πρόσθεσις ἐξωτερικὴ, παρασατικὴ, ὁ δὲ Πολλαπλασιασμός ἐσωτερικὸς, νοητός· διὰ τοῦτο καὶ οἱ παῖδες εὐκολώτερον συνάπτουσι, ἢ πολλαπλασιάζουσι· ὅτι ἡ Πρόσθεσις αὐξάνει τὸ ποσοῦν μόνου κατὰ μήκος, ὁ δὲ Πολλαπλασιασμός καὶ κατὰ βάθος, καθὼς κατωτέρω θελομεν μάθῃ· καὶ τὸ βάθος ἐσωτερικὸν λέγεται. Ἐξεύρω ὅτι πολλοὶ, καὶ σχεδὸν ὅλοι λέγουσι, ὅτι ὁ Πολλαπλασιασμός εἶναι πάλιν πρόσθεσις· διότι τὸ ἴδιον εἶναι λέγουσι, εἰάν εἴπωμεν πέντε φοραῖς πέντε γίνονται εἴκοσι πέντε, καὶ εἰάν τὰ 5, πέντε φοραῖς γράψωμεν, καὶ συνάψωμεν· πλὴν ἅς σοχασθῶσι ὅτι ὁ δευτερός τρόπος εἶναι πρόσθεσις, καὶ δὲν εἶναι ἡ ἔννοια ἡ πρώτη, μόνου τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ αὐτό· καθότι ἡ πρόσθεσις ἔχει συγγένειαν μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν, ἢ ἐνέργεια ὅμως τοῦ νοῦς εἶναι παντελῶς διάφορος· διότι εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν ὁ νοῦς ἀμέσως κρίνει εἰς τὸ 5 φοραῖς 5, τὰ 25. εἰς δὲ τὴν πρόσθεσιν κρίνει 5 καὶ 5 γίνονται 10. καὶ δευτέρου 10 καὶ 5 γίνονται 15 καὶ τρίτου 15 καὶ 5 γίνου-

ται 20, καὶ τέταρτον 20 καὶ 5 γίνονται 25. ποίαν λοιπὴν ὁμοιότητα ἐκείνη ἢ ἐνέργεια τοῦ νοῦς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μὲ αὐτὴν τῆς προσθέσεως ἔχει; εἰς ἐκείνην ἔγινεν ἅπαξ καὶ ἀμέσως ἡ ἐπισώρευσις, εἰς ταύτην δὲ κατὰ μέρους ἀπὸ ἑνα ἑνα. Ὁ καιρὸς ἐδῶ δὲν μοι συγχωρεῖ νὰ εἰπῶ περὶ σσότερα, καὶ σοχάζομαι ἱκανὸν νὰ δείξω τὸ ἐξωτερικὸν τῆς Προσθέσεως, καὶ ἐσωτερικὸν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.

§. 71. Ἐπειδὴ δὲ ἡ φύσις τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ εἶναι (§. 70.) νὰ ἐπισωρεύηται ὁ ἴδιος ἀριθμὸς πρὸς ἑαυτὸν πολλαῖς φοραῖς· τοῦτο τὸ πολλαῖς φοραῖς ἀδιορίζως λέγεται Πολλαπλάσιον, ἢ Πολλάκις· λοιπὸν μόνον εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμβαίνει τὸ Πολλαπλάσιον, Πολλάκις, καὶ Πολλαῖς φοραῖς κοινότερον· καὶ ἐκ τοῦτου Πολλαπλασιασμὸς λέγεται. ὅταν ὅμως αὐτὰ ὡς ἀόριστα διορισθῶσι, λαμβάνουσι διαφόρους διορισμοὺς κατὰ τὴν τάξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μὲ 1, 2, 3, 4, κτ. διότι ὅταν διορισθῇ λ. χ. μὲ τὰ 2 λέγεται διπλάσιον, ἢ διπλοῦν· μὲ τὰ 3, τριπλάσιον ἢ τριπλοῦν, ἢ καὶ τριάκις, ὅπερ σημαίνει ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς τρεῖς φοραῖς ἐπεσωρεύθῃ· μὲ τὰ 4 δὲ τετραπλάσιον, ἢ τετραπλοῦν, ἢ τετράκις· ὁμοίως καὶ πενταπλάσιον, πενταπλοῦν, πεντάκις· καὶ 6 πλάσιον 6 πλοῦν, 6κις. καὶ 7 πλάσιον, 7 πλοῦν, 7κις. καὶ μὲ κάθε ἄλλον ἀριθμὸν διορίζεται ὡς 24 πλάσιον, 24 πλοῦν, 24κις. δηλ. εἴκοσι τέραςσεῖς φοραῖς, καὶ 100 πλάσιος, 1000 πλοῦν, 1000κις. χιλιάκις ἤτοι χίλιας φοραῖς· λοιπὸν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπαιτεῖται ἓνας ἀριθμὸς, ἵπου πολλαῖς φοραῖς εἰς ἑαυτὸν ἐπισωρεύεται (§. 70.), καὶ οὗτος ὡς θέσις δίδεται, καὶ εἶναι φανερός· ἀπαιτεῖται δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὅπου διορίζει πόσαις φοραῖς αὐτὸς εἰς ἑαυτὸν νὰ ἐπισω-

ρευθῇ· δύο ἢ 3, ἢ 5, ἢ 9 κτ. καὶ οὕτως πρέπει νὰ δοθῇ,
 καὶ νὰ ᾔηται φανερός· ὥς ὅταν τις λέγῃ, πολλαπλασιάσων
 τὸν 5 μὲ 4· δὲν λέγει ἄλλο, εἰμὴ ἐπισώρευσον τὸν 5 εἰς
 αὐτὸν τὸν ἰδίου 4 φοραῖς νὰ μάθωμεν πόσος εἶναι αὐτὸς
 ὁ σωρός. Λοιπὸν ἄγνωστος εἶναι ἡ ἐπισώρευσις, καὶ ζητεῖ-
 ται ἐκεῖνος ὁποῦ γίνεται, ὅταν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐπισωρευ-
 θῇ τόσαις φοραῖς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἕτερος δοθεὶς ἀριθ-
 μὸς, ὃ, τι λογιῆς εἶναι ὁ 20. διότι 4 φοραῖς 5, 20 γί-
 νονται. Ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ πολλαῖς φοραῖς ἐπισωρεύεται αὐ-
 τὸς καθ' ἑαυτὸν ὥς εἰς τὸ παράδειγμα μας ὁ 5, λέγεται
 Πολλαπλασιασέος· ἐκεῖνος δὲ, ὁποῦ δέχεται πάσαις φο-
 ραῖς πρέπει αὐτὸς νὰ ἐπισωρευθῇ, λέγεται Πολλαπλα-
 σιασῆς ὥς ὁ 4. καὶ αἱ δύο ὁμῶς ὁμοῦ ἔχουσι κοινὸν ἔ-
 νομα, διὰ τὴν ἐξῆς αἰτίαν, παράγουτες. Ὁ ἀριθμὸς δὲ,
 ὁποῦ ζητεῖται, ὁ ἄγνωστος, λέγεται Παραγόμενον, ἢ Γε-
 νόμενον, ὥς ὁ 20. Οἱ δὲ μαθηματικοὶ διὰ νὰ χαρακτη-
 ρίσωσιν αὐτὴν τὴν ἐνέργειαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λαμ-
 βάνουσι δύο σημεῖα, τὸ ἐν ἀπὸ τὴν συγγένειαν τοῦ πολ-
 λαπλασιασμοῦ μὲ τὴν πρόσθεσιν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς προ-
 σθέσεως +. πλὴν διὰ τὸ διάφορον, θέτουσιν αὐτὲ μεταξὺ
 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ πολλαπλασέου πλαγίως, οὕτω X.
 τὸ ἕτερον δὲ ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι μία
 σελήνη, τὴν ὁποῖαν ζῖζουσι μεταξὺ αὐτῶν οὕτως, διότι
 καὶ ἡ σελήνη ἐσωτερικὴ· ὅθεν ἢ οὕτω 4X5, ἢ οὕτω 4.5,
 σημαίνει ὁ 5 τὰ ληφθῇ 4 φοραῖς· αὐτὰ δὲ τὰ σημεῖα
 ἐκφράζονται ἢ μὲ τὴν ἐπὶ πρόσθεσιν, ὥς 4 ἐπὶ 5 γίνου-
 νται 20, ἢ μὲ τὴν κατάληξιν κίς· ὥς 4κίς 5, γίνονται
 20. ἢ μὲ τὸ φοραῖς κοινῶς ὥς 4 φοραῖς 5 γίνονται 20.
 κοινότερον ὁμῶς εἰς τὴν ἀπλὴν διόλεχτον ἐκφράζομεν τὰ ση-
 μεῖα μὲ τὸ Οἰ. ὥς 4 οἰ 5 γίνονται 20. καὶ ἡμπορεῖ καθ' ἑ-

νας να ἐκφράσῃ αὐτὰ, ὅπως θέλῃ κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τρό-
πους· ἡμεῖς ὅμως πολλαῖς φοραῖς ἢ μὲ τὴν Ἐπί, ἢ μὲ τὸ
Οἶ, ἐκφράσομεν αὐτὰ διὰ τὸ σύντομον· ὡς 3×4 · ἢ 3. 4,
τρεῖς οἱ τέσσαρες 12. ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο 4×5 , δὲν ση-
μαίνει ἄλλο, εἰμὴ τὸ παραγόμενον· ἄρα $4. 5 = 20$. καὶ
πάλιν ἐμφιλοχωρεῖ ἡ ἐξίσωσις καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.
(§. 37.). καὶ φανερόν ἡ αὐτὸν 4. 5, ἢ αὐτὸν 20 να λά-
βωμεν, εἶναι ἀδιάφορον (§. 18.).

§. 72. Τώρα γίνεται φανερός καὶ ὁ ὀρισμὸς, ὁποῦ δίδου-
σιν οἱ ἀριθμητικοὶ εἰς τὸν Πολλαπλασιασμόν. Πολλαπλα-
σμός εἶναι, λέγουσι, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρεσις ἐνὸς
ὁγνώσου, εἰς τὸν ὁποῖον τόσαις φοραῖς εὐρίσκεται ὁ ἕτε-
ρος τῶν δοθέντων, ὅσαι φοραῖς ἡ μὴ εὐρίσκεται εἰς τὸν
ἕτερον· δηλ: $4. 5 = 20$. εἰς τὸν 20 εὐρίσκεται ὁ 5 τέσ-
σαραις φοραῖς, καθὼς καὶ ἡ μὴ εὐρίσκεται εἰς τὸν 4. καὶ
ἔτι εἰς τὸν 20 εὐρίσκεται ὁ 4, 5 φοραῖς, καθὼς καὶ ἡ μὴ
εἰς τὸν 5 εὐρίσκεται. Καὶ κατὰ τοῦτον τὸν ὀρισμὸν λέ-
γονται καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς, καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος κοι-
νῶς παράγοντες (§. 71.). καὶ τῇ ἀληθείᾳ εἰς τοὺς ἀφηρη-
μένους ἀριθμοὺς εἶναι ἀδιάφορον, καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς
να γένη πολλαπλασιαστέος, καὶ οὗτος, ἐκεῖνος· διότι τὸ ἴ-
διον εἶναι να εἰπῶμεν 4 οἱ 5 γίνονται 20. καὶ 5 οἱ 4 πά-
λιν 20. διότι $4 \times 5 = 20$ καὶ $5. 4 = 20$. εἰς αὐτὸν τὸν ὀ-
ρισμὸν δὲν διορίζεται τὸ παραγόμενον, ἂν τὴν φύσιν τοῦ
πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνῃ, ἢ τὴν φύσιν τὴν πολλαπλασια-
στέου· εἰς δὲ τὸν ἡμέτερον ὀρισμὸν διασαφηνίζεται ὅτι τὸ
παραγόμενον πρέπει να ἔχῃ τὴν φύσιν καὶ τὴν ὀνομασίαν
τοῦ πολλαπλασιαστέου· καὶ ὁ πολλαπλασιασῆς δὲν εἶναι ἄλ-
λο, παρὰ διορισμὸς πόσαις φοραῖς να ἐπισωρευθῇ ὁ πολ-

λαπλασιαστέος εἰς ἑαυτὸν (§. 70.). διότι ὅταν μᾶς ζητῇς·
 νὰ μάθῃ ὅλην τὴν τιμὴν τῶν 5 καρπούζιων ἀπὸ 4 πα-
 ράδες, δὲν ἐπισωρεύονται τὰ καρπούζια εἰς τὸ παραγόμε-
 νον, ὁλλ' ὁ ὁριθμὸς 4 παράδες φοραῖς· καὶ πολλαπλα-
 σιαστέος εἶναι αἱ παράδες, καὶ τὸ παραγόμενον ἔχει τὴν φύ-
 σιν τοῦ πολλαπλασιαστέου 20 παράδες, καὶ οὐχὶ τοῦ πολ-
 λαπλασιαστοῦ 20 καρπούζια· ἀπὸ τὸν ἡμέτερον ὁρισμὸν
 γίνεται καὶ τοῦτο φανερόν, ὅτι ὁ Πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ
 Πολλαπλασιαστής δύνανται νὰ ᾄναι καὶ τῆς αὐτῆς φύσεως,
 καὶ διαφόρου· διότι τὰ ἄνω παραδείγματα γίνονται φανερά,
 ὅτι καὶ παράδες· με παράδες, καὶ παράδες· με καρπούζια
 πολλαπλασιάζονται· καὶ αὐτὰ πρέπει ὁ ἀρχάριος καλὰ νὰ
 παρατηρήσῃ, διὰ νὰ γένῃ ἐπιτήδειος εἰς τὴν πράξιν, καὶ
 νὰ νοῇ τὰ ἀδιασάφιστα, καὶ ἀνώμαλα, καὶ ἀτελῆ βιβλία
 τῶν μαθηματικῶν.

§. 73. Ἡμεῖς ἀνωτέρω (§. 18.). εὗρομεν μὲ τὴν
 σύναψιν τῆς μονάδος δέκα χαρακτήρας 1, 2, 3, 4, 5, 6,
 7, 8, 9, 10. καὶ αὕτη εἶναι ἡ πρώτη καὶ ἀρχικὴ περίο-
 δος (§. 18.). Ἐπειδὴ ὁμῶς χαρακτηριστικὸν τοῦ πολλαπλα-
 σιασμοῦ εἶναι τὸ πολλαπλόσιον (§. 71.), διὰ νὰ ἀπιτελῶ-
 μεν ἐλευθέρως κάθε πολλαπλασιασμὸν, πρέπει ἐν πρώτοις
 νὰ μάθωμεν ἐκ σήθους τὸ πολλαπλάσιον ὅλων τῶν δέκα χα-
 ρακτήρων τούτων τῶν ἀπλῶν· δηλ: ὅλων αὐτῶν τὸ διπλά-
 σιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, 5 πλάσιον, 6 πλάσιον
 7 πλάσιον, 8 πλάσιον, 9 πλάσιον, ἕως εἰς τὸ 10 πλάσιον.
 δηλ: νὰ μάθωμεν ἐκ σήθους κάθε ὁριθμὸν ἀπὸ τοὺς δέκα
 αὐτοὺς τί γίνεται, εἰὰν ληφθῇ δύο φοραῖς, τρεῖς, τέσσα-
 ραῖς, ἕως εἰς τὰς 10. καὶ ὅταν αὐτοὺς ἐτοίμως προσφέρω-
 μεν, τότε εὐκόλως καὶ ὅλους τοὺς ὁριθμοὺς τῶν ἀνωτέρω

περιόδων πολλαπλασιάζομεν. Τούτους δὲ τοὺς μαυθάνομεν
κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον.

1 - 1 = 1	3 - 3 = 9	6 - 6 = 36
1 - 2 = 2	3 - 4 = 12	6 - 7 = 42
1 - 3 = 3	3 - 5 = 15	6 - 8 = 48
1 - 4 = 4	3 - 6 = 18	6 - 9 = 54
1 - 5 = 5	3 - 7 = 21	6 - 10 = 60
1 - 6 = 6	3 - 8 = 24	
1 - 7 = 7	3 - 9 = 27	7 - 7 = 49
1 - 8 = 8	3 - 10 = 30	7 - 8 = 56
1 - 9 = 9	4 - 4 = 16	7 - 9 = 63
1 - 10 = 10	4 - 5 = 20	7 - 10 = 70
	4 - 6 = 24	
	4 - 7 = 28	8 - 8 = 64
2 - 2 = 4	4 - 8 = 32	8 - 9 = 72
2 - 3 = 6	4 - 9 = 36	8 - 10 = 80
2 - 4 = 8	4 - 10 = 40	
2 - 5 = 10	5 - 5 = 25	9 - 9 = 81
2 - 6 = 12	5 - 6 = 30	9 - 10 = 90
2 - 7 = 14	5 - 7 = 35	
2 - 8 = 16	5 - 8 = 40	10 - 10 = 100
2 - 9 = 18	5 - 9 = 45	
2 - 10 = 20	5 - 10 = 50	

Τοῦτο τὸ πολλαπλάσιον τῶν δέκα χαρακτήρων ἐκφρά-
ζει ὁ Πυθαγόρας εἰς ἓν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὰς ἐφε-
ξῆς πλευρὰς διαιρεῖ εἰς δέκα ἴσα μέρη, καὶ εἰς κάθε μέρος
γράφει τοὺς δέκα χαρακτῆρας. Εἰς μὲν τὴν μίαν πλευρὰν
ἄρχεται ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τῶν 10, ἀπὸ ἄνω εἰς τὰ κάτω·
εἰς δὲ τὴν ὀριζοντικὴν πλευρὰν γράφει ἑτέρους δέκα χαρακ-
τῆρας, ἀπὸ τῆς 1 ἕως τῶν 10 ἀπὸ ἀριστερὰ εἰς τὰ δεξιὰ,

καὶ εἰς κάθε τμήμα ἔχει παραλλήλους, καὶ γίνονται 100 μικρὰ τετράγωνα· καὶ εἰς ἕκαστον τούτων γράφει τὰ παραγόμενα, ὡς φαίνεται κατωτέρω· διὰ τοῦτο αὐτὸ τὸ τετράγωνον "Αδὰξ Πυθαγορικὸς λέγεται, ἢ Πίναξ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

„Ἐὰν τοῦτον τὸν "Αδὰκα δὲν ἐκξηθίσῃ ὁ πρωτόπειρος,
 „ὅς μὴ τολμήσῃ περαιτέρω εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν,
 „ναὶ προχωρήσῃ.

§. 74. Ἀπὸ τοῦ πρώτου διαγράμματος, καὶ τοῦ Πυθαγορικῷ "Αδὰκος μαθαίνομεν.

α'. Ὅτι ἡ μονὰς δὲν μεταβάλλει τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάζουσα, ἀλλὰ μένει ὁ αὐτὸς, ὡς $1 \cdot 5 = 5$, καὶ $1 \cdot 30 = 30$, καὶ $1 \cdot 531 = 531$ · διὰ τοῦτο καὶ μονοπλάσιος ἀριθμὸς δὲν λέγεται· διότι πολλαπλασιάζουσα δὲν μεταβάλλει τὸ ποσὸν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς μείζον, ἢ ἑλάττον κατὰ τὸ ἰδίωμα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§. 71.)· καὶ μάλιστα αὕτη καθ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένη οὔτ' αὖξῃσιν, οὔτ'

ἐλάττωσιν ἐπιδέχεται· ἀριθμὸν οἱ παλαιοὶ ἔλεγον, ὅς τις συναπτόμενος καθ' ἑαυτὸν ἐλάττων γίνεται, ἢ πολλαπλασιαζόμενος· ἡ δὲ μονὰς συναπτομένη $1 + 1 = 2$ γίνεται, πολλαπλασιαζομένη δὲ 1. $1 = 1$ γίνεται.

β'. Μανθάνομεν, ὅτι καὶ ὁ δύο δὲν εἶναι ἀριθμὸς (§. 10.)· διότι ὅταν πολλαπλασιάσῃ, μεταβάλλει κάθε ἀριθμὸν, πλην ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ αὐτὸν καὶ ἡ πρόσθεσις δίδει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κεφ. καὶ παραγόμενον· καὶ οὕτως οὐδεμία διάκρισις μεταξύ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται· διότι καὶ $2 \cdot 2 = 4$ καὶ $2 + 2 = 4$ · καὶ ἔτι $2 \cdot 3 = 6$ · καὶ τέλος τὸ διπλάσιον πολλαπλάσιον δὲν λέγεται, ἀλλ' ἄρχεται ἀπὸ τὸ τριπλάσιον. (§. 71.)

Π ρ ό θ λ η μ α Α'.

§. 75. Ἐὐνοδοθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος, καὶ ὁ πολλαπλασιαστῆς ἀπλοῦς, νὰ εὕρωμεν τὸ παραγόμενον· τοῦτο εὐκόλως λύεται, εἰν ἐκσηθίσασμεν τὸν "Αθακά, καὶ εἰν εἰς τὰ ἐξῆς προσέξωμεν.

α'. Τὸν πολλαπλασιαστέον γράψον.

β'. Ὑπὸ τὴν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστέου γράψον καὶ τὸν πολλαπλασιαστήν.

γ'. Ἀχθήτω γραμμὴ ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν. (§. 44.)

δ'. Πολλαπλασιάσον κατὰ τὸν "Αθακά μὲ τὸν πολλαπλασιαστὴν πρῶτον τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ γράψον αὐτὸ τὸ παραγόμενον, ὥς ὁ δεξιώτατος χαρακτήρ αὐτοῦ, νὰ πίπτῃ εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου, εἶτα πολλαπλασιάσον καὶ τὰς δεκάδας μὲ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ τὸ παραγόμενον γράψον, ὥς ὁ δεξιὸς χαρακτήρ αὐτοῦ νὰ κεῖται ὑπὸ τὸν τόπον τῶν

δεκάδων, εἴτα πολλαπλασιάσων καὶ τὰς ἑκατοντάδας με-
τὸν αὐτὸν, καὶ γράψων τὸ παραγόμενον, ὥς ὁ δεξιὸς χα-
ρακτήρ νὰ ᾔηται ὑπὸ τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων, καὶ οὕτω
γενέσθω καὶ εἰς τὰς χιλιάδας κτ.

ε'. Σύναψον αὐτὸ ὅλα τὰ παραγόμενα εἰς ἓν κεφάλαιον
κατὰ τοὺς νόμους τῆς προσθέσεως (§. 44.), καὶ τοῦτο
τὸ παραγόμενον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός· π. χ. Ἐδό-
θη ὁ πολλαπλασιασμός 2567 καὶ ὁ πολλαπλασιαστής 5· καὶ
ζητεῖται τὸ παραγόμενον· διὸ γράφεται ὁ 2567 καὶ 5,
ὥς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται, καὶ ἄγεται ἡ γραμμή·
(α', β', γ'.) εἴτα λέγομεν, 2567 πολλαπλασιασμός
 $5 \times 7 = 35$, καὶ γράφεται 5 πολλαπλασιαστής.

(δ'.) ἔπειτα 5. $6 = 30$, καὶ 35 A
γράφεται (δ'.) καὶ ὁμοίως 300 B
5. $5 = 25$, καὶ γράφεται 2500 Γ κατὰ μέρος
10000 Δ

(δ'.) καὶ τέλος 2. $5 = 10$ —
καὶ γράφεται· εἴτα συνάψ- 12835 παραγόμενον ὅλον
τομεν τὰ παραγόμενα Α, Β, Γ, Δ· καὶ τὸ κεφάλαιον
12835, εἶναι τὸ ζητούμενον παραγόμενον. δεῖξεις

Τὸ παραγόμενον 35 εἶναι τὸ πενταπλάσιον τῶν μονά-
δων 7· τὸ δὲ παραγόμενον 300, εἶναι τὸ πενταπλάσιον
τῶν δεκάδων 6· διότι 30 δεκάδες 300 μονάδες γίνονται·
τὸ δὲ παραγόμενον 2500, εἶναι τὸ πενταπλάσιον τῶν ἑκα-
τοντάδων 5· διότι 25 ἑκατοντάδες 2500 μονάδες γίνον-
ται· καὶ τὸ παραγόμενον 10000 εἶναι τὸ πενταπλάσιον
τῶν 2 χιλιάδων· ἀλλ' ὅλα ταῦτα ὁμοῦ εἶναι = 12835
(§. 34.)· ἄρα ὁ 12835· εἶναι ὅλον τὸ πενταπλάσιον τοῦ
2567, καὶ ἔτσι $2567 \times 5 = 12835$.

„Συνομώτερον δὲ γίνεται κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον· ὥς

γραφῇ τὸ ἴδιον παράδειγμα ὡς ἄνω ὁ πολλαπλα- 2567
 σιαστέος 2567 καὶ ὁ πολλαπλασιασθῆς 5, πολλα- 5
 πλασιαζόμεν τὰς μονάδας 7 μὲ τὸν πολλαπλα- 12835
 σιασθῆν 5, καὶ τὸ παραγόμενον εἶναι ἦναι μὲ ἓνα χαρακτῆ-
 ρα, γράφεται ὑπὸ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου· εἶναι
 δὲ ἦναι μὲ δύο χαρακτῆρας, τὸν 5. $7 = 35$
 δεξιὸν μόνον γράφομεν, καὶ τὸν 5. $6 = 30$ καὶ $3 = 33$
 ἄριστερόν ἔχομεν εἰς τὴν μνήμην, 5. $5 = 25$ καὶ $3 = 28$
 ὡς 5. $7 = 35$. ὁ 5. μόνον γρά-
 φεται, καὶ ὁ 3 μένει· εἶτα πολλαπλασιαζόμεν καὶ τὰς δε-
 κάδας 6 μὲ τὸν 5, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ παραγόμενον
 τὸν 3, ὅπου ἔχομεν εἰς τὴν μνήμην, εἶτα πολλαπλασιάζο-
 μεν καὶ τὰς ἑκατοντάδας 5 μὲ τὸν 5, 5. $5 = 25$, καὶ
 προσθέτομεν καὶ τὸν πρῶτον ἄριστερόν $3 = 28$, καὶ γρά-
 φεται ὁ 8, καὶ ὁ 2 τηρεῖται· εἶτα καὶ τὰς χιλιάδας μὲ
 τὸν 5 οὕτω, 5. $2 = 10$, καὶ ὁ 2 ὁ ἐν τῇ μνήμῃ 12,
 καὶ γράφεται· καὶ τοῦτο τὸ παραγόμενον εἶναι τὸ ζητού-
 μενον· καὶ ἐπειδὴ εὐρέθη ἴσον μὲ τὸν πρῶτον, ἄρα καὶ
 οὗτος ὁ τρόπος ὀρθός.

„Ἐξω καὶ ἑτέρου παράδειγμα τὸ Β': ἐν ᾧ ζητεῖται ὁ
 ἀριθμὸς 56183, καὶ πολλαπλασιασθῆ μὲ 7 κα- Β'
 τὰ τὸ ἄνω παράδειγμα· λέγομεν καὶ αὐτοῦ 3 οἷ 56183
 $7 = 21$, γράφομεν 1· εἶτα 7 οἷ $8 = 56$ καὶ _____ 7
 $2 = 58$, γράφομεν μόνον 8. εἶτα 1 οἷ $7 = 7$, 393281
 καὶ $5 = 12$, γράφομεν τὸν 2, εἶτα 6 οἷ $7 = 42$ καὶ 1,
 43, γράφομεν 3· καὶ ἔτι 5 οἷ $7 = 35$, καὶ 4, = 39·
 καὶ γράφομεν καὶ αὐτὸν, καὶ οὕτω $56183 \times 7 = 393281$.

Ἐὰν δ' εὐρεθῇ μηδενικὸν σημεῖον εἰς τὸν πολλαπλα-
 σιασμόν, πάλιν μηδενικὸν παραγόμενον δίδει· διότι τὸ

μηδενικὸν ὅσαις φοραῖς ἐπισωρευθῇ, πάλιν μηδενικὸν γίνεται· ὅθεν μ' ὅ, τι ἀριθμὸν πολλαπλασιασθῇ τὸ μηδενικόν, δὲν δίδει ποτὲ ἀριθμὸν· διότι $0 \cdot 7 = 0$. καὶ $7 \cdot 0 = 0$. καὶ $56 \cdot 0 = 0$. καὶ τοῦτο γίνεται φανερόν ἀπὸ τὸν ὀρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§. 70.). ὅθεν εἰς τοῦτο τὸ Γ'. παράδειγμα φαίνεται, ὅτι τὸ μηδενικὸν δὲν γράφομεν, εἰμὴ ἐὰν ἔχωμέν τι ἀπὸ τὸ πρότερον παραγόμενον·

διότι λέγομεν 1 οἱ $8 = 8$. καὶ γράφεται· $\begin{array}{r} 530071 \\ 8 \\ \hline 4240568 \end{array}$
 7 οἱ $8 = 56$, γράφομεν 6 καὶ ἔχομεν 5.
 8 οἱ 0, 0. καὶ γράφομεν τὸν 5, ὅπου ἔχομεν· 8 οἱ 0, 0 καὶ γράφομεν 0. 3 οἱ 8, 24, γράφομεν 4, καὶ ἔχομεν 2. 5 οἱ 8, 40, καὶ $2 = 42$ γράφομεν 42, καὶ εἶναι $530071 \times 8 = 4240568$.

„Τὸν αὐτὸν τρόπον πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ Δ'. καὶ Ε', παράδειγμα, καὶ ὅλα ὅσα ἔχουσι, πολλαπλασιασθῇ ἀπλοῦν.

Δ.	Ε'.
670310	3826
<u>4</u>	<u>9</u>
2681240	34434

Π ρ ό θ λ η μ α Β'.

§. 76. Νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν οἰουδήποτε μὲ πολλαπλασιασθῇ σύνθετον ἀπὸ πλειόνων χαρακτήρων.

Τοῦτο τὸ πρόβλημα τῶρα εὐκόλως τὸ λύομεν, ὅταν καλῶς ἐγυμνάσθῃμεν μὲ ἓνα χαρακτήρα νὰ πολλαπλασιάσωμεν, καὶ ὅταν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι καθε ἀριθμὸς δεκαπλάσιος γίνεται, ὅταν λάβῃ τὸν ἐγγὺς ἀνώτερον τόπον, πρὸς τ' ἀριστερὰ (§. 18. β'). κατασκευάζεται δὲ οὕτω.

α'. Γράψον τὸν πολλαπλασιαστέον καθὼς ἐδόθη.

β'. Καὶ ὑπ' αὐτὸν γράψον τὸν πολλαπλασιαστὴν μονάδας πρὸς μονάδας, δεκάδας πρὸς δεκάδας κτ.

γ'. Ἀφ' οὗ γραφῇ ἡ γραμμὴ μὲ τὸν χαρακτῆρα τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάσων ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ τάξιν, καθὼς ἐδιδάχθημεν εἰς τὸ α'. πρόβλημα (§. 75.), καὶ τοῦτο ὅλον τὸ παραγόμενον γράψον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ τόπου τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου.

δ'. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πολλαπλασιάσων πάλιν ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ τὰς δεκάδας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ παραγόμενον τοῦτο, ἐπειδὴ γίνεται ἀπὸ δεκάδας, εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ πρώτου, καὶ διὰ τὰ γένη δεκαπλάσιον, πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἓνα τόπον πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀνωτέρου ἀπὸ τὸ παραγόμενον τῶν μονάδων (§. 18.). ὅθεν ἀρχόμεθα καὶ γράφουμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸν τόπον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου.

ε'. Ἔττα πολλαπλασιάζομεν καὶ μὲ τὸν χαρακτῆρα τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ἐπειδὴ τὸ παραγόμενον τοῦτο σημαίνει ἑκατοντάδας, καὶ δεκαπλάσιον ἀπὸ ἐκεῖνο τῶν δεκάδων, γράφεται καὶ τοῦτο πρὸς τ' ἀριστερὰ εἰς ἓνα τόπον ἀνωτέρου καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν εἶναι καὶ χιλιάδας καὶ λοιπὰς ἀνωτέρας ἔχῃ τάξεις ὁ πολλαπλασιαστής.

ς'. Ἔττα συνάπτομεν ὅλα αὐτὰ τὰ κατὰ μέρος παραγόμενα εἰς ἓν κεφ'. καὶ τοῦτο εἶναι τὸ παραγόμενον ὅλον, ὅπου ζητεῖ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν· εἰς τὸ Α'. παράδειγμα ἐγράψαμεν τὸν πολ-

Α'.

πλασιαστέον καὶ τὸν 3256

πολλαπλασιασθῆν κατὰ 72 παράγουτες

τὸ α' καὶ β'. μὲ τὸν 3512 παραγ: τῶν μον: 7|0

χαρακτῆρα τῶν μονάδων 22792 παραγ: τῶν δεκ: 0|0

234432 ὁλικὸν παραγ:

σαιμεν ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ (§. 75.) 2. $6=12$, γράφομεν 2, ἔχομεν 1. εἶτα 2. $5=10$ καὶ 1, 11, γράφομεν 1 καὶ ἔχομεν 1. εἶτα 2. $2=4$ καὶ 1, 5, γράφομεν 5. εἶτα 2. $3=6$ καὶ γράφεται ὁμοίως· ἐπολλαπλασιάσαμεν ὅλον τὸν αὐτὸν μὲ τὸν χαρακτήρα τῶν δεκάδων 7. $6=42$, γράφομεν 2 εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων· διότι ὁ 7 δεκαδικὸς, καὶ ἔχομεν 4. εἶτα 5. $7=35$, καὶ 4, 39, γράφομεν 9 καὶ ἔχομεν 3. εἶτα 2. $7=14$ καὶ 3, 17, γράφομεν 7, καὶ ἔχομεν 1, καὶ τέλος 3. $7=21$, καὶ 1, 22, καὶ γράφονται· καὶ ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασθῆς ἕτερον χαρακτήρα δὲν ἔχει, συνάπτομεν εἰς ἓν τὰ παραγόμενα τῶν μονάδων, καὶ δεκάδων (ς.), καὶ τὸ κεφάλαιον εἶναι τὸ ζητούμενον παραγόμενον·

$3256+72=234432$. οὕτω ποιούμεν καὶ εἰς τὸ β'. παράδειγμα· πλὴν αὐτοῦ ἔχει ὁ πολλαπλασιασθῆς καὶ ἑκατοντάδας· Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν καὶ μὲ αὐτάς ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ τὸ παραγόμενον τοῦτο ἀρχίζομεν νὰ γράφομεν ἀπὸ

τὸν τόπον τῶν δεκάδων, ἓνα τόπον ἀνω-

τέρου πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀπὸ τὰς δεκάδας (έ.), καὶ εἶναι

4105	1 0
231	6 6
4105	παραγόμε: τῶν μον:
12315	παραγ: τῶν δεκ:
8210	παραγ: τῶν ἑκατ:

$4105 \times 231 = 948255$. 948255 ὁλικὸν παραγ:

„Τοῦτο γίνεται καὶ εἰς τὸ γ'. παράδειγμα, καὶ τὸ παραγόμενον τῶν χιλιάδων ἀρχισεν ἀπὸ τὸν τόπον τῶν χιλιάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ εὗρέθη τὸ ὅλον παραγόμενον ἀπὸ τῶν $5624 \times 3456 = 19436544$.

„Τὸ αὐτὸ ἐ-
γινε καὶ εἰς τὸ
Δ' παραδείγμα,
καὶ εἰς ὅλα τα
λοιπὰ, εἰ μόνον
ἓνα τόπον
πρὸς τ' ἀριστερὰ
προαγάγωμεν τὸ
παραγόμενον, ὅ-
που γίνεται ἀπὸ
τὸν ἐγγύς ἀνω-
τερον χαρακτῆ-
ρα τοῦ πολλα-
πλασιασοῦ.

Γ'	
5624	
3456	παράγοντες
33744	παρ: μον.
28120	δεκάδων
22496	εκατοντάδων
16872	χιλιάδων
19436544	τὸ ὅλον
Δ'	
1356	
43578	
10848	
9492	
6780	
4068	
5424	
59091768	

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 0} \\ 0 \overline{) 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 0} \\ 0 \overline{) 0} \end{array}$$

Σημείωσις α'. Εἰς τὰ παραδείγματα ταῦτα γίνεται φανερόν, ὅτε ὅσους χαρακτῆρας ἔχει ὁ πολλαπλασιασμοῦ, τόσα γίνονται ἐξ ἀνάγκης καὶ τὰ μερικὰ παραγόμενα.

Σημείωσις β'. Ἐπειδὴ καὶ τὸ παραγόμενον ἐξέρχεται τὸ αὐτὸ, εἴντε τὸν πολλαπλασιασμοῦ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἴντε τοῦτον μὲ ἐκεῖνον (§. 71.), κάλλιον εἶναι, ὅταν ὁ πολλαπλασιασμοῦ ἔχῃ πλείονας χαρακτῆρας ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμόν, νὰ γράφωμεν πρῶτον τὸν πολλαπλασιασμὸν, καὶ ὑποκάτω τὸν πολλαπλασιασμόν· διὰ νὰ μὴ γίνονται περισσότερα μερικὰ παραγόμενα (σημ': α'). ὅθεν εἰς τὸ Δ'. παραδείγμα ἦτον κάλλιον, εἴντε τὸ 43578 πρῶτον ἐγράψωμεν, καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸν 1356.

Σημείωσις γ'. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται καὶ εἰς τὴν κοινὴν συνήθειαν, πολλαπλασιαζοντες, πρῶτον τὸν μικρότερον προ-

φέρομεν· ὅθεν καὶ δὲν λέγομεν 5. 3=15. ἀλλὰ 3. 5=15.
οὔτε 6 οἱ 4, 24, ἀλλὰ 4 οἱ 6, 24.

§. 77. Ἡ ἀκριβεστέρα δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἡ διαίρεσις, καθὼς εἰς ἐκείνην δείζομεν· εἰς τὴν πρῶ-
ξιν ὅμως ἔχουσιν οἱ πρακτικοὶ διαφοροὺς δοκιμας, πλὴν ὅ-
λαι αὗται δὲν εἶναι πάντα ἅπταισαι· ἡ συνηθεστέρα δὲ καὶ
ἡ ἀκριβεστέρα, ὅπου σπανιώτατα πτάει, καὶ ὡς ἅπταισιν
ἡμπορεῖ ἕκαστος νὰ τὴν μεταχειρισθῇ, εἶναι ἡ καλουμένη
δοκιμὴ τῶν ἐννέα· αὕτη δὲ συνίσταται εἰς τὰ ἐξῆς.

α'. Δύω γραμμάς σχηματίζουσιν εἰς ζευρόν.

β'. Συνάπτουσιν ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλα-
πλασιασμοῦ εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιροῦσιν ὅ-
λα τὰ ἐννέα, καὶ τὸ λείψανον γράφουσιν εἰς τὸ ἄνω μέρος
τοῦ ζευροῦ, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα φαίνεται.

γ'. Συνάπτουσι καὶ ὅλους τοὺς χαρακτῆρας ὁμοίως του
πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἀφαιροῦσιν ὅλα τὰ ἐννέα, καὶ τὸ λεί-
ψανον γράφουσιν ὑπὸ τὸ πρῶτον λείψανον.

δ'. Πολλαπλασιάζουσι τὰ δύο λείψανα ὁμοῦ, καὶ ἀπὸ
τὸ παραγόμενον ἀφαιροῦσι πάλιν ὅλα τὰ ἐννέα, εἰν ὑπερέ-
χῃ τῶν ἐννέα, καὶ τὸ λείψανον γράφουσιν ἀπέναντι εἰς τὸ
ἕτερον μέρος τοῦ ζευροῦ.

ε'. Συνάπτουσιν ὁμοίως ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πα-
ραγομένου, καὶ ἀφαιροῦσιν ὅλα τὰ ἐννέα, καὶ εἰν τὸ λεί-
ψανον τοῦτο ἴσον μὲ τὸ λείψανον, ὅπου μένει ἀπὸ τὸ πα-
ραγόμενον τῶν δύο πρώτων λειψάνων, ὁ πολλαπλασιασμοὺς
εἶναι ὀρθός, εἰν δὲ ἄνισον, ἐσφαλμένος, καὶ πρέπει νὰ
ξαναθεωρηθῇ.

ς'. Ἡ ἀπάτη αὐτῆς τῆς δοκιμῆς συμβαίνει, ἡ εἰν οἱ
χαρακτῆρες ὅλοι τοῦ παραγομένου ἀνέξῃωσιν ἐννέα μονά-

δος, ἢ βραχυθῶσιν ἐννέα μονάδας, τὸ ὅποιον ἐκουσίως, ἢ ποτὲ δὲν γίνεται, ἢ σπανιώτατα εἰς πολλοὺς ἀνθρώπους ἅπαξ ἔγινεν, ὅπερ ἡμεῖς ἀμφιβάλλομεν· διὸ καὶ ἡμεῖς αὐτὴν τὴν δοκιμὴν ὡς ἄπταιστον ἐγκρίνομεν, τὴν δεῖξιν δὲ αὐτῆς εἰς ἄλλο μέρος ἀνακαλέσομεν, ὅταν καὶ περὶ διαιρέσεως πραγματευθῶμεν.

§. 78. Ὅταν μᾶς δοθῶσι περισσότεροι παράγοντες ἀπὸ τοὺς δύο, τότε πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς δύο, καὶ μετὰ τὸ παραγόμενον τῶν δύο πολλαπλασιάζομεν ὁμοίως τὸν τρίτον παράγοντα, καὶ τοῦτο τὸ παραγόμενον συνίσταται ἀπὸ τρεῖς παράγοντας· εἰάν δὲ καὶ ἕτερον ἔχωμεν παράγοντα, πολλαπλασιάζομεν μετὰ αὐτὸν τὸ παραγόμενον τῶν τριῶν παραγόντων, καὶ γίνεται τοῦτο τὸ παραγόμενον ἀπὸ τέσσαρας παράγοντας, οὕτω καὶ ἀπὸ πέντε κτ. π. χ. μᾶς δίδονται τρεῖς παράγοντες ὁ 5, καὶ 7, καὶ 8. πρῶτον λέγομεν $5 \cdot 7 = 35$. ἔπειτα $35 \cdot 8 = 280$. καὶ λοιπὸν $5 \times 7 \times 8 = 280$. εἰάν δὲ μᾶς δοθῶσι τέσσαρες παράγοντες, ποιῶμεν ὁμοίως· ἔξωσαν ὁ 32 καὶ ὁ 53 καὶ ὁ 64 καὶ 17 παράγοντες νὰ πολλαπλασιασθῶσι.

$$\begin{array}{r}
 \text{πρῶτον} \quad 32 \\
 \quad \quad 53 \\
 \hline
 \quad \quad 96 \\
 \quad 160 \\
 \hline
 1696 = 32 \cdot 53. \text{ ἔτι} \\
 \quad 64 \\
 \hline
 \quad 6784 \\
 10176 \\
 \hline
 108544 = 32 \times 53 \times 64. \text{ ἔτι} \\
 \quad 17 \\
 \hline
 \quad 759808 \\
 108511 \\
 \hline
 1845248 = 32 \times 53 \times 64 \times 17.
 \end{array}$$

Τὸ αὐτὸ δὲ γίνεται, καὶ εἰς πρῶτον τοὺς δύο πολλαπλασιάσωμεν εἰς ἓν παραγόμενον ὡς εἰς τὸ παράδειγμα Α'. καὶ ἔπειτα τοὺς λοιποὺς δύο εἰς ἕτερον παραγόμενον ὡς εἰς τὸ Β', καὶ ἔπειτα αὐτὰ τὰ παραγόμενα ὡς παράγοντας πολλαπλασιάσωμεν, ὡς ἑξῆς φαίνεται εἰς τὸ Γ'.

Α'.	Β'.
32	64
53	17
96	448
160	64
1696=32×53	1088=64×17

$$\begin{array}{r}
 \Gamma'. \\
 1696 \\
 1088 \\
 \hline
 13568 \\
 13568 \\
 0000 \\
 1696 \\
 \hline
 1845248=32 \times 53 \times 64 \times 17
 \end{array}$$

Καὶ φανερόν, ἐπειδὴ $1696=32 \times 53$, καὶ $1088=64 \times 17$, εἶναι καὶ $1696 \times 1088=(32 \times 53) \cdot (64 \times 17)$.

$(64 \times 17)=32 \times 53 \times 64 \times 17=1845248$. καὶ ἐκ τούτου ἔπεται τὸ κοινὸν ἀξίωμα, Ἐὰν τὰ ἴσα ἐπὶ ἴσα πολλαπλασιασθῶσι, τὰ γινόμενα ἴσα εἰσίν.

$$\begin{array}{l}
 \text{ὡς } 1696=32 \times 53 \\
 \text{καὶ } 1088=64 \times 17
 \end{array}$$

$$\text{ἄρα } 1696 \times 1088=32 \times 53 \times 64 \times 17=1845248$$

§. 79. Ἡμεῖς ἐμάθομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, ὅπου τελειώνουσιν εἰς σημεία μηδενικὰ, εἰς μονάδας ἔχουσι, κα-

λοῦνται περιοδικοί (§. 27.), ὡς 10, 100 κτ. εἰς δ' ἄλλους χαρακτηῆρας, ἀριθμικοί (§. 27.) ὡς 20, 250, 3690 κτ. Ἐμάθομεν δὲ καὶ ὅτι ἕκαστος ἀριθμὸς, ὅταν λάβῃ εἰς τὰ δεξιά ἐν μηδενικόν, γίνεται (§. 18.) δεκαπλάσιος, ὡς ὁ 520 δεκαπλάσιος τοῦ 52, ὁ 6320 δεκαπλάσιος τοῦ 632 κτ. εἰς δὲ δύο, γίνεται ἑκατονταπλάσιος, εἰς τρία χιλιοπλάσιος· ἄρα ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν μὲ περιοδικὸν ἀριθμὸν, προσγράφομεν τὰ μηδενικὰ σημεῖα τοῦ περιοδικοῦ εἰς τὸν ἀριθμὸν, καὶ συντόμως εὐρίσκομεν τὸ παραγόμενον· δεδόςθω, ὅτι πρέπει τὸν 56 νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν 10, δηλ. νὰ γένη ὁ 56 δεκαπλάσιος· οὗτος δὲ γίνεται 560, ὃ εἰς μόνον τὸ μηδενικόν τοῦ 10 εἰς τὸν δεξιὸν τόπον τοῦ 56 προσγράφομεν. "Οὕτω καὶ 10. $132=1320$. καὶ 560. $10=5600$. ὁμοίως καὶ ὅταν μὲ 100 πολλαπλασιάσωμεν, προσγράφομεν τὰ δύο μηδενικά. 100. $45=4500$, καὶ 534. $100=53400$. τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρας περιόδους· $1000 \times 53=53000$. καὶ $10000 \times 138=1380000$, καὶ $100 \times 10000=1000000$, καὶ εἰς ὅλους τοὺς, περιοδικοὺς ἀριθμούς.

§. 80 Ἐὰν δὲ οἱ παράγοντες ἀριθμικοί, τότε μόνον τοὺς χαρακτηῆρας κατὰ τοὺς ἄνω νόμους (§. 75... 76.) πολλαπλασιάζομεν, καὶ εἰς τὸ παραγόμενον γράφομεν δεξιά τὰ μηδενικὰ σημεῖα τοῦ τε πολλαπλασιαστοῦ, καὶ πολλαπλασιαστέου. εἰς δὲ λῶμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 57 μὲ 20, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον 57 μὲ 2, οὕτω 2. $57=114$, ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο εἶναι δεκάδες, πρέπει εἰς τὰ 114 ἐν μηδενικόν διὰ νὰ γένωσι καὶ ταῦτα δεκάδες· (§. 18.). οὕτω καὶ 513 μὲ 300. πρῶτον 513. $3=1539$. ἄρα καὶ $153900=513$. 300. τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ 560. 50,

πρῶτον 56. $5=280$, καὶ 560. $50=28000$ καὶ εἰς τὰ λοιπὰ ὁμοίως, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα φαίνεται. Ἐἰς τὸ

Ε'. παράδειγμα βλέπομεν	8308000
τὸν πολλαπλασιαστέον,	5120000
8308000, καὶ τὰν πολλα-	16616
πλασιασὴν 5120000. ἡμεῖς	8308
ὁμῶς ἐπολλαπλασιάσαμεν	41540
μόνον 8308 μὲ 512, καὶ	42536960000000

εἰς τὸ παραγόμενον 4253696 ἐγράψαμεν ὅλα τὰ μηδενικά του τε πολλαπλασιαστέου, καὶ πολλαπλασιαστοῦ. Τοῦτο ὁμῶς δεικνύεται καὶ ἀπὸ ἀνωτέραςδείξεις, καὶ διὰ τὰ ἀρχίσωσιν οἱ μαθηταί μας νὰ γυμνάζωνται εἰς αὐτὰς τὰςδείξεις, φέρε τὸ ε'. παράδειγμα νὰ δείξωμεν.

Ὁ πολλαπλασιαστέος αὐτοῦ $8308000=8308 \times 1000$ (§. 79.) ὁ δὲ πολλαπλασιαστής $5120000=512 \times 10000$ καὶ κατὰ τὸ (§. 78.)

$8308000 \times 5120000 = 8308 \times 512 \times 1000 \times 10000$. ἀλλ' εἰνὰν ἀνὰ δύο τοὺς παράγοντας τῶν

$8308 \times 512 \times 1000 \times 10000$ πολλαπλασιάσωμεν εἰς δύο παραγόμενα (§. 02.) οὕτω $8308 \times 512 = 4253696$ (§. 78.), καὶ $1000 \times 10000 = 10000000$ (§. 79.) εἴτα τὰ δύο παραγόμενα πάλιν πολλαπλασιάσωμεν, γίνεται τὸ παραγόμενον ὅπου εὗρωμεν, πρότερον οὕτω.

$4253696 \times 10000000 = 42536960000000$ (§. 79.).

§. 81. Α'. Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ἢ μὲ ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσης, τὰ παραγόμενα ἴσα εἶναι.

δηλ: $20=4. 5$

$5= 5$

$100=4.5.5$

5. $5=25$, καὶ $25 \cdot 4=100$ (§. 71.). καὶ ὁμοίως εἰς τὸ αὐτὸ παράδειγμα (§. 78.)

$$1696=32 \times 53$$

$$1088=64 \times 17$$

ἄρα καὶ $1696 \cdot 1088=64 \times 17 \cdot 32 \cdot 53$

Φανερὸν δὲ καὶ ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐπειδὴ εἶναι ἵσαι ὅτι ἀριθμοὶ $20=4 \cdot 5$, ἐπὶ τῆς ἐπισωρεύεται καὶ ὁ εἰς καὶ ὁ ἕτερος ἀριθμὸς, καὶ τὸ ἐπισωρεύμα ἴσον γίνεται· ἐκ τούτου ἔπεται.

Β'. Ἡ ἐξέως δὲν χαλᾷ, εἰς καὶ τε ἓν μέρος καὶ τὸ ἕτερον πολλαπλασιάζωμεν ὡς ἀνωτέρω $20=4 \cdot 5$, καὶ $20 \cdot 5=4 \cdot 5 \cdot 5$, καὶ ἐτι $7=3+4$. ἄρα καὶ $7 \cdot 6=(3+4) \cdot 6$ διότι $6 \cdot 7=42$. καὶ $(3+4) \cdot 6=42$. τὶ σημαίνει ὁμοίως τὸ $(3+4) \cdot 6=$ εὐθὺς θέλομεν εἰπεῖν.

Γ'. Εἰς ὁ ἕτερος παράγων διπλασιασθῇ, ἢ τριπλασιασθῇ, καὶ τὸ παραγόμενον αὐτῶν διπλασιάζεται, ἢ τριπλασιάζεται, καὶ καθόλου πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὅπου ὁ παράγων ἐπολλαπλασιάζη· ἔξωσαν οἱ παράγοντες 3 καὶ 4, τὸ δὲ παραγόμενον αὐτῶν $3 \cdot 4=12$. εἰς ὁ 3 τριπλασιασθῇ, ἢ ὁ 4, καὶ τὸ 12 τριπλασιάζεται δηλ. $2 \cdot 3 \cdot 4=24$. ὅτι $2 \cdot 3=6$ καὶ $6 \cdot 4=24$. καὶ $2 \cdot 4=8$, καὶ $3 \cdot 8=24$. ὁμοίως εἰς $3 \cdot 3 \cdot 4=36$. διότι $3 \cdot 3=9$, καὶ $4 \cdot 9=36$. καὶ ἐτι $3 \cdot 4=12$, καὶ $12 \cdot 3=36$. ὁμοίως καὶ μὲ ὅποιον δήποτε ἀριθμὸν πολλαπλασιασθῇ εἰς τῶν παραγόντων, πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν καὶ τὸ παραγόμενον.

§. 82. Κατὰ μὲν τοὺς ῥηθέντας κανόνας (§. 75. κτ.) ἡμποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάζωμεν κάθε ἀριθμὸν ἀπλῶν τε καὶ σύνθετον μὴ λογιζόμενοι τὰ σημεία + καὶ —. Ἐπει-

δὴ δὲ ἀνωτέρω εὐρομεν (§. 81.). (3+4). 6, ἐν ᾧ καὶ
 τὸ σημεῖον + ἦν, πρέπει νὰ μάθωμεν πῶς πολλαπλασιάζομεν,
 ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἔχωσι καὶ σημεῖα + καὶ —. Διὰ
 νὰ γένωσιν οἱ κανόνες αὐτῶν εἰς ἡμᾶς φανεροὶ, πρέπει πά-
 λιν τὴν φύσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ ἐξετάσωμεν (§. 70.).
 Ἦν δὲ ἡ φύσις αὐτοῦ, ἴδιος ἀριθμὸς νὰ ἐπισωρεύηται πολ-
 λάκις ἐσωτερικῶς πρὸς ἑαυτὸν, ὡς εἰς τὸ μηδέν· καὶ σχε-
 δὸν διωρισμένους τοσάκις, ὅσαις φοραῖς ἐπισωρεύεται ἡμο-
 νας εἰς τὸν πολλαπλασιασθῆν (§. 71.). τὸ δὲ παραγόμενον
 εἶναι τοῦτο τὸ ἐπισώρευμα. Λοιπὸν εἰ μίαν μονάδα ἀφαι-
 ρεθῇ ἀπὸ τὸν ἕτερον παράγοντα, μίαν φορὰν ἀφαιρεῖται ὁ
 ἕτερος παράγων ἀπὸ τοῦ παραγομένου· ἔσωσαν οἱ παρά-
 γοντες 4. $5=20$. ὅφελε μονάδα ἀφ' ἐνὸς παράγοντος, δηλ.
 τοῦ 4, ἵνα μεινῇ 3, καὶ ἔσαι τὸ παραγόμενον 3. $5=15$.
 λοιπὸν μίαν μονάδα ἀφῆρεθῇ ἀπὸ τοῦ 4, μίαν φορὰν ὅφη-
 ρεθῇ ὁ ἕτερος, ἦτοι ὁ 5 ἀπὸ τοῦ 20. Ἐσὼν δὲ δύο μο-
 νάδας ἀφέλωμεν, δύο φοραῖς ἀφαιρεῖται καὶ ὁ 5 ἀπὸ τοῦ
 20. διότι $4-2=2$, καὶ 2. $5=10$. εἰ δὲ τρεῖς μονά-
 δας ἀφέλωμεν, τρεῖς ὁ 5 ἀφαιρεῖται ὡς $4-3=1$, καὶ
 1. $5=5$. ἐτι εἰ 4 ἀφέλωμεν ἀπὸ 4, τέσσαρες φοραῖς ἀ-
 φαιρεῖται ὁ 5 ἀπὸ τοῦ 20. διότι $4-4=0$ καὶ 0. $4=0$.
 διότι τέσσαραις φοραῖς ἀφαιρουμένου τοῦ 5 ἀπὸ τοῦ 20
 μένει 0. Ἐὰν δὲ πέντε μονάδας ἀπὸ 4 ἀφέλωμεν, πέντε
 φοραῖς καὶ ὁ 5 ἀπὸ τοῦ 20 ἀφαιρεῖται· πλὴν ἐπὶ
 $4-5=-1$ (§. 65.), ἄρα καὶ — 1. $5=-5$. διότι εἰ 5
 φοραῖς ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ 20 τὰ 5 μένουσι — 5 κτ.
 Ἐὰν δὲ οὕτω καὶ περαιτέρω ἐξακολουθήσωμεν, εὐρίσκομεν
 καὶ $4-6=-2$ καὶ — 2. $5=-10$ καὶ $4-7=-3$.
 καὶ — 3. $5=-15$ κτ. Τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ εἰ ἀπὸ τοῦ

5. μονάδα ἀφελωμεν, ἑλλείπει ἀπὸ τοῦ παραγομένου ὅλος
ὁ 4 μίαν φορὰν καὶ καθεξῆς ὡς ὁράται.

$$4. 5=20$$

$$4. 4=16, \text{ διότι } 20-16=4!$$

$$4. 3=12, \text{ διότι } 20-12=8=2. 4$$

$$4. 2=8, \text{ διότι } 20-8=12=3. 4$$

$$4. 1=4, \text{ διότι } 20-4=16=4. 4$$

$$4. 0=0, \text{ διότι } 20-0=20=5. 4$$

$$4. -1=-4, \text{ διότι } 20+4=24=6. 4$$

$$4. -2=-8. \text{ διότι } 20+8=28=7. 4 \text{ κ. τ. λ.}$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν $-3. 5=-15$, καὶ $5. -3=-15$, γίνεται φανερὸς ὁ κανὼν.

„Ἐὰν τὰ σημεῖα τῶν παραγόντων ἀνόμοια εἶναι, τὸ παραγόμενον, ἐξέρχεται ἀποφατικόν· ὅθεν $-9. 7=-63$. καὶ $7. -8=-56$ κ. τ. λ. διότι εἰς τὸν ὁ πολλαπλασιασμοῦ ἀποφατικὸς, καὶ ὁ πολλαπλασιασμοῦ καταφατικὸς, ὡς $-9, 7$, ὁ -9 δεικνύει πόσαις φοραῖς πρέπει νὰ προσεθῇ αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν ὁ 7 μὲ σημεῖον ἐναντίον, ὅπου εἶχε πρότερον· διότι ὁ -9 σημαίνει ἐναντίον ἐπισώρευμα τοῦ καταφατικοῦ ἐννεαπλασίου, εἰς τὸν ἦν $+9$. ἢ καὶ οὕτω

$-7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 = -63$. εἰς δὲ τὸν πολλαπλασιασμόν καταφατικόν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμοῦ ἀποφατικὸς, ὡς ὁ 7. $-6=-42$. ὁ 7. δεικνύει πόσαις ὁ -6 νὰ ἐπισωρευθῇ, ὡς ἔχει. ἢ πόσαις φοραῖς πρέπει νὰ προσεθῇ ὁ -6 μὲ τὸ σημεῖον, ὅπου ἔχει.

$$-6. -6. -6. -6. -6. -6. -6 = -42.$$

§. 83. Τί δὲ γίνεται εἰς τὸν καὶ οἱ δύο παράγοντες ἀποφατικοί; ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω (§. 82.) εὐκόλως μαθησόμεθα· ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὸν ἦναι καταφατικὸς,

δεικνύει νὰ προσεθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος μὲ τὸ σημεῖόν του τόσαις φοραῖς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής· καὶ ὅταν ἔχῃ ἀποφατικόν, δεικνύει νὰ προσεθῇ μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖον, ὅπου ἔχει. Φανερόν ὅτι, ἐπειδὴ —5. —6. καὶ ὁ πολλαπλασιαστής ἀποφατικός, καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος, δεικνύει ὁ —5, νὰ ληθῇ ὁ —6 πέντε φοραῖς μὲ τὸ ἐναντίον σημεῖον τὸ + οὕτω $+6+6+6+6+6=30$, ἥτοι —5.—6=30. ἄρα καὶ —7.—8=56 καὶ —6.—7=42. ἄρα ὁ κανὼν.

Ἐὰν οἱ παράγοντες ἔχωσιν ὅμοια σημεῖα ἢ καταφατικά, ἢ ἀποφατικά, τὸ παραγόμενον γίνεται καταφατικόν. ἥτοι τὰ μὲν ὅμοια σημεῖα δίδουσι παραγόμενον καταφατικόν, τὰ δ' ἀνόμοια ἀποφατικόν· ὅθεν Α'. + καὶ + δίδει +. Β'. + καὶ — δίδει —. Γ'. + καὶ + δίδει —. Δ. — καὶ — δίδει +. Παραδείγματα σαφεῖς εἰς ὅλα αὐτὰ φέρομεν τὰ ἐξῆς.

