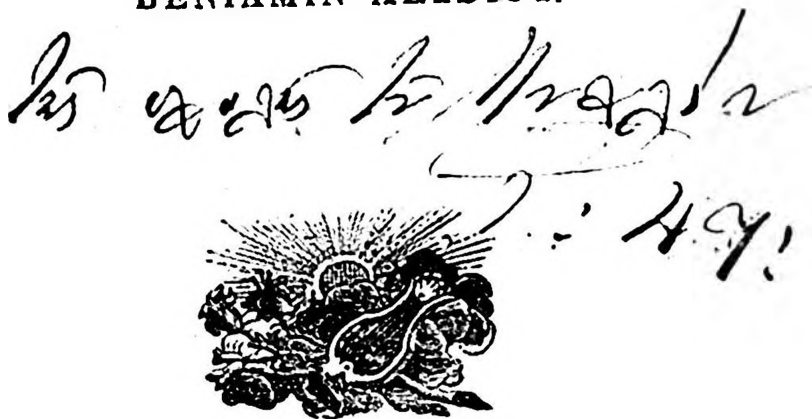


ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΠΑΡΑ
BENIAMIN ΛΕΣΒΙΟΥ.



TOMOS A'.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΟΥΣΤΡΙΑΣ,
ἐκ τῆς Τυπογραφίας τοῦ Ἰωάννου Σκίρτερ.
1818.

ΤΩ ΣΟΦΩ ΕΙΡΗΝΑΙΩ ΘΗΡΣΙΩ!

Η Ἑλλάς, ὦ Θήρσιε! καὶ ἡμίθνης οὔσα ἐκ τῶν ἀμέτρων καιρίων πληγῶν, ὥς περ κατὰ διαφόρους καιροὺς ἐκ τῶν διαφορῶν ἐπιδρομῶν τῶν ἐπὶ τοῦ ἱεροῦ αὐτῆς ἐδάφους ὑπὸ τῶν βαρβάρων ἐπιγενομένων ἔλασσε, ἡσθάνθη τέλος πάντων μετὰ παρέλευσιν πολλῶν αἰώνων ἐπαφῆς χειρὸς τινος οὐρανοῦ ἐπιφερομένης ἐπ' αὐτῆς, ἣτις ἐπετίθετο μαλάγματα καὶ ἔμπλασρα ἐπὶ τῶν πληγῶν, καὶ εἰς τὴν οἴψαν αὐτῆς προσέφερεν ὕδωρ ψυχρὸν καὶ διαυγές. Τὸ πρόσωπον ὅμως αὐτῆς ἦν ὡς ἡ τίτανος, οἱ ὀφθαλμοὶ αὐτῆς κεκοιλωμένοι, τὰ χεῖλη αὐτῆς μεμαρμένα, τὸ κάλλος αὐτῆς ἐσβεσμένον, ἡ μορφή αὐτῆς ἡφανισμένη, ἅπαντα ἡ ζωὴ αὐτῆς δύναμις μηδενισμένη, τὰ πνευματώδη αὐτῆς ὅσα ἐξωστραχισμένα, καὶ ἐν ἐνὶ λόγῳ ὁ φορέρς θάνατος ἐξωγραχισμένος ἐπὶ τοῦ προσώπου αὐτῆς. . . Θέαμα φοβερὸν καὶ φρικτὸς εἰς τοὺς ὀρώντας! Λίσθανθείσα ὅμως ταύτης τῆς εὐεργετικῆς χειρὸς, καὶ ἀναλαβούσα δύναμιν τινα, ὕψωτε μικρόν τι τὰ

βλέφαρα, καὶ ἐπέτρεψεν εἰς τοὺς θανάτους νὰ ἰδῶσι τὴν ὤψιν τῶν βοῶν αὐτῆς ὀμμάτων. Ὁ Ζεὺ, εἶπε τότε αὕτη, εὐρίσκεται ἐπὶ ἀνθρωπότης ἐπὶ τῆς Γῆς! Εὐρίσκεται ἐπὶ ἕνα σῆμα θεῖον εἰς τοῦτο τὸ εἶδος τοῦ ζώου: τὸν ἀνθρώπου! Ἐγὼ εὐπάκησα ἔθνη ὁλόκληρα, ἐγὼ ἐξημέρωσα βασιλείας ὅλας, αὐτὸν τὸν νέον κόσμον ἐγὼ ἐκ θηρίων τὸν μετέβαλον εἰς ζῶον θεογενές, καὶ οὐδεὶς τῶν εὐπακούντων ἠθέλησέ ποτε νὰ ἐκτείνῃ χεῖρα βοηθείας πρὸς με, καὶ τὸ χεῖμαςον πολλοὶ ἐξ αὐτῶν προσφέρουσι τὸν σιδήρον καὶ τοὺς ἀνθράκας πρὸς κατασκευὴν τῶν πεδῶν μου. Ποῶς - καὶ σιδήρεον καρδίαν ἔχων βλέπων τὰ ἐμὰ τέκνα ἐξ Ὀμηρίων, ἐκ Πυθαγόρων, ἐξ Ἀριστοτέλων, ἐκ Πλατῶνων, ἐξ Ἀρχιμήδων νὰ μεταμορφωθῶσιν εἰς αὐτόχημα κτήνη, νὰ μὴ κινήθῃ εἰς ἑλπίς, καὶ ταῦτα ἂν οὕτως ὀνομάξῃ ἑαυτὸν μαθητὴν τοῦ Ἀρχιμήδους, τοῦ Πλάτωνος, τοῦ Ἀριστοτέλους, τοῦ Πυθαγόρου καὶ Ὀμήρου; Οἱ ἡθακοὶ τούτων τῶν λεγομένων φωτισμένων ἐθνῶν γα-

Θήμενοι ἐπὶ τῆς διδασκαλικῆς καθέδρας φωνοῦσι καθ' ἑκάστην, »ἀχάριστος, ὅς τις εὖ παθὼν ἀμνημονεῖ«· εἴται ἅπαξ ἅπαντες καὶ διδάσκοντες καὶ διδασκόμενοι ὅχι μόνον ἀμνημονοῦσιν· ἀλλὰ καὶ ὅλαις αὐτῶν δυνάμεισι φέρονται πρὸς ἀποθηρίωσιν τῶν τέκνων μου. Ἀπασαὶ αἱ τέχναι καὶ ἐπιστῆμαι ἐξωρίσθησαν ἐκ τοῦ ἐμοῦ εὐάφους. αἱ μουσαι ὅμει πάσαι ἀπέπησαν, καὶ ἐγὼ γέγονα οἰκητήριον θηρίων. καὶ αὕτη ἡ διαλεκτος τῶν τέκνων μου μετουσιώθη εἰς βάρβαρον! Ἀφ' οὗ, ὦ Θήρσι, ἡ Ἑλλὰς ἐπρόφερε τούτους τοὺς λόγους, ἐπέφερε καὶ ἄλλους ὅχι ὀλίγους· πλὴν ὄντων διακεκομμένων, οἱ παριζάμενοι δὲν ἐδυνήθησαν νὰ καταλάβωσι τὴν σημασίαν αὐτῶν. Ἦν ὅμως καὶ ἡ τῆς ψυχῆς αὐτῆς εὐχαρίστησις διακεχυμένη ἐπὶ τοῦ προσώπου αὐτῆς, ἕνεκα τῆς σῆς πρὸς αὐτὴν ἐγνώμοσύνης.

Ὡν λοιπὸν καὶ ἐγὼ ταύτης τέκνον, ἔπρεπε νὰ συ-

καταβιβάζει τῆς σῆς εὐκαίας, καὶ ἀποθνήσκει πρὸ προσ-
φύου δυνάτου, ὅπου εἶναι ὁ πρῶτος τῶν ἐμῶν πόνων· ἡ
παρῶσα λέγου ἀρθεμυταῖ μετὰ τῆς γεωμετρίας καὶ ἀλ-
γίστης. Ἐπὶ τοῦ ὅμως, ἔπεισε πρὶν ἵνα ἡ παύσις τοῦ
προσφερομένου καὶ τοῦ ἀνέλεος μὲ τὰς ποιότητας ἡ με-
γέθος τῆς ψυχῆς, πρὶν ὅν κερ. προσφεύμεται τὸ δυνάτου. Ἀλλ'
ἐκ πάσης χάριτος συνελέγθη, ἡ εἰς πόσον τόσον ἐποιώθη·
Εἰς τόσον ἀνέλεος τοῦ εἰς τόσον ἐρημῶν· εἶναι ἡ πύ-
κνωσις τῶν νεφῶν ἐμπροσθεν διανοητικῶς τὴν διάνοιαν τῶν
ζώων τοῦ ἡλίου ἀκτίνων· εἶναι μολὴς ποτὲ πύκνωσι
ἐκείνης τινος ὑδάτος· εἶναι αἱ ἀνέμια πρὸ τῶν ἐλῶν δια-
φθιρόμενοι καὶ τὸ ὀξύγυρον ἀποθνήσκοντες, ἀποκαθίστανται
ἀνάμεικτοι πρὸς χυμῶν τῶν καύσων. Εἶναι ὅμως, ὁ μὲν
ἐγὼ δυνάτου, ἔκαστον πρὸς ἑνὸς κλίματος πρὶν παραβῆλ-
ληται ὅχι μὲ τὰ πρῶτα τὰ ἀλλοῦ κλίματος βελτίως, ἀλ-
λὸς ἡ σύγκρισις ἡβλῶν εἶναι ἡμαρτημένη. Καθότι - αὐ-
τοὶ πύκνωσις ἀνέμια ἵνα ἔξυγροι... αὐτὴ ἡ γῆ ἵνα εὐγυγρῶς.

ἂν τὸ ἔδαφος διασχίζεται διὰ παχείων ὑγίων εἰς βάθει
αὐλακας· ἂν οἱ ὕετοί ᾔναι ἄφθονοι· ἂν αἱ ἡλιακαὶ ἀ-
κτίνες προσάλλωσιν ἀφθόνως ἢ τίς πλέον ἤθελεν ἀμφι-
βάλλει περὶ τῆς ἀρίστης ποιότητος τῶν καρπῶν; Εἰ δὲ καὶ
ἐξ ἐναντίας ἔλλειπousι ταῦτα πάντα ἢ πῶς εἶναι τρόπος
να εὐρέθῃ καρπὸς ὥριμος καὶ ἡδύς; Καὶ καθὼς τὸ να νο-
μίζητις ὅτι ἡ Θέρμη, τὸ φῶς καὶ ἡ ὑγρασία κατέρχονται
ἐκ τοῦ οὐρανοῦ εἶναι σαφὴς ἀπάτη ἢ οὕτω καὶ τὸ να νο-
μίζῃ ὅτι μανθάνῃ τις τὰ ὄντα, καὶ γίνεται ἐπισημῶν ἐκ
τοῦ διδασκάλου, ἢ βιβλίων. Καθότι ἂν τὸ ἔδαφος ἐνὸς
τόπου δὲν συνεῖχε τὸ θερμογόνον, ἢ ἂν αἱ ἡλιακαὶ ἀ-
κτίνες δὲν ἀντανακλῶντο ἐξ ἐκάστου μέρους τῶν περὶ ἀν-
τικειμένων, ἢ ἂν ἡ γῆ δὲν συνεῖχε τὸ νερόν ἢ οὔτε ὑ-
γρασία, οὔτε φῶς, οὔτε θερμογόνον ἤθελεν ὑπάρχει ἐπὶ
τῆς Γῆς. Ὡσαύτως λοιπὸν καὶ ἂν ἔλλείπωσιν ἔκτινος
τόπου σχολεῖα, πυνυπαρξίς καὶ συναναστροφή πολλῶν
παιδευμένων, ὥς ὥς ἐξ ἄλλης βολῆς τοῦ χαλυβός

μετὰ τῆς πυρίτιδος νὰ γεννῶνται σπινθήρες· ἃ πολλὰ ὀλίγα
φῶτα μαθημάτων ἤθελεν ἰδοῦν ἐκεῖ. Τοῦτο λοιπὸν ἐλ-
λεῖκε ὁλοτελῶς, ὡς ἕκαστος τοῦτο ὅρα ἰδίᾳς ὀφθαλμοῖς,
ἐκ τῆς πάλαι ποτὲ μητρὸς τῆς παιδείας Ἑλλάδος. Ὡς
ἤθελεν εἶναι παράλογον τὸ νὰ ζητήσῃ τις ἤδη ὥρμιον
καρπὸν καὶ ἡδὺν ἐκ τοῦ Ἑλληνικοῦ ἰδρύματος. Ἀλλ' ἐπει-
θὴ καὶ, ὡς τοῖς πᾶσιν εἶναι γνωστὸν, εἶναι ἴδιον τῆς ἡμε-
τέρας φαντασίας τὸ νὰ καλλωπίζῃ διὰ λαμπρῶν χρωμά-
των τὰ ἀγαπητὰ ἀντικείμενα, καὶ νὰ μεγεθύνῃ αὐτὰ ὑ-
περόγκως· ἀκόλουθον εἶναι τὰ πρῶτα τῆς Ἑλλάδος νὰ
φανώσιν ἡδῆς εἰς τοὺς Ἕλληνας καὶ Φιλέλληνας. Πλὴν
εἶναι πλέον παρὰ βέβαιον ὅτι ἡ ἐμὴ φαντασία ὑπερῆξή-
σε, πρὸς ὑπὲρ γράφω ἀντικείμενον, οὗ τινος ἐγὼ εἰμὶ
λατρεῖς τῶν προτερημάτων.

BENIAMIN ΛΕΣΒΙΟΣ.

ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΦΙΛΑΝΑΓΝΩΣΤΑΣ

Αὐτίς, ὦ φιλιαναγνώσαι, ἐξετάξῃ τὸ πρᾶγμα ἀπολυ-
τως ἡ οὗτος βέβαια θέλει ἀποφασίσαι τὴν παρούσαν πραγ-
ματείαν μὴ ἀξίαν φωτός. Εἰ δὲ καὶ δὲν εὐχαριστήθῃ εἰς
τὴν ἐπιφάνειαν ἡ ἀλλὰ παρυσθῶσαι εἰς τὰ ἐνδύμυχα καὶ
ἐξετάξῃ τὸ πρᾶγμα ἀναφορικῶς ὅτι ὁηλονότι οἷος εἶναι
ὁ σόμαχος, τοιαῦτα πρέπει νὰ ᾔῃναι καὶ τὰ φαγητὰ, καὶ
ὡς ἡ λιπαρότης τῆς γῆς, τοιοῦτοι καὶ οἱ καρποὶ ἡ οὗτος
θέλει συγκατανεύσαι νὰ σώσῃ τὴν ἑαυτοῦ ψῆφον τοῦ ὅτι
πρέπει νὰ ἰδῇ τὰς ἡλιακὰς ἀκτίνας. Καθότι ἐν βιβλίον
σοικειώδες πρέπει νὰ εὐμοιρῇ καθαρότητος, ἀκριβείας,
συνδέσμου τῶν ἐννοιῶν, σεμνήσεως ταυτολογιῶν, μεθόδου,
καὶ νέων ἐφευρέσεων, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ
ἐκεῖ, ἐνθα ἄπασιν ὁ χορὸς τῶν μουσῶν, ἐνθα ἐλλείπουσιν
αἱ ἐπισήμαι, ἐνθα δὲν ὑπάρχουσι σχολεῖα, ἐνθα δὲν εὐ-
ρίσκεται σμῆνος πεπαιδευμένων, ἐνθα εἶναι ἐξόριστος ἡ
μήτηρ τῶν φώτων φιλοσοφία, ὡς εἶναι ἡ παρούσα Ἑλ-
λάς. Ἀλλὰ—πρέπει ἀρά γε διὰ τοῦτο ἡμεῖς οἱ Ἕλληνας
νὰ διαμείνωμεν, εἰς τὴν περ ἡδὴ εὕρισκόμεθα κατάστασιν;
Τίς—περὶ τούτου ἤθελε καταζήτησι; Οὐδείς. Ὡς πρέπει
νὰ ἀνακληθῇ εἰς τὴν ἑαυτὴν πατρίδα ἡ φιλοσοφία, χωρὶς

να φροντίζωμεν ὁλοτελῶς περὶ τῆς εὐφραδίας τῶν ἐπισκο-
λῶν. Καὶ τὰ προσκλητήρια εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ὅπερ ὁ
Ξενοκράτης ὠνόμασε λαβὰς φιλοσοφίας: τουτέστι
τὰ μαθηματικά, ὧν περ ἀπάντων προηγείται ἡ ἀρεθμητική.

Τὰ μαθηματικά λοιπὸν μόνα ἐκληρώσαντα τὸ τοι-
οῦτον ὄνομα: ἡ δὲ ῥητορική, ποιητική, κτξ., εἶναι πρὸς
συλισμὸν μόνον τοῦ ἀνθρώπου, καὶ τρέπον τινα ἐπουσιώ-
δεις μαθήσεις. Καθότι μόνα τὰ μαθηματικά τῶν ἀνθρω-
πίνων μαθήσεων ἢ γνώσεων ἀντισταθμίζονται μὲ τὸ βάρος
ἢ ἔκτασιν τοῦ ὀνόματος ἐπιστημῶν. Ἐπειτα μόνα τὰ μα-
θηματικά, καὶ οὔτε ῥητορική, οὔτε ποιητική, οὔτε ἄλλο
τε, μετὰ τῆς πείρας ἄγουσι τὸ φῶς εἰς τὴν ἔρευναν τῶν
μυστηρίων τῆς φύσεως. Ἀφαιρέσου τὰ μαθηματικά ἀπὸ
τῆς Γῆς: καὶ θείλεις ἰδεῖ τὸν ἄνθρωπον ἐρπύζοντα ἐπὶ
τῆς Γῆς, χωρὶς νὰ δύνηθῃ νὰ ὑψωθῇ ἀπὸ τῆς γῆϊνης ἐ-
πιφανείας, οὔτε νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τῆς πατρίδος αὐτοῦ. Καὶ
εἶναι τοσοῦτον ἀναγκαῖα τὰ μαθηματικά εἰς τὴν παιδα-
γωγίαν τοῦ ἀνθρώπου, ὥς τούτων ἀπόντων μένει ἄπορον
εἰς τί ἤθελε παιδαγωγηθῇ ὁ ἄνθρωπος, καὶ πολὺ πλέον
πῶς ἤθελε παραισῶσαι εἰς τὰ τῆς φύσεως μυστήρια. Ὄθεν
καὶ ὁ Πλάτων ἐπὶ τῆς θύρας τῆς Ἀκαδημίας ἐπέγραψε
τὸ, »μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσέλτω.«

Ἄπαντα λοιπὸν τὰ μαθηματικά ἔχουσιν ὑποκειμέ-
νον τὸ οὐσιωδέστατον τῶν ἀνθρωπίνων γνώσεων: τουτέστι
τὴν ποσότητα: ἥς περ ἀπούσης αἱ λοιπαὶ τῶν γνώσεων
ἤθελον εἶναι ἀνύπαρκτοι. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ ἄνθρωπος
εἶναι φύσει ἐνεργητικός, καὶ πρὸς αὐτὸν ἐνεργεῖ οὐδὲν
ἄλλο, ἢ τὰ σώματα, εἴτε ἐντάσεις περατούμεναι: δῆλον

ὅτι τὸ πᾶν τῶν ἀνθρωπίνων γνώσεων κυρίως προσδιορίζεται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ εἰς τὴν ποσότητα. Τὴν μὲν λοιπὸν συνεχῇ ποσότητα ἐκλήρωσατο ἡ γεωμετρία, τὴν δὲ διακεκριμένην, ἡ ἀριθμητική.

Ἡ ἀριθμητικὴ λοιπὸν εἶναι ἡ βάσις καὶ κλεις ἀπάντων τῶν μαθηματικῶν, καὶ ἀναγκαιοτάτη καὶ εἰς αὐτὸν τὸν ὄχλον, καὶ ἔστιν οὐδεὶς, ὅστις δὲν ἔχει αὐτῆς χρεῖαν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ ἀναφοραὶ πάντων τῶν μαθηματικῶν ἀναγονταὶ τέλος πάντων εἰς ἀριθμούς, ὁ δὴλον ὅτι ἡ τῆς ἀριθμητικῆς γνώσις προαπαιτεῖται πρὸ τῆς τῶν λοιπῶν γνώσεως. Καὶ πῶς ἄλλως ἤθελε λάβοι τις ἰδέαν διαστήματος ἄνευ μονάδων; Ἡ λέγων τις ὅτι ὁ ἥλιος ἀπέχει ἀφ' ἡμῶν 34 μυλλιόνια, τί ἄλλο κάμνει, ἢ ἀριθμεῖ; Καὶ ποῖα τῶν τεχνῶν, ἡ ἐπαγγελμάτων, ἡ πολιτεύματος δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τι ἄνευ τῆς ἀριθμητικῆς;

Ἡ τῆς ἀριθμητικῆς λοιπὸν ἀρχὴ, κατὰ μὲν τὸν Στράβωνα (α), ἀποδίδεται εἰς τοὺς Φαίλικας, οἵ τινες ὑπῆρξαν οἱ πρῶτοι τοῦ κόσμου ἔμποροι. κατὰ δὲ τὸν Λαέρτιον Διονύσιον (β), ἡ μὲν Αἴγυπτος ὑπῆρξεν ἡ γεννητρία αὐτῆς, ὁ δὲ πατὴρ αὐτῆς ὁ Θεὺς, ἡ Θωγ, ἡ Ὀσίρις, ὅς τις ἦν ὁ αὐτὸς μὲ τὸν Ἑρμῆν τὸν Τρισμέγιστον. κατὰ δ' ἄλλους αἱ Ἰνδοὶ. Ἀπαντα δ' ὅμως τὰ ἔθνη, πλην τῶν ἀρχαίων Σινιῶν, οἵ τινες εἶχαν δύο χαρακτῆρας, καὶ ἐνός ἔθνους τῆς Θράκης, ὅπερ κατὰ τὸν Ἀριστοτέλην εἶχε τέσσαρας, ἔχουσι διὰ περίοδον τὸν ἀριθμὸν δέκα. Καὶ ὁ λόγος τούτου τοῦ φαινομένου ἀναντιρρήτως

(α) Γεωγρ. βιβλ. εἴς.

(β) Ἐν τῷ προοιμίῳ.

εἶναι οὐδεὶς ἄλλος, ἢ ἡ ἰσάριθμος τῶν δέκα δακτύλων ποσότης. Τὸ γὰρ ἔχει ὁμοῦς ἐν ἔθνος διὰ περισθόν ἀριθμη-
τικὴν τὰ δύο, ἢ τὰ τέσσαρα, τοῦτο ἐμφανίζει οὐδὲν ἄλ-
λο, ἢ τὸν μικρὸν νοῦν καὶ μὴμεν αὐτοῦ.

Ὡς πρὸς τὰ γραπτὰ ὅμως σημεία τῶν ἀριθμῶν ἐν-
γίνει τὰ ἔθνη τῆς Ἀσίας μετεχειρίσθησαν ὅχι ἄγνοῦσα
σημεῖα, ἀλλὰ τὸ ἀλφάβητον αὐτῶν· καὶ ὡς φαίνεται,
καὶ οἱ Ἕλληνες ἢ αὐτοὺς ἐμυήθησαν, ἢ κατὰ συμβεβη-
κὸς μετεχειρίσθησαν τὸ αὐτό. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὰ τῶν
Ἑλλήνων γράμματα οὐκ ἐξικινούνται μέχρι τῆς ἐκδόσεως
τῶν χιλίων, ὅπερ εἶναι ἀναγκαῖον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν·
ὅθεν ἐπειδὴ καὶ οὐκ ἐξικινουσι μέχρι τῶν εἴκοσι ἑπτὰ·
ἢ ἀνάγκη προσθέσεως τριῶν ἐπιστάκτων, καὶ ταῦτα· τρεῖς,
ψι, ηῖ· τουτέστιν εἰς τὸν τόπον τῶν 6, 90, 900. Λέ-
γουσιν ὁμοῦς πινές ὅτι ἐπειδὴ καὶ οἱ Ἰουδαῖοι παρίστωσι διὰ
τοῦ Ἰῶτα τὴν πρώτην δεκάδα, κατὰ μίμησιν αὐτῶν καὶ
οἱ Ἕλληνες ἐκτιθέασιν τὸν δέκα ἀριθμὸν διὰ τοῦ Ἰῶτα.
Ἀλλ' ἂν οἱ Ἕλληνες ἐκτίθεντο τὸν δέκα ἀριθμὸν διὰ τοῦ
κ· περὶ - ἔπρεπε γὰρ παρενθέσθαι τὰ τρία αὐτῶν ἐπίστα-
κτα γράμματα; ἅπαντα ἄρα μεταξὺ τῶν δεκάδων, ἢ ἐκα-
τοντάδων;

β'. Τίς - ἀγνοεῖ· ὅτι τὸ γένος τῶν Ἰουδαίων ἦσαν
ἀκοινωνήτοι; Οἱ Ἕλληνες ἄρα ἐσηκώθησαν ἐκ τῆς Ἑλ-
λίδος καὶ ἐπῆγαν εἰς τὴν Παλαιστίνην, καὶ κοινοῦντες
μετὰ τοὺς ἀκοινωνήτους ἔμαθον ὅτι τὸ Ἰῶτα παρίσχησι τὸν
ἀριθμὸν δέκα! Δυσκόλως τις ἤθελε καταπιεσθῇ εἰς τοῦτο·
γ'. Ἐπειδὴ οἱ Ἰουδαῖοι συνέζων μετὰ τῶν Αἰγυπτίων,
χωρὶς γὰρ μάθωσι παρ' αὐτῶν τοὺς νῦν χαρακτηζας τῶν

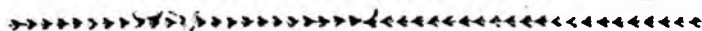
ἀριθμῶν ἡ ἀκλόουδον εἶναι θάτερον δυοῖν: ἢ εἰ Διγύπτιοι
νὰ μὴ εἶναι ἐφευρεταὶ τῶν νῦν χαρακτηρῶν, ἢ αἱ Ἰου-
δαῖοι νὰ ἦναι ἀνεπιτήδεια πάσης μαθήσεως καὶ ἐχομένως
καὶ πάσης διδασκαλίας. Τὴν σήμερον ὅμως ἔγκαν πά-
κοινοὶ οἱ χαρακτηρῆς τῶν Ἰουδαίων, ὡς ὄντες ἐπιτηδείστατοι
ἀπάντων τῶν λοιπῶν.