»Ἐςω τις ἔχων 10 πρόβατα, ἕκαστον ἀπὸ 5 γρόσια. ὅρα ἔχει περιουσίαν $+10. +5=50$ γρόσια· καὶ τοῦτο τὸ πρῶτον. $+.$ $+.=+.$

Δεδόσθω ὅτι ἐψόφησαν τὰ πρόβατα· ἄρα ἔχει ζημίαν $+5.—10=—50$ γροσ; ἀποφατικά· καὶ τοῦτο τὸ δεύτερον. $+.$ $—.=—.$

Δεδόσθω ὅτι οὗτος πληρώνει δόσιμον εἰς κάθε πρόβατον 10 παράδες, ἥτοι ζημίαν —10. ἄρα —10.+10=—100 ἢ ζημία· καὶ τοῦτο τὸ τρίτον. $—.$ $+.=—.$

Δεδόσθω ὅτι ἐψόφησαν τὰ πρόβατα, καὶ τότε κερδίζει κατ' ἄλλον τρόπον τὸ δόσιμον, ἥτοι —10.—10=+100. καὶ τοῦτο τὸ τέταρτον· ἐκ τούτων ἔπεται, ὅτι ἕκαστον παραγόμενον καταφατικόν ἀπλῶς θεωρούμενον δι-

χῶς γίνεται, ἢ ἀπὸ παράγοντας καταφατικούς, ἢ ἀπὸ πα-
 ράγοντας ἀποφατικούς ὡς $+4. +5 = +20$. καὶ $-4. -5 = +20$.
 Ἐπειδὴ δ' ἕκαστος ἀριθμὸς, ὡς παραγόμενον ἀπὸ δύο πα-
 ραγόντων ἐκλαμβάνεται, ἀπὸ τε τῆς μονάδος καὶ αὐτοῦ τοῦ
 ἀριθμοῦ, δὲν ἤμποροῦμεν ἄρα νὰ ἐκλάβωμεν τὸν αὐτὸν
 ἀριθμὸν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἰδέαν, καὶ ἔννοιαν, ἂν
 γνωσθῇ ὅτι ὁ αὐτοὺς ἀριθμὸς συνίσταται ἅπαξ ἀπὸ καταφα-
 τικούς παράγοντας, καὶ ἅπαξ ἀπὸ ἀποφατικούς; ἄλλως εἰς
 ἄτοπα καὶ προφανεῖς ἀντιφάσεις κατακρημνιζόμεθα· διότι
 ἡμεῖς ἐδείξαμεν, καὶ ἐλάβομεν τὸ καταφατικὸν ποσὸν πάν-
 τη ἐναντίον τῷ ἀποφατικῷ (§. 15.), ὡς ἐλέγομεν, ὅτι ὁ
 ἔχων 5, καὶ ἅμα 5 χρεωσῶν ἔχει μηδέν· τοῦ τ' αὐτοῦ συμ-
 βαίνει καὶ εἰς αὐτὰς τὰς ἐξισώσεις $+4. +5 = +20$. καὶ
 $-4. -5 = +20$ · διότι ἡμεῖς ἐλέγομεν ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ
 20 καταφατικῶν παραγόντων εἶναι ἐναντία τῇ ἐννοίᾳ τοῦ
 20 τῶν ἀποφατικῶν, εἰ καὶ τὸ ποσὸν τὸ αὐτό· διότι εἰάν
 ἡ τῆς αὐτῆς ἐννοίας, ἔσονται πάντως καὶ οἱ παράγοντες
 ἴσοι οὕτω $-4. -5 = +5. +5. +4$. ἄρα $5 = -5$ καὶ
 $4 = -4$ ἀντιφάσεις προφανῆς· ὅθεν πρέπει καλῶς οἱ Ἀ-
 κροαταί μας ταύτην τὴν σημείωσιν νὰ παρατηρήσωσι, διὰ
 νὰ μὴ καταυτήσωσιν εἰς ἀντιφάσεις καὶ ἐννοίας μὴ ὀρθὰς,
 ὡς Ἰταλός τις πέπονθε

λέγει γὰρ οὗτος· ἔσω $A=B$. ἄρα $A-B=0$, καὶ $B-A=0$.
 καὶ ἐπομένως (§. 68.) $A-B=B-A$. εἰάν λύσωμεν, λέ-
 γει, τὰ δύο σκέλη εἰς τὴν μονάδα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθ-
 μὸν, ἔσαι $-1. -(A+B)=(B-A), 1$. ἀλλὰ
 $-(A-B)=-A+B=(B-A)$. θῶμεν λέγει τὰ ἴσα ἀντὶ
 τῶν ἴσων, καὶ ἔσαι ἡ ἐξίσωσις $-1. -(B-A)=(B-A), 1$
 καὶ τέλος $-1 = \frac{(B-A). 1}{(B-A)} = 1, 1=1$ · ἄρα $-1=1$,

ἤτοι $0=2$ · ἀλλ' ὅλη ἡ ἀπάτη καὶ ἀντίφασις αὕτη συμβαίνει, διότι ἐλάβομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $A-B=B-A$, τὸ μὲν ἐν σκέλος ἀπὸ ἀποφατικὸς παράγοντας, $-1-(A-B)$, καὶ τὸ ἕτερον ἀπὸ καταφατικὸς ($B-A$). 1. μὴ εἰδὼς ὁ Ἰταλὸς ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἕτερος εἶναι ἀπὸ καταφατικὸς παράγοντας, καὶ ἕτερος ὁπὸ ἀποφατικὸς· τὸ αὐτὸ πάσχει καὶ εἰς τὰ ριζικά, ὥς καὶ ἐκεῖ θελομεν μάθῃ ὅτι δύο ἐννοίας ἔχει ἕκασον ριζικόν.

§. 84. Εἰς τὸ (§. 81.) εὗρομεν $7. 6=(3+4)$. 6 τοῦτο λοιπὸν $(3+4)$. 6 σημαίνει νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν 3 καὶ 4 μὲ τὸν 6. διότι $7. 6=42$ καὶ $3. 6+4. 6=42$. ἄρα μία παρένθεσις, ὅπου ἔχει ἐντὸς ἀριθμοὺς μὲ σημεῖα $+$ καὶ $-$, καὶ ἐκτὸς ἕτερον ἀριθμὸν ἄνευ σημείου, ἢ μὲ σημεῖον πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι ἡ παρένθεσις ὅλη ὥς εἰς ἀριθμὸς, ὁ εἰς παράγων, καὶ ὁ ἐκτὸς ἀριθμὸς, ἕτερος παράγων. Διότι καὶ ἀνωτέρω ἡ μὲν παρένθεσις $(3+4)$ ὥς ὁ ἕτερος παράγων, καὶ ὁ 6 ὁ ἕτερος· διὸ καὶ γράφεται ἀδιαφόρως, καὶ $(3+4). 6$ καὶ $6 \times (3+4)$. ὁμοίως καὶ $(3+5+1) 8$, καὶ $8 (3+5+1)$ · σημαίνει δὲ μὲ τὸ 6 καὶ 8 νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ὅλοι οἱ ἐντὸς ἀριθμοί, μὲ τὸ ἀνάλογον αὐτῶν σημεῖον.

§. 85. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος ἀριθμὸς χωρίζεται εἰς μέρη ὥς $8=5+3$ ἢ $2+2+4$, ἢ $10-2$ κτλ. Ὡς καὶ ἡμονὰς συνίσταται εἰς μέρη μὲ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$, καθὼς

$1=2-1$, καὶ $1=9-7-1$, καὶ $1=20-19$ κτλ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ ἴσα ὅταν μὲ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιάζωνται, ἢ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ (§. 81.), γίνεται φανερόν ὅτι τὸ ἴδιον παραγόμενον ἐξέρχεται; ἢ ὅν ὅλον ὁμοῦ τὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσωμεν, ἢ τὰ μέρη του καθ' ἐν ἑκασον, διότι

$$9=4+2+3$$

$$6=6$$

$$54=24+12+18=54$$

$$\text{καὶ } 3=5-7+5$$

$$4=4$$

$$12=20-28+20=12$$

$$\text{καὶ οὕτω } 9=4+2+3$$

$$6=6$$

$$9. 6=4. 6+2. 6+3. 6$$

$$\text{καὶ } 3=5-7+5$$

$$4=4$$

$$3. 4=4. 5-7. 4+5. 4$$

$$\text{καὶ } 9=4+2+3$$

$$6=6$$

$$\text{καὶ } 3=5-7+5$$

$$4=4$$

$$9. 6=(4+2+3). 6 (\S. 72.) 3. 4=(5-7+5). 4$$

Καὶ ἐπειδὴ $4. 6+2. 6+3. 6=(4+2+3). 6$ καὶ ἔτι $5. 4-7. 4+5. 4=(5-7+5). 4$ φανερόν ὅτι ἓνας ἀριθμὸς ἀπὸ πολλὰ μέρη καταφατικά, καὶ ἀποφατικά, εἰς τὸν αὐτὸν παράγοντα ὅλα τὰ μέρη ἔχωσι κοινόν, καὶ εἰς αὐτὸν τὸν παράγοντα σηκώσωμεν, καὶ περικλείσωμεν τὰ λοιπὰ μέρη εἰς παρένθεσιν, τὸν δὲ κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς θῶμεν, μένει ὁ ἀριθμὸς ὁ αὐτός. Ἐἰς τοιαύτας μεταβολὰς τοῦ ἀριθμοῦ πρέπει ἐξ ἀνάγκης ὁ ἀρχάριος νὰ γυμνασθῇ διὰ νὰ ἐκφράξῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὅτε μὲν οὕτως, ὅτε δὲ οὕτως, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ὁ ἀριθμός.

§. 86. Ἐὰν τέλος οἱ παράγοντες ᾗναι διεξοδικοὶ με πολλοὺς χαρακτῆρας, ὅτι λογιῶ συμβαίνουσιν εἰς τὰς πρῶτας τὰς Ἀστρονομικὰς, Γεωγραφικὰς καὶ εἰς ἄλλας ἐπιστή-

μας, καὶ διὰ τὴν πολλὰ διεξοδικὴν πράξιν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν ὁ νοῦς ζαλίζεται, καὶ γίνονται λάθη· οἱ τεχνικοὶ ἐπιτηδεύονται τὸν ἐξῆς τρόπον.

α	36327849247	1	
β	112655698494	2	
γ	168983547741	3	πολλαπλασιαστέος 72498152367
δ	225311396988	4	πολλαπλῆς 56327849247
ε	281639246235	5	
ς	337967095482	6	
ζ	394294944729	7	
η	420622793976	8	
θ	506950643223	9	
			507487066569
			289992609468
			144996304734
			652483371303
			289992609468
			579985218936
			507487066569
			144996304734
			217494457101
			434988914202
			362490761835

4083664997214412217649

Λαμβάνουσι τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ πρῶτον αὐτοῦ διπλασιάζουσιν, εἴτα αὐτὸν μὲ τὸ διπλοῦν συνάπτουσι, καὶ γίνεται τριπλάσιος, καὶ τοῦτου αὐθις μὲ τὸν ἀπλοῦν, καὶ γίνεται τέτραπλάσιος, καὶ οὕτω ποιῶσιν αὐτὸν πενταπλάσιον, ἑξαπλάσιον, ἕως 9 πλάσιον, σημειοῦντες αὐτὸν τὸν διπλάσιον μὲ 2, τὸν τριπλάσιον μὲ 3 κτλ. ἢ καὶ οὕτω πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν μὲ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, καὶ εἰς τὰ παραγόμενα σημειοῦνται πλαγίως οἱ παράγοντες 1, 2, 3, ὡς εἰς τὸ διάγραμμα φαίνεται· εἴτα ὅταν θέλωσι τὸ πολλαπλασιάσωσιν αὐτὸν μὲ 7, λαμβάνουσιν ἀπὸ τὸ διάγραμμα τὸ 7 πλάσιον, ὡς τὸν ζ· ὁμοίως καὶ τοὺς λοιποὺς κατὰ τάξιν τῶν ὀριθμῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ

θέτουμε κατὰ τάξιν τὰς μονάδας, δεκάδας, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα Β' φαίνεται, καὶ οὕτω συνάπτουσιν ὅλα τὰ κατὰ μέρος παραγόμενα εἰς ἓν, καὶ εἰς τὸ διόγραμμα ἦναι ἄπταισον, καὶ τὸ παραγόμενον ἐξ ἀνάγκης εἶναι ἄπταισον, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι φανερά· τοῦτο ὅμως γίνεται μόνον εἰς διεξοδικούς ἀριθμούς, διότι εἰς κάθε ἑτερου πολλαπλασιασέου, ἑτερον καὶ διόγραμμα χρειάζεται. Ἀπ' αὐτοῦ τοῦτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἐν ᾧ πολλαπλασιάζομεν, εἰς ὃ πολλαπλασιασθῆς ἔχη χαρακτῆρας ἴσους, καὶ τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασέου, καὶ ἐκάστου τῶν χαρακτῆρων τούτων ἐξέρχεται τὸ αὐτό· ἀρκεῖ τοῦτο ἅπαξ εὐρεθὲν νὰ καταγράφηται εἰς τὸν ἀπαιτούμενον τόπον, χωρὶς νὰ πολλαπλασιάζωμεν πολλάκις τὸ αὐτό. Καὶ περὶ Πολλαπλασιασμοῦ ἱκανὰ ταῦτα.

Κ Ε Φ Α' Λ Α Ι Ο Ν Δ'.

Π ε ρὶ Δ ι α ι ρ έ σ ε ω ς.

§. 87. Ἡ Διαίρεσις γίνεται ἀπ' ἐναντίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς καὶ ἡ Πρόσθεσις τῆς Ἀφαιρέσεως· καὶ ἐπειδὴ ἐδίδετο εἰς ἀριθμὸς νὰ ἐντυλιχθῇ πολλάκις εἰς ἓν ἐπισώρευμα (§. 70.)· ἄρα ἐνταῦθα διαιρεῖται αὐτὸ τὸ ἐπισώρευμα, καὶ εἰ ἐκεῖ τὸ πολλάκις ἐδιορίζετο διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 κτλ., καὶ οὗτος ἐδίδετο, ὡς ἐλέγομεν ὁ 5 νὰ ἐντυλιχθῇ 4κις, καὶ ἐγένετο 4. $5=20$. Ἄρα καὶ ἐνταῦθα διορίζεται τὸ πολλάκις, καὶ δίδεται αὗτος ὁ ἀριθμὸς, ἦτοι τὸ ἐπισώρευμα 20 νὰ ἐκτυλιχθῇ 4κις, διὰ νὰ εὐρεθῇ ὁ 5, καὶ τοῦτο γίνεται διὰ τῆς Διαίρέσεως· διότι εἰς

ὁ 4 διέλη τὸν 20, εὐρίσκει τὸν 5. Ἐναντίαι δὲ αἱ δύο ἐργασίαι καὶ κατὰ τοῦτο, καθότι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ζητοῦμεν πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ παραγόμενου, εἰάν 5 ἄνθρωποι ἐδίδον ἀπὸ 5 γρόσια, καὶ εὐρίσκετο $5 \cdot 5 = 25$, ἐδῶ εἶναι τὸ ἐναντίον, εἰάν 5 ἄνθρωποι εὐρίσκον 25 γρόσια, ἀπὸ πόσα πίπτει εἰς ἕνα ἕκαστον· καὶ εὐρίσκεται ἀπὸ 5. ἐκεῖ ἐδίδοντο ὡς δύο παράγοντες, καὶ ἐζητεῖτο τὸ παραγόμενον, ὡς 4. $5 = 20$, ἐδῶ δίδεται ὁ εἰς παράγων καὶ τὸ παραγόμενον, καὶ ζητεῖται ὁ ἕτερος παράγων· ὡς ὅταν λέγωμεν, πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ 4 εἰς τὸν 20, καὶ εὐρίσκομεν 5 φοραῖς· ἐκεῖ ὁ πολλαπλασιασμοῦ ἐκτυλίσκει τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς ἕνα σωρὸν, ὅπου παραγόμενον ὠνομάσαμεν· ἐδῶ ὁ αὐτὸς ἐκτυλίσκει τὸν σωρὸν αὐτὸν διὰ τῆς φανῆς ὁ πολλαπλασιαστέος· ἐκεῖ ἐζητεῖτο ἕνας ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον τόσαις φοραῖς τὰ εὐρίσκηται ὁ ἕνας παράγων, ὅσakis ἢ μονὰς εἰς τὸν ἕτερον (§. 72.). Ἐδῶ ζητεῖται ἕνας ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον τοσάκις τὰ εὐρίσκηται ἢ μονὰς, ὅσαις φοραῖς εὐρίσκεται ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἄλλον τὸν δοθέντα· ἐκεῖ ζητεῖται ἐκεῖνος, ὅπου ἐδῶ δίδεται· ἐκεῖ συνάπτει ἐσωτερικῶς τοὺς δύο παράγοντας εἰς ἓν παραγόμενον· ἐδῶ χωρίζει ἐσωτερικῶς αὐτὸ τὸ παραγόμενον εἰς δύο παράγοντας· καὶ ὅλως τὸ ἐναντίον γίνεται ἐδῶ, ἀπὸ ἐκεῖνο, ὅπου ἐκεῖ γίνεται· καὶ διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

§. 88. Ἐπειδὴ καὶ ταῦθα δῖοι ἀριθμοὶ δίδονται τὸ ἐπισώρευμα, καὶ ἕτερος, δι' οὗ ἐκτυλίμεν τοῦτο τὸ ἐπισώρευμα, ἦτοι τὸ παραγόμενον καὶ εἰς παράγων, ὁρίζεται ἡ Διαίρεσις ὅτι εἶναι εὐρεσις τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου, ὅς τις ἐπισωρευθεὶς τοσάκις ὅσας μονάδας ἔχων ὁ ἕτερος τῶν

δοθέντων ἀπετέλεσε τοῦτο τὸ ἐπισώρευμα. Ἡ εἶναι ἡ διαίρεσις εὗρεσις ἀριθμοῦ ἀπὸ δύο δοθέντων, ἐν ᾗ ἐπισωρεύεται ἡ μονὰς τοσάκις, ὡσάκις ἐπισωρεύεται ὁ ἕτερος τῶν δοθέντων εἰς τὸν ἕτερον, ὡς μεταξύ τοῦ 30 καὶ 6 εὗρίσκειται ὁ 5, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ μονὰς ἐπισωρεύεται οὕτως, ὡς καὶ ὁ 6 εἰς τὸν 30. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ οὗτος ὁ τρόπος ἐσωτερικῶς, καὶ νοητὸς γίνεται, καὶ ἐτι ἀνήκει οὗτος εἰς τὴν μέωσιν τοῦ ποσοῦ, καὶ συγγενεύει κατὰ τοῦτο τῇ ἀφαιρέσει· διότι ὁ εὗρεθεὶς 5 δεικνύει καὶ τοῦτο· εἰὰν ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ 30 τὸν 6, 5 φοραῖς, μένει οὐδέν.

§. 89. Ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐκεῖνος, εἰς τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν πόσαις φοραῖς ὁ ἄλλος περιέχεται, λέγεται Διαιρετέος, καὶ ὁ ἕτερος Διαιρέτης· ὁ δὲ ζητούμενος Πηλίκον· καὶ ὡς ἀνωτέρω, ὁ μὲν 30 Διαιρετέος, ὁ δὲ 6 Διαιρέτης, καὶ ὁ 5 Πηλίκον· ἐκεῖνοι, ὅπου εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λέγονται παράγοντες, ἐδῶ λέγονται ὁ ἕνας διαιρέτης, καὶ ὁ ἕτερος πηλίκον· τὸ δὲ ἐκεῖ παραγόμενον, ἐδῶ λέγεται διαιρετέος.

§. 90. Δύο σημεῖα ἔχουσι καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν, ὅπου παρεμβάλλουσι μεταξύ εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Γράφουσι λοιπὸν ἀριστερὰ μὲν τὸν διαιρετέον, καὶ δεξιὰ τὸν διαιρέτην 30, 6, καὶ μεταξύ ἡ εἰζουσι δύο σιγμὰς οὕτω 30: 6 διὰ νὰ δείξωσι τὸ ἐσωτερικόν, καὶ ὅτι χωρίζεται ὁ πολλαπλασιασμὸς, ἥτοι τὸ παραγόμενον εἰς δύο παράγοντας, (§. 87.). Ἡ διὰ τὴν συγγένειαν τῆς διαιρέσεως μετὰ τὴν ἀφαιρέσιν μεταχειρίζονται τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως —, καὶ ἐπάνω αὐτοῦ γράφουσι τὸν διαιρετέον, ὑπὸ κάτω δὲ τὸν διαιρέτην οὕτω $\frac{30}{6}$. καὶ λοιπὸν τὸ αὐτὸ σημαίνει ἢ 30: 6

ἢ $\frac{30}{6}$. σημαίνει δὲ πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ 6 εἰς τὸν 30.

ἐκφράζομεν δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα 30: 6, ἢ $\frac{30}{6}$ μὲ τὴν διὰ οὕτως, ὁ 30 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6, ἢ τὰ 6 εὗρον τὰ 30 ἀπὸ πόσα πέρνουν, ἢ τὰ 6 πόσαις εἰς τὸν 30 περιέχονται, ἢ Ἑλληνικώτερον 30 διὰ τοῦ 6, ἢ τὰ 30 νὰ διαιρεθῶσι μὲ 6. Ὅθεν ὅταν βλέπωμεν ἀριθμοὺς μὲ αὐτὰ τὰ σημεῖα 10: 2 ἢ $\frac{10}{2}$ δὲν νοοῦμεν μῆτε τὸν 10, μῆτε τὸν 2, ἀλλὰ τὸ πηλίκον, ἥτοι τὸν ἀριθμὸν, ὅπου παρασχαίνει πόσαις φοραῖς εὐρίσκεται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον. Ἐπειδὴ ὁμοῦς ὁ 2 εἰς τὸν 10, 5 φοραῖς εὐρίσκεται· ἄρα 10: 2=5. καὶ $\frac{10}{2}=5$, καὶ οἱ δύο οὗτοι τρόποι εἶναι χρήσιμοι, καὶ πρέπει καλῶς νὰ τοὺς σημειώσωμεν. Σημειωτέον δὲ μόνον ὅτι κἀνταῦθα ἐξίσωσις ἐμφιλοχωρεῖ. ἄρα ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἡ περιεκτικωτάτη ὅλων τῶν μεθόδων καὶ ἐργασιῶν.

§. 91. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $5 \cdot 4=20$ μαυθάνομεν τὸ διᾶλληλον τοῦ τύπου τῆς διαιρέσεως $\frac{20}{5}=$

ἢ $\frac{20}{5}=4$, ὅηλ: τὸ παραγόμενον εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν γίνεται διαιρέτεος εἰς τὴν διαίρεσιν· καὶ ὁ μὲν ἕτερος τῶν παραγόντων, ὁ τυχὼν γίνεται διαιρέτης, ὁ δὲ ἕτερος πηλίκον· ὅθεν κάθε πολλαπλασιασμὸς γίνεται διαίρεσις, εἰς τὸ παραγόμενον γέννη διαιρέτεος, καὶ ὁ εἰς παράγων πηλίκον· καὶ πάλιν ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον γίνονται παράγοντες εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, καὶ ὁ διαιρέτεος παραγόμενον· λοιπὸν κάθε διαίρεσις γίνεται πολλαπλασιασμὸς,

εάν τὸ πηλίκον καὶ ὁ διαιρέτης γένωσι παρόγοντες· διὸ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς διαιρέσεως μεταβαλλομένη εἰς πολλαπλασιασμοῦν, καὶ ἀνάπαλιν, δὲν χαλᾷ, ὡς $\frac{20}{5}=4$ καὶ $20=5 \cdot 4$.

§. 92. Ἐςω ἡ ἐξίσωσις αὕτη $\frac{51}{5}=4$. ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ, εὖν καὶ τὰ δύο μέρη τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιάσωμεν (§. 81.). λοιπὸν καὶ αὕτη δὲν χαλᾷ $\frac{5 \cdot 20}{5}=4$. 5, ἥτοι $\frac{5 \cdot 20}{5}=20$, καὶ $\frac{2 \cdot 4}{2}=4$, καὶ $\frac{5 \cdot 1}{5}=1$. καὶ χρήσιμος οὕτως ὁ τρόπος νὰ

ἐκφράζωμεν τὸν ἀριθμὸν διαφόρως· ἐτι ἐπειδὴ $\frac{5 \cdot 20}{5}=20$, γίνεται φανερόν ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ διαιρέτην καὶ παράγοντα, καὶ εἶναι κοινὸς καὶ εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην, ἀπαλείφεται χωρὶς νὰ βλαθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ· ὡς $\frac{30 \cdot 5}{5 \cdot 2}=\frac{30}{2}=\frac{15 \cdot 2}{2}=15$.

ἐπεὶ δὲ $\frac{5 \cdot 1}{5}=1$ καὶ $\frac{56 \cdot 1}{56}=1$ κτλ. ἀλλ' ἡ μονὰς πολλαπλασιάζουσα δὲν μεταβάλλει τὸν ἀριθμὸν (§. 74.)· ἄρα $\frac{5}{5}=1$ καὶ $\frac{56}{56}=1$ καὶ $\frac{567}{567}=1$ κτλ. ὁ ἀριθμὸς ὅπου διαιρεῖ ἑαυτὸν δίδει μονάδα πάντοτε.

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι οὔτε διαιρεῖ ἡ μονὰς, οὔτε πολλαπλασιάζει.

Σημείωσις.

„Ἐξ αὐτοῦ τοῦ κανόνος ἠθέλησάν τινες νὰ δώσωσι λόγον τῆς κτίσεως ἀπὸ τοῦ μηδενός· διότι καὶ μηδενικὸν

σημεῖον, λέγουσιν, εἰν διὰ μηδενικοῦ διαιρεθῆ, κατὰ τὸν νόμον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ ἑαυτὸν διαιρῶν μονάδα δίδει. Ἄρα καὶ μηδὲν διὰ μηδένους μονάδα παρέχει, ὡς $\frac{0}{0} = 1$. Ἄρα καὶ ἐκ τοῦ μηδενός τι γίνεται· ὅτι ὁμῶς ἐκ τοῦ μηδενὸς τὸν κόσμον ὁ ἀριστοτέχνης Θεὸς ἐποίησεν, ἐκ πολλῶν ἄλλων ἡμεῖς ἀποδείξομεν, ἀπὸ δὲ τοῦ κανόνος τούτου οὐδέποτε· διότι συμβαίνουσιν ἀθάνατα ἄτοπα ἐπὶ τῆς ιδέας τοῦ Θεοῦ· διότι ἡ διαίρεσις οὐχὶ πλάσις, ἥτοι σύνθεσις, ἀλλὰ παραγόντων διάλυσις· ἔπειτα, αὐτοῦ το $\frac{0}{0} = 1$ ὁρθὸν πρέπει καὶ τοῦτο $0=1$. 0 (§. 91.)· λοιπὸν τὸ μηδὲν συνίσταται ἀπὸ μίνον δύο παραγόντων τῆς μονάδος καὶ τοῦ μηδενικοῦ· καὶ τίς συγχωρεῖ τοῦτο, ἐν ᾧ τὸ μηδενικὸν εἶναι ἀπὸ ἀπείρους παράγυντας σύνθετον; ἀπὸ 2. $0=0$ καὶ 5. $0=0$. καὶ 100. $0=0$ καὶ κατὰ τοῦτο τὸ μηδενικὸν εἶναι ἄπειρον. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ πηλίκον ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ὡς ἕνας παράγων, οἱ παράγοντες δ' ἐν τῷ μηδενικῷ ἄπειροι καὶ ἀπεριόριστοι· ἄρα καὶ πηλίκον ἀδιόριστον καὶ καθόλου ἐξέρχεται, ἥτοι μηδενικόν. $\frac{0}{0} = 0$.

Ἐκαστος ἀριθμὸς εἰν τὸ 0 σημεῖον διαιρῆ, πηλίκον δίδει πάντοτε μηδενικόν, ὡς $\frac{0}{9} = 0$. διότι καὶ 0. $9=0$.

οὕτω καὶ $\frac{0}{567} = 0$. ὅθεν τὸ 0 πολλαπλασιαζόμενον, ἢ διαιρούμενον δίδει πάντοτε 0. τί δὲ παρέχει πηλίκον τὸ μηδενικόν, εἰν διέλη ἀριθμὸν· ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ δεῖξομεν.

§. 93. Ὁ Πολλαπλασιασμὸς ἀπεναντίως γίνεται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν (§. 87.). Ἐπειδὴ ὁμῶς ἴδιον τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ τὸ πηλίκον (§. 71.)· ἄρα ἐναντίον ἐ-

διώμα ἔχει ἡ διαιρέσις ἀπὸ ἐκείνου, ἥτοι τὸ ὑποπολλαπλάσιον· λοιπὸν ὁ 4 τοῦ 2 διπλάσιος, ὁ 2 ὅμως τοῦ 4 ὑποδιπλόσιος· καὶ ἐκεῖνος μὲν οὕτω γράφεται 2. $2=4$, οὗτος δὲ οὕτω $\frac{4}{2}=2$. ἔτι ὁ 6 τοῦ 2 τριπλάσιος, καὶ ὁ 2 τοῦ

6 ὑποτριπλάσιος, οὕτω 2. $3=6$ καὶ $\frac{6}{2}=3$. καὶ ἔτι ὁ 30 τοῦ 6 πενταπλάσιος, ὁ δ' 6 τοῦ 30 ὑποπενταπλάσιος,

5. $6=30$. καὶ $\frac{30}{6}=5$ κτλ. καὶ τὸ πηλίκον παριστάνει πό-

σαις φοραῖς εὐρίσκεται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον· καθὼς καὶ ὁ ἴδιος διαιρέτης παριστάνει πόσαις φοραῖς εὐρίσκεται τὸ πηλίκον εἰς τὸν διαιρετέον, ἥτοι εἰς πόσα ἴσα μέρη χωρίζεται ὁ διαιρετέος· καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ λέγεται καὶ ὁ 5 ἐν ἑκτημόριον τοῦ 30, καὶ ὁ 6 ἐν πεμπτημόριον τοῦ 30.

§. 94. Ἐπειδὴ δὲ ὁ διαιρετέος, ὡς παραγόμενον, εὐρίσκεται καὶ ὁπὸ ὁμωνύμους καὶ ἑτερωνύμους παράγοντας (§. 72.). ἡ δὲ διαιρέσις εἶναι νὰ εὕρωμεν δι' ἐνὸς παράγοντος τὸν ἕτερον (§. 88.). ἄρα καὶ ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος ἡμποροῦν νὰ ᾖναι καὶ ὁμώνυμοι, καὶ ἑτερόνυμοι· διότι καὶ ἄνθρωποι 5 εὐρόντες 30 γρόσια, διαιροῦσιν αὐτὰ, ὡς $\frac{30}{5}=6$ τὸ πηλίκον ὅμως εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον, ὡς καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος μὲ τὸ παραγόμενον (§. 72.). δεδόσθω ὅτι 5 ἄνθρωποι αἰτοῦσι παράτινος, ἕκαστος ἀπὸ 5 γρόσια, οὗτος δὲ διὰ νὰ δώσῃ αὐτὴν τὴν ποσότητα, πολλαπλασιάζει 5. $5=25$, καὶ δίδει εἰς ὅλους ὁμοῦ μόνον 25 γρόσια· αὐτοὶ ὅμως λαβόντες αὐτὰ διαιροῦσι, διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἴσια· οὕτω

$\frac{25}{5} = 5$ καὶ λαμβάνει ἕκαστος ἀπὸ 5, καὶ δὲν μένει τίπο-

τε· αὐταὶ αἱ διαιρέσεις, ὅπου δὲν μένει τίποτε μετὰ τὴν διαίρεσιν, λέγονται ἐπ' ἀκριβεῖς διαιρέσεις· ὅταν ὅμως μένη μετὰ τὴν διαίρεσιν τίποτε λέγεται μὴ ἐπ' ἀκριβεῖς. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως, ὅπου διαιρεῖται ἐπ' ἀκριβεῖς, λέγεται καταμετρητὸς, ὁ δὲ ἄλλος μὴ καταμετρητὸς. Δηλ: εἰς 5 ἀνθρώποι, καὶ μᾶς χαρισθῶσι 31 γρσ. τότε μειρίζομεν οὕτω $\frac{31}{5} = 6$ καὶ μένει ἐν γρόσι, ἀλλὰ καὶ τοῦτο

πρέπει νὰ διαιρεθῇ οὕτω $\frac{1}{5}$ ἀλλὰ τὸ ἐν τὰ 5 δὲν τὸ δια-

ροῦσιν, εἰμὴ ἐὰν τὸ κάμωμεν κομμάτια εἰς παράδες κτλ. καὶ ταῦτα λέγονται κλάσματα, περὶ ὧν εἰς ἄλλο μέρος ὁμιλήσομεν· ὅθεν κλάσμα εἶναι ἡ διαίρεσις, ὅπου ἔχει μικρότερον διαιρετέον, καὶ μείζονα διαιρέτην, ὡς $\frac{5}{7}, \frac{27}{55}, \frac{7}{8}$

§. 95. Ἐπειδὴ ἐνταῦθα ἀπαιτεῖται πρῶτον νὰ ἡξεύρωμεν πόσαις φοραῖς εὐρίσκεται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον (§. 88.), πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ μάθωμεν ἐκ σήθους τοὺς 9 χαρακτηρας, πόσαις φοραῖς εὐρίσκεται ἕκαστος εἰς κάθε ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ 2, μέχρι τῶν 100· καὶ εἰς τοῦτο χρήσιμος πάλιν ὁ Ἀβὰξ ὁ Πυθαγορικός (§. 73.) διότι ἐκεῖ εἰς τὰ μικρὰ τετράγωνα εὐρίσκονται ὅλα τούτων τὰ παραγόμενα, καὶ ἄνω, καὶ πλαγίως δεικνύει ποσάκις εἰς αὐτὰ εὐρίσκεται ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων, ὡς εἰς τὸ 49, ἀντικρίξει ἄνω ὁ 7 καὶ πλαγίως ὁ 7· ἄρα λέγομεν ὅτι ὁ 7 εἰς τὸν 49, 7κις εὐρίσκεται· ὁμοίως εἰς τὰ 28 εὐρίσκεται ὁ 7 καὶ 4· ἄρα ὁ μὲν 4 εἰς τὸν 28, 7κις εὐρίσκε-

ται, ὁ δ' 7 εἰς τὸν αὐτὸν 4κῖς· καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διαιροῦμεν καὶ τοὺς λοιπούς.

12: 3 = 4	81: 9 = 9	26: 5 = $5\frac{1}{5}$	5: 7 = $\frac{5}{7}$
12: 4 = 3	20: 5 = 4	38: 7 = $5\frac{4}{7}$	7: 9 = $\frac{7}{9}$
56: 7 = 8	42: 6 = 7	44: 5 = $8\frac{4}{5}$	3: 7 = $\frac{3}{7}$
56: 8 = 7	0: 2 = 0	65: 8 = $8\frac{1}{8}$	2: 3 = $\frac{2}{3}$
25: 5 = 5	0: 7 = 0	84: 9 = $9\frac{4}{9}$	1: 2 = $\frac{1}{2}$
32: 4 = 8	0: 9 = 0	29: 6 = $4\frac{5}{6}$	

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν ὅτι, ὅταν γίνεται ἀκριβής ἡ διαίρεσις, ἐξέρχεται ἀκέραιον τὸ πηλίκον, ὡς 12: 3 = 4· ὅταν δὲ μὴ ἀκριβής, τὸ πηλίκον ἐξέρχεται μικτόν, μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν, καὶ κεκλασμένου ὡς 26: 5 = $5\frac{1}{5}$. δηλ. ὁ ἀκέραιος σημαίνει ποσάκις ὁ διαιρέτης εὐρίσκεται ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὸν διαιρετέον, καὶ μένει τι λείψανον, ὅπερ ὁ διαιρέτης δὲν τὸ διαιρεῖ· τότε πηλείου πρὸς τὰ δεξιὰ θέτομεν διαιρετέον τὸ λείψανον, καὶ διαιρέτην αὐτὸν τὸν ἴδιον, διὰ νὰ παραστήσωμεν ὅτι καὶ αὐτὸ τὸ λείψανον πρέπει νὰ διαιρεθῇ μὲ τὸν διαιρέτην οὕτω συνεπτυγμένως $\frac{1}{5}$ · διότι συνεπτυγμένη διαίρεσις λέγε-

ται ἢ $\frac{20}{5}$, καὶ ἀνεπτυγμένη ἢ 20: 5 = 4· καὶ τέλος ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς 5: 7 καὶ 55: 64, γράφεται κλασιματικῶς ἡ διαίρεσις συνεπτυγμένως $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{55}{64}$ · πῶς ὅμως ταῦτα ἐπιτηδεύονται ὕψερον ἐροῦμεν.

§. 96. Ἀνωτέρω (§. 91.) ἐμάθομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός μεταβαίνει εἰς διαίρεσιν 4. 5 = 20, καὶ

$$4 = \frac{20}{5} \cdot \text{ἐπειδὴ καὶ } 20 = 5 + 4 + 11 \cdot \text{ἄρα καὶ } 5 + 7 + 11 = 4 \cdot 5$$

καὶ ἐπομένως $4 = (5 + 4 + 11) : 5$ · ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ πα-
ρένθεσις νὰ συναφθῇ εἰς ἓν κεφάλαιον; καὶ διὰ τοῦ 5 νὰ
διαρεθῇ· ἐπειδὴ ὁμῶς καὶ τὰ $5 = (2 + 2 + 1)$, δυνάμεθα τὸν
ἄνω τύπον καὶ οὕτω γράφειν· $4 = (5 + 11 + 4) : (2 + 2 + 1)$

$$\text{καὶ εἶναι τὸ αὐτὸ ἢ } 4 = \frac{20}{5}, \text{ ἢ } 4 = (5 + 4 + 11) : 5, \text{ ἢ}$$

$$4 = (5 + 4 + 11) : (2 + 2 + 1).$$

§. 97. Ἐμάθομεν ἔτι (§. 92.), ὅτι ὁ ἀριθμὸς-ὁ διὰ
τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεὶς καὶ διαιρεθεὶς μένει
ὁ αὐτὸς, ὡς $\frac{5 \cdot 4}{4} = 5$. ἄρα καὶ τοῦτο ἔπεται $\frac{15}{3} = 5$ νὰ

ῥῆναι ὁ αὐτὸς $\frac{15 \cdot 4}{3 \cdot 4} = 5$ · καὶ διὰ τοῦτο εἶναι τὸ ἀξίωμα
τῆς διαιρέσεως ὀρθόν.

„Ἐὰν ὁ Διαιρέτης καὶ ὁ Διαιρετέος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀ-
ριθμοῦ πολλαπλασιασθῶσι, καὶ διαιρεθῶσι, τὸ αὐτὸ πη-
λίκον ἐξέρχεται· διότι τὸ αὐτὸ εἶναι ἢ $\frac{10 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 5$, ἢ $\frac{10}{2} = 5$.
ὅτι ὁ ἀριθμὸς ὁ αὐτὸς εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην
ἀπαλείφεται.

§. 98. Ἀνωτέρω (§. 96.) ἔτι ἐμάθομεν, ὅτι ὁ
 $4 = \frac{20}{5}$, καὶ $4 = \frac{8 + 4 + 8}{5}$ · ἄρα καὶ $\frac{20}{5} = \frac{8 + 4 + 8}{5}$. ὅθεν ἔ-
πεται τὸ ἕτερον ἀξίωμα.

„Ἐὰν τὰ ἴσα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθῶσι, τὰ
πηλίκα ἰσάεισιν· ὡς $20 : 5 = 4$ καὶ $(8 + 4 + 8) : 5 = 4$, καὶ
 $30 = (3 + 12 + 6 + 9)$ · ἄρα καὶ $\frac{30}{6} = \frac{3 + 12 + 6 + 9}{6}$.

§. 99. Ἐτι $5 \cdot 20 = 100$, καὶ $5 \cdot (8+4+3+5) = 100$.
καὶ ἔτι $5 \cdot 8+5 \cdot 4+5 \cdot 3+5 \cdot 5 = 5(8+4+3+5)$. εἰ δὲ
διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διέλωμεν ἢ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ, ἄ-
ρα $\frac{5 \cdot 8+5 \cdot 4+5 \cdot 3+5 \cdot 5}{5} = \frac{5(8+4+3+5)}{5}$. ὁ ἀριθμὸς

δὲ ὁ αὐτὸς εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἀπαλείφεται
ἄρα διὰ τῆς ἀπαλειφθῆ καὶ οὕτω γράφεται·

$$\frac{5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5}{5} = \frac{5(8+4+3+5)}{5} \quad \text{καὶ μένει}$$

$8+4+3+5 = 8+4+3+5$. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς, ὅπου συνίστα-
ται ἀπὸ πολλῶν μερῶν μὲ τὰ σημεῖα $+$, $-$, καὶ ἔχει
διαιρέτην κοινὸν, ἢ συνάπτονται τὰ μέρη εἰς ἓν καὶ διαι-
ρεῖται, ἢ διαιρεῖται ἕκαστον μέρος χωριστά· ὅθεν ταῦτὸν εἴ-
ναι ἢ οὕτω γένῃ $\frac{3+9+6}{3}$, ἢ οὕτω $\frac{3}{3} + \frac{9}{3} + \frac{6}{3}$. διότι τὸ αὐ-

$$\text{τὸ πηλίκον ἐξέρχεται· καὶ ἔτι } \frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{10}{2} + \frac{2}{2} \text{ καὶ } \frac{4+6+10+2}{2}$$

ταυτὸν· διότι τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίαις μέρεσι· καὶ τὰ ἴ-
σα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρούμενα πηλίκον δίδουσι τὸ
αὐτὸ (§. 98.)

§. 100. Ἐπειδὴ $4 \cdot 5 = 20$, καὶ $4 = \frac{20}{5}$, καὶ ἀνάπα-

λιν $5 \cdot 4 = 20$. ἄρα ἢ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ ἢ εἰς τὸν παρά-
γοντα ἀπαλείψωμεν ἀπὸ τὸ ἐν μέρος τῆς ἐξισώσεως, καὶ δι' αὐ-
τοῦ τὸ ἕτερον μέρος διέλωμεν, ἢ εἰς τὸν διαιρέτην ἀπα-
λείψωμεν καὶ δι' αὐτοῦ τὸ ἕτερον μέρος πολλαπλασιάσωμεν·
ὥς $12 \cdot 5 = 20+30+10$. ἄρα

$$= 21 \cdot \frac{20+30+10}{5} = \frac{20}{5} + \frac{30}{5} + \frac{10}{5} = 4+6+2. \text{ καὶ ἀνόπαλιν}$$

$$\frac{20+30+10}{5}=12 \text{ καὶ } 20+30+10=12 \cdot 5.$$

5

§. 101. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ, εἰς καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζομεν (§. 81.), ὡς

$$4 \cdot 2=(2+2) \cdot 2. \text{ ἄρα καὶ } 12=\frac{20+30+10}{5},$$

5

$$\text{καὶ } 3 \cdot 12 \frac{(20+30+10) \cdot 3}{5} \text{ καὶ ἐκ τούτων φανερὸν,}$$

5

ὅτι εἰς ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ μὲ ἓνα ἀριθμὸν, ἐξέρχεται τὸ πηλίκον πολλαπλασίον κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, δηλ.: εἰς ὁ 4 διέλη τὸν 8 πηλίκον εἶναι ὁ 2. εἰς ὁμῶς πολλαπλασιασθῇ ὁ 8 μὲ 4 οὕτω $8 \cdot 4=32$, καὶ διαιρεθῇ ὁ 32 μὲ 4 ἐξέρχεται πηλίκον $8=2 \cdot 4$.

$$\text{§. 102. Ἐπειδὴ δὲ } \nu \cdot 20: 5=4=2 \cdot 2 \text{ καὶ κατὰ το } (\S. 90.) \frac{20}{5}=2, 2, \text{ καὶ ἔσαι } \frac{20}{2 \cdot 5}=2. \text{ ἄρα μὲ ὅ, τι ἀριθμὸν}$$

πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρετέος, μὲ τὸν αὐτὸν διαιρεῖται τὸ πηλίκον· διότι μὲ τὸν 2 ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρέτην 5, μὲ τὰ 2 διείλομεν τὸ πηλίκον

$$4. \text{ οὕτω καὶ } \frac{12}{3}=4 \text{ καὶ } \frac{12}{3 \cdot 2}=2=\frac{4}{2}. \text{ Ἄρα εἰς θέλωμεν}$$

να πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ἓνα ἀριθμὸν, δι' αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον (§. 101.), εἰς δὲ θέλωμεν τὸ πηλίκον να διείλωμεν, τὸν διαιρέτην πολλαπλασιάζομεν.

§. 103. Ἐκ τούτων ἔπεται, καὶ ὅτι τὸ πηλίκον διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, δι' οὗ ὁ διαιρετέος διαιρεῖται ὡς $\frac{12}{2}=6$, καὶ $\frac{12:3}{2}=6: 3$ καὶ ἔτι τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, μὲ τὸν ὅποῖον ὁ διαι-

ρέτης διαιρείται· ὡς $\frac{12}{6} = 2$, καὶ $\frac{12}{6:3} = 2$. 3 καὶ ἐκ τού-

των ἔπεται Α', ὅτι ὁ διαιρετέος καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως αἰεὶ (§. 94.). διότι εἰς ἐκεῖνος πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται, πολλαπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται καὶ τὸ πηλίκον.

Β'. Ἐὰν αὐξάνῃ ὁ διαιρετέος, αὐξάνει καὶ τὸ πηλίκον, εἰς ἐλαττοῦται, ἐλαττοῦται καὶ τοῦτου.

Γ'. Ἐὰν ἀνάπαλιν αὐξάνῃ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον μειοῦται, εἰς δὲ οὗτος μειοῦται, ἐκεῖνο αὐξάνει.

Δ'. Ἐξ αὐτῶν ἔπεται καὶ τὸ ἀξίωμα. „Ἐὰν τὰ ἴσα δι' ἀνίσων διαιρεθῶσι, τὰ πηλικά εἰσὶν ἄνισα, καὶ σχεδὸν μείζον ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ διαιρέτης μικρότερος ὡς $12 = 12$

$$\frac{3 < 4}{4 > 3}$$

Ἐνταῦθα τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος μεταβάλλεται ἀνάπαλιν εἰς τὸ πηλίκον, ὡς εἰς τὸν διαιρετέον. Καὶ ἔτι εἰς ἀνισα δι' ἴσων διαιρεθῶσι, τὰ πηλικά ἄνισα, καὶ μείζον ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει καὶ τὸν διαιρετέον μείζονα· ὡς $12 < 16$

$$\frac{:4 = 4}{3 < 4}$$

καὶ φανερόν ἐν ταῦθα τὸ σημεῖον τηρεῖται τῆς ἀνισότητος,

$$\text{οὕτω } \frac{56}{7} > \frac{56}{8} \text{ καὶ ἔτι } \frac{56}{8} < \frac{72}{8}.$$

Ε'. Καὶ ἐκ τούτων μαθησόμεν ὅτι; ἐὰν διπλασιασθῇ, 3 πλασιασθῇ, 4 πλασιασθῇ, 5 πλασιασθῇ ὁ διαιρετέος, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται καὶ τὸ πηλίκον· εἰς δ' ἐκεῖνος δις, ἢ τρίς, ἢ τετράκις μικρότερος γένῃ, καὶ τοῦτα δις, ἢ τρίς, ἢ τετράκις μικρότερος γίνεται· εἰς δὲ ὁ

διαιρέτης δὲς, τρεῖς, τετράκις μείζον γένη, τὸ πηλίκον γίνεται δὲς, τρεῖς, τετράκις ἔλαττον· εἰς δ' ἐκεῖνος δὲς, τρεῖς, τετράκις κτλ. ἐλάσσων γένη τοῦτο δὲς, τρεῖς, τετράκις κτλ. μείζον γίνεται.

§. 104. Ἐπειδὴ ἤδη ἐμάθομεν ἱκανοὺς κανόνας τῆς διαιρέσεως, εὐκόλον εἶναι καὶ εἰς αὐτὴν τὴν διαίρεσιν νὰ προχωρήσωμεν· ὅταν δὲ ὁ διαιρετέος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν 100, τουτέστιν εἰς δύο μόνους χαρακτῆρας συρίζεται, καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι μὲ ἓνα χαρακτῆρα, εὐκόλως κατὰ τὸν Πυθαγορικὸν ἄδακα διαιρεῖται, ὡς εἶπομεν (§. 95.). ὅταν ὅμως ὁ διαιρετέος ἔχῃ πλείονας τῶν δύο χαρακτῆρων καὶ ὁ διαιρέτης ἓνα μόνον, ὡς ὅταν ζητῆται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8468 διὰ τοῦ 2, πρέπει νὰ προσέξωμεν εἰς τὰ ἐξῆς.

Α'. Γεγράφθω ὁ διαιρετέος, ἔπειτα τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, καὶ μετὰ τοῦτο ὁ διαιρέτης, καὶ μετ' αὐτὸν τὸ σημεῖον τῆς ισότητος ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα φαίνεται Α'. 8468: 2=4234.

Β'. Διὰ τοῦ διαιρέτου δῖελε τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τῆς ἀνωτάτης τάξεως ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, καὶ τὸ πηλίκον αὐτοῦ τοῦ χαρακτῆρος θὲς πρῶτον χαρακτῆρα τῆς ἀνωτάτης τάξεως εἰς τὸ πηλίκον, ὡς ὁ 2 εἰς τὸν 8 τετράκις περιέχεται· ἄρα 4 εἰς πηλίκον γράφεται. Τοῦτο δὲ γίνεται, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἀντίστροφος τῆς διαιρέσεως, καὶ ἐκεῖνος ἀπὸ τὰ δεξιά ἄρχεται· ἄρα ἡ διαίρεσις πρέπει νὰ ἄρχηται ἀπὸ τὰ ἀριστερά· τοῦτο ἀνήκει καὶ εἰς τὸ πηλίκον· διότι ἐκεῖ τὸ παραγόμενον ἀπὸ δεξιά ἄρχεται (§. 75.).

Γ'. Τὸ αὐτὸ γενέσθω καὶ εἰς τὸν ἐξῆς δεύτερον χαρακτῆρα· διότι ὁ 2 εἰς τὸν 4 δὲς περιέχεται, καὶ γράφο-

μεν καὶ εἰς τὸ πηλίκον δεύτερον χαρακτηῖρα τὸν 2. ὁμοίως καὶ εἰς τὸν τρίτον ὁ 2 εἰς τὸν 6 τρεῖς περιέχεται, καὶ γράφεται εἰς τὸ πηλίκον ἐφεξῆς ὁ 3. καὶ εἰς τὸν 8 πάλιν ὁ 2 τετράκις περιέχεται, καὶ γράφεται ὁ ἔσχατος χαρακτηῖρ τοῦ πηλίκου 4. καὶ εἶναι φανερόν ὅτι τὰ πηλικά τῶν χιλιάδων, ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν, καὶ εἰς τὸ πηλίκον εὐρίσκονται· καὶ οὕτω εἰάν ὁ 8468 δια-

ρεθῇ διὰ τοῦ 2 πηλίκον ἔσαι 4234· ἥτοι $\frac{8468}{2} = 4234$.

ἡ δὲ δεξις τούτου φαίνεται, ἀπὸ τοῦ (§. 99.). ἐπειδὴ ὁ $8468 = 8000 + 400 + 60 + 8$, καὶ $\frac{8468}{2} = \frac{8000}{2} + \frac{400}{2} + \frac{60}{2} + \frac{8}{2}$

ἀλλὰ $\frac{8000}{2} + 4000$, καὶ $\frac{400}{2} = 200$, καὶ $\frac{60}{2} = 30$, καὶ

$\frac{8}{2} = 4$. ἄρα εἰάν τὰ κατὰ μέρος πηλικά 4000 καὶ 200 καὶ 30

καὶ 4 συνάψωμεν, τὸ κεφάλαιον ἔσαι 4234, ὡς ἀνωτέρω.

$$\begin{array}{r} 4000 \\ 200 \\ 30 \\ 4 \\ \hline 4234 \end{array}$$

B'.

Τὸ αὐτὸ γενέσθω καὶ εἰς τὸ B'. παράδειγμα $9639:3=3213$. ὅτι ὁ 3 εἰς τὸν 9 τρεῖς περιέχεται, καὶ πηλίκον ὁ 3 γράφεται· ἔτι ὁ 3 εἰς τὸν 6 δὶς, καὶ ὁ 2 γράφεται· ὁ 3 ἔτι εἰς τὸν 3 ἅπαξ, καὶ 1 γράφεται· ὁ 3 τέλος εἰς τὸν 9, τρεῖς καὶ ὁ 3 γράφεται, καὶ εἰάν διέλωμεν τὸν 9639 διὰ τοῦ 3,

ἔσαι πηλίκον $\frac{9639}{3} = 3213$,

§. 105. "Οὕτω γίνεται ἡ διαίρεσις, εἰὰν ὁ διαιρέτης εὐρίσκεται ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὸν χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, ὅπερ σπανίως ἀκολουθεῖ. Ἐὰν ὅμως ὁ διαιρετέος δὲν διαιρηται ἐπ' ἀκριβὲς, ἀλλὰ μένει λείψανον, ὡς ὁ 3 εἰς τὸν 8 δις περιέχεται, καὶ μένει λείψανον 2, τί γίνεται; τότε πρέπει νὰ προσέξωμεν εἰς τὰ ἐξῆς.

Α'. Γράφεται, ὡς ἀνωτέρω ὁ διαιρέτης καὶ διαιρετέος.

Β'. Διὰ τοῦ διαιρετοῦ διαιροῦμεν διὰ τοῦ νοῦς τὸν μέγιστον, καὶ παραμελοῦμεν ἐκεῖνο τὸ περισσὸν, τὸ δὲ πηλίκον γράφεται, ὡς ἀνωτέρω εἰς τὸν τόπον του· οὕτως ὁ 4 εἰς τὸν 9 δις περιέχεται, καὶ ὁ 2 εἰς πηλίκον γράφεται.

Γ'. Ἐἴτα πολλαπλασιάζομεν τοῦτο τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ παραγόμενον 2. $4=8$ τὸ γράφομεν ὑπὸ τὸν χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸ τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὸν χαρακτῆρα, ὡς $9-8=1$. τοῦτο δὲ τὸ λείψανον μένει ὡς δεκάς, καὶ κατάγομεν τὸν ἐξῆς χαρακτῆρα τὸν 5, καὶ γίνεται 15.

$$\begin{array}{r}
 \Gamma': \\
 95784: 4=23946 \\
 \underline{8} \\
 15 \\
 \underline{12} \\
 37 \\
 \underline{36} \\
 18 \\
 \underline{16} \\
 24 \\
 \underline{24} \\
 0
 \end{array}$$

Δ'. Πάλιν βλέπομεν ὅτι ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 15, καὶ παίρνει ἀπὸ 3, (διότι ἀπὸ 4 δὲν φθάνει)· γράφομεν λοιπὸν καὶ τὸν δευτέρου χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου, καὶ μὲ αὐτὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην, ὡς εἰς τὸ Γ'. 3. $4=12$, καὶ ἀφαιροῦμεν $15-12=3$, οὗτος δὲ μένει ὡς δεκάς, καὶ κατάγομεν τὸν ἐξῆς χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου εἰς μονάδα

οὕτω, 37. καὶ διὰ τοῦ 4 πάλιν διαιροῦμεν λέγοντες, τὰ 4 διαιροῦν τὰ 37, καὶ παίρνουν ἀπὸ 9, καὶ γράφομεν εἰς τρίτον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου τὸν 9, καὶ πάλιν τοῦτο μὲ τὸν διαιρέτην πολλαπλασιάζομεν 4. $9=36$. καὶ τοῦτον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 37 οὕτω, $37-36=1$. καὶ ἔτι καταβιβάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτῆρα 8 εἰς 18, καὶ ὡς ἀνωτέρω διαιροῦμεν, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον, καὶ εἴτα πολλαπλασιάζομεν καὶ ἀφαιροῦμεν, ἕως οὐ νὰ τελειώσῃσιν οἱ χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου ἔλοι. καὶ οὕτω περαίνεται ἡ διαίρεσις. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς 95784 διαιρεθεὶς διὰ 4, ἔδωκε πηλίκον 23946, ἥτοι ὁ 23940 τέσσαραις φοραῖς εὐρίσκεται εἰς τὸν 95784. ἥτοι τὰ 4 εὖρον τὸν ἀριθμὸν 95784, καὶ ἐπῆραν ἀπὸ 23946. διὰ νὰ ἰδῶμεν δὲ ἂν ὀρθῶς ἔγινε, πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ ἂν τὸ παραγόμενον ἐξέλθῃ ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, ὀρθῇ ἡ διαίρεσις, Ἐὰν δ' ἄνισον, ἐπταισμένη.

Βάσανος ἄρα ὀρθῇ τῆς μὲν διαιρέσεως εἶναι ὁ Πολλαπλασιασμός, τοῦ δὲ πολλαπλασιασμοῦ ἡ Διαίρεσις. ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ (§. 91.) $\frac{20}{5}=4$, ἢ $20=4: 5$.

§. 106. Ἡ διαίρεσις φαίνεται εἰς τοὺς πρωτοπείρους ἢ δυσκολωτέρα. πλὴν εἰς παρατηρήσωσι καλῶς τὰ ἀνωτέρω, θέλει γίνῃ εὐκολος, δηλ: νὰ εὖρῃ πρῶτον πόσαις φοραῖς περιέχεται ὁ διαιρέτης εἰς τὸν ἀριστερώτατον χαρακτῆρα, καὶ νὰ γράψῃ εἰς τὸ πηλίκον 1, 2, 3 κτλ. ἂν μία, δύο, τρεῖς φοραῖς κτλ. περιέχεται. πρέπει ὁμῶς νὰ ἡξεύρῃ ὅτι ποτὲ ἀπὸ ἐννέα φοραῖς ἐπάνω δὲν περιέχεται. καὶ ὅτι ἂν ὁ πρῶτος χαρακτῆρ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην, λαμβάνομεν αὐτὸν μὲ τὸν ἐξῆς ὁμοῦ εἰς δεκάδας,

καὶ παρατηροῦμεν εἰς αὐτοὺς τοὺς δύο πόσαις φοραῖς περιέχεται.

Β'. Πολλαπλασιάζει τοῦτο τὸ πηλίκον μετὰ τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ γινόμενον γράφει ὑπὸ τὸν χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου, καὶ τὸ ἀφαιρεῖ ἀπὸ αὐτὸν τὸν χαρακτήρα. Ἄν ὅμως τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦ διαιρετέου, ὅπου μόνον εἰς διαίρεσιν ἔλαβεν, ὥς ἐξέυρη ὅτι ἔλαβε πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ δέοντος· καὶ πρέπει νὰ τὸ ἐλαττώσῃ μίαν μονάδα, ἢ δύο κτλ. ἕως οὗ νὰ ἔλθῃ τὸ γινόμενον ἢ ἴσον μετὰ τὸν χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου, ἢ μικρότερον, οὐδέποτε ὅμως μεγαλύτερον. Ὅταν δὲ ἀφῇ αὐτὸ τὸ γινόμενον ἀπὸ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου, πρέπει νὰ μείνῃ λείψανον ἢ μηδέν, ἢ μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρέτην· εἰδὲ καὶ μείνῃ μεγαλύτερον, φανερόν ὅτι ἔλαβε πηλίκον μικρότερον, καὶ πρέπει νὰ τὸ αὐξήσῃ ἢ μὲ μίαν μονάδα, ἢ μὲ 2 κατὰ τὴν χρείαν.

Γ'. Εἰς αὐτὸ τὸ λείψανον καταβιβάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου εἰς μονάδας, καὶ τὸ λείψανον δέκαδες γίνεται, καὶ διαιροῦμεν, καὶ πολλαπλασιάζομεν, καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ τὸ (α', β'), καὶ εἰς τὸ λείψανον τοῦτο πάλιν καταβιβάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν ἕως εἰς τὸν ἐσχατοῦν χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου.

Δ'. Ἐὰν δὲ καταβιβασθῇ χαρακτήρ τοῦ διαιρετέου εἰς τὸ λείψανον τῆς προηγουμένης ἀφαιρέσεως, καὶ ὁ διαιρέτης δὲν ἐμπεριέχεται εἰς αὐτὸν ὁδεμίαν φοράν, ἢ διότι εἶναι σημεῖον μηδενικόν, τότε γράφομεν σημεῖον μηδενικόν εἰς τὸ πηλίκον, καὶ καταβιβάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου, ἕως οὗ ὁ διαιρέτης νὰ ἐμπεριέχῃται εἰς αὐτοὺς ἢ ἅπας, ἢ πολλάκις.

Ε'. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ τέλος τῆς διαιρέσεως μένῃ λείψανον μικρότερον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὅποιον οὗτος δὲν ἔμπορεῖ νὰ τὸ διέλῃ, τότε πλησίον εἰς τὸ πληκτικόν, ὡς δεξιώτατον χαρακτηῖρα, γράφομεν ἐπάνω τῆς γραμμῆς αὐτὸ τὸ λείψανον, καὶ ὑποκάτω τὸν διαιρέτην, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι καὶ αὐτὸ πρέπει νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου· καὶ τοῦτο κλάσμα λέγεται, ὡς ἡμεῖς εἰς τὸ περὶ τῶν κλασμάτων κεφάλαιον καλῶς δείξομεν. Ὅποιος λοιπὸν αὐτοὺς τοὺς κανόνας καλῶς καταλάβῃ, καὶ τοὺς ἐξακολουθήσῃ, ἔμαθῃ καὶ τὴν διαίρεσιν· διὰ νὰ τοὺς ἐξακολουθήσῃ ὁμως ὁ πρωτόπειρος ἐκθέτομεν τὰ ἐξῆς παραδείγματα.

Παράδειγμα Α'.

$$\begin{array}{r}
 89236: 7=12748 \\
 \text{1. } 7=7 \quad \quad \quad (\text{Α'.}) \\
 \hline
 \quad \quad \quad 19 \\
 \text{2. } 7=14 \quad \quad \quad (\text{Α'. Β'.}) \\
 \hline
 \quad \quad \quad 52 \\
 \text{7. } 7=49 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 33 \\
 \text{4. } 7=28 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 56 \\
 \text{8. } 7=56 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Εἰς τὸ Α'. παράδειγμα λέγομεν ὁ 7 εὔρε τὸν 8 καὶ παίρνει ἀπὸ 1, καὶ εἰς τὸ πληκτικόν 1 γράφομεν, εἶτα

1. $7=7$ καὶ γράφεται, ὑπὸ τὸν 8, καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ μένει 1 λείψανον· καταβιβάζομεν τὸν ἐφεξῆς χαρακτηῖρα

9, καὶ ὁ 7 εὐρίσκει ἤδη 19, καὶ παίρνει ἀπὸ 2, καὶ ὁ 2 εἰς τὸ πηλίκον γράφεται, ἀλλὰ 2. $7=14$ ὑπὸ τοῦ 19, καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ μένει λείψανον 5. καταβιβάζομεν καὶ τὸν ἐξῆς τοῦ διαιρετέου 2, καὶ γίνονται 52, καὶ εἰς αὐτὸν εὐρίσκεται ὁ 7, ἐπτά φοραῖς, καὶ 7 εἰς τὸ πηλίκον γράφομεν· ἐπειδὴ 7. $7=49$, καὶ γράφομεν 49 ὑπὸ τὸν 52 καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ μένει λείψανον 3, καὶ ὁ ἐφεξῆς χαρακτήρ τοῦ διαιρετέου ὁ 3, γίνεται 33, ὁ 7 πάλιν εἰς τὸν 33 παίρνει ἀπὸ 4, καὶ γράφεται εἰς τὸ πηλίκον 4 καὶ πολλαπλασιάζομεν 4. $7=28$, καὶ οὗτος ἀπὸ τὸν 33 ἀφαιρεῖται, καὶ μένει λείψανον 5· καταβιβάζεται καὶ ὁ ἔσχατος χαρακτήρ 6, καὶ γίνονται 56, καὶ εἰς αὐτὸν ὁ 7 περιέχεται 8 φοραῖς· ἄρα 8 γράφεται εἰς τὸ πηλίκον, καὶ 7. $8=56$, ὅσας γράφεται ὑπὸ τὸ 56, καὶ ἀφαιρεῖται, καὶ δὲν μένει τίποτα· λοιπὸν ὁ 7 διέτελε τὸν 89236, καὶ ἐπῆραν ἀπὸ 12748· διότι $12748 \times 7 = 89276$ (§. 99.)

Παράδειγμα Β'.

$$\begin{array}{r}
 178294: 9=19810\frac{4}{9} \\
 1. \ 9=9 \qquad \qquad \qquad 9 \\
 \hline
 88 \\
 9. \ 9=81 \\
 \hline
 72 \\
 8. \ 9=72 \quad \quad \quad _ \\
 \hline
 09 \\
 1. \ 9=9 \\
 \hline
 04
 \end{array}$$

Εἰς τοῦτο τὸ δεύτερον παράδειγμα ἔγινεν ἡ αὐτὴ ἐργασία, ὡς καὶ εἰς τὸ πρῶτον· πλὴν ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀρχὴν

εἶναι μονὰς, καὶ ὁ 9 δὲν περιέχεται εἰς αὐτήν, ἐλάβομεν δύο χαρακτῆρας 17, καὶ εἰς αὐτοὺς ἅπαξ ὁ 9 ἐμπεριέχεται· διὸ καὶ μονὰς ἐγράφη εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πηλίκου· ἔτι εἰς τὸ τέλος ὁ 9 εἰς τὸν 4 δὲν περιέχεται, καὶ ἐγράψαμεν πηλίκον 0, ὥς εἰς τὸ Δ' εἶπομεν· ἔτι εἰς τὸ τέλος ἔμεινε λείψανον 4, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο δὲν διαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 9, ἐγράφη εἰς τὸ τέλος τοῦ πηλίκου ἄνω τῆς γραμμῆς, καὶ κάτω ὁ διαιρέτης, ὥς εἰς τὸ Ε' εἶπομεν· λοιπὸν λέγομεν ὅτι ὁ 9 ἀριθμὸς διεῖλε τὸν 178294, καὶ ἐπῆρεν εἰς πηλίκον ἀπὸ $19810\frac{4}{9}$ · διότι εἰς ἀν πολλαπλασιάσωμεν τὸν 19810 μὲ τὸν 9, καὶ προσθῶμεν καὶ τὸν 4, ἐξέρχεται ὁ 178294 (§. 106.)

Παράδειγμα. Γ'.

$$\begin{array}{r}
 700052: 4 = 175013 \\
 \underline{4} \\
 36 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 05 \\
 \underline{4} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 0
 \end{array}$$

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Γ' παράδειγμα ἔγινεν ἡ πράξις ὡς ἀνωτέρω. Πλὴν ἐπειδὴ ὁ 4 εὗρήκεν εἰς τὸ μεταξύ μηδενικόν, καὶ δὲν ἐπῆρε τίποτε· ἄρα μηδὲν ἐγράψωμεν εἰς τὸ

πηλίκον, καὶ οὕτως ὁ 4 διείλε τὸν 700052, καὶ ἐπῆρε 175013. ὅτι $175013 \times 4 = 700052$ (§. 106.).

§. 107. Ὁ τρόπος, καὶ μέθοδος αὕτη εἶναι ἱκανὴ νὰ διέλῃ κάθε ἀριθμὸν μὲ διαιρέτην ἑνὸς χαρακτῆρος· εἰς τὴν πράξιν ὅμως συνηθίζουσι νὰ μεθοδεύωνται αὐτὴν τὴν διαιρέσειν συντομώτερον. Ἐπειδὴ ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ μόνον ἓνα χαρακτῆρα, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ ἀφαίρεσις γίνεταί ἀμέσως, καὶ γράφουσι τὰ λείψανα ὑπεράνω τῶν χαρακτῆρων τοῦ διαιρετέου, καὶ ἅμα ἀπαλείφουσι διὰ μιᾶς γραμμῆς τὸ ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ὅπου διηρόθη· ἐπὶ παραδείγματος, ζητεῖται νὰ διέλωμεν τὸν 563432 μὲ τὸν 4.

$$4 = 140858.$$

Λέγομεν ὁ 4 εὔρε τὸν 5, καὶ ἐπῆρεν ἀπὸ 1, γράφεται ἡ μονὰς πηλίκου, καὶ λέγομεν 1. $4 = 4$ καὶ $5 - 4 = 1$. ἀπαλείφεται ὁ 5, καὶ γράφεται ὑπεράνω αὐτοῦ τὸ λείψανον 1. ἔτι ὁ 4 εὔρε 16, καὶ παίρνει ἀπὸ 4, καὶ γράφεται πηλίκον· ἐπειδὴ δὲ 4. $4 = 16$, καὶ $16 - 16 = 0$, σβύνεται ὁ 16, καὶ γράφεται λείψανον 0. ἔτι ὁ 4 εὔρε 3, καὶ παίρνει μηδέν· ἄρα γράφεται πηλίκον 0, ἔτι ὁ 4 εὔρε τὸν 34, καὶ παίρνει ἀπὸ 8, καὶ γράφεται πηλίκον 8· καὶ ἐπειδὴ 8. $4 = 32$, καὶ $34 - 32 = 2$, σβύνεται ὁ 34, καὶ γράφεται λείψανον ὁ 2· ἔτι ὁ 4 εὔρε τὸν 23, καὶ παίρνει ἀπὸ 5, γράφεται πηλίκον ὁ 5· καὶ ἐπειδὴ 4. $5 = 20$, καὶ $23 - 20 = 3$, σβύνεται ὁ 23, καὶ γράφεται λείψανον ὁ 3. καὶ ἔτι ὁ 4 εὔρε τὸν 32, καὶ παίρνει 8, γράφεται ὁ 8, καὶ ἔτι 4. $8 = 32$, καὶ $32 - 32 = 0$, καὶ δὲν μένει τίποτε· καὶ οὕτως ὁ 4 διείλε τὸν 563432, καὶ ἐπῆρε πηλίκον τὸν 140858. οὕτω γίνεται καὶ τὸ ἐξῆς παράδειγμα.

$$7 = 97636\frac{1}{2}$$

Πλὴν ἐπειδὴ τὰ 7 εἰς τὸν 6 δὲν περιέχονται, λέγομεν ὅτι 7 εὔρε τὸν 68, καὶ παίρνει ἀπὸ 9 πηλίκον· ἄρα $7 \cdot 9 = 63$, καὶ $68 - 63 = 5$, σβύνεται ἐκεῖνος, καὶ γράφεται ὁ 5· καὶ οὕτω διαιρεῖ ὁ 7 τὸν 53, καὶ παίρνει 7, καὶ διὰ τοῦτο $7 \cdot 7 = 49$, καὶ $53 - 49 = 4$, καὶ οὗτος γράφεται· εἶτα ὁ 7 εἰς τὸν 44, 6 φοραῖς περιέχεται, ὅσας πηλίκον γράφεται, καὶ ἐπειδὴ $6 \cdot 7 = 42$, καὶ $44 - 42 = 2$, ὁ 2 γράφεται· καὶ οὕτω μέχρι τοῦ ἐσχάτου χαρακτῆρος τοῦ διαιρετέου· καὶ τέλος μένει ὁ 4, ὅσας εἰς τὸ πηλίκον ἐπάνω τῆς γραμμῆς γράφεται, καὶ κάτω ὁ διαιρέτης 7 (100..Ε΄.) Διὰ τὰ μάθησιν ὅμως ὅτι ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ὀρθὴν πολλαπλασιάσας τὸν 97636 μὲ τὸν 7, πρόσθετες εἰς τὸ γινόμενον καὶ τὸν 4, καὶ ὁ διαιρετέος 683456 ἐξέρχεται (§. 106.)

§. 108. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης ἔχῃ δύο χαρακτῆρας, ὡς 12 ἢ 30, ἢ 82 κτλ. ἡ μέθοδος κατὰ τι συμφωνεῖ μὲ αὐτήν, κατὰ τι ὅμως καὶ διαφέρει· ὅθεν διὰ τὰ μάθη νὰ διαιρῇ ὀπταίως καὶ μὲ διαιρέτην δύο χαρακτήρων, ἐκεῖνος, ὁποῦ ἐγυμνάσθῃ εἰς τὰ ἀνωτέρω, πρέπει νὰ προσέξῃ εἰς τοὺς ἐξῆς κανόνας, ἀφ' οὗ γράψῃ ὡς ἐκεῖ (§. 104.) τὸν διαιρέτην, καὶ διαιρετέον ὀρθῶς· Ἐςω ἐπὶ παραδείγματος, ζητεῖται νὰ διέλωμεν τὸν 85456 μὲ 28.

$$\begin{array}{r}
 \text{Α'. παραγόμενον} \quad 85456: 28=3052 \\
 \quad \quad \quad 84 \\
 \text{Β'. παραγόμενον} \quad 145 \\
 \quad \quad \quad 140 \\
 \text{Γ'. παραγόμενον} \quad 56 \\
 \quad \quad \quad 56 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Α'. πρέπει καλῶς νὰ προηξεύρωμέν, ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν καθὼς ἐκεῖ (§. 106.). ὁ διαιρέτης μὲ ἓνα χαρακτῆρα διαιροῦσεν ἢ ἓνα χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου (ὅταν ᾗτον μεγαλύτερος), ἢ δύο ὁμοῦ, ὅταν ὁ ἓνας ᾗτον μικρότερος· οὕτω καὶ ἐδῶ, ἢ δύο ὁμοῦ, ὅταν ᾗναι οἱ δύο χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου μεγαλύτεροι ἀπὸ τῶν διαιρέτην, ὡς ὁ $85 > 28$, ἢ τρεῖς ὁμοῦ, εἰὰν οἱ δύο ᾗναι μικρότεροι, ὡς $15 > 28$. διότι τὸ 28 δὲν περιέχεται εἰς τὰ 15, καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν ἔτι καὶ ἓνα χαρακτῆρα.

Β'. Πρέπει, ὡς ἐκεῖ, νὰ σοχασθῶμεν τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ διαιρέτου, ὡς ἐδῶ τὸν 2, πόσαις φοραῖς περιέχεται εἰς τὸν πρῶτον τοῦ διαιρετέου εἰς τὸν 8 δηλ. πλὴν διὰ τοῦ νοὸς νὰ ἀφέλῃ ἀμέσως αὐτὰ, ὅπου θέλει λάβῃ ὁ πρῶτος χαρακτῆρ, καὶ νὰ σοχασθῇ, ἂν ἀπὸ τὸ λείψανον παίρνῃ ἀπὸ τόσα καὶ ὁ δεύτερος χαρακτῆρ τοῦ διαιρέτου, καὶ ἂν καὶ αὐτὸς εὐρίσκη νὰ πάρῃ ἀπὸ τόσα, γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον ἐκεῖνον τὸν ἀριθμὸν, ὅσαις φοραῖς περιέχεται ὁ πρῶτος χαρακτῆρ εἰς τὸν πρῶτον τοῦ διαιρετέου. Ἄν ὅμως ὁ δεύτερος τοῦ διαιρέτου δὲν εὐρίσκη νὰ πάρῃ ἀπὸ ἴσια, πρέπει νὰ δώσωμεν πηλίκον ὀλιγώτερον, ὥς νὰ εὐρῇ καὶ ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ ἀπὸ τόσα, ὅπου καὶ ὁ πρῶτος ἐλάβε, δηλ. ὁ πρῶτος χαρακτῆρ τοῦ διαιρέτου εὐρίσκει τὸν 8 τοῦ διαιρετέου, καὶ παίρνει ἀπὸ 4, πλὴν ἐπειδὴ μένει λείψανον μόνου 5, ὁ δεύτερος, ὁ 8, δὲν ἡμπορεῖ νὰ πάρῃ ἀπὸ 4, διὰ τοῦτο δίδομεν εἰς τὸν πρῶτον 3, διότι καὶ ὁ ἐξῆς 8 εὐρίσκει 25, καὶ παίρνει ἀπὸ 3, διὸ γράφομεν πηλίκον 3.

Γ'. Μὲ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν (§. 106.) τὸν διαιρέτην ὅλον, οὕτω $3 \cdot 8 = 24$, γράφομεν 4 ὑπὸ τὸν

5, τὸν ἔσχατον ἀριθμὸν τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχομεν 2, καὶ ἔτι $2 \cdot 3 = 6$, καὶ ἅμα 2 γίνονται 8, καὶ γράφομεν κατὰ τὰξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· καὶ εἰὰν τὸ γενόμενον τοῦτο εἶναι μεγαλῆτερον ἀπὸ τὰ ληφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου, φανερόν, ὅτι ἐλάδομεν μεῖζον πηλίκον τοῦ δέοντος.

Δ'. Εἰὰν δ' ἔλαττον, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τῶν χαρακτῆρων τοῦ διαιρετέου, καὶ εἰὰν τὸ λείψανον μεῖζον τοῦ διαιρέτου· φανερόν, ὅτι πηλίκον ἐλάδομεν μικρότερον τοῦ δέοντος· εἰὰν δὲ ἔλαττον, ὀρθὸν τὸ ληφθὲν πηλίκον· καὶ οὕτω καταβιδάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου, ὡς ἐνταῦθα τὸν 4.

Ε'. Ἀφ' οὗ καταβιδάσωμεν τὸν χαρακτῆρα, καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος μεῖζον τοῦ διαιρέτου, διαιροῦμεν ὁμοίως, ὡς εἰς τὰ (Α', Β', Γ', Δ'). εἰὸν δὲ ἐλάττων, ὡς ἐνταῦθα ὁ $14 < 28$, τότε γράφομεν πηλίκον 0, (§. 106.) καὶ καταβιδάζομεν καὶ ἕτερον, ὡς ἐνταῦθα τὸν 5, καὶ διαιροῦμεν ὡς ἄνω τὸν 145 μὲ τὸν 28, οὕτω ὁ 2 εὔρε τὸν 14, καὶ παίρνει ἀπὸ 7· ἐπειδὴ ὅμως $2 \cdot 7 = 14$, μένει 5, καὶ ὁ 8 δὲν παίρνει ἀπὸ 7· ἄρα πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ 6 ὁ 2, πλὴν ἐπειδὴ καὶ $2 \cdot 6 = 12$, καὶ $14 - 12 = 2$, καὶ ὁ 5 ἐφεξῆς γίνεταί 25· ἄρα ὁ 8 πάλιν εἰς τὰ 25 δὲν παίρνει ἀπὸ 6· διὰ τοῦτο λέγομεν ὁ 2 εὔρε τὸν 14 καὶ παίρνει ἀπὸ 5· καὶ ἐπειδὴ $2 \cdot 5 = 10$, καὶ $14 - 10 = 4$, καὶ 5 γίνεταί 45· ἄρα καὶ ὁ 8 εἰς τὸν 45 παίρνει ἀπὸ 5· λοιπὸν γράφομεν πηλίκον 5, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην μὲ τὸν 5, καὶ γίνεταί 140, καὶ τρυτον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 145, καὶ μένει 5, καὶ καταβιδάζομεν καὶ ἕτερον χαρακτῆρα τὸν 6, καὶ γίνεταί 56· καὶ κατὰ τὰ ἄνωτέρω διαιροῦμεν καὶ 56 μὲ τὸν 28 καὶ παίρνει ἀπὸ 2,

καὶ πολλαπλασιάζομεν, καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ δὲν μένει τίποτε· καὶ λέγομεν ὅτι ὁ 28 διεῖλε τὸν 85456, καὶ ἐπῆρεν ἀπὸ 3052, καὶ δὲν ἔμεινε τίποτε· διότι
 $85456 = 28 \times 3052$ (§. 105.)

Παράδειγμα Β.

	$167258: 57 = 2934 \frac{20}{57}$
Α'. παραγόμε	<u>114</u>
	532
Β'. παραγόμε.	<u>513</u>
	195
Γ'. παραγόμε.	<u>171</u>
	248
Δ'. παραγόμε.	<u>228</u>
	20

§. 109. Ἐἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα, ὅπου διαιρεῖ ὁ 57 τὸν 167258, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτήρ τοῦ διαιρέτου, ὁ 5 δὲν διαιρεῖ τὸν 1 πρῶτον χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου, ὡς μικρότερον, λαμβάνονται δύο, ὁ 16 (§. 108... Α'), καὶ διαιρεῖ αὐτὸν καὶ παίρνει ἀπὸ 2. διότι ἀπὸ 3 παίρνει μὲν αὐτὸς, πλὴν δὲν μένει νὰ πάρῃ καὶ ὁ δεύτερος 7 ἀπὸ 3. ὅθεν 2 ὁ πρῶτος χαρακτήρ τοῦ πηλίκου· πολλαπλασιάζομεν ἤδη 2. $57 = 114$ καὶ γράφεται ὑπὸ τοῦ 7 πρὸς ἄριστερά, καὶ ἀφαιρεῖται (§. 108... Γ'), καὶ εἰς τὸ λείψανον αὐθις καταβιβάζεται ὁ ἐξῆς χαρακτήρ 2, εἰς δὲ τὸν 532 ὁ πρῶτος χαρακτήρ τοῦ διαιρέτου 5 εὔρει τὸν 53, καὶ παίρνει ἀπὸ 9, γράφομεν πάλιν 9. $57 = 513$, καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ εἰς τὸ λείψανον 19 καταβιβάζεται ὁ ἐξῆς χαρακτήρ τοῦ

διαireτέου ὁ 5, καὶ εὐρίσκει πάλιν ὁ 57 τὸν 195, καὶ ὁ 5 εὐρίσκει τὸν 19, καὶ παίρνει ἀπὸ 3· διότι, εἰς δώσωμεν εἰς αὐτὸν 4, ὁ 9 δὲν ἠμπορεῖ νὰ πάρῃ ἀπὸ 4. λοιπὸν πάλιν πολλαπλασιάζομεν 3. $57=171$, καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ εἰς τὸ λείψανον 24 καταβιβάζομεν καὶ τὸν ἔσχατον χαρακτήρα 8, καὶ γίνονται 248. καὶ πάλιν διαιρεῖ ὁ 5 τὸν 24 καὶ παίρνει ἀπὸ 4, διὰ νὰ πάρῃ καὶ ὁ 7 ἀπὸ 4, καὶ γράφομεν 4 εἰς πηλίκον, καὶ πολλαπλασιάζομεν 4. $57=228$, καὶ ἀφαιροῦμεν καὶ μένει 20. τοῦτο δὲ τὸ θέτομεν ἐπάνω τῆς γραμμῆς πηλίκον εἰς τὸ πηλίκον, καὶ ὑποκάτω τὸν διαιρέτην, ὡς κλάσμα (§. 106.). καὶ οὕτω διεῖλεν ὁ 57 τὸν 167258, καὶ ἔλαβεν ἀπὸ $2934 \frac{20}{57}$ διότι, εἰς πολλαπλασιάζομεν τὸν 2934 μὲ τὸν 57, καὶ προσθῶμεν καὶ τὸν 20, ἐξέρχεται ὁ 167258 (§. 105.).

Σημείωσις Α'.

§. 110. Εἰς κάθε διαίρεσιν εὐρίσκομεν πάντοτε, πρὶν τῆς διαιρέσεως, ἀπὸ πόσους χαρακτήρας θέλει γένῃ τὸ πηλίκον· διότι εἰς θεωρήσωμεν τὸν διαιρετέον πόσους χαρακτήρας ἔχει ἀπὸ τὸν ἔσχατον τῆς πρώτης διαιρέσεως, ἕως εἰς τὸ τέλος, μαυθάνομεν ὅτι τόσους χαρακτήρας πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ τὸ πηλίκον· εἰς μὲν τὸ πρῶτον παράδειγμα ἀπὸ τὸν 5 καὶ ἐξῆς ἔχει τέσσαρας χαρακτήρας· ἄρα καὶ τὸ πηλίκον τέσσαρας ἔχει· εἰς τὸ Β'. ἀπὸ τὸν 7 καὶ ἐξῆς ἔχει ὁμοίως τέσσαρας· ἄρα καὶ τὸ πηλίκον τέσσαρας· ὅθεν ἀνάγκη εἶναι, ὅταν χαρακτήρα καταβιβάζωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, νὰ εὐρίσκωμεν χαρακτήρα ἕτερον εἰς τὸ πηλίκον· διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ διαιρέτης δὲν εὐρίσκη νὰ πάρῃ, γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον μηδενικόν.

Τόμ. Α'.

Σημείωσις Β'.

Ὁ διαιρέτης ποτὲ δὲν παίρνει περισσότερα ἀπὸ 9, διὰ τοῦτο εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ὁ 5 εὐρὼν τὰ 53, δὲν ἔλαβε περισσότερον ἀπὸ 9. Πρέπει καλῶς ὅλα αὐτὰ νὰ παρατηρήσῃ ὁ πρωτόπειρος διὰ νὰ μὴ δυσκολεύηται.

Γ'.

Α'. διαίρεσις	56348502:64=880445	²²
Α'. παραγόμενον	512	04
α'. λείψανον	0514	Β'. διαίρεσις
β'. παραγόμενον	512	
β'. λείψανον	00285	Γ'. διαίρεσις
Γ'. παραγόμενον	256	
γ'. λείψανον	290	Δ'. διαίρεσις
Δ'. παραγόμενον	256	
δ'. λείψανον	342	Ε'. διαίρεσις
Ε'. παραγόμενον	320	
ἔσχατον λείψανον	22	

§. 111. Καὶ εἰς τὸ Γ'. παράδειγμα βλέπομεν εἰς τὴν Α' διαίρεσιν, ὅτι ὁ 6 τὸν 5 δὲν διαιρεῖ· ἄρα διαιρεῖ τὸν 56, καὶ παίρνει ἀπὸ 8. ὅθεν 8. $64 = 512$, Α' παραγόμενον, ὅπερ ἀφαιρεῖται, καὶ μένει α' λείψανον 51 καὶ καταβιδάζομεν καὶ τὸν 4, αὐτοῦ γίνεται ἡ δευτέρα διαίρεσις, καὶ παίρνει ὁ 6 εἰς τὸν 51 πάλιν 8· καὶ $64 \cdot 8 = 512$, Β' παραγόμενον, καὶ ἀφαιρεῖται, καὶ μένει τὸ β' λείψανον 2· καταβιδάζεται ὁ 8. καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸν 28 ὁ 64 δὲν παίρνει τέποτε, γράφομεν 0, καὶ καταβιδάζομεν καὶ τὸν 5, καὶ γίνεται ἡ διαίρεσις, καὶ παίρνει ὁ 64 εἰς τὸν 285 ἀπὸ 4, καὶ πάλιν 4. $64 = 256$, Γ' παραγόμενον, καὶ ἀφαιρεῖται καὶ μένει 29, γ' λείψανον· καὶ καταβιδάζεται

ὁ ἕτερος χαρακτήρ 0, καὶ γίνεται ἡ διαίρεσις, καὶ οὕτω μέχρι τ' λους, ἔνθα μένει 22, ὅς τις ἐπάνω τῆς γραμμῆς γράφεται, καὶ ὁ 64 ὑποκάτω· λοιπὸν

$$\begin{array}{r} 56348502 \\ \underline{64} \end{array} = 880445 \begin{array}{r} 22 \\ 64 \end{array}$$

Καὶ οὕτω διαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν μετὰ διαιρέτην, ὅπου ἔχει δύο χαρακτήρας.

Πρόβλημα Γενικόν.

§. 112. Ἀριθμὸν οἷονδήποτε, μετὰ ἀριθμὸν οἷονδήποτε να διέλωμεν. (Λύσις)

Διὰ τὴν λύσωμεν αὐτὸ τὸ πρόβλημα, πρέπει καλῶς να ἐνθυμηθῶμεν, ὅσα εἶπομεν ἀπὸ τὸν παράγραφον (§. 104), ἕως εἰς τὸν (§. 110.), να γράψωμεν δηλαδὴ Α' τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην, μετ' ὅσους ἂν ἔχη χαρακτήρας. (§. 104.)

Β'. Μετὰ τὸν πρῶτον χαρακτήρα τοῦ διαιρέτου να διέλωμεν ἢ τὸν πρῶτον τοῦ διαιρετέου, ἢ τοὺς δύο πρῶτους, εἰς τὸν ὅς τις ἦναι μικρότερος (§. 106.), καὶ ἔτι να παρατηρήσωμεν, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ ἢμποροῦν να πάρουν ἀπὸ τόσα, ὅσα ὁ πρῶτος χαρακτήρ λαμβάνει.

Γ'. Μετὰ αὐτὸν τὸν χαρακτήρα τοῦ πηλίκου να πολλαπλασιάσωμεν ὅλον τὸν διαιρέτην, καὶ να γράψωμεν τὸ γενόμενον ὑποκάτω μόνον εἰς τοὺς χαρακτήρας τοῦ διαιρετέου, ὅσους εἰς αὐτὴν τὴν διαίρεσιν ἐλάβομεν· εἰς τὸν ὅμως τὸ γενόμενον ἦναι μεῖζον τούτων τῶν χαρακτήρων, φανερόν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μεῖζον τοῦ δέοντος (§. 106... Β'), καὶ πρέπει να λάβωμεν μικρότερον πηλίκον.

Δ'. Να ἀφέλωμεν αὐτὸ τὸ γενόμενον ἀπὸ τοὺς χαρακτήρας τοῦ διαιρετέου, ὅπου ἐλάβομεν εἰς τὴν διαίρεσιν αὐ-

τήν. (§. 106.) Ἐὰν δὲ τὸ λείψανον μετὰ τὴν διαίρεσιν εἶναι μεῖζον τοῦ διαιρέτου ὅλου, ἐλάβομεν πηλίκον ἑλαττον τοῦ δέοντος, καὶ πρέπει νὰ τὸ αὐξήσωμεν.

Ε'. Εἰς αὐτὸ τὸ λείψανον νὰ καταβιδάσωμεν τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρέτου (§. 106. . . Γ'), καὶ νὰ εὐρωμεν ἕτερον χαρακτήρα τοῦ διαιρέτου, καὶ νὰ ἀκολουθήσωμεν πάλιν τὰ αὐτὰ, ὡς εἰς τὸ Α', Β', Γ', Δ', κτλ.

ΣΤ'. Καὶ οὕτως εἰς κάθε ἀριθμὸν τοῦ διαιρέτου, ὅπου καταβιδάζομεν, ἀνάγκη νὰ εὐρίσκωμεν ἓνα χαρακτήρα εἰς τὸ πηλίκον, ὥς οὗ νὰ πάνσωσιν οἱ χαρακτῆρες τοῦ διαιρέτου, ὅπου καταβιδάζονται· ἐὰν δὲ εἰς τὸ μεταξὺ, ὅπου καταβιδάζονται οἱ χαρακτῆρες, ὁ διαιρέτης δὲν παίρνει ἀπὸ ἓνα, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ καταβιδάζομεν ἕτερον χαρακτήρα (§. 108.). Ὅταν αὐτὰ καλῶς παρατηρηθῶσι, καὶ ἐνεργηθῶσιν, ἐτοίμως δυνάμεθα νὰ διέλωμεν καὶ ἕκαστον ἀριθμὸν μὲ πολλοὺς χαρακτῆρας, δι' ἀριθμοῦ μὲ ὅσους χαρακτῆρας ἂν θέλωμεν· οὕτω γὰρ διηρέθησαν καὶ τὰ ἐξῆς παραδείγματα.

$$\begin{array}{r} \text{κατὰ τὸ Α} \quad 5678914 : 418 = 13585 \text{ ὅτι } \frac{567}{418} \\ 1. 418 = 418 \end{array}$$

δίδει 1 κατὰ τὸ Β'

$$\begin{array}{r} \text{ὅτι } 567 - 418 = 1498 \text{ β' διαίρ. κατὰ τὸ Γ' ὅτι } \frac{1498}{418} \delta. 3 \\ 3. 418 = 1254 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ὅτι } 1498 - 1254 = 02449 \text{ γ' διαίρεσις ὅτι } \frac{2449}{418} \text{ δίδει } 5 \\ 5. 418 = 2090 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ὅτι } 2449 - 2090 = 03591 \text{ δ' διαίρεσις ὅτι } \frac{3591}{418} \text{ δίδει } 8 \\ 8. 418 = 3344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ὅτι } 3591 - 3344 = 2474 \text{ ε' διαίρεσις ὅτι } \frac{2474}{418} \text{ δίδει } 5 \\ 5. 418 = 2090 \end{array}$$

$$\text{ὅτι } 2474 - 2090 = 0384 \text{ ἔσχατον λείψανον}$$

Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον διαιροῦνται καὶ τὰ ἐξῆς.

$$\begin{array}{r}
 738364: 2132=346 \frac{692}{2132} \\
 \underline{6396} \\
 9876 \\
 \underline{8528} \\
 13484 \\
 \underline{12792} \\
 00692
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25882891: 4257=6080 \frac{331}{4257} \\
 \underline{25542} \\
 34089 \\
 \underline{34056} \\
 331
 \end{array}$$

§. 113. Ἐιστὴν πρᾶξιν συνηθίζουσιν οἱ ἐθισμένοι νὰ περαίνουσι συντομώτερον τὴν διαίρεσιν, ἐν ᾧ ἅμα πολλαπλασιάζουσι καὶ ἀφαιροῦσιν· τοῦτο δὲ γίνεται κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον.

Γράφουσι τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον συνήθως (§. 105.), ὡς πρότερον, καὶ εὐρίσκουσι κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου, ὡς εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα.

$$\begin{array}{r}
 56357: 86=655 \frac{27}{89} \\
 \underline{0475} \\
 0457 \\
 \underline{027}
 \end{array}$$

Ζητεῖται ὁ 86 καὶ διέλη τὸν 56357. ὅθεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω διαιροῦνται πρῶτον τὰ τρία ψηφία 563 (§. 108.), καὶ ὁ 8 εἰς τὸν 56 παίρνει ἀπὸ 6 εἰς πηλίκον· ὅθεν λέγομεν 6. $6=36$ ἕως 43 μένουσιν 7, καὶ γράφονται ὑπὸ τὸν

ἔσχατον χαρακτήρα τοῦ πρώτου διαιρέτεου· ἔτι λέγομεν, ἔχομεν 4 εἰς τὸ χέρι, καὶ λοιπὸν 6. $8=48$, καὶ 4, 52 ἕως 56 μένει 4, καὶ γράφεται, καὶ καταβιδάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτήρα 5. πάλιν λέγομεν, ὁ 8 εἰς τὸν 47 παίρνει 5 πηλίκον, καὶ γράφεται· ἤδη πολλαπλασιάζομεν 5. $6=30$, ἕως 35 μένει 5, καὶ γράφεται· ἔτι 5. $8=40$, καὶ 3 εἰς τὸ χέρι 43, ἕως 47 μένει 4, καὶ γράφεται· καταβιδάζομεν καὶ τὸν ἕτερον χαρακτήρα 7, καὶ ὁ 8 εὐρίσκει τὸν 45, καὶ παίρνει πηλίκον 5 καὶ γράφεται· ὅθεν πολλαπλασιάζομεν 5. $6=30$, ἕως 37 μένει 7, καὶ ἔχομεν 3 εἰς τὸ χέρι, ἔτι 5. $8=40$, καὶ 3 γίνονται 43, ἕως 45 μένει λείψανον 2. καὶ τὸ ἔσχατον λείψανον 27, ὅπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς γράφεται καὶ ὑποκάτω ὁ διαιρέτης.

Τοῦτον τὸν τρόπον δίδελε καὶ τὰ λοιπὰ παραδείγματα.

$$6782034: 534 = 12700 \frac{234}{534}$$

$$\begin{array}{r} 1442 \\ 3740 \\ \hline 000234 \end{array}$$

$$1863056: 2345 = 794 \frac{1126}{2}$$

$$\begin{array}{r} 022155 \\ 010506 \\ \hline 1126 \end{array}$$

Οὗτος ὁ τρόπος εἶναι μὲν συντομώτερος, πλὴν πρέπει νὰ ᾔηται γυμνασμένος ὁ μαθητῆς, καὶ εἰς τὸν πρώτου τρόπου εἶναι τὰ λάθη φανερά, καὶ ἡμποροῦμεν νὰ τὸ ξαναθεωρήσωμεν.

§. 114. Ἐἰς τὴν κοινὴν ζωὴν συνηθίζουσι νὰ γράψωσι τὸν διαιρετέον, καὶ δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τραβοῦσι κατὰ κάθετον μίαν γραμμὴν, καὶ δεξιὰ μὲν γράφουσι τὸ πηλίκον, ἀριστερὰ δὲ τὸν διαιρέτην, καὶ διαιροῦσιν ὡς ἐμάθομεν· (§. 108.).

$$\begin{array}{r|l}
 24 \overline{) 38567} & 1606 \frac{23}{24} \\
 \underline{24} & \\
 145 & \\
 \underline{144} & \\
 00167 & \\
 \underline{144} & \\
 23 &
 \end{array}$$

Τὸ παρὸν παράδειγμα διδάσκει ἡμᾶς τὸν τρόπον αὐτόν.

Ἄλλοι δὲ γράφουσι ἀριστερὰ τὸν διαιρέτην, καὶ ἐπάνω τοῦ διαιρετέου τὸ πηλίκον, ὡς εἰς τὸ Β' παράδειγμα φαίνεται.

$$\begin{array}{r}
 \text{B'} \\
 1573 \\
 \hline
 34 \overline{) 53482} \\
 \underline{34} \\
 194 \\
 \underline{170} \\
 0248 \\
 \underline{238} \\
 0102 \\
 \underline{102} \\
 000
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 7 & 4 \\
 \hline
 7 & 4
 \end{array}$$

Ἄλλοι δὲ πολλαπλασιάζοντες ἅμα καὶ ἀφαιροῦντες, σβύνουσι τοὺς χαρακτῆρας ἄνω τοῦ διαιρετέου· ἀλλ' οὗτος

ὁ τρόπος μᾶς φαίνεται πολὺ ἀνεπιτήδειος, καὶ ὡς ἄχρηστον δὲν τὸν ἀναπτύσμεν.

§. 115. Ὅταν δὲ ᾖ ἡναι ὁ διαιρετέος, καὶ ὁ διαιρέτης μὲ πολλοὺς χαρακτήρας, ὡς εἰς τὰς ἐπισήμας τοῦτο συμβαίνει, πολλαπλασιάζουσι τὸν διαιρέτην μὲ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ὡς καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶπομεν (§. 86.), καὶ ἐξ αὐτοῦ τοῦ πίνακος τελεῖται εὐκόλως ἡ διαίρεσις.

Ἐπὶ παραδείγματος· Ζητεῖται ὁ διαιρετέος

56789100356 νὰ διαιρεθῇ μὲ τὸν διαιρέτην 537982· πολλαπλασιασθήτω ὁ διαιρέτης οὕτω

1	537982	ἀπλοῦς	56789100356:	537982=105559 ²⁵⁸⁴¹⁸ 537982
2	1075964	2πλοῦς	537982	
3	1613946	3πλοῦς	02990900	
4	2151928	4πλοῦς	2689910	
5	2689910	5πλοῦς	03009903	
6	3227892	6πλοῦς	2689910	
7	3765874	7πλοῦς	03199935	
8	4303856	8πλοῦς	2689910	
9	4841838	9πλοῦς	05100256 4841838	
			0258418	

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \overline{) 5} \\ 7 \overline{) 5} \end{array}$$

Ἔτι βλέπομεν εἰς τοὺς ἐξ χαρακτήρας τοῦ διαιρετέου ὅτι ὁ ἀπλοῦς εἰσέρχεται· ἄρα γράφομεν πηλίκον 1, καὶ γράφεται ὁ ἀπλοῦς 537982 ὑπὸ τοὺς ἐξ χαρακτήρας τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐπειδὴ ὁ 299090 εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀπλοῦν, γράφομεν πηλίκον 0, καὶ καταβιδάζομεν τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου· ἔτι βλέπομεν ὅτι ὁ ἐγγὺς μικρότερος ἀριθμὸς τοῦ 2990900, εἶναι ὁ πεντα-

πλοῦς· ἄρα γράφομεν πηλίκον τὸν 5, καὶ τὸ πενταπλάσιον ἀφαιροῦμεν, καὶ εἰς τὸ λείψανον καταβιβάζομεν ἕτερον χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου· ἐπειδὴ καὶ εἰς αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν ὁ πενταπλοῦς μικρότερος, ὡς ἔγγιστα γράφομεν 5, καὶ καταβιβάζομεν καὶ ἕτερον χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου· ἀλλὰ καὶ εἰς τοῦτον ὁ ἐξῆς μικρότερος, ὁ πενταπλάσιος, γράφομεν πάλιν 5, καὶ τὸ πενταπλάσιον ἀφαιροῦμεν, καὶ εἰς τὸ λείψανον καταβιβάζομεν τὸν ἔσχατον χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου· εἰς αὐτὸν τέλος τὸν ἀριθμὸν ὁ ἐγγὺς μικρότερος εἶναι ὁ ἐννεαπλάσιος· γράφομεν λοιπὸν 9 πηλίκον, καὶ τοῦτον ἀφαιροῦμεν, καὶ μένει λείψανον ὁ 258418, καὶ εἰς κλάσμα γράφεται.

Ὁ τρόπος οὗτος χρήσιμος εἰς τὰς μεγάλας πράξεις, ὅχι ὅτι ἐκεῖναι δὲν γίνονται κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τρόπους, ἀλλ' ἵνα μὴ γίνηται ἀπάτη εἰς τὰς πολλαπλασιασμοὺς καὶ ἀφαιρέσεις, ὅταν ὁ νοῦς ἐπὶ πολὺ βαρυνθῇ.

§. 116. Ἡ ἀκριβιστὴ δοκιμὴ εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός τῆς διαιρέσεως, καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§. 77.). πλὴν καὶ ἡ δοκιμὴ τῶν ἐννέα δὲν εἶναι εὐκαταφρόνητος διὰ τὸ συντομώτερον· αὕτη δὲ γίνεται οὕτως.

Α'. Γράφομεν δύο γραμμὰς σφυροειδῶς, ὡς εἰς τὸν (§. 114.) φαίνεται.

Β'. Συνάπτομεν τοὺς χαρακτήρας τοῦ ἐσχάτου λειψάνου εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ ἐὰν ὑπερέχῃ τὸν ἐννέα, ρίπτομεν ὅλα τὰ ἐννέα, καὶ τὸ λείψανον γράφομεν εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ σφυροῦ.

Γ'. Συνάπτομεν εἰς ἓν κεφάλαιον τὸ πηλίκον, καὶ ρίπτομεν ὅλα τὰ ἐννέα, καὶ τὸ λείψανον γράφομεν ἄνω πρὸς ἀριστερά.

Δ'. Τὸ αὐτὸ ποιοῦμεν καὶ εἰς τὸν διαιρέτην, καὶ γράφομεν τὸ λείψανον πρὸς ἀριστερά.

Ε'. Πολλαπλασιάζομεν τὸ λείψανον τοῦ πηλίκου μὲ τὸ λείψανον τοῦ διαιρέτου, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ λείψανον, ὅπου ἐγράψαμεν ἐπάνω τοῦ σταυροῦ, καὶ ρίπτομεν ὅλα τὰ 9, καὶ τὸ μένον γράφομεν ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σταυροῦ.

ΣΤ'. Συνάπτομεν τέλος καὶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου, καὶ ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ρίπτομεν τὰ 9 ὅλα, καὶ εἰάν μείνῃ τὸ λείψανον ἴσον μὲ τὸ λείψανον τοῦ Ε', ὀρθή ἡ διαίρεσις, ἄλλως δὲν εἶναι ὀρθή· τὰ παραδείγματα εἶναι φανερά καὶ δὲν ταυτολογοῦμεν.

§. 117. Εἰς τὴν περιοδικὴν ἐκτύλιν ἐμάθομεν (§. 18.) ὅτι ὁ χαρακτήρ ὁ αὐτός, εἰάν μεταβῇ ἓνα τόπον ἀριστερώτερα, γίνεται δεκαπλάσιος, ἓνα τόπον δὲ δεξιώτερα, γίνεται δεκατημόριον (§. 79.), ἥτοι πρὸς τὰ δεξιὰ γίνεται δέκα φοραῖς μικρότερος, πρὸς ἀριστερά δέκα φοραῖς μεγαλύτερος. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαίρεσις εἶναι νὰ εὕρωμεν ἓνα ἀριθμὸν, ὅπου λέγομεν πηλίκον, καὶ νὰ ἦναι τόσαις φοραῖς μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ὅσαις φοραῖς εἶναι ἡ μονὰς εἰς τὸν διαιρέτην (§. 88.). Ἄρα ὅταν θέλωμεν νὰ διέλωμεν μὲ 10, κόπτομεν ἐν ψηφίῳ τὸ δεξιώτατον τοῦ διαιρετέου, καὶ τότε ὅλοι οἱ χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου μεταβαίνουσιν ἓνα τόπον δεξιώτερα, καὶ γίνεται δέκα φοραῖς μικρότερος, ὡς 5670: 10=567. καὶ ἔτι 755: 10=75⁵. διότι ὅταν ὁ ἐσχάτος χαρακτήρ ἦναι ἀριθμὸς, καὶ ὅχι μηδενικὸν, γράφεται ἐπάνω τῆς γραμμῆς, καὶ ὑποκάτω ὁ διαιρέτης εἰς κλάσμα. Τὸ αὐτὸ γενίσθω καὶ ὅταν ὁ διαι-

ρέτης ἥναι 100. πλὴν τότε δύο χαρακτῆρας κόπτομεν δεξιά· διότι ἐὰν ὁ χαρακτήρ κατέλθῃ δύο τόπους πρὸς τὰ δεξιά, γίνεται ἑκατὸν φοραῖς μικρότερος· ἄρα ἐὰν ζητηθῇ νὰ διέλωμεν τὸν 5600 μὲ 100, τότε κόπτομεν τοὺς δύο μόνον εἰς τὰ δεξιά χαρακτῆρας, καὶ τὸ λοιπὸν εἶναι πηλίκον, οὕτω 5600: 100=56. ὁμοίως καὶ 423700: 100=4237. καὶ ἔτι 52478: 100=524 $\frac{78}{100}$ διότι ἐὰν οἱ κοπέντες χα-

ρακτῆρες ἦναι ἀριθμὸς, τίθεται ἐπάνω τῆς γραμμῆς, καὶ ὁ διαιρέτης κάτω (§. 108..Ε'). ἀλλὰ καὶ χίλιαις φοραῖς μικρότερος γίνεται ἑκάστος ἀριθμὸς, ἐὰν εἰς τρεῖς τόπους πρὸς τὰ δεξιά καταβιβασθῇ· ὅθεν ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦναι 1000, μόνον τρεῖς χαρακτῆρας κόπτομεν, καὶ οἱ πρὸς ἀριστερὰ χαρακτῆρες εἶναι τὸ πηλίκον· ἄρα ὁ γενικὸς Κανὼν.

„Ὅταν ἔχομεν διαιρέτην περιοδικὸν ἀριθμὸν (§. 27.), κόπτομεν μόνον πρὸς τὰ δεξιά τόσους χαρακτῆρας ἀπὸ τῶν διαιρετέου, ὅσα μηδενικὰ εὐρίσκονται εἰς τὸν διαιρέτην, καὶ ὅσοι μένουσι πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἶναι τὸ πηλίκον, οἱ δὲ πρὸς δεξιά τίθενται ἐπάνω τῆς γραμμῆς πλησίον τοῦ πηλίκου, καὶ ὑποκάτω ὁ διαιρέτης· καὶ οὕτω γίνονται ὅλα τὰ ἐξῆς παραδείγματα· 525900: 1000=525 $\frac{900}{1000}$ καὶ

200350000: 10000=20035 καὶ ἔτι

23456780149: 1000000=23456 $\frac{780149}{1000000}$

§. 118. Ἐπειδὴ δὲ, ὅταν κόπτωμεν ἓνα χαρακτήρα, γίνεται ὁ ἀριθμὸς δέκα φοραῖς μικρότερος, ὅταν δύο, 100 φοραῖς, ὅταν τρεῖς 1000 φοραῖς κ. τ. λ, καὶ ἐπειδὴ, ὅταν ὁ διαιρέτης καὶ διαιρετέος διαιρεθῇ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ (§. 97.). ἄρα τὸ πηλι-

κον τὸ ἴδιον εἶναι καὶ οὕτω $\frac{500}{100} = 5$, καὶ οὕτω $\frac{50}{10} = 5$ καὶ

οὕτω $\frac{5}{1} = 5$. καὶ ἔτι $\frac{800}{200} = 4$, καὶ οὕτω $\frac{80}{20} = 4$, καὶ οὕτω $\frac{8}{2} = 4$.

καὶ ἔτι $\frac{1800}{300} = 6$, καὶ $\frac{180}{30} = 6$, καὶ $\frac{18}{3} = 6$. ἄρα ὅταν

ἔχωμεν διαιρέτην ἀριθρικὸν (§. 27.), ἦτοι μὲ μηδενικά εἰς τὸ τέλος, κόπτομεν τόσους χαρακτήρας πρὸς τὰ δεξιά τοῦ διαιρετέου, καὶ ἅμα τὰ μηδενικά ἀπὸ τοῦ διαιρέτου, καὶ μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὁποῦ μένει διαιροῦμεν τοὺς χαρακτήρας τοῦ διαιρετέου μόνου πρὸς ἀριστερά, καὶ ὅ,τι μέινῃ, τὸ προσθέτομεν εἰς τοὺς κἀπέντας ἀριθμοὺς, καὶ τὸ κεφάλαιον γράφομεν ἐπάνω τῆς γραμμῆς, τὸν δὲ διαιρέτην ὅλον ὑποκάτω, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ πηλίκον.

Δεδόσθω ὅτι ζητεῖται 5670 παράδες νὰ τοὺς κάμωμεν γρόσι, δηλ: νὰ τοὺς διέλωμεν μὲ 40. Ἐπειδὴ εἶναι ἀριθρικὸς ἀριθμὸς, κόπτομεν τὸ μηδενικὸν ἀπὸ τὸν 40, καὶ ἓνα χαρακτήρα ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ διαιροῦμεν ὡς ἂνωτέρω μὲ τὸν, 4, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται.

$$\begin{array}{r} \text{Α'} \\ 10\cancel{3} \\ 4,0 \mid 567,0 \mid 141 \frac{30}{40} \end{array}$$

ὅτι εἶναι τὸ πηλίκον $141 \frac{30}{40}$ ἦτοι 141 γρόσια, καὶ 30 παράδ.

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὸ Β' παράδειγμα. Β'

$$\begin{array}{r} 01 \\ 7,0 \mid 5678,2 \mid 811 \frac{12}{70} \end{array}$$

Τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸ Γ' Γ'

$$\begin{array}{r} 200 \mid 5678,92 \mid 2839 \frac{92}{200} \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta' \\
 25,00 \mid 5324,52 \mid 212 \frac{2452}{2500} \\
 \underline{50} \\
 032 \\
 \underline{25} \\
 074 \\
 \underline{50} \\
 24
 \end{array}$$

Καὶ εἰς αὐτὸ τὸ Δ' παράδειγμα, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 2500 ἔχει δύο μηδενικά, κόπτομεν δύο χαρακτῆρας τοῦ διαιρετέου, ὡς τοὺς 52, καὶ εἴτα διαιροῦμεν κατὰ τοὺς ἄνω κανόνας, καὶ μένει λείψανον 24, καὶ γράφομεν ἐφεξῆς καὶ τοὺς κεκομμένους ἀριθμοὺς 52, καὶ γίνεται ὅλον τὸ λείψανον 2452 ἐπάνω τῆς γραμμῆς, καὶ ὑποκάτω γράφεται ὁ διαιρέτης εἰς κλάσμα $\frac{2452}{2500}$, καὶ γίνεται ὡς ἄνωτέρω (§. 116.) ἡ δοκιμή· τοῦτο γίνεται εἰς ὅλους τοὺς διαιρέτας τοὺς ἔχοντας εἰς τὸ τέλος μηδενικά.

§. 119. Μέχρι τοῦ δε ἐμάθομεν, πῶς φιλοτεχνεῖται ὁ πολλαπλασιασμός (§. 76.), καὶ ἡ διαίρεσις (§. 106.)· ἐτι ἐμάθομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τὰ ἐναντία ιδιώματα τῆς διαιρέσεως (§. 87.)· καὶ πολλὰ ἐκ τούτων ἐπιφέρονται· διὸ καὶ εἰς τὸ ἐξῆς θέλομεν εἰπῆ, ὅσα ἅμα ἔχουσιν ἀναφορὰν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν. Ὁ μὲν πολλαπλασιασμός τοίνυν καταγινεταὶ Ἀ' νὰ κάμῃ τὰ ὅλα εἰς μέρη· οὕτως ὅταν ἔχωμεν γρόσια, καὶ θέλομεν νὰ τὰ κάμωμεν παράδες, τότε τὰ γρόσια εἶναι ὅλα, καὶ οἱ παράδες εἶναι μέρη· λοιπὸν ὁ ἀριθμός τῶν μερῶν ἐνὸς γροσίου πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν σωρὸν τῶν

ὅλων ὁμοῦ, καὶ τὸ παραγόμενον γίνεται παρσδες. Ὅταν ζητεῖται 65 γρόσια, πόσους παρσδες κάμνουσιν, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν 40 (οὗτος τὰ μέρη ἐνὸς γροσίου) ὡς βλέπομεν.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 40 \\ \hline 2600 \end{array}$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς 2600 εἶναι ὅλα τὰ μέρη τῶν 65 ὅλων.

Ζητεῖται ἔτι, 567 πουργεῖα πόσα γρόσια εἶναι· λέγομεν τὰ πουργεῖα εἶναι ὅλα, μέρη δὲ ἐνὸς πουργείου 500, ἄρα πολλαπλασιάζομεν.

$$\begin{array}{r} 567 \\ 500 \\ \hline 283500 \end{array}$$

καὶ τόσα εἶναι τὰ γρόσια.

Ἐτι ζητεῖται 213 ἡμερονύκτια πόσαις ὥραις εἶναι; λέγομεν τὰ ἡμερονύκτια εἶναι ὅλα, καὶ ἐν ἑκάσῳ ἔχει μέρος 24 ὥραις· ἄρα 24. $213=5112$ ὥραις

$$\begin{array}{r} 213 \\ 24 \\ \hline 852 \\ 426 \\ \hline 5112 \end{array}$$

Ἐτι ζητεῖται 253 πήχαις τζόχα ἀπὸ 15 γρόσια πόσα γρόσια κάμνουσιν; καὶ αὐτοῦ ὡς ὅλου εἶναι ἡ πήχη, καὶ μέρος εἶναι τὰ 15 γρόσια. ἄρα 15. $253=3795$.

$$\begin{array}{r} 253 \\ 15 \\ \hline 1265 \\ 253 \\ \hline 3795 \end{array}$$

Τὸ ἴδιον κάμνει καὶ ὁ Βακόλης, ὅταν ἀγροῖσῃ λάδι
 640 ὁκάδες ἀπὸ 43 παραδες, αἱ 640 ὁκάδες εἶναι ὅλα,
 καὶ ἕκαστον ὅλον ἔχει μέρη τοὺς 43 παραδες· ἄρα εὐρίσκει
 αὐτοὺς 640. $43=27520$. ἐν ἐνὶ λόγῳ ὅ,τι ἀριθμὸς ἐκ-
 φράζεται ἀπὸ ὅλα, καὶ ταῦτα ἔχει ἕκαστον μέρη, μὲ τὰ μέ-
 ρη τοῦ ἐνὸς πολλαπλασιάζομεν τὰ ὅλα ὁμοῦ, καὶ τὸ γι-
 νόμενον εἶναι καὶ ὅλα τὰ μέρη τῶν ὅλων ὁμοῦ· καὶ εἰς αὐτὰ
 καταγίνεται ὁ πολλαπλασιασμός, ἥτοι ἀπὸ τὸν σωρὸν πολ-
 λῶν ὁλων, καὶ ἀπὸ τὰ μέρη μόνου τοῦ ἐνὸς ὅλου, εὐρί-
 σκει ὅλα τὰ μέρη ὁμοῦ τῶν ὅλων. Ἡ διαίρεσις ὁμῶς ἀν-
 παλιν γίνεται· δίδονται τὰ μέρη πολλῶν ὅλων ὁμοῦ, καὶ
 μόνου τὰ μέρη ἐνὸς ὅλου, καὶ ζητοῦνται πόσα ὅλα γίνον-
 ται ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη. Οὕτως ἔχομεν 2600 παραδες ὡς
 μέρη, καὶ ζητοῦνται πόσα γρόσια γίνονται τὰ μέρη ταῦτα·
 ἐπειδὴ ὁμῶς τὸ ἐν ὅλου ἔχει μέρη 40, μὲ τὰ 40 διαιροῦ-
 μεν τὰ μέρη, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὰ ὅλα, ὡς

2600: 40=65 γρόσια. Ἔτι εἰς 283500 γρόσια
 ὡς μέρη, ζητοῦνται τὰ πουγγεῖα ὡς ὅλα. Ἐπειδὴ ἐν πουγ-
 γεῖου ἔχει μέρη 500, μὲ αὐτὰ διαιροῦμεν τὰ μέρη ἐκεῖ-
 να 283500: 500=567, καὶ 567 πουγγεῖα εἶναι. Οὕτως
 καὶ 1312 ὥραις, πόσα ἡμερονύκτια γίνονται; ἄρα ὅλα
 ζητοῦμεν, τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει μέρη 24. διὸ καὶ διαι-
 ροῦμεν τὸν 1312 μὲ 24, ἥτοι $1312: 24=51 \frac{16}{24}$. ὁ-

μοῖως καὶ εἰς τὰ λοιπά. Ὅθεν ὅπου ζητεῖται ἀπὸ ὅλα νὰ
 γένωσι μέρη, τὸν πολλαπλασιασμὸν λαμβάνομεν, ὅπου δὲ
 ἀπὸ μέρη ὅλα ζητοῦνται, τὴν διαίρεσιν.

§. 120. Ἐν ἑτέρου ἰδίῳμα ἔχει ὁ πολλαπλασιασμός
 καὶ ἡ διαίρεσις· ἐκείνος εἶνα ἀριθμὸν πολλαπλάσιον, ἥτοι

ὅταν μὲ 2 πολλαπλασιάζωμεν, κάμνει αὐτὸν διπλάσιον· μὲ 3, 3 πλοῦν, μὲ 4, 4 πλοῦν· μὲ 5, 5 πλοῦν· καὶ γενικῶς ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιασῆς, τοσαυταπλάσιον κάμνει τὸν πολλαπλασιαστέον (β. 71.)·

Λοιπὸν ὅπου χρειάζομεθα νὰ διπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν, ἢ νὰ τριπλασιάσωμεν, 4 πλασιάσωμεν, ἢ 10 πλασιάσωμεν, 515 πλασιάσωμεν, τότε μὲ τὸν 2, 3, 4, 10, 515, πολλαπλασιάζομεν, καὶ τὸ γινόμενον εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἡ διαίρεσις ὁμῶς ἐξ ἐναντίας χωρίζει ἕνα ἀριθμὸν εἰς μέρη, καὶ ἀπ' αὐτὰ παίρνει ἓν μέρος εἰς τὸ πηλίκον· οὕτως εἰάν ζητηθῇ νὰ χωρήσω τὸν 8 εἰς 2 μέρη, καὶ νὰ λάβω τὸ ἓν μέρος, εἶναι νὰ διέλω τὸν 8 μὲ 2, καὶ ἐξέρχεται εἰς πηλίκον ὁ 4, τὸ ἓν μέρος τῶν 8. εἰάν δὲ ζητηθῇ νὰ κόψω τὸν 15 εἰς 3 μέρη, καὶ νὰ λάβω τὸ ἓν, μὲ τὰ 3, διαιρῶ τὸν 15, καὶ τὸ πηλίκον 5 εἶναι τὸ ἓν μέρος τῶν τριῶν· ἔθεν διὰ νὰ κόψω οἰονδήποτε ἀριθμὸν εἰς τόσα μέρη, καὶ νὰ λάβω μόνον ἓν μέρος αὐτῶν, εἶναι νὰ διέλω τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὅπου σημαίνει τὸ, τόσα, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ μέρος. Λοιπὸν ὅταν ζητεῖται ἐνὸς ἀριθμοῦ τοῦ 30 δηλ. τὸ τριτημόριον, μὲ τὸν 3 διαιροῦμεν αὐτὸν οὕτω $\frac{30}{3}$, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ τριτημόριον· ὅταν δὲ ζητεῖται τὸ τεταρτημόριον τοῦ 40, μὲ 4 διαιρεῖται $\frac{40}{4}$, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι τὸ τεταρτημόριον· ὅταν δὲ τὸ πεμπτημόριον τοῦ 25, οὕτω $\frac{25}{5}$ · ὅταν δὲ τὸ ἑκτημόριον τοῦ 30, οὕτω $\frac{30}{6}$ · ὅταν δὲ τὸ 16 μόριον τοῦ 80 οὕτω $\frac{80}{16}$ κτλ. καὶ μὲ ἕνα

λόγον ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρος, γράφεται διαιρετέος, ἢ ἐπάνω τῆς γραμμῆς, καὶ ἐκεῖνος, ὅπου σημαίνει τὸ μόνιον, διαιρέτης, ἢ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι αὐτὸ τὸ μόνιον τὸ ζητούμενον· ὅθεν τὸ πεμπτημόριον τοῦ 20 ἢ οὕτω γράφεται $\frac{20}{5}$, ἢ οὕ-

τω 20: 5=4, εἶναι ἀδιάφορον· διότι καὶ τοῦτο $\frac{20}{5}$ σημαίνει 4, καὶ τοῦτο 20: 5=4. Ὅθεν καὶ εἰς τὰ ἐξῆς προβλήματα ὅταν μᾶς ζητοῦν ἐν μόνιον τοῦ ἀριθμοῦ, γράφομεν ἄνω τῆς γραμμῆς τὸν ἀριθμὸν, καὶ κάτω τὸν ἀριθμὸν τῶν μορίων.

§. 121. Μαθόντες ταῦτα, πρέπει νὰ μάθωμεν καὶ τι πηλίκον ἐξέρχεται, εἰὰν ὁ διαιρέτης καὶ διαιρετέος καταφατικοί, ἢ ἀποφατικοί, ἢ ὁ μὲν καταφατικὸς, ὁ δ' ἀποφατικὸς· τοῦτο εὐκόλως μαυθάνομεν, εἰὰν λάβωμεν τὸν διαιρετέον ὡς γινόμενον ἀπὸ δύο παράγοντας, καὶ τὸν ἕτερον τούτων διαιρέτην, τὸν δὲ, πηλίκον. (§. 91.). Ἀνωτέρω ἐμάθομεν (§. 83.) ὅτι καταφατικὸν γίνεται τὸ γινόμενον, ἢ ὅταν ἄμφω οἱ παράγοντες καταφατικοί, ὡς $+4.+4=+16$, ἢ ἄμφω ἀποφατικοί, ὡς $-4.-4=+16$. Λοιπὸν καὶ ὁ διαιρετέος ἔταν ἤναι καταφατικὸς, ἢ ἀπὸ δύο καταφατικούς εἶναι παράγοντας, ἢ ἀπὸ δύο ἀποφατικούς· λοιπὸν ἔταν ἔχη διαιρέτην καταφατικὸν, φαίνεται ὅτι εἶναι ὁ διαιρετέος ἀπὸ δύο καταφατικούς παράγοντας, καὶ τὸ πηλίκον αἰεὶ καταφατικὸν ἐξέρχεται, 4: 2=2. διότι αὖ ἤτον τὸ πηλίκον 2 ἀποφατικὸν, πολλαπλασιαζόμενος ὁ διαιρέτης μὲ τὸ πηλίκον 2. —2, δὲν ἐξήρχετο ὁ διαιρετέος +. ὅθεν ὁ Κανὼν.