Ὅτι λοιπὸν ἡ ἀριθμητικὴ εἶναι ἀναγκασιότατη πρὸς
παιδείαν τῆς νεολαίας, καὶ πρὸς χρῆσιν τοῦ πολιτικοῦ
βίου, οὐδεὶς βέβαια δύναται νὰ ἀντείπῃ· μένει ὅμως νὰ
ἦναι ὁ ὕφαντης αὐτῆς τειοῦτος, ὥστε καὶ τὸ ὕφανσμα αὐ-
τῆς νὰ ἦναι ἄριστον, καὶ αἱ κλωσαὶ μὴ ἀνώμαλοι ἢ σκλη-
ραὶ ἀλλὰ καὶ ἡ ὄρασις καὶ ἡ ἀφῆ τοῦ ἀναγνώστου νὰ κα-
θαρύνεται. Ἀλλ' ὅθεν εἶναι ἐξωστρακισμένοι καὶ αἱ τέ-
χναι καὶ αἱ ἐπιστῆμαι, ποῶς – λόγος ἤβηλεν εἶναι τοῦ νὰ
ζητῇ τις ἐκεῖ ἄριστον τεχνίτην;

Σημειωτέον δ' ὅτι ἐγὼ εὗρον ἐμαυτὸν βεβιασμένον
περὶ τῶν κομμάτων τῆς ἡμετέρας διαλέκτου, ὅπερ ἤθελε
συμβοῇ εἰς ἑκάστον· εἴ μόνον θελήσῃ νὰ περιεργασθῇ τὸ
πρᾶγμα. Καθότι οὐδεὶς ἐξ ἡμῶν ἀγνοεῖ ὅτι τὰ διανοή-
ματα ἡμῶν, καὶ ἐντεῦθεν καὶ ἡ ὁμιλία ἡμῶν, σύγκειται
ἐκ μερῶν, ἐξ ὧν ἄλλα μὲν δύναται νὰ σαθῶσι καθ' ἐ-
αυτὰ, ἄλλα δὲ μὴ, καὶ ὅτι ταῦτα εἶναι ὅχι ὁμοιοῦς
καὶ τοῦτου ἕνεκεν καὶ αἱ γραμματικοὶ ἐδιαίρεσαν τὰ τῆς
παύλης σημεῖα εἰς πρία: εἰς τελείαν (.), ἡμιτελή (·),
καὶ ἀτελή (,). Ὡς, ὡς ἑκάστος ὀρθῶς, ἢ τελεία ἡμῶν
καὶ ἡμιτελής εἶναι: ἐν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ ὅχι δύο,
καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ εἰς τὴν
τοποθεσίαν. Πλὴν φθάνει τις νὰ διέλθῃ μίαν μόνην σελίδα

ἐνὸς τυχόντος βιβλίου· καὶ θελεῖ ἰδεῖ, ἂν δύνηται νὰ
 καταλάβῃ πού εἶναι τελεία, καὶ πού ἀτελής. Τὸ νὰ βλέ-
 πῃ λοιπὸν τίς· εαυτὸν ἠπατημένον εἶναι ξενοχωρία. Δευ-
 τερον δ' ἐκμυλίων τίς τὸ πρᾶγμα λεπτοτέρως, ἥθελεν·
 ᾧδοι ὅτι δίδονται νοήματα κείμενα μεταξὺ τῆς ἡμιτελοῦς
 καὶ ἀτελοῦς, καὶ ἔχομένως ὅτι οὖν εἶναι ἱκανὰ τρία μό-
 νον σημεία πρὸς παράστασιν τῆς πυχῆς τῆς ἀναγνώσεως·
 ἀλλ' ὅτι εἶναι χρεῖα καὶ ἐνὸς ἄλλου τετάρτου. Ἄν-
 λοιπὸν εἶναι πρέπον καὶ ἀβωότατον τὸ πρᾶγμα· διὰ τί νὰ
 μὴ γένη; Ὡς αἰτοῦμαι ἐκ τοῦ ἀναγνώστου, διαμέλλοντος
 ὡς καὶ πρότερον τοῦ σημείου τῆς τελείας, νὰ μὴ ὁῶσιν
 ἄδειαν νὰ μεταχειρισθῶ εἰς μὲν τὸν τόπον τῆς ἡμιτελοῦς
 τοῦτο τὸ σημεῖον. εἰς δὲ τῆς ἀτελοῦς τοῦτο· εἰς δὲ τῆς
 ἔτι ἀτελοῦς ἡ κόμματος τοῦτο. Ὡς ἡ τελεία ἰσοδυνα-
 μεῖ μὲ δύο ἡμιτελεῖς· καὶ ἡ ἡμιτελής, μὲ δύο ἀτελεῖς·
 καὶ ἡ ἀτελής, μὲ δύο κόμματα· ταῦτέσι. $\therefore = 2 \therefore = 4 \therefore$
 $= 8$. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ πολλάκις ἐπιφέρειται νόημα ἀ-
 παραλλακτικὸν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ· δηλονότι ὅτι τοῦτο πρέπει
 νὰ παριστάται δι' ἐνὸς ἄλλου σημείου, καὶ τοῦτο ἐξω δύο
 στιγμαὶ κείμεναι καθέτως. Τρίτον ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀνάγνω-
 σις τῶν ἐρωτηματικῶν νοημάτων εἶναι ἄλλοις τῶν ἀπο-
 φασιτικῶν καὶ διςαστικῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν καὶ ἐν
 τῷ τέλει σημεῖον διαφορετικὸν· ὁρθέτερον βέβαια ἥθελεν
 εἶναι νὰ γινώσκῃ ἐξ αὐτῆς τῆς ἀρχῆς ὁ ἀναγνώστης, καὶ
 ἔχι νὰ τὸ μανθάνῃ ἐκ τῶν πέρατος, ἐν ᾧ πλέον δὲν μένει
 καφεὶς νὰ μετασχηματίτῃ τὴν φωνὴν αὐτοῦ ἐρωτηματικῶς.
 Ἐξω λοιπὸν καὶ τοῦτο ἄλλο σημεῖον· μία κεφαλαία ὀριζουσία.

Ὁ Συγγραφεύς.



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΚΕΦ. Α΄.

Περὶ Ἀριθμῶν.

1. Πᾶν ἐκεῖνο, ὕπερ ἐνεργεῖ εἰς τὰς αἰσθήσεις ἡμῶν, ὀνομάζεται σῶμα. Ἀλλὰ εἶναι δύσκολον νὰ ἰδῇ τις ὅτι ἕκαστον τῶν σωμάτων ἄλλο εἶναι, εἰμὴ συναφή, ἢ συνέχεια μορίων· καὶ τούτου ἕνεκεν ἐγὼ θύναμαι νὰ διαιρέσω ἐν σῶμα διῆχα, καὶ πάλιν ἐκάτερον τῶν μερῶν διῆχα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, χωρὶς δηλονότι ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ νὰ παύσῃ ἀπὸ τοῦ νὰ ἐνεργῇ εἰς τὰς αἰσθήσεις μου, εἴτε ἀπὸ τοῦ νὰ ἦναι σῶμα. Τώρα πᾶς τις ὁμολογεῖ, ὅτι ἕκαστον τῶν μερῶν εἶναι ἕλασσον τοῦ ὅλου, καὶ τὸ ὅλον μείζον ἑκάστου τῶν ἰσίων μερῶν· καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ἡμεῖς ἔχομεν τὰς ἰδέας μικρόν, μέγα, ἴσον, μείζον, ἕλασσον, μέγιστον καὶ τὰ ἐξῆς. Ἀλλὰ πῶς ἄλλως ἡμεῖς ἠθέλαμεν ἀποφασίσαι ὅτι ἐν σῶμα εἶναι ἕλασσον, ἢ μείζον τοῦ ἄλλου, εἰμὴ διὰ

τῆς καταμετρήσεως; Κατὰ τοῦτο λοιπόν: καθὼς δηλ. τὰ σώματα ὑπόκεινται εἰς καταμέτρησιν, ὀνομάζονται Ποσά, καὶ Ποσότης ἀφηρημένως. Ὡς ποσότης ἄλλο δὲν ἠθέληεν εἶναι, εἰμὴ πᾶν ἐκεῖνο, οὗτινος ἐγὼ δύναμαι νὰ λάβω τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ ἐν τρίτον, ἢ τὸ ἐν τέταρτον, ἢ, καὶ τὰ ἐξῆς: ἢ ἂν θελῆς εἶναι πᾶν ἐκεῖνο, ὅπερ ὑπόκειται εἰς αὐξήσιν καὶ μείωσιν μετὰ προσδιορισμοῦ. Εἰς πᾶσαν δ' ἐρώτησιν ποσότητος, ἡμεῖς μεταχειρίζομεθα τὸ ἐρωτηματικὸν πόσον, εἰς τρόπον ὅτι καὶ ἀντισφύρει: τουτέστιν ὅπου ἐρώτησις ποσότητος, ἐκεῖ καὶ πόσον, καὶ ὅπου πόσον, ἐκεῖνη ἢ ἐρώτησις εἶναι περὶ ποσότητος. Πᾶσα λοιπόν ἐπιστήμη, ἣτις ἔχει δι' ὑποκείμενον τὴν ποσότητα, ὀνομάζεται Μαθηματικὴ.

Δῆλον ὁμῶς ὅτι ποσότης ἄλλο δὲν εἶναι κυρίως, εἰμὴ ὅλον περιέχον μέρη, ἴσα ἀλλήλοις ὡς πρὸς τὴν ἡμετέραν φαντασίαν, ὅπερ καὶ Μονάδας ἡμεῖς ὀνομάζομεν. Πέντε σπιθαμῶν λίγῳ εἶναι τοῦτο τὸ σῶμα κατὰ τὸ μέγεθος, καὶ 210 μίλλια ἀπέχει ἡ Κωνσταντινουπόλις ἀπὸ τῆς Μιτυλήνης: ἔνθα δηλ. τὸ μὲν μέγεθος τοῦ σώματος καὶ ἡ διάστασις τῶν δύο τόπων, εἶναι ἡ ποσότης: τὰ δὲ σπιθαμὴ καὶ μίλλια, αἱ μονάδες, εἴτε τὰ ἴσα ἀλλήλοις μέρη, ἐξ ὧν τὸ ὅλον σύγκειται. Δῆλον δ' ὅμως ὅτι καὶ τὸ μέγεθος τοῦ σώματος, καὶ τὴν διάστασιν τῶν δύο τόπων, ἐγὼ ἠδυνάμην νὰ καταμετρήσω καὶ δι' ἄλλων μονάδων: ὡς διὰ σταχυῶν δηλονότι, ἢ διὰ σταδίων, ἢ, καὶ τὰ ἐξῆς: καὶ τούτου ἔνεκεν αἱ μονάδες εἰς πᾶσαν καταμέτρησιν εἶναι ὅχι τῆς φύσεως, ἀλλὰ τῆς προαιρέσεως, εἴτε τῆς φαντασίας τῶν ἀνθρώπων.

2. Τινῶν ὅμως ποσοτήτων αἱ μονάδες δὲν εἶναι τῆς προαιρέσεως εἶναι τῆς φύσεως, ἢ τέχνης. Οὕτως ἐν σρά-
τευμα, εἰς ἀξερισμός, μία ἀγέλη προβάτων, εἰς ἀμπέλων,
εἰς σόλος, ἐν τάλαντον ἔχουσι τὰς μονάδας ὅχι ἐκ τῆς
προαιρέσεως τοῦ μετροῦντος, ἀλλ' ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως,
ἢ τέχνης: ἐξ ἑαυτῶν δηλονότι, διωρισμέναις: τουτέστιν
ἄνθρωπον, ἄστρον, πρῶτον, κλημα, καράδιον, γρόσιον.
Καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος, οἷ ὅν περ τὸ ποσὸν ἐδιδαιρέθη ὑπὸ
τῶν Μαθηματικῶν εἰς δύο: εἰς Διακεκριμένον δηλονότι καὶ
εἰς Συνεχές. Καὶ ὀνομάζεται Συνεχές ὅταν ἔχη τὰς μονά-
δας διακεκριμένας ἐκ τῆς προαιρέσεως τοῦ μετροῦντος:
ἢ ἂν θέλῃς συνεχόμενας ὑπ' ἀλλήλων.. καὶ Διακεκριμέ-
νῶν ὅταν αἱ μονάδες αὐτοῦ συνέχωνται ὁλοτελῶς ὑπ'
ἀλλήλων. Οὕτως ἐν σῶμα, μία γραμμὴ, κίνησις τις,
χρόνος τις, εἶναι ποσὰ συνεχῇ, ἐν ᾧ ἐν σράτευμα, μία
πόλις, μία ἀγέλη, εἶναι ποσὰ διακεκριμένα.. ἐκ τοῦ οἷοτι
τὸ πέρας τῆς μιᾶς μονάδος εἶναι ἀρχὴ τῆς ἐσομένης: ἢ
ἕκτη ὥρα, φέρε εἰπεῖν, εἶναι συνδεθεμένη ὑπὸ τε τῆς
πέμπτης καὶ τῆς ἑβδόμης.

Καὶ τούτου ἕνεκεν ἡ μαθηματικὴ ἐδιδαιρέθη εἰς Ἀ-
ριθμητικὴν, εἰς ἐκείνην δηλ. ἥτις ἔχει τὰς μονάδας
διακεκριμένας, καὶ εἰς Γεωμετρίαν, ἥτις ἔχει συνε-
χεῖς τὰς μονάδας: τουτέστιν ἔχει δι' ὑποκείμενον τὴν ἕκτα-
σιν, ἥτις δηλονότι καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς τὴν ἰδίως γεωμε-
τρίαν, τριγωνομετρίαν, μηχανικὴν κ. τ. ξ. Καὶ τὸ μὲν
ἀριθμῶν ἥμα ἐκληρώσατο ἡ ἀριθμητικὴ, τὸ δὲ μετρῶ ἡ
γεωμετρία.

Δήλον ὅμως, ὅτι ἐκτὸς τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς τῶν

μονάδων, τῆς ἀριθμητικῆς λέγω καὶ γεωμετρίας, θεωρεῖται καὶ ἄλλη, καὶ εἶναι αὕτη. Ἐκάστη μονὰς τοῦ διωρισμένου ποσοῦ: τουτέστι τῆς ἀριθμητικῆς, εἶναι ἐν ταύτῃ καὶ ὅλον, εἴτε ὑποκείμενον τῆς γεωμετρίας. Εἰς τῶν πλανητῶν, φέρε εἰπεῖν, ὡς ὁ Κρόνος, ὅστις δηλονότι εἶναι μονὰς τοῦ διωρισμένου ποσοῦ (ἂν ἐξετάζηται κατὰ τὸ μέγεθος τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, ἢ τὸν ὄγκον, ἢ ἄλλοτι (τότε ἀποκαθίσταται ὑποκείμενον τῆς γεωμετρίας: τουτέστι ποσὸν συνεχές.. ὡσαύτως καὶ ἐν πλοίων τοῦ στόλου εἶναι μὲν μονὰς τοῦ διωρισμένου ποσοῦ ἐν ᾧ ὅμως τις ἐξετάζει τὸ πῶσων ὀργυιῶν εἶναι τὸ μήκος αὐτοῦ (τότε εἶναι ὅλον τοῦ συνεχούς ποσοῦ, καὶ ὅχι πλεον μονὰς τοῦ διακεκριμένου.

Τρίτη πρὸς τοῦτοις διαφορὰ τῶν μονάδων τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς γεωμετρίας ἤθελεν εἶναι, τὸ ὅτι αἱ μὲν τῆς ἀριθμητικῆς μονάδες εἶναι ὄντα αὐθόπαρκα (αἱ δὲ τῆς γεωμετρίας, τῆς ιδιότητος τῶν σωμάτων, εἴτε τῆς ἀπλῶς ἐκτάσεως. Ἐν ᾧ, φέρε εἰπεῖν, λέγω ὅτι ἔχω 100 πρόβατα, ἐγὼ λέγω ὅτι ἔχω ἐν ὅλῳ αὐθόπαρκτον, ἔχον μονάδας ὄντα αὐθόπαρκα.. λέγων δ' ὅτι ἀπὸ Μιτυλήνης μέχρι Σμύρνης εἶναι μίλλια 100, ἐγὼ καταμετρῶ ἔκτασιν, εἴτε ὃν μὴ αὐθόπαρκτον, ἐκάστη μονὰς τοῦ ὁποίου εἶναι ἐπίσης μὴ αὐθόπαρκτον ὄν. Δῆλον ὅμως, ὅτι ἐγὰρ δύναμαι νὰ μεταβάλλω τὰς μονάδας τῆς ἀριθμητικῆς εἰς συνεχές ποσόν, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.. ἂν, φέρε εἰπεῖν, κτίσω 1000 λίθους (τοῦτο ἔγινε τοῖχος, εἴτε συνεχές ποσόν.. καὶ ἂν ἐδαφίσω τὸν τοῖχον (τοῦτο ἔγινε ποσὸν διακεκριμένον.

3. Ἀριθμητικὴ λοιπὸν ἄλλο ὅν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ ἐπιστήμη περὶ τῶν διακεκριμένων μονάδων, εἴτε τῶν ἀ-

ριθμῶν καὶ παθῶν αὐτῶν.. ἔψα, ὡς ὁράται, εἰς τὸν ὅρισμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς περιέχονται τρεῖς λέξεις, Ἐπισήμη, Ἀριθμὸς, καὶ Πάθη αὐτοῦ. Καὶ ἡ μὲν ἐπισήμη εἶναι γνῶσις ἐνὸς πράγματος, γνῶσις ὅμως μετὰ ἀποδείξεων.. τὴν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ ιδέαυ ἤθελε τὴν λάθοιτις ὥσπερως. Ἐγὼ βλέπω ἐπὶ τῆς γῆς πολλὰ σώματα, παρατηρῶ εἰς αὐτὰ καὶ διαφορὰν καὶ ὁμοιότητα: τουτέστιν ὁμοιότητα μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων, τῶν προσβάτων, τῶν πλοίων, τῶν ἐλαίων, τῶν συκῶν, καὶ τ. ξ. (καὶ ἀνομοιότητα μεταξὺ ἀνθρώπου καὶ προσβάτου, μεταξὺ προσβάτου καὶ πλοίου, μεταξὺ πλοίου καὶ ἐλαίας, μεταξὺ ἐλαίας καὶ συκῆς. Ὡς ἐγὼ δύναμαι νὰ τάξω εἰς ἓν μέρος ἅπαντα τὰ ἄτομα, ἅπερ ἐνεργοῦσιν ὁμοίως εἰς τὰ αἰσθητήριά μου, καὶ οὕτω νὰ ἔξω τὴν ιδέαυ τοῦ πλήθους, ἣ ἂν θέλῃς συνυπαρξίαυ πολλῶν ὁμοίων ὄντων. Τώρα, ἂν προσθερίσω ταύτας τὰς ὁμοίας ιδέας (τοῦτο ἤθελεν εἶναι ὁ ἀριθμὸς. Ἄν δηλονότι εἰς μίαν ιδέαυ προσθέσω καὶ ἄλλην ὁμοίαν, ὥς νὰ μὴν ἐννοῶ πλέον μίαν καὶ μίαν (ἀλλ' ὁμοῦ ταύτας (τοῦτο θέλει εἶναι ὁ ἀριθμὸς δύο, εἴπα δηλ. τὰ δύο εἶναι ἐν ὅλῳ ἔχον δύο μέρη νοητὰ, ἴσα ἀλλήλοισι.. καὶ ἂν εἰς τοῦτο προσθέτω καὶ ἄλλην ιδέαυ ὁμοίαν, ὥς νὰ μὴν ἐννοῶ δύο καὶ μίαν, ἀλλ' ὁμοῦ ταύτας (τοῦτο θέλ' εἶναι ὁ ἀριθμὸς τρία, εἴπα δηλ. τὰ τρία εἶναι ὅλον, ἔχον τρία μέρη νοητὰ, ἴσα ἀλλήλοισι. Ὅμοιον ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ἀπάντων ἀριθμῶν. Ὡς ἀριθμὸς ἤθελεν εἶναι διάκρισις ιδέας, ἣ ιδεῶν ἐκ τῶν λοιπῶν ἀνομοίων (διάκρισις ὅμως μετὰ γνώσεως τῶν μερῶν αὐτῆς. Καθότι ἡ ιδέα τοῦ προσβάτου εἶναι βέβαια

διαφοράς τῆς τοῦ λείοντος, τοῦ λίθου, κ. τ. ξ. (καὶ οὕτως ἐγὼ ἔχω ἀνὰ χεῖρας τὸν ἀριθμὸν ἓν. Πλὴν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ εὕρεθῇ καὶ ἄλλο πρόβατον, ὥστε νὰ ἐνεργῇ εἰς τὴν ὁρασίᾳ μου ὡς καὶ τὸ πρῶτον (καὶ τότε ἐγὼ εἶω ἰδεῖν τῶν δύο συγκειμένων ἐκ δύο ἴσων ἀλληλοῖς μερῶν, καὶ οὕτω περὶ τῶν λοιπῶν. Τὰ δὲ πολλὰ καὶ τὸ πληθὺς εἶναι μὲν ἀριθμὸς, πλὴν ὅχι καὶ ὀρισμένος ἀλλ' ἀόριστος.

Συνάγονται λοιπὸν ἐντεῦθεν τρία τινα: α'. ὅτι ἀδυνατεῖς νὰ ἀριθμῇσῃ ὄντα ἑτεροειδή.. ἔχων, φέρε εἰπεῖν, ἓν πρόβατον καὶ μίαν αἶγα, ἀδυνατεῖ νὰ εἰπῇ δύο.. ἢ ἔχων ἓν γρόσιον καὶ ἓνα παρὰν, νὰ εἰπῇ δύο.. β'. ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀποτελεσμα τοῦ νοῦς, καὶ ὅχι ὅτι ὑπάρχουσι δύο, ἢ τρία, κ. τ. ξ. εἰς τὴν φύσιν.. καὶ γ'. ὅτι καὶ ἡ μονὰς εἶναι ἀριθμὸς: εἶναι ὁηλονότι ἐν ᾧ συγκείμενον ἐκ μιᾶς μόνης μονάδος. Εἴτα αὖ τὰ δύο εἶναι ἀριθμὸς, ἅπερ σύγκεινται ἐκ δύο μονάδων (ὁῦλον ὅτι καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ εἶναι τοιαῦτα. Περὶ τούτου ὁμῶς θέλομεν ὁμιλήσαι ἀποδεικτικώτερον ἐχομένως. Πλὴν εἶναι οἰκίσθεν σαφές, ὅτι τοῦτο ἔλαβες τὸ εἶναι αὐτοῦ ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὅτι ὁηλ. ἀριθμὸς εἶναι ἐπισώρευσις μονάδων.

Τέλος πάντων ἡ λέξις πᾶσι εἰς τὸν ὀρισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς σημαίνει τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφάρεσιν, τὸν πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν ἀριθμῶν, εἴτε ὁλοκληρῶν, εἴτε κλασματικῶν.

4. Ἐπειδὴ ὁμῶς καὶ εἶναι δυνατόν τὸ μέγεθος τῶν ἀριθμῶν, ἢ αὖ θέλῃς, τὰ μέρη ἐνὸς ὅλου νὰ προχωρήσωσι ἐπάπειρον ἐκ τούτου ἐνέκειν εἶναι ἀδύνατον εἰς τοὺς

ἀριθμούς νὰ ὑπάρξῃ ἕκαστος αὐτῶν ἀπολύτως: τουτέστιν ἄνευ ἀναφορᾶς τινος ὡς πρὸς τοὺς λοιπούς. Οὕτω μέχρι μὲν τῶν δέκα ἡμεῖς ἀριθμοῦμεν δι' ἰδίων ὀνομάτων, λέγοντες, ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτώ, ἑννέα, δέκα (περαιτέρω ὅμως ἡμεῖς δὲν δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν ἄλλως, εἰμὴ διὰ τῆς συνθέσεως τῶν αὐτῶν μονάδων *), δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδων κ. τ. ξ. λέγοντες ἑνδεκά, δωδεκά, εἰκοσιδύο, ἑκατονδωδεκά, κ. τ. ξ. Ὡς ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν ὑφίσταται εἰς μόνας τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, καὶ χιλιάδας, ὑπερίσσοδυναμεῖ μὲ τὸ, οἱ ἀριθμοὶ βαίνουσι περιοδικῶς κατὰ δεκάδας. Καὶ τοῦτο εἶναι ἡ Ἐπαριθμησις.

5. Ἄλλ' ὡς φαίνεται, οἱ ἄνθρωποι δὲν εὐχαριστήθησαν μόνον νὰ ἐκφράζωσιν εἰς τοὺς ὁμοίους αὐτῶν περὶ τῶν ἀριθμῶν τὰς ἑαυτῶν ἰδέας (ἠθέλησαν νὰ τὰς ζεῖλωσι καὶ εἰς τὸ μέλλον, καὶ εἰς μακρινοὺς τόπους. "Οθεν καὶ ἐδιδάσθησαν νὰ ἐπινοήσωσι καὶ σημεῖά τινα πρὸς παράστασιν αὐτῶν, ἐπιτήδεια πρὸς πᾶσαν ἀριθμητικὴν ἐργασίαν, ὥστε καὶ Χαρακτικῆς ὀνομάζονται. Τὸ α'. λοιπὸν μὲ μίαν κεφαλαὺν ἄνωθεν σημαίνει ἕν.. τὸ β'. δύο.. τὸ γ'. τρία, καὶ οὕτως ἐφεξῆς: ὃ ἔστι μεθερμηνευόμενον, οἱ "Ελ-

*) Τοῦ δ' ἀριθμοῦ τὸ πεπερασμένον διόστημα ἢ δικάς. Ὁ γὰρ ἐπὶ πλείον ἀριθμῶν ἐθελὼν ἀνακάμπτει πάλιν ἐπὶ τὸ ἕν, καὶ δύο, καὶ τρία.. καὶ διευτέρῳ ἀριθμῷ δικάδα πρὸς τὴν τῆς ἐξοσάδας συμπλήρωσιν, καὶ τρίτην ὁμοίως, ἵνα τριάκοντα εἴπῃ, καὶ τοῦτο ἰξῆς, ἕως ἂν δικάτην ἀριθμήσας δικάδα εἰς ἑκατὸν προέλθῃ. Καὶ πάλιν ἑκατὸν τὴν αὐτὴν τρόπον ἀριθμῷ. Ἰερ-αλίου Φιλ:

ληνες ἐμεταχειρίσθησαν πρὸς παράσασιν τῶν ἀριθμῶν τὸ ἀλφάθητον αὐτῶν. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀλφάθητον δὲν φθάνει μέχρι τῶν χιλίων (τοῦτου ἕνεκεν ἐδαυνείσθησαν, ἢ ἐκατασκεύασαν τρεῖς ἀριθμούς ἐκ τῶν ἑξῶ: τοῦτέστι τὸ ζ'. τὸ η'. καὶ τὸ θ'. Ἀφ' οὗ πάλιν φθάσουσιν εἰς τὰς χιλιάδας, τότε αἰρῶσι τὴν κεραίαν ἐκ τῶν ἄνω, καὶ τὴν θένουσιν ὑποκάτω τοῦ στοιχείου, ὡς ὁράται ἐνταῦθα.

α' ἓν.	ξ' ἐξήκοντα.
β' δύο.	ο' ἑβδομήκοντα.
γ' τρία	π' ὀγδοήκοντα.
δ' τέσσαρα.	η' ἐνενήκοντα.
ε' πέντε.	ρ' ἑκατόν.
ς' ἕξ.	ρα' ἑκατοντὸν.
ζ' ἑπτά.	ρια' ἑκατοντὸνδεκα.
η' ὀκτώ	ς' διακόςια.
θ' ἐννέα.	τ' τριακόςια.
ι' δέκα.	υ' τετρακόςια.
ια' ἑνδεκα.	ρ' πεντακόςια.
ιβ' δώδεκα.	χ' ἑξακόςια.
κ' εἴκοσι.	ψ' ἑπτακόςια.
λ' τριάκοντα.	ο' ὀκτακόςια.
μ' τεσσαράκοντα.	θ' ἑννεακόςια.
ν' πενήκοντα.	κ' χίλια.

Ὡς ἐστὶς οὗτος ὁ ἀριθμὸς βρεθ'. σημαίνει δύο χιλιάδας καὶ ἑκατὸν εἴκοσι τέσσαρα.

6. Πλὴν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἰδῇ τις ὅτι οἱ Ἕλληνοὶ χαρακτῆρες ἀγκαλὰ καὶ ἐπιτηδειότατοι πρὸς παρά-

ρασιν τῶν ἀριθμῶν (πλὴν ὅχι καὶ πρὸς τὰς ἐργασίας αὐ-
τῶν: τωτέσι πρόσθεσιν, ἀφαιρέσιν, πολλαπλασιασμῶν,
καὶ διαίρεσιν. Ἀλλ' ὡς φαίνεται οἱ τῶν Λατίνων χαρα-
κτῆρες εἶναι χεῖρονες τῶν ἡμετέρων, καὶ εἶναι οὕτοι, εἰς
μεγάλα γράμματα.

α. . . I ^κ .	β. . . II ^λ .	γ. . . III ^μ .	δ. . . IV ^ν .	ε. . . V ^ξ .	ς. . . VI ^Ϟ .	ζ. . . VII ^π .	η. . . VIII ^Ϡ .	θ. . . IX ^Ϡ .	ι. . . X ^κ .	α. . . CC	β. . . CCC	γ. . . CD	δ. . . D	ε. . . DC	ς. . . DCC	ζ. . . DCCC	η. . . CM	θ. . . CM	ι. . . M	α. . . MC	β. . . MCC	γ. . . MCCC	δ. . . MCD	ε. . . MD	ς. . . MDC	ζ. . . MDCC	η. . . MDCCC	θ. . . MCM	ι. . . MCM	α. . . II	β. . . III	γ. . . IV	δ. . . V	ε. . . VI	ς. . . VII	ζ. . . VIII	η. . . IX	θ. . . X	ι. . . XI
-------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	-------------------------	--------------------------	---------------------------	----------------------------	--------------------------	-------------------------	-----------	------------	-----------	----------	-----------	------------	-------------	-----------	-----------	----------	-----------	------------	-------------	------------	-----------	------------	-------------	--------------	------------	------------	-----------	------------	-----------	----------	-----------	------------	-------------	-----------	----------	-----------

Ἐνθα, ὡς ὁράται, καὶ ἡ ἐκθεσις ἀτυχήσῃ, καὶ αἱ
ἐργασίαι αὐτῶν ἀτυχεύουσιν.

7. Οἱ χαρακτῆρες ὅμως τῶν Ἀράβων, ἡ ὀρθότε-
ρον εἰπεῖν τῶν Ἰνδῶν, διὰ τε τὴν ἐαυτῶν ἀπλότητα, καὶ
διὰ τὴν εὐκολίαν πρὸς τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας, εἶναι
δύστρον οὐράνιον. Ὅθεν ἅπαντα τὰ ἔθνη τῆς Εὐρώπης
δὲν ὠκνευσαν ἀπὸ τοῦ νὰ τοὺς οἰκαιοποιήσωσιν, ὡς καὶ ἡ-
μεῖς δηλονότι τὴν σήμερον. Εἶναι ὅμως ὁξὺς τῶν ἐνθόξων
γεωμέτρων, ὅτι ὁ ἡμίθεος Ἀρχιμήδης δὲν εἶχεν ὀγνοῆ
περὶ αὐτῶν. Καθότι, ὡς ἐκ τῶν συγγραμμάτων αὐτοῦ εἴ-
ναι φανερόν, αὐτὸς ἐγίνωσκε νὰ ἐξάγῃ τὰς ρίζας τῶν ἀ-
ριθμῶν (ὡς τοῦτο ὁράται ἐκ τῆς καταμετρήσεως τοῦ κύ-
κλου, ἔνθα αὐτοῦ ἐζήτησε τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγε-
γραμμένον πολύγωνον τῶν 96 πλευρῶν, ὥνπερ ἡ ἐργα-
σία γίνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τετραγωνικῶν

ρίζων: ὥπερ δηλονότι ἦν ἀδύνατον νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τῶν Ἑλληνικῶν χαρακτήρων. Καὶ κατὰ τὸν Βοέτιον *) οἱ Πυθαγόρειοι ἐπενόησαν εἰς τὸν λογαριασμὸν ἐννέα χαρακτῆρας διαφορετικούς, καὶ τοὺς ἐμεταχειρίζοντο, ὡς οἱ λοιποὶ τὰ γράμματα.

Οἱ χαρακτῆρες λοιπὸν τῶν Ἰνδῶν εἶναι ὅσκα· τουτέστι, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, ἔνθα τὸ 1, σημαίνει μίαν μονάδα, ὡς τὸ α', καὶ ὀνομάζεται ἔν.. τὸ 2, σημαίνει δύο μονάδας, ὡς τὸ β', καὶ ὀνομάζεται δύο.. τὸ 3, σημαίνει τρεῖς μονάδας, ὡς τὸ γ', καὶ ὀνομάζεται τρία.. τὸ 4, σημ. τέσσαρας μονάδας, ὡς τὸ δ', καὶ ὀνομάζεται τέσσαρα.. τὸ 5, σημαίνει πέντε μονάδας, ὡς τὸ ε', καὶ ὀνομάζεται πέντε.. τὸ 6, σημαίνει ἕξ μονάδας, ὡς τὸ ς', καὶ ὀνομάζεται ἕξ.. τὸ 7, σημαίνει ἑπτὰ μονάδας, ὡς τὸ ζ', καὶ ὀνομάζεται ἑπτὰ.. τὸ 8, σημαίνει ὀκτώ μονάδας, ὡς τὸ η', καὶ ὀνομάζεται ὀκτώ.. τὸ 9, σημαίνει ἐννέα μονάδας, ὡς τὸ θ', καὶ ὀνομάζεται ἐννέα.. τὸ 0, σημαίνει οὐδεμίαν μονάδα, καὶ ὀνομάζεται μηδέν.

8. Τοὺτους λοιπὸν λόγους, καὶ ὁλοτελῶς περισσotέρους χαρακτῆρας μεταχειρίζεται ἡ ἀριθμητικὴ εἰς παρτάσσειν παντὸς ἀριθμοῦ παντὸς μεγέθους, καὶ εἰς πᾶσαν αὐτῶν ἐργασίαν. Ὡς τὸ μέγα πνεῦμα τοῦ πατρὸς τούτων τῶν χαρακτήρων ὑπῆρξε νὰ οἰκοδομήσῃ τοσαύτην μεγάλην οἰκοδομήν διὰ τοσαύτης ὀλίγης ὕλης. Καὶ τοῦτο ὄχι δι' ἄλλο, εἰμὴ διότι ἔδωκεν ἀπείρους σημασίας εἰς ἕκαστον τῶν χαρακτήρων, ὡς ἐκ μόνης τῆς τοποθεσίας αὐτοῦ. Οὕτως ὁ χαρακτήρ 1 σημαίνει—μὲν μίαν μονάδα

*) Εἰς τὰ γινόμενα.

(7,) ἐν ᾧ κατέχει τὸν πρῶτον χώρον (ἂν ὅμως μετατοπισθῇ, καὶ λάβῃ τὸν δεύτερον χώρον πρὸς τὰ ἀριστερὰ οὕτως 12 (τότε πλείον δὲν σημαίνει μονάδας, σημαίνει δεκάδας, καὶ τὸ ὅλον ὁμοῦ σημαίνει 16'. εἴτε δώδεκα μονάδας. Καὶ ἂν δευτέρως μετατοπισθῇ, ὥς νὰ λάβῃ τὸν τρίτον χώρον οὕτως 123 (τότε ἡ σημασία αὐτοῦ δεκαπλασιάζεται, καὶ ἀντὶ νὰ σημαίνῃ δεκάδας, σημαίνει ἑκατοντάδας, καὶ τὸ ὅλον ὁμοῦ σημαίνει ριγ', εἴτε ἑκατὸν εἴκοσι τρεῖς μονάδας. Καὶ ἂν τρίτον μετατοπισθῇ, ὥς νὰ λάβῃ τὸν τέταρτον χώρον οὕτως. 1234 (τότε ἡ σημασία αὐτοῦ δεκαπλασιάζεται καὶ ἀντὶ νὰ σημαίνῃ ἑκατοντάδας, σημαίνει χιλιάδας, καὶ τὸ ὅλον ὁμοῦ σημαίνει ἀπλδ', εἴτε χιλίας διακοσίας τριάκοντα τέσσαρας μονάδας. Ἐὰν δ' εἴ μετατοπισθῇ, ὥς νὰ λάβῃ τὸν πέμπτον χώρον, οὕτως 12345 (τότε σημαίνει δέκα χιλιάδας.. καὶ ἂν τὸν ἕκτον, ὥς εἰς τὸ 123456 (σημαίνει ἑκατὸν χιλιάδας.. καὶ ἂν τὸν ἑβδόμον, ὥς εἰς τὸ 1234567 (σημαίνει χιλίας χιλιάδας· ὅπερ καὶ μυλλιόνιον ὀνομάζεται, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ὡς εἰς τὸν ἐκτεθέντα ἀριθμὸν 1234567, τὰ μὲν 7 σημαίνουν μονάδας, τὰ δὲ 6, δεκάδας, τὰ δὲ 5, ἑκατοντάδας, τὰ δὲ 4, χιλιάδας, τὰ δὲ 3, δεκάκις χιλιάδας, τὰ δὲ 2, ἑκατοντάκις χιλιάδας, τὸ δὲ 1, μυλλιόνιον : ὅς ἐστι μεθερμηνευόμενον, βαίνουτος τινὸς ἐκ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀπαντᾷ τοὺς χαρακτῆρας δεκαπλασίους ἑαυτῶν. Οὕτως εἰς τὸν ἀριθμὸν 1111111, ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δεξιῶν χαρακτήρ σημαίνει μίαν μονάδα, ὁ δεύτερος, μίαν δεκάδα, ὁ τρίτος, μίαν ἑκατοντάδα, ὁ τέταρτος, μίαν

χιλιάδα, ὁ πέμπτος δέκα χιλιάδας, ὁ ἕκτος, ἑκατὸν χιλιάδας, καὶ ὁ ἑβδομος, ἐν μυλλιόνιου: ὁ ἑστὶ μεθερμηνεύμενον ὁ ἡγούμενος ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ περιέχει τὸν ἐπόμενον δεκάκις.

9. Ὁ δὲ χαρακτήρ Θ σημαίνει μὲν, ὡς εἶπαμεν (7.) οὐδεμίαν μονάδα (εἶναι ὅμως ἀναγκαιότατος εἰς τὴν ἀριθμητικὴν.. ἐκ τοῦ διότι καὶ αὐξάνει τὴν σημασίαν τῶν λοιπῶν πρὸ αὐτοῦ χαρακτήρων διὰ τῆς ἑαυτοῦ παρουσίας, καὶ μηδεμίαν τὴν ὑπαρξιν τῶν μονάδων καὶ δεκάδων καὶ τ. ξ.

Τὸ 1, φέρε εἰπεῖν, σημαίνει μὲν μίαν μονάδα (ἐὰν ὤμοις πρὸ αὐτοῦ ἐκ τῶν δεξιῶν λάσῃ ἐν μηδενικὸν οὕτως 10 (τότε οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἐκ μονάδος ἐτράπη εἰς δεκάδα (καὶ περιέχει μὲν μίαν δεκάδα (πλὴν οὐδεμίαν μονάδα.. καὶ ἂν δύο οὕτως 100 (τότε οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει μὲν μίαν ἑκατοντάδα, πλὴν οὐδεμίαν μονάδα, οὔτε δεκάδα. Ὅμοιόντι ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν ἀριθμῶν 1000, 10000, 100000, 1000000, οἵτινες δηλ: ὀνομάζονται χίλια, δέκα χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, ἐν μυλλιόνιου. Ὡς τὸ μὴτὲν χρησιμεύει εἰς τοὺς ἀριθμοὺς διττῶς: καὶ καθὼ μετατοπίζον τοὺς χαρακτήρας εἶδαι εἰς αὐτοὺς δεκαπλάσιον σημασίαν, καὶ καθὼ ἐκτελεῖ τοὺς ἀριθμοὺς νὰ γερῶνται μονάδων, ἢ δεκάδων, ἢ κ.τ.ξ., ὅπερ εἶναι τῶν ὧν οὐκ ἄνευ.

10. Συμπέρασμα λοιπὸν εὐτεῦθεν, ὅτι, ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀριθμὸς δέκα γράφεται οὕτως 10, καὶ ὁ ἐννευήκοντα ἐννέα οὕτως 99, καὶ ὁ ἑκατὸν οὕτως 100, καὶ ὁ ἐννεακόσις ἐννεήκοντα ἐννέα οὕτως 999, καὶ ὁ χίλις οὕτως

1000, ἐπόμενον εἶναι α'. πᾶς ἀριθμὸς ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τῶν ἐννέα νὰ γράφηται δι' ἐνὸς χαρακτήρος.. β'. ἀπὸ τῶν δέκα μέχρι τῶν ἐννεήκοντα ἐννέα, διὰ δύο.. γ'. ἀπὸ τῶν ἑκατὸν μέχρι τῶν ἐννεακασίων ἐννεήκοντα ἐννέα, διὰ τριῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς : ὅ ἐστι μεθερμηγευόμενον, πᾶς ἀριθμὸς σημαίνων μὲν μονάδας νὰ γράφηται δι' ἐνὸς χαρακτήρος (δεκάδας δὲ, διὰ δύο ἢ ἑκατοντάδας δὲ, διὰ τριῶν ἢ χιλιάδας δὲ, διὰ τεσσάρων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

"Ὡς ἐκ πρώτης ὀψews ἤυελεν ἀποφασίσαι τις τὴν σημασίαν ἐνὸς ἀριθμοῦ : ὅ ἐστιν ἂν οὗτος σύγκηται ἐκ τριῶν χαρακτήρων (ὅτι ἄρχεται ἐξ ἑκατοντάδων.. ἂν ἐκ τεσσάρων ἢ χιλιάδων.. ἂν ἐκ πέντε ἢ δεκάδων χιλιάδος.. ἂν ἐξ ἑξ ἢ ἑκατοντάδων χιλιάδος, καὶ ἂν ἐξ ἑπτά ἢ ἐκ μυλλιονίων.

Συμπέρασμα β'. ὅτι ἐπειδὴ καὶ εἰς χαρακτήρ ἀλλάττει σημασίαν ὡς ἐκ μόνης ἐναλλαγῆς τῆς ἰσῖας τοποθεσίας (8) χωρὶς οἱ πρὸ αὐτοῦ χαρακτήρες νὰ ἔχωσιν ἐπ' αὐτὸν τινὰ ἐπιρροὴν τοῦτου ἕνεκεν, ὅσα μηδενικά καὶ ἄντις θέσῃ ἐκ τῶν ἀριστερῶν ἐνὸς ἀριθμοῦ ἢ σημασία αὐτοῦ δὲν θέλει ἀλλάξει ὁλοτελῶς. Οὕτως τὸ 21 εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ, 0 21, καὶ μὲ τὸ, 00 21, καὶ μὲ τὸ, 000 21, κ. τ. ξ.

11. Εἶναι ὁμῶς ἄξιον σημειώσεως, ὅτι εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν ὃ ἐκ τῶν ἀριστερῶν χαρακτήρ σημαίνει πλεόνον, ἢ ἅπαντες ὁμοῦ οἱ ἀκόλουθοι. Οὕτως εἰς τὸν ἀριθμὸν 1234-567 ὁ πρῶτος χαρακτήρ ὢν 1000000, εἶναι μείζων τοῦ λοιποῦ 234567 ἀριθμοῦ.. ὡσαύτως καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 234567 ὁ πρῶτος χαρακτήρ ὢν 200000, εἶναι μείζων τοῦ 34567 ἀριθμοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

12. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λοιπὸν ἐκτεθέντων, γίνεται καταφανές, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἁλυσὸς τις περιόδων: πρῶτον μὲν κατὰ δεκάδας (4.) ἔπειτα δὲ κατὰ χιλιάδας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καθότι ἂν ἐγὼ λάβω δεκάκισ ἢ τὸ 1, ἢ τὰ 5, ἢ τὰ 9, ἔξω 10, ἢ 50, ἢ 90. Καὶ ἂν λάβω δεκάκισ τὰ 10, ἢ 50, ἢ 90 ἔξω 100, ἢ 500, ἢ 900. Καὶ τέλος ἂν λάβω δεκάκισ τὰ 100, ἢ 500, ἢ 900 ἔξω 1000, ἢ 5000, ἢ 9000. Καὶ ἰδοὺ μία περίοδος συγκειμένη ἐκ μονάδων, δεκάδων, καὶ ἑκατοντάδων, τὸ πέρας τῆς ὁποίας εἶναι χιλιάδες.

Τώρα θελών ἐγὼ νὰ προχωρήσω περαιτέρω, λέγω τὰ ὅμια: τουτίσι μονάδες χιλιάδος, δεκάδες χιλιάδος, ἑκατοντάδες χιλιάδος, καὶ τοῦτο μέχρι τῶν 999999, ἔνθα ἂν προσθέσω μίαν μονάδα, ἔξω ἓν μιλλιόνιον. Ὡς μεχρὶ τοῦ μιλλιονίου ἐγὼ ἔχω δύο περιόδους συγκειμένας ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ἢ ἂν θείλῃς τὸ μιλλιόνιον ἔχει μετ' αὐτοῦ δύο τριάδας. Καὶ οὗτος εἶναι ὁ λόγος δι' ὃν περ ἐφάνη ἀριστὸν εἰς τοὺς ἀριθμητικούς τοῦ νὰ ζῖζωπιν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας εἰς πάντα ἀριθμὸν, ἀρχόμενοι δηλ. ἀπὸ τῶν δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἢ ἂν θείλῃς ἀπὸ τῶν μονάδων, ὥςτεπως 1,234,567, ἢ καὶ ἀπλῶς οὕτως: 1 234 567, ἔνθα δηλονότι ἡ μὲν πρώτη ἐκ τῶν δεξιῶν τριάς περιέχει μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας μονάδων ἢ τὴν δὲ δευτέρα μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας χιλιάδος.

13. Ἐκεῖνο ὅμως, ὅπερ ἠκολούθησε μέχρι τῶν ἑπτὰ χαρακτήρων, εἴτε ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ μίλ-

λιόνιου, ἀκολουθεῖ βέβαια ἀπαρραλλάκτως καὶ εἰς τοὺς ἀ-
κολουθοῦς ἑπτὰ χαρακτῆρας (καὶ οὕτω λαμβάνει ὄνομα
τὸ πέρας αὐτῶν διλλιόνιον, καὶ μετ' ἄλλους ἑπτὰ, τριλ-
λιόνιον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡς ὁράται εἰς τοῦτον τὸν ἀριθ-
μὸν: 7, 6 5 4, 3 2 1, 2 3 4, 5 6 7.

μονῶδες.
 ὀκτώδες.
 ἑκατονώδες.
 μ. χιλιάδος.
 δ. χιλιάδες.
 ε. χιλ.
 μ. μιλίων.
 δ. μιλ.
 ε. μιλ.
 μ. χιλ. μιλίων
 δ. χιλ. μιλ.
 ε. χιλ. μιλ.
 διλλίονα.