„Όταν ὁ διαιρέτης καὶ διαιρετέος ἦναι καταφατικοί, τὸ πηλίκον αἰ καταφατικόν. Ἐὰν δ' ὁ διαιρετέος ἀποφατικός, ὡς παραγόμενον, ἄλλως οὐ γίνεται, εἰμὴ ἐὰν ὁ εἰς παράγων καταφατικός, καὶ ὁ ἕτερος ἀποφατικός (§. 83.). λοιπὸν ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀποφατικός, καὶ ὁ διαιρετέος, ἀνάγκη ὁ ἕτερος παράγων, τὸ πηλίκον νὰ ἦναι καταφατικόν· ὡς—15:—5=+3. διότι —5.+3=—15. καὶ ἐξέρχεται ὁ Κανὼν.

„Όταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ἀποφατικοί, τὸ πηλίκον αἰ καταφατικόν ἢ γενικώτερον· τὰ ὅμοια σημεῖα δίδουσι πηλίκον καταφατικόν, ὡς εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἐὰν δ' ὁ διαιρετέος καταφατικός, καὶ ὁ διαιρέτης ἀποφατικός, τὸ πηλίκον ἐξ ἀνάγκης ἀποφατικόν· διότι. εἶναι ὁ ἕτερος παράγων εἰς τὸν διαιρετέον ὡς γινόμενον· ὡς 8: —2=—4. καὶ 20: —5=—4. διότι καὶ —2.—4=8. καὶ —5. —4=20.

Ἐὰν δὲ τέλος καὶ ὁ διαιρετέος ἀποφατικός, καὶ ὁ διαιρέτης καταφατικός, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τὸ πηλίκον ἀποφατικόν· ὡς —8: 4=—2· διότι 4. —2=—8· καὶ ἐξέρχεται ὁ ἕτερος Κανὼν.

„Τὰ ἀνόμοια σημεῖα δίδουσι πηλίκον ἀποφατικόν, ὡς καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. (§. 83.)

§. 122. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὴν διαίρεσιν ἔχει μεγάλην ἀναφορὰν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (§. 91.). Διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐξίσωσεως μεταβάλλει εἰς διαίρεσιν, καὶ αὕτη εἰς πολλαπλασιασμόν (§. 91.), 5. 6=30, καὶ 5= $\frac{30}{6}$, καὶ ἔτι $\frac{54}{9}=6$, καὶ

ἄρα $54=6$. 9. ὅθεν εἰς κάθε ἐξίσωσιν, εἰν ἔχη ἐν σκέ-
λος τῆς ἐξισώσεως διαιρέτην ὑπὸ τὴν γραμμὴν, διὰ νὰ
ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τὴν διαίρεσιν; με αὐτὸν τὸν διαιρέτην
πολλαπλασιάσωμεν ὅλον τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως,
καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ $\frac{315}{5}=63$. ἄρα καὶ $315=63 \cdot 5$.

κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, εἰν ἡ ἐξίσωσις ἔχη παράγοντας εἰς
τὸ ἐν σκέλος, διαιροῦμεν με τὸν παράγοντα τὸ ἕτερον
σκέλος, καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν χαλᾷ. ὡς $5 \cdot 9=45$. ἄρα
 $5=\frac{45}{9}$ καὶ ἔτι $3 \cdot 4 \cdot 5=60$. ἄρα $4=\frac{60}{3 \cdot 5}$.

§. 123. Ἐὸν δὲ τῆς ἐξισώσεως ἕκαστον σκέλος ἔχη
μέρη με τὰ σημεῖα + καὶ —, καὶ ἔχη ἐν μέρος, ἢ πολ-
λὰ ὁμοῦ με διαιρέτας, τότε διὰ νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ
τοὺς διαιρέτας, με αὐτοὺς τοὺς διαιρέτας πολλαπλασιά-
ζομεν ὅλα τὰ λοιπὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως, ἐκτὸς μόνου ἐ-
κείνου τὸ μέρος, ὅπου ἔχει αὐτὸν τὸν διαιρέτην ὑποκάτω·
ὡς $5+\frac{60}{10}-4=3+4$. ἄρα $5 \cdot 10+60-4 \cdot 10=3 \cdot 10+4 \cdot 10$.

Ἐπειδὴ, εἰν τὰ ἴσα ἐπὶ ἴσα πολλαπλασιασῆς τὰ γενο-
μενα ἴσα (§. 78.)· τὰ δὲ μέρη τῆς ἐξισώσεως ἴσα· ἄρα

$$10\left(5+\frac{60}{10}-4\right)=(3+4)10 \cdot \text{ἀλλὰ}$$

$$\left(5+\frac{60}{10}-4\right)10=10 \cdot 5+\frac{60 \cdot 10}{10}-10 \cdot 4 \cdot \text{τὸ δὲ}$$

$$\frac{60 \cdot 10}{10}=60 \text{ (§. 92.) ἄρα } 5 \cdot 10+60-4 \cdot 10=3 \cdot 10+4 \cdot 10.$$

$$\text{κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τοῦτο γίνεται } \frac{6}{2}+5-\frac{9}{3}=\frac{8}{4}+3 \cdot \text{διὰ νὰ}$$

ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς διαιρέτας, πολλαπλασιάζομεν ὅ-
λα τὸ μέρος τῆς ἐξίσωσως μὲ ἑκαστον διαιρέτην, ἐκτὸς
ἐκείνου τοῦ μέρους, εἰς τὸ ὁποῖον αὐτὸς διαιρέτης γίνε-
ται· δηλ. $6+2 \cdot 5 = \frac{2 \cdot 9}{3} = \frac{8 \cdot 2}{4} + 3 \cdot 2$ καὶ ἔτι

$$3 \cdot 6+2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 9 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 8}{4} + 3 \cdot 3 \cdot 2 \text{ καὶ τέλος}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 6+2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 9 \cdot 4 = 8 \cdot 2 \cdot 3+2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot$$

$$\text{ἤτοι } 72+120=72=48+72.$$

Κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἡμπορεῖ ὁ πρωτόπειρος νὰ ἀ-
παλλαχθῇ ἀπὸ ὅλους τοὺς διαιρέτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν.

§. 124. Ἐὰν δὲ ἐν μέρος τῆς ἐξίσωσως, ἢ πολ-
λὰ, ἔχῃ παράγοντας, καὶ θέλῃ τις νὰ ἀπαλλαχθῇ ἀπὸ ἓνα
παράγοντα, ἢ ἀπὸ πολλοὺς, τότε μὲ τὸν παράγοντα αὐτὸν
διαίρει ὅλα τὰ λοιπὰ μέρη, ἐκτὸς ἐκείνου, ὅπου εἶναι αὐ-
τὸς παράγων· δηλ. $5 \cdot 4+3=7=10+6$ ἢ ἐξίσωσις δὲν
χαλᾷ, οὕτως $5+\frac{3}{4} = \frac{7}{4} = \frac{10}{4} + \frac{6}{4}$ ὅτι $5+\frac{3-7}{4} = \frac{10+6}{4}$.

$$\text{ἢ } 5+\frac{-4}{4} = \frac{16}{4}, \text{ καὶ } 5-1=4. \text{ κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τοῦτο}$$

$$4 \cdot 2+16=3 \cdot 3=15, \text{ γίνεται } 4+\frac{16}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}.$$

Πο-
λὰ τοιαῦτα παραδείγματα θέλομεν ἀναφέρειν, ὅταν περὶ
γραμμάτων πραγματευθῶμεν.

§. 125. Ἐπειδὴ ἐμάθομεν τοὺς νόμους τῆς συνά-
ψεως, καὶ ὀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τῆς διαι-
ρέσεως, καὶ ἔτι πολλὰς μεταβολὰς τῆς ἐξίσωσως χωρὶς
νὰ βλάβηται ἡ ἐξίσωσις, εὐκόλως καὶ ἀκόπως λύομεν πολ-
λὰ προβλήματα, ὅταν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ἀπὸ τὴν σύναψιν,

καὶ ἀφαίρεσιν δυνάμεθα ἕκαστον σκέλος, καὶ μέρος τῆς ἐξι-
σώσεως, νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ ἐν σκέλος εἰς τὸ ἕτερον διὰ
τῶν ἐναντίων σημείων (§. 52.). Ἀπὸ δὲ τὸν πολλαπλα-
σιασμόν καὶ διαίρεσιν δυνάμεθα νὰ ἀπαλλαχθῶμεν καὶ ἀπὸ
διαιρέτας καὶ ἀπὸ παράγοντας (§. 122...123.). Ὅθεν διὰ
νὰ λύσωμεν ἐν πρόβλημα, πρέπει Α'. νὰ εὕρωμεν μίαν ἐξι-
σῶσιν κατὰ τοὺς λόγους, ὅπου προφέρεται τὸ πρόβλημα.

Β'. Εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοὶ, καὶ
μόνον εἰς ἄγνωστος, τὸν ὁποῖον χαρακτηρίζομεν μὲ τὸν χ.
(ὅταν εἰς τὸ πρόβλημα ᾔναι δύο ἀριθμοὶ ἄγνωστοι καὶ ἐπέ-
κεινα, ἀποκλείονται ἀπὸ τὴν παροῦσαν πραγματείαν, καὶ
εἰς ἕτερον μέρος ἀποταμειεύονται.

Γ'. Νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς διαιρέτας ὅλους.

Δ'. Νὰ φέρωμεν ὅλα τὰ μέρη, ὅπου ἔχουσι τοὺς γνω-
στοὺς χαρακτῆρας εἰς ἐν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ τὸ ἑ-
τερον μέρος, ὅπου ἔχει τὸν ἄγνωστον χαρακτῆρα χ νὰ ᾔναι
εἰς τὸ ἕτερον σκέλος.

Ε'. Αὐτὸ τὸ σκέλος μὲ τὸ ἄγνωστον νὰ μένῃ πάντατε
καταφατικόν.

καὶ ΣΤ'. Ὅταν ἔχῃ τὸ ἄγνωστον σκέλος παράγοντας,
μὲ αὐτοὺς νὰ διαιρῶμεν τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως,
καὶ νὰ μένῃ μόνον χ, καὶ τότε τὸ πρόβλημα λύεται. Ἐ-
πειδὴ ὅμως ἡ μεγίστη δυσκολία εὐρίσκεται εἰς τὸ πρῶτον,
πῶς ἀπὸ τὸ πρόβλημα κατασρῶνεται ἡ ἐξισῶσις· ὁ πρῶ-
τόπειρος ἄς προσέχῃ εἰς ὅλα τὰ ἐξῆς παραδείγματα, διὰ
νὰ συνηθίσῃ κατ' ὀλίγον εἰς τὴν σύνθεσιν τῆς ἐξισώσεως.

Π ρ ό β λ η μ α Α'.

„Ερωτήθη τις, πόσα γρόσια ἔχει, καὶ εἶπεν, εἰάν εἴ-

χον ἔτι τὰ ἡμίση ἀπὸ ὅσα ἔχω, ἤθελον ἔχη 12. Πόσα λοιπὸν ἔχει;

Φανερόν, ὅτι τὸ τί ἔχει, εἶναι ἄγνωστον. Ἄρα χ , ἔπειτα αὐτὰ μαζὴ μὲ τὰ ἡμίση εἶναι 12, τὸ δὲ ἡμίσι τοῦ χ , εἶναι $\frac{\chi}{2}$ (§. 120.) ἄρα $\chi + \frac{\chi}{2} = 12$. Λοιπὸν $2\chi + \chi = 24$

(§. 123.) ἦτοι $3\chi = 24$. λοιπὸν $\chi = \frac{24}{3} = 8$. ἄρα 8 γρόσια εἶχε· διότι $8 + 4 = 12$.

Π ρ ό θ λ η μ α Β'.

Διδάσκαλός τις ἐρωτηθεὶς πόσους ἔχει μαθητὰς, εἶπεν, ὅτι ὅλοι οἱ μαθηταί μου ἐκάθηντο εἰς τρία πατώματα μὲ ἴσον ἀριθμὸν, ἔφυγον δὲ οἱ 30 ἐξ αὐτῶν, καὶ ἐμείναν μόνον τόσοι, ὅσοι ἦτον εἰς τὸ ἓν πάτωμα.

Ζητεῖται πόσοι ἦτον πρῶτον οἱ μαθηταί.

(Κ α τ α σ κ έ υ ή.)

Ἐπειδὴ οἱ μαθηταί εἶναι ἄγνωστοι, ὅλοι εἶναι $= \chi$. Πλὴν οὗτοι ὅλοι, λέγει, ἐμειράσθησαν ἐπίσης εἰς τρία πατώματα· ἄρα τὸ ἓν πάτωμα εἶχε τὸ ἓν τριτημόριον τῶν μαθητῶν, ἦτοι $\frac{\chi}{3}$, εἶπε δὲ καὶ ὅτι ἔφυγον 30 ἀπὸ αὐτοῦ, καὶ οἱ λοιποὶ ἦσαν ἴσοι μὲ αὐτοῦ τοῦ ἑνὸς πατώματος· εἰς λοιπὸν ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ χ , 30, οὕτω $\chi - 30$, ἔσται $\frac{\chi}{3} = \chi - 30$. ἐπειδὴ εὐρέθη ἡ ἐξίσωσις, εὐκόλως λύεται, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται.

$$\frac{\chi}{3} = \chi - 30$$

$$\chi = 3\chi - 3 \cdot 30 \text{ (§. 123.)}$$

$$3 \cdot 30 = 3\chi - \chi$$

$$90 = 2\chi$$

$$\frac{90}{2} = \chi, \text{ καὶ } 45 = \chi$$

(Λύσις.)

45 ἦτον οἱ μαθηταί· καὶ ἀπὸ 15 ἦτον εἰς τὸ ἐν πατωμα· διότι $3 \cdot 15 = 45$. καὶ ἔτι $45 - 30 = 15$

Σημείωσις.

Διὰ τὰ μὴ λέγωμεν τὰς δεῖξεις, συντομίας χάριν σημειοῦμεν ἐδῶ, ὅτι, εἰς τὸ τέλος τῆς γραμμῆς

————— + ἢ ————— — εὐρίσκεται + μὲ ἕνα ἀριθμὸν, σημαίνει οὗτος ὁ ἀριθμὸς νὰ προσεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως (§. 52.)· εἰς δὲ μὲ τὸ σημεῖον — σημαίνει οὗτος ὁ ἀριθμὸς νὰ ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως (§. 52.)· εἰς δὲ δύο ἀριθμοὶ ὡσιν, ὁ μὲν μὲ τὸ σημεῖον + ὁ δὲ μὲ τὸ — καὶ ἀνάπαλιν, σημαίνει, οὗτοι οἱ δύο ἀριθμοί, ὁ μὲν νὰ προσεθῇ, ὁ δὲ νὰ ἀφαιρεθῇ, καὶ ἀπὸ τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν δ' εἰς τὸ τέλος τῆς γραμμῆς εὐρίσκηται ἀριθμὸς μὲ σημεῖον· ἢ χ πολλαπλασιασμῷ, σημαίνει, οὗτος ὁ ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν δὲ τις κῆται μὲ σημεῖον: διαιρέσεως, σημαίνει, οὗτος ὁ ἀριθμὸς νὰ διέλῃ καὶ τὰ δύο σκέλη τῆς ἐξισώσεως (§. 124.). Ἐὰν δ' ἀπλου: σημαίνει νὰ ἀγῶμεν τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἀπλοῦτερον (§. 62.). Ἐὰν λοιπὸν αὐτὰς τὰς σημειώσεις καλῶς παρατηρήσωμεν, εὐκόλως τὰς ἐξισώσεις λύομεν.

Π ρ ό θ λ η μ α Γ'.

Ἐνας μαθητὴς ἐρωτήθη, τί ἐξιδεύει τὸν καθ' ἑκάστου μῆνα; εἶπεν, εἰς συνάψης τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων ἐξοδεύω, καὶ τὸ ἐν τριτημόριον, καὶ τὸ ἐν τεταρτημόριον, τὸ κεφάλαιον γίνεταί μεγαλήτερον 2 γρόσια ἀπὸ ὅ,τι ἐξοδεύω.

Ζητεῖται λοιπὸν πόσα ἐξοδεύει;

(Κατασκευή.)

Ἄυτὸς ἐξοδεύει ὅλα ὁμοῦ χ , τὸ δὲ ἥμισυ εἶναι $\frac{\chi}{2}$,

καὶ τὸ τριτημόριον $\frac{\chi}{3}$, καὶ τὸ τεταρτημόριον $\frac{\chi}{4}$. συνά-

πτομεν ὅλα ὁμοῦ, καὶ γίνεταί τὸ κεφάλαιον $\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4}$. ἀλ-

λὰ τοῦτο εἶναι μεγαλήτερον 2 γρόσια ἀπὸ τὰ ἐξοδα ὅλα χ · εἰς λοιπὸν αὐξήσωμεν καὶ τὸ χ μὲ 2· εἶσαι ἴσον μὲ

τὸ κεφάλαιον ἐκεῖνο· ἄρα $\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} = \chi + 2$ · εὐρέθη ἡ ἐξι-

σωσις, καὶ εὐκόλως τῶρα λύεται τὸ πρόβλημα.

Λύσις.

$$\begin{array}{r}
 \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} = \chi + 2 \\
 \hline
 \chi + \frac{2\chi}{3} + \frac{2\chi}{4} = 2\chi + 4 \\
 \hline
 3\chi + 2\chi + \frac{6\chi}{4} = 6\chi + 12 \\
 \hline
 12\chi + 8\chi + 6\chi = 24\chi + 48 \quad \times 4 \\
 \hline
 26\chi = 24\chi + 48 \quad \text{πλου:} \\
 \hline
 26\chi - 24\chi = 48 \quad \text{— } 24\chi \\
 \hline
 2\chi = 48. \text{ καὶ } \chi = \frac{48}{2} = 24 \quad \text{πλου.}
 \end{array}$$

Ἐυρίσκομεν ὅτι τὸ χ εἶναι ἴσον 24· καὶ τόσα ἐξοδεύει τὸν μῆνα, ἐπειδὴ τὰ μισὰ 12, καὶ τὸ τριτημόριον 8, καὶ τὸ τεταρτημόριον 6, ὁμοῦ γίνονται 26· δύο γρόσια περισσότερον.

Π ρ ό θ λ η μ α Δ'.

Ἄλλος ἐρωτήθη πόσους χρόνους εἶναι ἡ ἡλικία του; εἶπεν, εἰς διπλασίαν τοὺς χρόνους μου, καὶ ἀφέλῃς 100, μένει λείψανον τόσον· ὅσον μένει, εἰς ἀφέλῃς τοὺς χρόνους μου ἀπὸ 100.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἡμεῖς αὐτοῦ τοὺς χρόνους ἀγνοοῦμεν, καὶ λέγομεν ὅτι εἶναι οἱ χρόνοι τοῦ χ . λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην του συνθήκην, διπλασιάζομεν τὸ χ , καὶ ἀφαιροῦμεν 100, οὕτως $2\chi - 100$, καὶ τοῦτο τὸ πρῶτον λείψανον, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν συνθήκην ἀφαιροῦμεν ἀπὸ 100 τὸ χ , οὕτως $100 - \chi$, καὶ εἶναι τὸ δεύτερον λείψανον· ἀλλὰ μὴν τὰ δύο λείψανα ἴσα, ἄρα ἡ ἐξίσωσις $2\chi - 100 = 100 - \chi$.

Λύσις.

$$\begin{array}{r} 2\chi - 100 = 100 - \chi \\ \hline 2\chi + \chi = 100 + 100 \end{array}$$

$$3\chi = 200 \text{ καὶ } \chi = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$$

Ἐὰν καλῶς κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτυλίσωμεν αὐτήν, εὐρίσκομεν τὸ $\chi = 66\frac{2}{3}$, ἥτοι εἶναι ἡ ἡλικία του χρόνων $66\frac{2}{3}$,

καὶ 8 μηνῶν· διότι τὸ $\frac{2}{3}$ τοῦ χρόνου εἶναι μῆνες ὀκτώ·

Π ρ ό θ λ η μ α. Ε'.

Πατήρ τις ἐλυπεῖτο, ὅτι τρεῖς φοραῖς ἦτον γεροντότερος ἀπὸ τὸν υἱόν του· ἐπαρηγορήθη ὁμῶς, ὅταν ἐσοχάσθη, ὅτι μετὰ 20 χρόνους μόνον ἡλικίαν διπλασίαν θέλει ἔχει ἀπὸ τὸν υἱόν του.

Ζητεῖται λοιπὸν πόσων χρόνων ἦτον αὐτὸς, καὶ ὁ υἱὸς του.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἄυτοῦ εἶναι φανερὸν, ὅτι, ἂν ἡξεύρωμεν τοὺς χρόνους τοῦ υἱοῦ του, ἐμανθάνομεν καὶ τοὺς χρόνους τοῦ πατρὸς· διὰ τοῦτο διορίζομεν τοὺς χρόνους τοῦ υἱοῦ μὲ τὸ χ. ἄρα τοῦ πατρὸς οἱ χρόνοι εἶναι 3 χ. διότι τριπλασίους χρόνους, λέγει, ὅτι ἔχει ἀπὸ τοὺς χρόνους τοῦ υἱοῦ, καὶ μετὰ 20 χρόνους θὰ ἦναι, οἱ μὲν χρόνοι τοῦ υἱοῦ $\chi + 20$. οἱ δὲ τοῦ πατρὸς $3\chi + 20$. ὅλλα τότε οἱ χρόνοι τοῦ πατρὸς διπλαῖοι ἀπὸ τοὺς τοῦ υἱοῦ· ἄρα, εἰ διπλασιάσωμεν τοὺς χρόνους τοῦ υἱοῦ, ἔσονται ἴσοι μὲ τοὺς χρόνους τοῦ πατρὸς, οὕτω. $2(\chi + 20) = 3\chi + 20$. καὶ εὕρομεν τὴν ἐξίσωσιν.

Λύσις.

$$\begin{array}{rcl}
 2(\chi + 20) & = & 3\chi + 20 \\
 \hline
 2\chi + 20 \cdot 2 & = & 3\chi + 20 \quad \text{ἐνεργεία,} \\
 \hline
 \text{ἦτοι } 2\chi + 40 & = & 3\chi + 20 \quad \text{ἐνεργεία,} \\
 \hline
 & & -20, -2\chi \\
 40 - 20 & = & 3\chi - 2\chi \\
 \hline
 20 & = & \chi \quad \text{πλου:}
 \end{array}$$

Ἐὰν αὐτὴν καλῶς ἐκτυλλίσωμεν, εὐρίσκονται οἱ χρόνοι τοῦ υἱοῦ $\chi = 20$ · ἄρα χρόνοι τοῦ πατρὸς $3\chi = 3 \cdot 20 = 60$. καὶ λοιπὸν μετὰ 20 χρόνους, ὁ μὲν υἱὸς θὰ εἶναι 40 χρό-

νων, ὁ δὲ πατήρ 80, ἥτοι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Π ρ ό θ λ η μ α ΣΤ'.

Μαθητῆς τις ἐλθὼν εἰς ἀκαδημίαν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐδιδάσκοντο τὰ μαθήματα εἰς ἓνα διωρισμένον χρόνον, ἠβελήσεν νὰ ἀκούσῃ εἰς αὐτὸν ὅλον τὸν καιρὸν τὰ μαθήματα, πλὴν ἔχοντας μίαν ποσότητα γρόσιων, ἐτοχάσθη, ὅτι, εἰς εἰς κάθε χρόνον ἐξοδεύῃ ἐπὶ 500 γρόσια, τὸν ἔλειπον 300, εἰς δὲ ἐξοδεύῃ ἀπὸ 400, τῷ ἔμειναν 200.

Ζητεῖται εἰς πόσους χρόνους παρεδίδοντο τὰ μαθήματα, καὶ πόση ἦτον ἡ ποσότης τῶν ἄσπρων του;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἐἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα δύο εἶναι τὰ ἄγνωστα, τὸ ποσὸν τῶν χρόνων, καὶ τὸ ποσὸν τῶν ἄσπρων, πλὴν εἰς μάθωμεν τὸ ποσὸν τῶν χρόνων, εὐκόλως μαθαίνομεν καὶ τὸ ποσὸν τῶν ἄσπρων· διὸ διορίζομεν τὸ ποσὸν τῶν χρόνων μὲ τὸ χ , καὶ ἐπειδὴ εἶπεν, εἰς ἐξοδεύῃ ἀπὸ 500, λείπουν 300. πολλαπλασιάζομεν τοὺς χρόνους χ μὲ 500, καὶ εὐγάζομεν 300, καὶ τόση εἶναι ἡ περιουσία του. $500\chi - 300$. πάλιν ἐπειδὴ εἶπεν, εἰς ἐξοδεύῃ ἀπὸ 400 τοῦ μένουσι 200, πολλαπλασιάζομεν μὲ 400 τοὺς χρόνους χ , καὶ προσθέτομεν καὶ 200 οὕτω, $400\chi + 200$. καὶ εἶναι ὅλη ἡ περιουσία του· λοιπὸν μὲ δύο ἐκφράσεις εὕρομεν τὴν περιουσίαν του, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι

$500\chi - 300 = 400\chi + 200$. καὶ οὕτως εὑρηται ἡ ἐξέσῳσις.

Λύσεις.

$$\begin{array}{r}
 500x - 300 = 400x + 200 \\
 \hline
 500x - 400x = 200 + 300 \\
 \hline
 100x = 500 \\
 \hline
 x = \frac{500}{100} = 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -(400x - 300) \\
 \text{πλου:} \\
 : 100
 \end{array}$$

Ἐὰν δὲ καὶ ταύτην τὴν ἐξίσωσιν καλῶς μεταβάλλωμεν, εὐρίσκομεν τὸ $x=5$. ὅρα εἰς πέντε χρόνους τὰ μαθήματα παρεδίδοντο· ἐπεὶ δὴ ὅμως ὅλη ἡ περιουσία του εὐρέθη $500x-300$. ἀντὶ τοῦ x θέτομεν τὰ ἴσα 5, οὕτω $500 \cdot 5 - 300$. καὶ ἐπεὶ δὴ $500 \cdot 5 = 2500$, ἀφαιροῦμεν 300 ἀπὸ αὐτὰ, $2500 - 300 = 2200$. καὶ τόση ἦν ἡ περιουσία του.

Κατ' αὐτὸν λοιπὸν τὸν τρόπον εἴμεθα ἱκανοὶ νὰ λύσωμεν πολλὰ προβλήματα· πλὴν ἐπεὶ δὴ σύναψις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, καὶ διαίρεσις, εἰς αὐτὰ εὐρίσκονται, ἐρχόμεθα ἤδη εἰς τὸ ἕτερον μέρος νὰ μάθωμεν, πῶς τὰ γράμματα συνάπτονται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται, καὶ διαιροῦνται, καὶ ἔπειτα θέλομεν λύσει καὶ ἄλλα πολλὰ προβλήματα.

Μ Ε Ρ Ο Σ Β'.

Περὶ Χαρακτῆρων Γενικῶν.

§. 126. **Χ**αρακτῆρας γενικοὺς νοῶ ἑνταῦθα. σημεῖα τινα, ὅπου λαμβάνονται καθόλου καὶ ἀόριστα, καὶ εἰς κάθε ἓνα ἀπὸ αὐτὰ διαφόρους ποσότητας θέτομεν, καὶ οὕ-

τοι οἱ χαρακτῆρες συνήθως ἀπὸ τοῦ ἀλφαβήτου λαμβάνονται, ὡς α, β, γ, δ, κτλ. οὕτω καὶ τὰ ἕτερα γένη τῶν Ἑυρωπαϊῶν μεταχειρίζονται τὰ γράμματα, ὅπου ἕκαστον γένος συγγράφει τὰς ἐννοίας του, ὡς οἱ Λατίνοι καὶ οἱ μετ' αὐτοὺς, a, b, c, d κτλ. Καθόλου δὲ λέγονται, καθότι εἰς τὸ ἐξῆς δι' αὐτῶν τῶν χαρακτήρων θέλομεν λύσει ἐν πρόβλημα μὲ διαφόρους τιμὰς. Ἀόριστοι δὲ, καθότι διορίζως σημαίνουσιν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς, ὡς τὸ γ φέρε, τίθεται ἀντὶ τοῦ 5, καὶ 2, καὶ 10, καὶ 548, καὶ 3156, καὶ ἀντὶ ἑκάστου ἀριθμοῦ. Τοῦτο νοεῖται δι' ὅλα τὰ γράμματα. Ἐὰν ὅμως ἀπαξ διορισθῇ, τότε χάνει τὸ καθόλου, καὶ γίνεται μερικὸς (§. 29.)· ὡς, εἰς τὸν ζ ὑποθῶμεν ἀντὶ 5, τότε ὁ ζ μόνον 5 σημαίνει· ἢ ὑποθῶμεν διὰ 150, τότε μόνον 150 σημαίνει, καὶ πλεόν ἢ ἑλάττω οὐχί. Ὁθεν εἰς δύο διαιροῦνται, εἰς διωρισμένους καὶ ἀδιορίστους· καὶ διωρισμένοι εἶναι ἐκεῖνοι, ὅπου διορίζονται νὰ σημαίνωσι 5, 6, ἢ 10, ἢ 503 κτλ. ἀδιορίστοι δὲ, οἵτινες ὅλα τὰ σημαίνουσιν. Ἐτι οἱ μὲν διωρισμένοι λέγονται δεδομένοι, ἢ γνωστοί, οἱ δ' ἀόριστοι λέγονται ζητούμενοι καὶ ἄγνωστοι· καὶ ἐκείνους μὲν τοὺς γράφουσι μὲ τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ὡς α, β, γ, δ, ε, ζ κτλ. τούτους δὲ μὲ τὰ ἔσχατα, ὡς π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω· διαφέρουσιν ἔμως οὗτοι οἱ καθόλου χαρακτῆρες τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων (§. 29.)· καθότι ἐκεῖνοι δύνανται λαβεῖν ἀπείρους ἀριθμοὺς, οὗτοι δὲ μόνον ἓνα, ὡς 5, 7, 83 κτλ. διότι ὁ 83 οὐδὲν ἕτερον σημαίνει, εἰμὴ 83, ὁ δὲ β, ἢ γ, κτλ. ἀπείρους· διὰ τοῦτο καὶ ἐκείνους τοῦ παραστατικοῦ ἀριθμοῦ σημεία εἶπον, (§. 29.) τούτους, τοῦ καθόλου, τῆς πληθύος κτλ, ἐπειδὴ δὲ ἐκεῖνοι τοῦ πα-

ρασατικοῦ ἀριθμοῦ σημεῖα, κατὰ περιόδους παρίστανται (§. 14.), οὗτοι δὲ οὐχί, ἀλλὰ μόνον τῆς πληθύος.

§. 127. Ἡ ἐπισήμη, ὅπου εἰς αὐτοὺς τοὺς χαρακτῆρας καταγίνεται, λέγεται "Αλγεβρα, ἢ γενικὸς Ὑπολογισμός, ἢ καθόλου Λογιστικὴ πλὴν ἡ ἀριθμητικὴ γενικῶς ἔχει καὶ αὐτοὺς τοὺς χαρακτῆρας, καὶ τοὺς ἀριθμητικοὺς ἀντικείμενον· καὶ διὰ τοῦτο αἱ μέθοδοι εἰσιν αἱ αὐταί, καὶ οὐ διακρίνονται· διὸ καὶ ἡμεῖς ἄμφω τὰ εἶδη εἰς ἓν συνήψαμεν (§. 6.).

§. 128. Εἰς ὅλους τοὺς Ὑπολογισμοὺς τῶν γραμμάτων, λαμβάνουσι τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ καταφατικοῦ + καὶ ἀποφατικοῦ —, οὕτω $\alpha + \beta$ σημαίνει, ὡς ἐκεῖ, (§. 18.) τὸ β νὰ προσεθῇ εἰς τὸ α · καὶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ σημαίνει αἱ τιμαὶ νὰ προσεθῶσι, καὶ τὸ β νὰ προσεθῇ εἰς τὸ κεφάλαιον· οὕτω καὶ $5 + \beta$ ἡ τιμὴ τοῦ β νὰ προσεθῇ εἰς τὸν 5 κτλ. Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ ἀφείλωμεν ἀπὸ ἓν γράμμα, ἢ ἀριθμὸν, ἕτερον γράμμα, ἢ ἀριθμὸν, κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον (§. 61.), γράφομεν τὸν μειωτέον, καὶ εἴτα τὸ σημεῖον —, καὶ ἔπειτα τὸν ἀφαιρετέον $\beta - \gamma$, ἢ $3 - \gamma$, σημαίνει ἡ τιμὴ τοῦ γ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ β ἢ 3. ἢ $\delta - 4$, τὸ 4 νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δ . τοῦτο γίνεται καὶ διὰ τῆς παρενθέσεως, $(\alpha + \delta) - (\alpha + \gamma)$. δηλ: σύναψον τὰς τιμὰς τοῦ α καὶ γ , καὶ ἔπειτα ἄφες αὐτὸ τὸ κεφάλαιον τοῦ α καὶ β δηλ: ὥς διορίσωμεν $\alpha = 30$, $\beta = 20$, καὶ $\gamma = 8$. Ὅθεν, εἰὰν τὰ ἴσα ἀντὶ τῶν ἴσων θῶμεν, ἔσαι $(\alpha + \beta) = (30 + 20)$, καὶ $(\alpha + \gamma) = (30 + 8)$, καὶ $(30 + 20) - (30 + 8) = 12$. Ὁμοίως καὶ $(\alpha + \beta) - (\gamma - \delta)$, καὶ $(\alpha - \beta) - (\delta - \gamma)$, σημαίνει ἡ μετὰ τὸ σημεῖον παρένθεσις. νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν πρὸ τοῦ σημείου παρένθεσιν· οὕτω καὶ εἰς τὰ λοιπά.

§. 129. Τοῦτο πηρεῖται καὶ μετὰ τὸ σημεῖον τοῦ πολ-

λαπλασιασμοῦ χ . δηλ: $\alpha\chi\beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$ σημαίνει ἡ τιμὴ τοῦ α . νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὴν τιμὴν τοῦ β . Καὶ ἔτι $\gamma\chi\delta\chi\zeta$ τὸ γινόμενον παρίσχησιν ἀπὸ τοὺς παράγοντας $\gamma, \delta, \text{καὶ } \zeta$.

Σημεῖωσαι ὅμως, ὅτι εἰς τὰ γράμματα κοινῶς εἰθίσει νὰ μὴ θέτωσι σημεῖον πολλαπλασιασμοῦ. "Οθεν ἀντὶ $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$. νὰ μὴ θέτωσι σημεῖον πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλ' οὕτω νὰ γράφωσιν $\alpha\beta\gamma$, καὶ σημαίνει τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοὺς παράγοντας, α, β, γ . ὁμοίως καὶ $\delta \cdot \kappa \cdot \chi \cdot \omega$ τὸ γινόμενον σημαίνει ἀπὸ τοὺς παράγοντας $\delta, \kappa, \chi, \omega$. "Οθεν τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς παρεντίθεται, διὰ νὰ μὴ γένη σύγχυσις, εἰς δὲ τὰ γράμματα οὐχί. Ἐἰς τὰ γράμματα πολλάκις εὐρίσκονται καὶ ἀριθμοὶ παράγοντες, ὡς $4\delta\gamma, 5\delta\delta\epsilon\zeta$ · καὶ σημαίνει τὸ παραγόμενον ἀπὸ τοὺς παράγοντας $5\delta, \delta, \epsilon, \zeta$ · οἱ δὲ παράγοντες τῶν ἀριθμῶν, ὅπου εἶναι πρὸ τῶν γραμμάτων, λέγονται συνεργοί· οὕτω 2δ . ὁ 2 παράγων, λέγεται καὶ συνεργὸς τοῦ δ · καὶ $35\alpha\beta\gamma$. ὁ 35 συνεργὸς τοῦ $\alpha\beta\gamma$ · "Οπου δὲ τὰ γράμματα δὲν ἔχουσι συνεργοὺς, νοεῖται ἡ μονὰς, ὡς $\alpha\beta = 1\alpha\beta$ · καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς δὲν πολλαπλασιάζει, δὲν τίθεται, πλὴν νοεῖται.

§. 130. Ἐὰν τὸ αὐτὸ γράμμα πολλάκις ἢ δις, ὡς παράγων εἰς τὸ παραγόμενον εὐρίσκεται, συντομίας χάριν γράφεται μόνον ἅπαξ, καὶ ἐπάνω αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ γράφομεν τὸν ἀριθμὸν ποσάκις αὐτὸ εὐρίσκεται, ὡς παράγων εἰς τὸ παραγόμενον· δηλ: ἀντὶ $\alpha\alpha\alpha\alpha$, γράφομεν α^4 . ὁμοίως ἀντὶ $\delta\delta\delta\delta\delta$ γράφομεν δ^5 , καὶ ἔτι τοῦτο $\alpha^3\delta^4\gamma^2 = \alpha\alpha\alpha\delta\delta\delta\delta\gamma\gamma$.

Ὁ ἀριθμὸς δὲ ὁ ἐπάνω τῆς ποσότητος, Ἐκθέτης λέγεται, καὶ ὅπου ἀριθμὸς δὲν εὐρίσκεται, ἡ μονὰς νοεῖ-

ται, οὕτω $\alpha^3\beta^2\gamma = \alpha^3\beta^2\gamma^1 = \alpha\alpha\alpha\beta\beta\gamma$. ὁ μὲν 3 λέγεται ἐκ-
θέτης τοῦ α , ὁ δὲ 2 τοῦ β , καὶ ἡ μονὰς τοῦ γ . ὅθεν καὶ
 $10. 10 = 10^2$ καὶ $10. 10. 10 = 10^3$ (§. 19.)

Πολλάκις ὁ ἐκθέτης καὶ διὰ γραμμῶν χαρακτηρίζε-
ται, ὡς α^5 , ἢ α^{γ} , ἢ $\beta^{\delta}\psi^{\chi}$, καὶ λέγονται γενικοὶ,
καθόλου καὶ ἀδιόριστοι· οἱ πρωτόπειροι πρέπει καλῶς νὰ
διακρίνωσι τὸν ἐκθέτην ἀπὸ τὸν συνεργόν, ὡς 3α καὶ α^3 .
τὸ μὲν 3α σημαίνει, ὁ 3 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν α .
ἐὰν $\alpha=5$, $3. 5=15$. τὸ δὲ α^3 σημαίνει, νὰ πολλαπλα-
σιασθῇ τρεῖς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτόν· ἔστω $\alpha=5$. ἄρα
ὁ α^3 σημαίνει $5. 5. 5=125$.

§. 131. Ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης, καὶ διαιρετέος, ἐκ-
τίθεται μὲ γράμματα, τὸ πηλίκον παρίσταιται, ὡς εἰς τοὺς
ἀριθμοὺς, δηλ: διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως, ἦτοι $\alpha:$
 β , ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, σημαίνει ἡ τιμὴ τοῦ α νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς τι-

μῆς τοῦ β . ἐὰν $\alpha=20$, καὶ $\beta=10$. ἔσαι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{20}{10} = 2$.

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν ᾖναι ὁ διαιρέτης γράμμα,
καὶ ὁ διαιρετέος ἀριθμὸς, ἢ ἀνὰ πάλιν ὡς $\frac{\beta}{3}$, ἢ $\frac{10}{6}$. ὁ-

μοίως καὶ ταῦτα $\frac{\beta-\alpha}{\gamma}$ σημαίνει ἂφ' οὗ ἀφέλωμεν τὸ α ἀπὸ

τοῦ β . νὰ διέλωμεν τὸ λοιπὸν διὰ τοῦ γ . καὶ $\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\delta}$ σημαίνει
τὸ λειψάνον $\beta-\gamma$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ λειψάνου $\alpha-\delta$. τὸ
αὐτὸ γίνεται καὶ διὰ παρενθέσεων, ὡς $(\alpha-\beta): (\gamma-\alpha)$,
ἢ $(\alpha\beta+\gamma-\delta): (\alpha^2+\gamma)$ ἢ οὕτω $\frac{\alpha\beta+\gamma-\delta}{\alpha^2+\gamma}$.

§. 132. Κάθε ποσότης, ὅπου διὰ γραμμάτων ἐκφράζεται, καλεῖται ποσότης Ἀλγεβραϊκῇ, ὡς καὶ ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν ἀριθμητικῇ· ἡ δ' Ἀλγεβραϊκῇ ποσότης, εἰ μὲν ἓν γράμμα ἐκφράζεται, ὁπλῇ λέγεται, ὡς α , β , γ κτ. εἰ δὲ διὰ πολλῶν γραμμάτων ὡς παραγόντων, διὰ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ διαιρέσεως, λέγεται σύνθετος· ὡς $\alpha\beta$, ἢ $\beta\gamma\delta$, ἢ α^3 ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἢ $\gamma\delta$.—δ. κτλ. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης ἢ ὁπλῇ, ἢ σύνθετος ἄνευ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$, λέγεται ἀσύμπλεκτος, ἢ μονομερὴς, ὡς τὰ ἀνωτέρω.

Ἐὰν δὲ συμπλέκωνται διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ λέγεται συμπεπλεγμένη, ἢ πολυμερὴς, ἢ πολυνῶμος· ὡς $\alpha + \beta + \gamma$, ἢ $\alpha\beta + \frac{\alpha}{\gamma}$ —δ ζ. καὶ ἐν ἐνὶ λόγῳ διώνυμος, εἰ μὲν

δύο μέρη ἔχῃ, ὡς $\alpha - \beta$, ἢ $\frac{\alpha}{\beta} - \gamma$. κτ: τριώνυμος εἰ μὲν

τρία ἔχῃ μέρη, ὡς $\alpha + \gamma + \beta$ κτ. "Ουτω καὶ τετραώνυμος, καὶ ὡς ὅνυμος κτλ. ἢ κάλλιου μονομερὴς, διμερὴς, τριμερὴς κτλ.

οὕτως ἢ $\alpha + \alpha\beta - \beta\gamma - \frac{\alpha}{\gamma} - \chi$ εἶναι ἑκφρασις Ἀλγεβραϊκῇ μὲ πέντε μέρη.

§. 133. Τὰ μέρη μιᾶς ἀλγεβραϊκῆς ποσότητος, εἰ μὲν ὥσι πάντῃ τὰ αὐτὰ γράμματα, καὶ οἱ αὐτοὶ ἐκθέται, καλοῦνται ταυτομερῇ, ἢ ὁμώνυμα, ὡς $4\alpha\beta^2\gamma^2$, καὶ $-3\alpha\beta^2\gamma^2$, εἰ δὲ διαφέρωσι κατὰ τὰ γράμματα καὶ τοὺς ἐκθέτας, καλοῦνται ἀνομοιομερῇ, ἢ ἑτερώνυμα, ὡς $4\alpha\beta^2\gamma^2 - 4\alpha\beta^2\gamma^2 - 4\alpha\beta^2\gamma$. ὅτι τὸ μὲν γ ἐκεῖ ἔχει ἐκθέτην 2, ἐδῶ 1. εἰς τὴν ποσότητα ταύτην $3\alpha\beta - 3\gamma\delta\beta^2 + 5\alpha\beta - 3\gamma\delta$, τὸ πρῶτον μέρος μὲ τὸ τρίτον εἶναι ὁμώνυμον, τὸ δὲ δεύτερον μὲ τὸ τέταρτον εἶναι ἑτερώνυμον.

§. 134. "Όταν εἰς μίαν Ἀλγεβραϊκὴν ποσότητα ᾗναι μέρη ὁμώνυμα· ταῦτα, εἰ μὲν ἔχωσιν ὅμοια σημεῖα, συναπτοῦνται, εἰ δ' ἑτερόμοια, ἀφαιροῦνται, κατὰ τοὺς νόμους τῆς συνάψεως καὶ ἀφαιρέσεως, οὕτω $a+a+a=3a$. καὶ $6x+6x+6x+6x=46x$, καὶ $-6y-6y-6y=-36y$. ὅθεν ὁ συνεργὸς σημαίνει νὰ ληφθῇ ἡ αὐτὴ ποσότης τόσαις φοραῖς μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅσαις φοραῖς ἡ μὲν εὐρίσκεται εἰς τὸν συνεργόν, ὡς $5ay=ay+ay+ay+ay+ay$. καὶ $26y+3ad^2+56y-2ad^2=76y+ad^2$. καὶ

$$3a+76-8a=76-5a. \text{ καὶ}$$

$17ab+66y-11ab-13ab-66y=-7ab$. Ταύτην τὴν πρᾶξιν καλοῦσιν οἱ ἀριθμητικοὶ Ἀλγεβραϊκὴν ποσότητα, εἰς τὸ ἀπλοῦςτερον ἀγαγεῖν.

"Οὕτω καὶ

$$5a+6y-3(ay-6)-26y+(ay-6)=5a-6y-2(ay-6).$$

Τὰ τοιαῦτα ὡς παρατηρῇ ὁ πρωτόπειρος καλὰ διὰ νὰ μὴ δυσκολεῖται.

§. 135. "Εἰς τὰ γράμματα εἶναι ἀδιάφορον ἢ οὕτω νὰ γραφῶσι τὰ μέρη τῆς Ἀλγεβραϊκῆς ποσότητος $a+b-y$, ἢ οὕτω $-y+b+a$, ἢ οὕτω $+b-y+a$. πλὴν διὰ τὸ τακτικώτερον θέτουσι τὰ μέρη ἐκεῖνα πρότερον, ὅπου ἔχουσι τὰ πρότερα στοιχεῖα τοῦ ἀλφαβήτου, οἷον πρότερον τὸ a , εἶτα τὸ y κτλ. ἄλλως ὅμως ἀδιάφορον εἶναι, ὅπως ἂν τεθῶσιν ὁμοίως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀδιάφορον εἶναι, ἢ οὕτω νὰ γραφῶσι $a^3bγ^2δ$, ἢ αὕτω $aaabγγδ$, ἢ οὕτω $ba^3γ^2δ$, ἢ οὕτω $γ^2δba^3$, ἢ ὅπως ἄλλως μετατεθῶσιν. ἀγκαλὰ τηρεῖται ὡς καὶ ἐνταῦθα ἡ τάξις τοῦ ἀλφαβήτου $a^3bγ^2δ$. πολὺ ὅμως διαφέρει $a-b$ καὶ $b-a$. διότι ἐκεῖ τὸ b ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ a , ἐδῶ τὸ a ἀπὸ τοῦ b . διότι μετεβλήθη τὸ ση-

μέτρου τοῦ $\alpha - \beta$ εἰς $+\beta - \alpha$ δὲν εἶναι τὸ αὐτό· ὁμοίως καὶ τοῦτο $\beta : \alpha$, ἀπὸ τοῦ $\alpha \beta$ διαφέρει καθότι ἐκεῖ τὸ α ἢ διαιρέτης, ἐνταῦθα διαιρέτης τὸ β . Ἐὰν δὲ εἰς τὰ γράμματα καὶ ἀριθμὸς εὐρίσκηται ὡς παράγων, οὕτως $\alpha\beta\delta$, ἀδιάφορον εἶναι ἢ $\alpha\beta\delta$ γραφῇ, ἢ $\alpha\beta\delta$, ἢ $\delta\alpha\beta$. πλὴν τὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα συνηθίζουσι νὰ τὸν γράφωσιν ὡς συνεργὸν εἰς τὰς ἀρχάς, τὰ δὲ λοιπὰ, ὅσα εἰς τοὺς ἀριθμοὺς εἵπομεν, τὰ αὐτὰ ἀνέχουσι καὶ εἰς τὰ γράμματα· ἐπεὶ δὲ ὅμως θεωρεῖται καὶ τι ἰδιαιτέρον εἰς τὴν σύναψιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμόν, καὶ διαίρεσιν τῶν γραμμάτων· καλὸν εἶναι νὰ διαλάβωμεν καὶ περὶ τούτων κατὰ μέρος διὰ νὰ γένῃ καὶ ἡ ἐργασία τούτων σαφής.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Α'.

Περὶ προσθέσεως ἐν γράμμασι.

§. 136. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ὦσιν ἀπλοῖ, εὐκόλως συνάπτωμεν τὰ δοθέντα μέρη μὲ τὰ σημεῖα τῶν· διότι ἡ πρόσθεσις εἶναι νὰ εὐρώμεν ἓνα ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὰ μέρη του (§. 44.) ὡς.

$$\begin{array}{r|l} +\alpha & \alpha \\ +\beta & -\beta \\ \hline +\alpha+\beta & \alpha-\beta \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -\alpha & -\alpha \\ +\beta & -\beta \\ \hline -\alpha+\beta & -\alpha-\beta \end{array} \quad \text{κτ.}$$

Ἐὰν ταῦτα καὶ οἱ ἀριθμῶν διορίσωμεν, εὐρίσκεται ἡ πρόσθεσις ἀληθής· ἔσω $\alpha=80$ καὶ $\beta=200$. Ἄρα $\alpha+\beta=80+200=280$. κτλ. διότι ἡ πρόσθεσις τῶν μονομερῶν χαρακτηρῶν τῆς Ἀλγεβραϊκῆς ποσότητος, εἶναι νὰ συνάψῃ τοὺς δύο ἢ τρεῖς, ἢ τέσσαρας, ἢ ὅσοι εἶναι χα-

ρακτῆρες ὁμοῦ εἰς μίαν ἔκφρασιν μετὰ τὰ σημεῖα τὰ αὐτὰ, ὅπου ἔχει πρὸ αὐτοῦ κάθε γράμμα, εἴν τε ἀπλᾶ ὡς τὰ γράμματα ὡς τὸ Α' καὶ Β'. παράδειγμα, εἴν τε σύνθετα ὡς τὸ Γ'.

Α'.	Β'.	Γ'.
+δ	+α	+αδ
+γ	—δ	—γδ
—	+γ	—αχ
6+γ	α—δ+γ	+γγδ
		—
		αδ—γδ—αχ+γγδ

Ἐὰν δὲ διορισθῶσι ποσότητες συμπεπλεγμέναι μετὰ σημεῖα + καὶ — (§. 131.) νὰ προσεθῶσιν, ἀκολουθοῦμεν τὰ ἐξῆς.

Α'. Γράφονται αὗται αἱ ποσότητες μετὰ τὰ ἰδιᾶτων σημεῖα κατὰ σειράν, ἢ εἰς μίαν ἀράδαν, ἢ καὶ εἰς πολλὰς· διότι ἀδιάφορον εἶναι ὅπως ἂν ταχθῶσι τὰ μέρη (§. 135.), εἴν μόνον ἕκασον μέρος ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖόν του, καὶ τε + εἶναι, καὶ τε —.

Β'. Ἐξετάζονται τὰ ὁμώνυμα μέρη (§. 133.), καὶ εἴν εἰς αὐτὴν τὴν ἀράδαν, ἢ εἰς αὐτὰς τὰς ἀράδας εὔρεθῶσι δύο ἢ τρία, ἢ περισσότερα μέρη ὁμώνυμα, ἐξετάζονται τὰ πρὸ αὐτῶν σημεῖα.

Γ'. Ἐὰν δὲ τὰ σημεῖα τῶν ὁμωνύμων ᾖναι ὅμοια, δηλ: εἴν ἔχωσιν ὅλα τὸ + ἢ ὅλα τὸ —, συνάπτονται μόνον οἱ συνεργοὶ αὐτῶν εἰς κεφάλαιον κατὰ τὴν πρόσθεσιν (§. 44.) καὶ μετὰ τὸ κεφάλαιον τοῦτο γράφονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁμωνύμων ἅπαξ, καὶ εἰς αὐτὸ προγράφεται τὸ σημεῖον τὸ κοινόν, ἢ + ἢ —, ὡς $3\delta\gamma^2 + 5\delta\gamma^2 = 8\delta\gamma^2$, ἢ $-αδ^3ε - 9αδ^3ε = -10αδ^3ε$. ὅτι εἰς τὸ $-αδ^3ε$ νοεῖται συνεργὸς ἡ μονάς (§. 129.).

Δ'. Εάν δὲ τὰ σημεῖα τῶν ὁμώνυμων μερῶν ᾗναι διάφορα, ἀφαιροῦμεν τὸν μικρότερον συνεργὸν ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον, καὶ εἰς τὸ λείψανον προσγράφομεν τὸ σημεῖον τοῦ μέρους ἐκείνου, ὅπου ἔχει τὸν μεγαλύτερον συνεργὸν, καὶ μετὰ τὸ λείψανον τῶν συνεργῶν γράφονται ἅπαξ τὰ γράμματα, ὡς $5αβ - 2αβ = 3αβ$. καὶ $4αζ^2 - 9αζ^2 = -5αζ^2$.

Ε. Εάν δὲ ὡς ἑκατέρωθεν δύο μέρη ὁμώνυμα, καὶ ἔχωσιν ἴσους συνεργούς, καὶ διάφορα σημεῖα, συνκαίρουται (δ. 18.), καὶ δὲν φράφονται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὡς $5αβ - 5αβ = 0$. καὶ $-9α^3γ^2 + 9α^3γ^2 = 0$.

ΣΤ'. Εάν δὲ ὡς ἑκατέρωθεν πολλὰ τὰ ὁμώνυμα, καὶ ἔχωσι πρὸ αὐτῶν διάφορα σημεῖα, συνάπτονται πρῶτον ἐκεῖνα, ὅπου ἔχουσι τὸ καταφατικὸν εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ ἔπειτα ἐκεῖνα, ὅπου ἔχουσι τὸ ἀποφατικὸν εἰς ἕτερον κεφάλαιον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ ἑλάττω κεφάλαιον ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ εἰς τὸ λείψανον προσγράφομεν τὸ σημεῖον τοῦ μείζονος, καὶ μετὰ τὸ λείψανον ἅπαξ τὰ γράμματα. π. χ.

$$30γδ - 4γδ + 13γδ - 3γδ - 18γδ = 18γδ. \text{ ὡσαύτως}$$

$$4α^2β - 16α^2β - 3α^2β + 10α^2β = -5α^2β. \text{ ὅτι}$$

$$-16 - 3 = -19 \text{ καὶ } 4 + 10 = 14 \text{ ἄρα } -19 + 14 = -5.$$

Ζ'. Καὶ τέλος τὰ ἑτερώνυμα γράφονται εἰς κεφάλαιον κατὰ τάξιν, μὲ τὸ σημεῖόν των.

"Ὅστις λοιπὸν ταῦτα καλῶς νοήσῃ, καὶ μεταχειρισθῇ, οὗτος ἔμαθε καὶ τὴν σύναψιν τῶν γραμμάτων ὀρθῶς, διότι κατὰ ταῦτα συνήφθησαν τὰ ἐξῆς παραδείγματα.

$\left. \begin{array}{l} \text{ἀθροῖς} \\ \text{ἐξ} \\ \text{μέρη} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Παράδ. Α'.} \\ 3αβ + 2αγ + 3δ^2γ \\ 2αβ - 5αγ - 3δ^2γ^2 \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \text{ἀθροῖς} \\ \text{ἐξ} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Παράδειγ. Β'.} \\ 8αχ - 3βγ - 5δχ + 12 \\ -αχ + 7βγ + 2δχ - 8 \end{array} \right\}$
$\text{κεφ: } 5αβ - 3αγ + 3δ^2γ^2 - 3δ^2γ^2$		$\text{κεφ: } 7αχ + 4βγ - 3δχ + 4$

Παραδ: Γ'.

$$\begin{array}{r} \text{ἀθροισμοί} \left\{ \begin{array}{l} \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{array} \right. \\ \hline \text{κεφ: } 2\alpha^3 + 6\alpha\beta^2 \end{array}$$

Παράδειγμα. Δ'.

$$\alpha^3 + 2\alpha\chi + \chi^2 - \alpha^3 + 2\alpha\chi - \chi^2 = 4\alpha\chi$$

Παράδειγμα. Ε'.

$$\alpha^4\beta^2 + 2\gamma^3\chi^4 - 3\gamma^3\chi^4 + 10\alpha^4\alpha^2 - \gamma^3\chi^4 = 11\alpha^4\beta^2 - 2\gamma^3\chi^4$$

Παράδειγμα. ΣΤ'.

$$\begin{array}{r} 5\alpha\beta + \alpha\gamma - 3\alpha\beta + 3 \\ - 3\alpha\beta + \delta\epsilon - 2 \\ - 2\alpha\gamma + \zeta\eta - 2\alpha\gamma + 7\gamma^2\delta + 13 \\ + 3\alpha^2\gamma + 3\zeta\eta + 3\alpha\gamma - 4 \\ \hline - \alpha\beta + 3\alpha^2\gamma + 4\zeta\eta + \delta\epsilon + 7\gamma^2\delta + 10 \end{array}$$

Ὁ δὲ πρωτόπειρος ὅς γράφῃ μόνος του ὅτι θέλει εἰς ἀθροισμούς, καὶ ἄς τοὺς συνάπτῃ κατὰ τὰ (Α', ἕως ζ').

Κ Ε Φ Α' Λ Α Ι Ο Ν Β'.

Περὶ Ἀφαιρέσεως ἐν γράμμασι.

§. 137. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν γραμμάτων εἶναι ἡ ἰδίᾳ τῶν ἀριθμῶν, δηλ: διδεται ἐν κεφάλαιον, ὅπερ μειωτέος καλεῖται, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεῖται ἐν μέρος δεδομένον, ὅπερ ἀφαιρετέος καλεῖται, διὰ τὰ εὐρωμεν τὸ ἕτερον, ἢ τὰ λοιπὰ· ὡς $2+3=5$, ἄρα $5-3=2$ (§. 52.). Οὕτω καὶ εἰς τὰ γράμματα $\alpha+\beta=\alpha+\beta$, εἰ δὲ τὸ ἐν εὐγάλωμεν τὸ α , ἢ τὸ β , μένει τὸ ἕτερον λείψανον, ὡς

$a + \beta - \beta = a$, ἢ $a + \beta - a = \beta$. εἰ δὲ ὁ μειωτέος ἔχῃ καὶ μέρος ἀποφατικόν, πρέπει εἰς αὐτὸν τὸν τρόπον νὰ ἐξετάσωμεν πῶς μένει τὸ ἕτερον μέρος· ἐξω $a - \beta$ ὁ μειωτέος καὶ θέλωμεν νὰ εὐρώμεν τὸ μέρος β , ὅταν ἀφέλωμεν τὸ a . λοιπὸν οὕτω γίνεται $a - \beta - a = -\beta$. εἰ δὲ θέλωμεν νὰ εὐρώμεν τὸ a , ὅταν ἀφέλωμεν τὸ β , ἄλλως οὐ γίνεται, εἰμὴ οὕτω $a - \beta + \beta = a$. διότι ἂν συναψώμεν τὸν ἀφαιρετέον, καὶ τὸ λείψανον, ἐξέρχεται πάλιν ὁ μειωτέος, ὡς $a - \beta = a - \beta$. Ἐκ πάντων τούτων βλέπομεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις καὶ εἰς τὰ γράμματα γίνεται, ἀφ' οὗ μεταβάλλομεν τὰ σημεῖα τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὰ ἐναντία σημεῖα, ἢτοι τὸ καταφατικὸν εἰς ἀποφατικόν, καὶ ἀνὰ πάλιν, ἔπειτα συνόπτομεν, συντέμνοντες (§. 62.) τὴν ἐκφρασιν.

"Οθεν ἡ ἀφαίρεσις τῶν γραμμάτων μεταβαίνει εἰς πρόσθεσιν, ὅταν τὰ σημεῖα μεταβάλλωμεν.

μειωτέος $+ \beta$	$- \beta$	$a + \beta - \gamma$	$- a + \beta + \gamma$
ἀφαιρετέος $+ a$	$+ a$	$+ a$	$+ a$
$a + \beta$	$- \beta - a$	$\beta - \gamma$	$- 2a + \beta + \gamma$

"Οθεν λέγεται νὰ ἀφέλωμεν ποσότητες Ἀλγεβραϊκῇν, εἶναι νὰ μεταβάλλωμεν τὰ σημεῖα αὐτῆς, καὶ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον.

τὰ ἐξῆς παραδείγματα, τρανῶς ἀποδεικνύουσι τὸ λεγόμενον.

μειωτέος $a\beta - a\gamma$	$5a\chi - \chi^3 - 3a - 9$
ἀφαιρ: $+ 5a\beta + \delta\gamma + a\gamma$	$+ 3a\chi + \chi^3 + 3a + 3a + 5\beta$
διαφ: $- 4a\beta + \delta\gamma$	$8a\chi - 2\chi^3 + 3a + 5\beta - 9$

$$12a - 3\beta + 7\gamma - 13\delta - 5\epsilon + 56$$

$$+ 4a + 7\beta + 3\gamma + 8\delta + 9\epsilon + 42$$

$$16a + 4\beta + 4\gamma - 5\delta - 14\epsilon + 14$$

$$5a^4\chi^2 - 20 + 7a\beta^3\gamma - 4\beta^4\gamma\chi^2$$

$$+ 2\beta^4\gamma\chi^2 + 5a^4\chi^2 + 8 + 2a^3\beta\chi$$

$$- 6\beta^4\gamma\chi^2 - 28 + 7a\beta^3\chi + 2a^3\beta\chi$$

Ἡ θάσσανος γίνεται, ὡς εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, συνάπτομεν τὸν ἀφαιρετέον μετὰ τὰ ἰδιάτου σημεῖα, μετὰ τὴν διαφορὰν, καὶ εἰς ἐξέλθῃ κεφάλαιον ὁ μειωτέος, ὀρθῇ ἢ πρᾶξις.