ὅς τις ὀηλούτι προσφέρεται ὥδεπως, ἑπτὰ διλλιούνια, ἑξα-
κόσiai πεντήκοντα τέσσαρες χιλιάδες, τριακόσiai εἴκοσι ἔν-
μιλλιούνια· διακόσiai τριάκοντα τέσσαρες χιλιάδες, πεν-
τακόσiai ἐξήκοντα ἑπτὰ (μονάδες ὀηλούτι.)

Ὡς ἐστὶν αἰκθεὶς σαφές, ὅτι οἶον λόγον ἔχει τὸ
 μιλλιόνιον πρὸς τὴν μονάδα, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ διλλιόνιον
 πρὸς τὸ μιλλιόνιον. καὶ ἐξ ἐναντίας ὡς ἡ μονὰς περιέχε-
 ται εἰς τὸ μιλλιόνιον (οὕτω καὶ τὸ μιλλιόνιον εἰς τὸ διλ-
 λιόνιον). ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ τριλλιόνιον ἔχει πρὸς τὸ διλ-
 λιόνιον, ὡς τὸ διλλιόνιον πρὸς τὸ μιλλιόνιον.

1

1,000,000

1,000,000,000,000

1,000,000,000,000,000,000

***Εν τετραλλ. 1,000,000,000,000,000,000,000,000**

Οἱ Γάλλοι ὅμως ἔχουσι διαφόρως πῶς τὰς ὀνομασίας τῶν χαρακτηῆρων τῶν ἀνωτέρω τοῦ μιλλιονίου: ὕεσιγ, ὀνο-

μάζουσι διλλιόνιον, ὅχι τὸν δέκατον τρίτον χαρακτήρα ἐνὸς ἀριθμοῦ ἢ ἀλλὰ τὸν δέκατον ἢ καὶ τετραλλιόνιον τὸν δέκατον τρίτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

14. Εἶναι ἴσως ἄξιον σημειώσεως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ διαμοῦνται ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν εἰς δύο, εἰς Περιττοὺς καὶ Ἀρτίους, καὶ ὀνομάζουσιν ἀρτίους πάντας ἐκείνους, οἵτινες διαμοῦνται διχα. Οὕτω τὰ 2, 4, 6, 8, 10, κ. τ. ξ. εἶναι ἄρτιοι ἢ καὶ περιττοὶ τὰ 3, 5, 7, 9, 11, κ. τ. ξ. Διαμοῦσιν ἔτι τοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἀφηρημένους καὶ συγκεκραμμένους. Πλὴν ἡ τοιαύτη διαίρεσις, ὡς ἐγὼ νομίζω, εἶναι ἀσύστατος. Καθότι ἂν ἀριθμὸς ἄλλο δὲν ἦναι κατ' αὐτοῦς, εἰμὴ ἰδέα (3).. καὶ ἂν αἱ ἰδέαι ἦναι ὅχι συγκεκραμμέναι (ὅηλον ὅτι οὔτε ὁ ἀριθμὸς). Πλὴν τοῦτο θίλομεν τὸ ἐξετάσει λεπτομερῶς κατὰ διαφόρους τόπους, ὡς ὅν οὐσιωδέστατον.

15. Μετὰ τὴν μέχρι τοῦδε διδασκαλίαν τῶν ἀριθμῶν: ὅ ἐστιν ἀφ' οὗ ἐμάθομεν καὶ τὴν ἀπόλυτον σημασίαν ἑκάστου χαρακτήρος (7), καὶ τὴν τοπικὴν, ἢ σχετικὴν (8), καὶ ὅτι ἄλλο δὲν εἶναι ἑκάστος τῶν ἀριθμῶν, εἰμὴ σιμὰ περιόδων ἐκ τριῶν χαρακτήρων: ἡμεῖς δὲν θίλομεν βέβαια ἀπαντήσει δυσκολίαν τινὰ τὸ νὰ γράψωμεν πάντα ἀπαγγελλόμενα ἀριθμῶν.

Μοὶ λέγετε, φέρε εἰπεῖν, νὰ γράψω δέκα ἐννέα. Ἐγὼ λοιπὸν σοχαζόμενος ἀμέσως ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι κατώτερος τῶν ἑκατὸν, συνάγω ὅτι σύγκειται ἐκ μόνων δύο χαρακτήρων (10): τουτέστιν ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.. καὶ ἔτι ἐπειδὴ ἡ μὲν δεκάς εἶναι μία, ἐννέα δ' αἱ μονάδες ἢ τούτου ἕνεκεν τὰ γράφω καὶ ἐγὼ οὕτως 19.

Ἄν ὅμως καί μοι εἰπῇ νὰ γράψω εἴκοσι ἢ τότε ἐπειδὴ καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει μόνον δεκάδας, καὶ τελείως μονάδας ἢ διὰ τοῦτο καὶ ἐγὼ θείλω γράψαι μηδὲν μὲν μονάδας, δεκάδας δὲ 2, οὕτως 20 (9).

Μοὶ λέγει τις νὰ γράψω πεντακόσια ἐξήκοντα τρία. Ἐγὼ λοιπὸν εὐχάρησμαι, ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἄρχεται ἐκ τῶν ἑκατοντάδων: ὅ ἐστιν ὅτι σύγκειται ἐκ τριῶν χαρακτήρων: πέντε ἑκατοντάδων ὁλῆ. ἕξ δεκάδων, καὶ τριῶν μονάδων, ὥς τὰ γράψω οὕτω 563. Εἰ δὲ καί μοι εἰπῇ νὰ γράψω πεντακόσια ἐξήκοντα ἢ τότε ἐπειδὴ καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει μὲν τελείως μονάδας, δεκάδας δὲ καὶ ἑκατοντάδας ἢ καὶ ἐγὼ πρέπει νὰ γράψω μηδὲν μονάδας, οὕτω 560. Εἰ δὲ καὶ προσφέρει πεντακόσια τρία ἢ τότε ἐπειδὴ καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς περιέχει τελείως δεκάδας ἢ διὰ τοῦτο ἐγὼ πρέπει νὰ γράψω μηδὲν εἰς τὸν τόπον αὐτῶν, οὕτω 563 (αὐτόν).

Μοὶ λέγει τις νὰ γράψω χίλια πεντακόσια ἐξήκοντα τρία. Ἐγὼ λοιπὸν εὐχάρησμαι εὐχάρησμαι, ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς ἄρχεται ἐκ χιλιάδας: ὅ ἐστιν ὅτι σύγκειται ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, καὶ ὅτι ὁ πρῶτος εἶναι μονάς, ὁ δεύτερος πέντε, ὁ τρίτος ἕξ, καὶ ὁ τέταρτος τρία ἢ ὥς τὰ γράψω καὶ ἐγὼ οὕτω 1563.

Τοῦτο αὐτὸ λοιπὸν πρέπει νὰ ἐκτελῇ τις εἰς τὴν ἀπαγγελίαν παντὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πλειόνων χαρακτήρων. Ἄν, λέγω, καὶ ὁ ἀπαγγελλόμενος ἀριθμὸς ἄρχεται ἐκ δεκάδων χιλιάδας ἢ πρέπει νὰ γράψῃ τις αὐτὸν διὰ πέντε χαρακτήρων: καὶ ἂν ἕξ ἑκατοντάδων χιλιά-

ους, δι' ἑξῆς καὶ ἂν ἐκ μιλλιονίων, δι' ἑπτά, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἄπαντα ὁμως ἡ δυσκολία περὶ τῆς γραφῆς καὶ ἀναγνώσεως τῶν ἀριθμῶν ἐξομαλίζεται διὰ μόνης τῆς γυμνάσεως ἢ δὲ γύμνασις ἀποκτᾶται ἐξ οὐθενὸς ἄλλου, ἢ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν, τουτέστι προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως, εἰς ἅπερ ἡδὴ ἐμβαίνομεν.

Κ Ε Φ. Β'.

Περὶ Σημείων.

16. Πρὶν ὁμως νὰ ἐμδῶμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτεθῇ διδασκαλία τις περὶ τινῶν σημείων, ἅπερ εἶναι ἀκαγκαιότατα εἰς τὴν διάλεκτον τῶν μαθητικῶν.

Ἡμεῖς λοιπὸν εἶδομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἔργον τοῦ νοῦς (3): τουτέστιν ἰδέα, ἕπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, εἶναι ἀφηρημένον καὶ ἄνευ ὑποσηρίγματος. Ἀλλ' εἶναι οἰκόμεν σαφές, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ θεὸν ἐδημιουργήθησαν ἁπλῶς καὶ ἐπὶ ματαίῳ ἢ ἄλλ' ἕνεκα τίνος: τουτέστι πρὸς ἐφαρμογὴν οὕτων αὐτοῦπάρκτων. Ὡς ἐν ᾧ τις ἀριθμεῖ, αὐτὸς ἐκφωνεῖ καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων, λέγων ὁηλονότι 5 ἄνθρωποι, 5 πλοῖα κ.τ.ξ. Πλὴν τὸ σκοπούμενον τοῦ ἀριθμοῦντος θεὸν εἶναι τοῦτο μόνον: εἶναι ἐν ταύτῳ τὰ νὰ φανερώσῃ καὶ τίνος εἶναι κτήματα τὰ ἀριθμούμενα. Ὅθεν λέγων τις 100 πρόβατα, αὐτὸς προστίθεται καὶ τὸ ἐμὰ, ἡ σὰ, ἡ ἐκείνου.. καὶ λέ-

γων τὸ, ὃ σῶλος εἶναι 100 νηῶν, προστίθεται καὶ τὸ Ἀγγλικός, ἢ Ῥωσσικός, ἢ καὶ τ. ξ. ἔνθα δηλονότι διὰ τοῦ ἐπιθέτου παρίσται τὴν ἀναφορὰν, ἢ κτήσιν τῶν ἀριθμουμένων πρὸς τὸν κτήτορα.

Πολλάκις ὅμως ἀντὶ τῶν κτητικῶν ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα τὸ ἔχω ῥῆμα, λέγοντες ἔχω 100 πρέσβια, ἢ 100 πλοῖα, ἢ ἄλλοιτι: ἔνθα δηλονότι τὸ ἔχω ἐμφανίζει τὴν κτήσιν, ἢ ἀναφορὰν τοῦ ἀριθμουμένου. Ταύτην λοιπὸν λέγω τὴν ἀναφορὰν οἱ Γεωμέτραι τὴν ἐκφράζουσι διὰ τούτου τοῦ σημείου +, εἰς ὅπερ ἐγὼ οἶδω ὄνομα Θέπει. Ὡς δὲ λέων νὰ ἐκθέσω ὅτι ἔχω 100 γρόσια καὶ ἄλλα 5, τὰ γράφω οὕτως $100 + 5$, ὅπερ δηλ. ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ 105. Ὡσαύτως καὶ τὰ $100 + 5 + 3 + 120$, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰ 228 (ὅπερ δηλονότι σημαίνει, ὅτι εἰς τὰς ἑκατὸν μονάδας πρῶτον πρόπει νὰ προσθέσω πέντε εἰς τὰς ἑκατὸν πέντε, ἄλλας τρεῖς καὶ τέλος εἰς τὰς ἑκατὸν ὀκτώ, ἄλλας ἑκατὸν εἴκοσι. Ὡς τὸ σημεῖον θέσει ἄλλο δὲν ἐμφανίζει, εἰμὴ σύνθεσιν ἀριθμῶν, ἢ μερῶν ἐνὸς ἀριθμοῦ (μερῶν ὅμοις ἀνίστην ἀληθοῖς, ἀλλέως ἤθελεν εἶναι πολλαπλασιασμός, καὶ ἔχι ἀρίθμησις. Συμπέρασμα λοιπὸν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς σύγκειται καὶ ἐξ ἴσων, καὶ ἀνίστων ἀλλήλοις μερῶν.

17. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ διὰ τοῦ θέσει σημείου ἐγὼ ἐκτίθημι τὰ μέρη τοῦ ὅλου. καὶ ἐπειδὴ τὰ μέρη ἐνὸς ὅλου εἶναι ἴσα μὲ αὐτὸ τὸ ὅλον (τούτου ἔνεκεν ἐγὼ δυνάμει νὰ ἐκθέσω τοῦτο διὰ τινος σημείου καὶ τοῦτο εἶναι ὅσο εὐθεῖαι παράλληλοι, ὡς τὸ =, ὅπερ καὶ Σημεῖον Γ' σότ η τ ο ς ὀνομάζεται. Οὕτω τὰ $100 + 5 + 3 + 120$

$= 228$, θέλει νὰ εἰπῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $100 + 5 + 3 + 120$ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν ἀριθμὸν 228 . Ὡς τὸ σημεῖον $=$ σημαίνει ἰσότητα εἰς τὰ δύο μέρη, ἅπερ παρᾶκεινται ἐκατέρωθεν αὐτοῦ. Τὸ πᾶν ὁμῶς: ὁ ἐς τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος μετὰ τῶν ἐκατέρωθεν αὐτοῦ μερῶν ὀνομάζεται Ἐξίσωσις, μέλη δὲ τῆς ἐξισώσεως, οἱ παρακειμενοὶ ἐξ ἐκατέρου τῶν μερῶν τοῦ σημείου ἀριθμοὶ. Οὕτως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $100 + 5 + 3 + 120 = 228$, τὸ πρῶτον μέλος εἶναι $100 + 5 + 3 + 120$, τὰ δὲ 228 , τὸ δευτερον ἐνθα, ὡς ὁράται, τὰ μέλη μὲς ἐξισώσεως εἶναι μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης, ὑπὸ διαφόρων ὁμῶς μορφῶν. Ὡς αὖ τῇ ἡ ἐξίσωσις τὸ $\alpha = \beta + \gamma$. τοῦτο ἤθελε νὰ εἰπῇ ὅτι τὸ α εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\beta + \gamma$. θέσει τοῦ γ ἂν δηλωσὶ ὑπετίθετο νὰ παριστᾷ ποσότητος γενικᾶς τὰ γράμματα α, β, γ . Ἐπειδὴ ὁμῶς καὶ πᾶς ἀριθμὸς εἶναι τοιοῦτον ὅλον, ὥς νὰ σύγκηται καὶ ἐκ διαφορετικῶν μερῶν (16): ὁ ἐς μεμερικευόμενον, ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς ὡς ὅλον θεωρούμενος, εἶναι δυνατόν νὰ ἐκτεθῇ διὰ διαφόρων μορφῶν ἡ τούτου ἔννεκεν, εἰς τὰς ἐξισώσεις, δὲν εἶναι ἀνάγκη τὸ νὰ ᾔῃαι τὸ ἐν μέλος πάντοτε ὅλον ἢ ἀλλ' εἶναι τὸ αὐτὸ, καὶ αὖ ἔχῃ μορφήν διάφορον. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὸ $3 + 7$ εἶναι ἴσον μὲ 10 (διὰ τοῦτο δύναμαι νὰ τὸ βάλω εἰς ἐξίσωσιν λέγων $3 + 7 = 10$). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ $4 + 6$ εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ 10 ἢ διὰ τοῦτο εἶναι ὅχι ὀλιγώτερον ὀρλόν καὶ τὸ $3 + 7 = 4 + 6$. ὡσαύτως καὶ τὸ $4 + 6 = 2 + 3 + 1 + 4$, καὶ ἄλλως διαφόρως.

18. Τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον — σημαίνει ἀγρίεσθαι: ὁ

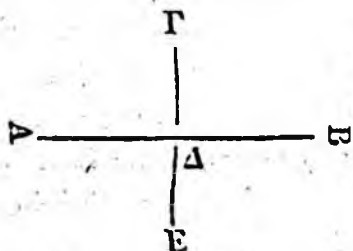
ἔστιν ἐμφανίζει, ὅτι ὁ μετ' αὐτὸ ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρε-
θῇ ἀπὸ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, εἰς ὕπερ ἐγὼ δίδω ὄνομα Ἀπο-
θετικῶν. Οὕτως $100 - 5$, θέλει νὰ εἰπῇ ὅτι ἀπὸ τοῦ
ἀριθμοῦ ἑκατὸν ἀφῆρηται 5. Ὅθεν δύναμαι νὰ θῶ τὸ
πρᾶγμα καὶ εἰς ἐξίσωσιν ὡδέπως $100 - 5 = 95$. Τοι-
αύτη εἶναι καὶ ἡ ἐξίσωσις $100 - 5 = 80 + 15$, καὶ
ἄλλως διαφόρως (17). Ὡς καὶ τὸ $\alpha - \beta = \gamma$ σημαίνει
ὅτι τῆς ποσότητος β ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς ποσότητος α ,
τὸ κατάλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὴν ποσότητα γ .

Σημειωτέον ὅμως ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δεχόμενος τὸ
σημεῖον + ὀνομάζεται Θετικὸς, καὶ Ἀπορατικὸς, ἢ Ἀπο-
θετικὸς, ὅταν τὸ —. Πᾶς ὅμως ἀριθμὸς, ὅστις σερεῖται
τοῦ +, ἢ — σημείου, οὗτος ἔχει σωπηλῶς πως ὑπονοού-
μενον τὸ + σημείου. Καὶ πρὸς ταῦτοις εἴθισαι εἰς ἑκάτε-
ρον μέλος τῆς ἐξίσωσις νὰ προστίθεται ἡ θετικὴ ποσό-
της, καὶ οὐδέποτε ἡ ἀποθετικὴ.

19. Διὰ νὰ λάθῃ ὅμως τις ἰδέαν καθαρὰν τῶν Θε-
τικῶν καὶ ἀποθετικῶν ἀριθμῶν, ἡ ποσότητων εἶναι
ἀνάγκη πᾶσιν νὰ σοχασθῇ, ὅτι ἡ λέξις Θετικὸς καὶ
ἀποθετικὸς δὲν σημαίνει πρᾶγμα, εἴτε ποσότητα εἴ
ἀλλ' ἀναφορὰν ποσότητος πρὸς τινα. Καὶ ἐπομένως Θε-
τικοὶ καὶ ἀποθετικοὶ ἀριθμοὶ διαφέρουσιν ὁλοτελῶς ἀλλή-
λων: εἶναι δηλονότι πραγματικῶς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, καὶ
διαφέρουσι μόνον κατὰ τὴν ἀναφορὰν, ὅπερ ἤθελε γένῃ
σαφές ἐξου ἐπὶ παραδειγματίων.

Οἱ Ἀριθμητικοὶ παριστᾶσι τὴν μὲν περιουσίαν αὐτῶν
διὰ τοῦ θετικοῦ σημείου + τὸ δὲ χρεὸς διὰ τοῦ ἀποθετικοῦ.
Ὡς ὅταν ἔχω ἑκατὸν γρόσια, ἐγὼ τὰ γράφω οὕτως +

100==: καὶ ὅταν χρεωσῶ πεντήκοντα, τὰ γράψω οὕτω—50.. καὶ ἄν τις χρεωσῶν μοι γρόσια 100, μοι ἔφερνε τὰ 10 (ἐγὼ ἔπρεπε νὰ τὰ γράψω οὕτως 100—10. Ἀλλ' εἶναι ἐκτὸς πάσης ἀντιλογίας, ὅτι τὰ γρόσια εἶναι ἀείποτε γρόσια: τουτέστι μονάδες μεταλλικαί: καὶ ἐν ᾧ ὁηλ. εἶναι εἰς τὴν ἐμὴν ἐξουσίαν, καὶ ἐν ᾧ εἰς ἄλλου. Ὡς τὸ θετικὸς καὶ τὸ ἀποθετικὸς διαφέρουσι μόνον κατὰ τὴν ἀναφορὰν, εἴτε κατὰ τὸ ποῖόν. Τοῦτο αὐτὸ ἀκολουθεῖ καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ἐς τὴν λέγω μία εὐθεῖα,



εἴτε μία ποσότης, ὡς ΑΒ.. ἐπὶ ταύτης κατὰ γωνίαν μίαν εὐθεῖαν καθέτως, τὴν ΓΔ. εἴτε μίαν ἄλλην ποσότητα, ἥτις εἶναι βεβῆλα ποσότης θετικῇ. Τώρα ἂν κατὰ ξὺν

καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ ἀπέναντι μέρους, ὡς τὴν ΕΔ, ἐπ' αὐτῆς ταύτης τῆς ΑΒ, αὕτη θέλει εἶναι ὅχι ὀλιγώτερον ποσότης, ποσότης ὅμως ἀποθετικῇ: ὅ ἐστιν ἔξει ἀναφορὰν πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἐναντίαν, ἢ ἢ ΓΔ εὐθεῖα. Σημειωτέον ὅμως ὅτι ἐκεῖτο παρ' ἐμοὶ τὸ νὰ λάβω διὰ θετικὴν ποσότητα καὶ τὴν ΕΔ. Πλὴν ἂν τοῦτο ἐποίουν (ἢν ἀδύνατον εἰς ἐμὲ τὸ νὰ μὴν ἐκλάβω πλέον τὴν ΓΔ εὐθεῖαν δι' ἀποθετικὴν ποσότητα. Σημειωτέον δ' ἔτι, ὅτι αἱ ἀποθετικαὶ ποσότητες εἶναι κατὰ τὴν ἀναφορὰν ἐλάσσονες τοῦ Ο. Καθότι ἐγὼ εἰμὶ πλουσιώτερος (ὅταν ἡ ἐμὴ περιουσία εἶναι μηδὲν, ἢ ὅταν χρεωσῶ: ὅ ἐστιν ὅταν ἔχω—5000 γρ'.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ οἱ ἀποθετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὅχι ὀλιγώτερον ἀριθμοὶ (τοῦτου ἕνεκεν ἐγὼ δύναμαι νὰ ἐκτε-

λέσω καὶ διὰ μόνων αὐτῶν ἐξίσωσιν. Οὕτως — $10 - 5 = -15$, καὶ — $100 - 5 - 3 - 120 = -228$. Πλὴν ὡς ἔχομεν σημεῖα ἐξισώσεως (οὕτω καὶ ἀνισότητος.

20. Καθότι τοῦτο τὸ σημεῖον $>$ σημαίνει ὑπεροχήν, πρὸς ὅπερ μέρος κεῖται κεχηγός (καὶ οὕτω μὲν $>$ κείμενον, ὀνομάζεται πλέον (οὕτω δὲ $<$) ἥττον. Οὕτω τὰ $4 > 3$ σημαίνουσιν ὅτι τὰ 4 εἶναι μείζονα τῶν 3. Ὡσαύτως καὶ ἂν ᾖ ἡ $\alpha > \beta$, τοῦτο ἠθέλει σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης α εἶναι μείζων τῆς β , χωρὶς ὅμως νὰ λέγῃ, καὶ ὁποῖαίτινες εἶναι αἱ ποσότητες α, β . Τὰ δὲ $3 < 4$ σημαίνουσιν ὅτι τὰ 3 εἶναι ἐλάσσονα τῶν 4. Καὶ ἂν ἐν γένει ᾖ $\beta < \alpha$ ἠθέλει σημαίνει ὅτι ἡ ποσότης β εἶναι ἐλάσσων τῆς ποσότητος α . Ταῦτα εἰσὶ σημεῖα πολλάκις χρήσιμα (καθότι οἱ μαθηματικοὶ πολλάκις ἔχουσι χρεῖαν εἰς τοὺς λογαριασμοὺς αὐτῶν, ὅχι μόνον ἐξισώσεως, ἀλλὰ καὶ ἀπλῶς συγκρίσεως, ὑπεροχῆς, ἢ ὑφέσεως δηλονότι ποσότητος πρὸς ποσότητα.

21. Τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον $\times$ σημαίνει πολλαπλασιασμόν: τουτέστιν οἱ ἀριθμοί, οἵτινες κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν ὑπ' ἀλλήλων. Οὕτως 4×6 προφέρεται 4 ἐπὶ τὸ 6, ἢ 4 πολλαπλασιασθὲν διὰ τοῦ 6: ἢ καὶ ἂν θέλῃς, σημαίνει νὰ λάβῃ τις ἑξάκις τὰ 4 (καὶ τούτου ἔνεκεν δύναμαι νὰ τὸ ἐκθίσω καὶ οὕτω. $4 \times 6 = 24$, ὁμοίως καὶ $3 \times 15 = 45$, καὶ $10 \times 10 = 100$.

Πολλάκις ὅμως οἱ μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται διὰ τοῦ σημεῖου πολλαπλασιασμοῦ μίαν στιγμὴν, παρεντιθεμένην μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν, οὕτως $4 \cdot 6 = 24$, καὶ $10 \cdot$

$10 = 100$. Ἐνῶστε πάλιν καὶ παρέμβειν, οὕτω $(3+4)2 = 3 \times 2 + 4 \times 2$: ὁ ἐστὶ, σημαίνει ὅτι τὰ 2 πολλαπλασιάζουσι καὶ τὰ 3, καὶ τὰ 4.

22. Τέλος πάντων μία γραμμὴ ὀριζόντως, κειμένη μεταξύ δύο ἀριθμῶν, εἶναι σημεῖον διαίρεσεως: τοιούτιν ὁ μὲν ἀκολουθεῖ παρίσχησι τὸ ὅλον (ὁ δὲ ὑποκάτωθεν ὅτι τοιούτου μέρους: ὁ ἐστὶ ποσάκις εἰσέρχεται εἰς αὐτό. Οὕτως $\frac{24}{6} = 4$, καὶ $\frac{100}{10} = 10$.

Οὐδ' αὖτως ὁμως ὀλιγώτερον εἶναι σημεῖον διαίρεσεως καὶ δύο συγκλινόμενα μεταξύ δύο ἀριθμῶν. Οὕτως $24 : 6 = 4$, καὶ $100 : 10 = 10$.

Κ Ε Φ. Γ'.

Περὶ Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

23. Τὸ πρῶτον λοιπὸν πᾶθος, ἡ ιδιότης τῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἡ πρόσθεσις. Καὶ τὸ νὰ ἐκθέσῃ τις δι' ἑνὸς μόνου ἀριθμοῦ τὴν σημασίαν πολλῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται Προσθεσις. Ὡς πρόσθεσις εἶναι ἀριθμητικὸν πρόσθημα, ἐσθύντων τῶν μερῶν ἑνὸς ὅλου, νὰ εὕρῃ τις τὸ ὅλον. Κεφάλαιον δ' ὀνομάζεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἡ τὸ ὅλον.

Καὶ ἂν μὲν ἐκ τῶν ἐσθύντων ἀριθμῶν ᾖ ὁ εἰς μονάδας, τότε εἶναι χρεῖς οὐδενὸς κανόνος. Καθότι ἂν μοι δοῖται νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμὸν 10 τὸν 7 (ἐγὼ θελω) προσθήσει αὐτὸν κατὰ τὰς ἀρχάς τῆς ἐπαριθμήσεως: ὁ ἐστὶ θελω προσθήσει εἰς τὰς 10 μονάδας ἄλλας 7, καὶ ἔξω

17, ἅπερ δύναμαι νὰ βάλω καὶ εἰς ἐξίσωσιν ὡδέπως $10+7=17$. Καὶ ἂν ᾖναι χρεῖα νὰ προσθέσω εἰς τὸν ἀριθμὸν 228 τὸν 7, ἐγὼ θέλω προσθέσω 7 μονάδας καὶ ἔξω διὰ κεφάλαιον 235: ὃ ἐς τὸ πᾶν ἐκτελεῖται διὰ μόνης τῆς μνήμης. Ἐν ὅμως οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ σύγκηνται ἐκ πολλῶν χαρακτηρῶν τότε εἶναι χρεῖα πρὸς εὐρεσιν τοῦ κεφαλαίου αὐτῶν ὁ ἐξῆς τρόπος.

Γράφω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς κατὰ τάξιν, ὥς αἱ μὲν μονάδες τοῦ ἐνὸς νὰ ὑπόκηνται ὑπὸ τῶν μονάδων τοῦ ἄλλου, αἱ δὲ δεκάδες ὑπὸ τῶν δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς: ὃ ἐξίν αἱ μὲν μονάδες αὐτῶν νὰ ἐκτελῶσι μίαν σήλην, αἱ δὲ δεκάδες ἄλλην, καὶ ἄλλην αἱ ἑκατοντάδες, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. εἶτα ἄγω μίαν γραμμὴν ὑπὸ πάντων τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειτα α'. ἀρχομαι τῆς προσθέσεως, ἣν ἔμαθον (16) ἐκ τῆς σήλης τῶν μονάδων, γράφω τὸ κεφάλαιον αὐτῶν ὑποκάτω τῶν μονάδων. β'. σοχάζομαι τὰς δεκάδας ὡς μονάδας, καὶ ἐκτελῶ εἰς αὐτάς τὸ ὅμοιον. γ'. σοχάζομαι τὰς ἑκατοντάδας ὡς μονάδας, καὶ ἐκτελῶ τοῦτο αὐτὸ καὶ οὕτως ἐπακολουθῶ νὰ ἐκτελῶ τὸ αὐτὸ εἰς ὅσας σήλας ἤθελον ἔχει οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν 64392, 1603. Γράφω λοιπὸν αὐτοὺς ὡς ἐνταῦθα ὁρῶνται, ἄγων ὑπ' αὐτῶν γραμμὴν ὀριζοντίως.

64392

1603

Κεφάλ. 65995

Ἐπειτα ἀρχομαι ἐκ τῶν μονάδων, ὡδέ πως. 3 καὶ 2

παράδοσι 5, ἅπερ γράφω ὑποκάτω τῆς πρώτης σήλης.. β'. περὶ
 οὗ εἰς τὰς δεκάδας, λέγων 0 καὶ 9 ποιοῦσιν 9, ἅπερ γράφω
 ὑποκάτω τῆς δευτέρας σήλης.. γ'. ἐρχομαι εἰς τὴν τρίτην
 σήλην, λέγων 6 καὶ 3 ποιοῦσιν 9, ἅπερ γράφω ὑποκάτω ταύ-
 τῆς.. δ'. ἐρχόμενος εἰς τὴν τετάρτην σήλην, λέγω 1 καὶ 4
 ποιοῦσι 5, ἅπερ γράφω ὑποκάτω ταύτης.. καὶ τέλος ἐρχο-
 μαί εἰς τὴν πέμπτην σήλην, λέγων μηδὲν καὶ 6 ποιοῦσι 6,
 καὶ γράφω ταῦτα ὑποκάτω αὐτῆς. Ὡς οὖν ἀριθμὸς 65995
 εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῶν δύο δοθέντων ἀριθ-
 μῶν.. ἐκ τοῦ οἷοι περιέχει τὰς μονάδας αὐτῶν, τὰς δε-
 κάδας, τὰς ἑκατοντάδας, τὰς μονάδας χιλιάδος, καὶ τὰς
 δεκάδας χιλιάδος, ὡς ἐκ τῆς ἐργασίας ὁρᾶται.

β'. Ζητήσθω τὸ κεφάλαιον τῶν ἐξῆς τεσσάρων ἀ-
 ριθμῶν: 65995, 64392, 1603, 18, οὓς περ ἐγὼ γρά-
 φω ὡς ὁρῶνται.

65995

64392

1603

18

Κεφάλ. 132008

Εἶτα ἀρχόμενος, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἐκ τῆς σήλης
 τῶν μονάδων, λέγω $8 + 3 + 2 + 5 = 18$ καὶ ἔπρεπε
 μὲν νὰ ὑπογράψω τὰς 18 μονάδας, εἴτε τὴν μίαν δεκά-
 δα, καὶ τὰς 8 μονάδας ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ἐργασία εἶναι
 ἀτελείωτος: ὁ ἐστὶν ἐπειδὴ καὶ ἔχω νὰ γράψω καὶ ἄλλας
 δεκάδας τοῦτου ἕνεκεν γράφω μόνον τὰς μονάδας: τὰ 8
 λέγω, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰ 10, διὰ νὰ τὰ ἐνώσω
 ὡς ἄλλην μονάδα εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἐξῆς σήλης..

καὶ διὰ τοῦτο λέγω $1 + 1 + 0 + 9 + 9 = 20$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὸ 0 ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰς 2 ἑκατοντάδας, διὰ τὰς ἐνώσω ὡς ἄλλας μονάδας εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἐξῆς σήλης. Ὡς λέγω $2 + 6 + 3 + 9 = 20$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὸ 0 ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰς 2 χιλιάδας, διὰ τὰς ἐνώσω ὡς ἄλλας μονάδας εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἐξῆς σήλης. Ὡς λέγω $2 + 1 + 4 + 5 = 12$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὰ 2 ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης, καὶ κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὸ 1, εἰς τὴν δεκάδα τῆς χιλιάδος, διὰ τὰς ἐνώσω, ὡς ἄλλην μονάδα, εἰς τοὺς χαρακτῆρας τῆς ἐξῆς σήλης. Ὡς λέγω $1 + 6 + 6 = 13$, ἐξ ὧν γράφω μόνον τὰ 3 ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης. καὶ ἐπειδὴ οὐκ εἶναι πλέον ἄλλη σήλη, διὰ τοῦτο γράφω καὶ τὴν ἀνὰ χεῖρας μονάδα εἰς τὸν πρὸ ταύτης χώρον, ὡς αὐτὴ ἐν ἡμῶν καὶ ἄλλη σήλη. Ὡς ὁ ἀριθμὸς 132008 εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῶν τεσσάρων δευτέρων ἀριθμῶν. καὶ τοῦτο, ἐκ τοῦ διότι περιέχει ἀπᾶς τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας, μονάδας χιλιάδος, καὶ δεκάδας χιλιάδος αὐτῶν.

24. Εἶναι βέβαιον ἄξιον σημειώσεως ὅτι ἡ δεκάς τῶν χαρακτῆρων τῆς δευτέρας σήλης οὐκ εἶναι ἀπλῶς δεκάς, ἀλλ' ἑκατοντάς, καὶ ἡ δεκάς τῆς τρίτης, ὅχι δεκάς, ἀλλὰ χιλιάς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ ὁ λόγος εἶναι ὅτι σαφής. Καθότι ὅταν εἰς τὴν σήλην τῶν δεκάδων εἴπον $1 + 1 + 0 + 9 + 9 = 20$, ἦν τὸ αὐτὸ ὡς αὐτὴ νὰ εἴπω $10 + 10 + 00 + 90 + 90 = 200$, ἐν ἡμῶν. τὰ

2 δὲν εἶναι δεκάδες, ἀλλ' ἑκατοντάδες. Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν ἐξῆς σηλῶν.

β'. Ὅτι πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς πολλοὺς μετὰ μηδενικῶν. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $18 = 10 + 8$, καὶ ὁ $65995 = 5 + 90 + 900 + 5000 + 60000$.. ἐκ τοῦ οὗτοι.

$$\begin{array}{r}
 60000 \\
 5000 \\
 900 \\
 90 \\
 5 \\
 \hline
 65995
 \end{array}$$

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶναι ἐπαριθμησίς τις, ἔχουσα τὰς μονάδας, ἡ μέρη αὐτὰ ἀλλήλοις (16).

25. Ἡ ἐργασία δὲ τῆς Ἀφαιρέσεως εἶναι ἐκ διαμέτρου ἐναντία μὲ τὴν τῆς προσθέσεως. Ὡς: ἀφαιρέσεις εἶναι, δοθέντων δύο ἀριθμῶν νὰ εὔρηται τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μείζονος, ὡς πρὸς τὸν ἐλάχιστον. Διαφορὰ ἐννοεῖται αὕτη ἡ ὑπεροχὴ, Ἀφαιρετέος ὁ ἐλάχιστος, καὶ Μειωτέος ἡθελεν ὀνομασθῇ ὁ μείζων.

Διὰ νὰ ἐκτελέσῃ λοιπὸν τις ταύτην τὴν ἐργασίαν, εἶναι ἀνάγκη, πρῶτον νὰ γράψῃ τὸν μείζονα ἀριθμὸν, εἴτε τὸν μειωτέον, καὶ δευτέρου ὑπ' αὐτοῦ τοῦ ἐλάχιστου, εἴτε τὸν ἀφαιρετέον, κατὰ στήλην τῶν μονάδων, δεκάδων, καὶ τ. ξ. ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν δηλαδὴ, καὶ ἀγαγὼν γραμμὴν ὑποκάτω αὐτῶν, νὰ ᾄρξῃται τῆς ἀφαιρέσεως ἀνὰ μέρος: μονάδων δηλονότι ἐκ μονάδων, δεκάδων ἐκ δεκάδων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ ἀφαιρέσις τοῦ ἀριθμοῦ
1603 ἀπὸ τοῦ 65995. Καὶ ἐγὼ τοὺς γράφω, ὡς ἐπὶ:

65995

1603

Διαφορ. 64392

Ἀρχομαι δὲ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τῶν μονάδων, λέγων 3 μέχρι τῶν 5, 2.. ἐκ τοῦ διότι $5 - 3 = 2$.. ὥς ἐ υπογράψω 2 ὑπὸ τῆς σήλης τῶν μονάδων. Καὶ μεταβαίνων εἰς τὴν διαφοράν τῶν δεκάδων λέγω, 0 μέχρι τῶν 9, 9.. ἐκ τοῦ διότι $9 - 0 = 9$ ὥς ἐ υπογράψω τὰ 9 ὑπὸ τῆς σήλης τῶν δεκάδων. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν σήλην τῶν ἑκατοντάδων λέγω, 6 μέχρι τῶν 9, 3.. ἐκ τοῦ διότι $9 - 6 = 3$ ὥς ἐ υπογράψω τὰ 3 ὑπὸ τῆς σήλης τῶν ἑκατοντάδων. Ὡσαύτως ἐρχόμενος εἰς τὴν σήλην τῶν χιλιάδων λέγω, 1 μέχρι τῶν 5, 4 ἐκ τοῦ διότι $5 - 1 = 4$ ὥς ἐ υπογράψω τὰ 4 ὑπὸ τῆς σήλης τῶν χιλιάδων. Καὶ τέλος μεταβαίνων εἰς τὴν σήλην τῶν δεκάδων τῆς χιλιάδος ἐνθα ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀφαιρετέος δὲν ἔχει χαρακτῆρα πλέον (διὰ τοῦτο υπογράψω ὀλόκληρον τὸν χαρακτῆρα 6 τοῦ μειωτέου. Καὶ οὕτως ἔχω 64372 διὰ ζητουμένην διαφοράν. Ἦν ὁμως δυνατόν εἰ χαρακτῆρες τοῦ μειωτέου νὰ ἦναι μείζονες τῶν τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τότε τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι ἥττον ἀπλούστερον, ὡς εἰς τὸ ἐξῆς παράδειγμα.

Ζητείσθω ἡ διαφορά τῶν ἀριθμῶν 255234, καὶ 64392, οὗς περ τάττω ὡς ἀνωτέρω.

255234

-64392

Διαφ. 190842

Καὶ λέγω $4-2=2$ (καὶ ὑπογράφω τὸ 2 ὑπὸ τὴν σήλην τῶν μονάδων. Ἐρχόμενος ὅμως εἰς τὴν σήλην τῶν δεκάδων, ἐπειδὴ καὶ βλέπω ὅτι τὰ 9 δὲν ἀφαιρούνται ἀπὸ τῶν 3 (τούτου ἕνεκεν θανειζόμενος μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐξῆς χαρακτῆρος 2) τοῦ μειωτέου, ἥτις εἶναι βέβαια ἴση μὲ δεκά μονάδας, ὡς κατέχοντα τὴν δευτέραν τοποθεσίαν, λέγω, $13-9=4$, καὶ ὑπογράφω τὰ 4. Ἐρχόμενος δ' εἰς τὴν σήλην τῶν ἑκατοντάδων, λέγω, 3 οὐχὶ μέχρι τῶν 2, ἀλλὰ μέχρι τοῦ 1.. ἐκ τοῦ οἷοι δὴλ. ἐθανείσθην ἐξ αὐτοῦ μίαν μονάδα.. ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὸ 3 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 1 (τούτου ἕνεκεν θανείζομαι μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγὺς χαρακτῆρος 5, καὶ οὕτως ἔχω $11-3=8$, καὶ ὑπογράφω τὰ 8. Ἐρχομαι δ' εἰς τὴν σήλην τῶν χιλιάδων, λέγων 4, μέχρι τῶν 4, 0.. ἐκ τοῦ οἷοι δὴλονότι ἐθανείσθην παρ' αὐτοῦ μονάδα, καὶ ὑπογράφω τὸ 0. Καὶ τέλος ἐρχόμενος εἰς τὴν σήλην τῶν δεκάκισ χιλιάδων, λέγω 6 μέχρι τῶν 15, 9 (καὶ ὑπογράφω τὰ 9. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰς ἑκατοντάκισ χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἐρχόμενος δὲν εὐρίσκω τίποτε, ἔπρεπε γὰρ ὑπογράφω τὰ 2 τοῦ μειωτέου (ἀλλ' ἐπειδὴ ἐθανείσθην ἐξ αὐτῶν μίαν μονάδα (γράφω 1, καὶ ἔχω διὰ διαφορὰν τὸν ἀριθμὸν 190842.

Ζητήσθω τρίτον ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 500 000, 1350, οὓς περ τάττω ὡς ἑνωτέρω.

$$\begin{array}{r}
 500\ 000 \\
 -1350 \\
 \hline
 498650
 \end{array}$$

Διαφ.

Καὶ λέγω $0-0=0$ καὶ ὑπογράφω 0. Μετα-

βαίνω εἰς τὴν δευτέραν στήλην, καὶ βλέπων ὅτι τὸ 5 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 0, βιάζομαι νὰ θανειπθῶ μίαν μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγύς χαρακτηῖρος. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ οὗτος εἶναι μηδέν, ὡσαύτως καὶ οἱ μετ' αὐτὸν διὰ τοῦτο θανείζομαι τὴν μονάδα ἀπὸ τοῦ χαρακτηῖρος 5 καὶ οὕτω τρέπω τὸν δευτέρα ἀριθμὸν εἰς δύο, ὡς ἔπικ, $500000 = 400000 + 100000$. εἶτα ἐκ τοῦ 100000 ἀριθμοῦ θανείζομαι αὖθις μονάδα ὑπὲρ τοῦ μετ' αὐτὸν μηδενικοῦ, καὶ οὕτως ἀκολουθῶς. ὅθεν ἦν ὡσάν ν' εἶχον $500000 = 400000 + 100000 = 400000 + 90000 + 10000 = 400000 + 90000 + 9000 + 1000 = 400000 + 90000 + 9000 + 900 + 100 = 400000 + 90000 + 9000 + 900 + 90 + 10 = 499990 + 10$ καὶ τότε λέγω $10 - 5 = 5$ καὶ ὑπογράφω τὰ 5. Εἶτα μεταβαίνων εἰς τὴν τρίτην στήλην, λέγω $9 - 3 = 6$ καὶ ὑπογράφω τὰ 6. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν τετάρτην στήλην, λέγω $9 - 1 = 8$ καὶ ὑπογράφω τὰ 8. Ἐρχόμενος δ' εἰς τὴν πέμπτην στήλην ἐπειδὴ δὲν εὐρίσκω τι πρὸς ἀφαίρεσιν, ἔπρεπε μὲν νὰ ὑπογράψω τὸ 10 (ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ προέλαβον μονάδα ὑπογράφω τὰ 9. Ὡσαύτως καὶ εἰς τὴν ἕκτην στήλην ὑπογράφω 4 ἀντὶ τῶν 5 καὶ οὕτως ἔχω διαφορὰν 498650.

26. Ἡ βάσις δὲ εἴτε δοκιμὴ τῆς ἀφαίρεσεως τοῦ ἂν δηλονότι δὲν παρενέπεσε λάθος τι, γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως. Καθότι ἐπειδὴ καὶ αὗται εἶναι δύο ἐργασίαι ἐκ διαμέτρου ἐναντίαι (25) ὁ δὲ ὅλον ὅτι ἂν τις προσθέσῃ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τὴν διαφορὰν εἴξει διὰ κεφάλαιον τὸν μειωτέον, εἴτε τὸν μείζονα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ διὰ τῆς ἀφαίρεσεως τοῦ ἀριθμοῦ 1350,

ἀπὸ τοῦ 500000 εὗρον διαφοράν 498650 (αὐτόν!) ὡς
 ἐῖλον ὅτι διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν τῶν 478640
 +1350, ἔξω διὰ κεφάλαιον τοῦ 500000, ὡς καὶ ὁράται.

$$\begin{array}{r} 478650 \\ 1350 \\ \hline 500000 \end{array}$$

ὥπερ ἐηλονότι ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ, ἂν ᾖναι 500000—
 1350=478650 ἔσαι ὡσαύτως καὶ 500000=4786
 50+1350.

27. Ὡς καὶ ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως ἤθελε γένοι
 διὰ τῆς ἀφαιρέσεως. Καθότι ἂν ᾖναι ἀληθὲς ὅτι τὰ 500000
 =498650+1350 ἐπίσης θέλει εἶναι ἀληθὲς καὶ τὸ
 τοῦτου ἐναντίον: ὅ ἐστιν ὅτι 500000—1350=498650.

Πλὴν ἡ τοιαύτη ἀπόπειρα ἤθελεν εἶναι ἐπιμοχθιστά-
 τη, ὅταν οἱ προστιθέμενοι τῶν ἀριθμῶν ᾖναι πολλοὶ καὶ
 διὰ τοῦτο προκρινέας ὁ ἐξῆς τρόπος.

$$\begin{array}{r} 65995 \\ 64392 \\ 1603 \\ 18 \\ \hline 12 \\ 10 \\ 18 \\ 19 \\ 18 \\ \hline 132008 \end{array}$$

Τάτω δηλ. τοὺς ἐσθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἀνωτέρω (22) καὶ
 ἀρχομαι τῆς προσθέσεως αὐτῶν (πλὴν ὅχι ἐκ τῶν

ἀξίων (ἀλλ' ἐκ τῶν ἀριστερῶν λέγων $6+6=12$ (καὶ γράφω ὑπὸ τῆς σήλης αὐτῶν καὶ τὰ 12. Μεταβαίνω εἰς τὴν ἐξῆς σήλην λέγων $5+4+1=10$ (καὶ γράφω ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης τὰ 10. Μεταβαίνω εἰς τὴν τρίτην σήλην λέγων $9+3+6=18$ (καὶ ὑπογράφω τὰ 18. Μεταβαίνω εἰς τὴν τετάρτην σήλην λέγων $9+9+0+1=19$ (καὶ γράφω ὑποκάτω ταύτης τῆς σήλης τὰ 19. Καὶ τέλος φθάσας εἰς τὴν σήλην τῶν μονάδων λέγω $5+2+3+8=18$ (καὶ ὑπογράφω τὰ 18 (καὶ ὥτως ἔχω διὰ κεφάλαιον τὸν ἀριθμὸν 132008, ὡς δηλονότι καὶ κατὰ τὸν ἄλλον τρόπον (αὐτόν).

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι καὶ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐξίστισις τις (17).

28. Εἶναι βέβαια ἄξιον σημειώσας ὅτι οὔτε τὸ σημεῖον — σημαίνει πάντοτε ἀφαίρεσιν, ἀλλὰ καὶ πρόσθεσιν (οὔτε τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως + σημαίνει πάντοτε πρόσθεσιν, ἀλλὰ καὶ ἀφαίρεσιν. Πράγμα δηλονότι ἐναντίον τῆς κοινῆς ἰδέας τῶν μαθηματικῶν. Καθότι κυρίως τὸ σημεῖον — τί-ἄλλο σημαίνει, ἢ πρόσθεσιν, ἢ ὑπερβαίνει ποσότητος τινὸς (πλὴν ἀποθετικῆς; Ὡς αὖ ἡ πρὸ αὐτοῦ ποσότης ἦναι ἐπίσης ἀποθετικὴ (τότε τοῦ ὅλου ἀποκαθιστάμενου μείζονος, ἢ πρότερον (τὸ σημεῖον — προσέθετο καὶ δὲν ἀφείλε βέβαια. Οὕτως ἄν μοι ζητηθῇ νὰ ἀφαιρέσω 100 μονάδας ἐκ τῶν — 150 (πῶς; ἄλλως ἔχω νὰ τὰ γράψω, ἢ οὕτως — 150 — 100: ἅπερ δηλονότι εἶναι — 250, εἶναι τὰ — 250 > — 150; Ὡς αὖτις νὰ ἐπακρωλυθῇ ἐλάττωσις εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, συνέδη αὐξήσις (καὶ τοῦτο ἡμεῖς, ὡς φαίνεται, τὸ ἐνομαζόμενον πρόσθεσιν.

"Ετι ἂν μοι ζητηθῇ νὰ προσθέσω 50 μονάδας εἰς τὰς —150 (πῶς — ἄλλως ἔχω νὰ τὰ γράψω, ἢ οὕτως —150 + 50 : ὅπερ δηλονότι εἶναι = —100, ἔνθα τὰ —100 < —150; "Ως ἀντὶ νὰ ἐπακολουθήσῃ αὐξήσις εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, συνέβη ἐλάττωσις (καὶ τοῦτο ἡμεῖς, ὡς φαίνεται, τὸ ὀνομάζομεν ἀφαίρεσιν.