§, 138. Πολλάκις ἀφαιροῦμεν καὶ ὅλην παρενθεσιν, ἀπὸ ἐτέραν παρενθεσιν (§. 64.), ὡς $(a^2b + \gamma + 18)$ — $(a^2b + \gamma + \delta)$, καὶ σημαίνει ὅλον τὸ κεφάλαιον τῆς παρενθέσεως μετὰ τὸ σημεῖον, νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῆς παρενθέσεως τῆς πρὸ τοῦ σημείου, καὶ ὅταν μείνῃ οὕτω διὰ τῶν παρενθέσεων, καλεῖται συνεπτυγμένη ἀφαίρεσις· εἰς δὲ πραγματικῶς γένῃ ἢ ἀφαίρεσις καὶ ἀρθῇ ἢ παρενθεσις, ἀνεπτυγμένη. Ἀρεται δὲ ἡ παρενθεσις, ὅταν μεταβάλλομεν τὰ σημεῖα τῶν χαρακτῆρων αὐτῆς τὰ μετὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως, καὶ προσεθῇ εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς πρὸ τοῦ σημείου παρενθέσεως, ὡς $a^2b + \gamma + 18 - a^2b - \gamma - \delta = -\delta + 18$. οὕτω, καὶ ἡ $(b - \gamma + \delta) - (a^2b + \delta - \epsilon)$ γίνεται $b - \gamma + \delta - a^2b - \delta + \epsilon$ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

Ὁ δὲ μαθητὴς ὅς γυμνασθῇ, ὅσον δύναται μετὰ ἐδικὰς του παραδείγματα.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Γ'.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἐν γράμμασι.

§. 139. Ὁ μὲν πολλαπλασιασμός τῶν ἀπλῶν γραμμάτων γίνεται, ὡς εἵπομεν, ὅταν ἐφεξῆς τὰ γράμματα προσγράφωνται, χωρὶς νὰ μεσολαβῇ τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, (§. 128.) ὡς a^2 καὶ a^2b κτλ. διότι εἰς $a=2$ $b=3$ $\gamma=4$, $\delta=5$, $a^2b=2 \cdot 3 = 6$. 3. 4. 5=120. Τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ εἰς οἱ παράγοντες ἦναι σύνθετοι, ὡς

$\alpha\delta\chi\gamma\delta = \alpha\delta\gamma\delta$ κτλ. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς τῶν συμπεπλεγμένων χαρακτήρων, διαφέρει μὲν κατ'ὅτι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν, ὑναπύεται ὅμως ἀπὸ τὰ προηγούμενα· πλὴν ἐὰν καὶ οἱ ἅπλοῖ, καὶ οἱ ἀσύμπλεκτοι παράγοντες ἔχωσι συνεργῶς (§. 129.), καὶ εἰς αὐτοὺς οἱ μὲν πολλαπλασιάζονται, τὰ δὲ γράμματα, ὡς ἀνωτέρω γράφονται. Ἦξωσαν οἱ παράγοντες $\delta\alpha$ καὶ $\delta\delta$ · ἄρα τὸ παραγόμενον $40\alpha\delta$, ὅτι $8 \cdot 5\alpha\delta = 40\alpha\delta$. ἐὰν δὲ ᾖσιν οὗτοι $17\alpha^2\delta$ καὶ $3\gamma\delta$, τὸ παραγόμενον $17 \cdot 3\alpha^2\delta\gamma\delta = 51\alpha^2\delta\gamma\delta$ κτλ.

§. 140. Ἡ πολλυμερὴς Ἀλγεβραϊκὴ ποσότης πολλαπλασιάζεται μὲ ποσότητα μονομερῆ τὸν ἐξῆς τρόπον.

Α'. Γράφεται ἡ πολυμερὴς, καὶ ὑπ' αὐτὴν ἡ μονομερὴς, ὡς εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμῶν, ἐκεῖνη μὲν, ὡς πολλαπλασιαστέος, αὕτη δὲ, ὡς πολλαπλασιαστής. (§. 75.).

Β'. Μὲ αὐτὸν τὸν πολλαπλασιασὴν πολλαπλασιάζεται ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ τὰ κατὰ μέρος γεγόμενα γράφονται ὑπὸ τὴν ἀχθεῖσαν γραμμὴν μὲ τὰ ἀνήκοντα σημεῖα· διότι τὸ αὐτὸ ἐξέρχεται, ἢ ἐὰν ὅλον ὁμοῦ μὲ ἓνα ἀριθμὸν πολλαπλασιάσωμεν, ἢ κατὰ μέρος τὰ μέρη του. (§. 76.).

Γ'. Καὶ αὐτοῦ τὰ μὲν ὅμοια σημεῖα δίδουσι παραγόμενον καταφατικόν, τὰ δ' ἀνόμοια, ἀποφατικόν· διότι ἐν ταῦθα εὐκόλως τοῦτο δείκνυται διὰ τῆς ἐξισώσεως.

$$\begin{array}{r} \alpha = 2\alpha - \alpha \\ + 6 = + 6 \\ \hline \alpha\delta = 2\alpha\delta - \alpha\delta \end{array} \quad (\S. 133.)$$

διότι, ἐὰν τὸ ἔσχατον δὲν ᾖ του ἀποφατικόν

—αβ, οὕτως +αβ=2αβ—αβ ἦτον ἴσον· διατι ἀλλέως ἤθελεν εἶναι αβ=2αβ+αβ=3αβ.

Ὅμοιως καὶ ἐὰν ἄμφω ἀποφατικοί, τὸ παραγόμενον καταφατικόν· διότι

$$\begin{array}{r} \alpha=2\alpha-\alpha \\ -\beta=-\beta \\ \hline -\alpha\beta=-2\alpha\beta+\alpha\beta. \end{array}$$

Ἐὰν δὲν ἦτον καταφατικόν τὸ αβ, ἤθελεν εἶναι ἀποφατικόν, οὕτως —αβ=—2αβ—αβ=—3αβ, ὅπερ ἀδύνατον.

Δ'. Ἐὼν οἱ παράγοντες ἔχῃσι καὶ συνεργοὺς, πολλαπλασιάζονται πρῶτον οἱ συνεργοί, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσγράφονται οἱ παράγοντες (§. 139.)

Ε'. Ἐὼν δὲ ἄμφω οἱ παράγοντες ὥσιν ὁμώνυμοι, γρόφεται μόνον ὁ εἰς παράγων, καὶ οἱ ἐκθῆται τῶν παραγόντων συνάπτονται, καὶ γράφονται ἐπάνω αὐτοῦ τοῦ παράγοντος πρὸς τὰ δεξιὰ (§. 139.), ὥς $3a^2 \times 5a^5$. διότι τοῦτο εἶναι $3a^2 \times 5a^3 = 3aa \times 5aaa = 3$. $5aaaaa = 15a^5$. (§. 129.).

Ὅμοιως καὶ ἐὰν μόνον ἓν γράμμα ᾗται κοινὸν εἰς τοὺς παράγοντας, ὥς $a^6 \times 4a^5 \gamma = 4a^2 \delta^3 \gamma = 1$. $4aa\delta\delta\delta\gamma$ κτλ.

„Κατὰ τούτους τοὺς κανόνας πολλαπλασιάζονται τὰ ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 2\alpha-3a^2\delta+\delta\gamma^2 \\ 6a\delta^2\delta \\ \hline 12a^2\delta^2\delta-18a^3\delta^3\delta+6a\delta^4\gamma^2\delta \\ \text{καὶ ἔτι} \quad \alpha^3-3a^2\delta+4a\delta^2 \\ -2a\delta^2\gamma \\ \hline -2a^4\delta^2\gamma+6a^3\delta^3\gamma-8a^2\delta^4\gamma \end{array}$$

$$4a-30+5^2\gamma^4$$

$$5a6^4\gamma$$

$$20a^26^4\gamma-150a6^4\gamma+5a6^{4+2}\gamma^{4+1}$$

$$\text{ἔτι } a6^2+\gamma\delta\epsilon^3-a\gamma^3\delta-15$$

$$4\gamma\delta^3\mu$$

$$4a6^2\gamma\delta^3\mu+4\gamma^2\delta^4\epsilon^3\mu-4a\gamma^4\delta^4\mu-60\gamma\delta^3\mu.$$

Σημείωσαι ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀδιάφορον εἶναι ἡ δεξιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ἢ ἀριστερά, ἢ ἀπὸ ἓν μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου μεταξὺ τῶν μερῶν, ὡς καὶ ἡ μεταθεσις τῶν παραγόντων ἀδιάφορος· τοῦτο μόνον εἶναι ἀναγκαῖον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅλα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου μετὰ τὸν πολλαπλασιαστήν.

§. 141. Ἐὰν δὲ καὶ ὁ πολλαπλασιασθῆς, καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος πολυμερεῖς.

Α'. Τότε μὲ ἓνα μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ πολλαπλασιάσωμεν ὅλα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς ἂνω (§. 139.), καὶ γράφομεν τὸ παραγόμενον.

Β'. Ὁμοίως μὲ ἕτερον μέρος πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ὅλα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ γράφεται καὶ αὐτὸ τὸ παραγόμενον· ἔπειτα καὶ μὲ ἕτερον μέρος, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔτι μὲ ἕτερον, ἕως οὗ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μὲ ὅλα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον.

Γ'. Συνάπτομεν εἰς ἓν ὅλα τὰ παραγόμενα, φέροντες αὐτὰ εἰς τὸ ἀπλούστερον (§. 133.), καὶ τὸ κεφάλαιον τούτων εἶναι τὸ ὅλον παραγόμενον. Ὡς τὰ ἐξῆς δηλώσουσι παραδείγματα.

παρ: Α'. πολλαπλασιαστέος $a+b$ πολλαπλασιαστής $a+b$ a^2+ab παραγόμεν. α. $(a+b)$ $+ab+b^2$ παραγόμεν. β. $(a+b)$ ὅλικόν παραγ: $a^2+2ab+b^2$	Β'. $a+b$ $a-b$ a^2+ab $-ab-b^2$ a^2-b^2
---	---

Γ'

$$\begin{array}{r}
 a-6 \\
 a-6 \\
 \hline
 a^2-a6 \\
 -a6+6^2 \\
 \hline
 a^2-2a6+6^2.
 \end{array}$$

 Δ'

$$\begin{array}{r}
 3a+6 \\
 4\gamma+\delta \\
 \hline
 12a\gamma+46\gamma \\
 +3a\delta+6\delta \\
 \hline
 12a\gamma+46\gamma+3a\delta+6\delta.
 \end{array}$$

 E'

$$\begin{array}{r}
 3a^2-2a\gamma+\gamma^2 \\
 2a-3\gamma \\
 \hline
 6a^3-4a^2\gamma+2a\gamma^2 \\
 -9a^2\gamma+6a\gamma^2-3\gamma^3 \\
 \hline
 6a^3-13a^2\gamma+8a\gamma^2-3\gamma^3,
 \end{array}$$

 $\Sigma T'$

$$\begin{array}{r}
 a^2+a6+6^2 \\
 a-6 \\
 \hline
 a^3+a^26+a6^2 \\
 -a^26-a5^2-6^3 \\
 \hline
 a^3-6^3
 \end{array}$$

 Z'

$$\begin{array}{r}
 3a^26-6a6\gamma+36\gamma^2 \\
 4a^2-5\gamma^2 \\
 \hline
 12a^46-24a^36\gamma+12a^26\gamma^2 \\
 -15a^26\gamma^2+30a6\gamma^3-156\gamma^4 \\
 \hline
 12a^46-24a^36\gamma-3a^26\gamma^2+30a6\gamma^3-156\gamma^4.
 \end{array}$$

 H'

$$\begin{array}{r}
 3a6-\gamma\delta+46\delta \\
 -4a\delta+5\gamma\delta-5 \\
 \hline
 -12a^25\delta+4a\gamma\delta^2-16a6\delta^2 \\
 +15a6\gamma\delta-5\gamma^2\delta^2+206\gamma\delta^2 \\
 -15a5+5\gamma\delta-206\delta \\
 \hline
 -12a^26\delta+4a\gamma\delta^2-16a6\delta^2+15a6\gamma\delta-5\gamma^2\delta^2+206\gamma\delta^2- \\
 15a6+5\gamma\delta-206\delta.
 \end{array}$$

Θ'.

$$\alpha'' + \beta'' - 3\gamma''$$

$$2\alpha'' - 3\beta''$$

$$2\alpha'' + 2\alpha''\beta'' - 6\alpha''\gamma''$$

$$- 3\alpha''\beta'' - 3\beta'' + 196\gamma''$$

$$2\alpha'' + 2\alpha''\beta'' - 6\alpha''\gamma'' - 3\alpha''\beta'' - 3\beta'' + 196\gamma''$$

Ι'.

$$2\alpha^3 - 2\mu\beta\gamma^\mu - 2 - 5\alpha - 2\beta^\mu + 1$$

$$3\alpha^{4\mu} - 5\beta^{2\mu+1}\gamma^3 - 4\mu - 6$$

$$6\alpha^{2\mu} - 2\beta^{2\mu+2}\gamma^1 - 3\mu - 15\alpha^{4\mu} - 7\beta^{3\mu+2}\gamma^3 - 4\mu$$

$$- 6\alpha^3 - 2\mu\beta\gamma^\mu - 2 + 30\alpha - 2\beta^\mu + 1$$

$$6\alpha^{2\mu} - 2\beta^{2\mu+2}\gamma^1 - 3\mu - 15\alpha^{4\mu} - 7\beta^{3\mu+2}\gamma^3 - 4\mu - 6\alpha^3 - 2\mu$$

$$\beta\gamma^\mu - 2 + 30\alpha - 2\beta^\mu + 1.$$

Πολλάκις δὲν τελεῖται ἐνεργείᾳ ὁ πολλαπλασιασμός, ἀλλὰ κλείονται οἱ παράγοντες εἰς παρενθέσεις, καὶ αἱ παρενθέσεις θέτονται ἢ διὰ τοῦ σημείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ ἄνευ σημείου διὰ τὰ παραστήσωσι τὸ γινόμενον, οὕτω $(3\alpha\beta + \gamma\delta - 5\gamma\zeta)(\alpha\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 7\delta)$ · καὶ λέγεται συνεπτυγμένος πολλαπλασιασμός· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. Ἡ δὲ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται διὰ τῆς διαιρέσεως, περὶ ἧς ἤδη λέξομεν.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Δ'.

Περὶ Διαίρεσεως ἐν γράμμασιν.

§. 142. Ἐμάθομεν (§. 91.) ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός μεταβαίνει εἰς διαίρεσιν, καὶ αὕτη εἰς ἐκείνον, ὥς

4. $5 = 20$ καὶ $4 = \frac{20}{5}$. τὸ αὐτὸ ἄρα συμβαίνει καὶ εἰς τὰ

γράμματα α. $\beta = \alpha\beta$. ἄρα $\beta = \frac{\alpha\beta}{\alpha}$ δηλ. εἰν διέλωμεν τὸν

διαιρετέον $\alpha\beta$ διὰ τοῦ α, λαμβάνομεν πηλίκον τὸ β. Τοῦτο δὲ καὶ ἀλλαχοῦ δέδεικται (§. 92.) "Όταν ὁ αὐτὸς παράγων εὑρίσκεται καὶ εἰς τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον, ἀπαλείφεται. ἄρα εἰς τὸ $\frac{\alpha\beta}{\alpha}$ εὑρίσκεται τὸ α κοινόν. ἄρα ἀπαλείφεται καὶ μένει τὸ πηλίκον β. "Όθεν

Α'. Εἰς τὰ γράμματα γίνεταί ἡ διαίρεσις ἐνεργεία, ἥτοι δίδεται πηλίκον ἐνεργεία, ὅταν ὁ διαιρέτης εὑρίσκηται ὡς παράγων εἰς τὸν διαιρετέον, οὗτος δὲ ἀπαλείφεται, καὶ τὸ μένον εἶναι τὸ πηλίκον, ὡς $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\gamma} = \beta$, ἢ $\alpha\beta\gamma: \alpha\gamma = \beta$.

Τὸ αὐτὸ ἐξέρχεται καὶ δι' ἀριθμῶν, εἰν τὸ $\alpha = 2$, τὸ $\beta = 3$, τὸ $\gamma = 4$. λοιπὸν $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 3$ ὅτι

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ καὶ $2 \cdot 4 = 8$ καὶ $24: 8 = 3$. ἔτι $\frac{\alpha\beta\gamma\epsilon}{\epsilon} = \alpha\beta\gamma$.

καὶ $\frac{\alpha^4\beta}{\alpha^2} = \alpha^2\beta$, διότι $\frac{\alpha^4\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\beta}{\alpha\alpha} = \alpha\alpha\beta = \alpha^2\beta$. λοιπόν.

Β'. "Όταν τὰ κοινὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἔχωσι καὶ ἐκθέτας, ἀφαιροῦμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου, ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ γράμματος τοῦ διαιρετέου, καὶ τὸ λείψων γράφεται ἐκθέτης εἰς αὐτὸ τὸ γράμμα τοῦ πηλίκου, ὡς $\alpha^5\beta: \alpha^3 = \alpha^2\beta$. ἢ $\alpha^3\beta^7\gamma^7\delta: \alpha^2\beta\gamma^5 = \alpha\beta^2\gamma^2\delta$.

Γ'. Εἰν δὲ καὶ συνεργοὺς ἔχη καὶ ὁ διαιρέτης,

καὶ ὁ διαιρετέος, διαιρεῖται πρῶτον ὁ συνεργὸς τοῦ διαι-
ρετέου διὰ τοῦ συνεργοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ τὰ λοιπὰ γί-
νονται κατὰ τὸ Α', καὶ Β'. ὡς $12\alpha^2\beta\gamma^5: 3\alpha\beta\gamma^2=4\alpha\gamma^3$.
καὶ $20\alpha^4\beta\delta^2: 5\alpha^5\beta\delta=4\alpha^4-5\delta^2-1$.

Δ'. Ἐὰν δὲ καὶ τὰ σημεῖα θεωρήσωμεν, γίνεται καὶ
ἐδῶ, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀριθμῶν, δηλ: τὰ μὲν ὁ-
μοία σημεῖα δίδουσι σημεῖον καταφατικὸν εἰς τὸ πηλίκον,
τὰ δὲ ἀνόμοια ἀποφατικόν, τὰ δὲ λοιπὰ κατὰ τὸ Α', Β',
Γ', οὕτω $5\alpha^2\beta^3\gamma\delta: -\alpha^5\delta^2=-5\alpha\beta\gamma$. καὶ
 $-8\alpha^4\beta^3\gamma: -2\alpha\delta^2=+4\alpha^4-1\beta^3-\gamma$, καὶ
 $-15\alpha^3\beta: 5\alpha^3\delta=-3$, καὶ $\alpha^4\beta: 1-\alpha^4\beta^1-\gamma^1=1$. ὅτι αὐτὸς
δὲ ἑαυτοῦ ὁ ἀριθμὸς διαιρούμενος δίδει πηλίκον μονάδα
(§. 92.).

Ε'. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ὅλος δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν διαι-
ρετέον, ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ· τοῦτο μόνον τὸ μέρος ἀπα-
λείφεται, τὸ δὲ λοιπὸν γράφεται ὑπὲρ τῆς γραμμῆς, καὶ
ὑποκάτω ὁ διαιρέτης εἰς κλάσμα, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ πη-
λίκον, καὶ φαίνεται ὅτι ἡ διαίρεσις ἐπ' ἀκριβεῖς δὲν γίνεται
ὡς $\alpha\beta\gamma: \alpha\delta=\frac{\beta\gamma}{\delta}$. οὕτω καὶ $\alpha^5\gamma^2\epsilon: \gamma^2\zeta=\frac{\alpha^5\epsilon}{\zeta}$: ἐὰν δὲ καὶ
οἱ συνεργοὶ δὲν διαιρῶνται ἐπ' ἀκριβεῖς, καὶ οὕτοι εἰς κλά-
σμα παρισώσι τὸ πηλίκον, ὡς $15\alpha^5\beta: 7\alpha^3\delta=\frac{15\alpha^2}{7}$ καὶ ἔτι
 $\frac{13\gamma^4\delta}{3\gamma^2\epsilon}=\frac{13\gamma^2-2\delta}{3\epsilon}$.

ΣΤ'. Ἐὰν τέλος ὁ διαιρέτης, μήτε ὅλος, μήτε κατὰ
μέρος εὑρίσκηται εἰς τὸν διαιρετέον, τότε ἐνεργεῖα ἡ διαί-
ρεσις οὐδέποτε εἰς τὰ γράμματα γίνεται, ἀλλὰ παρεντίθε-
ται τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ πηλί-

κον, ὡς αβ: δ = $\frac{αβ}{δ}$, καὶ $α^3γ^2χ^μ \cdot 56^3 = \frac{α^3γ^2χ^μ}{56^3}$. καὶ

$$6α^2β: 2γδ = \frac{3α^2β}{γδ}.$$

Σημείωσαι, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τούτων, ἂν ὀρθῶς ἐτελέσθησαν γίνεται, εἰὰν τὸ πηλίκον πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν διαιρέτην, καὶ ἐξέλθῃ ὁ διαιρετέος· (§. 105.).

§. 143. Μαθόντες ἤδη πῶς διαιροῦμεν μονομερῆ διαιρετέον μὲ μονομερῆ διαιρέτην, εὐκόλως διαιροῦμεν καὶ πολυμερῆ διαιρετέον, μὲ μονομερῆ διαιρέτην. Τοῦτο δὲ γίνεται, εἰὰν διέλωμεν ἕκαστον μέρος μὲ τὸν μονομερῆ διαιρέτην κατὰ τοὺς νόμους (§. 100.). δηλ: ὅταν ὅλος ὁ διαιρέτης εὐρίσκεται εἰς τὸ μέρος τοῦ διαιρετέου νὰ ἀπαλείφῃται, καὶ τὸ μένον εἶναι πηλίκον, ἢ εἰὰν μέρος εὐρίσκηται, καὶ μέρος οὐ, νὰ ἐκφράζηται τὸ πηλίκον, ὡς ἐπιδιδάχθημεν (ἐ. καὶ ζ').

1 παράδ. $6α^2β - 10αχ: 2α = 3αβ - 5χ$

2 παράδ. $4α^2β - 2χ + 3α: 2β = 2α^2 - \frac{χ}{β} + \frac{3α}{2β}$.

3, παράδ. $6α^4 - 4α^2δ + 7γ^2ε: 2α^2 = 3α^2 + 2δ - \frac{7γ^2ε}{2α^2}$.

§. 144. Εἰὰν δὲ καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ᾗναι πολυμερεῖς, γίνεται ἡ διαίρεσις, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀριθμούς· δηλ.

Α'. Γράφεται ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, ὡς εἰς τοὺς ἀριθμούς.

Β'. Μὲ ἓν μέρος οἷονδήποτε τοῦ διαιρέτου, ὁποῦ εὐρίσκεται κοινὸν εἰς ἓν μέρος τοῦ διαιρετέου, διαιροῦμεν αὐτὸ τὸ μέρος τοῦ διαιρετέου κατὰ τὰ

(§. 142. Α', Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ'). καὶ γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὸν τόπον τοῦ πηλίκου.

ραγόμενον $+5^2\gamma^2\chi^2 - 36^2\gamma\chi^3$, μεταβληθέντων τῶν σημείων, ἀφῆρέθη κατὰ τὸ Γ'. Πάλιν διῆρέθη τὸ μέρος τοῦ διαιρετέου $-36^2\gamma\chi$ διὰ τοῦ αὐτοῦ μέρους $6^2\gamma\chi$ οὕτω $\frac{36^2\gamma\chi^4}{6^2\gamma\chi} = -3\chi^3$, καὶ ἐτέθη δεύτερον μέρος τοῦ πηλίκου,

καὶ με αὐτὸ ἐπολλαπλασιάσαμεν ὅλον τὸν διαιρέτην, καὶ τὸ παραγόμενον εἰς ἀντίστροφα σημεία ἀφῆρέθη, καὶ δὲν ἔμεινεν τίποτε. Ὅθεν λέγομεν ὅτι ὁ διαιρέτης οὗτος ἐπ' ἀκριβὲς διεῖλε τὸν διαιρετέον, καὶ ἔλαβεν εἰς πηλίκον $\gamma\chi - 3\chi^3$. διότι ἐὰν διὰ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης, ἐξέρχεται ὁ διαιρετέος (§. 105.)

Τὸν αὐτὸν τρόπον διαιροῦνται καὶ τὰ ἐξῆς παραδείγματα.

Α'.	Β'.
$\begin{array}{r} a^2 + 2a\delta + 6^2 : a + 5 = a + 5 \\ \hline + a^2 + a\delta \\ \hline 0 + a\delta + 5^2 \\ \hline + a\delta + 6^2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} a^2 - 6^2 : a + 5 = a - 5 \\ \hline + a^2 + a\delta \\ \hline 0 - 5^2 - a\delta \\ \hline + 6^2 + a\delta \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$

Γ'.

$$\begin{array}{r} 15\alpha\gamma + 18\alpha\delta + 20\beta\gamma + 24\beta\delta : (3\alpha + 4\beta) = 5\gamma + 6\delta \\ \hline + 15\alpha\gamma \qquad + 20\beta\gamma \\ \hline 0 \quad + 18\alpha\delta + 24\beta\delta \\ \hline + 18\alpha\delta + 24\beta\delta \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

Δ'.

$$\begin{array}{r} (12\alpha^4\beta - 24\alpha^3\beta\gamma - 3\alpha^2\beta\gamma^2 + 30\alpha\beta\gamma^3 - 15\beta\gamma^4) : (3\alpha^2 - 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2) = 4\alpha^2 - 5\gamma^2 \\ \hline + 12\alpha^4\beta + 24\alpha^3\beta\gamma + 12\alpha^2\beta\gamma^2 \\ \hline 0 - 15\alpha^2\beta\gamma^2 + 30\alpha\beta\gamma^3 - 15\beta\gamma^4 \\ \hline + 15\alpha^2\beta\gamma^2 + 30\alpha\beta\gamma^3 + 15\beta\gamma^4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Ε'.

$$\begin{array}{r}
 (a^3 - \beta^3) : (a - \beta) = a^2 + a\beta + \beta^2 \\
 \underline{+ a^3 + a^2\beta} \\
 + a^2\beta - \beta^3 \\
 \underline{+ a^2\beta + a\beta^2} \\
 + a\beta^2 - \beta^3 \\
 \underline{+ a\beta^2 + \beta^3} \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

ΣΤ'.

$$\begin{array}{r}
 (6\alpha\alpha + 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 9\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta) : (2\alpha + 3\gamma) = 3\alpha + 2\beta + \delta \\
 \underline{- 6\alpha\alpha \quad + 9\alpha\gamma} \\
 4\alpha\beta + 2\alpha\delta + 6\beta\gamma + 3\gamma\delta \\
 \underline{- 4\alpha\beta \quad + 6\beta\gamma} \\
 2\alpha\delta + 3\gamma\delta \\
 \underline{- 2\alpha\delta + 3\gamma\delta} \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

Ζ'.

$$\begin{array}{r}
 (6a^2 - \chi^2 - a\chi + a\beta) : (3a + \chi) = 2a - \chi + \frac{a\beta}{3a + \chi} \\
 \underline{- 6a^2 \quad + 2a\chi} \\
 - 3a\chi + a\beta - \chi^2 \\
 \underline{+ 3a\chi \quad + \chi^2} \\
 0 \quad + a\beta
 \end{array}$$

Επειδὴ τοῦτου οὐδὲν μέρος διαιρεῖται, γράφεται, εἰς κλάσμα μετὰ τοῦ διαιρέτου.

§. 145. Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δὲν ᾖ δυνατὸν νὰ γένη, τότε τὸ πηλίκου ἐκφράζομεν

κλασματικῶς, ὡς $(3\alpha+6\beta) \cdot (\mu+3\rho)$. ἢ $\frac{3\alpha+6\beta}{\mu+3\rho}$. διὰ τοῦτο

λέγομεν εἰς τοὺς ἀκροατὰς ἡμῶν, ὅτι ὅλαι αἱ ἀλγεβραϊκαὶ ποσότητες δὲν διαιροῦνται, ὡς εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, ἀλλ' ἐκεῖναι μόνον, εἰς ὅσας τὰ μέρη τοῦ διαιρέτου ἐμπεριέχονται· διὸ καὶ ἄς μὴ λυπῶνται, ὅταν δὲν ἡμπορῶσι νὰ διαιρέσωσι μίαν Ἀλγεβραϊκὴν ποσότητα, νομίζοντες ὅτι δὲν προχωροῦσιν· διότι αὐτὴν τότε τὴν ἐκφράζουσιν ἢ διὰ παρενθέσεων, ἢ κλασματικῶς, ὡς ἐμάθομεν· πλὴν καὶ τοῦτο τοὺς συμβουλεύομεν, νὰ διαιρῶσι δηλ: συνεχῶς παραδείγματα πολλὰ διὰ νὰ γυμνασθῶσι· παραδείγματα ὁμῶς, ὅπου διαιροῦνται ἐπ' ἀκριβὲς, μόνονι τοὺς· ἡμποροῦν νὰ εὕρωσι τοῦτον τὸν τρόπον.

Πρῶτον ἄς πολλαπλασιάζουσι δύο ποσότητας Ἀλγεβραϊκὰς, ἐν αἷς, ἃς εὐρίσκονται καὶ μέρη ἀριθμῶν, καὶ τὸ παραγόμενον αὐτῶν γενέσθω διαιρετέος, ὃ δὲ πολλαπλασιασῆς, ἢ ὃ πολλαπλασιαστέος, γενέσθω διαιρέτης, καὶ εἰάν ὁ ἕτερος παράγων ἐξέλθῃ πηλίκου, ὀρθῶς ἔγινεν ἡ διαίρεσις, εἰάν δὲ μὴ, ἐσφαλμένη, καὶ ὅς ξαναδιέλῃσι· καὶ τοῦτο ποιοῦντες συνεχῶς θέλουσιν γυμνασθῆναι, καὶ θέλουσιν προχωρήσει τὰ μάλιστα.

§. 146. Ἐμάθομεν ὅτι ἡ διαίρεσις πολλάκις δὲν γίνεται οὕτως, ὥς νὰ εὕρωμέν τὸ πηλίκον ὡς ἀνωτέρω, ἀλλ' ἐκφράζομεν τὸ πηλίκον μόνον διὰ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων, τὸ ὅποῖον καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοῖς συμβαίνει· ὡς 12: 24. τὰ 24 δὲν ἡμποροῦν νὰ διέλῃσι τὰ 12, ἀλλ' ἐγράφοντο $\frac{12}{24}$ καὶ τοῦτο συμβαίνει συνεχῆς αὐτῶν ὁμῶς διὰ νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν τοιούτων

διαιρέσεων μικροτέρους, μεταχειρίζονται ἐκεῖνο, ὅπου εὑρίσκωμεν (§. 92.). ὅτι ὁ ὅμοιος παράγων, ὅπου εὑρίσκεται εἰς τὸν διαιρετέον, καὶ διαιρέτην ἀπαλείφεται, ὡς

$$\frac{12 \quad 2. \quad 3. \quad 2}{24 \quad 2. \quad 4. \quad 3}.$$

εἰς τὸ ἔσχατον αὐτὸ εὑρίσκεται φανερά ὁ 2 καὶ ὁ 3 παράγων κοινὸς, καὶ εἰς τὸν διαιρέτην, καὶ εἰς τὸν διαιρετέον· ἄρα καὶ ἀπαλείφεται, ὡς

$$\frac{2. \quad 2. \quad 3 \quad 2}{2. \quad 3. \quad 4 \quad 4}$$

ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ἄρα καὶ $\frac{1. \quad 2 \quad 1}{2. \quad 2 \quad 2}$, καὶ εὐρέθη

κατ' αὐτὸν μὲν τρόπον $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. διότι καὶ ἐκεῖνο τὸ ἥμισυ

εἶναι τῶν 24 τὰ 12, καὶ τοῦτο ἡ μὴνὰς τῶν 2. διὸ καὶ κάλλιον νοοῦμεν $\frac{1}{2}$, ἢ τὸ $\frac{12}{24}$. εἰς ἄλλους ὅμως ἀριθ-

μοὺς, καὶ τοῦτο γίνεται δυσφάντακτον, καὶ μάλιστα εἰς τὰς Ἀλγεβραϊκὰς ποσότητας· τοῦτο ὅμως ἄλλως δὲν γίνεται, εἰμὴ ἐὰν ἡξεύρωμεν νὰ λύωμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς παράγοντας. Τοῦτο δὲ μόνον διὰ τῆς φαντασίας, εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ἀδύνατον. Διὰ τοῦτο μέθοδόν τινα ἐφεῦρον οἱ Ἀριθμητικοί, πῶς νὰ ἀναλύωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τοὺς ἰδίους παράγοντας τόσον εἰς ἀριθμοὺς, ὅσον καὶ εἰς τὰ γράμματα, καὶ λοιπὸν μετὰ ταῦτα ὅλα, πρέπει εἰς αὐτὴν τὴν μέθοδον νὰ βαδίσωμεν.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Ε'.

Περὶ Ἑυρέσεως τῶν παραγόντων.

§. 147. Ἡ μέθοδος νὰ εὐρίσκωμεν τοὺς παράγον-

τας, εἶναι νὰ ἐξετάσωμεν κάθε ἀριθμὸν, ἂν ᾖ παραγόμενον ἀπὸ παράγοντας, ἢ ὄχι· οὕτως ὁ 4 εἶναι παραγόμενον ἀπὸ παράγοντας 2. 2, καὶ ὁ 6 ἀπὸ 2. 3, καὶ ὁ 24 ἀπὸ 2. 3. 4 κτ., ὁ 2 ὅμως καὶ ἡ μονὰς καὶ 7 καὶ 13 κτ. φαίνεται ὅτι δὲν εἶναι παραγόμενον ἀπὸ παράγοντας· ὅθεν καὶ εἰς δύο σχίζονται οἱ ἀριθμοὶ, εἰς πρῶτους καθ' ἑαυτοὺς, καὶ εἰς πολλαπλοῦς· καὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ λέγονται, ἢ πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἐκεῖνοι, τοὺς ὁποίους δὲν διαιρεῖ ἄλλος, εἰμὴ ἢ ἡ μονὰς, ἢ αὐτὸς ἑαυτὸν· ὡς $\frac{7}{1}=7$.

καὶ $\frac{7}{7}=1$ (§. 92.)· διὸ καὶ κάθε ἀριθμὸς κατὰ τοῦτο λύεται εἰς παράγοντας, ὡς 3. 1 καὶ 7. 1 καὶ 13. 1 καὶ ἡ μονὰς αὐτὴ 1. $1=1$ · πολλαπλοὶ δὲ λέγονται, ὅσοι οὐ μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ δι' ἑαυτῶν διαιροῦνται, ἀλλὰ κυρίως δι' ἐτέρων ἀριθμῶν, ὡς ὁ $\frac{4}{2}=2$, καὶ ὁ $\frac{6}{3}=2$, ο

$\frac{24}{2}=12$, $\frac{24}{3}=8$, $\frac{24}{4}=6$, $\frac{24}{8}=3$ κτ. καὶ εἰς αὐτοὺς ἡ πα-

ροῦσα θεωρία γίνεται. Διότι ἐκεῖνος, ὅπου διαιρεῖται ἐπ' ἀκριβὲς δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ, αὐτὸς καὶ εἰς παράγοντας λύεται

δι' αὐτοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὡς $\frac{36}{12}=3$ · ἄρα

ὁ 36 λύεται εἰς παράγοντας 12. 3 $=36$. εἰς τὸ ἐξῆς θέλομεν μάθῃ, πᾶσιν ὠφέλειαν προξενεῖ ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς παράγοντας· ἐπειδὴ ὅμως μόνον οἱ πολλαπλοὶ λύονται, καὶ ἄχι οἱ πρῶτοι, καὶ ἐπειδὴ εἰς τοὺς πολυσυνθέτους ἐκ μόνης ὀψευς δὲν γνωρίζομεν τοὺς ἐν αὐτοῖς παράγοντας, διὰ τοῦτο καταστρώμεν ἐδῶ κανόνας τινας, κατὰ τοὺς ὁποίους εὐρίσκονται,

§. 148. Κάθε ἀριθμὸς λύεται εἰς μέρη ἢ μοναδικὰ μόνον, ὡς ὁ $2=1+1$ καὶ ὁ $3=2+1$, ἢ μοναδικὰ ἅμα καὶ ἀριθρικὰ, κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα (§. 18.), ὡς ὁ $85=80+5$. ὁ $348=300+40+8$. $5780=5000+700+80$ κτ.

§. 149. Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἀριθμὸν τινα διαιρῶν, διαιρεῖ ὁ αὐτὸς καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ὡς ὁ 3 διαιρεῖ τὸν 9 · ἄρα καὶ τὸν 2 . $9=18$, καὶ τὸν 4 . $9=36$, καὶ γενικῶς τὸν α · 9α , οὕτως $\frac{\alpha\beta}{\alpha}=5$ καὶ $\frac{\mu\alpha\beta}{\alpha}=\mu\beta$.

§. 150. Ἐὰν ὁ πολλαπλοῦς ἀριθμὸς διαιρῇ τινα, καὶ ὁ ἀπλούστερος αὐτοῦ διαιρεῖ τὸν αὐτὸν, ὡς ὁ 24 διαιρεῖ τὸν $\frac{72}{24}=3$ · ἄρα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ 12 διαιρεῖ αὐτὸν

$\frac{72}{12}=6$, καὶ τὸ τεταρτημόριον αὐτοῦ 6 διαιρεῖ τοῦτον

$\frac{72}{6}=12$, καὶ τὸ τρίτημόριον αὐτοῦ 8, ὡς $\frac{72}{8}=9$ κτ.

διότι ὁ 24 πολλαπλάσιος τῶν 2. 3. 4.

§. 151. Ὁ ἀριθμὸς, ὅπου διαιρεῖ δύο ἀριθμοὺς, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ὡς ὁ 10 διαιρεῖ ἅμα τὸν 20 καὶ 30· ἄρα καὶ $30-20=10$ · διότι ἐὰν δὲν διαιροῦσε καὶ τὴν διαφορὰν ἐπ' ἀκριβεῖς, οὔτε τὸν μείζονα, οὔτε τὸν ἐλάσσονα διαιροῦσε· τὸ ἀνάπαλιν ὅμως δὲν ἀληθεύει πάντοτε, ὅτι δηλ. ὁ ἀριθμὸς, ὅπου διαιρεῖ τὴν διαφορὰν, διαιρεῖ ἐπ' ἀκριβεῖς ἅμα καὶ τοὺς ἀριθμοὺς, τῶν ὁποίων εἶναι ἡ διαφορὰ· διότι ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 16 καὶ ἅμα καὶ τοὺς 40, 56 τῶν ὁποίων εἶναι διαφορὰ, δὲν διαιρεῖ ὅμως καὶ τοὺς 42, 58, τῶν ὁποίων καὶ αὐτῶν εἶναι διαφορὰ ὁ αὐτὸς 16· ἄρα τὸ μὲν πρῶτον ἀληθεύει πάντοτε, τὸ δὲ δεύτερον οὐχί.

§. 152. Ἐκαστος λοιπὸν ἀριθμὸς, ὅπου διαιρεῖ τὰ μέρη τινος ἀριθμοῦ, διαιρεῖ ὁ αὐτὸς καὶ τὸν ὅλον ἀριθμὸν, καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον ἐξέρχεται, εἴτε τὰ μέρη χωρὶς ἑκαστον διαιρέσει, εἴτε τὸ ὅλον ὁμοῦ· ἔσω λοιπὸν ὅλον ὁ 963, μέρη δὲ αὐτοῦ $900+60+3$ · ἄρα $\frac{963}{3}=321$, καὶ

$$\frac{900}{3} + \frac{60}{3} + \frac{3}{3} = 300 + 20 + 1 = 321 \cdot \text{ἐπεὶ δὲ } 963 = 900 + 60 + 3,$$

καὶ εἰὰν διὰ 3 τὴν ἐξίσωσιν διέλωμεν δὲν χαλᾷ· ἄρα καὶ $\frac{963}{3} = \frac{900+60+3}{3}$ · διότι οἱ ἀριθμοὶ, ὅπου ἔχουσι κοινὸν

διαιρέτην συνάπτονται διὰ τῶν πρὸ αὐτῶν σημείων, καὶ τίθεται εἰς ὅλους ὁ διαιρέτης ὁ κοινὸς, ὡς

$$\frac{5}{2} - \frac{6}{2} + \frac{8}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5-6+8-3}{2},$$

§. 153. Ἐκαστος ἀριθμὸς ἐπ' ἀκριβὲς διαιρούμενος, λύεται εἰς παράγοντας εἰς τε τὸν ἀριθμὸν δι' οὗ διαιρεῖται, καὶ εἰς τὸ πηλίκον, $\frac{6}{2}=3$ · ἄρα ὁ $6=2 \cdot 3$, $\frac{30}{5}=6$ · ἄρα ὁ $30=5 \cdot 6$ κτ., ὅθεν διὰ νὰ λύσωμεν ἕκαστον εἰς παράγοντας, πρέπει νὰ μάθωμεν διὰ τίνος διαιρεῖται, καὶ εἰς τοῦτο χρήσιμοι οἱ ἐξῆς κανόνες.

§. 154. Ἐπομεν (§. 147.), ὅτι ἕκαστος ἀριθμὸς διὰ τῆς μονάδος, καὶ δι' ἑαυτοῦ διαιρεῖται· ὁ λόγος ὅμως ἐδῶ δ' ὡς εἶναι περὶ τοιούτων ἀριθμῶν· διότι ἡ μονὰς πανταχοῦ ὡς παράγων νομιζέται, καὶ εἰς τὰ γράμματα αὐτὰ, ὡς συνεργὸς (§. 129.), λοιπὸν παρατηρητέον ὅτι, εἰὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ἀντὶ μονάδος σημεῖον μηδενικόν, ἢ χαρακτῆρα ἄρτιον (§. 28.), οὗτος ἀεὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ λύεται εἰς παράγοντας, ὡς $360: 2=180$. καὶ λοιπὸν $360=2 \cdot 180$ καὶ $52: 2=26$. ἄρα καὶ $26, 2=52$.

§. 155. Ἐὰν συνάψωμεν τοὺς χαρακτῆρας ἐνὸς ἀριθμοῦ εἰς κεφάλαιον, τοῦτο δὲ διαιρεῖται ἐπ' ἀκριβὲς διὰ τοῦ 3, καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 3, καὶ λύεται εἰς παράγοντας.

Οἱ χαρακτῆρες φέρε τοῦ 543 εἶναι $5+4+3=12$, ἀλλ' ὁ 12 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. ἄρα καὶ $\frac{543}{3}=181$, καὶ

$543=3 \cdot 181$. διότι $543=500+40+3=5(100)+4(10)+3=5(99+1)+4(9+1)+3=5 \cdot 99+4 \cdot 9+5+4+3$. ἄρα $543=5 \cdot 99+4 \cdot 9+12$ · καὶ ἐπειδὴ ὁ 3 διαιρεῖ τὰ μέρη ὅλα τοῦ 543, διαιρεῖ ἄρα καὶ τὸν 543 (§. 152.). ἀλλὰ καὶ ὁ 56781 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. ὅτι

$$5+6+7+8+1=27 \text{ καὶ } \frac{27}{3}=9. \text{ ἄρα } \frac{56781}{3}=18927$$

καὶ $56781=3 \cdot 18927$.

§. 156. Ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἔχει εἰς τὸ τέλος δύο χαρακτῆρας μηδενικοὺς, ὡς 56700, ἢ ἄλλους χαρακτῆρας, τοὺς ὁποῖους ὁ 4 διαιρεῖ, αὐτὸς ὁ 4 διαιρεῖ, καὶ ὅλον τὸν ἀριθμὸν, καὶ εἰς παράγοντας λύει, ὡς

$$\frac{56700}{4}=14175, \text{ καὶ } 56700=4 \cdot 14175 \text{ ὡσαύτως καὶ ὁ } 36428$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ 4· διότι οἱ ἑτχάτοι δύο χαρακτῆρες 28 ὅθεν $\frac{36428}{4}=9107$. καὶ $36428=4 \cdot 9107$. Ἐπειδὴ ὁ ἀ-

ριθμὸς ὁ ἔχων δύο χαρακτῆρας δεκαδικοὺς λύεται εἰς παράγοντας (§. 80.), ὡς $567800=5678 \cdot 100$ καὶ πότε ὁ εἰς εἶναι 100. καὶ ἐπειδὴ ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 100, ἄρα καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ. (§. 150.). ὡσαύτως καὶ ὁ ἔχων χαρακτῆρας δύο, ὅπου διαιροῦνται διὰ τοῦ 4, τέμνεται αἰεὶ εἰς δύο μέρη, ὡς

$36428=36400+28=364 \cdot 100+28$, καὶ ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέρη διαιροῦνται διὰ τοῦ 4· ἄρα καὶ τὸ ὅλον ὁμοῦ (§. 152.).

§. 157. Ὁ ἀριθμὸς, ὅπου ἔχει ἑσχατον, χαρακτηῖρα μηδενικὸν σημεῖον, ἢ 5, διαιρεῖται ἀεὶ διὰ τοῦ 5, καὶ εἰς παράγοντας λύεται· ὁ 56780 φέρε λύεται εἰς παράγοντας 5678. 10 (§. 80.) καὶ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν 10, ἄρα διαιρεῖ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ· ἐὰν δ' ἔχῃ 5, ὡς ὁ 61345, λύεται εἰς δύο μέρη $61340+5=6134 \cdot 10+5$ · ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 διαιρεῖ τὰ μέρη, διαιρεῖ ἄρα καὶ τὸ ὅλον·

ἄρα $\frac{56780}{5}=11356$ καὶ $56780=5 \cdot 11356$ ὡσαύτως καὶ

$\frac{61345}{5}=12269$, καὶ $61345=5 \cdot 12269$.

§. 158. Ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου οἱ χαρακτηῖρες διὰ τοῦ 3 διαιροῦνται, καὶ ἔχει εἰς τὸ τέλος μηδενικὸν, ἢ ἄρτιον ἀριθμὸν, αὐτὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 6· διότι τοῦτον καὶ ὁ 3 καὶ ὁ 2 διαιρεῖ, ἄρα καὶ τὸ παραγόμενον τούτων·

ὅθεν ὁ $\frac{56142}{6}=9357$ · ἄρα $56142=6 \cdot 9357$ καὶ

$\frac{3840}{6}=640$, καὶ $3840=6 \cdot 640$.

§. 159. Ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου οἱ τρεῖς ἑσχατοι χαρακτηῖρες εἶναι σημεῖα μηδενικά, ἢ διαιροῦνται διὰ τοῦ 8, διαιρεῖται καὶ ὅλος διὰ τοῦ 8, καὶ εἰς τοὺς παράγοντας λύεται· οἷον ὁ $5672000=5672 \cdot 1000$, ἀλλ' ὁ 8 διαιρεῖ τὸν 1000 ἄρα καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ· ἐὰν δ' ἔχῃ χαρακτηῖρας τρεῖς εἰς τὸ τέλος, οἷτινες διαιροῦνται διὰ τοῦ 8, ὡς 4678752, τοῦ ὁποίου τοὺς τρεῖς

752 διαιρεῖ ὁ 8, λύεται εἰς δύο μέρη (§. 150.), οὕτω
 $4678752 = 4678000 + 752 = 4678$. $1000 + 752$ ἀλλ' ὁ
 8 διαιρεῖ καὶ τὰ δύο μέρη, ἄρα καὶ τὸ ὅλον (§. 152.).

ἄρα $\frac{5672000}{8} = 709000$ καὶ $6672000 = 8 \cdot 709000$ ὡς

σαύτως $\frac{4678752}{8} = 584844$ καὶ $4678752 = 8 \cdot 584844$.

§. 160. Ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῦ οἱ χαρακτῆρες,
 εἰς ἓν κεφάλαιον συναφῶσι, διαιροῦνται διὰ τοῦ 9.

διαιρεῖται καὶ ὅλος διὰ τοῦ 9, ὡς $\frac{725652}{9} = 80628$ καὶ

$725652 = 80628 \cdot 9$ ἡ δεῖξις εἶναι ἡ αὐτὴ (§. 155.).

§. 161. Ὁ 10 διαιρεῖ κάθε ἀριθμὸν, καὶ περιοδικὸν ἀριθμὸν (§. 79.. 80.).

§. 162. Διὰ δὲ τοῦ 11 διαιρεῖται κάθε ἀριθμὸς, τοῦ
 ὁποῦ οἱ χαρακτῆρες κεῖνται κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον·
 δηλ: τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων, ὅπου κεῖνται εἰς τοὺς
 ἀρτίους τόπους δηλ: εἰς τὸ Β', Δ', ΣΤ'. κτ. εἰς ἀφαιρε-
 θῇ ὁπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων, ὅπου κεῖνται εἰς
 τοὺς τόπους τῶν περιττῶν τόπων, δηλ: εἰς τὸν Α', γ', ε'.
 κτ. καὶ ἤναι ἡ διαφορὰ ἢ μηδενικὸν σημεῖον, ἢ ἀριθμὸς,
 ὅπου διαιρεῖται μὲ τὸν 11 ἀριθμὸν, ὁ ταιῦτος ἀριθμὸς
 διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, ὡς ὁ 56710423. διότι τῶν μὲν
 περιττῶν τόπων οἱ χαρακτῆρες εἶναι $5 + 7 + 0 + 2 = 14$, τῶν
 δ' ἀρτίων $6 + 1 + 4 + 3 = 14$ καὶ $14 - 14 = 0$. ἄρα διαιρεῖ-
 ται μὲ τὸν 11 οὕτω $\frac{56710423}{11} = 5155493$, καὶ

$56710423 = 11 \cdot 5155493$, τοῦτο δὲ γίνεται, ἐπειδὴ,
 ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν τινα μὲ 11, εἶναι ὁμοίον,

ὥς εἰν γράψωμεν ἅπαξ τὸν ἀριθμὸν, καὶ ἐκ δευτέρου ὑποκάτω γράψωμεν τὸν αὐτὸν, ὥς τε τὰς μονάδας τούτου, εἶναι ὑπὸ τὰς δεκάδας τοῦ ἀνωτέρω, καὶ αἱ δεκάδες ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας κτ, καὶ ἔπειτα τοὺς δύο συνάψωμεν, ὥς

11. 5125453. οὕτω

5125453

5125453

56379983

Ἐπειδὴ δὲ οἱ αὐτοὶ χαρακτῆρες, οἱ μὲν περιττοὶ γίνονται ἄρτιοι, οἱ δ' ἄρτιοι περιττοὶ ὑποκάτω, καὶ προσθέτονται, καὶ ἐπομένως ἕκαστος χαρακτήρ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ αὐτὸς εὐρίσκεται καὶ εἰς τὸν ἄρτιον τόπον, καὶ εἰς τὸν περιττόν· διότι εἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα βλέπομεν ὅτι ὁ ἑσχατος χαρακτήρ τῶν μονάδων, ὁ 3 εὐρίσκεται καὶ εἰς τὸν ἄρτιον τόπον, καὶ εἰς τὸν περιττόν, ὁμοίως καὶ ὁ 5 καὶ ὁ 4, καὶ ὁ ἡγούμενος 5, καὶ ὁ 2, καὶ 1, καὶ οἱ λοιποὶ ὅλοι χαρακτῆρες, εὐρίσκονται ἕκαστος εἰς τὸ κατὰ μέρος κεφάλαιον, καὶ εἰς τοὺς ὁρτίους τόπους, καὶ εἰς τοὺς περιττοὺς ἐπίσης. Ἄρα εἰν ἀφέλωμεν τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν περιττῶν χαρακτήρων, ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν ἁρτίων, μένει λείψανον μηδέν· εἰν δὲ συμβῇ εἰς τὴν σύναψιν τῶν κατὰ μέρος δύο χαρακτήρων νὰ γένῃ τὸ κεφάλαιον 10, 11, 12 ἕως 18· διότι μείζον δέν γίνεται, τότε οὗτος ὁ τόπος χάνει μὲν 10 μονάδας, κερδίζει ὅμως ὁ ἐξῆς ἡγούμενος μίαν μονάδα, καὶ γίνεται ἡ διαφορὰ 11· καὶ ὅσάκις τοῦτο εἰς τοὺς τόπους γίνεται, τοσάκις 11 γίνεται ἡ διαφορὰ, διὸ καὶ εἴρηται. Ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων τῶν ἁρτίων τόπων, ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων τῶν περιττῶν τόπων, καὶ ἡ διαφορὰ διαιρῆται ἐπ' ἀκριβὲς μὲ τὸν 11, διαιρεῖται καὶ ὁλος ὁ ἀριθμὸς λ. χ.

$$\begin{array}{r} 1734794 \\ 1734794 \\ \hline 19082734 \end{array}$$

Ἐἰς αὐτὸ τὸ παράδειγμα βλέπομεν ὅτι εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων εἶναι τὸ κεφάλαιον $4+9=13$, καὶ ἐγράψαμεν μόνον 3· ὅρα οὗτος ἔχασε μὲν δέκα μονάδας, ἐκέρδησε δ' ὁ ἐξῆς μίαν μονάδα, ὁμοίως καὶ εἰς τοὺς τόπους τοὺς ἡγουμένους· λοιπὸν διὰ τὰ πολλαπλασιαζόμενα ἕκαστον ἀριθμὸν μὲ 11, εἰς τὸ παραγόμενον πρέπει νὰ γράφωμεν εἰς τὸν τόπον τῶν μονάδων τὸν ἔσχατον χαρακτήρα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ· εἰς δὲ τὸν τόπον τῶν δεκάδων τὸ κεφάλαιον τῶν δύο χαρακτήρων τῶν μονάδων, καὶ δεκάδων· εἰς τὸν τόπον τῶν εκατοντάδων τὸ κεφάλαιον τῶν δύο χαρακτήρων τῶν δεκάδων καὶ εκατοντάδων, καὶ καθεξῆς, ἄχρις οὗ καταντήσῃ ὁ ἀρισερώτατος χαρακτήρ τοῦ παραγομένου νὰ ἦναι μόνον ὁ ἀρισερώτατος χαρακτήρ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ π. χ. ζητεῖται τὸ παραγόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 56234 μὲ 11, καὶ ἔσαι τοῦτο $11 \cdot 56234 = 618574$, διότι γράφεται ὁ δεξιώτατος χαρακτήρ ὁ 4 εἰς τὰς δεκάδας $4+3=7$, εἰς τὰς εκατοντάδας $3+2=5$ εἰς τὰς χιλιάδας $2+6=8$, εἰς τὰς δεκάδας χιλιάδων $6+5=11=10+1$ · καὶ ὁ ἀρισερώτατος $5+1=6$ · οὕτω γενέσθω εἰς ὅλους τοὺς πολλαπλασιασμοὺς μὲ 11· ἄρα λέγομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 19082734, οἱ μὲν περιττοὶ $1+0+2+3=6$, οἱ δ' ἄρτιοι $9+8+7+4=28$ καὶ $28-6=22$, ὅπου διὰ τοῦ 11 διαιρεῖται $\frac{22}{11}=2$ ἄρα $\frac{19082734}{11}=1734794$. κτ.

§. 163. Διὰ τὰ ἔχωμεν συστηματικὴν ἰδέαν, πῶς λύομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς παραγόντας, ἔπρεπε νὰ εὗρωμεν

καὶ μεθοδεύτινα πῶς καὶ διὰ τοῦ 7 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, διότι ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ 11 εὕρομεν πῶς τὰ ἐξετάζωμεν τοὺς ἀριθμούς, ἐκτὸς μόνον τοῦ 7.

Οἱ μὲν οὖν ἄλλοι Μαθηματικοὶ, ὅσους ἐγὼ ἀνέγνωσα, οὐδὲν περὶ τούτου λέγουσιν, οὐδὲ κανόνα τινα μέχρι τοῦ δεῦτερον· ἐγὼ δὲ διὰ τὸ μὴ μείνῃ καὶ οὗτος ἐκτὸς τῶν μοναδικῶν χαρακτήρων, ἐπιπόνως ἐπαναλίσσω τὸ δεκαδικὸν σύστημα, εὕρον κανόνα τρεῖς, πῶς τὰ δοκιμάζωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν ἂν διὰ τοῦ 7 διαιρῇται, ἢ ὅχι· ἔστι δὲ ὁ κανὼν τοιοῦτος.

Εἰς κάθε ἀριθμὸν ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸν ἀριστερώτατον χαρακτήρα μέχρι τοῦ ἐσχάτου πρὸς τὰ δεξιά τὰ ἐξετάζωμεν ἕνα ἕκαστον οὕτω. Ζητεῖται ἂν ὁ 834561 διαιρεῖται ἐπ' ἀκριβὲς διὰ τοῦ 7, ἢ ὅχι.

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου χαρακτήρος τοῦ 8, 7 καὶ μένει 1, τοῦτο πολλαπλασιάζομεν διὰ 3, καὶ συνάπτομεν μὲ τὸν ἐξῆς χαρακτήρα οὕτω 1. $3=3$ καὶ ἔτι 3 γίνεται ὁ ἐξῆς 6, καὶ ἐπειδὴ ὁ 6 δὲν εἶναι μεγαλῆτερος τοῦ 7, πολλαπλασιάζομεν τὸν 6 πάλιν μὲ 3, καὶ συνάπτομεν μὲ τὸν ἐξῆς 4 οὕτω 3. $6=18$ καὶ 4 γίνεται ὁ ἐξῆς 22, ἀφαιροῦμεν ὅλα τὰ 7 ἀπὸ τὰ 22 καὶ μένει 1, πάλιν τὸν 1 πολλαπλασιάζομεν διὰ 3 καὶ συνάπτομεν καὶ τὸν ἐξῆς 5, οὕτως 1. $3=3$, καὶ 5 γίνονται 8, ἀφαιροῦμεν ἔτι τὸ 7, καὶ μένει 1, καὶ πάλιν τοῦτον 1. $3=3$, καὶ συνάπτομεν καὶ τὸν ἐξῆς 6 καὶ γίνονται 9, ἀφαιροῦμεν πάλιν τὰ 7, καὶ μένει 2, καὶ τοῦτον ἐπὶ τὸν 3 οὕτω 3. $2=6$ καὶ 1 ὁ ἐσχάτος γίνονται 7, καὶ ἐπειδὴ $7-7=0$, κρίνομεν ὅτι ὁ 834561 διαιρεῖται διὰ τοῦ 7,

$$\begin{array}{r} 834561 \\ \text{οὕτω} \underline{\hspace{1.5cm}} = 119223. \end{array}$$

Ἔστω καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ 62483533, καὶ ζητήσθω
 ἂν διαιρῇται διὰ τοῦ 7.

$$\begin{array}{r}
 6 \cdot 3 = 18 \\
 + 2 \\
 \hline
 20 \cdot 14 = 6 \cdot 3 = 18 \\
 + 4 \\
 \hline
 22 \cdot 21 = 1 \cdot 3 = 3 \\
 + 8 \\
 \hline
 11 \cdot 7 = 4 \cdot 3 = 12 \\
 + 3 \\
 \hline
 15 \cdot 14 = 1 \cdot 3 = 3 \\
 + 5 \\
 \hline
 8 \cdot 7 = 1 \cdot 3 = 3 \\
 + 3 \\
 \hline
 6 \cdot 3 = 18 \cdot 14 = 4 \\
 + 3 \\
 \hline
 7 \cdot 7 = 0
 \end{array}$$

λέγομεν $6 \cdot 3 = 18$, καὶ 2 γίνονται 20, ἀφαιροῦμεν τὰ
 7, καὶ μένουσιν 6· πάλιν $3 \cdot 6 = 18$. καὶ 4 γίνονται 22,
 ἀφαιροῦμεν τὰ 7 καὶ μένει 1. πάλιν $1 \cdot 3 = 3$, καὶ 8 γί-
 νονται 11, ἀφαιροῦμεν τὰ 7, καὶ μένει 4· πάλιν $3 \cdot 4 = 12$
 καὶ 3 γίνονται 15, ἀφαιροῦμεν τὰ 7 καὶ μένει 1· πάλιν,
 $1 \cdot 3 = 3$, καὶ 5 γίνονται 8, ἀφαιροῦμεν τὰ 7 καὶ μένει
 1, πάλιν $1 \cdot 3 = 3$, καὶ 3 γίνονται 6, ἐπειδὴ δὲν ὑπε-
 ρέχει τὸν 7, λέγομεν 3. $6 = 18$ καὶ 3 γίνονται 21, καὶ
 ἀφαιροῦμεν τὰ 7, καὶ δὲν μένει τίποτε εἰς τὸ τέλος, καὶ
 κρίνομεν ἐντεῦθεν ὅτι διαιρεῖται ὁ 62483533 διὰ τοῦ 7,
 $\underline{62483533} : 7 = 8926219$. καὶ $62483533 = 7 \cdot 8926219$.

Ἐὰν ὁμῶς μείνῃ τι λείψανον, δηλόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος
 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 7.

Ἀνεπληρώσαμεν λοιπὸν μὲ τοῦτο τὰ κεχρηγὸς τῶν κα-
 νόνων.