"Ως ἀφαίρεσις ἐν γένει ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐναντιότης σημείων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς δοθέντας.. καὶ πρόσθεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ταυτότης σημείων εἰς αὐτοὺς, εἴτε θετικὰ δηλονότι ἤθελεν εἶναι, εἴτε ἀποθετικὰ τὰ σημεία.

Κ Ε Φ. Δ'.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

29. Σ υμβαίνει ὅμως πολλάκις εἰς τὴν πρόσθεσιν οἱ ἀριθμοὶ νὰ ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις, ὡς $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ (καὶ τότε ἡ πρόσθεσις ἀλλάττει ὄνομα, καὶ ὀνομάζεται Πολλαπλασιασμός, ἣτις ἐκτίθεται οὕτως $3 \times 4 = 12$ (20). Πολλαπλασιασμός λοιπὸν ἄλλο δὲν εἶναι, εἰ μὴ ἐκ δύο δοθέντων ἀριθμῶν νὰ λάβῃ τις θάτερον τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἕτερος. Οὕτως 3×4 , ὅπερ προφέρεται 3 ἐπὶ τὸ 4, σημαίνει ἔτι πρέπει νὰ λάβῃ τις τετράκις τὰ 3, εἴτε $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Εἰς πάντα λοιπὸν πολλαπλασιασμὸν θεωροῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ: ἐκεῖνος, ὅς τις πολλαπλασιάζεται, ὡς ἐνταῦθα ὁ 3, ὅς τις καὶ Πολλαπλασιασέας ὀνομάζεται (καὶ

ἐκεῖνος, ὅς τις πολλαπλασιάζει, ὡς ὁ 4, ὅς τις καὶ Πολλαπλασιασῆς ἔλαβεν ὄνομα καὶ τέλος ὁ ἐκ τῆς ἐργασίας ἀναφυόμενος, εἴτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ὡς ὁ 12, ὅς τις καὶ Γενόμενον ὀνομάζεται. Ὁ πολλαπλασιαστέος ὅμως καὶ ὁ πολλαπλασιαστῆς λαμβάνουσι καὶ ἄλλο κοινὸν ὄνομα, Παράγοντες λεγόμενοι.. ἐκ τοῦ διότι ἐκ τῆς ἀμφοτέρων συσχεύσεως λαμβάνει τὴν ὑπαρξίν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς: ὅπερ ἐστὶν ἐξ αὐτῶν παράγεσθαι. Ὡς τὸ γινόμενον, ἢ παραγόμενον, περιέχει τοσοῦτον θάτερον τῶν παραγόντων ὅσον ὁ ἕτερος αὐτῶν τὴν μονάδα. Οὕτω τὰ 12 περιέχουσι τοσάκις τὰ 3 ὡσάκις τὰ 4 τὸ 1.. ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ 12, τὰ 4 τοσάκις ὡσάκις ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων, τὰ 3, περιέχει τὸ 1.

Σημειωτέον δ' ὅτι ἡ λέξις πολλαπλασιασμὸς ἐγεννήθη ὡδὲ πως. Ἐγὼ ἂν λάβω ἅπαξ τὸν ἓνα ἀριθμὸν τοῦτο ὀνομάζεται ἐπαριθμησις, ἢ πρόσθεσις.. εἰδὲ καὶ τὸν λάβω δις τοῦτο ὀνομάζεται διπλασιασμός.. ἂν τὸν λάβω τρίς, τριπλασιασμός.. ἂν τετράκις, τετραπλασιασμός, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ταῦτα λοιπὸν πάντα ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός, καὶ Πολλαπλάσιον, τὸ γινόμενον θάτερου τῶν παραγόντων καὶ διὰ τοῦτο Ὑποπολλαπλάσιον, ὁ παράγων τοῦ γινομένου. Ὡς ἂν ᾔθελεν εἰποῖτις, καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνῃ τὸ εἶναι ἐκ τῶν δύο ὁμοῦ παραγόντων δῆλον ὅτι εἶναι ἀδιάφορον τὸ νὰ λάβῃ τις ὅποιον τῶν δύο παραγόντων θέλει διὰ πολλαπλασιαστέον: ὁ ἐστὶν εἶναι $3 \times 4 = 4 \times 3$, εἴτε $= 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 = 12$.

30. Ὡς ἂντις ἐξετάσῃ τὴν οὐσίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ᾔθελεν ἰδοῖ ὅτι πολλαπλασιασμός, πρόσθεσις,

καὶ ἐπαριθμησις πραγματικῶς σημαίνουσιν ἐν καὶ τὸ αὐτὸ·
καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ εἰς τὴν
μορφὴν τῶν ἰδίων μερῶν. Καθότι ἐπαριθμῶ σημαίνει οὐ-
δὲν ἄλλο, ἢ προσίθημι μονάδα πάντοτε ἐπὶ μονάδων·
τουτέστι $1+1=2$ $(2+1=3)$ $(3+1=4)$ $(4+1=5)$ $(5$
 $+1=6)$ καὶ τ. ξ. εἴτε οὕτως

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ & & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ & & & \frac{1}{5} & 1 \\ & & & & \frac{1}{6} \end{array}$$

Προσίθημι δὲ σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ἐπαριθμῶ
διὰ μὴ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, εἴτε διὰ μερῶν ἀνίσων ἀλλή-
λοις (22), ὡς ὁράται.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 16 \\ 130 \\ 200 \\ \hline 350 \end{array}$$

Καὶ πολλαπλασιάζω εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ προσε-
θῶ πολλάκις τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, ὡς ὁράται.

$$\begin{array}{r} 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ \hline 364 \end{array}$$

Ὅπερ συντομίας χάριν ἐκτίθημι οὕτως 52×7 .
Ὡς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θεωρούμενος μὲν ὡς παραγόμενος
ἐκ δύο παραγόντων, ὀνομάζεται γινόμενον, καὶ ἡ ἐργασία
πολλαπλασιασμός.. ὡς δὲ συγκείμενος ἐκ μερῶν ἀνάστων
ἀλλήλοις, κεφάλαιον, καὶ ἡ ἐργασία πρόσθεσις.. ὡς δὲ συ-
κείμενος ἐκ μερῶν ἴσων ἀλλήλοις, καὶ ταῦτα τὰ μέρη νὰ
ἦναι ὁμοειδῆ (3), ἀριθμός, καὶ ἡ ἐργασία, ἐπαριθμῆσις. Ὡς
πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἐκληφθῇ καὶ ὡς γινόμενον, καὶ
ὡς κεφάλαιον.

31. Ἀγκαλὰ καὶ ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἄλλη πρόσ-
θεσις (πλὴν ἔχει ἰδιότινα καὶ ταῦτα εἶναι τὰ ἐξῆς:

α. Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὴν μονάδα εἶ-
ναι ἴσος ἑαυτῷ. Οὕτως $2 \times 1 = 2$, καὶ $3 \times 1 = 3$,
καὶ $100 \times 1 = 100$ καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡς καὶ ἡ
μόνως πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν εἶναι ἴση ἑαυτῇ:
τουτέστι $1 \times 1 = 1$.

Πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ μηδέν, ἢ
πολλαπλασιασάσας τὸ μηδέν, ἐκτελεῖ γινόμενον μηδέν (οὕ-
τως $0 \times 5 = 0$ καὶ $5 \times 0 = 0$. Καθότι τὸ μὲν 0×5
 $= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ τὸ δὲ 5×0 σημαίνει νὰ λάβῃ
τις ὁλοτελῶς τὸν 5 ἀριθμόν.

Σημειωτέον δὲ ὅταν ὁ πολλαπλασιασθῇ, καὶ ὁ πολ-
πλασιαστέος ἦναι εἰς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς (τότε τὸ γι-
νόμενον ὀνομάζεται Τετράγωνον. Οὕτως εἰς τὸ 5×5
 $= 25$, τὰ 25 λέγεται τετράγωνον τῶν 5.. καὶ εἰς τὸ 6
 $\times 6 = 36$, τὰ 36 τῶν 6., καὶ εἰς τὸ $100 \times 100 =$
 10000 , τὰ 10000 τῶν 100. Εἰ δὲ καὶ πολλαπλασια-
σθῇ ἀριθμὸς τις δις ἐφ' ἑαυτὸν (τότε τὸ γινόμενον ὀνομάζε-

τα $\text{Κ} \delta \sigma$ του εἰρημένου ἀριθμοῦ. Οὕτως εἰς τὸ 5 X
 $5 \times 5 = 125$ καὶ τὰ 125 λέγεται κύβος τοῦ 5.

32. Καὶ ὅταν μὲν εἰς τὸν πολυπλασιασμόν ἐκχέ-
 τετοί αἱ παράγουσι σύγκληται ἐξ' ἐνὸς μόνου χαρακτῆ-
 ρος τότε τὸ πρᾶγμα δεῖται οὐδέποτε κανόνος, εἰμὴ μόνον
 γνηνέστεως ἐπισταμένης εἰς τὴν πρόσθεσιν (29), ὡς περὶ τὰ
 γινόμενα, ἢ κερδαια εἶναι ταῦτα.

2	X	2	=	4	3	X	7	=	21	5	X	8	=	40
2	X	3	=	6	3	X	8	=	24	5	X	9	=	45
2	X	4	=	8	3	X	9	=	27	6	X	6	=	36
2	X	5	=	10	4	X	4	=	16	6	X	7	=	42
2	X	6	=	12	4	X	5	=	20	6	X	8	=	48
2	X	7	=	14	4	X	6	=	24	6	X	9	=	54
2	X	8	=	16	4	X	7	=	28	7	X	7	=	49
2	X	9	=	18	4	X	8	=	32	7	X	8	=	56
3	X	3	=	9	4	X	9	=	36	7	X	9	=	63
3	X	4	=	12	5	X	5	=	25	8	X	8	=	64
3	X	5	=	15	5	X	6	=	30	8	X	9	=	72
3	X	6	=	18	5	X	7	=	35	9	X	9	=	81

Ταῦτα ὅμως ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ὁ πῖναξ τοῦ με-
 γάλου Πυθαγόρου, οὕτως ἢ κατασκευῇ ἔχει ὁδῶν.

Ἰκτελῶ τὸ τετραγώνον μίας γραμμῆς, ὡς τῆς AB..
 εἰσὶν αἱ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ: τὰς AB, AT εἰς ἐνεία ἴσα
 ἀλλήλοις τμήματα. ἄνω ἐκ τῶν τομῶν εὐθείας παραλήψ-
 λους μὲ τὰς εὐθείας AB, AT (καὶ οὕτω μοι προκύπτουσι
 81 τετραγώνια. Τότε ἐν τῇ πρώτῃ κατὰ κἀθετον στήλην
 ὡραύτως καὶ ἐν τῇ ἀνωτάτῃ καθ' ὁρίσονται, γράφω τοὺς

ἀπλοῦς χαρακτῆρας: ὅ ἐστι τοὺς ἐκ τῆς μονάδος μέχρι τῶν ἐννέα (εἰτα πολλαπλασιάζων ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς μιᾶς σήλης δι' ἑκάστου τῆς ἐτέρας, ἔχω ἅπαντα τὰ γινόμενα αὐτῶν, ὧν ἕκαστον δηλονότι κεῖται οὕτως, ὥς νὰ ἀντι-
κρίξῃ καὶ μετὸν πολλαπλασιασὴν καὶ μετὸν πολλαπλα-
σιαστέον: τὸ 5, φέρε εἰπεῖν, τῆς μιᾶς σήλης καὶ τὸ 6 τῆς ἐτέρας ἀντικρίξουσι μετὸν τετραγωνίδιον, ἔνθα εἶναι ἐγγε-
γραμμένος ὁ ἀριθμὸς 30.

B

Γ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Α

Καὶ ὡς φαίνεται ἄνευ τοῦ ἀποσηθίσματος τοῦ Πυ-
θαγορικοῦ πίνακος εἶναι ἀδύνατον νὰ γένη τις ἀριθμητικὸς.

33. Καθότι πᾶς πολλαπλασιασμὸς, καὶ τῶν μεγίστων ἀριθμῶν, συνέχεται εἰς τοῦτον τὸν πίνακα, καὶ ἐτι πλεον καὶ αὐτὴ ἡ διαιρέσις: ὅ ἐστιν οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασια-
σμοῦ, καὶ τῶν πλεον μεγάλων ἀριθμῶν, καταπνύουσιν εἰς τὸ
νὰ πολλαπλασιασθῇ τις ἓνα μόνον πάντοτε χαρακτῆρα δι'
ἐνὸς μόνου χαρακτῆρος, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τῆς διαιρέ-

σεως. Καὶ ἰδοὺ πῶς τάττονται οἱ παραγοντες, καὶ πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἐργασία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Γράφω τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ὑπ' αὐτὸν τὸν πολλαπλασιαστήν, χωρὶς νὰ φροντίσω περὶ τῆς τοποθεσίας αὐτοῦ. σύρω ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν ὀρίζοντιον, ὡς εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐργασίας τῆς τε προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Ἔστω δὲ ὁ πολλαπλασιαστής ἐξ ἐνὸς χαρακτῆρος. Ἄρχομαι α'. νὰ πολλαπλασιάσω διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστέου (32), καὶ γράφω τὸ γινόμενον ὑποκάτω τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων (πλὴν ὅχι ὁλόκληρου ἀλλὰ τὰς μονάδας μόνας, τὰς δὲ δεκάδας τὰς κρατῶ ἀνὰ χεῖρας διὰ νὰ τὰς προσθέσω, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν (22), εἰς τὸ ἐξῆς γινόμενον τῶν δεκάδων. β'. Πολλαπλασιάζω διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν δεύτερον χαρακτῆρα τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ προσθίμενος εἰς τοῦτο τὸ μερικὸν γινόμενον, ἂν ἐκράτουν ἀνὰ χεῖρας μονάδας δεκάδων, ὑπογράφω τὸ κεφάλαιον (πλὴν ὅχι ὁλόκληρου ἀλλὰ μόνον τὰς μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας, ἂν ἔχη, τὰς κρατῶ ἀνὰ χεῖρας διὰ νὰ τὰς προσθέσω εἰς τὸ ἐξῆς γινόμενον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2283, 6: ἢ ἂν 9έλης 2283 ἀγυγαὶ; ἐκάστη ἐξ ἑξ ποθῶν, πόσους πόδας κάμνουσιν;

$$\begin{array}{r} 2283 \quad . \quad . \quad \text{πολλαπλασιαστέος} \\ 6 \quad . \quad . \quad \text{πολλαπλασιαστής} \\ \hline 13698 \quad . \quad . \quad \text{γινόμενον} \end{array}$$

Ἄρχομαι λοιπὸν ἐκ τῶν μονάδων λέγων $3 \times 6 = 18$, καὶ γράφω ὑπὸ τῆς στήλης τῶν μονάδων τὰ 8, κρατῶ

τὴν δεκάδα ἀνὰ χεῖρας.. β'. ἐγὼ λέγω $8 \times 6 = 48$, καὶ 1, ὅπερ ὁηλ. ἐκράτουν ἀνὰ χεῖρας $= 49$ καὶ ὑπογράφων τὰ 9, κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὰ 4.. γ'. ἐγὼ λέγω $2 \times 6 = 12$, καὶ 4, ὅπερ ἐκράτουν ἀνὰ χεῖρας $= 16$ καὶ ὑπογράφων τὰ 6, κρατῶ ἀνὰ χεῖρας τὸ 1. δ'. ἐγὼ λέγω $2 \times 6 = 12$, καὶ 1, ὅπερ ἐκράτουν ἀνὰ χεῖρας $= 13$, καὶ ὑπογράφω καὶ τὰ 13.. ἐκ τούτου διότι ἐτελείωσεν ἡ ἐργασία. Καὶ ἐπομένως ἔχω διὰ γινόμενον 13698: ὃ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς 13698 εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον, καθότι εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ, ἢ νὰ λάβῃ τις ἐξάκις ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν 2283, ἢ νὰ λάβῃ ἀνὰ μέρος ἐξάκις πρῶτον τὰς μονάδας αὐτοῦ, εἶτα τὰς δεκάδας, εἶτα τὰς ἐκατοντάδας, καὶ τέλος τὰς μονάδας χιλιάδας.

Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ἤθελεν εὐροῖτις ὅτι καὶ $2283 \times 3 = 6849$, καὶ ὅτι $2283 \times 7 = 15981$.

34 Ἄν ὅμως καὶ ἐκάτεροι τῶν παραγόντων σύγκηνται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων (τότε ἐγὼ θέλω κάμει δι' ἐκάστου χαρακτήρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὅπερ ἐποίησα, ὄντος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐξ ἑνὸς μόνου (32): ὃ ἐστὶν ἡμεῖς θέλομεν εἶσθαι εἰς τὸ ἐγνωσμένον συμβεβηκός, καὶ ἡ διαφορὰ θίλει ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ εἰς τὴν τάξιν τῶν ἀνὰ μέρος γινόμενων, ὅπερ ἔχει ὡς ἔπεται.

Πολλαπλασιάζω διὰ τοῦ χαρακτήρος τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν πολλαπλασιαστέον ὁλόκληρον, ὡς ἀνωτέρω, ὑπογράφων τὸ γινόμενον.. β'. Πολλαπλασιάζω διὰ τοῦ χαρακτήρος τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὸν πολλαπλασιαστέον ὁλόκληρον, ὡς ἀνωτέρω: καὶ ὑπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ὑπογράφω τοῦτο τὸ δεύτερον γινό-

13698

6849

15981

1630288 . . γινόμενον.

Τάτω αὐτὸς ὡς ἀνωτέρω. Εἶτα πολλαπλασιάζω
τὸν πολλαπλασιασμόν 2283 α. εἰς τὸν 6 : μόνον τοῦ
πολλαπλασιασμοῦ, εἴς 2283 × 6 = 13698.. β. εἰς τὸν
3 : εἰς αὐτὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἴς 2283 × 3 = 6849..
καὶ τέλος εἰς τὸν 7 : εἰς αὐτὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἴς
2283 × 7 = 15981.. ὁ πολλαπλὸς εἰς ταῦτα τὰ τρία μέγεθ
γινόμενα ὑπὸ τῆς γράμμης ὡς ἔωκ, ὥστε αἱ εἰρηστικαὶ αὐτῶν, αἱ
χρηματικαὶ, καὶ τὰ εἴρηστικα ἢ τὰ τεταγμένα εἰς ἑκάστην : ὥστε
ἐκλογιστὴν νὰ δύναμαι νὰ κἀμὼ τῆν πρὸςθεσιν αὐτῶν (22)..
ἢ

μενεν.. πλὴν ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον ἐλάττει τὸ εἶναι ἐκ τῶν δεκάδων, τοῦτου ἕνεκεν τὰς τῶν πρῶτον ἀντὶ τοῦ χαρᾶκατῆρος ὑπὸ τοῦ θειοτέρου χαρᾶκατῆρος τοῦ πρῶτου γινόμενον : ὃ ἐστὶν εἰς τῆν στήλην τῶν δεκάδων.. γ'. πάλιν ἀπὸ τῆς ἀσφάλειας τοῦ ἐκαστοτάτου τῶν πάλιν ἀσφάλειον καὶ ὑπογράφω τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ θειοτέρου γινόμενον.. πλὴν ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον ἐλάττει τὸ εἶναι ἐκ τῶν ἐκαστοτάτων (τοῦτου ἕνεκεν τὰς τῶν πρῶτον ἀντὶ τοῦ χαρᾶκατῆρος ὑπὸ τοῦ θειοτέρου γινόμενον : ὃ ἐστὶν εἰς τῆν στήλην τῶν ἐκαστοτάτων.. καὶ οὕτως ἐπεξήρς. Εἴτα πρὸς τὴν ταύτην πάλιν τὰ μετὰ γινόμενα (καὶ τὸ κατὰ τὴν ἀντὶ τῆς εἶναι τὸ ἕκαστο γινόμενον.

Ζητήσιον, ἡμεῖς εἰπόμεν, τὸ γινόμενον τῶν ἀποφύμων 2283, 736,

2283 . . πάλιν ἀσφάλειος

736 . . πάλιν ἀσφάλειος.

τὴν ἐκτελῶ, καὶ ἔχω διὰ γινόμενον 1680288, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον: τουτέστιν εἶναι $= 2283 \times 736$. Καθότι ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασθῆς $736 = 700 + 30 \times 6$, καὶ ἐπειδὴ ἐγὼ ἐπολλαπλασίασα τὸν ἀριθμὸν 2283, πρῶτον διὰ τοῦ 6. β'. διὰ τοῦ 30, καὶ γ'. διὰ τοῦ 700, ὥνπερ τὸ γινόμενον εἶναι $= 1680288$ (τούτου ἕνεκεν οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον).

Πλὴν ἐπειδὴ καὶ ὡς $2283 \times 736 = 1680288$, οὕτω καὶ $736 \times 2283 = 1680288$ (τούτου ἕνεκεν κεῖται ἐπ' ἐμοὶ νὰ λάβω διὰ πολλαπλασιασθῆν, ὅποιον τῶν δοθέντων θέλω εἶναι ὅμως εὐκολώτερον νὰ λαμβάνη τις τὸν μικρότερον.

35 Σημειωτέον ὅμως ἅ. ὅτι ἂν ὁ εἰς τῶν παραγόντων, ἢ καὶ ἀμφότεροι, λήγῃ εἰς μηδενικά (τότε ἢ ἐργασία τελειοῦται συνομωτέως: ἂν δηλ. τις σοχασθῇ αὐτὰ ὡς μὴ παρόντα.

Ἐξωσαν, φέρε εἰπεῖν, αἱ παράγοντες 2280, 700, οὓς περ τάττων ὡς ἀνωτέρω, ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν, καὶ ἔχω διὰ γινόμενον 157600.

$$\begin{array}{r}
 2280 \quad \text{,} \quad \eta \quad 228 \\
 \hline
 700 \quad \quad \quad 7 \\
 \hline
 0000 \quad \quad 1596 \\
 0000 \\
 15960 \\
 \hline
 1596000
 \end{array}$$

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ $228 \times 7 = 1596$ (τούτου ἕνεκεν εἰς τὴν ἐργασίαν ἐγὼ δύναμαι νὰ παραβλέψω τὰ μη-

θενικά (πλὴν νὰ προσθέσω τὸ κεφάλαιον (τρία) αὐτῶν εἰς τὸ γινόμενον: τουτέστι ἐν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ οὗτο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ οὕτως ἔξω τὸ αὐτὸ γινόμενον.

β'. "Οτι ἂν ὁ εἰς τῶν παραγόντων σύγκηται ἐκ μηθενικῶν, καὶ μονάδος τότε δέν εἶναι χρεῖα νὰ γένῃ πολλαπλασιασμός, ἀλλὰ πρόσθεσις τῶν μηθενικῶν μένον. Ἄν, φέρε εἰπεῖν, ζητηθῇ νὰ πολλαπλασιασθῇ 2280 ἐπὶ τὰ 100 (τότε προστιθέμενα μόνον τὰ δύο μηθενικά τῶν 100 εἰς τὰ 2280, θέλει ἔχει τὸ ζητούμενον γινόμενον = 228000.

γ'. "Οτι ἂν ἐν τῷ μεταξὺ κῆνται μηθενικά (τότε ἐπειθὴ καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν εἶναι μηδέν (τούτου ἕνεκεν ἤθελεν εἶναι περιττός ὁ τούτων πολλαπλασιασμός. Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2003, 736. Ἐγὼ λοιπὸν ἐκλέγω διὰ πολλαπλασιασθῆν τὸν ἀριθμὸν 2003, καὶ ἀφ' οὗ πολλαπλασιασῶ τὸν πολλαπλασιασμόν διὰ τοῦ 3, καὶ ὑπογράψω τὸ γινόμενον 2208 (πολλαπλασιάζω αὐτὸν εὐθὺς διὰ τοῦ 2 . . πλὴν ἐπειθὴ καὶ τοῦτο εἶναι χιλιάδες (τούτου ἕνεκεν τάττω τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ γινομένου 1472 εἰς τὴν σήλην τῶν χιλιάδων: ὅ ἐστιν ὁπισθοδρομῶ τρεῖς χώρους, ὡς ὁράται.

$$\begin{array}{r} 736 \\ 2003 \\ \hline 2208 \\ 1472 \\ \hline 1474208 \end{array}$$

δ'. "Οτι ἂν οἱ παράγοντες ᾖναι πλείον τῶν δύο εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν (τότε γίνεται πρῶτον ὁ πολλαπλα-

σιασμός τῶν δύο, εἴτα τοῦ γινομένου διὰ τοῦ τρίτου παράγοντος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς (ἂν ᾔσαν καὶ πλείονες. Οὕτως $10 \times 20 \times 30 = 200 \times 30 = 6000$.

ε'. Εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ, ἢ τὸ γινόμενον νὰ πολλαπλασιασῇται, ἢ ἓνα τῶν παραγόντων. Οὕτως οὕτως $20 = 4 \times 5$, καὶ $20 \times 3 = 4 \times 3 \times 5$ (εἴτε τὰ 20 νὰ πολλαπλασιασῇται διὰ τοῦ 3, εἴτε τὸν παράγοντα αὐτοῦ 4 (ἔξει τὸ αὐτὸ γινόμενον 60).

36. Τὸ πλεον ὁμῶς ἀξιοσημείωτον ἐνταῦθα: εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν λέγω, εἶναι ὅτι οἱ ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν ἐνομαζόμενοι συγκεκραμμένοι ἀριθμοὶ (14) εἶναι ἀνύπαρκτόν τι.. καὶ ἐγὼ λέγω ὅτι ὑπῆρξεν οὐδέποτε ἀριθμὸς συγκεκραμμένος. "Ως ὅταν οὗτοι λέγωσιν ὅτι πολλαπλασιασμός τῶν ἀριθμουμένων ὧντων, δι' ἀριθμουμένων ὧντων, εἶναι πολλαπλασιασμός συγκεκραμμένου διὰ συγκεκραμμένου: ὡς 6 ὀκάδες ἐλαίου διὰ 52 παράδες, τοῦτο εἶναι σαφὴς ἀπάτη. Καθότι, ποῖος, παρχαλῶ, καὶ μικρὰν γνῶσιν ἔχων οὐχ ὄρα ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός ἐνταῦθα ὑπάρχει πολλαπλασιασμός, οὐχὶ τῶν 52 ὀκάδων ἀλλ' ἀφηρημένως 52 μονάδων, καὶ ὅτι ἔγινεν ὅχι διὰ τῶν 6 παράδων: ἀλλὰ ἀπλῶς, εἴτε ἀφηρημένως, εἰ 6 μονάδων (καὶ ἐπομένως ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι ὁλοτελῶς 312 παράδες ἀλλ' ἀφηρημέναι 312 μονάδες.. καὶ ὅτι εἰς τὸ μετέπειτα ἐφαρμόζεται εἰς συγκεκραμμένας μονάδας: ὃ ἔστι γίνεται ἀτομικόν.

"Επειτα οἱ ἀριθμητικοὶ ὁμολογοῦσιν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ πρόσθεσις μερῶν ἴσων

ἀλλήλοις (29). Ὡς τὸ ἡμέτερον ζήτημα: τουτέστι τὸ νὰ
πολλαπλασιάσῃ τις 6 ὀκάδες ἐλαίου ἐπὶ 52 παράδες,
δύναμαι νὰ τὸ λύσω καὶ οὕτω $52 + 52 + 52 + 52 + 52$
 $+ 52 = 312$, τραπέισῃς δηλ: εἰς σημεῖον + τῆς ὀκάς
πράγμα τῷ ὅτι τερατώδες!

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τοῦτο τὸ γινόμενον, εἴτε τὸ κε-
φάλαιον, 312, ἔλαθε τὴν ὑπαρξιν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 52 καὶ
τοῦ σημείου + ἢ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 6 καὶ τοῦ σημείου +, ὡς
ἦν δυνατόν (δὴλον ὅτι καὶ τὸ σημεῖον +, κατὰ τοὺς ἀ-
ριθμητικούς, εἶναι συγκεκραμένον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.
Ἀλλ' ἂν τοῦτο εἶναι ἀφαιρεμένον.. καὶ ἂν ἐκ τούτου καὶ
ἐκ τοῦ 52 ἀριθμοῦ ἐγεννήθῃ ὁ ἀριθμὸς 312 ἀναγκαιῶς
καὶ ὁ ἀριθμὸς 312 εἶναι ἀρηρημένος. Οἷα τὰ μέρη, τοι-
οῦτον ταὶ τὸ ὅλον.

Τέλος πάντων ποῖαν πιθανολογίαν ἔχει, τὸ νὰ λά-
θῃ τις ἐλαίου μονάδας μεταλλικῶς, καὶ τοῦτο νὰ μεταμορ-
φωθῇ εἰς μεταλλικὰς μονάδας; Τοιούτου τραγέλαφον ἦν
ἀδύνατον νὰ κατασκευάσῃ καὶ ὁ πλέον φαντασιώδης τῶν
αὐθρώπων! Ὡς:

6	.	.	ἐλαίου	καὶ ἔτι	52	.	ἐλαίου
52	.	.	ἀργύρου		6	.	ἀργύρου
312	.	.	ἀργύρου		312	.	ἀργύρου

Ὁ ἐστὶν εἴτε τὸ ἐλαῖον λάθει τις μεταλλικῶς, εἴτε τὸ μέ-
ταλλον ἐλαϊκῶς (οὗτος κατασκευάζει μέταλλον, εἰς ὃ-
περ ἡ μεταφυσικὴ δυσαρεσίζεται.

37 Ἡ βία πᾶντος ὅμως, εἴτε ἡ δοκιμὴ τοῦ ἂν εἰς
πολλαπλασιασμὸς ἐγενεν ὀρθὸς, εἶναι πολλαπλῇ. Καὶ εἶναι
τὸ νὰ μεταβάλλῃ τις τὴν πολλαπλασιασὴν εἰς πολλαπλα-

πιασέον, καὶ νὰ ἐκτελέσῃ αὐτὴς τὸν ἐργασίαν (καὶ ἂν τὸ
 γινόμενον τῆς δευτέρας ἐργασίας ἦναι σύμφωνον μὲ τὸ γι-
 νόμενον τῆς πρώτης (τότε ἡ ἐργασία ὑπῆρξεν ἄπταιστος.
 Οὕτως ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ πολλαπλασιάσας τὰ 2283 διὰ
 τῶν 736, εὔρον διὰ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν 1680288
 (34) (τούτου ἕνεκεν ἂν πολλαπλασιάσω τὰ 736 διὰ τῶν
 2283 καὶ εὐρῶ τὸ αὐτὸ γινόμενον (ἴδω συνάξει ὅτι ἡ
 ἐργασία ὑπῆρξεν ὀρθή. β'. Βάσανος, καὶ μᾶλλον ἐν
 χρήσει εἶναι ἡ λεγομένη διὰ τῶν 9.. καὶ ἔχει ὡςῶς.
 Πρῶτον ἀνακεφαλαιῶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλασι-
 ασέου, καὶ ἀφαιρῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τὸ ἐννεαπλοῦν, εἴ-
 τε πάντα τὰ ἐν αὐτῷ 9, γράψω εἰς ἓν μέρος τὸ λείψανον.
 Δεύτερον ἀνακεφαλαιῶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολλαπλα-
 σιασοῦ, καὶ ἀφαιρῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τὸ ἐννεαπλοῦν,
 γράψω τὸ λείψανον ὑποκάτω τοῦ πρώτου λειψάνου, ἀφ'
 οὗ διαχωρήσω ταῦτα τὰ λείψανα διά τινος γραμμῆς. γ'.
 Ἀνακεφαλαιῶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ γινομένου, καὶ ἀφαι-
 ρῶν ἐκ τοῦ κεφαλαίου τὸ ἐννεαπλοῦν, γράψω τὸ λείψα-
 νον εἰς τὰ πλάγια τοῦ πρώτου λειψάνου, ἀφ' οὗ διαχω-
 ρήσω ταῦτα διά τινος γραμμῆς. δ'. Πολλαπλασιάσω τὸ
 εἰς λείψανα τοῦτε πολλαπλασιασέου καὶ τοῦ πολλαπλα-
 σιασοῦ, καὶ ἐκ τοῦ γινομένου ἀφαιρῶ τὸ ἐννεαπλοῦν..
 καὶ τότε ἂν τοῦτο τὸ λείψανον εἶναι ἴσον μὲ τὰ τρίτον
 λείψανον (ἡ ἐργασία εἶναι ὀρθή.

Ἐγὼ, φέρε εἰπεῖν, εὔρον ὅτι $2283 \times 736 = 1680288$ (34).. τῶρα ἀνακεφαλαιῶν τοὺς χαρακτῆρας
 καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀφαιρῶν τὸ ἐννεαπλοῦν, γρά-
 φω, ὡς εἶπον, ἀνὰ μέρος τὰ λείψανα αὐτῶν. α'. λοιπὸν

λέγω $2+2+8+3=15$ ἀλλὰ καὶ $15-9=6$ ὥςτε γράφω 6 εἰς ἓν μέρος.

$$\begin{array}{r} 6|6 \\ \hline 7|6 \end{array}$$

β'. Λέγω $7+3+6=16$ ἀλλὰ καὶ $16-9=7$ ὥςτε γράφω 7, ὡς ὁράται, ὑποκάτω τοῦ 6, ἀφ' οὗ δηλ. ἄξω τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὀριζήντιον γραμμὴν. γ'. Λέγω $1+6+8+0+2+8+8=33$ ἀλλὰ $33-3 \times 9=6$ ὥςτε γράφω 6, ὡς ὁράται εἰς τὰ πλάγια τοῦ πρώτου 6, ἀφ' οὗ πρώτου ἄξω μίαν γραμμὴν μεταξὺ αὐτῶν καθέτως. Τέλος πάντων πολλαπλασιάζων τὰ δύο λείψανα, τοῦτε πολλαπλασιασίου καὶ τοῦ πολλαπλασιασίου: τουτέστι $6 \times 7=42$, καὶ ἀφαιρῶν ἐξ αὐτῶν τὸ ἐννεαπλοῦν: τουτέστι $42-4 \times 9=6$, γράφω 6 εἰς τὰ πλάγια τοῦ 7 δεξιόθεν. Καὶ ἐπειδὴ ὁρῶ ὅτι θεωρεῖται συμφωνία μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ λειψάνου τοῦ γινομένου (συνάγω ὅτι ἡ ἐργασία ὑπῆρξεν ἁπταιστος.

Ὡσαύτως ἐπειδὴ $2280 \times 700=1596000$ (35) τοῦτου ἔνεκεν λαμβάνων τὰ λείψανα ἐκ τῶν κεφαλαίων τῶν δύο παραγόντων μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἐννεαπλοῦ: τουτέστι τὰ 3, καὶ 7, ὧν περ τὸ γινόμενον εἶναι $=21$ καὶ διὰ τοῦτο $21-2 \times 9=3$ εὐρίσκω αὐτὸ ἴσον μὲ τὸ λείψανον τοῦ $1+5+9+6=21=2 \times 9+3$, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἐξ αὐτοῦ τὸ ἐννεαπλάσιον.

$$\begin{array}{r} 3|3 \\ \hline 7|3 \end{array}$$

Ὁ λόγος βέβαια ταύτης τῆς βασάνου εἶναι ἡ Σαυ-
μασὴ ιδιότης τοῦ 9: ἥτις ὁλοκλήρως εἶναι τὸ εἶτε ἐκ τοῦ
ἀριθμοῦ νὰ ἀφαιρέσῃ τις τὸ ἐννεαπλάσιον, εἶτε ἐκ τοῦ κε-
φαλαίου τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ, τὸ λείψανον εἶναι
τὸ αὐτό. "Οὕτως ὅντος τοῦ ἀριθμοῦ $2283 = 2000 + 200$
 $+ 80 + 3 = 222 \times 9 + 2 + 22 \times 9 + 2 + 8 \times 9 + 8 + 3 =$
 $222 \times 9 + 22 \times 9 + 8 \times 9 + 9 + 6$ ἂν ἀφαιρέσω τὸ ἐννεα-
πλάσιον, ἔξω λείψανον 6. Πλὴν ἔξω ὡσαύτως 6 λεί-
ψανον (καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ κεφαλαίου τῶν χαρακτήρων αὐ-
τοῦ ἀφαιρέσω τὸ ἐννεαπλάσιον αὐτοῦ.. ἐκ τοῦ δῶτε $2+2$
 $+ 8 + 3 = 15 = 9 + 6$. "Αὕτη ὅμως ἡ ξένη ιδιότης τῆς
συμφωνίας ἐκάστου ἀριθμοῦ μετὰ τοῦ κεφαλαίου τῶν χα-
ρακτήρων αὐτοῦ γεννᾶται ἐκ τῶν δεκαπλασίων αὐτῶν.
Καθότι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000 καὶ τ. ξ. μετὰ
τὴν τοῦ ἐννεαπλασίου ἀφαίρεσιν ἔχουσι λείψανον 1. Οὕτω
καὶ μετὰ τὴν διὰ τοῦ 9 διαιρέσιν.. καὶ ὡς οἱ ἀριθμοὶ 20,
200, 2000, καὶ τ. ξ. 2.. καὶ οἱ ἀριθμοὶ 30, 300, 3000,
καὶ τ. ξ. 3, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἡ οὕτω καὶ μετὰ τὴν τοῦ
9 διαίρεσιν. "Ωστε πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλάσιος τοῦ 9, ἔχει
καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ ὅσον μὲ τὸ 9:..
Πρὸς τούτοις ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 18, 27, 36, 45, 54, 63,
72, 81, εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ 9 ὡσαύτως καὶ τὸ κεφά-
λαιον αὐτῶν εἶναι ὅσον μὲ τὸ 9: ὅ ἐστιν $1+8=9$, $2+7=9$,
 $3+6=9$, $4+5=9$, $5+4=9$, $6+3=9$, $7+2=$
 9 , $8+1=9$: ὅ ἐστι τὸ λείψανον αὐτῶν εἶναι 0, μετὰ
τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἐννεαπλάσιου. "Οσον ὠραία ὁμως καὶ
ἂν ἦναι ἡ βία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ τοῦ 9 ἢ
εἶναι δυνατόν νὰ παρεμπέσῃ καί τι λάθος. Καθότι ἐπειδὴ

καὶ ἐνταῦθα ζητεῖται οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ ταυτότης τῶν λειψάνων τοῦ γινομένου, καὶ τοῦ γενομένου ἐκ τῶν λειψάνων τῶν δύο παραγόντων εἶναι δυνατόν νὰ παρεμπέσῃ τὸ αὐτὸ λάθος εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέρη τῆς ἐργασίας, καὶ οὕτω νὰ λάβῃ χώραν ἡμαρτημένη ταυτότης. Ἀγκαλιὰ καὶ πολλὰ δυσκόλως δύναται νὰ συμβῇ ἐν τοιοῦτον λάθος· πλὴν ἐπειδὴ καὶ εἶναι δυνατόν (τούτου ἕνεκεν οἱ μαθηματικοὶ ἐπρόκριναν τὴν βάσανον τὴν διὰ τῆς διαιρέσεως, εἰς ἥνπερ ἡδὴ ἐμβαίνομεν.

Κ Ε Φ. Ε'.

Περὶ Διαιρέσεως.

38. **Δ**ιαιρέσεις εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ εὔρῃ τις, ποσάκῃς ἐκ δύο δοθέντων ἀνίστων ἀριθμῶν ὁ μείζων περιέχει τὸν ἐλάσσονα. Καὶ ὁ μὲν ποσάκῃς περιέχων ὀνομάζεται Διαιρετέος, ὁ δὲ ποσάκῃς περιεχόμενος Διαιρέτης, καὶ Πηλίκον αὐτὸ τὸ ποσάκῃς, εἴτε ὁ προκύπτων ἐκ τῆς διαιρέσεως ἀριθμός. Οὕτως ἂν μοι δοθῇ νὰ διαιρέσω τὸ 12 διὰ τοῦ 3 (ἐγὼ ἤθελον εὔροι· ὅτι τὸ 3 περιέχεται τετράκις εἰς τὸ 12, καὶ τὸ γράφω οὕτω $\frac{12}{3} = 4$ (22), εἴθα τὸ μὲν 12 εἶναι ὁ διαιρετέος, τὸ δὲ 3 ὁ διαιρέτης, τὸ δὲ 4 τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ὡς εἰς τὴν διάρθρωσιν ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην τοσάκις, ὁσάκις τὸ πηλίκον τὴν μονάδα. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασοῦ, προσθεμένου τοσάκις, ὥς ας μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής (29):

ὅςιν ἐπειδὴ καὶ τὸ γινόμενον περιέχει θάτερον τῶν παραγόντων, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἕτερος τούτου ἔνκεν ἡ διαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐκ διαμέτρου ἐναντία μὲ τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὡς αὖ πολλαπλασιάσῃ τις τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ πηλίκου ἐξῆι τὸν διαιρετέον διὰ γινόμενον. καὶ αὖ διαιρήσῃ τὸ γινόμενον δι' ἐνὸς τῶν παραγόντων ἐξῆι τὸν ἕτερον παράγοντα διὰ πηλίκον. Ὡς διαιρέσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐν ὅλον δοθὲν, ἐξεταζόμενον ποσάκις περιέχει ἐν μέρος δοθὲν.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ, εἴτε τὸ πηλίκον τις νὰ πολλαπλασιάσῃ, εἴτε τὸν διαιρετέον, ἢ τὸν διαιρέτην νὰ διαιρήσῃ. Καθότι οὗτος $\frac{12}{3}=4$ εἶναι ἐπίσης καὶ $\frac{12 \times 5}{3}=4 \times 5$, καὶ $\frac{12}{\frac{3}{5}}=4 \times 5$.

Δεύτερον εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ εἴτε τὸ πηλίκον τις νὰ διαιρήσῃ, εἴτε τὸν διαιρετέον, ἢ τὸν διαιρέτην νὰ πολλαπλασιάσῃ. Οὕτω $\frac{12}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{2}=2$ καὶ $\frac{12}{3 \cdot 2}=\frac{4}{2}=2$.

39. Ἄν λοιπὸν καὶ ἡ διαίρεσις ᾖ ἐργασία ἐκ διαμέτρου ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. καὶ αὖ ὁ πολλαπλασιασμός ᾖ πρόσθεσις τις (29) ἐπόμενον εἶναι καὶ ἡ διαίρεσις νὰ ᾖ οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἀφαιρέσις τις. Καθότι ὡς ἐγὼ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ τοῦ 3 εὗρον, ὅτι τὸ 3 περιέχεται εἰς τὸ 12 τετράκις (38) οὕτω δύναμαι νὰ φθάσω ἐπίσης εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν γνώσιν, διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως, ὡς ἑξῆς. $12-3=9$, καὶ $9-3=6$, καὶ $6-3=3$, καὶ $3-3=0$ καὶ οὕτω συνάγω ὅτι τὰ 3 περιέχονται τετράκις εἰς τὰ 12.

ἐκ τοῦ διότι διὰ τὰ μηδενισθῇ ὁ ἀριθμὸς 12, ἔγινε χρεία τὰ ἀφαιρεθῇ τὸ 3 τετράκις, ὅπερ καὶ πηλίκον ὀνομάζεται. Δῆλον ὅμως ὅτι ἡ διαίρεσις διαφέρει πραγματικῶς τῆς ἀφαιρέσεως καὶ ἡ τούτων ταυτότης εἰς ἄλλο δὲν ὑφίσταται, εἰμὴ εἰς τὸ ὅτι εὐρίσκεται ἐπίσης καὶ δι' ἐκατέρων τὸ πηλίκον. Καθότι εἰς μὲν τὴν διαίρεσιν θεωρεῖται καὶ ὅποιον μέρος εἶναι ὁ διαιρετέος τοῦ διαιρετέου : ὁ ἔξιν εἶναι θεωρία ὅλου συγκειμένου ἐκ τινων μερῶν ἴσων ἀλλήλων (εἰς δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ἀφαιρουμένου ἀλληλοδιαδόχως ἐνὸς μέρους ἐκ τοῦ ὅλου, θεωρεῖται ποσάκις αὐτὸ τὸ μέρος ἀφῆ-
ρέθη.

40. Ἡ διαίρεσις ὅμως ἔχει καὶ τινα ἴδια, καὶ εἶναι ταῦτα.

α. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθεὶς δι' ἑαυτοῦ εἶναι ἴσος μετὰ τὴν μονάδα. Οὕτως $\frac{2}{2}=1$, $\frac{3}{3}=1$, $\frac{100}{100}=1$. Ὅθεν καὶ $\frac{1}{1}=1$.

β'. $\frac{0}{0}=1$: ὁ ἔξιν τὸ μηδὲν περιέχει ἑαυτὸ ἅπαξ.

γ'. Τὸ μηδὲν διαιρεθὲν διά τινος ἀριθμοῦ, δίδει πηλίκον μηδέν. Οὕτως $\frac{0}{2}=0$, $\frac{0}{3}=0$, $\frac{0}{100}=0$: ὁ ἔξιν εἰς ἀριθμὸς εἶναι ὁλοτελῶς μέρος τοῦ μηδενός.

δ'. Εἰς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ μηδενός, ὡς $\frac{9}{0}$, σημαίνει ἄπειρόν τι: τουτέστιν ὅτι τὸ 0 εἶναι μέρος ἀπειροσὸν τοῦ 9, καὶ γράφω οὕτως $\frac{9}{0}=\infty$. Ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ πρώτου ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς καὶ διαιρεθεὶς δι' ἑαυτοῦ εἶναι ἴσος ἑαυτῷ. Οὕτως $\frac{5 \times 4}{4}=5$, καὶ $\frac{4 \times 100}{100}=4$, καὶ ἐν γένει $\frac{\beta \times \alpha}{\alpha}=\beta$.

41. Ἄν λοιπὸν καὶ ἡ διαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐναν-

τία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. καὶ ἂν ὁ πολλαπλασιασμός
 δύο ἀριθμῶν ἀπλῶν ἐδεδήθη οὐδενὸς κανόνος, εἰμὴ τῆς γυ-
 μνάσεως τοῦ Πυθαγορείου πίνακος (32) (δῆλον ὅτι καὶ ἡ
 διαίρεσις παντὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ μόνων δύο χα-
 ρακτῆρων, καὶ τοῦ διαιρέτου ἐξ ἐνὸς ἢ ἡθελεν ἐκτελεσθῇ
 διὰ μόνου τοῦ πίνακος τοῦ Πυθαγόρου. Ζητείσθω, φέρε
 εἰπεῖν, νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 63 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7. Πρῶ-
 του εὐρίσκω εἰς τὴν πρώτην πρὸς ὀρθὰς στήλην τὰ 7.. β'.
 ζητῶ κατ' εὐθείαν τῶν 7 ὀριζοντίως τὰ 63.. γ'. ἀνέρχο-
 μαι ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰ ἄνω πρὸς ὀρθὰς, μέχρι τῆς τελευ-
 ταίας στήλης, καὶ ἀπαντῶ τὰ 9.. ὥςτε λέγω ὅτι τὰ 9 εἶ-
 ναι τὸ ζητούμενον πηλίκον: ὅ ἐστι $\frac{63}{7}=9$ (καὶ τούτου ἐ-
 νεκεν καὶ $7 \times 9=63$).

Ἄν ὅμως ὁ δοθεὶς διαιρέτεος δὲν περιέχεται ἐντὸς
 τοῦ πίνακος (δῆλον ὅτι τότε ἡ διαίρεσις δὲν θέλει γένοι
 ἐξηκριθωμένως ἀλλὰ θέλει μείναι καὶ λείψανόν τι. Ζη-
 τείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τῶν 62 διὰ τῶν 7.
 τότε ἐγὼ βλέπω ὅτι ἀντικρυ τοῦ 7 δὲν εὐρίσκονται τὰ
 62 (συνάγω ὅτι τὰ 62 δὲν διαιροῦνται ἐξηκριθωμένως
 διὰ τῶν 7.. ἐκ τοῦ διότι $62=8 \times 7+6$. Καὶ ἐπειδὴ τὰ
 62 κεῖνται μεταξὺ τῶν 63 καὶ 54 ἀριθμῶν, οἵτινες εὐ-
 ρίσκονται ἐντὸς τοῦ πίνακος (ἐγὼ προκρίνω τὰ 56 (καὶ
 βλέπω ὅτι ἀντικρίζουσι μετὸν ἀριθμὸν 8, κείμενον ἐν τῇ
 ἀνωτάτῳ στήλῃ (συνάγω ὅτι τὰ 8 εἶναι τὸ ζητούμενον
 πηλίκον μετὰ λείψανον 6 (καὶ τὰ γράφω οὕτως $8 \frac{6}{7}$, εἴτε
 $\frac{62}{7}=8 \frac{6}{7}$. Καθότι $7 \times 8 \frac{6}{7}=62$.