§. 164. Κανόνα γενικὸν δίδομεν εἰς τοὺς ἀναγνώσας
μας, ὅτι τὸν ἀριθμὸν, ὅπου τὸν διαιροῦν δύο ἀριθμοὶ,
καὶ ἀπ' αὐτοὺς θέν εἶναι κανένας παράγων εἰς τὸν ἕτερον,
καὶ τὸ παραγόμενον αὐτῶν διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν· δηλ:
ἐὰν ὁ 2 καὶ 3 διαιροῦσιν ἓνα ἀριθμὸν, καὶ οὔτε ὁ 2 εἶ-
ναι παράγων τοῦ 3, οὔτε ὁ 3 τοῦ 2, τὸ παραγόμενον αὐ-
τῶν $2 \cdot 3 = 6$ διαιρεῖ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν. Ἔστω ὁ 5142,
καὶ ἐπειδὴ καὶ ὁ 3 καὶ ὁ 2 διαιρεῖ αὐτόν, ἄρα καὶ τὸ πα-
ραγόμενον αὐτῶν ὁ 6, διαιρεῖ αὐτόν $\frac{5142}{6} = 857$. ἐὰν πά-

λιν ὁ 3 καὶ ὁ 4 διαιρῇ ἓνα ἀριθμὸν, καὶ οὔτε ὁ 4 εἶναι
παράγων τοῦ 3, οὔτε ὁ 3 τοῦ 4, ἄρα καὶ τὸ παραγόμε-
νον αὐτῶν $3 \cdot 4 = 12$ διαιρεῖ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν. Ἔστω ὁ
ἀριθμὸς 34200 τοῦτον διαιρεῖ καὶ ὁ 3. καὶ ὁ 4 (§. 155...156.),
ἄρα καὶ ὁ $3 \cdot 4 = 12$, ἐπειδὴ $\frac{34200}{12} = 2850$. ἐὰν τοῦ-

τον τὸν κανόνα καλῶς νοήσωμεν, εὐρίσκομεν διαφόρους πα-
ράγοντας, οἳ τινες διαιροῦσι τοὺς ἀριθμοὺς, ὡς 2. $7 = 14$,
καὶ 3. $7 = 21$, καὶ 4. $7 = 28$, καὶ ἔτι 5. $6 = 30$ ὅχι ὁμῶς
καὶ 2. $6 = 12$. διότι ὁ 2 εἶναι παράγων τοῦ 6, μήτε
2. $4 = 8$, διότι ὁ 2 εἶναι παράγων τοῦ 4.

§. 165. Ὁ ἀριθμὸς ὅπου διαιρεῖ τινα, καὶ ἅμα τὸ
πηλίκον, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ διαιρεῖ τὸν αὐτόν· ὁ 4
διαιρεῖ τὸν 32, ἅμα καὶ τὸ πηλίκον 8, ἄρα καὶ ὁ 4^2
διαιρεῖ τὸν 32.

Σημειώσεις.

„Διαιροῦσι δὲ τοὺς παράγοντας εἰς ἀπλοῦς, καὶ εἰς συν-
θέτους παράγοντας· καὶ ἀπλοῦς μὲν λέγουσιν, ὅσοι πρῶ-
τοι καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμοὶ, συνθέτους δὲ ὅσοι εἶναι πολλα-

πλάσιοι ἀριθμοὶ (§. 147.). οἱ μὲν 3, 5, 7, 11 κτ. λέγονται ἀπλοὶ παράγοντες, οἱ δὲ 4, 6, 8, 10, 12, κτ. συνθέτοι· καὶ ὅταν λύσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ἐκεῖνους, λέγομεν ὅτι τὸ ἐλύσαμεν εἰς ἀπλοῦς παράγοντας, ὅταν δὲ εἰς τούτους, εἰς συνθέτους· πῶς ὁμῶς εὐρίσκομεν τοὺς ἀπλοῦς καὶ συνθέτους παράγοντας, ἥδη λέγομεν.

§. 166. Ἐςω ὁ 330 ἀριθμὸς, καὶ ζητήσθω νὰ εὕρωμεν αὐτοῦ ὅλους τοὺς ἀπλοῦς καὶ συνθέτους παράγοντας· εἰάν ἀγάγωμεν τὴν κάθετον γραμμὴν, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται.

330		2
165		3, 6
55		5, 10, 15, 30
11		11, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330.

Βλέπομεν Α'. ὅτι αὐτὸς εἰς δύο διαιρεῖται (§. 154.), καὶ διαιροῦμεν διὰ 2, καὶ γράφομεν τὸν μὲν διαιρέτην 2 ἀπέναντι τῆς γραμμῆς, τὸ δὲ πηλίκον 165 ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν. Β'. Βλέπομεν ὅτι καὶ τὸ πηλίκον 165 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 (§. 155.), διαιροῦμεν καὶ γράφομεν τὸν διαιρέτην 3 ἀπέναντι, καὶ τὸ πηλίκον 55 ὑπὸ τὸ πρῶτον πηλίκον· ἔτι βλέπομεν ὅτι ὁ 55 διαιρεῖται διὰ τοῦ 5 (§. 157.), γράφομεν ἔτι τὸν διαιρέτην 5 ἀπέναντι, καὶ τὸ πηλίκον, 11 ὑπὸ τὸ δεύτερον πηλίκον· ἔτι βλέπομεν ὅτι ὁ 11 μόνον διαιρεῖται καὶ πλέον οὐ, ἄρα γράφομεν καὶ τοῦτον διαιρέτην ἀπέναντι, καὶ εἶναι οἱ μὲν ἀπλοὶ παράγοντες τοῦ 330 μόνον ὁ 2, ὁ 3, ὁ 5, καὶ ὁ 11· ὅτι

$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. τοὺς συνθέτους δ' εὐρίσκομεν οὕτω.

Α'. Τὸν δεύτερον διαιρέτην πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν πρῶτον $2 \cdot 3 = 6$ καὶ γρόφεται· τὸν δὲ 5 πολλαπλασιάζο-

μεν μὲ ὅλους τοὺς ἀνωτέρω $5 \cdot 2 = 10$, καὶ $5 \cdot 3 = 15$, καὶ $5 \cdot 6 = 30$, καὶ γράφεται 10, 15, 30.

Β'. Μὲ τὸν τέταρτον παράγοντα 11 πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ἀνωτέρω, καὶ εὐρίσκονται ἕτεροι, οὕτω $11 \cdot 2 = 22$, $11 \cdot 3 = 33$, $11 \cdot 6 = 66$, $11 \cdot 5 = 55$, καὶ $11 \cdot 10 = 110$, $11 \cdot 15 = 165$, καὶ $11 \cdot 30 = 330$, καὶ γρόφονται καὶ οὗτοι 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330, καὶ οὕτως οἱ λοιποὶ πλὴν τῶν ἀρχικῶν εἶναι σύνθετοι, καὶ δι' ὅλων ὁ 330 διαιρεῖται· οὕτως εὐρίσκομεν ὅλους τοὺς παράγοντας τοῦ 600. εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα δὲν ἐπολλαπλασιάσθησαν ἑκεῖνοι ὅπερ ἀνωτέρω ἐπολλαπλασιάσθησαν· καὶ ἀρχικοὶ καὶ ἀπλοὶ εἶναι μόνον ὁ 2, 3, καὶ 5, οἱ δὲ λοιποὶ ὅλοι σύνθετοι, καὶ δι' ὅλων διαιρεῖται ὁ 600.

600	2	
300	2,	4
150	2,	8
75	5,	10, 20, 40
15	3,	6, 12, 24, 15, 30, 60, 120
5	5,	25, 50, 100, 200, 75, 150, 300, 600.

Τοῦτο γενέσθω καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς ἀριθμούς· ἡ δὲ χρῆσις τῶν παραγόντων εἶναι εἰς τὸν ἀριθμητικὸν οὐ μόνον χρήσιμος, ἀλλὰ καὶ ἀναγκαῖα· καὶ διὰ τὰ μὴ δαπανῶσιν οἱ καταγινόμενοι εἰς τὰς ἐπισημας τὸν χρόνον ματαίως, κατέστρωσαν οἱ τεχνικοὶ πίνακας τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ τῶν παραγόντων, διὰ τὰ εὐρίσκωσιν οἱ θέλοντες ὄνεν κόπου, καὶ τοὺς πρώτους ἀριθμούς, καὶ τοὺς παράγοντας ἑκάστου ἀριθμοῦ.

Τούτους καὶ ἡμεῖς εὐρύθμως καὶ πλουσιῶς θέλομεν ἐκδώσει εἰς ἰδιαίτερον τόμον μετὰ τῶν λογαρίθμων, διὰ τὰ ἀπαλλαχθῶσιν οἱ φιλόμουσοι τοῦ γένους μου καὶ ἀπὸ τοῦ-

το τὸ δεινόν. Ἦδη δὲ ἄς ἔλθωμεν καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν παραγόντων ἐν γράμμασι.

Σημείουσαι, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὅπου δὲν διαιρεῖται δι' ἐνὸς ἀπλοῦ παράγοντος, οὐδὲ διὰ τοῦ συνθέτου διαιρεῖται (§. 150.)· ὁ γὰρ διὰ τοῦ 2 δ' ὡς διαιρῆται, οὐ διαιρεθῆσεται οὐδὲ διὰ τοῦ 4, ἢ 6, ἢ 8, ἢ 10 κτ.

Ὁμοίως ἐὰν διὰ τοῦ 3 δὲν διαιρῆται, οὔτε διὰ τοῦ 2, 3, ἢ 4, 3, ἢ 5, 3 κτ. διαιρεθῆσεται.

§. 167. Διὰ τὰ εὐρώμεν τοὺς παράγοντας εἰς κάθε Ἀλγεβραϊκὴν ἔκθεσιν, εἶναι τὸ ζήτημα διεξοδικόν, καὶ ἡμεῖς εἰς τὸ παρὸν ἀδυνατοῦμεν νὰ τὸ ὑναμοχλεύσωμεν, διότι ἀκόμη δὲν ἐμάθομεν ἐκεῖνα ὅπου προαπαιτοῦνται εἰς αὐτὸ τὸ πρόβλημα, τὸ ὅπου δέλομεν λύσει μετὰ τὰς συνεργασίας. Ὅθεν εἰς τὸ παρὸν δεικνύομεν μόνον, ὅσα εὐκόλως ἀπὸ τὰ προειρημένα ἀποδεικνύονται.

Α'. Ἐὰν μία ποσότης ὡς παράγων εἰς ὅλα τὰ μέρη ἐνὸς πολυωνύμου εὐρίσκεται κοινὴ, λαμβάνομεν αὐτὴν ὡς ἓνα παράγοντα, τὰ δὲ λοιπὰ εἰς παρένθεσιν περικλείομεν (§. 84.) εἰς ἕτερον παράγοντα, οὕτως
 $a^6 + ay = a(6 + y)$ · καὶ $6y - dy = y(6 - d)$ ·
καὶ $a^6 + dy - 3a^6 = 6(a + dy - 3a^6)$ · καὶ
 $7^6 x - 3a^6 x = x(7^6 x - 3a^6)$ κτ. $= x^6(7x - 3a)$.

Β'. Ἐὰν δὲ πρὸ τῶν γραμμάτων εὐρίσκωνται καὶ συνεργοὶ εἰς ἀριθμούς, τότε λύομεν εἰ δυνατόν καὶ αὐτοὺς εἰς παράγοντας, (§. 85.), διὰ νὰ φανῇ καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς ἢ ποσότης ἢ αὐτή· ὡς
 $6a^6 - 12a^6y - 3a^6 = 3 \cdot 2a^6 - 3 \cdot 4a^6y - 3a^6$ · ἐδῶ βλέπομεν κοινούς παράγοντας τὸν 3, καὶ α, καὶ 6, ἄρα λαμβάνομεν τοὺς τρεῖς ἐκτὸς, καὶ οἱ λοιποὶ περικλείονται εἰς

ἔτι $\chi^2 - 1 = (\chi + 1)(\chi - 1)$. διότι ἡ μονὰς λαμβάνεται καὶ ἀπλῆ, καὶ τετράγωνον ἡ αὐτὴ· τοὺς τύπους τούτους πρέπει ὁ πρωτόπειρος νὰ τοὺς ἐνθυμῇται· διότι πολλὴ ἡ χρῆσις τούτων εἰς τὴν "Αλγεβραν.

$$\Delta'. \chi^3 + 3\chi^2 + 2\chi = \chi\chi\chi + 3\chi\chi + 2\chi = \chi(\chi\chi + \chi + 2\chi + 2) = \chi(\chi(\chi + 1) + 2(\chi + 1))\chi = (\chi + 1)(\chi + 2).$$

$$\text{Ε'. } 2\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 5\varepsilon = \varepsilon(2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1) = \varepsilon(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon + \varepsilon + 1) = \varepsilon[2\varepsilon(\varepsilon + 1) + (\varepsilon + 1)] = \varepsilon(\varepsilon + 1)(2\varepsilon + 1).$$

$$\text{ΣΤ'. } \nu^3 - 3\nu^2 + 2\nu = \nu(\nu^2 - 3\nu + 2) = \nu(\nu\nu - \nu - 2\nu + 2) = \nu[\nu(\nu - 1) - 2(\nu - 1)] = \nu(\nu - 1)(\nu - 2)$$

διότι τὸ $-2\nu + 2 = -2(\nu - 1)$ κατὰ τὸ ζ'.

$$\begin{aligned} \text{Ζ'. } 2\nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu - 2\nu &= 2\nu^3 - 2\nu + 3\nu^2 + 3\nu = \nu(2\nu^2 - 2 + 3\nu + 3) = \nu(2(\nu^2 - 1) + 3\nu + 3) \\ &= \nu(2(\nu - 1)(\nu + 1) + 3\nu + 3) = \nu(\nu + 1)[2(\nu - 1) + 3\nu + 3] = \nu(\nu + 1)(2\nu - 2 + 3\nu). \end{aligned}$$

διότι $\nu^2 - 1 = (\nu + 1)(\nu - 1)$.

§. 168. Ὑπεσχέθημεν ὁπισθεν (§. 77.) τὴν δεξιὴν τῆς δοκιμῆς τῶν ἐννεά· ἤδη δὲ δυνάμεθα νὰ εἰπῶμεν τι περὶ αὐτῆς, πλην σημειοῦμεν πρῶτον τὰ ἐξῆς.

Α'. Ἐκαστος ἀριθμὸς σύνθετος λύεται εἰς μέρη ἀπλᾶ (§. 148.) ὥς ὁ $567 = 500 + 60 + 7$, καὶ $45679 = 40000 + 5000 + 600 + 70 + 9$.

Β'. Ἐκαστος ἀριθμὸς σύνθετος, ἂν οὐ εἰς μέρη λυθῇ, λύεται ἔτι καὶ εἰς μέρη ἐνναδικὰ, καὶ μὴ ἐνναδικὰ· ὥς ὁ $264 = 500 + 60 + 7 = 5(96 + 1) + 6(9 + 1) + 7$. 5. 99 + 5 + 6. 9 + 6 + 7.

Ἐνταῦθα βλέπομεν, ὅτι 5. 99 καὶ 6. 9 εἶναι μέρη ἐνναδικὰ (§. 148.) τὰ δὲ λοιπὰ $5 + 6 + 7$ εἰσι μὴ ἐνναδικὰ· ἔτι καὶ $34856 = 30000 + 4000 + 800 + 50 + 1 = 3(9999 + 1) + 4(999 + 1) + 8(99 + 1) + 5(9 + 1) + 6 = 3$.

$$9999+3+4. 999+4+8. 99+8+5. 9+5+6. =$$

$$(3. 9999+4. 999+8. 99+5. 9)+(3+4+8+5+6.$$

Καὶ ἐκ τούτων τῶν παραδειγμάτων μαθαίνομεν, ὅτι ἕκαστος ἀριθμὸς οἷοσδήποτε εἰς δύο μέρη τέμνεται, ὡς τὸ πρῶτον ἔχει μέρη ἐνναδικὰ, ὥς ἐάν ὅλα τὰ ἐννέα ρίψωμεν, μένει οὐδέν· τὸ δ' ἕτερον μέρος ἔχει τοὺς αὐτοὺς χαρακτῆρας τοῦ ἀριθμοῦ, ὅς τις εἰς τὰ δύο αὐτὰ τέμνεται μετὰ τὸ σημεῖον +. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ὅταν θέλωμεν νὰ ἀπορρίψωμεν ὅλα τὰ ἐννέα ἀπό τινος ὀριθμοῦ, τοὺς χαρακτῆρας αὐτῶν προσθέτομεν, καὶ ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου ρίπτωμεν τὸ ἐννέα ὅλα.

Γ'. Ἀπὸ κάθε περιθδικὸν ἀριθμὸν ὅταν τὰ ἐννέα ρίπτωμεν, μένει αἱ μοναὲς ὡς $10=9+1$. $100=99+1$. $1000=999+1$ κτ. ἀπὸ κάθε ἀριθμικὸν μένει ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἀριθμικοῦ, ὅταν ὅλα τὰ ἐννέα ρίπτωμεν, $20=2(9+1)=2$. $9+2$. καὶ $30=3(9+1)=3$. $9+3$ κτ. διὰ τοῦτο ὅταν ἀριθμικὸν ἔχωμεν, ἀφ' οὗ ὅλα τὰ ἐννέα ρίπτομεν, λαμβάνομεν μόνον τὰ μένον, τοῦτέστι τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀριθμικοῦ· ὡς μένον τοῦ 80 εἶναι ὁ 8, τοῦ 40, ὁ 4, τοῦ 5000, ὁ 5, τοῦ 700, ὁ 7 κτ.

§. 169. Ἡ δὲ δοκιμὴ τῶν ἐννέα εἶπαμεν (§. 51:) εἰς τὴν πρόσθεσιν ὅτι γίνεται, ἐάν προσθέτωμεν ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τῶν προσθετέων εἰς ἓν κεφάλαιον, ἥτοι πρῶτον τοὺς μοναδικούς χαρακτῆρας, ἔπειτα τοὺς δεκαδικούς, ἑκατονταδικούς κτ. καὶ ἀπ' αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου ριπτομένων τῶν 9, ἐάν τὸ μένον τοῦτο εὗρεθῇ ἴσον τῷ μένοντι ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου ὅλων τῶν χαρακτήρων τοῦ ἀθροίσματος, ριπτομένων ὅλων τῶν 9, ὀρθὴ ἡ πρόσθεσις· διότι συνάπτοντες εἰς τὸ κεφάλαιον τὴν ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὰ 10 γρά-

φομεν εἰς αὐτό, καὶ μονάδα εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων προσθέτομεν· (§. 47.) τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ἴδιον ὥσάν νὰ συνάπτωμεν τοὺς χαρακτήρας τῶν μονάδων, καὶ ρίπτωμεν 10 ὅντι 9, καὶ τὸ μένον γράφομεν εἰς τὸ κεφάλαιον· ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπὸ τῶν 10 μία μονὰς μόνον μένει (§. 168... γ.) ὅταν 9 ρίπτεται, ἄρα αὐτὴν τὴν μονάδα ὅπου μένει εἰς τὸν τόπον τῶν δεκάδων λαμβάνομεν διότι· εἰὰν τὸ κεφάλαιον ἦτον 20 ἢ 30 κτ., ὅτι ὁ 20 καὶ 30 κτ. εἰὰν τὰ 9 ρίψωμεν 2, ἢ 3 ὑπερέχει (αὐτόθι), τοῦτο γίνεται καὶ εἰς τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων, χιλιάδων κτ.. "Ὅθεν ἔπεται τὸ μένον ἀπὸ τὸ κεφάλαιον ὅλων τῶν προσθετέων ὅταν τὰ 9 ρίψωμεν, νὰ ἦναι = τῷ μένοντι ὅταν ἀπὸ, τοῦ ὅλου ἀθροίσματος αὐτῶν ὅλα τὰ 9 ρίψωμεν.

§. 170. Ἡ δὲ δοκιμὴ τῶν 9 εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν γίνεται ὡς εἴπομεν (§. 77.) οὕτω, εὐρίσκομεν τὸ μένον ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ρίπτομεν ἀπ' αὐτοῦ ὅλα τὰ ἐννέα, καὶ σημειοῦμεν τὸ μένον. Ἐῖτα εὐρίσκομεν καὶ τὸ μένον ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ πολλαπλασιάζομεν ταῦτα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου ρίπτομεν πάλιν ὅλα τὰ 9, καὶ τὸ μένον τοῦτο εἰὰν εὐρεθῇ ἴσον τῷ μένοντι ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν χαρακτήρων τοῦ παραγομένου, ὅταν ρίψωμεν τὰ 9, εἶναι ὀρθὸς ὁ πολλαπλασιασμός.

Ἐξω ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος

632=(6.99+3.9)+(6+3+5) τὸ μὲν (6. 99+3. 9) ἐν ναδικῶν, τὸ δὲ (6+3+5) τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ (§. 168 .. β.) ὁμοίως καὶ ὁ πολλαπλασιαστής

471170=(4.99999+7. 9999+1.999+1. 99+7. 9)+(4+7+1+1+7+0).

Ἐὰν δὲ τοὺτους τοὺς διαλελυμένους παράγοντας πολλαπλασιάζωμεν, ἔσονται ἴσοι τῷ παραγομένῳ.

$$(6. 99+3. 9)+(6+3+5)$$

$$(7. 96+4. 9)+(7+4+2)$$

$$[(6. 99+3. 9)(7. 99+4. 9)+(7. 99+4. 9)(6+3+5)+(6. 99+3. 9)(7+4+2)]+(6+3+5)(7+4+2)=$$

$$(4. 99999+7. 9999+1. 999+1. 99+7. 9) (4+7+1+1+7+0).$$

Ἄλλ' εἰς ἀπυρρόψωμεν ὅλα τὰ 9 καὶ ἀπὸ τῶν παραγόντων καὶ ἀπὸ τοῦ παραγομένου, μένει ἀπὸ μὲν τῶν παραγόντων $(7+4+2)(6+3+5)$. ἀπὸ δὲ τοῦ παραγομένου $(4+7+1+1+7+0)$, καὶ ἐκείνοι μένουσι τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων τῶν ἀριθμῶν· τοῦτο δὲ τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων τοῦ ὁριζμοῦ τοῦ παραγομένου. Ἄρα πρέπει νὰ εὐρώμεν τὸ μένον ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ πολλαπλασιαστέου, οὕτω 4 καὶ 5, καὶ ταῦτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $4. 5=20$ καὶ νὰ εὐγάλωμεν τὰ 9, καὶ τὸ μένον 2 εἰς τὴν ἴσα τῷ μένοντι ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν χαρακτήρων τοῦ παραγομένου, ὅταν καὶ αὐτοῦ ὅλα τὰ 9 ῥέψωμεν, ὥς $(4+7+1+1+7+0)=20$, ἀφ' οὗ μένει 2, κρίνομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ὀρθῶς ἐγένετο. Ἡ δὲ δεξις τῆς δοκιμῆς τῶν 9 εἰς τὴν διαίρεσιν εἶναι ἡ αὐτὴ ὥς καὶ εἰς τὸν πολλαπλασμόν· διότι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δέκνυται ἡ διαίρεσις (§. 105. . . . 116.).

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Ζ΄.

Περὶ Προβλημάτων.

§. 171. **Ε**πειδὴ τῶρα ἱκανῶς ἐγυμνάσθημεν εἰς τὰ τέσσαρα εἶδη τῶν ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων, καὶ πῶς συνθέτονται καὶ εὐρίσκονται οἱ παράγοντες, εὐκίλως λύομεν καὶ ἕτερα διαφόρα προβλήματα· ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα εὐκόλως λύεται, ὅταν ὀρθῶς εὐρώμεν τὴν ἐξίσωσιν.

Τι δὲ ἐξίσωσις, καὶ πῶς διαφόρως μεταποιεῖται, ἱκανὰ μέχρι τοῦ δε περὶ τούτων εἶπομεν· ἐν μόνου λέγομεν, ὅτι τὰ ιδιώματα τῆς ἐξίσωσεως θεωροῦνται τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὰ γράμματα· διότι καὶ διὰ τῶν γραμμάτων ποιοῦμεν ἔντελεις ἐξίσωσεις, καὶ δι' αὐτῶν κατασκευάζομεν προβλήματα γενικά· καὶ καθόλου τοιαῦτα, ὥστε νὰ εὐρίσκωμεν τύπους γενικοὺς καὶ καθόλου, καὶ δι' αὐτῶν νὰ λύωμεν προβλήματα διαφόρα· πλὴν καὶ εἰς αὐτὰ ἄλλα μὲν γράμματα λαμβάνονται ὡς διδόμενα, ἄλλα δὲ ὡς ἄγνωστα, καὶ τὰ μὲν ὡς διδόμενα παρίστανται διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου α, β, γ κτ., τὰ δὲ ἄγνωστα διὰ τῶν ἐσχάτων τοῦ ἀλφαβήτου φ, χ, ψ, ω. ἔτι καὶ εἰς αὐτὰ ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, φέρεται ἐν μόνου γράμμα ἄγνωστον εἰς τὸ ἐν σκέλος τῆς ἐξίσωσεως, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ γνωστὰ εἰς τὸ ἕτερον· τοῦτο δὲ γίνεται Α', ἂν φέρωμεν ὅλα τὰ μέρη τὰ γνωστὰ εἰς ἐν σκέλος τῆς ἐξίσωσεως, μεταβάλλοντες τὸ μὲν + εἰς —, καὶ τὸ — εἰς +, καὶ τὰ μέρη ὅπου ἔχουσι τὸ ἄγνωστον εἰς τὸ ἕτερον μέρος (§. 52.).

Β'. Ἄν τα ἄγνωστα αὐτὰ μέρη ἔχουσι διαιρέτην, μὲ

πρὸς τὸν πολλαπλασιάζομεν ὅλα τὰ γνωστὰ μέρη εἰς τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως, διὰ τὴν ἀπαλλαχθῆμεν ἀπὸ τοῦς διαιρέτας (§. 123.).

Γ'. Ἄν ὁ ἄγνωστος χαρακτήρ ᾖ συμπεπλεγμένους με συνεργοῦς, νὰ κλείωμεν τοὺς συνεργοῦς εἰς παρενθεσιν, καὶ τὸ ἄγνωστον ἐκτὸς ὡς ἓνα παράγωγα (§. 85.).

Δ'. Ἡ παρενθεσις ὅλη τῶν συνεργῶν νὰ διέλῃ ὅλον τὸ ἕτερον σκέλος τῆς ἐξισώσεως (§. 124.). καὶ οὕτω μείνει ὁ ἄγνωστος μόνος εἰς τὸ ἓν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, καὶ τὰ γνωστὰ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος (§. 125.).

Ε'. Ἐὰν ὁ ἄγνωστος ᾖ ἀποφατικὸς, μεταβάλλομεν αὐτὸν εἰς καταφατικόν, καὶ εἰς τὸ ἕτερον σκέλος ὅλα τὰ μέρη τὰ μεταβάλλομεν, τὰ μὲν καταφατικά, εἰς ἀποφατικά εἰς καταφατικά· καὶ κατὰ αὐτὰ τὰ πέντε λύονται ὅλαι αἱ ἐξισώσεις, ὅταν καλῶς τοὺς κανόνας τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, διαιρέσεως, καὶ πολλαπλασιασμοῦ μνημονεύωμεν.

§. 172. Πρὶν ὅμως εἰς αὐτὴν τὴν λύσιν ἔλθωμεν, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς, ὁποῦ ἔχει ἐκθέτην μείζονα μονάδος, αὐτὸς ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιάζεται· ὡς $4^2=4 \cdot 4=16$, καὶ $3^3=3 \cdot 3 \cdot 3=27$, καὶ $2^3=2 \cdot 2 \cdot 2=8$, καὶ $5^4=5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5=725$. ὁμοίως καὶ εἰς τὰ γράμματα $a^3=aaa$, καὶ $b^5=bbbbb$, καὶ $x^3=xxx$, δηλ: ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης, τοσάκις γίνεται ὁ χαρακτήρ αὐτὸς παράγων. Τούτους λοιπὸν τοὺς ἀριθμοὺς καλοῦσιν οἱ ἀριθμητικοὶ δυνάμεις, τὰς δ' ὀνομασίας αὐτῶν ἡμεῖς δὲν λέγομεν κατὰ τὸ παρὶν· τοῦτο μόνον λέγομεν, ὅτι τὰ προβλήματα, ὁποῦ ὁ ἄγνωστος χαρακτήρ ἔχει ἐκθέτην μονάδα, λέγονται προβλήματα, ἢ ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ, καὶ

τοιαῦτα προβλήματα εἰς τὸ παρὸν προβάλλομεν εἰς λύσιν· ἐκεῖνα δ' ὅπου ἔχουσιν ἄγνωστον χαρακτήρα μὲ ἐκθέτην 2, 3, 4 ὡς χ^2 , χ^3 , χ^4 κτλ., λέγονται προβλήματα, ἢ ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου τρίτου καὶ τετάρτου βαθμοῦ, περὶ ὧν ὕψερρον ἐροῦμεν.

Ἔτι τὰ προβλήματα καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ Α', καὶ Β', καὶ Γ' βαθμοῦ ὑποδιαιροῦνται εἰς προβλήματα μὲ μίαν ἄγνωστον ποσότητα, καὶ εἰς προβλήματα μὲ δύο, ἢ τρεῖς κτ: ἄγνωστους· εἰς τὸ παρὸν ὁμῶς λύομεν προβλήματα μόνον μιᾶς ἄγνωστου· πλείονα δὲ, εἰς ἄλλο μέρος· ἔτι ὑποδιαιροῦνται τὰ προβλήματα εἰς ὠρισμένα καὶ ἀόριστα· ὠρισμένα εἶναι ὅλα, ὅσα μίαν ἄγνωστον ἔχουσι, περὶ ὧν ἐν ταύτῃ ὁ λόγος· τίνα δὲ τὰ ἀόριστα; ὕψερρον.

§. 173. Τὸ παρὸν πρόβλημα συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀπαλλοτρίωμεν ὅπῃ κάθε ἐξίσωσιν ἓνα ἀριθμὸν οἰονδήποτε τῆς ἐξίσωσως, ἥτοι νὰ φέρωμεν οἰονδήποτε ἀριθμὸν τῆς ἐξισώσεως μόνον εἰς τὸ ἓν σκέλος, καὶ εἰς τὸ ἕτερον τῆς ἐξισώσεως τοὺς λοιποὺς χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ ἐξίσωσις· καὶ τοῦτο γίνεται διὰ τῶν πέντε ἐκείνων, ὅπου εἰς τὸν προηγούμενον εἵπομεν παράγραφον (§. 172.).

Α'. Ἐξῶ ἡ ἐξίσωσις καὶ $5\alpha - 4\gamma = 6 + \gamma + \alpha$, ζητεῖται νὰ μωωθῇ τὸ α , ἄρα κατὰ τὸ Α'.

$$3\alpha - \alpha = 6 + \gamma + 4\gamma$$

$$\text{κατὰ τὸ Γ'.} \quad \alpha(5-1) = 6+5\gamma$$

$$\text{καὶ } \alpha = \frac{6+5\gamma}{5-1} \text{ κατὰ τὸ Δ'.$$

ἔχομεν ὅρα τὸ α μόνον εἰς ἓν μέρος.

2) Ζητεῖται ἀπ' αὐτῆς τὸ γ νὰ μωωθῇ, πάλιν

$$\begin{array}{r} 5\alpha - 4\gamma = 6 + \gamma + \alpha \\ \hline 5\alpha - \alpha - 6 = 4\gamma + \gamma \\ 4\alpha - 6 = 5\gamma \\ \text{καὶ } \gamma = \frac{4\alpha - 6}{5} \end{array}$$

3) Ζητείται ἔτι ἀπ' αὐτῆς τὸ β νὰ μονωθῇ

$$5\alpha - 4\gamma = \beta + \gamma + \alpha$$

$$\beta = 5\alpha - 5\gamma - \alpha = 4\alpha - 5\gamma$$

καὶ ἔχομεν μόνον τὸ β .

Β'. Ἐτι δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{5\alpha\beta}{\gamma} - \beta\gamma = \alpha + 3\gamma$, καὶ ζη-

τεῖται 1) τὸ β νὰ μονωθῇ.

$$\text{ἔσω } \frac{5\alpha\beta}{\gamma} - \beta\gamma = \alpha + 3\gamma$$

$$\frac{5\alpha\beta}{\gamma} - \beta\gamma = \alpha + 3\gamma + \beta\gamma \quad \text{κατὰ τὸ Α'}$$

$$\frac{5\alpha\beta}{\gamma} = \alpha + 3\gamma + \beta\gamma \quad \text{κατὰ τὸ Α'}$$

$$\text{καὶ } 5\alpha\beta = \alpha\gamma + 3\gamma\gamma + \beta\gamma\gamma \quad \text{κατὰ τὸ Β'}$$

$$\text{καὶ } 5\alpha\beta - \beta\gamma\gamma = \alpha\gamma + 3\gamma\gamma \quad \text{κατὰ τὸ Α'}$$

$$\text{καὶ } 6(5\alpha - \gamma\gamma) = \alpha\gamma + 3\gamma\gamma \quad \text{κατὰ τὸ Γ'}$$

$$\text{καὶ } \beta = \frac{\alpha\gamma + 3\gamma\gamma}{5\alpha - \gamma\gamma} \quad \text{κατὰ τὸ Δ'}$$

$$\Gamma'. \frac{\alpha\chi}{3} + \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma\chi}{4} = \gamma \quad \text{καὶ ζητεῖται τὸ } \chi \text{ νὰ μονωθῇ}$$

$$\text{ἄρα } \frac{\alpha\chi}{3} - \frac{\gamma\chi}{4} = \gamma - \frac{\beta}{3}$$

$$\alpha\chi - \frac{3\gamma\chi}{4} = 3\gamma - \beta$$

$$4\alpha\chi - 3\gamma\chi = 12\gamma - 4\beta \quad \text{4 κατὰ τὸ Β'}$$

$$\chi(4\alpha - 3\gamma) = 12\gamma - 4\beta \quad \text{εἰς παράγοντας}$$

$$\chi = \frac{12\gamma - 4\beta}{4\alpha - 3\gamma} \quad \text{κατὰ τὸ Γ'}$$

$$\Delta'. \text{ Ζητείται τὸ } \chi. \frac{a}{\chi} - 6\gamma - \delta = a\delta + \gamma\delta$$

$$\text{ἄρα } \frac{a}{\chi} = a\delta + \gamma\delta + 6\gamma + \delta \text{ κατὰ τὸ } \Delta'.$$

$$\frac{a = 25\chi + \gamma\delta\chi + 6\gamma\chi + \delta\chi}{a = (a\delta + \gamma\delta + 6\gamma + \delta)\chi} \text{ κατὰ τὸ } \Delta'.$$

$$\frac{a}{a\delta + \gamma\delta + 6\gamma + \delta} = \chi$$

$$\text{Ε'. Ζητείται τὸ } \alpha. \frac{\alpha\gamma}{5} = \frac{3\gamma^2 + 2\gamma - \delta}{5}$$

$$\text{ἄρα } \alpha\gamma = 3\gamma^2 + 2\gamma - \delta \text{ (β. 81.)}$$

$$\text{καὶ } \alpha = 3\gamma + 2 - \frac{\delta}{\gamma}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ α ἐμονώθη ἀποφατικῶς, μεταβάλλομεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν μερῶν τῆς ἐξισώσεως, διὰ νὰ γένῃ ἡ α ποσότης καταφατικὴ.

$$\Sigma\Gamma'. \text{ οὕτω καὶ τὸ } \alpha^2 - \chi^2 = \frac{a\delta + 6\chi}{\gamma} \text{ καὶ ζητείται τὸ } \chi. \text{ ἄρα}$$

$$\alpha^2 - \chi^2 = \frac{a\delta + 6\chi}{\gamma}$$

$$\text{καὶ } (a + \chi)(a - \chi) = \frac{6(a + \chi)}{\gamma} \text{ ἀνάλυσις τῶν παραγόντων}$$

$$\text{καὶ } (a - \chi) = \frac{6(a + \chi)}{\gamma(a + \chi)} = \frac{6}{\gamma}$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{6}{\gamma} - a \text{ ἥτοι } \chi = a - \frac{6}{\gamma} \text{ κατὰ τὸ Ε'.$$

ἐτέθη τὸ καταφατικὸν μέρος πρὸ τῶν ἄλλων εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐξισώσεως διὰ τὸ τακτικώτερον· ἄλλως ὅμως εἶναι ἀδιάφορον· οὕτω λοιπὸν εὐρίσκομεν κάθε γράμμα, καὶ μέρος τῆς ἐξισώσεως· πλὴν ἐνταῦθα ἀπαιτεῖται μόνον τὸ ἄγνωστον νὰ φέρωμεν εἰς ἓν σκέλος, καὶ τὰ γνωστὰ εἰς τὸ ἕτερον.

Π ρ ό θ λ η μ α Α'.

Κηπουρός τις ἐρωτηθεὶς πόσα καρπούζια ἔλαβεν ἀπὸ τὸν κῆπον αὐτὸ τὸ ἔτος; εἶπε, τὰ μισὰ τὰ ἐπώλησα, τὸ ἐν τέταρτον τὸ ἔλαβεν ὁ κτήτωρ τοῦ κήπου, τὸ ἐν ὀγδοῶν τὸ ἔφαγον μὲ τὴν φαμιλλίαν μου, μοὶ ἔμειναν ἔτι 120.

Ζητεῖται τὴν ὥρᾳ πόσα ἦτον ὅλα τὰ καρπούζια.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Διὰ νὰ εὐρώμεν τοῦτο τὸ πρόβλημα, θέτομεν ἦτοι ὅλα τὰ καρπούζια $=x$. τὰ δὲ μισὰ εἶναι $=\frac{x}{2}$ (§. 120.).

τὸ ἐν τέταρτον $=\frac{x}{4}$, καὶ τὸ ἐν ὀγδοῶν $=\frac{x}{8}$. εἰς ὅμως ὅλα αὐτὰ συνάψωμεν, ὅμοῦ καὶ τὰ 120, εἶναι ἴσα μὲ ὅλα τὰ καρπούζια $=x$. οὕτω $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 120 = x$.

Διὰ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, πρέπει νὰ ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς διαιρέτας· τοῦτο γίνεται, εἰς μὲ τὸν 8 πολλαπλασιάσωμεν ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐξισώσεως (§. 123.) οὕτω

$$\frac{\chi + \frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{4} + 120}{8} = \chi$$

$$\frac{8\chi + \chi + \chi + 960}{4} = 8\chi$$

$$\frac{4\chi + 2\chi + \chi + 960}{8} = \chi \quad \text{εἰς τὸ ἕτερον τὰ ἀγνώστα}$$

$$\frac{960 = 8\chi - 4\chi - 2\chi - \chi}{960 = \chi} \quad \text{ἀφαιροῦνται τὰ ὁμογενή.$$

Καὶ ἦν ὅλα τὰ καρπούζια 960· ἐκείνα δὲ ὅπου ἐπώλησε
 $\frac{960}{2} = 480$ · ὅσα δ' ἔλαβεν ὁ κτήτωρ $\frac{960}{4} = 240$ · ὅσα δ' ἔ-

$$\text{παγεν} \frac{960}{8} = 120 \cdot \text{διότι } 480 + 240 + 120 + 120 = 960.$$

Π ρ ό λ η μ α Β'.

„Δεσπότης τις ἔδωκε τῷ δούλῳ 50 γρόσια νὰ τὰ μοιράσῃ εἰς δύο πτωχοὺς, πλην εἰπεν ὅτι νὰ δώσῃ αὐτῷ οὐ-
τως, ὥς νὰ λάβῃ ὁ ἓνας 16 περισσότερα· ἀπορεῖ ὁ δοῦ-
λος πόσα νὰ δώσῃ εἰς τὸν καθ' ἓνα;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἄουτῳ γνωστὰ εἶναι τὰ 50 καὶ τὰ 16. ὄγνωσα δὲ ἔ-
κεῖνα, ὅπου θέλει παρῇ ὁ ἓνας καὶ ὁ ἄλλος· λέγομεν ὅτι
ἐκεῖνος, ὅπου θέλει λάβῃ 16 περισσότερα, ἐλάβεν χ , ὁ
ἄλλος λοιπὸν πρέπει νὰ λάβῃ χ , καὶ 16 ὀλιγώτερα, ἥτοι
 $\chi - 16$. τὰ δὲ δύο ὅμοῦ εἶναι ἴσα μὲ τὰ 50, ἄρα ἡ ἐ-
ξίσωσις.

$$\chi + \chi - 16 = 50.$$

$$2\chi = 50 + 16 = 66$$

$$66$$

$$\chi = \frac{66}{2} = 33$$

$$2$$

καὶ 33 λαμβάνει ἐκεῖνος, ὅπου λαμβάνει 16 περισσότερα·
ὁ ἄλλος ἄρα $33 - 16 = 17$. διότι $33 + 17 = 50$.

Τοῦτο ἐκφράζεται καὶ γενικῶς διὰ γραμμάτων· ἔσω
α· ὁ ἀριθμὸς ὅπου μερίζεται· γ ὁ ἀριθμὸς ὅπου τὸ ἐν μέ-
ρος ὑπερέχει· χ τὸ ἐν μέρος τὸ ὑπερέχον κατὰ τὸ γ. ἄρα
 $\chi - \gamma$ τὸ ἔλαττον, καὶ τὰ δύο ὁμοῦ $\chi + \chi - \gamma = a$

$$\text{καὶ } 2\chi = a + \gamma$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{a + \gamma}{2} \text{ τὸ μείζον μέρος.}$$

$$\chi - \gamma \text{ τὸ ἔλαττον}$$

Τοῦτο γενικὸν καὶ καθόλου λέγεται· διότι κάθε ἀριθ-
μὸν δοθέντα μερίζει εἰς δύο μέρη κατὰ κάθε ὑπεροχὴν·
δεδόσθω ὅτι ἐδόθησαν 120 γρόσια, καὶ ἡ ὑπεροχὴ 46·
ἄρα $\chi = \frac{a + \gamma}{2} = \frac{120 + 46}{2} = \frac{166}{2} = 83$, καὶ τὸ ἔλαττον $\chi - \gamma$
 $= 83 - 46 = 37$.

Π ρ ό θ λ η μ α Γ'.

Πατήρις θανὼν ἄφησε τρεῖς υἱοὺς καὶ 1600 γρόσια,
ἡ δὲ διαθήκητου περιλαμβάνει, ὁ μὲν πρῶτος υἱὸς νὰ λά-
βῃ 200 γρόσια περισσότερα ἀπὸ τὸν δεύτερον, οὗτος δὲ
100 περισσότερα ἀπὸ τὸν Γ'.

Ζητεῖται πόσα νὰ λάβῃ ὁ Α', Β', καὶ Γ'. φανερόν ἐάν
ἡξεύρωμεν πόσα ὁ τρίτος ἐλάμβανεν, γνωστὰ καὶ τοῦ Β'.
καὶ τοῦ Γ'. λοιπὸν ὁ τρίτος λαμβάνει χ· ἄρα ὁ δεύτερος
 $\chi + 100$, καὶ ὁ πρῶτος $\chi + 300$ καὶ τὰ τρία ὁμοῦ εἶναι ὅ-
λη ἡ κληρονομία, καὶ αὕτη ἡ ἐξίσωσις.

$$\begin{aligned} & \chi + \chi + 100 + \chi + 300 = 1600 \text{ κατὰ τὸ Α'.} \\ & \underline{\chi + \chi + \chi = 1600 - 100 - 300} \text{ εἰς τὰ ἀπλούς} \\ & 3\chi = 1200 \text{ καὶ } \chi = \frac{1200}{3} = 400 \end{aligned}$$

Τόμ. Α'.

Ο

λοιπὸν 400 παίρνει ὁ τρίτος· ἄρα ὁ δεύτερος $x+100=500$
 ὁ πρῶτος $x+300=700$
 καὶ ὅλα ὁμοῦ $400+500+700=1600$.

Π ρ ό β λ η μ α Δ'.

Ταχυδρόμος τις περιπατεῖ τὴν ἡμέραν 10 μίλλια, μετὰ τρεῖς ἡμέρας ἔπεμψαν ἕτερον νὰ τὸν φθάσῃ, ὅστις 12 περιπατεῖ τὴν ἡμέραν, ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας φθάνει αὐτόν;

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Λέγομεν εἰς x ἡμέρας· διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ x πρέπει κατὰ τοὺς λόγους τοῦ προβλήματος νὰ εὕρεθῇ· ὁ πρῶτος εἰς τρεῖς ἡμέρας ἐπεριπάτησε μίλλια 3. $10=30$, πλην καὶ ἔπειτα μετὰ τὸν κινήμῳ τοῦ δευτέρου εἰς x ἡμέρας ἐπεριπάτησε $10x$ · ἄρα ὅταν τὸν ἔφθασεν ἔκαμε δρόμον $30+10x$ · ὁ δεύτερος ὅμως εἰς x ἡμέρας περιεπάτησε μίλλια $12x$, καὶ ἐπειδὴ τὸν ἔφθασεν· εἶναι τὰ μίλλια $30+10x=12x$ ἢ ζητουμένη ἐξίσωσις.

$$\begin{array}{r} 30+10x=12x \\ \hline 30=12x-10x \\ \hline 30=2x. \text{ καὶ } x=15 \end{array} \quad \begin{array}{l} -10x \\ \text{πλου:} \end{array}$$

λοιπὸν εἰς ἡμέρας 15 τὸν ἔφθασεν ὁ δεύτερος· διότι $30+10x=30+10\cdot 15=180$ καὶ $12x=12\cdot 15=180$ · ὅς τις δὲ θέλει καὶ γενικῶς συνθέτει αὐτὸ τὸ πρόβλημα.

Κ α τ α σ κ ε υ ή.

Ἐςωσαν αἱ ἡμέραι τοῦ Α'. ταχυδρόμου πρὶν ὁ Β'. νὰ κινήσῃ = a .

τὰ μίλλια ὅπου περιπατεῖ τὴν ἡμέραν = b .

τὰ μίλλια ὅπου ὁ δεύτερος περιπατεῖ $= \gamma$.

αἱ ἡμέραι εἰς ὅσας ὁ δεύτερος φθάσει τὸν πρῶτον $= \chi$.

λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ δρόμος τοῦ πρῶτου πρὶν να κινῆσθαι ὁ δεύτερος αβ, καὶ μετὰ τὸν κινήμον τοῦ δευτέρου εἴτι βχ, τὰ δύο ὁμοῦ ἕως να τὸν φθάσῃ αβ+βχ, ὁ δὲ δεύτερος ἕως να τὸν φθάσῃ ἐπεριπάτησε γχ. ἄρα

Λύσεις.

$$\begin{array}{r} \alpha\beta + \beta\chi = \gamma\chi \\ \alpha\beta = \gamma\chi - \beta\chi \\ \alpha\beta = \chi(\gamma - \beta) \\ \hline \frac{\alpha\beta}{\gamma - \beta} = \chi \end{array}$$

καὶ κατ' αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν λύονται πλεῖστα προβλήματα.

1) Δηλ: ὁ πρῶτος περιπατεῖ 8 μίλλια $= \alpha$

ἐκίνησε πρὸ τεσσάρων ἡμερῶν $= \beta$

ὁ δεύτερος περιπατεῖ 12 μίλλ: $= \gamma$

ἄρα $\frac{\alpha\beta}{\gamma - \beta} = \frac{8 \cdot 4}{12 - 4} = \frac{32}{8} = 4$, εἰς 4 ἡμέρας.

2) Ἐχθρικὸν ζράτευμα ἐκίνησε πρὸ τριῶν ἡμερῶν, καὶ περιπατεῖ ἐξ ὥρας τὴν ἡμέραν· πέμπεται κατ' αὐτοῦ ἕτερον ζράτευμα να τὸ φθάσῃ εἰς 6 ἡμέρας, πόσας ὥρας πρέπει να περιπατήσῃ τὴν ἡμέραν; αὐτοῦ $\alpha = 3$ ἡμ: $\beta = 6$ ὥρ: $\chi = 6$ ἡμ: ζητεῖται τὸ γ : λοιπὸν. Ἡ ἄνω ἐξίσωσις

$$\begin{array}{r} \frac{\alpha\beta}{\gamma - \beta} = \chi \\ \alpha\beta = \gamma\chi - \beta\chi \\ \alpha\beta + \beta\chi = \gamma\chi \\ \hline \frac{\alpha\beta + \beta\chi}{\gamma - \beta} = \chi \\ \frac{\alpha\beta + \beta\chi}{\gamma - \beta} = \frac{\beta(\alpha + \chi)}{\gamma - \beta} = \chi \\ \chi = \frac{\beta(\alpha + \chi)}{\gamma - \beta} \\ \hline \text{ἄρα } \frac{\chi}{\chi} = \frac{\beta(\alpha + \chi)}{\gamma - \beta} = \frac{6(3 + 6)}{6} = 9 \end{array}$$

3) Ἄλλος ἐρωτήθη πόσας ὥρας δεικνύει τὸ ὥρολόγιόν του, καὶ εἶπεν· ὅτι τὰ λεπτὰ δὲν τὰ διακρίνει πλέον, πλὴν βλέπει ὅτι ὁ λεπτοδείκτης καλύπτει τὸν ὥροδείκτην μεταξύ τῶν 7 καὶ 8. αὐτοῦ ὅτι μὲν εἶναι ὥραι 7 φανερόν, τὰ δὲ λεπτὰ ζητοῦνται, καὶ τοῦτο εἰς αὐτὸν τὸν τύπον εὐρίσκειται, διότι ὁ ὥροδείκτης κινεῖται βραδύτερον ἀπὸ τὸν λεπτοδείκτην· ὅθεν ὅταν ὁ ὥροδείκτης ἐδείκνυεν ἐπ' ἀκριβὲς 7 ὥρας, ὁ λεπτοδείκτης ἦν ἐπ' ἀκριβὲς εἰς τὰς 12 ὥρας· ἄρα ὁ ὥροδείκτης τότε 7 προσβάδισεν $=a$ · πλὴν εἰς μίαν ὥραν, ὁ μὲν ὥροδείκτης περιέρχεται ἐν τμήμα τοῦ κύκλου· ἄρα $b=1$ · ὁ δὲ λεπτοδείκτης εἰς μίαν ὥραν 12 τμήματα, ὅλον τὸν γύρον, ἄρα $\gamma=12$. ὅθεν
$$\chi = \frac{a^b}{\gamma - b} = \frac{7 \cdot 1}{12 - 1} = \frac{7}{11}$$

τῆς ὥρας, ἄρα ἦτον ἡ ὥρα $7\frac{7}{11}$ τῆς ὥρας, μὲ 60 λε

πτὰ πολλαπλασιάσωμεν οὕτω

$$\frac{7 \cdot 60}{11} = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}. \text{ ἐδείκνυε τὸ ὥρολόγιον 7 ὥρας, κα}$$

38 λεπτὰ, καὶ ἐπέκεινα.

Π ρ ό β λ η μ α. Ε'.

Δύο ταχυδρόμοι ἐκίνησαν τῇ αὐτῇ ὥρᾳ ἀπὸ δύο πολιτείας, καὶ ἡ μία ἀπέχει τῆς ἐτέρας 160 ὥρας, ὁ μὲν ἕνας περιπατεῖ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δ' ἄλλος 10· ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας ἀνταμώνονται;

Λύσις.

Αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς ἀνταμώνονται ἄγνωστοι, $=\chi$ ἄρα ὁ πρῶτος περιπατεῖ εἰς αὐτὰς τὰς ἡμέρας ὥρας 8χ · ὁ δεύ-

τερος 10χ καὶ τὰ δύο ὁμοῦ εἶναι ὅλον τὸ διάστημα 160
ὥρ: λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{array}{r} 8\chi + 10\chi = 160 \\ \hline \chi(8+10) = 160 \end{array}$$

$$\chi = \frac{160}{8+10} = \frac{160}{18} = 8\frac{16}{18}$$

"Ὅθεν εἰς τὴν ἐννάτην ἡμέραν θέλουν αὐταμωθοῦν· γί-
νεται καὶ γενικῶς· αἱ ὥραι καθ' ἃς αἱ πόλεις ἀπέχουσιν
= α· αἱ ὥραι ὅπου ὁ πρῶτος εἰς μίαν ἡμέραν περιπατεῖ
= β· αἱ ὥραι ὅπου ὁ δεύτερος = γ, ἄρα κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$6\chi + \gamma = \alpha$$

$$\chi(6 + \gamma) = \alpha$$

$$\text{καὶ } \chi = \frac{\alpha}{6 + \gamma}$$

Καὶ εἰς αὐτὸν τὸν τύπον λύονται πλεῖστα προβλήματα.

Π ρ ό β λ η μ α ΣΤ'.

Παῖδες δύο εἶχον μῆλα, καὶ εἷς ἐρώτησε τὸν ἕτερον
πόσα μῆλα ἔχει, ἐκεῖνος εἶπεν, εἰς σὺ μοι δώσης ἓνα, θέ-
λω ἔχῃ ἴσα μὲ τὰ ἐδικά σου, οὗτος ἀπεκρίθη εἰς σὺ μοι
δώσης ἓν, θέλω ἔχῃ διπλᾶ ἀπὸ τὰ ἐδικά σου.

Ζητεῖται πόσα μῆλα εἶχεν ἕκαστος;

Λύσις.

Ἄυτοῦ καὶ τὰ δύο ἄγνωστα εἶναι, πλὴν ἀπὸ τοὺς λό-
γους αὐτῶν· πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ἰσότητά· ἔχέτω ὁ
πρῶτος μῆλα χ, ἐπειδὴ ὁμοῦ ἐρρέθη εἰς αὐτὸς δώση ἓν,
ἔχει χ—1· ὁ ἕτερος θέλει ἔχῃ διπλᾶ, ἦτοι 2χ—2, ἄ-
ρα ὁ δεύτερος εἶχε πρότερον 2χ—2—1=2χ—3, εἰς
μονάδα ἀπὸ τοῦ 2χ—2 ἀφέλωμεν· ἐρρέθη πάλιν, εἰς αὐ-

τὸς δώσῃ ἐν ἐκείνῳ, ἐκεῖνος θέλει ἔχῃ ἴσα μὲ αὐτόν·

$$\begin{array}{r} \text{ἄρα ἐκεῖνος ἔχει} \quad \frac{\chi+1=2\chi-3-1}{1+1+3=2\chi-\chi} \text{κατὰ μετάθεσιν} \\ \hline 5=\chi \end{array}$$

καὶ 5 εἶχεν ὁ ἕνας, ἄρα ὁ ἕτερος $2\chi-3=2$. $5-3=2$,
καὶ ὁ ἕτερος 7. διότι $5+1=6$, καὶ $7+1=2$. 4

Τοῦτο δὲ γίνεται γενικώτερον, εἰάν ὁ εἰς εἴπῃ, δός
μοι μῆλα α , καὶ θέλω ἔχῃ ἴσα, καὶ ὁ ἕτερος δός μοι σὺ
 α μῆλα, καὶ θέλω ἔχῃ διπλᾶ· ἐχέτω ὁ εἰς χ μῆλα, ἄρα
δίδει α μῆλα, καὶ μένει αὐτῷ $\chi-\alpha$, ὁ ἕτερος λοιπὸν θέ-
λει ἔχῃ διπλᾶ $2\chi-2\alpha$, ἐπειδὴ ὁμῶς ἔλαβεν α · καὶ ἔχει
τόσα, πρότερον ἄρα εἶχεν $2\chi-2\alpha-\alpha=2\chi-3\alpha$. ἀλλ'
ὅταν οὗτος ἔδωκεν ἐν, α , ἐκεῖνος εἶχεν ἴσια, ἄρα
 $\chi+\alpha=2\chi-3\alpha-\alpha$ καὶ $5\alpha=\chi$ θῶμεν εἰς ἐκεῖνα ὅπου εἶ-
χεν ὁ ἄλλος $2\chi-3\alpha$ ἀντὶ χ τὰ ἴσα 5α · εἶχεν ἄρα καὶ ἐ-
κεῖνος $2\chi-3\alpha=2$. $5\alpha-3\alpha=10\alpha-3\alpha=7\alpha$.

Ὅθεν ὁ μὲν Α'. ἔχει πενταπλάσια, ὅτι ζητεῖ, καὶ ὁ
ἕτερος 7 πλάσια· δηλ: εἰάν ζητηθῇ μόνον 3, ὁ ἕνας ἔχει
5. $3=15$ καὶ ὁ ἕτερος 7. $3=21$ · διότι $15+3=21-3$
καὶ $2(15-3)=21+3$ · καὶ λύνονται οὕτω ποικιλαχῶς τὰ
προβλήματα,

Π ρ ό θ λ η μ α Ζ'.

Διαθήκη τινὸς πατρὸς διορίζει εἰς τέσσαρας υἱοὺς νὰ
μοιρασθῇ ἡ κληρονομία τοῦτον τὸν τρόπον· ὁ μὲν Α' νὰ
λάβῃ διπλᾶ ἀπὸ τὸν δεύτερον, πλὴν μόνου 100· ὁ δεύτε-
ρος τριπλάσια ἀπὸ τὸν τρίτον, πλὴν 200· καὶ ὁ τρίτος
τετραπλάσια ἀπὸ τὸν τέταρτον, πλὴν 300· ἤν δὲ καὶ ὅλη

ἡ κληρονομία 8600: γρόσια· ζητεῖται ἀπὸ πόσα παίρνει ἕκαστος υἱός ;

Κατασκευή.

Πρέπει πρῶτον ἐδῶ νὰ μάθωμεν τί παίρνει ὁ ἕσχατος, καὶ τοῦτο ὡς ἀγνώστου ἄς ᾔναι $=x$. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ τρίτος παίρνει τετραπλᾶ ἀπὸ αὐτὸν πλὴν 300, ὅρα τὸ μερίδιόν του εἶναι $=4x-300$. Ἐπειδὴ καὶ ὁ δεύτερος παίρνει τριπλάσια ἀπὸ τὸν τρίτον πλὴν 200, ἄρα τριπλασιάζομεν τὰ τοῦ τρίτου, καὶ ἀφαιροῦμεν 200, οὕτω

$3(4x-300)=12x-900-200=12x-1100$, καὶ τοῦτο τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ πρῶτος τος παίρνει διπλᾶ ἀπὸ τὸν δεύτερον πλὴν 100 ἄρα τὰ διπλᾶ αὐτοῦ $2(12x-1100)=24x-2200$ καὶ πλὴν 100, γίνονται $24x-2200-100=24x-2300$. ὅλα λοιπὸν τὰ μερίδια ἐμοῦ εἶναι ἴσα μὲ τὴν περιουσίαν· οἶον

$$x+4x-300+12x-1100+24x-2300=8600 \quad \text{εἰς τὸ ἄ:}$$

$$\begin{array}{r} 41x-3700=8600. \\ \hline 41x=8600+3700=12300 \end{array} \quad +3700$$

$$x = \frac{12300}{41} = 300$$

καὶ ὁ μὲν ἕσχατος λαμβάνει . . . $x=300$

$$\text{ὁ Γ' } 4x-300=1200-300=900$$

$$\text{ὁ Β' } 12x-1100=3600-1100=2500$$

$$\text{ὁ Α' } 24x-2300=7200-2300=4900$$

$$8600 = \text{τῇ κληρονομ.}$$

Π ρ ό θ λ η μ α Η'.

Ἐτέρα διαθήκη διορίζει εἰς χήραν καὶ δύο υἱοὺς καὶ

τρεις θυγατέρας, να λάβῃ ἡ μὲν χήρα διπλᾶ ἀπὸ ἑνα υἱοῦ, καὶ ἕκαστος υἱὸς διπλᾶ ἀπὸ μίαν θυγατέρα· ἡ δὲ κληρονομία ὅλη 11000.

Ζητεῖται: πόσα λαμβάνει ἡ μητέρα, καὶ πόσα ἕκαστος υἱὸς, καὶ πόσα ἑκάστη θυγάτηρ;

Κατασκευή.

Λέγομεν, ὅτι ἑκάστη θυγάτηρ λαμβάνει x γροσία, καὶ ἕκαστος υἱὸς· ἄρα τὰ διπλᾶ $= 2x$, καὶ ἡ μητέρα λαμβάνει τὰ διπλᾶ ἐνὸς υἱοῦ $= 4x$ · ἄρα οἱ μὲν δύο υἱοὶ θέλουν λάβῃ $= 4x$, αἱ τρεῖς θυγατέρες $= 3x$, καὶ ὅλα ὁμοῦ εἶναι ἡ κληρονομία.

Λύσις.

$$\begin{array}{l} \text{ἔστω} \quad 3x + 4x + 4x = 11000 \text{ εἰς τὸ ἀπλόν;} \\ \hline 11000 = 11x \\ \hline : 11 \\ \hline x = \frac{11000}{11} = 1000 \end{array}$$

ἄρα αἱ μὲν τρεῖς θυγατέρες λαμβάνουν $3x = 3000$

οἱ δύο υἱοὶ $4x = \dots 4000$

ἡ μήτηρ $4x = \dots 4000$

11000

Πρόβλημα Θ'.

Ἐν ἑτέρᾳ διαθήκῃ ὁ πατὴρ διανέμει τὴν περιουσίαν του εἰς τρεῖς υἱοὺς οὕτως, ὥστε ὁ μὲν πρῶτος να λάβῃ τὸ ἥμισυ τῆς περιουσίας του, πλὴν 1000 γροι· ὁ δεῦτερος να λάβῃ τὸ τριτημόριον τῆς περιουσίας του, πλὴν 800 γροι, καὶ ὁ τρίτος να λάβῃ τὸ τεταρτημόριον αὐτῆς, πλὴν 600 γροι.

Ζητεῖται, πόση εἶναι ὅλη ἡ κληρονομία, καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

Κ α τ α σ κ ε υ ῆ.

Ἡ περιουσία του ὡς ἄγνωστος, ἔσαι $=x$.

ὁ πρῶτος λοιπὸν λαμβάνει τὸ ἥμισυ, πλὴν 1000 ἥτοι $\frac{x}{2} - 1000$

ὁ δεύτερος τὸ τριτημόριον, πλὴν 800 ἥτοι $\frac{x}{3} - 800$

ὁ ἔσχατος τὸ τεταρτημόριον, πλὴν 600 ἥτοι $\frac{x}{4} - 600$

ὅλα ὁμοῦ εἶναι $=x$. δηλ. $\frac{x}{2} - 1000 + \frac{x}{3} - 800 + \frac{x}{4} - 600 = x$

$$\frac{2x - 4000 + \frac{4x}{3} - 3200 + x - 2400}{3} = 4x$$

$$\frac{6x - 12000 + 4x - 9600 + 3x - 7200}{3} = 12x \quad \text{εἰς τὸ ἀπλ.}$$

$$13x - 28800 = 12x \quad \text{κατὰ μετάθεσιν}$$

$$13x - 12x = 28800$$

$$\text{καὶ } x = 28800 = \text{ὅλη τῇ κληρονομίᾳ.}$$

$$\text{ἄρα ὁ πρῶτος } \frac{28800}{2} - 1000 = 13400$$

$$\text{ὁ δεύτερος } \frac{28800}{3} - 800 = 8800$$

$$\text{ὁ τρίτος } \frac{28800}{4} - 600 = 6600$$

$$\frac{28800}{1} = \text{ὅλη τῇ εὐρεθείσῃ κληρονομίᾳ.}$$

Π ρ ό θ λ η μ α Γ.

„Ένας ἔχων γρόσια τινὰ εἰς ἓν πουγγεῖον, εἶπεν εἰς ἕτερον, εἰὰν εὕρης πόσα γρόσια εὐρίσκονται εἰς αὐτὸ τὸ πουγγεῖον, σοὶ τὰ χαρίζω· διότι ἐὼν βάλλης εἰς αὐτὸ ἀκόμη τὸ ἡμῖν, ἀπὸ ὅσα ἔχει, θέλει εἶναι τόσα περισσότερα ἀπὸ τὰ 60, ὅσα τῶρα εἶναι ὀλιγώτερα ἀπὸ τὰ 65, αὐτὸς μᾶς ἐρωτᾷ πόσα εἶναι τὰ γρόσια εἰς τὸ πουγγεῖον.

Κ α τ α σ κ ε υ ῖ.

Λέγωμεν αὐτῷ χ · διότι $\chi + \frac{1}{2}\chi$ περισσότερα ἀπὸ τὰ

60. λοιπὸν εὗγαλε ἀπὸ $\chi + \frac{1}{2}\chi$ τὰ 60, καὶ μένει λείψανον

$\chi + \frac{1}{2}\chi - 60$, ἀλλ' ἐκεῖνος εἶπεν ὅτι τοῦτο τὸ λείψανον εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνα, ὅπου λείπουν ἀπὸ τὰ 65 ἕως εἰς τὰ τοῦ πουγγείου, τὸ χ · ἄρα ἄφελε καὶ τὸ χ ἀπὸ τὰ 65 οὕτως $65 - \chi$, καὶ τοῦτο τὸ λείψανον εἶναι μὲ τὸ ἄνω ἴσον· οὕτω

$$\begin{array}{r}
 \chi + \frac{1}{2}\chi - 60 = 65 - \chi \\
 \hline
 2\chi + \chi - 120 = 130 - 2\chi \quad \cdot 2 \\
 \hline
 3\chi \times 2\chi = 130 + 120 \\
 \hline
 5\chi = 250 \\
 \hline
 \chi = \frac{250}{5} = 50
 \end{array}$$

ἄρα 50 γρόσια ἦν εἰς τὸ πουγγεῖον.

Π ρ ό θ λ η μ α ΙΑ΄.

Διδάσκαλός τις ἔχων 32 μαθητὰς, διέτελε, τοὺς μὲν ἐπιμελεῖς εἰς ἓν μέρος, τοὺς δ' ἀμελεῖς εἰς ἕτερον· καὶ ἔλυπετο ὅτι οἱ ἀμελεῖς εὐρίσκοντο περισσότεροι· ἐρωτηθεὶς ὅμως πόσοι οἱ ἐπιμελεῖς καὶ πόσοι οἱ ἀμελεῖς, εἶπεν, εἰν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπιμελῶν διέλῃς διὰ τοῦ 6, καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀμελῶν μὲ 5, τὰ πηλίκα ὁμοῦ εἶναι =6.

Ζητεῖται πόσοι οἱ ἐπιμελεῖς, καὶ πόσοι οἱ ἀμελεῖς;

Ἐστω ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιμελῶν = χ · ἄρα τῶν ἄλλων

32— χ καὶ τὸ μὲν πηλίκον τῶν ἐπιμελῶν = $\frac{\chi}{6}$, τὸ δὲ τῶν

ἀμελῶν = $\frac{32-\chi}{5}$, καὶ τὰ δύο ὁμοῦ =6. οὕτω

$$\begin{array}{r} \frac{\chi}{6} + \frac{32-\chi}{5} = 6 \\ \hline \chi + \frac{32 \cdot 6 - 6\chi}{5} = 36 \\ \hline 5\chi + 32 \cdot 6 - 6\chi = 180 \\ 5\chi - 6\chi = 180 - 192 \\ \hline -\chi = -12 \\ +\chi = +12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 6 \\ \\ \cdot 5 \\ \text{κατὰ μετάθεσιν εἰς τὸ ἀπλόν} \\ \text{κατὰ μεταβολὴν τῶν σημείων} \end{array}$$

ἄρα 12 οἱ ἐπιμελεῖς, καὶ 20 οἱ ἀμελεῖς· διότι $\frac{12}{6} = 2$

καὶ $\frac{20}{5} = 4$ καὶ $4 + 2 = 6$.

Καὶ ταῦτα ἱκανὰ κατὰ τὸ παρὸν, πλείονα δὲ καὶ περιεργώτερα λύσομεν μετὰ τὰ κλάσματα· διότι εἰς πολλὰ

καὶ ἡ γνώσις τῶν κλασμάτων ἀπαιτεῖται, ὡς καὶ τὰ μετὰ δύο, τριῶν κτλ. ἀγνώστων ἀπαιτοῦσι προβλήματα.

Μ Ε Ρ Ο Σ Γ'.

Περὶ συγκεκριμένων Ἀριθμῶν.

§. 174. **Τ**ὶ μὲν συγκεκριμένος ἀριθμὸς, εἶπομεν ἐν τοῖς ὀπισθεν (§. 11.)· Ἐνταῦθα δὲ λέγομεν, ὅτι τὸ παρὸν μέρος δὲν διαλαμβάνει περὶ ὅλων τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν, ἀλλὰ μόνον περὶ ἐκείνων, ὅσοι εἰς μέρη ἴσα διαιροῦνται, καὶ τὰ μέρη ταῦτα λαμβάνουσιν ὀνομασίας διαφορῶν, ὡς ἡ ὀκτὼ εἰς λίτρας, καὶ δράμια· διαιροῦνται δὲ καὶ ὅλοι οἱ λοιποὶ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ, πλὴν τούτων τὰ μέρη εἶναι ἄνισα, ὡς τὸ παρὸν κονδυλίου κόπτεται εἰς μέρη ἄνισα, ἢ καὶ εἶναι ἴσα, δὲν διαλαμβάνουσιν ἰδιαίτερον ὄνομα, ὡς τὰ μέρη τοῦ λίθου, πάλιν λίθους καλοῦμεν. Ὅθεν εἰς τὸ παρὸν λέγομεν μόνον περὶ ἐκείνων τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν, ὅσοι εἰς μέρη ἴσα διαιροῦνται, καὶ ταῦτα ἔτι εἰς ἕτερα ἴσα, καὶ λαμβάνουσι τὰ μέρη ὀνομασίας διαφορῶν· καὶ ταῦτα εἶναι ἐκεῖνα τὰ ποσὰ ὅπου εἰς μέτρα λαμβάνονται, καὶ μετροῦσι δι' αὐτῶν ἢ τὴν βαρύτητα, ἢ τὸ διάστημα, ἢ τὴν κίνησιν, ἢ τὸ χωρητικόν, ἢ τὴν τιμὴν· ἐκάστου πράγματος, ὡς διὰ τῶν νομισμάτων γίνεται εἰς τὰ συναλλάγματα, ἢ τὸν χρόνον καὶ ἄλλα τινά. Ἐἰς αὐτὸ εὐρίσκομεν ἐντελῶς τὸ ὅλον νὰ διαιρῇται εἰς μέρη ἴσα, καὶ ἕκαστον μέρος νὰ γίνηται ὅλον, καὶ εἰς ἕτερα μέρη νὰ διαιρῇται, καὶ ἕκαστον τούτων πάλιν εἰς μέρη ἕτερα ὡς ὁ χρόνος εἰς μῆνας, καὶ ἕκαστος μῆν

εἰς ἐβδομάδας, καὶ ἐκάστη ἐβδομάς εἰς ἡμερονύκτια, καὶ ἕκαστον τούτων εἰς ὥρας κτ. Ἐμφιλοχωρεῖ δὲ μεταξὺ τούτων τάξις τις· διότι καλοῦνται μέρη ἀνωτέρας καὶ κατωτέρας τάξεως, ἢ εἶδη διαφόρων τάξεων· ἐπειδὴ ὅμως τὰ μέτρον εἶναι τεχνικόν, ἥτοι ἔργον ἀνθρώπων, καὶ ὄχι φυσικόν, διὰ τοῦτο καὶ ταῦτα τὰ μέτρα ποικίλα καὶ διάφορα κατὰ τὰ ἔθνη, κατὰ τὰς διοικήσεις, κατὰ τὰς ἐπαρχίας, καὶ πόλεις. Εὐχῆς ἔργον ἠθέλεν ἦναι, ἂν ἦτον τὰ αὐτὰ μέτρα εἰς ὅλους τοὺς ἀνθρώπους διὰ τὸ κοινωνικόν· διότι εἶναι τόσον ποικίλα καὶ διάφορα, ὥςτε ἀπαυδαῖ τις νὰ μάθῃ τὰ μέτρα ὅλων τῶν ἐθνῶν, καὶ τὰς διαφοροὺς σχέσεις, καὶ ἀναφορὰς πρὸς ἄλληλα· εἰς ἄλλο μέρος ὅμως θέλομεν συνάψῃ τοιαῦτα μέτρα διαφόρων ἐθνῶν, καὶ ἐκεῖ θέλομεν δείξῃ πῶς εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν ἐκάστου μέτρου, πρὸς τὴν τιμὴν ἐκείνων ὅπου ἀναχειράς ἔχομεν· διότι δὲν ἐμάθομεν ἀκόμη ἀναφορὰς, καὶ ἀναλογίας τῶν ἀριθμῶν· διὸ εἰς τὸ παρὸν μέρος μόνον μέτρα τινὰ συνειθισμένα ἀναφέρομεν, διὰ νὰ μάθωμεν πῶς εἰς αὐτὰ ἢ πρόσθεσις, ἀφαιρέσεις, πολλαπλασιασμός, καὶ διαίρεσις γίνεται.

§. 175. "Ὅτι τὰ μέτρα, καὶ μονόδας καλοῦσιν οἱ Μαθηματικοί, καὶ ἐν ἄλλοις εἴρηται (§. 12.)· εἰσὶν ὅμως μέτρα τινα σταθερά, ἀμετάβλητα εἰς τὰ ἔθνη καὶ εἰς τὰς διοικήσεις, καὶ ἕτερα πάλιν μεταβλητὰ εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἔθνος, καὶ εἰς μίαν διοίκησιν, ὡς τὸ φλωρίον, ἢ λίτρα, κτ. διότι εἰς ἡμᾶς ἐν ἄλλαις ἐπαρχίαις εἰς τέσσαρας λίτρας διαιρεῖται ἡ ὀκά, καὶ ἐν ἄλλαις εἰς τρεῖς· ἀμετάβλητος ὅμως ἡ ὀκά, τὸ γρόσι, ὁ παρᾶς κτ. "Ὅθεν καλοῦμεν μέτρα ἀμετάβλητα ἐκεῖνα, ὅπου ἔχουσιν αἰεὶ εἰς ἓν ἔθνος μέρη ἴσα κατὰ τὸ ποσόν, ὡς τὸ γρόσι αἰεὶ = 40 παρι

καὶ ἡ πῆχη, ἀγκαλὰ εἶναι μικροτέρα καὶ μεταλητέρα, εἶναι ὅμως πάντοτε 8 ρούπι· μεταβλητὰ δὲ, ὅσα κατὰ τόπους καὶ χρόνους εἰς τὸ αὐτὸ ἔθνος λαμβάνουσι καὶ μέρη διάφορα· ὡς ἐν φλωρίον ὅτε = 5 γρ. ὅτε = 6, καὶ ὅτε = 9 κτ. ἢ τὸ κοιλὸν εἰς ἕτερον τόπον = 20 ὀκάδες, εἰς ἄλλον = 40, καὶ εἰς ἄλλον ἀλλέως· διὸ καὶ εἰς τὸ παρὸν μέρος μόνον εἰς τὰ ἀμετάβλητα μέτρα θέλομεν κάμῃ τὰς ἐργασίας μας· ἀγκαλὰ εἰς τὰ μεταβλητὰ μέτρα συμβαίνει τὸ αὐτό· καὶ διὰ τοῦτο κατὰ τὸ παρὸν ὀλίγα μέτρα διορίζομεν, τὰ δὲ λοιπὰ εἰς ἄλλο μέρος διορισθήσονται. Καὶ τὰ μὲν βάρη τὰ ἡμέτερα εἶναι ὀκά, ἥτις διαιρεῖται εἰς 3, ἢ 4 λίτρας· ἡ λίτρα, ἢ τὸ ἐν τέταρτον τῆς ὀκάς εἰς ἑκατὸν δραχμάς· καὶ ἐκάστη δραχμὴ σχεδὸν εἰς 60 κόκκους σίτου· ἔθεν ἡ ὀκά εἶναι = 400 δραχμ· καὶ 44: ὀκάς ἀποτελοῦσιν ἐν καντάριον· Ὅθεν.

κοντ. ὀκάδ.	λίτρ.	δραχμ.	κοκ.
1=	44=	176=	17600= 1056000
	1=	4=	400= 24000
		1=	100= 6000
			1= 60

Βάρη δὲ τῶν φαρμακοποιῶν εἶναι ἡ λίτρα, οὐγγία, δραχμαί, σκρόπουλα, ἡ κεράτια, καὶ κόκκοι.

λίτρ.	οὐγγ.	δραχμ.	σδρο.	κοκ.
1=	8=	96=	288=	5760
	1=	12=	36=	720
		1=	3=	60
			1=	20

Τὰ δὲ μέτρα τοῦ διαστήματος, τὰ μὲν μέλλα καὶ βή-

ματα σχεδόν μεταβλητά. Σεράπως ἡ ὄρυια, ὁ πους, ὁ
δακτύλος, ἡ γρομμη, τα σκλητά κτ.

ὄρυ. τοδ. δακ. γρομμ. σκλη.

1 = 6 = 72 = 864 = 10368

1 = 12 = 144 = 1728

1 = 12 = 144

1 = 12

Τὰ δὲ νομισματα τὰ σερα καὶ μεταβλητά τα εἰδικά-
μας, εἶναι τὸ πούγγιον, ἐκατοστάριον, δίγροσσον, ἐξήντα-
ριον, γρόσσον, ζόβον, εἰκοστάριον, δεκάριον, πεντάριον,
παρῶς, καὶ ἄπρον· καὶ διαρροῦνται εἰς αὐτὰ τὰ μέρη.

π. ἑκατ. δίγρ. ἐξήντ. γροσ. ζόλ. εἰκοσ. δεκ. πεντ. παρ. ἄπρ.
1 = 200 = 250 = 333 $\frac{1}{3}$ = 500 = 666 $\frac{2}{3}$ = 1000 = 2000 = 4000 = 20000 = 60000

1 = 1 $\frac{1}{2}$ = 1 $\frac{1}{3}$ = 2 $\frac{1}{2}$ = 3 $\frac{1}{2}$ = 5 = 10 = 20 = 100 = 300

1 = 1 $\frac{1}{2}$ = 2 = 2 $\frac{1}{2}$ = 4 = 8 = 16 = 80 = 240

1 = 1 $\frac{1}{2}$ = 2 = 3 = 6 = 12 = 60 = 180

1 = 1 $\frac{1}{2}$ = 2 = 4 = 8 = 16 = 40 = 120

1 = 1 $\frac{1}{2}$ = 2 = 3 = 6 = 12 = 30 = 60

1 = 1 = 2 = 4 = 20 = 60

1 = 1 = 2 = 3 = 6 = 12 = 30 = 60

1 = 1 = 2 = 10 = 30

1 = 1 = 5 = 15

1 = 3

Τὰ δὲ μέτρα τοῦ χρόνου ἀρχοῦνται ἀπὸ τὰς ἐξῆς
ὧας, ἡμέρας, ὥρας ἡμερῶν, α', β', γ', κτ. ἡμέρας ἐννοοῦ-
σι τὸ ἡμερονοκτίον. "Οθεν

ἡμέρ. ἡμ. ὥρ. ἡμερ. α'. β'. γ'.

1 = 7 = 168 = 10080 = 604800 = 36288000 κτ.

1 = 24 = 1440 = 86400 = 5184000 κτ.

1 = 60 = 3600 = 216000 κτ.

1 = 60 = 3600 κτ.

1 = 60 κτ.

Μίλλια ξερεὰ εἶναι τὰ γεωγραφικά, καὶ ταῦτα συμφωνοῦσι μὲ τὰ Γερμανικὰ μίλλια, ἐν μίλλιον Γερμανικὸν $= 4000$ ὄργ: ἦτοι 10000 βήμι: διότι ἡ ὀργυιὰ εἰς $2\frac{1}{2}$ βήματα διαιρεῖται· τὸ δ' ἡμῖς μίλλιον τοῦτο γίνεται μιᾶς ὥρας διάστημα· καὶ αὐτὰ τὰ μέρη καὶ ὅλα ἔχει τὸ παρὸν μέρος ἀντικείμενον, καὶ μὲ αὐτὰ θέλωμεν κάμῃ καὶ ἡμεῖς τὰς ἐργασίας μας.

§. 176. Ἐἰς αὐτὰ ὅλα γίνεται φανερόν, ὅτι ὡς εἰς κλίμακα βαθμηδὸν ἀπὸ τὰ μεγαλήτερα εἰς τὰ κατώτερα καταβαίνομεν ἀπὸ βαθμὸν εἰς βαθμὸν, καὶ ἀπὸ τὰ κατώτερα εἰς τὰ ἀνώτερα· οὕτως ἀπὸ τὰς ἐβδομάδας καταβαίνομεν εἰς τὰς ἡμέρας, ἔπειτα εἰς τὰς ὥρας, καὶ εἶτα εἰς τὰ λεπτὰ καὶ καθεξῆς· ἀνάπαλιν ἀπὸ τὰ λεπτὰ εἰς τὰς ὥρας, εἶτα εἰς τὰς ἡμέρας καὶ ἐβδομάδας κτλ. Ὅθεν δύο ἐργασίας πρέπει νὰ παρατηρήσῃ ὁ πρωτόπειρος· πῶς μεταβάλλομεν τὴν ἀνωτέρω τάξιν εἰς τὴν ἐγγὺς κατωτέραν, καὶ πῶς τὴν κατωτέραν εἰς τὴν ἐγγὺς ἀνωτέραν, δηλ: πῶς ἡμποροῦμεν νὰ κόμωμεν καὶ τὰς ὥρας λεπτὰ, καὶ τὰς ὀργυιὰς πόδας· καὶ πῶς τὰ λεπτὰ ὥρας καὶ τοὺς πόδας ὀργυιὰς, κτ. τοῦτο δὲ γίνεται εὐκόλως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως· δηλ: εἰάν ζητῇται νὰ μεταβάλλωμεν μίαν ἀνωτέραν τάξιν εἰς κατωτέραν, χρήσιμος τότε ὁ πολλαπλασιασμός· εἰάν δὲ μίαν κατωτέραν εἰς ἀνωτέραν, ἢ διαίρεσις· δηλαδή ζητεῖται νὰ μεταβάλλωμεν 8 ἡμέρας εἰς ὥρας· λαμβάνομεν 8 εἰς ἓνα παράγοντα, καὶ ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω διαγράμματα λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὄρων, ὅπου ἀντικρίξει εἰς μίαν ἡμέραν εἰς ἕτερον παράγοντα $= 24$ · καὶ πολλαπλασιάζομεν $8 \cdot 24 = 192$ ὥρ: καὶ μεταβάλλομεν τὰς ἡμέρας εἰς ὥρας· εἰάν δὲ ἐπιταχθῶμεν 8 ἡμέρας

εἰς λεπτά νὰ μεταβάλλωμεν, βλέπομεν εἰς τὸ διάγραμμα ὅτι εἰς μίαν ἡμέραν ἀντικρίζει ὁ ἀριθμὸς τῶν λεπτῶν 10080, καὶ μὲ αὐτὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν 8 οὕτω·
 $8 \cdot 10080 = 80640$ λεπτ. καὶ μετεβλήθησαν αἱ 8 ἡμέραι εἰς λεπτά· εἰς 25 πούγγεϊα νὰ μεταβληθῶσιν εἰς γρόσια, βλέπομεν ὅτι εἰς ἓν πούγγεϊον ἀντικρίζει ὁ ἀριθμὸς 500 γρόσια· ἄρα $500 \times 24 = 12500$ γρόσια· καὶ οὕτω μεταβάλλονται ὅλαι αἱ ἀνωτέραι τάξεις εἰς τὰς κατωτέρας· καὶ τοῦτο οἱ μαθηματικοὶ καλοῦσι, νὰ κάμωμεν ὅλα μιᾶς φύσεως, Ἀνάπαλιν· εἰς 500 γρόσια ἀριθμοὶ κατωτέρας τάξεως, καὶ ζητηθῇ νὰ γένωσιν ἀνωτέρας τάξεως, λαμβάνομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς διαιρέτεον, καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτῆς τῆς τάξεως, ὅπου ἀντικρίζει εἰς τὴν μονάδα τῆς ζητουμένης τάξεως, εἰς διαιρέτην, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ἡ τάξις ἡ ἀνωτέρα· δηλ. δίδονται 5600 δραχμαί, καὶ ζητεῖται νὰ γένωσιν ὀκάδες· βλέπομεν εἰς τὴν μίαν ὁκτὸν ὅτι ἀντικρίζει 400 δραχμῶν· λοιπὸν $\frac{5600}{400} = 14$.

Δίδονται ἔτι 46530 παρόδες, καὶ ζητεῖται πόσα γρόσια κάμνουν· βλέπομεν πάλιν εἰς τὴν μονάδα γρόσι· ὅτι ἀντι-

κρίζει 40 παράδ. ἄρα $\frac{46530}{40} = 1163 \frac{10}{40}$ γρόσι. κτλ. καὶ

οὕτω διὰ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνονται αἱ τάξεις μιᾶς φύσεως, διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως μεταβαίνουν εἰς ἀνωτέρας τάξεις, καὶ πρέπει καλῶς νὰ παρατηρηθῶσι τὰ λεγόμενα.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Α΄.

Περὶ προσθέσεως τῶν συγκεκριμένων
ἀριθμῶν.

§. 177. Ἀνωτέρω (§. 32.) ἐμνήσθημεν, ὅτι ἡ πρόσθεσις γίνεται εἰς ὁμωνύμους ἀριθμούς· ἐπειδὴ ὁμῶς δίδονται καὶ ἑτερώνυμοι (§. 33.), διὰ τοῦτο πρέπει τοὺς ἑτερώνυμους νὰ τοὺς κάμνωμεν ὁμωνύμους, ἥτοι τῆς αὐτῆς φύσεως (§. 176.), καὶ οὕτω νὰ τοὺς συνάπτωμεν.

ἤμ. ὥρ. λεπτ.
Ἔξω ὅτι ἐδόθησαν οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ 7, 13, 72, καὶ ἤμ. ὥρ. λεπτ.

8, 51, 43, καὶ νὰ τοὺς συνάψωμεν· ὅθεν γενέσθωσαν καὶ αἱ ἡμέραι καὶ ὥραι εἰς λεπτὰ, εἰς τὴν ἐλαχίστην τάξιν καὶ τοῦ ἐνὸς ἀριθμοῦ, καὶ τοῦ ἑτέρου, οὕτω ἀφῆρες τὰς ἀνωτέρω εἰς τὴν ἐξῆς κατωτέραν τάξιν, καὶ εἰς αὐτὰ πρόσθεσις καὶ τὴν δοθεῖσαν κατωτέραν τάξιν· δηλ. 7. 24=168+12=181 ὥρ. ἔπειτα τοῦτον κάμετον λεπτὰ, καὶ πρόσθεσις καὶ τὰ δοθέντα λεπτὰ 181. 60=10860, καὶ

ἤμ. ὥρ. λεπτ.
55=10912 λεπτὰ = 7, 13, 52· οὕτω γενέσθω καὶ ὁ ἕτερος ἀριθμὸς 8. 24=192 καὶ 11=203 ὥρ. καὶ 203. 60=12180, καὶ 43=12223 λεπτὰ· ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ δύο ἔγιναν μιᾶς φύσεως, συναψον αὐτοὺς κατὰ πρόσθεσιν 10912+12223=23135 λεπτ.

ἔπειτα γενέσθωσαν καὶ ταῦτα ὥραι (αὐτόθι) $\frac{29135}{60}$ = 385 ὥρ. λεπτὰ 35 γενέ-

σθώσαν καὶ αἱ ὥραι ἡμέραι $\frac{385}{24} = 16, 1$ ὥρ. λοιπὸν

ἡμ. ὥρ. λεπτ. ἡμ. ὥρ. λεπτ. ἡμ. ὥρ. λεπτ.
 $(7, 13, 43) + (8, 11, 43) = 16, 1 \cdot 35.$

§. 178. Ἐπειδὴ δὲ οὗτος ὁ τρόπος εἶναι διεξοδικὸς καὶ κοπιαστικὸς διὰ τὰς πολλὰς ἐργασίας, ἐφευρον τὸν ἐξῆς τρόπον εὐμαρέσερον (μετὰ δὲ τὰ κλάσματα, ἐροῦμεν ἑτέρου συντομώμερον), καὶ οὗτος εἰς τὰ ἐξῆς συνίσταται.

Α'. Γράφονται οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ πρὸς τὰ κάτω κατὰ τὰς τάξιν, ὥς εἰς μίαν στήλην νὰ εὐρίσκωνται οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν ἐλέγουμεν, καὶ εἰς τὰ παραδείγματα φαίνεται· καὶ ὄγεται ἡ γραμμὴ.

$$\begin{array}{r} \text{ἡμ. ὥρ. λεπτ.} \\ 7, \quad 13, \quad 52. \quad \text{Α'.} \\ 8, \quad 11, \quad 43. \\ \hline 16, \quad 1: \quad 35 \end{array}$$

Β'. Συνάπτομεν πρῶτον τὴν ἐσχάτην τάξιν· καὶ ὅταν ὑπερτερῇ τὸν 60, τραβοῦμεν μίαν γραμμὴν εἰς τὰ δεξιὰ, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα φαίνεται, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ γράφομεν, ὅπου εἶναι περισσότερα ἀπὸ τὸν 60, ὡς αὐτοῦ $52 + 43 = 95$, καὶ $95 - 60 = 35$ · καὶ ἡ γραμμὴ αὕτη σημαίνει ὅτι μόνον μία μονὰς εὐρίσκεται εἰς αὐτὸ τῆς ἀνωτέρας τάξεως· ἐὰν δὲ δύο εὐρίσκωνται, δύο γραμμάς τραβοῦμεν· κτλ.

Γ'. Ὅσας γραμμάς τραβοῦμεν, τόσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὴν ἐξῆς ἀνωτέραν τάξιν, καὶ συνάπτομεν· καὶ ἐὰν εἰς τὸ κεφάλαιον εὐρίσκεται μία μονὰς τῆς ἀνωτέρας τάξεως, τραβοῦμεν μίαν γραμμὴν· ἐὰν δὲ δύο, δύο κτ. καὶ τὸ μένον πάλιν γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὡς $1 + 11 + 13 = 25$, καὶ $24 - 24 = 1$.

Δ'. Ὅσας γραμμὰς ἔχομεν αὐτοῦ, τόσας μονάδας προσθέτομεν εἰς τὴν ἐγγὺς ἀνωτέραν κλάσιν, καὶ συνάπτομεν καὶ αὐτὴν, ὡς $1+8+7=16$, καὶ οὕτω μέχρι τέλους προσθέτομεν.

ιβδ. ἡμ.	ἀρ.	γρ. παρὰδ. ἄσπ.
7, 6, 20, 59	}	15, 35, 2
4, 18, 43		160, 22, 1
5, 17, ,		5, 3, 1
, , 9, 54		16, 32, 2
1, 3, 12, 32	) 198, 14, 0	

11, 0, 7, 8

ὀργ. ποδ.	δακ. γραμ.	ὀκ. λίτ.	δρ.	κοκ.
5, 4, 4, 9	}	5, 3, 52, 40		
5, 6, 5		116, 1, 74, 52		
4, 11, 8		2, 10, 40		
2, 0, 7, 6		5, 5, 95, 58		

9, 3, 8, 4

129, 1, 34, 10

Ε'. Τὸ γεγραμμένον ὑπὸ τὴν γραμμὴν εἶναι τὸ κεφάλαιον. Εἰς τὸ Β'. παράδειγμα εἰς μὲν τὰ λεπτὰ 3 ὥραι εὐρέθησαν· ὅθεν καὶ 3 γραμμὰς ἐτραβίζαμεν· εἰς δὲ τὰς ὥρας 3 ἡμέραι, καὶ 3: γραμμαί· εἰς δὲ τὰς ἡμέρας, τρεῖς ἐβδομάδες, καὶ οὐδὲ μία ἡμέρα· ὅθεν μηδενικὸν μετὰ τὰς τρεῖς γραμμὰς ἐγράψαμεν κτλ. Τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὸ Γ'. μὲ γρόσ· παρδ. καὶ ἔσπρα παρατηροῦνται. Καὶ ἔτι εἰς τὸ τέταρτον καὶ Ε'. δηλ: συνάπτομεν πρῶτον τὴν ἐσχάτην κλάσιν, καὶ θεωροῦμεν, πόσα εὐρίσκομεν ὅλα εἰς αὐτὰ τῆς ἐξῆς ἀνωτέρω κλάσεως, καὶ τὰ μὲν λοιπὰ, εἰ μένουσι, γράφομεν· εἰ δὲ μείνη μηδενικὸν, μηδενικὸν γράφομεν· τὰ δ' ὅλα, ὅπου εἰς αὐτὰ εὐρίσκομεν, τὰ προσθέτομεν εἰς τὴν ἐξῆς κλάσιν, καὶ πάλιν ἐξακολουθοῦμεν καὶ αὐτοῦ τὰ αὐτά.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Β'.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν συγκεκριμένων
ἀριθμῶν.

§. 179. Ἡ ἀφαίρεσις γίνεται εἰς ὁμωνύμους καὶ αὐτὴν, ὡς καὶ ἡ ἀντίθετος αὐτῇ πρόσθεσις· λοιπὸν ἐὰν δοθῶσιν ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι μὲ διάφορα μέρη ἑτέρας ὀνομασίας, φέρομεν ὅλα τὰ ἀνωτέρω εἰς μίαν φύσιν μὲ τὴν κλάσιν τῆς ἐσχάτης τάξεως τόσον τοῦ μειωτέου, ὅσον καὶ τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ ἀφ' οὗ γένουν ταῦτα μιᾶς φύσεως, τὸν ἀφαιρούμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἀφαιρέσεως, καὶ τὸ λελήανον τὸ μεταβάλλομεν εἰς κλάσεις ἀνωτέρας, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν ἐλέγομεν (§. 177.).

ὀργ. ποδ. δακ. γραμ.

δόσθω ὁ μειωτέος 5, 4, 4, 9, καὶ ἀφαιρετέος ποδ. δακ. γρ.

5, 6, 5, καὶ ζητεῖται νὰ ἀφέλωμεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἐκεῖνον· λοιπὸν φέρομεν ὅλας τὰς ἀνωτέρω κλάσεις τοῦ μειωτέου εἰς τὴν ἐσχάτην, εἰς τὰς γραμμάς, οὕτω $5. 6 = 30$ καὶ $4 = 34$, ἥτοι γίνονται αἱ ὀργυαὶ πόδες, καὶ προσθέτονται καὶ οἱ δοθέντες πόδες· καὶ πόλιν οἱ πόδες κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἰς δακτύλους $34. 12 = 408$ καὶ $4 = 412$ δάκτυλοι· οὕτω δὲ οἱ δάκτυλοι εἰς γραμμάς μεταβληθῆτωσαν $412. 12 = 7944$ καὶ $9 = 4953$ γραμ.

Ἄς γένῃ καὶ ὁ ἀφαιρετέος γραμμαί, οὕτω $5. 12 = 60$ καὶ $6 = 66$ καὶ $66. 12 = 797$ · καὶ εἶναι ὁ ἀφαιρετέος ὀργ. πόδ. γρ.

5, 6, 5 = 797 γραμ. ἐπειδὴ τῶρα καὶ ὁ μειωτέος

ὁμοειδείς καὶ ὁ ἀφαιρετέος, ἀφαρεῖται ὁ ἀφαιρετέος ἀπὸ
 τοῦ μειωτέου 4953—797=4156 γραμ. τοῦτο δὲ τὸ λεί-
 ψανον ἀπὸ γραμμῶν τὸ μεταβάλλομεν εἰς δακτύλους, διαι-

ροῦντες αὐτὸ μὲ 12. (φ. 175.) $\frac{4156 \text{ δακτ. γρα.}}{12} = 346$, 4, καὶ ἔτι

τοὺς δακτύλους διαιροῦντες μὲ 12, ποιούμεν αὐτοὺς πόδας
 $\frac{346 \text{ ποδ. δακ.}}{12} = 28$, 4, ποιούμεν καὶ τοὺς πόδας ὀργυίας $\frac{29 \text{ ὀρ. ποδ.}}{6} = 4$, 5·

ὅθεν εὐρίσκεται τὸ λείψανον 4, 4, 10, 4, ἥτοι
 ὀρ. ποδ. δακτ. γραμ. ποδ. δακτ. γραμ. ὀργ. ποδ. δακτ. γραμ.
 (5, 4, 4, 9) — (5, 6, 5) = 4, 4, 10, 4·
 καὶ τοῦτον τὸν τρόπον ἔλοι οἱ συγκεκριμένοι ἀφαιροῦνται
 ἀριθμοὶ, πλην αὕτη ἡ μέθοδος ἐργώδης καὶ κοπιασικὴ· διὸ
 καὶ τὴν ἀκόλουθον μεταχειρίζομεθα· γράφομεν ὅμως καὶ
 αὐτάς· διότι καὶ ἡ χρῆσις αὐτῶν εἰς ἄλλα εἶναι ἀναγκαία,
 καὶ μάλιστα διὰ τὰ ἡμπορώμεν τὰς βίβλους τῶν μαθηματι-
 κῶν τὰ ἀναγινώσκωμεν· μετὰ δὲ τὰ κλάσματα θέλομεν εὑ-
 ρῆ ἔτι συντομωτέρας μεθόδους εἰς αὐτάς.

Σημείωσαι ὅτι εἰς τὰς ὀργυίας οἱ μαθηματικοὶ γράφου-

σιν ἐπάνω μόνον μηδενικὸν σημεῖον $\overset{0}{5}\overset{0}{5}$, 6, καὶ σημαίνει
 ὀργυίας· εἰς τοὺς πόδας ὅμως μόνον μίαν κεραίαν, ὡς

$\overset{I}{4}$, $\overset{I}{17}$, καὶ σημαίνει πόδας· εἰς τοὺς δακτύλους δύο κε-

ραίας, ὡς $\overset{II}{11}$, ἢ $\overset{II}{7}$, καὶ σημαίνει δακτύλους· εἰς τὰς γραμ-

μὰς τρεῖς, οὕτω $\overset{III}{11}$, ἢ $\overset{III}{7}$, καὶ σημαίνει γραμμάς· εἰς

τὰ σημεῖα τέσσαρας $\overset{IIII}{7}$, ἢ τὸ Λατινικὸν $\overset{IV}{5}$ · ὅθεν

ἱρ. ποδ. δα. γρ. σημ. 0 I II III IV
 αὐτὸ 5, 7, 8, 9, 5 γράφεται οὕτω 5, 7, 8, 9, 5·
 ὁμοίως καὶ εἰς τὰ μέρη τοῦ χρόνου τὴν μὲν ἡμέραν χαρα-
 κτηρίζουσι μὲ τὸ ἡμ., τὰ ἐξῆς δὲ, ὡς εἰς τὰ ἀνωτέρω·
 ἡμ. ἱρ. λ. α' λ. β' λ. γ' λ. δ'
 ὁθεν ἀντὶ τοῦ 8, 11, 43, 32, 56, 2, κτλ.
 ἡμ. I II III IV V
 γράφουσιν οὕτω 8, 11, 43, 32, 56, 2. κτλ.

§. 180. Ἡ εὐκολωτέρα ἐργασία εἶναι ἡ ἐξῆς

$$\begin{array}{r}
 0 \quad I \quad II \quad III \\
 5, 4, 11, 6 \quad A'. \\
 2, 5, 6, 7 \\
 \hline
 0 \quad I \quad II \quad III \\
 2, 5, 4, 11
 \end{array}$$

A'. Γράψον τὸν μειωτέον ἄνω, καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸν ἀ-
 φαιρετέον οὕτως, ὥστε νὰ ᾔῃται ἡ ἐλαχίστη τάξις τοῦ ἀφαι-
 ρετέου ὑπὸ τὴν ἐλαχίστην τοῦ μειωτέου, δηλ: ἡ ὁμοειδὴς
 τάξις τοῦ ἀφαιρετέου μὲ τὴν ὁμοειδῆ τοῦ μειωτέου, ὡς
 εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται, καὶ ἀχθήτω ἡ γραμμὴ.

B'. Ἀρξαι νὰ ἀφέλῃς τὴν ἐλαχίστην τάξιν τοῦ ἀφαιρε-
 τέου ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης τάξεως τοῦ μειωτέου· εἰάν δὲ ὁ
 ἀφαιρετέος μείζων τοῦ μειωτέου, λάβε μίαν μονάδα τῆς
 ἐγγύς τάξεως τῆς μείζονος τοῦ μειωτέου, καὶ ἀνάλυσον
 αὐτὴν εἰς τὰ μέρη, καὶ πρόσθεε καὶ τὸν ἀφαιρετέον ὁμοῦ,
 καὶ τότε ἄφελε τὸν ἀφαιρετέον ἀπὸ τὸν μειωτέον, καὶ τὸ
 λείψανον γράψον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, ὡς τὸ α'. παράδειγμα

$$\begin{array}{r}
 III \quad III \quad III \\
 \text{ὁ } 7 \text{ μείζων τοῦ } 6 \cdot \text{ ὁθεν μία μονὰς ἐγγύς ἀνωτέρα} = 12
 \end{array}$$

$III \quad III \quad III \quad III$
 καὶ $6 = 18$ · λοιπὸν $18 - 7 = 11$, καὶ γράφεται ὑπὸ τὴν
 γραμμὴν.

Γ'. Τὰ αὐτὰ γίνονται καὶ εἰς τὴν ἐξῆς τάξιν, πλὴν ἐπειδὴ ἐπρόσθεσες μίαν μονάδα ὀνωτέρας τάξεως εἰς τὸν μειωτέον, εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν τοῦ ἀφαιρετέου πρόσθετες ὁμοίως μίαν μονάδα (§. 58.)· ὅθεν ἀντὶ $\overset{\text{II}}{6}$ λέγομεν, $\overset{\text{II}}{7}$, καὶ ἀφαιροῦμεν καὶ αὐτοῦ, ὡς ἄνω $\overset{\text{II}}{11} - \overset{\text{II}}{7} = \overset{\text{II}}{4}$ · καὶ γράφεται.

Δ'. Τὰ αὐτὰ ποιεῖ καὶ εἰς τὰς ἐξῆς τάξεις μέχρι τῆς μεγίστης τάξεως, ὡς $\overset{\text{I}}{6} + \overset{\text{I}}{4} = \overset{\text{I}}{10}$ · ἄρα $\overset{\text{I}}{10} - \overset{\text{I}}{5} = \overset{\text{I}}{5}$, καὶ γράφεται· ἔπειτα κατὰ τὸ Γ'. $\overset{\text{O}}{5} - \overset{\text{O}}{3} = \overset{\text{O}}{2}$, καὶ γράφεται καὶ οὕτω $(\overset{\text{O}}{5}, \overset{\text{O}}{4}, \overset{\text{I}}{11}, \overset{\text{I}}{6}) - (\overset{\text{I}}{2}, \overset{\text{I}}{5}, \overset{\text{I}}{6}, \overset{\text{I}}{7}) = \overset{\text{I}}{2}, \overset{\text{I}}{5}, \overset{\text{I}}{4}, \overset{\text{I}}{11}$.

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς τὸ ἡμ. $\overset{\text{O}}{0} \overset{\text{I}}{1} \overset{\text{II}}{11}$
 $\overset{\text{II}}{7}, \overset{\text{II}}{18}, \overset{\text{II}}{52}, \overset{\text{II}}{17}$ Β'.
 β'. παράδειγμα· ἐπειδὴ $\overset{\text{II}}{30} > \overset{\text{II}}{17}$, $\overset{\text{II}}{4}, \overset{\text{II}}{19}, \overset{\text{II}}{32}, \overset{\text{II}}{30}$
 λαμβάνομεν τὴν ἐξῆς ἀνωτέρω ἡμ. $\overset{\text{O}}{0} \overset{\text{I}}{1} \overset{\text{II}}{11}$
 $\overset{\text{II}}{2}, \overset{\text{II}}{23} \overset{\text{II}}{19} \overset{\text{II}}{47}$
 μονάδα $\overset{\text{II}}{1} = \overset{\text{II}}{60}$ καὶ $\overset{\text{II}}{17} = \overset{\text{II}}{77}$ · ὅ·

$\overset{\text{II}}{77} - \overset{\text{II}}{30} = \overset{\text{II}}{47}$ καὶ ἐγράφη· εἴτα $\overset{\text{I}}{52} - \overset{\text{I}}{33} = \overset{\text{I}}{19}$ καὶ ἐγράφη· εἴτα $\overset{\text{O}}{1} = \overset{\text{O}}{24}$ καὶ $\overset{\text{O}}{18} = \overset{\text{O}}{42} - \overset{\text{O}}{19} = \overset{\text{O}}{23}$ καὶ ἐγράφη·
 ἡμ. ἡμ. ἡμ.
 καὶ τέλος $\overset{\text{I}}{7} - \overset{\text{I}}{5} = \overset{\text{I}}{2}$ καὶ ἐγράφη· τὸ δὲ λείψανον εἶναι
 ἡμ. $\overset{\text{O}}{0} \overset{\text{I}}{1} \overset{\text{II}}{11}$
 $\overset{\text{II}}{2}, \overset{\text{II}}{23}, \overset{\text{II}}{19}, \overset{\text{II}}{47}$.

Ἐὰν δὲ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, ἢ μέτρα τοῦ χρόνου καὶ τοῦ διαστήματος ἑλλείπη μία τάξις, σημειοῦται ἡ τάξις μηδενικῶς, ὡς εἰς τὸ τρίτον καὶ τέταρτον παράδειγμα φαίνεται.

Γ'.			
ο	ι	ιι	ιιι
7,	2,	00,	3
1,	5,	6,	00
ο	ι	ιι	ιιι
5,	2,	6,	3

Δ'.			
ο	ι	ιι	ιιι
14,	7,	6,	42
10,	00,	40,	7
ήμ.	ο	ι	ιι
4,	6,	26,	35

Εἰς μὲν τὸ γ'. ἑλλείπουσιν οἱ δάκτυλοι εἰς τὸν μειωτέον, καὶ αἱ γραμμαὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον· εἰς δὲ τὸ Δ', ἑλλείπουσιν οἱ πόδες εἰς τὸν ἀφαιρετέον· τὰ δὲ λοιπὰ ἀφηρέθησαν ὡς πρότερον.

Τὰ αὐτὰ ἔγιναν καὶ εἰς τὰς μονάδας τῶν νομισμάτων εἰς τὸ Ε'. παράδειγμα· καὶ εἰς τὰς μονάδας τῆς βαρύτητος εἰς τὸ ΣΤ'. παράδειγμα· εἰς ἄλλο μέρος ὅμως θέλομεν εἰπῆ περισσότερα.

Ε'.	
γ.	π.
17,	3, 0
2,	32, 2
14,	10, 1

ΣΤ'.		
ιι	λ.	δ.
7,	1,	4
2,	3,	64
4,	1,	40

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Γ'.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν.

§. 181. **Ε**ἰπομεν (§. 71.) ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός ἐστὶν ἡ εὐρωμεν τὸ πολλαπλάσιον ἐνὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ὅθεν εἰν δόθῃ ἀριθμὸς συγκεκριμένος μὲ διαφόρους μονάδας κατωτέρων τάξεων, καὶ ζητῆται τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τότε Α'. γράφομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν,

κατὰ τὰς τάξεις, ὅπου ἔχει, ὡς γρ. π. ἄσπ. εἰς πολλαπλασιασέον, καὶ ὑπ' αὐτὸν γράφομεν τὸν ἀριθμὸν, ὅπου ἐπιταχθῶμεν νὰ κόμωμεν αὐτὸν πολλαπλάσιον, ὡς αὐτοῦ τὸν 7, καὶ ἄγεται ἡ γραμμὴ.

$$\begin{array}{r} \gamma. \quad \pi. \quad \acute{\alpha}\sigma\pi. \\ 5, \quad 32, \quad 2 \quad \text{Α'.} \\ \hline 7 \\ \hline 35, \quad 224, \quad 14 \\ \hline 40, \quad 28, \quad 2 \end{array}$$

Β'. Διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ πολλαπλασιάζομεν α'. τὴν ἐσχάτην τάξιν, ὡς αὐτοῦ 2. $7=14$, καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν· εἰτα καὶ τὴν ἐγγὺς ἀνωτέραν τάξιν ὁμοίως μέχρι τῆς ἀνωτάτης τάξεως, οὕτω 7. $32=224$ · καὶ ἔτι 5. $7=35$.

Γ'. Εἰς τὸ παραγόμενον βλέπομεν α'. εἰς τὴν ἐσχάτην τάξιν πόσαι μονάδες τῆς ἀνωτέρας τάξεως εὐρίσκονται

(§. 175.), οὕτω $\frac{14 \text{ παρδ. } \acute{\alpha}\sigma\pi.}{3}=4$ καὶ 2· τραβοῦμεν ἑτέραν γραμμὴν, καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν τάξιν μόνον ἐκεῖνα, ὅπου μένουσιν, ὡς ἐδῶ τὰ 2· καὶ αἱ μονάδες τῆς ἀνωτέρας τάξεως προσθέτονται εἰς τὴν ἐξῆς τάξιν τὴν ὁμοειδῆ, καὶ ἐρευνοῦμεν καὶ αὐτοῦ, πόσαι μονάδες τῆς ἐξῆς τάξεως

εὐρίσκονται, ὡς πρότερον, οὕτω $224 \overset{\pi.}{+} 4 = 228$ · λοιπὸν $\frac{228 \text{ γ.}}{40} = 5$, καὶ 28 πάλιν γράφομεν ὑποκάτω τὰ μένοντα 28,

καὶ 5 προσθέτομεν εἰς τὴν ἀνωτέραν τάξιν, οὕτω $34 \overset{\pi.}{+} 5 = 40$ · καὶ γράφομεν 40, καὶ οὕτως εὐρίσκομεν τὸ πολλαπλάσιον

(5, 32, 2). $7 = \begin{array}{c} \gamma. \quad \pi. \quad \acute{\alpha}\sigma\pi. \\ 5, \quad 32, \quad 2 \end{array}$ $\begin{array}{c} \gamma. \quad \pi. \quad \acute{\alpha}. \\ 40, \quad 28, \quad 2 \end{array}$, οὕτω πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ β'. παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἐτέθη μηδέ-

δενικόν εἰς τὸν τόπον τῶν α'. λεπτῶν, ἵνα μὴ μείνῃ
κενός.

$$\begin{array}{r} \text{ἡμ. } 0 \quad \text{I} \quad \text{II} \\ 7, 5, 00, 32 \quad \text{B'}. \\ 9 \\ \hline 63, 45, 00, 288 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad \text{I} \quad \text{II} \\ 64, 21, 4, 48 \end{array}$$

Ἐπολλαπλασιάσθησαν λοιπὸν ὅλαι αἱ τάξεις τοῦ πολλα-
πλασιασέου μετὰ τὸν πολλαπλασιασθῆν 9. καὶ ἔπειτα εἰς τὰ

^{II}
288 εὐρέθησαν 4 λεπτά α', καὶ ἐγράφησαν εἰς τὸν κενὸν
τόπον τῶν 00, εὐρέθη δὲ καὶ μία μονὰς εἰς τὰς ὥρας ^{ᾠρ.} 45,
καὶ προσετέθη εἰς τὰς ἡμέρας, καὶ εὕρηται τὸ παραγόμενον

$$\begin{array}{r} \text{ἡμ. } 0 \quad \text{I} \quad \text{II} \quad \text{ἡμ. } 0' \quad \text{I} \quad \text{II} \\ (7, 5, 00, 32)9 = 64, 21, 4, 48. \end{array}$$

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ εἰς ἕτερα, ὅσα ἔχουσι τὸν ἕνα
παράγοντα μονοειδῆ· εἰ δὲ καὶ οἱ δύο παράγοντες ἑτε-
ροειδεῖς, τοῦτον τὸν τρόπον δὲν ἡμποροῦμεν νὰ πολλα-
πλασιάσωμεν, εἰμὴ ὅταν καὶ τὰ κλάσματα διδαχθῶμεν ἐπὶ
ἀκριβές.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Δ'.

Περὶ διαιρέσεως τῶν συγκεκριμένων
ἀριθμῶν.

§. 182. **Η** διαιρέσεις εἶναι νὰ εὕρωμεν μεταξὺ
δύο δοθέντων ἀριθμῶν, πόσαις φθοαῖς ὁ ἕνας εἰς τὸν μεί-
ζονα περιέχεται (§. 88.). Ἐὰν λοιπὸν δοθῇ ὁ διαιρετέος

μὲ ἑτεροειδῆς μονάδας, καὶ ὁ διαιρέτης μονοειδῆς, γίνεται ἡ διαίρεσις.

Α'. Γράφομεν τὸν διαιρέτην καὶ διαιρετέον, ὡς εἰς τοὺς ὁριθμοὺς ἐμάθομεν, καὶ εἰς τὸ παράδειγμα φαίνεται

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} \gamma. & \pi. & \alpha. \end{array} \\
 6 \mid \begin{array}{ccc} \gamma. & \pi. & \alpha. \end{array} 56, 33, 2 \mid \begin{array}{ccc} \gamma. & \pi. & \alpha. \end{array} 9, 18, 2\frac{5}{6} \\
 \underline{54} \\
 2=80 \text{ καὶ } 33= \\
 \underline{113} \\
 6 \\
 \underline{53} \\
 48 \\
 \underline{5=15 \text{ καὶ } 2=} \\
 \underline{17} \\
 12 \\
 \underline{5}
 \end{array}$$

Β'. Ὅτω διαιροῦμεν μὲ τὸν διαιρέτην 6 πρῶτον τὴν μελῶνα τάξιν, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον καὶ τὸ μένον, ὡς ἐδῶ τὰ δύο μεταβάλλονται εἰς τὴν ἐξῆς ἐλάττωνα μονάδα, καὶ προσθέτομεν καὶ τὰς εὐρισκομένας, ὡς $80+33=113$ · καὶ πάλιν τοῦτον διὰ τοῦ 6 διαιροῦμεν, καὶ τὸ μένον μεταβάλλεται εἰς τὴν ἐξῆς τάξιν, καὶ προσθίτεται καὶ ἡ δοθεῖσα ὁμοῦ, καὶ πάλιν διαιρεῖται· ὅθεν

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} \gamma. & \pi. & \alpha. \end{array} \\
 (56, 32, 2): 6, \text{ εὕρηται πηλίκον } \begin{array}{ccc} \gamma. & \pi. & \alpha. \end{array} 9, 18, 2\frac{5}{6}
 \end{array}$$

"Ορα καὶ
 εἰς τὸ δεύ-
 τερον πα-
 ράδειγμα,
 ἔνθα ὁ 12
 διείλε τὸν

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \text{ἡμ.} \quad 0 \quad 1 \quad 11 \quad 6 \\ 12 \mid 7, 18, 52, 18 \mid 15, 34, 21 \end{array} \\
 \hline
 27 \\
 168 + 18 = 186 \\
 \hline
 180 \\
 \hline
 6 \\
 60 \\
 \hline
 \end{array}$$

ἡμ. 0 1 11
 7, 10, 52, 18 καὶ ἐξῆλθε

$$\begin{array}{r}
 6 = 360 \text{ καὶ } 52 \\
 \hline
 412 \\
 36 \\
 \hline
 52 \\
 48 \\
 \hline
 4 = 240 \text{ καὶ } 18
 \end{array}$$

πηλίκον 15, 34, 21
 διότι αἱ μὲν ἡμέραι 7 ὥς
 μικρότερος ἀριθμὸς τοῦ 12,
 δὲν διαιρεῖται· διὰ τοῦτο
 μετεβλήθη εἰς ὥρας, καὶ οὗ-
 τω διηρέθη, τὰ δὲ ἄλλα ἔ-
 γιναν κατὰ τὰ ἀνωτέρω· κατ'
 αὐτὸν τὸν τρόπον διαιροῦμεν
 ὅλους τοὺς συγκεκριμένους
 ἀριθμοὺς, ὅταν δοθῇ διαι-

$$\begin{array}{r}
 412 \\
 36 \\
 \hline
 52 \\
 48 \\
 \hline
 4 = 240 \text{ καὶ } 18 \\
 258 \\
 24 \\
 \hline
 18 \\
 12 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

ρέτης μονοειδῆς· εἰάν δὲ δοθῇ μὲ διαφόρους μονάδας, τό-
 τε οὗτος ὁ τρόπος μόνος δὲν εἶναι ἱκανὸς· διότι μετὰ τὰ
 κλάσματα θέλομεν εἰπῇ ἀκόμη περὶ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ
 περὶ διαιρέσεως τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν· καὶ διὰ τοῦ-
 το ἱκανὰ ταῦτα εἰς τὸ παρὸν μέρος, καὶ εἰς ὅλον πρὸς τμή-
 μα, ἵνα καὶ εἰς τὸ ἕτερον τμήμα βαδίσωμεν.

Τ Μ Η Μ Α Α'.

Περὶ κεκλασμένων ἀριθμῶν.

§. 183. **Ε**ἰς τὸ πρῶτον τμήμα διήλθομεν, ὅσον ἦτον δυνατὸν εἰς ἡμᾶς, κατὰ τάξιν τοὺς ὁλοκλήρους ἀριθμοὺς· εἰς αὐτὸ πολλάκις περιεπέσαμεν καὶ εἰς ἄλλους ἀριθμοὺς, ὅπου κεκλασμένους ἐλόγομεν· καὶ μάλιστα εἰς τὴν διαίρεσιν εἰς πολλὰ παραδείγματα κατὰ τὸ τέλος ἔμεινέ τις ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον ἐπάνω μῖσς γραμμῆς ἐγράφομεν, καὶ ὑποκάτω τὸν διαιρέτην (§. 105.), καὶ τοῦτο κλάσμα ἐλέγομεν· ἐν μόνον ἐκεῖ εἰς αὐτοὺς ἐμάθομεν, ὅτι ὁ ἄνω τῆς γραμμῆς ἀριθμὸς ἦτον μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην· τί ὅμως τοῦτο ἐσήμαινε, καὶ εἰς τί ταῦτα χρήσιμα, παντελῶς δὲν ἐμνήσθημεν· διότι ταῦτα εἰς τὰς ἀρχὰς εἰς ἕτερον τμήμα ἀπεταμιεύσαμεν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ τμήμα, ὅπου μόνον εἰς αὐτὰ καταγίνεται, καὶ τμήμα κλασματικῶν ἀριθμῶν ἐκαλέσαμεν, ἐπειδὴ μόνον εἰς αὐτοὺς καταγίνεται.

§. 184. Κλάσμα ἀπλῶς καλεῖται ὅ,τι πρᾶγμα ὡς ὅλου εἰς μέρη δύο καὶ πολλὰ θλάται, καὶ ἕκαστον μέρος νὰ μὴν ἀποτελῇ μονάδα ὁλόκληρου, ἢ μονάδας τινὰς τοῦ ὅλου, οὔτε ὄνομα ἰδιαίτερον νὰ λαμβάνῃ τὸ μέρος ἀπὸ τὸ ὅλον· διότι καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν θλάται τὸ ὅλον εἰς μέρη, πλὴν τὸ ἐν μέρος ἀποτελεῖ ἢ μονάδα, ἢ μονάδας ὁλοκλήρους τοῦ ὅλου, καὶ ἐν τῇ δεαιρέσει ὁμοίως θλάται διαιρετέος εἰς μέρη διὰ τοῦ διαιρέτου, πλὴν τὸ πηλίκον ἀποτελεῖ μονάδα, ἢ μονάδας ὁλοκλήρους τοῦ ὅλου, ὡς $\frac{4}{4} = 1$

καὶ $\frac{4}{2}=2$ · καὶ οἱ προειρημένοι συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ

(§. 173.) θλῶνται μὲν εἰς μέρη, καὶ τὸ ἐν μέρος δὲν ἀποτελεῖ μονάδα ὁλόκληρον τοῦ ὅλου · πλὴν τὰ μέρη λαμβάνουσιν ἕτερον ὄνομα, ὡς μονάδα ὁλόκληρον, καὶ κατὰ τοῦτο διαφέρουσιν οὗτοι ἀπὸ τὰ κλάσματα · ἐὰν ὅμως καὶ τούτων τὰ μέρη δὲν τὰ ὀνομάσωμεν, συγκαταριθμοῦνται καὶ οὗτοι εἰς τὰ κλάσματα, καθὼς καὶ αὐτοὺς εἰς τὸ ἐξῆς εἰς τὰ κλάσματα συγκαταριθμήσομεν · ὅθεν εἰς τὸ παρὸν μόνον τοιαῦτα κλάσματα θέλομεν πραγματευθῆ, ὅπου κἀνένα νὰ μὴν ᾖ τῆς μονάδος τοῦ ὅλου μεγαλύτερον.

§. 185. Ἐς τὸ κλάσμα ἐν γένει διαίρεσις δυνάμει, εἰς ἣν ὁ διαιρετέος ἐλάσσω τοῦ διαιρέτου, ἢ καὶ οὕτω, πηλίκον δυνάμει διαιρέσεως, ἥτις πραγματικῶς δὲν γίνεται · τί δὲ δυνάμει διαίρεσις, ἐμάθομεν πρότερον οὕτω $\frac{4}{2}$, ἢ $\frac{6}{2}$ κτλ. πλὴν ταῦτα καὶ πραγματικῶς διαιροῦνται, ὡς

$\frac{4}{2}=2$ καὶ $\frac{6}{2}=3$ · ἄρα ταῦτα κλασματώδη καλοῦνται κάλ-

λιον ἢ κλάσματα · διαίρεσις λοιπὸν δυνάμει, ὅπου πραγματικῶς δὲν γίνεται εἶναι ἐκείνη, ἥτις ἔχει τὸν διαιρετέον

μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς $\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{253}{1000}$ κτλ.

καὶ τῷ ὄντι ταῦτα τὸ πηλίκον ἄλλως δὲν παριστάνουσιν,

εἰ μὴ κλασματικῶς · διότι τὸ πηλίκον αὐτοῦ $\frac{1}{2}$ εἶναι μισὴ

μονὰς, ὡς ὅταν δύο εὖρου ἐν μῆλον, καὶ διὰ νὰ λάβωσιν ἐπίσης, κόπτουσι τὸ μῆλον εἰς δύο, καὶ παίρνει ἕκαστος τὸ μισόν · ἐὰν δὲ τρεῖς εὖρου αὐτὸ, κόπτουν εἰς

$\frac{1}{3}$, καὶ παίρνει ἕκαστος ἐν τριτημόριον ὡς πηλίκον· ἄρα τὸ μισόν, καὶ τὸ τριτημόριον ὡς πηλίκον, οὕτω γράφεται $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, καὶ σημαίνει ὅτι τὸ ἐν διηρέθη εἰς δύο, εἰς τρία

κτλ. οὕτω καὶ $\frac{1}{7}$ ἐν ἐπτημόριον· καὶ $\frac{1}{30}$ ἐν τριακοσημόριον, ἥτοι ἡ μονὰς διηρέθη εἰς τριάντα κομμάτια, καὶ ἐν τῶν 30 ἐλάδομεν· καὶ τί ἄλλο τοῦτο, εἰ μὴ διαίρεσις; διαιρετέος μὲν ὁ ἄνω τῆς γραμμῆς, καὶ διαιρέτης ὁ κάτω ἀριθμός· ἀλλ' οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὰ κλάσματα καλοῦσι τὸν μὲν διαιρετέον, ἥτοι τὸν ἐπάνω τῆς γραμμῆς ἀριθμόν· ἀριθμητὴν, τὸν δὲ διαιρέτην, ἥτοι τὸν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, παρονομασίην, καὶ τὸ πηλίκον ὅλον κλάσμα· καὶ ὁ μὲν παρονομασίης σημαίνει εἰς πόσα μέρη ἴσα τέμνεται ἡ μονὰς· ὁ δ' ἀριθμητῆς, πόσα μέρη τῆς μονάδος λαμβάνει εἰς πηλίκον· ἐπὶ παραδείγματος, $\frac{526}{3350}$ τούτου τοῦ

κλάσματος ὁ μὲν κάτω ἀριθμὸς σημαίνει εἰς πόσα μέρη ἴσα τέμνεται ἡ μονὰς, δηλ· εἰς 3350· ὁ δ' ἄνω σημαίνει, πόσα εἰς πηλίκον λαμβάνει, ἥτοι 526, καὶ ἀριθμητὴν καλοῦσι τὸν ἄνω, καθότι ἀριθμεῖ τὰ μέρη τῆς μονάδος, ὅπου λαμβάνονται· παρονομασίην δὲ τὸν κάτω, καθότι οὐνομάζει τὰ μέρη, εἰς πόσα ἡ μονὰς κόπτεται, οὕτω $\frac{1}{2}$ ἐν

διμόριον, $\frac{2}{3}$ δύο τριτημόρια, $\frac{5}{10}$ πέντε δεκατημόρια, $\frac{13}{25}$ δεκατρία εἰκοσιπεπτημόρια· ὁ μὲν ἄνω ἀριθμεῖ καὶ ἀπαγγέλλεται, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς ἀπαγγέλλομεν· ὁ

εἰς ἕτερον καὶ νὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν 21. ὁ παρονομαστὴς εὐ-
ρίσκεται 21. $7=147$, καὶ $\frac{147}{3}=49$. ὅθεν $\frac{3}{7}=\frac{21}{49}$. καὶ
ἔτι τὸ $\frac{5}{9}$ νὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν 6. ὅθεν 6. $9=72$. καὶ $\frac{72}{5}=14\frac{2}{5}$
λοιπὸν καὶ $\frac{5}{9}=\frac{8}{14\frac{2}{5}}$.

Τοῦτο καὶ εἰς τὰ γράμματα γίνεται· τὸ $\frac{a}{6}$ νὰ ἔχῃ ἀ-
ριθμητὴν ay . λοιπὸν ay^6 , καὶ $ay^6: a=y^6$ ὅθεν $\frac{a}{6}=\frac{ay}{y^6}$.
εἰ τὸ $\frac{6y}{\delta}$ νὰ ἔχῃ ἀριθμητὴν $\zeta\theta$. ἄρα $\zeta\theta\delta$. καὶ $\zeta\theta\delta:6y=\frac{\zeta\theta\delta}{a\delta y}$
λοιπὸν $\frac{\zeta\theta\delta}{\zeta\theta\delta}$
 $\frac{6y}{6y}$

§. 204. Ἐπειδὴ ἕκαστος ἀριθμὸς μένει ἀμετάβλητος,
εἰναι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθῆ ἅμα καὶ διαι-
ρεθῆ (§. 93.), δυνάμεθα εὐκόλως καὶ ἕκαστον ἀριθμὸν ὁ-
λόκληρον εἰς κλάσμα νόθον νὰ μεταβάλλωμεν εἰς κάθε πα-
ρονομασίην, ὅπου μᾶς δοθῇ· δηλ. μὲ αὐτὸν τὸν δοθέντα
παρονομασίην πολλαπλασιάζομεν ἅμα καὶ διαιροῦμεν.

Ζητεῖται ὁ 5 νὰ γένῃ κλάσμα εἰς παρονομασίην 6. λοι-
πὸν 5. $6=30$, καὶ τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{30}{6}$.
καὶ ὁ 13 ζητεῖται εἰς κλάσμα μὲ παρονομασίην 8. λοιπὸν
13. $8=104$. ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{104}{8}$. καὶ ἔτι ὁ 56· εἰς
κλάσμα μὲ παρονομασίην 25, λοιπὸν 56. $25=1400$. τὸ
Τόμ. Α΄. 9

δὲ κλάσμα $\frac{1400}{25}$ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τοῦτο δὲ καὶ εἰς

τὰ γράμματα συμβαίνει. Πολλαπλασιάζομεν ἅμα καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον μὲ τὸν δοθέντα παρονομασὴν· ζητεῖται ὁ ὅγ εἰς κλάσμα μὲ τὸν παρονομασὴν δε· λοιπὸν κλάσμα

εἶναι $\frac{67}{δε}$ κτλ. ἄρα καὶ ἕκαστος ἀριθμὸς εἰς κλάσμα μετα-

βάλλεται, ἐὰν μόνον τὴν μονάδα παρονομασὴν θῶμεν, ὡς $\frac{23}{1}$, καὶ $56 = \frac{56}{1}$ καὶ $\frac{1564}{1}$ καὶ $\delta = \frac{\delta}{1}$, καὶ $67 = \frac{67}{1}$ κτλ.

ἔτι εἰς τοὺς συγκεκριμένους ἀριθμοὺς ἕκαστος ἀριθμὸς μετα-

βαίνει εἰς κλάσμα ἰσχυρότερον, ἐὰν μόνον διέλωμεν αὐτὸν διὰ τῶν μερῶν τῆς ἀνωτέρω μονάδος· 16 παρδ. $= \frac{16}{40}$

γρσσι. καὶ 33 δραμ. $= \frac{33}{400}$ ὀκαδ. κτλ.

§. 205. Ἐπειδὴ τὰ νόθα κλάσματα εἶναι μερίζονα τῆς μονάδος, ἄρα κάθε νόθον κλάσμα, ἢ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὡς $\frac{15}{3} = 5$, καὶ $\frac{104}{8} = 13$. ἢ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος

καὶ ἅμα κλάσμα γνήσιον, ὡς $\frac{10}{8} = 1\frac{2}{8}$ καὶ ἔτι $\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$.

καὶ $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{121}{120} = 1\frac{1}{120}$. λοιπὸν κάθε νόθον κλάσμα

μεταβάλλεται εἰς ἀκέραιον ἀριθμὸν, ἢ εἰς ἀκέραιον καὶ κλάσμα γνήσιον ὁμοῦ· ὅθεν καὶ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν μὲ τὸν παρονομασὴν τοῦ νόθου κλάσματος, καὶ εὐρίσκο-

μεν εἰς αὐτὸ, ἐὰν γνήσιον κλάσμα εὐρίσκηται, ὡς $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον εὐρίσκομεν τὰ κλάσματα τῶν συγκεκοιμένων ἀριθμῶν.

§. 206. Διὰ τὰ εὐρῶμεν τὰ κλάσματα τῶν συγκεκοιμένων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ ἡξεύρωμεν τῆς ἀνωτέρω μονάδος τὰ μέρη εἰς τὰ ὅποια ἐπίσης μερίζεται, ὡς τὰ μέρη τοῦ γροσίου = 4 ρούπια, τὰ μέρη τοῦ ρουπίου = 10 παρδ. καὶ τὰ λοιπὰ ἔσα ἀνωτέρω εἶπομεν (§. 176.)· δηλ. τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐξῆς μερῶν, καὶ πίπτει τὸ κλάσμα εἰς τὴν ἐξῆς μονάδα· εἰς δὲ τοῦτο νόθον τὸ κλάσμα, διαιροῦμεν μὲ τὸν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ εὐρίσκομεν τὰ ἀκέραια· εἰς δὲ μετὴν πάλιν κλάσμα, ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ μέρος τῆς ἐξῆς μονάδος τὸν ἀριθμητὴν, καὶ μὲ αὐτὸν τὸν παρονομαστὴν εὐρίσκομεν καὶ τὰ ἀκέραια αὐτῆς τῆς ὀνομασίας καὶ, οὕτως εἰς τὰ λοιπὰ.

$$\text{Α'. Π. χ. } \frac{7}{15} \text{ γρός.} = \frac{4 \cdot 7}{15} \text{ ρουπ.} = \frac{28}{15} = 1 \frac{13}{15} \text{ ρουπ.}$$

$$\frac{13}{15} \text{ δὲ ρουπ.} = \frac{13 \cdot 10}{15} = \frac{130}{15} \text{ παρδ.} = 8 \frac{10}{15} \text{ παρδ.}$$

$$\text{ἔτι } \frac{10}{15} \text{ πα.} = \frac{10 \cdot 3}{15} \text{ ἄσπρ.} = \frac{30}{15} = 2 \text{ ἄσπρ. λοιπὸν } \frac{13}{15} \text{ γρ.}$$

$$= 1 \text{ ρούπι, } 8 \text{ παρδ. } 2 \text{ ἄσπ.}$$

$$\text{β'. } \frac{11}{24} \text{ γρ.} = \frac{11 \cdot 40}{24} \text{ παρδ.} = \frac{440}{24} = 18 \frac{8}{24} \text{ παρδ. καὶ } \frac{8}{24}$$

$$\text{παρδ.} = \frac{24}{24} = 1 \text{ ἄσπ. ἄρα } \frac{11}{24} \text{ γρ.} = 18 \text{ παρδ.} + 1 \text{ ἄσπ.}$$

$$\text{γ'. } \frac{24}{96} \text{ ὀρ.} = \frac{23 \cdot 6'}{96} = \frac{138}{96} = 1 \frac{42'}{96} = \text{ἔτι } \frac{42'}{96}$$

$$\frac{42 \cdot 12''}{96} = \frac{504''}{96} = 5 \frac{24''}{96} \text{ καὶ } \frac{24''}{96} = \frac{24 \cdot 12'''}{96} = \frac{288}{96}$$

$$= 3''' \text{ ἄρα } \frac{23}{96} \text{ ὀργ.} = 1', 5'', 3'''$$

$$\delta. \frac{31}{64} \acute{\alpha}\kappa. = \frac{31 \cdot 400}{64} \delta\rho. = \frac{12400}{64} \delta\rho. = 193 \frac{48}{64} \delta\rho.$$

$$\kappa\alpha\iota \frac{48}{64} \delta\rho. = \frac{48 \cdot 60}{64} \kappa\acute{\alpha}\kappa. = \frac{6 \cdot 60}{8} = \frac{6 \cdot 15}{2} = 45 \kappa\acute{\alpha}\kappa. \acute{\alpha}-$$

$$\rho\alpha \frac{31}{64} \acute{\alpha}\kappa. = 193 \delta\rho\alpha\mu. \kappa\alpha\iota 45 \kappa\acute{\alpha}\kappa.$$

$$\epsilon. \frac{51}{62} \acute{\omega}\rho. = \frac{51 \cdot 60}{62} \lambda\epsilon\pi\tau. = \frac{3060}{62} = 49 \frac{11'}{31} \cdot \acute{\epsilon}\tau\epsilon$$

$$\frac{11'}{31} = \frac{11' \cdot 60''}{31} = \frac{660}{31} = 21 \frac{9''}{31} \cdot \acute{\epsilon}\tau\epsilon \frac{9''}{31} = \frac{9 \cdot 60'''}{31} =$$

$$\frac{540'''}{31} = 17 \frac{13'''}{31} \cdot \acute{\alpha}\rho\alpha \frac{51}{62} \acute{\omega}\rho. = 49', 21'', 17 \frac{13'''}{31}.$$

§. 207. Ἐκαστον ἀριθμὸν ἀκέραιον μὲ κλάσμα μεταβάλλομεν εἰς νόθον κλάσμα· εἰάν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν, καὶ προσθῶμεν εἰς τὸ παραγόμενον τὸν ἀριθμητήν, καὶ τὸ κεφάλαιον τοῦτο γράψωμεν ἀριθμητήν· παρονομαστὴν δὲ τὸν τοῦ πρώτου κλάσματος παρονομαστὴν· ὥς $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ καὶ

$$5\frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{37}{7}, \quad 3\frac{11}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 11}{15} = \frac{56}{15} \text{ κτλ.}$$

$$2\alpha + \frac{6}{\gamma} = \frac{2\alpha\gamma + 6}{\gamma}, \quad \kappa\alpha\iota \quad 2\alpha - \gamma\chi = \frac{2}{3} = \frac{6\alpha - 3\gamma\chi + 2}{3} \text{ κτλ.}$$

$$3 \gamma\rho. + 7 \text{ παρ.} = 3 + \frac{7}{40} = 3\frac{7}{40} = \frac{127}{40} \gamma\rho. \quad 4 \acute{\alpha}\kappa. + 14 \delta\rho.$$

$$= 4 + \frac{14}{400} = 4\frac{14}{400} = \frac{1614}{400} \acute{\alpha}\kappa. \quad 5 \acute{\omicron}\rho\gamma. + 4' + 16'' + \frac{22'''}{60} =$$

$$5^0 + 4' + \frac{922''}{60 \cdot 60} = 5^0 + \frac{15322}{3600} = 5\frac{15322}{3600 \cdot 60} = \frac{1095322}{216000} \acute{\omicron}\rho.\kappa.$$

§. 208. Ἐἰς κάθε κλάσμα ἔαν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν προσθῶμεν, τὸ κλάσμα δὲν μένει τὸ αὐτό· ἀλλ' ἔαν γνήσιον ᾖ, μεγαλύνει· ἔαν δὲ νόθον, σμικρύνεται· λέγω τὸ

$$\frac{3}{5} < \frac{3+5}{5+5} \cdot \text{διότι καὶ τὸ } \frac{3}{5} < \frac{8}{10} \cdot \text{ἐπειδὴ } \frac{30}{50} < \frac{40}{50} \text{ ὅτι}$$

$$30 < 40 \cdot \text{ἔτι } \frac{2}{3} < \frac{2+6}{3+6}, \text{ ὅτι } \frac{18}{27} < \frac{24}{27}, \text{ τοῦτο ὅμως}$$

$$\frac{4}{3} > \frac{4+5}{3+5} = \frac{9}{8}, \text{ διότι } \frac{32}{24} > \frac{27}{24} \cdot \text{ὁμοίως καὶ } \frac{a}{b} < \frac{a+\gamma}{b+\gamma}, \text{ ἔαν}$$

$$a < b \cdot \text{ἔαν ὅμως } a > b \cdot \frac{a}{b} > \frac{a+\gamma}{b+\gamma} \cdot \text{ἔαν δὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν}$$

ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ ἀφέλωμεν, τὸ μὲν γνήσιον βραχύνεται, τὸ δὲ νόθον αὐξάνει κτλ.

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν Β'.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῶν
κλασμάτων.

§. 209. Ἐἰς ἐργασίαι τῶν κλασμάτων εἶναι ἐκεῖναι, ὅπου ἦσαν καὶ τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν· δηλ: πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, καὶ διαίρεσις· ὅθεν καὶ εἰς τέσσαρα κόμματα κόπτεται τὸ παρὸν κεφάλαιον.

Κ Ο Μ Μ Α Α'.

Περὶ προσθέσεως κλασμάτων.

§. 210. Πρὸςθεσιν εἵπομεν μερῶν εἰς ἓν κεφά-

λαιον ἄθροισμα (§. 41.) · τὰ δὲ μέρη ἐνταῦθα ἢ εἶναι ὅλα κλάσματα, ἢ ὅμα κλάσματα καὶ ὁλοσχερῇ · καὶ πάλιν ἂν ἦναι κλάσματα, ἢ ἔχουν ὅλα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἢ διάφορον · περὶ ὅλων τούτων εἰς τὸ παρὸν εἰπεῖν ἀγωνιζόμεθα, πλὴν κἀνταῦθα πολλοὶ κανόνες τῶν ἀκραιῶν ἀριθμῶν ἀναγκαῖοι εὐρίσκονται · διότι καὶ ἐδῶ οἱ προσθετέοι πρέπει νὰ ἦναι, ὡς ἐκεῖ, τῆς αὐτῆς φύσεως (§. 41.) · καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ κλάσματα τὰ μέρη μόνον ἀθροίζονται, τὰ μέρη ταῦτα πρέπει νὰ ἦναι μιᾶς παρονομασίας, ἥτοι νὰ ἔχουν ὅλα τὰ κλάσματα ὁποῦ εἶναι προσθετέα, ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ τότε εἶναι ταυτομερῇ, καὶ τοῦτο ἀρκεῖ εἰς τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμούς · ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι, οὐ μόνον πρέπει νὰ ἔχουν ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἀλλὰ καὶ μίαν ὀνομασίαν τῆς

μουάδος καὶ τοῦ μέτρου · διότι ἀρκεῖ μόνον $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{2}{8}$ νὰ

γένωσι $\frac{5}{8}$ · ὅμως $\frac{3}{8}$ τῆς πῆχης ἑνὸς ὑφάσματος καὶ $\frac{2}{8}$ τῆς

πῆχης μιᾶς σανίδος, δὲν γίνονται ποτὲ $\frac{5}{8}$ · οὔτε $\frac{2}{4}$ τῆς πῆ

χης καὶ $\frac{1}{4}$ τῆς ὁλῆς συνάπτονται εἰς $\frac{3}{4}$, διὸ καὶ λέγομεν

εἰς μὲν τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμοὺς συνάπτομεν κλάσματα μιᾶς παρονομασίας μόνον · εἰς δὲ τοὺς συγκεκριμένους, μιᾶς παρονομασίας καὶ μιᾶς ὀνομασίας ὁμοῦ.

§. 211. Ὅθεν ἐὰν δοθοῦν κλάσματα νὰ συναφθοῦν εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ ἔχουν ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν · συνάπτομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἓν κεφάλαιον, καὶ παρονομαστήν γράφομεν τὸν κοινὸν ὅλων αὐτῶν τῶν μερῶν.

$$\text{πα: } \chi \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2+1+4+3}{5} \text{ (§. 190.)} = \frac{10}{5} = 2, \text{ και}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{17}{7} = 2 \frac{3}{7} \cdot \text{ἔτι: } \frac{144}{253} + \frac{10}{253} + \frac{156}{253} + \frac{56}{253} =$$

$$\frac{144+10+156+56}{253} = \frac{366}{253} = 1 \frac{113}{253} \cdot \text{και } \frac{\alpha}{6\gamma} + \frac{\gamma}{6\gamma} + \frac{\delta}{6\gamma} + \frac{2\alpha\gamma}{6\gamma} =$$

$$\frac{\alpha+\gamma+\delta+2\alpha\gamma}{6\gamma} \cdot \text{και } \frac{2\alpha}{36} + \frac{3\alpha}{36} + \frac{\alpha^3\chi}{36} = \frac{2\alpha+3\alpha+\alpha^3\chi}{36} \text{ ἔτι}$$

$$\frac{3(\alpha-6)}{\alpha+\delta} + \frac{4\alpha^3}{\alpha+\delta} + \frac{5\gamma+2\chi}{\alpha+\delta} = \frac{3(\alpha-6)+4\alpha^3+5\gamma+2\chi}{\alpha+\delta}$$

Τοῦτον τὸν τρόπον καὶ τὰ νόθα κλάσματα προσθέτομεν.

§. 212. Ἐὰν δὲ τὰ κλάσματα μὴ ὥσι τῆς αὐτῆς παρονομασίας, φέρομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, καὶ εἶτα, ὡς ἀνωτέρω συνάπτομεν. Π. χ.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{18}{30} + \frac{20}{30} + \frac{15}{30} = \frac{53}{30} \cdot \text{ἔτι } \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} =$$

$$\frac{70}{105} + \frac{84}{105} + \frac{90}{105} = \frac{244}{105} = 2 \frac{34}{105} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{19}{24} =$$

$$\frac{16}{24} + \frac{16}{24} + \frac{12}{24} + \frac{14}{24} + \frac{20}{24} + \frac{19}{24} + \frac{97}{24} = \frac{15}{24}$$

Τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ γράμματα γίνεται $\frac{\alpha}{6} + \frac{\delta}{\gamma} + \frac{\zeta}{9} =$

$$\frac{\alpha\gamma\delta}{6\gamma\delta} + \frac{\delta\delta\delta}{6\gamma\delta} + \frac{\zeta\delta\gamma}{6\gamma\delta} = \frac{\alpha\gamma\delta+\delta\delta\delta+\zeta\delta\gamma}{6\gamma\delta}$$

$$\text{και } \frac{2\gamma}{3\alpha\delta} + \frac{1}{2} + \frac{2\alpha}{4\delta} = \frac{16\delta\gamma}{24\alpha\delta\delta} + \frac{12\alpha\delta\delta}{24\alpha\delta\delta} + \frac{12\alpha\alpha\delta}{24\alpha\delta\delta} =$$

$$\frac{10\delta\gamma+12\alpha\delta\delta+12\alpha\alpha\delta}{24\alpha\delta\delta} = \frac{4\gamma+3\alpha\delta+3\alpha\alpha}{6\alpha\delta}$$

§. 213. Ἐὰν μετὰ τὰ κλάσματα καὶ ἀριθμοὶ πρόσκεινται, τότε α'. φέρομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς νόθα κλάσματα (§. 207.)

β'. Φέρομεν αὐτὰ εἰς μίαν παρονομασίαν (§. 197.), καὶ εἶτα ὡς κατωτέρω συνάπτομεν· $3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} = \frac{7}{2} + \frac{14}{3} =$

$$\frac{21}{6} + \frac{28}{6} = \frac{49}{6} = 8\frac{1}{6} \text{ καὶ ἔτι } 5\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{32}{6} + \frac{13}{6} + \frac{3}{6} = \frac{48}{6} = 8 \text{ ὁμοίως καὶ ἐν γράμμασι}$$

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{\delta}{\gamma} + \gamma + 2\omega &= \frac{\alpha\gamma + \delta}{\gamma} + \frac{\gamma\delta + \delta}{\delta} + \frac{2\omega\psi + \chi}{\psi} = \frac{6\psi(\alpha\gamma + \delta)}{\gamma\delta\psi} + \\ &+ \frac{\gamma\psi(\delta\gamma + \delta)}{\gamma\delta\psi} + \frac{\gamma\delta(2\omega\psi + \chi)}{\gamma\delta\psi} = \frac{6\psi(\alpha\gamma + \delta) + \gamma\psi(\delta\gamma + \delta) + \gamma\delta(2\omega\psi + \chi)}{\gamma\delta\psi}, \\ \alpha^2\delta + \frac{\gamma}{\delta} + \delta^3 + \frac{\alpha - \gamma}{\varepsilon} &= \frac{\alpha^2\delta\delta + \gamma}{\delta\varepsilon} + \frac{\delta^3\varepsilon + (\alpha - \gamma)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\alpha^2\delta\delta + \varepsilon\gamma}{\delta\varepsilon} + \\ &+ \frac{\delta\delta^3\varepsilon + \delta(\alpha - \gamma)}{\delta\varepsilon} = \frac{\varepsilon\alpha^2\delta\delta + \varepsilon\gamma + \delta\delta^3\varepsilon + \delta\alpha - \delta\gamma}{\delta\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ἐἰς δὲ τοὺς ἀριθμοὺς κάλλιον συνάπτομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ὁλοσχερεῖς κατὰ μέρος, καὶ τοὺς κεκλασμένους κατὰ μέρος, καὶ εἶτα συνάπτομεν τὰ κεφάλαια εἰς ἓν ζητούμενον κεφάλαιον.

$$\begin{aligned} 6\frac{3}{7} + 7\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} &= 6 + 7 + 2 + \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = 15 + \left(\frac{18}{42} + \frac{21}{42} + \frac{28}{42}\right) \\ &= 15 + \frac{67}{42} = 16\frac{25}{42}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7\frac{1}{2} &= 15\frac{2}{5} + 70\frac{1}{4} = 92 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) = 92 + \left(\frac{20}{40} + \frac{16}{40} + \frac{10}{40}\right) = \\ &= 92 + \frac{46}{40} = 93 + \frac{6}{40}. \end{aligned}$$

§. 214. Ἐὰν δὲ δοθῇ κλάσμα καὶ ὁλοσχερῆς ἀριθμὸς, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον μὲ τὸν παρονομασὴν τοῦ κλάσματος, καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον συνάπτομεν μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, καὶ τὸ κεφάλαιον γίνεται ἀριθμητῆς, ὃ δὲ παρονομαστῆς μένει ὁ ἴδιος τοῦ κλάσματος, καὶ ὡς νόθον, εὐρίσκεται πόσα ἀκέραια περιέχει.

$$(\S. 205.) \quad 5 + \frac{4}{5} = \frac{25+4}{5} = \frac{29}{5} \quad \text{διότι} \quad \frac{5}{1} + \frac{4}{5} = \frac{25}{5} + \frac{4}{5} = \frac{29}{5} \quad \text{ἔτι}$$

$$3 + 2\frac{1}{7} = 3 + \frac{15}{7} = \frac{21}{7} + \frac{15}{7} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}.$$

Ἐὼν δὲ δοθῶσι πολλοὶ ὁλοσχερεῖς καὶ πολλὰ κλάσματα, συνάπτομεν πρῶτον ὅλους τοὺς ὁλοσχερεῖς εἰς ἓν μέρος, καὶ ὅλα τὰ κλάσματα εἰς ἕτερον, καὶ ταῦτα τὰ δύο,

$$\text{ὡς ἄνωτέρω, συνάπτομεν Π. χ. } 5 + \frac{1}{2} + 6 + 7 + \frac{3}{5} + \frac{1}{8} + 80 =$$

$$98 + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{8} = 98 + \frac{20}{40} + \frac{24}{40} + \frac{5}{40} = 98 + \frac{49}{40} = 99 + \frac{9}{40}.$$

Τὰ αὐτὰ γίνονται καὶ εἰς τὰ γράμματα· ἡ δὲ πρόσθεσις τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν γίνεται καὶ ἐδῶ κλασματικῶς, πλὴν κάλλιον ἐκεῖνος ὁ τρόπος, ὃν ἡμεῖς εἰς τὸ (§. 178.) ἐδιδάξαμεν.

Κ Ο Μ Μ Α Β'.

Περὶ ἀφαιρέσεως κλασμάτων.

§. 215. Ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐναντία τῆς προσθέσεως (§. 52.), τηροῦνται οἱ αὐτοὶ κανόνες, ὡς ἐκεῖ,

δηλ: νὰ ᾔηται οἱ δοθέντες μιᾶς φύσεως καὶ μιᾶς παρονομασίας· διότι ἄλλως δὲν ἀφαιροῦνται, ἐὰν ἔχουν ἕτερον πα-

ρονομασίην, εἰ μὴ διὰ τοῦ σημείου —· οὕτως $\frac{α}{β} - \frac{α}{γ}$, καὶ

ἐδῶ ἔχουσι τὰ δοθέντα τὰς αὐτὰς, ὡς ἐκεῖ (§. 53.) ὀνομασίας μειωτέας καὶ ἀφαιρετέας, καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λείψανον. Διὰ νὰ ἀκολουθήσωμεν ὅμως κατὰ τάξιν τὴν ἀφαίρεσιν, πρέπει νὰ συρραθῶμεν.

α'. "Ἡ ἀφαιροῦμεν κλάσματα ἀπὸ κλάσματα.

β'. "Ἡ ὀλοσχερεῖς ἀριθμοὺς ἀπὸ κλάσματα.

γ'. "Ἡ ἀπὸ ὀλοσχερεῖς ἀριθμοὺς κλάσματα.

δ'. "Ἡ ὀλοσχερεῖς μὲ κλάσματα ἀπὸ μόνου κλάσματα.

ε'. "Ἡ ὀλοσχερεῖς μὲ κλάσματα ἀπὸ ὀλοσχερῶν μὲ κλάσματα.

§. 216. Ἐὰν πρῶτον δοθοῦν καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος κλάσματα, καὶ ἔχουν ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν παρονομασίην· τότε ἀφαιρεῖται ὁ ἀφαιρετέος ἀπὸ τὸν μειωτέον κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν (§. 54.), καὶ εἰς τὸ λείψανον ὁ κρι-

νὸς γράφεται παρονομασίης Π.χ. $\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ · ἔτι

$\frac{143}{156} - \frac{14}{156} = \frac{129}{156}$ · διότι $\frac{143}{156} = \frac{129}{156} + \frac{14}{156}$

ἔτι $\frac{αγ}{β} - \frac{δγ}{β} = \frac{αγ-δγ}{β} = \frac{γ(α-δ)}{β}$ · διότι καὶ εἰς τὰ γράμμα-

τα γίνεται ἡ ἀφαίρεσις μόνου διὰ τοῦ σημείου —· ἔτι τὸ αὐτὸ γίνεται, καὶ ἐὰν μᾶς δοθῇ ὁ ἀφαιρετέος ἀποφαινετὸς καὶ ὁ μειωτέος· διότι τότε τὰ σημεία τοῦ ἀφαιρετέου μεταβάλλομεν (§. 64.)· ἐὰν ζητηθῇ νὰ ἀφέλωμεν

$\frac{5}{8}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{8}{8}$ λέγομεν $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$

Τοῦτο πρέπει νὰ νοήσωμεν καὶ εἰς τὸ ἐξῆς εἰς ὅλους τοὺς ἀφαιρετέους.

§. 217. Ἐὰν δοθοῦν μὲ διαφόρους παρονομαστές· τότε φέρομεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασθῆν, καὶ εὐγάζομεν τὸν ἀφαιρετέον ἀπὸ τὸν μειωτέον, ὡς ἀνωτέρω (§. 216.)· διότι τὰ ὁμώνυμα μόνον ἀφαιροῦνται, ἐκτὸς ἀνίσως αὐτὰ δυνάμει· διὰ τοῦ τημέριου μόνον ἀφέλωμεν Παρ.

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35} \quad \text{ἔτι} \quad \frac{13}{14} - \frac{1}{6} = \frac{78}{84} - \frac{14}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

$$\text{ἔτι} \quad \frac{2}{9} - \frac{3}{17} = \frac{34}{153} - \frac{27}{153} = \frac{7}{153}$$

Τοῦτο αὐτὸ καὶ εἰς τὰ γράμματα γίνεται $\frac{a}{\delta} - \frac{a}{\gamma} =$

$$\frac{a\gamma}{\delta\gamma} - \frac{a\delta}{\delta\gamma} = \frac{a\gamma - a\delta}{\delta\gamma} = \frac{a(\gamma - \delta)}{\delta\gamma} \quad \text{ἔτι} \quad \frac{a - \delta}{2\gamma} - \frac{\delta}{3\zeta} = \frac{3\zeta(a - \delta) - 2\gamma\delta}{6\gamma\zeta}$$

$$\frac{2\gamma\delta}{6\gamma\zeta} = \frac{3\zeta a - 3\zeta\delta - 2\gamma\delta}{6\gamma\zeta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{a - 4\delta}{\gamma - \delta} - \frac{4a^3}{\gamma + \epsilon} = \frac{(a - 4\delta)(\gamma + \epsilon) - 4a^3\gamma + 4a^3\delta}{(\gamma - \delta)(\gamma + \epsilon)}$$

§. 218. Ἐὰν δευτερον δοθῇ ὁ ἀφαιρετέος μόνον ὁλοσχερῆς καὶ ὁ μειωτέος μόνον κλάσμα, τότε τὸν ἀφαιρετέον ποιοῦμεν κλάσμα, εἰς παρονομασθῆν τῆς μενᾶδος (§. 204.), καὶ φέρομεν αὐτὰ εἰς ἓνα παρονομασθῆν (§. 197.), καὶ ὡς ἀνωτέρω (§. 216.) ἀφαιροῦμεν μεταβάλλοντες μόνον τὸ σημεῖον τοῦ ἀφαιρετέου, οὕτω $\frac{1}{2} - 4 =$

$$\frac{1}{2} - 4 = \frac{1}{2} - \frac{8}{2} = \frac{1 - 8}{2} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{5}{2} - 13 = \frac{5}{2} - \frac{26}{2} = -\frac{21}{2} = -10\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{91}{7} = \frac{5 - 91}{7} = -\frac{86}{7} = -12\frac{2}{7}$$

Ἡ συντομώτερον, πολλαπλασιάζομεν μόνου τὸν ἀφαιρετέου μετὰ τὸν παρονομασὴν τοῦ μειωτέου, καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ μειωτέου, καὶ εἰς τὸ λείψανον τούτου τίθεμεν τὸν παρονομασὴν εἰς κλάσμα.

$$\begin{aligned} \text{ὡς } \frac{5}{7} - \frac{8}{1} = \frac{5-56}{7} = -\frac{51}{7} = -7\frac{2}{7} \cdot \text{ἔτι } \frac{11}{13} - 4 = \frac{11-52}{13} = \\ -\frac{41}{13} = -3\frac{2}{13} \cdot \text{ἔτι } \frac{a}{6} - \gamma\delta = \frac{a-6\gamma\delta}{6}, \text{ καὶ } \frac{a\delta}{4\gamma} - 3\delta\epsilon = \\ \frac{a\delta-12\gamma\delta\epsilon}{4\gamma} \cdot \end{aligned}$$

4γ

Ἐὰν δὲ ὁ μειωτέος ἔχῃ μετὰ τὸ κλάσμα καὶ ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ, καὶ ὁ ἀφαιρετέος μετὰ ἀριθμὸν καὶ κλάσμα, τότε μεταποιῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς κλάσμα| νόθον (§. 207.), καὶ γίνεται ἡ πράξις, ὡς ἄνω

$$\begin{aligned} \chi + \frac{a}{6} - \left(\gamma + \frac{\chi\gamma + \theta}{\gamma} \right) = \frac{6\chi + a}{6} - \left(\frac{\gamma\epsilon + \chi\gamma + \theta}{\gamma} \right) = \frac{6\chi\gamma + a\gamma}{6\gamma} - \\ \left(\frac{6\gamma\epsilon + 6\chi\gamma + \gamma\theta}{6\gamma} \right) = \frac{6\chi\gamma + a\gamma - 6\gamma\epsilon - 6\chi\gamma - \gamma\theta}{6\gamma} \cdot \end{aligned}$$

§. 219. Ἐὰν δὲ τρίτου ὁ μειωτέος ὁλόκληρος ἀριθμὸς, καὶ ὁ ἀφαιρετέος κλάσμα, ποιῶμεν καὶ τὸν μειωτέου κλάσμα διὰ τῆς μονάδος, καὶ φέρομεν αὐτὰ εἰς ἓνα παρονομασὴν, καὶ ὡς ὀνωτέρω ἀφαιροῦμεν· ὡς

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \\ 5 - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4-5}{5} = -\frac{1}{5} \cdot \\ 5a - \frac{a}{6} = \frac{5a}{6} - \frac{a}{6} = \frac{5a-a}{6} = \frac{4a}{6} = \frac{2a}{3} \cdot \end{aligned}$$

Ὁ εἰς μετὰ τὸν παρονομασὴν τοῦ ἀφαιρετέου πολλαπλα-

σιάζομεν τὸν μειωτέον, καὶ ἀπὸ τὸ γενόμενον ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν, καὶ εἰς τὸ λείψανον αὐτὸ, ὡς εἰς ἀριθμητὴν, θέτομεν τὸν παρονομασὴν τοῦ ἀφαιρετέου.

$$5 - \frac{1}{2} = \frac{10-1}{2} = 4\frac{1}{2} \cdot \text{καὶ } \alpha - \frac{6}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma-6}{\gamma} \cdot \text{καὶ } 5\gamma - \frac{\gamma}{3\delta} = \frac{15\gamma\delta-\gamma}{3\delta} \cdot \text{πλὴν κάλλιον ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος μόνον κλάσμα,}$$

λαμβάνομεν μόνον μονάδα ἀπὸ τὸν μειωτέον, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιροῦμεν τὸν ἀφαιρετέον, καὶ εἰς τὸ λείψανον προσθέτομεν τὸν μειωτέον, πλὴν μονάδος $5 - \frac{4}{5}$. ἄρα $-\frac{4}{5} =$

$$\frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}, \text{ ἄρα τὸ λείψανον } 4\frac{1}{5} \cdot \text{ἔτι } 15 - \frac{22}{33} \cdot \text{λοιπὸν}$$

$$1 - \frac{22}{33} = \frac{33-22}{33} = \frac{11}{33}, \text{ ἄρα } 14\frac{11}{33} \cdot \text{ἦτοι συντομώτερον γρόφομεν τὸν μειωτέον πλὴν μονάδος, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν}$$

$$\text{ἀριθμητὴν ἀπὸ τὸν παρονομασὴν, ὡς } 13 - \frac{5}{6} \cdot \text{ἄρα } 12\frac{1}{6}$$

$$\text{καὶ } 18 - \frac{5}{16} = 17\frac{11}{16} \cdot \text{ἔτι } 40 - \frac{156}{211} = 39\frac{55}{211} \cdot \text{καὶ}$$

$$56 - \frac{17}{100} = 55\frac{83}{100}.$$

Πολλάκις δίδεται ὁ μειωτέος ἀκέραιος μὲ κλάσμα ἔχον τὸ σημεῖον —, καὶ ὁ ἀφαιρετέος ἢ κλάσμα μόνον, ἢ κλάσμα καὶ ἀριθμὸν μὲ τὸ σημεῖον — καὶ +. ἀλλ' ὅλα ταῦτα κατὰ τοὺς ἄνω κανόνας φιλοτεχνεῦνται, ἐὰν καλῶς ἐκείνους μάθωμεν. ἐὰν ζητεῖται νὰ σφέλωμεν ἀπὸ

$$\text{τοῦ } 4 - \frac{3}{4}, \text{ τὸ } 3\frac{1}{4}, \text{ ἔσαι } 4 - \frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}, \text{ ἄρα } 3\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8} =$$

$$\frac{13}{4} - \frac{25}{8} = \frac{1}{8} \cdot \text{ἔτι } (4 - \frac{3}{4}) - (2 - \frac{1}{6}) = 3\frac{1}{4} - 1\frac{5}{6} = \frac{13}{4} -$$

$$\frac{11}{6} - \frac{39}{12} = \frac{22}{12} - \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}.$$

$$\text{ἔτι } (2a - \frac{6}{\gamma}) - (2 - \frac{3\gamma}{6}) = \frac{2a\gamma - 6}{\gamma} - \frac{26 - 3\gamma}{6} = \frac{2a6\gamma - 66}{\gamma^6} -$$

$$\frac{26\gamma - 3\gamma^2}{\gamma^6} = \frac{2a6\gamma - 66 - 26\gamma + 3\gamma^2}{\gamma^6}$$

Πολλάκις εἰς μίαν ἔκφρασιν εὐρίσκονται . πολλὰ κλάσματα μὲ σημεῖα — καὶ +, καὶ ζητεῖται νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν εἰς τὸ ἀπλούστερον· ἀλλὰ καὶ τοῦτο ἤδη ποιοῦμεν, τοὺς κανόνας αὐτοὺς ἠξεύροντες· συνάπτομεν δηλ. ὅλα τὰ καταφατικὰ εἰς ἓν, καὶ ἔπειτα ὅλα τὰ ἀποφατικὰ, καὶ τὰ κεφάλαια γράφονται μὲ τὰ σημεῖα τὰ ἴδια, ὡς εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν.

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \text{πρῶτον } \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{9}{8} \text{ ἔπειτα}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{11}{12} \cdot \text{ἄρα } \frac{9}{8} - \frac{11}{12} = \frac{27}{24} - \frac{22}{24} =$$

$$\frac{5}{24} \text{ καὶ εἶναι } \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{24} \cdot \text{ἔτι αὕτη}$$

$$(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4}) - (\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{8}) \text{ αἱ μὲν τοῦ μειωτέου}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \cdot \text{αἱ δὲ τοῦ αὐτοῦ } \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{8} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} - \frac{12}{12} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{11}{12} \cdot \text{ἄρα ὅλος ὁ μοιωτέος } \frac{5}{12} - \frac{2}{3} = \frac{5}{12} - \frac{8}{12} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \cdot$$

$$\text{αἱ δὲ τοῦ ἀφαιρετέου } \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \cdot \text{αἱ}$$

αἱ δὲ τοῦ αὐτοῦ $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ · καὶ ὅλος ὁ ἀφαιρετέος

$\frac{5}{4} - \frac{7}{8} = \frac{10}{8} - \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$ · λοιπὸν $\frac{1}{3} - \frac{3}{8} = \frac{8}{24} - \frac{9}{24} = \frac{1}{24}$ ὅλη ἡ
σειρά.

Ταῦτα μὲν ὁ μαθητὴς πολλὰ ἄς ἐπεξεργασθῇ εἰς τὴν
κλασματικὴν ἀφαίρεσιν, ἵνα μὴ προσκρούῃ εἰς αὐτὸ τὸ εἴ-
δος, ὥς ἡμεῖς πολλοὺς εἶδομεν τοῦτο ἐπαγγελομένους, ὅτι
ἡμάρτανον.

Κ Ο Μ Μ Α Γ'.

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ Κλασμάτων.

§. 220. **Π**ῶς πολλαπλασιάζεται ἐν κλάσμα μετ' ὀ-
λοσχερῇ ἀριθμὸν, ἀνωτέρω (§. 200—201.) ἐμάθομεν δύο
τρόπους, ἢ ὅταν μετ' ὀλόκληρον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζο-
μεν τὸν ἀριθμητὴν, ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν
 $\frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$ καὶ $\frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3}$ · διότι καὶ $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, καὶ μάλιστα ἐ-

πειδὴ ὁ πολλαπλασιασμός ἐστὶ ἐπισώρευσις τῆς τιμῆς τοῦ
κλάσματος τοσάκις, ὅσαι μονάδες εὐρίσκονται εἰς τὸν πολ-
πλασιασθῆν, ἄρα καὶ πέντε φοραῖς $\frac{1}{3}$ εἶναι $\frac{5}{3}$ · οὕτω καὶ

$\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4}$, διότι 6 φοραῖς τὰ 3 τεταρτημόρια εἶναι 18 τε-

ταρτημόρια · ὅθεν καὶ $\frac{11}{12} \cdot 7 = \frac{77}{12} = \frac{11}{12} \cdot 7$, διότι καὶ

$$\frac{11}{12} = \frac{77}{12 \cdot 7} = \frac{11}{12} \quad (\S. 202.) \cdot \text{ὅθεν διὰ τὰ πολλαπλασιάσω-}$$

μεν κλάσμα γνήσιον ἢ νόθον μὲ ἀριθμὸν ὁκέρατον, γίνεται, εἰν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν, ἢ τὸν παρονομαστὴν διέλωμεν μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ τε πολλαπλασιασθῆς ἢναι ὁ ἀριθμὸς, καὶ τε πολλαπλασιαστέος. Φανερόν ὅτι καὶ ἐδῶ οἱ παράγοντες δὲν ἀπαιτοῦνται τῆς αὐτῆς φύσεως (§. 71.)· ὅτι ὁ ἀριθμὸς μένει ὁ αὐτός, χωρὶς τὰ ἔχει τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὡς εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

Τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τὰ γράμματα $\frac{a}{6} \cdot \gamma = \frac{a\gamma}{6}$ καὶ

$$\frac{46\delta}{3\gamma} \cdot 5\epsilon = \frac{20\epsilon\chi\delta}{3\gamma} = \frac{20\epsilon\delta\delta}{3\gamma} \cdot \text{καὶ} \frac{a+\delta}{\delta} \cdot a\gamma = \frac{a\alpha\gamma+\delta\alpha\gamma}{\delta} \text{ κτλ.}$$

Ἐμάθομεν ὅτι ἕκαστος ἀριθμὸς μὲ 4 πολλαπλασιασθῶ-
μενος, φεῖ εἶπειν, 4 πλασιαζεται, μὲ 3, γίνεται τριπλά-
σιος· μὲ 2, διπλάσιος, καὶ μὲ 1, μένει ὁ αὐτός· ἄρα

εἰν πολλαπλασιασθῇ μὲ $\frac{1}{2}$ διχάζεται, καὶ μὲ $\frac{1}{3}$ γίνεται

ἐν τριτημόριον, καὶ μὲ $\frac{1}{4}$, ἐν τεταρτημόριον κτλ. ὅρα ὁ

ἀριθμὸς ὅπου πολλαπλασιαζεται μὲ κλάσμα, μεταβάλλεται
ναί, πλην εἰς τὴν μείωσιν, καὶ οὐχι ὡς μὲ τοὺς ὁλοσχε-
ρεῖς εἰς τὴν αὐξήσιν, καὶ τὸ μεταξύ τούτων εἶναι μονάς,
ἣτις οὔτε εἰς τὴν αὐξήσιν, οὔτε εἰς τὴν μείωσιν μεταβάλλει
τοὺς ἀριθμοὺς· διότι ὁ μείζων τῆς μονάδος ἀριθμὸς
μεταβάλλει αὐτοὺς εἰς τὴν αὐξήσιν, καὶ ὁ ἐλάττω αὐτῆς
ὁ μεταξύ τῆς μονάδος καὶ τοῦ μηδενὸς, οἷα τὰ γνήσια
κλάσματα, μεταβάλλει αὐτοὺς εἰς τὴν μείωσιν· ὅθεν ὅταν

πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμὸν μὲ κλάσμα, διαιρούμεν αὐτὸν μὲ τὸν παρονομασὴν· καὶ λαμβάνομεν μέρος ἢ μέρη τῆς αὐτοῦ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμητὴς· καὶ τοῦτο τὸ εἶδωμα εἰς τὰ κλάσματα συμβαίνει εἰς κάθε πολλαπλασιασμόν· οὕτως εἰάν πολλαπλασιάζωμεν 5 μὲ $\frac{1}{2}$ εἶναι $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$,

καὶ 10. $\frac{1}{2} = 5$.

§. 221. "Εἶδομεν, ὅτι τὸ κλάσμα ἀμετάβλητον μένει, εἰάν ὁ διαιρέτης τοῦ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιασθῇ τῶν παρονομασῆν (§. 202.)· καὶ ἐκ τούτου μόνον μαθητὴν, πῶς πολλαπλασιάζομεν κλάσμα μὲ κλάσμα· ζητεῖται τὸ $\frac{5}{6}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ $\frac{2}{3}$ · ἐκεῖνο πολλαπλασιαστέος,

τοῦτο πολλαπλασιασθῆς οὕτω $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$ · κατὰ δὲ τὰ ἀνωτέρω

(§. 220.) ζητεῖται ὁ ἀριθμητὴς ὁ 5 νὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, οὕτω $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3}$, καὶ εἰς τοῦτο ὡς

ἀριθμητὴν νὰ τεθῇ ὁ 6 παρονομασῆς οὕτω $\frac{5 \cdot 2}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$ · εἰς

αὐτὸ τὸ κλάσμα $\frac{3}{6}$ ὁ ἀριθμητὴς ἔχει διαιρέτην, καὶ ὁ παλαιοτόμεθα αὐτοῦ, εἰάν μὲ αὐτὸν τὸν παρονομασὴν πολλα-

πλασιάζωμεν (§. 202.) οὕτω $\frac{3}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$ · καὶ διὰ

$\frac{a\delta}{\gamma\epsilon}$

γραμμάτων τὸ αὐτὸ γίνεται $\frac{a}{\epsilon} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a\delta}{\gamma\epsilon}$ · καὶ ἐπειδὴ τὰ
γράμματα ἑκαστον ἀριθμὸν φανερώουσιν, ἄρα γενικῶς δι-
δεται ὁ κανὼν.

Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν κλάσμα με κλάσμα, πολλα-
πλασιάζομεν ἀριθμητὴν με ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν με
παρονομαστὴν, καὶ τοῦτο τὸ κλάσμα εἶναι τὸ γινόμενον τῶν

δύω κλασμάτων· οὕτω $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{21}$ · καὶ $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 5} = \frac{28}{40}$

$\frac{14}{20}$ · ὅτι δὲ τοῦτο ὀρθόν, καὶ ἐκ τῆς ἐξίσωσως γίνεται

φανερόν, ἔσω $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}$, εἰς αὐτὴν τὴν ἐξίσωσιν

ἀπαλλαχθῶμεν ἀπὸ τοὺς διαιρέτας τοῦ ἐνὸς μέρους (§. 100.),

μένει $3 \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 6}$ ὃ ἐστὶ $3 \cdot 5 = 3 \cdot 5$ · εἰς δὲ μὴ

ὀρθὸν ἦν, ἡ ἐξίσωσις βέβαια ἐχαλοῦσε, καὶ τέλος ἐκ τού-

του φανερόν, ὅταν τὰ $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιάζωμεν με $\frac{1}{2}$, πρέ-

πει νὰ γένῃ τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{3}{4}$, ἀλλὰ τὸ ἥμισυ γίνεται,

εἰς με 2 τὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάζωμεν οὕτω $\frac{3}{4 \cdot 2}$ ·

ἄρα $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$ καὶ μένει ὁ ἄνω κανὼν ὀρθός· νὰ

πολλαπλασιάζονται οἱ ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταί. Καὶ
ἄλλας ἐτοιμότερας δείξεις ἤμποροῦμεν εὐκόλως νὰ φέρω-
μεν, χωρὶς νὰ περιπλέξωμεν τοὺς μαθητὰς εἰς τὰς δεινὰς

ἡ καιρολογίας πολλῶν μαθηματικῶν· λοιπὸν κατ' αὐτὸν τὸν κανόνα πολλαπλασιάζονται καὶ γνήσια καὶ νόθα κλάσματα καὶ μὲ ἀριθμοὺς καὶ μὲ γράμματα

$$\frac{11}{13} \cdot \frac{7}{8} = \frac{11 \cdot 7}{13 \cdot 8} = \frac{77}{104} \text{ καὶ } \frac{15}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{15 \cdot 12}{4 \cdot 5} = 9$$

$$\frac{a}{6} \cdot \frac{3\delta}{\epsilon} = \frac{3a\delta}{6\epsilon} \text{ καὶ } \frac{5\gamma}{6\delta} \cdot \frac{2\epsilon}{3\zeta} = \frac{10\gamma\epsilon}{18\delta\zeta} \text{ καὶ } \frac{a-6}{\gamma} \cdot \frac{\delta}{\epsilon+\gamma} = \frac{\delta(a-6)}{\gamma(\epsilon+\gamma)}$$

Τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐὰν πλείεσα κλάσματα δοθοῦν καὶ πολλαπλασιασθοῦν· δηλ. πολλαπλασιάζονται ὅλοι οἱ ἀριθμηταὶ εἰς ἓνα ἀριθμητήν, καὶ ὅλοι οἱ παρονομασταὶ εἰς ἓνα παρονομαστήν, καὶ τοῦτο τὸ κλάσμα εἶναι τὸ γινόμενον.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{30}{240} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \text{ καὶ } \frac{a}{6} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{a\gamma\epsilon \cdot 3a\gamma\epsilon}{6\delta\zeta \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{3a^2\gamma^2\epsilon^2}{8\delta^2\zeta^2}$$

Ἐὰν δὲ ὥσιν οἱ παράγοντες κλάσματα μὲ ἀριθμοὺς ὁμοῦ· τότε φέρομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς νόθα κλάσματα (§. 207.), καὶ κατὰ τὸν γενικὸν μας κανόνα πολλαπλασιάζομεν·

$$3\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} = \frac{11}{3} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11 \cdot 11}{3 \cdot 2} = \frac{121}{6} = 20\frac{1}{6} \text{ καὶ } 6\frac{1}{7} \cdot 8\frac{1}{4} = \frac{43}{7} \cdot \frac{33}{4} = \frac{43 \cdot 33}{28}$$

$$(a+\frac{\delta}{\gamma})(\gamma+\frac{\epsilon}{\gamma}) = (\frac{a\gamma+\delta}{\gamma})(\frac{\gamma\epsilon+\delta}{\gamma}) = \frac{a\gamma\epsilon+\delta\gamma\epsilon+a\gamma\delta+\delta\delta}{\gamma^2}$$

Τὰ τοιαῦτα ἂν ᾖναι ὀρθὰ, οἱ πρωτόπειροι ἅς διωρίζωσι τὰ γράμματα μὲ ἀριθμοὺς διὰ τὰ γυμνάζονται, καὶ νὰ βεβαιοῦνται, ὅτι ὀρθώτατα γίνονται.

§. 222. Περιττὸν νομίζω νὰ εἰπῶ ὅτι καὶ εἰς τὰ κλάσματα τὰ σημεῖα + καὶ — ἔχουσι τοὺς νόμους τοὺς αὐτοὺς καὶ ἐδῶ, διότι τὰ ὅμοια σημεῖα δίδουσι παραγόμενον καταρατικόν, τὰ δ' ἀνόμοια ἀποφατικόν

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \text{ καὶ } \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 7} = \frac{5}{7} \text{ κτλ.}$$

Κ Ο Ξ Μ Μ Α Δ΄.

Περὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

§. 223. **Τ**ὸ κλάσμα διαιρεῖται μὲ ἓνα ἀριθμὸν κατὰ δύο τρόπους· ἢ ὅταν μὲ τὸν ἀριθμὸν διαιρῶμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος (§. 200 - 201.), ἢ ὅταν μὲ αὐτὸν πολλαπλασιάζωμεν τὸν παρονομαστὴν· καὶ αὐτοῦ αἱ ὁνομασίαι φυλάττονται· ὁ διαιρετέος, ὁ διαιρέτης, καὶ τὰ πηλίκον· ὁ μὲν πρῶτος τρόπος εἶναι, ὅταν ὁ διαιρετέος κλάσμα ᾖ, καὶ ὁ διαιρέτης ἀριθμὸς, οὕτω $\frac{10}{12} : 5$ νὰ

διέλωμεν, τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{10}{12} : 5 = \frac{2}{12}$ · καὶ

βέβαια ὁ 5, εἰς εὐρὴν 10· δωδεκατημόρια, πέρνει μόνον δύο· καὶ οὗτος ὁ τρόπος χρήσιμος, ὅταν ὁ διαιρέτης ἐπ' ἀκριβὲς διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ὡς τὸ ἄνω

παράδειγμα, καὶ τὸ ἐξῆς $\frac{12}{13} : 4 = \frac{12}{13} : \frac{4}{1} = \frac{3}{13}$ · ὅταν ὁμῶς

ὁ διαιρέτης δὲν διαιρῇ ἐπ' ἀκριβὲς τὸν ἀριθμητὴν, μεταχειρίζμεθα τὸν ἕτερον τρόπον, νὰ πολλαπλασιάζωμεν μὲ

τὸν διαιρέτην τὸν παρονομασὴν, ὡς $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$. διότι τὰ

$\frac{3}{20}$ εἶναι ἓν πεμτημόριον τοῦ $\frac{3}{4}$. διότι εἰς τὴν μονὰς τοῦ

κλάσματος νομισθῇ ἓν γρῶς., τὰ $\frac{3}{4}$ γρ. εἶναι 30 παρδ. τὰ

δὲ $\frac{3}{20}$ γρ. εἶναι 6 παρδ. καὶ τὰ 6 πεμτημόρια τῶν 30·

ἢ καὶ οὕτω δεικνύεται, εἰς κατὰ τὸν α'. τρόπον

$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$. καὶ οὗτος ὁ συνηθέστερος τρόπος, εἰς ὃν

διαίρετης πολλαπλασιάσῃ τὸν παρονομασὴν, τὸ κλάσμα διαίρεται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν· διὸ καὶ ὅλαι αἱ διαίρεσεις τῶν κλασμάτων μὲ ἀκεραῖους ἀριθμοὺς οὕτω γίνονται

$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{12}$ καὶ $\frac{13}{15} : 7 = \frac{13}{105}$ κτλ.

καὶ εἰς τὰ γράμματα $\frac{a}{6} : \delta = \frac{a}{6\delta}$ καὶ $\frac{a-\delta}{\gamma} : \epsilon = \frac{a-\delta}{\gamma\epsilon}$ καὶ

$\frac{a}{2a+\delta} : 5\delta = \frac{a}{10a+\delta\delta 5}$ κτλ.

§. 224. Ἐὰν δὲ ἀνάπαλιν δοθῇ ὁ μὲν διαιρετέος ἀριθμὸς, ὁ δὲ διαιρέτης κλάσμα, εὐκόλως διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν μὲ τὸ κλάσμα οὕτω $5 : \frac{1}{2}$ καὶ οὕτω γράφεται (§. 202.)

$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = 10$. ἔτι $5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$. ἄρα $5 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \cdot 5$

καὶ διὰ γραμμάτων α: $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$ καὶ ἐπομένως α: $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$ δ

κανὼν ἄρα ἐξέρχεται, ἐὰν ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, καὶ ὁ διαιρετής κλάσμα· πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος μὲ τὸν παρονομασὴν τοῦ διαιρέτου εἰς ἀριθμητὴν, καὶ ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ γίνεται παρονομασὴς, καὶ τοῦτο τὸ κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον 3: $\frac{2}{5} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Τοῦτο δὲ δὲν εἶναι ἄλλο, εἰμὴ νὰ ἀντιξέψωμεν τὸν διαιρέτην καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν, ὥς καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων (§. 221.) 5: $\frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

καὶ — 7: $\frac{2}{3} = -7 \cdot \frac{3}{2} = -10\frac{1}{2}$. ὁμοίως καὶ εἰς

τὰ γράμματα α: $\frac{\beta}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$ ἔτι 5α: $\frac{2\gamma}{3\delta} = 5\alpha \cdot \frac{3\delta}{2\gamma} = \frac{15\alpha\delta}{2\gamma}$ κτλ.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐὰν νόθος ὁ διαιρετής, ὥς 5: $\frac{12}{3} = \frac{15}{12}$ ἢ α: $\frac{\beta\gamma}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta}$.

§. 225. Τί δὲ γίνεται, ἐὰν καὶ ὁ διαιρετής καὶ ὁ διαιρετέος κλάσματα; τοῦτο εὐρίσκεται, ὅταν ἡξεύρωμεν, ὅτι ὁ διαιρετής πολλαπλασιάζων τὸν παρονομασὴν τοῦ κλάσματος, διαιρεῖ ὅλον τὸ κλάσμα (§. 201.) ἔσω $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} =$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3}$ ἄρα $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3}$ καὶ $\frac{\alpha}{\delta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\delta}$ ἄρα $\frac{\alpha}{\delta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\delta}$.

Τοῦτο δὲ πάλιν ὁμοιον, ὥσαν νὰ ἀντεσρέψαμεν τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$, καὶ ἔπειτα ἐπολλαπλασιάσαμεν ὅθεν γενικῶς ὁ κανὼν.

Ἐἰς οἵανδήποτε διαίρεσιν, ὅταν ὁ διαιρέτης ᾖ κλάσμα, ἀντιστρέφουμεν τοῦτο, διὰ νὰ γένῃ ὁ παρονομασῆς ἀριθμητῆς, καὶ οὗτος παρονομασῆς, καὶ εἴτα πολλαπλασιάζομεν ὥς εἰς τὰ κλάσματα ἐμάθομεν ὅθεν $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 3} =$

$$\frac{20}{18} = 1\frac{1}{9} \text{ καὶ λοιπὸν, ὅσας καλῶς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπιτελεῖ, οὗτος ἅμα καὶ διαίρεσιν, ἐὰν μόνον ὀρθῶς ἀντιστρέφῃ τὸν διαιρέτην. διότι ἡ ἀντιστροφή αὐτοῦ παρέχει τὴν διαίρεσιν εἰς πολλαπλασιασμὸν, ἄρα κατ' αὐτὰ καὶ } \\ \frac{7}{10} : 3 = \frac{1}{2} = \frac{57}{10} \cdot \frac{2}{7} = \frac{114}{70} = 1\frac{44}{70} = 1\frac{22}{35}. \text{ ἔτι } (a + \frac{\gamma}{\delta}) : (b + \frac{\alpha}{\epsilon}) = \\ \frac{a\delta + \gamma}{\delta} : \frac{b\epsilon + \alpha}{\epsilon} = \frac{a\delta + \gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{b\epsilon + \alpha} = \frac{a\delta\epsilon + \gamma\epsilon}{\delta b\epsilon + \alpha\delta}.$$

§. 226. Καὶ εἰς τὰ κλάσματα μονὰς πηλίκον ἐξέρχεται (§. 92.) ἐὰν αὐτὸ ἑαυτὸ διαιρῇ, ὥς καὶ ἐπὶ τῶν ὁλο-

$$\text{κλήρων ἐγίνετο, διότι } \frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \text{ καὶ } \\ \frac{a-b}{\delta} : \frac{a-b}{\delta} = \frac{a-b}{\delta} \cdot \frac{\delta}{a-b} = \frac{a\delta - b\delta}{a\delta - b\delta} = 1$$

§. 227. Ἐπειδὴ ἐμάθομεν πῶς πολλαπλασιάζομεν, καὶ ἔτι πῶς διαιροῦμεν τὸν διαιρέτην ἀντιστρέφοντες, εὐκόλως ἐκτυλίσσομεν καὶ ἄλλας ἐκφράσεις κλασμάτων περιπεπλεγμέναις μὲ τύπους κλασματώδεις, εἰς ἐκφράσεις συνειθισμένας, ἐὰν μόνον ἡξεύρωμεν, ὅτι εἶναι διαίρεσις, καὶ οὕτω α:β, καὶ οὕτω

α· και ετι $\frac{2}{5} : \frac{5}{6} = \frac{2}{5}$ εκφράζεται ὅθεν εὐκόλως τὰ ἐξῆς εκ-

τυλίνονται· διότι $\frac{2}{5}$ εἶναι $= \frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{24}{35} = \frac{2}{5}$

ετι $\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{6}{7}} = 2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$

ετι $\frac{\frac{2}{3}}{5 : \frac{5}{7}} = \frac{\frac{2}{3}}{3\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} : 3\frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{25} = \frac{14}{75} = \frac{2}{105} = \frac{2}{21}$

α· $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\beta} : \frac{\epsilon}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\epsilon} = \frac{\alpha\gamma\delta}{\beta\epsilon}$

§. 228. Εὐκόλως εὐρίσκομεν καὶ τὸ κλάσμα ἐνὸς κλάσματος τώρα, ὅταν ἀπαιτούμεθα νὰ λάβωμεν τέσσαρα πεμπτημόρια τοῦ κλάσματος $\frac{7}{8}$. (§. 220.) διότι λαμβάνομεν

αὐτὸ οὕτω $\frac{7}{8} = \frac{7}{8} : \frac{5}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{40}$. ἥτοι πολλαπλασιάζομεν

τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων εἰς ἀριθμητὴν, καὶ τοὺς παρονομαστὰς εἰς παρονομαστὴν, καὶ τοῦτο τὸ κλάσμα εἶναι τὸ ζητούμενον· ὅθεν καὶ ἡ διαίρεσις τῶν κλασμάτων γίνεται ἐν πολλαπλασιασμῷ· διότι ζητοῦντες τὸ ἐν τριτημόριον τοῦ κλά-

σματος $\frac{5}{6}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μὲ $\frac{1}{3}$ οὕτω $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$

ὅθεν καὶ ὅταν τὰ κλάσματα πολλαπλασιάζονται, τὸ παραγόμενον γίνεται ἐλάττον τῶν παραγόντων· ὅταν διαιρῶνται, τὸ πηλίκον γίνεται μείζον τοῦ διαιρετέου ὡς

$\frac{1}{2} : \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1} = \frac{5}{2}$