Τὸ εἰρημένον ὅμως πηλίκον ἐγὼ ἤθελον εὔροι καὶ
 διὰ τῆς ἀφαιρέσεως, οὕτως.. $62-7=55$, καὶ $55-7$

$=48, \text{ ἢ } 48-7=41, \text{ ἢ } 41-7=34, \text{ ἢ } 34-7=27,$
 $\text{ ἢ } 27-7=20, \text{ ἢ } 20-7=13, \text{ ἢ } 13-7=6,$ ἐκ τοῦ
 ὁποίου ἐπειδὴ καὶ δὲν ἀφαιροῦνται πλέον τὰ 7 (τὰ γράφω
 οὕτως $\frac{6}{7}$, καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται
 κλάσμα (καὶ ἐπομένως καὶ κλασματικὸν τὸ πη-
 λίκον $8\frac{6}{7}$). Ἄν λοιπὸν καὶ ὁ διαιρέτης εἰσέρχεται ἐξη-
 κριδωμένως εἰς τὸν διαιρετέον τότε λαμβάνει ὅμοια μέρος
 σύμμετρον, εἰδὲμή, ἀσύμμετρον. Οὕτω τὰ 7
 εἶναι μέρος σύμμετρον τοῦ 63 ἀριθμοῦ, καὶ ἀσύμμετρον
 τοῦ 62.

42. Πλὴν ὅν ὁ δοθείς διαιρέτος σύγκηται ἐκ πλέον
 τῶν δύο χαρακτήρων: τοῦ διαιρέτου δηλονότι διαμένον-
 τος ἐξ ἑνός, τότε εἶναι χρεῖα κανόνων, οἵτινες ὁμῶς κα-
 ταντῶσι καὶ οὗτοι εἰς τοῦτο αὐτό: τουτέστιν εἰς τὸ νὰ διαι-
 ρέσῃ τις ἓνα ἢ δύο μόνον χαρακτήρας (41). καὶ ἰδοὺ πῶς.

Γράφω τὸν διαιρετέον.. ἄγω καὶ ἄνωθεν αὐτοῦ καὶ
 πηλίκως ἐκ τῶν ἀριστερῶν γραμμῆν.. τίθημι πηλίκως ἐκ
 τῶν δεξιῶν τοῦ διαιρετέου τὸν διαιρέτην.. Εἶτα ἄρχομαι
 τῆς διαιρέσεως ἐκ τῶν ἀριστερῶν (πλὴν ὅχι ὁλικῶς ἀλλὰ
 μερικῶς: ἐνός δηλονότι χαρακτήρος, ἢ καὶ δύο: ἂν δηλο-
 νότι ὁ εἰς χαρακτήρ δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην (καὶ γρά-
 φω τὸ μερικὸν τοῦτο πηλίκον ἄνωθεν τοῦ διαιρετέου. β'.
 Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην διὰ τοῦ εἰρημένου πηλί-
 κου (καὶ γράφω τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἤδη διαιρεθέντος
 μέρους τοῦ διαιρετέου (καὶ τὸ ἀφαίρω. γ'. Εἰς ταύτην
 τὴν διαφοράν κατάγω τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου,
 καὶ ἔχω ἄλλον νέον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ἐκτελῶ εἰς
 αὐτὸν ὡς καὶ ἄνωτέρω, καὶ οὕτως ἀκολουθῶς, ἕως οὗ νὰ

μηδενίτω τὸν ὁλόκληρον διαιρετέον, ὡς ὁράται ἐπὶ παρα-
δειγμάτων.

Ζητεῖσθ' οὖ, φέρε εἰπεῖν, νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 13698,
διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 6.

Γράφω λοιπὸν αὐτοὺς ὡς ὁ-
ρῶνται ἑ καὶ ἄρχομαι τῆς διαιρέσεως
ἐκ τῶν ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου, εἴτε
ἐκ τῆς δεκάδος χιλιάδος. Ἀλλ' ἐ-
πειδὴ καὶ τὰ 6 δὲν εἶναι μέρος τῆς
μονάδος ἑ διὰ τοῦτο λαμβάνων καὶ
τὰ 3 ὁμοῦ, λέγω τὰ 6 εἰς τὰ 13
εἰσέρχεται δις, ὅπερ γράφω ἄνω
τοῦ διαιρετέου.

$$\begin{array}{r}
 2283 \\
 6 \overline{) 13698} \\
 \underline{12} \\
 16 \\
 \underline{12} \\
 49 \\
 \underline{48} \\
 18 \\
 \underline{18} \\
 00
 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζω τὸν διαφέτην 6 διὰ τοῦ πηλίκου
2, καὶ ἔχω 12 γινόμενον, ὅπερ γράφω ὑπὸ τοῦ μερικοῦ
διαιρετέου 13 ἑ καὶ ἐκτελῶν τὴν ἀφαίρεσιν, ἔχω λείψα-
νον 1 : ὅπερ καὶ ὑπογράφω ἄγων γραμμὴν ὀριζούτιον,
καὶ εἶναι χιλιάς.

Εἰς τὰ πλάγια τοῦ 1 κατάγω τὸν ἀκόλουθον χαρα-
κτῆρα 6 τοῦ διαιρετέου ἑ καὶ οὕτως ἔχω 16 διὰ μερικοῦ
διαιρετέου ἑ ἐνθα ἐπακολουθῶν τὴν διαίρεσιν, λέγω τὰ 6 εἰς
τὰ 16 εἰσέρχονται δις ὥστε γράφω τὰ 2 εἰς τὴν δεξίαν
τοῦ πρώτου πηλίκου 2.

Ὡς εἰς τὴν πρώτην πράξιν, πολλαπλασιάζω τὸν
διαφέτην 6 διὰ τοῦ νέου πηλίκου 2, καὶ ἔχω 12 γινόμε-
νον, ὅπερ γράφω ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 16.. καὶ ἐκ-
τελῶν τὴν ἀφαίρεσιν, ἔχω λείψανον 4, ὅπερ δηλονότι εἰ-

ναι εκατοντάδες, καὶ τὸ ὑπογράφω αὐτοῦ, ἀφ' οὗ ἄξιον γραμμὴν ὀρίζονται.

Εἰς τὰ πλάγια αὐτοῦ κατάγω τὸν ἀκόλουθον χαρακτῆρα 9 τοῦ διαιρετέου καὶ οὕτως ἔχω διὰ μερικὸν διαιρετέου 49, ἐνθα ἀκολουθῶν τὴν διαίρεσιν, λέγω τὰ 6 εἰς τὰ 49 εἰσέρχεται ὀκτάκις ὥστε γράφω τὰ 8 εἰς τὰ δεξιά τοῦ δευτέρου πηλίκου 2.

Ὡς εἰς τὴν δευτέραν πράξιν, πολλαπλασιάζω τὸν διαιρετὴν 6 διὰ τοῦ νέου πηλίκου 8, καὶ ἔχω 48 διὰ γινόμενον, ὅπερ γράφω ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 49. καὶ ἐκτελῶν τὴν ἀφαίρεσιν ἔχω λείψανον 1, ὅπερ δηλοῦσι εἶναι δεκάς.

Εἰς τὰ πλάγια αὐτοῦ κατάγω τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου 8, καὶ ἔχω διὰ τελευταῖον μερικὸν διαιρετέον 18, ἐνθα ἐπακολουθῶν τὴν διαίρεσιν, λέγω τὰ 6 εἰς τὰ 18 εἰσέρχεται τρίς ὥστε γράφω τὰ 3 εἰς τὰ δεξιά τοῦ τρίτου πηλίκου 8.

Ὡς εἰς τὴν τρίτην πράξιν, πολλαπλασιάζω τὸν διαιρετὴν 6 διὰ τοῦ νέου πηλίκου 3, καὶ ἔχω 18 διὰ γινόμενον, ὅπερ γράφω ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 18, καὶ ἐκτελῶν τὴν ἀφαίρεσιν ἔχω λείψανον 0. Ὡς ἐγὼ ἔχω διὰ πηλίκον 2283: ὅς ἐστιν ὁ ἀριθμὸς 13698 περιέχει τὸν ἀριθμὸν 2283 ἑξάκις, καὶ διὰ τοῦτο $6 \times 2283 = 13698$ (33).

43. Ἄν ὅμως καὶ εἰς τὴν ἐπακολουθητιν τῆς ἐργασίας τίς τῶν μερικῶν διαιρετέων δὲν περιέχῃ τὸν διαιρετὴν ἢ τότε πρέπει τις νὰ γράφῃ μηδέν διὰ πηλίκον ἢ καὶ ἐπομένως παραβλέπων τὸν πολλαπλασιασμὸν, νὰ

κατάγῃ εὐθὺς ἄλλον νέον χαρακτηῖρα, ἐπακολουθῶν τὴν διαίρεσιν.

Ἔστω, φέρε εἰπεῖν, νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6 ὁ ἀριθμὸς 6523.

Τάττω τὸς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἀνω-
τέρω, ὄρχομαι τῆς διαιρέσεως λέγων
 $\frac{6}{6} = 1$ ἢ γράφω 1 εἰς τὸν τόπον τοῦ πη-
λίκου, καὶ ἀφαιρῶν τὰ 6 ἀπὸ τοῦ 6 ἔχω
μηδὲν διαφορὰν. Κατάγω τὰ 5, καὶ
βλέπω ὅτι τὰ 6 δὲν εἰσέρχεται εἰς τὰ 5,
γράφω 0 διὰ πηλίκου ἢ καὶ εὐθὺς κατὰ-

$$\begin{array}{r} 1087\frac{1}{2} \\ 6 \overline{) 6523} \\ \underline{6} \\ 52 \\ \underline{48} \\ 43 \\ \underline{42} \\ 1 \end{array}$$

γ' τὸν τρίτον χαρακτηῖρα τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχω 52
διὰ μερικὸν διαιρετέον, εἰς ὃν περ ὁ διαιρέτης 6 εἰσέρ-
χεται ὀκτάκις.. ὥς γράφω τὰ 8 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 0 ἢ καὶ
πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 6 ἐπὶ τὰ 8, ἀφαιρῶ τὰ
48 ἀπὸ τῶν 52 ἢ καί μοι μένει λείψανον 4, εἰς τὰ δε-
ξιὰ τοῦ ὁποῦ καταγαγὼν τὸν τελευταῖον χαρακτηῖρα 3
τοῦ διαιρετέου, ἔχω διὰ νέον μερικὸν διαιρετέον 43, εἰς
ὃν περ ὁ 6 διαιρέτης εἰσέρχεται ἐπτάκις.. ὥς γράφω
τὰ 7 εἰς τὸ πηλίκον, πολλαπλασιάζω τὰ 6 διὰ τῶν
7, καί μοι γεννᾶται 42, οὗτινος ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ
μερικοῦ διαιρετέου 43, ἔχω διαφορὰν 1, ὅπερ ἐπειδὴ
καὶ δὲν δέχεται διαίρεσιν, τὸ ἀφήνω τεσημειωμένον ἢ καὶ
οὕτως ἐγὼ συνάγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς 6523 περιέχει $1087\frac{1}{2}$
τὸν 6 ἀριθμόν.

44. Ἄν ὅμως, ὡς καὶ ὁ διαιρετέος, οὕτως ὁ διαι-
ρέτης σύγκηται ἐκ πλείον τοῦ ἐνὸς χαρακτηῖρος ἢ διαι-
ρεσις πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ οὕτω.

Νὰ λάβῃ τις ἐκ τῶν ἀριστερῶν τοῦ διαιρετέου τοσοῦτους χαρακτῆρας, ὅσους περιέχει ὁ διαιρέτης, ἢ καὶ τοσοῦτους, ὥς ὁ διαιρέτης νὰ περιέχεται ἐντός. Ἐπειτα ἀντὶ νὰ ζητήσῃ ποσάκις οὕτως ὁ μερικὸς διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, νὰ ζητήσῃ μόνον ποσάκις ὁ πρῶτος χαρακτήρ τοῦ διαιρετέου περιέχει τὸν πρῶτον χαρακτήρα τοῦ διαιρέτου ἢ καὶ τοῦτο ἤθελεν εἶναι τὸ μερικὸν πηλίκον ἢ εἴτα νὰ ἐπακολουθήσῃ τὴν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω (42).

Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ 753410, διὰ τοῦ 125.

6027 ³ / ₄	
125 753410	
750	
341	
250	
910	
875	
35	

Τάττω αὐτοὺς κατὰ τὸν ἐγνωσμένον τρόπον. λαμβάνω τρεῖς χαρακτῆρας μόνον ἐκ τοῦ διαιρετέου ἢ καὶ ἀντὶ νὰ εἰπῶ ποσάκις τὰ 753 περιέχουσι τὰ 125, λέγω ποσάκις εἰς τὰ 7 περιέχεται τὸ 1; ἑπτάκις. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀκόλουθος χαρακτήρ 5 τοῦ διαιρετέου δὲν περιέχει ἑπτάκις τὸν ἀκόλουθον χαρακτήρα 2 τοῦ διαιρέτου ἢ διὰ τοῦτο δὲν λαμβάνω 7 διὰ πηλίκον ἢ ἀλλ' 6 ἢ καὶ τοῦτο, διότι καὶ τὸ 1 εἰσέρχεται ἑξάκις εἰς τὸ 7, καὶ τὰ 2 εἰς τὰ 15. Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 125 διὰ τοῦ 6, καὶ ἔχω διὰ γινόμενον 750, ὅπερ ἀφαιρῶν ἀπὸ τῶν 753, ἔχω λείψανον 3, εἰς τὰ πλάγια τοῦ ὁποίου κατὰ γινόμενον τὸν ἐξῆς χαρακτήρα τοῦ διαιρετέου 4. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸν 34 νέον μερικὸν διαιρετέον, ὁ διαιρέτης 125 δὲν εἰσέρχεται ἢ διὰ τοῦτο καὶ ἐγὼ γράφω μηδὲν εἰς τὸ πηλίκον ἢ καὶ κατὰ γινόμενον εὐθὺς ἀμέσως

τὸν ἐξῆς χαρακτῆρα 1 τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχω διαιρετέον με-
ρικὸν 341 < ἐνθα ἐπακολουθῶν τὴν διαίρεσιν, λέγω τὰ 125
εἰσέρχονται δις εἰς τὰ 341 < ὥς γράφω τὰ 2 εἰς τὸ πη-
λίκον. Εἶτα πολλαπλασιάζων διὰ τῶν 2 τὰ 125, γράφω
τὸ γινόμενον 250 ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 341. Καὶ
τῆς ἀφαιρέσεως γενομένης, εἰς τὰ πλάγια τοῦ λειψάνου
91 ἐκ τῶν δεξιῶν κατάγω τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τοῦ
διαρετέου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ 1 περιέχεται εἰς τὸ 9 ἐννεά-
κις, ὅχι ὅμως καὶ οἱ λοιποὶ χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου <
ἀλλ' οὔτε ὀκτάκις < διὰ τοῦτο γράφω 7 εἰς τὰ πηλί-
κον. Καὶ πολλαπλασιάζων διὰ τῶν 7 τὰ 125, γρά-
φω τὸ γινόμενον 875 ὑπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 910.
Καὶ τῆς ἀφαιρέσεως γενομένης, εὕρισκω λείψανον 35,
ὅπερ σημειῶ πηλσίον τοῦ πηλίκου 6027.

Ζητεῖσθω ἔτι ἡ διαίρεσις τοῦ 1680288 διὰ 736.

Εὐνταῦθα ἐγὼ ἀθυνατῶ νὰ λάβω
μόνον τρεῖς χαρακτῆρας ἐκ τοῦ δι-
αιρετέου < ἐκ τοῦ διότι δὲν περιέ-
χουσιν ὀλόκληρον τὸν διαρετέον <
ὥς λαμβάνω τέσσαρας, καὶ λέγω
τὸ 7 εἰς τὰ 16 εἰσέρχεται δις, καὶ
γράφω 2 εἰς τὸν τόπον τοῦ πηλίκου.
Καὶ ἐπακολουθῶν ἀπαραλλάκτως,
ὥς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, τὴν
ἐργασίαν τῆς διαίρεσεως, ἔχω διὰ
πηλίκον 2283.

$$\begin{array}{r}
 2283 \\
 736 \overline{) 1680288} \\
 \underline{1472} \\
 2082 \\
 \underline{1472} \\
 6108 \\
 \underline{5888} \\
 2208 \\
 \underline{2208} \\
 0
 \end{array}$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τῆς Γῆς ἔχει πρὸς τὴν τα-
χύτητα τῆς Σελήνης < ὥς τὰ τούτων διαστήματα εἰς ἴσον

χρόνον.. καὶ ἡ μὲν Γῆ διέρχεται, εἰς ἓν λεπτόν, λέγας 415, ἡ δὲ Σελήνη 14 (διὰ τοῦτο ἐγὼ εὐρίσκω ὅτι ἡ ταχύτης τῆς γῆς εἶναι $\frac{415}{14} = 29\frac{9}{14}$ ὡς πρὸς τὸ 1 : τουτέστι περὶ $30^{ος}$.

Ὡσαύτως αὖν διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 86400 διὰ τοῦ 672, ἔξω πηλίκον $128\frac{514}{672}$. Ἀλλὰ κατὰ τὰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις, τὸ μὲν ἀστρονομικὸν ἔτος εἶναι = 365 (ἡμέρας) 48' (λεπτά) 48'' (δεύτερα), τὸ δὲ πολιτικὸν = 365ῆ, 6ῶρ, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ εἶναι = 11' 12'' = 672''. ἡ δὲ ἡμέρα εἶναι = 24ῶρ = 86400''. Ὡς αὖν ὁ ἀριθμὸς 672'' μέρος 128 $\frac{514}{672}$ τοῦ 86400'', παρίσθην ὅτι εἰς ἔτη 128 πρέπει νὰ ἀφαιρῶμεν μίαν ἡμέραν διὰ τὴν ὑπεροχὴν τῶν 6ῶ ὡς πρὸς 5ῶ 48' 48''. ἢ, ἀντὶ 32 βυσσέκτους νὰ ἔχωμεν 31. οὕτως ἤθελε πλησιάζει τὸ πολιτικὸν ἔτος εἰς τὸ ἀστρονομικόν, ἢ ἀληθές.

45. Εἶναι ὁμοίως ἄξια σημειώσεως εἰς πᾶσαν διαιρέσειν ταῦτα, α'. ὅτι εἰς πᾶσαν μερικὴν διαίρεσιν τὸ πηλίκον ἀδυνατεῖ νὰ ὑπερβῇ τὰ 9. Καθότι μερικὴ διαίρεσις ἄλλο δὲν σημαίνει, εἰμὴ διαίρεσιν μονάδων. Καὶ ἐπειδὴ αἱ μονάδες δὲν ὑπερβαίνουνσι τὸν ἀριθμὸν 9 (10) : τούτου ἕνεκεν εἰς πᾶσαν μερικὴν διαίρεσιν τὸ πηλίκον ἀδυνατεῖ νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν 9. ἐξ οὗ ἤθελε συναῖτοις, ὅτι ἔσται μερικαὶ διαίρεσις γένωσις τοσούτους χαρακτηῖρας πρέπει νὰ ἔχη τὸ πηλίκον, ἐξ οὗ ἐπιταὶ νὰ γινώσκῃ τις ἐκ πρώτης ὀφείως τὸ, εἰς διαιρέσεις πῶσων χαρακτηῖρων ἔχει νὰ θώτῃ πηλίκον : τοσάτων ἐηλονότι ὁ $\frac{1680288}{730}$.

β'. "Οτι εἰς πᾶσαν μερικὴν διαίρεσιν, ἂν ὁ διαιρε-
της δὲν διαίρη ἔξηκριθωμένως τὸν μερικὸν διαιρετέον (ὅπερ
καὶ ἐν γένει ἐπακολουθεῖ), πρέπει τις νὰ λαμβάνῃ πηλί-
κον ὅχι μείζον τοῦ ὀρθοῦ, ἀλλ' ἔλασσον.

γ'. "Οτι ἐπειδὴ καὶ εἰς πᾶσαν μερικὴν διαίρεσιν γί-
νεται μερικὸς πολλαπλασιασμός (ὅηλον ὅτι τὸ γινόμενον
ἐκεῖ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν μερικὸν διαιρετέον) ἢ
ἀλλήως τοῦτο ἤθελεν εἶναι: σημεῖον ὅτι τὸ πηλίκον ὑπῆρξε
μείζον τοῦ ὀρθοῦ, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι πᾶν λείψανον με-
ρικὸν ἂν ἦναι μείζον, ἢ ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον, θίλει
τὴν ἐργασίαν ἡμαρτημένην.

δ'. "Οτι εἰς πᾶσαν μερικὴν διαίρεσιν, ἔχωντις νὰ
κατάξῃ νέον χαρακτήρα ἐκ τοῦ ὀλικοῦ διαιρετέου, πρέπει
νὰ ὑποσίζῃ αὐτὸν εἰς τὸν διαιρετέον, ὥς νὰ μὴν ἐπλαν-
θάνηται ὅτι ἔλαβεν αὐτὸν εἰς τὴν διαίρεσιν. Οὕτως ἔχων
νὰ διαιρέσω τὸν 1680288 διὰ τοῦ 736, ἔνθα δηλ. ἔ-
χουσι νὰ γένωσι τέσσαρες μερικαὶ
$$\begin{array}{r} 736 \overline{) 1680288} \\ \dots \end{array}$$

διαίρεσεις (κατὰ τὸ ἄ.) (εἰς πᾶσαν

μερικὴν διαίρεσιν ὑποσίζω τὸν τελευταῖον χαρακτήρα: του-
τέστιν εἰς τὴν πρώτην τὸ 0, εἰς τὴν δευτέραν τὸ 2, εἰς
τὴν τρίτην τὸ 8, καὶ εἰς τὴν τετάρτην τὸ 8.

ε'. "Οτι ὅταν ὁ δεύτερος χαρακτήρ τοῦ διαιρετέου ὑ-
περέχῃ πολλὰ τὸν πρῶτον (τότε ἤθελεν εἶναι ἐπικερδέσε-
ρον ἀντὶ νὰ ζητήσῃ τις ποσάκис ὁ πρῶτος χαρακτήρ περὶέ-
χεται εἰς τὸ ἀνταποκρινόμενον μέρος τοῦ διαιρετέου (44),
νὰ προσθήσῃ μονάδα εἰς αὐτὸν, καὶ τότε νὰ κάμῃ τὴν
διαίρεσιν. Ἐςω, φέρε εἰπεῖν, νὰ διαιεθῇ ὁ ἀριθμὸς 19302
διὰ τοῦ 288 (τότε ἀντὶ νὰ εἰπῶ τὰ 2 ποσάκис εἰσέρχον-

ται εἰς τὰ 19, ἢ 9, ἢ 8, ἢ 7, ἢ 6 δηλ. προστιθέμενος διὰ τοῦ νοῦς μονάδα εἰς τὰ 2, λέγω τὰ 3 ποσάκις εἰσέρχεται εἰς τὰ 19; ἑξάκις βέβαια.. ἐκ τοῦ διότι ὁ διαιρέτης 288 ἀπέχει πλέον τῶν 200, ἢ τῶν 300, καὶ οὕτω λαμβάνω διὰ πηλίκον τὰ 6 ἐκ τοῦ $\frac{1930}{288}$ (ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ 7 ἐκ τοῦ δευτέρου διαιρετέου 2022, καὶ οὕτως ἔχω διὰ πηλίκον $67 \frac{6}{288}$, ὡς ὁράται.

$$\begin{array}{r}
 67 \frac{6}{288} \\
 288 \overline{) 19302} \\
 \underline{1728} \\
 2022
 \end{array}$$

46. Ἄν ὅμως, καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ περατοῦνται εἰς μηδενικά (τότε ἀντὶ τῆς διαιρέσεως, πρέπει νὰ διαγράψῃ ἑκατέρωθεν ἴσα μηδενικά καὶ διὰ τούτου θέλλει ἐκτελεσθῇ τὴν διαίρεσιν.

Ζητεῖσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τῶν 60 διὰ τῶν 30. Ἐγὼ διαγράφω ἑκατέρωθεν τὰ μηδενικά.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{60}{30} = \frac{6}{3}$ (35), διαιρῶ τὰ 6 διὰ τοῦ 3, καὶ ἔχω πηλίκον 2, ἅπερ δηλονότι εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ὡσαύτως καὶ ἂν ἦν νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 159600 διὰ τοῦ 700 (ἐγὼ ἤθελον διαιρέσαι τὸν 1596 (00 διὰ τοῦ 7 (00, εἴτε $\frac{1596}{7} = 228$).

Ἄν ὅμως καὶ περατοῦνται εἰς μηδενικά μόνος ὁ διαιρέτης (τότε ἐκ μὲν τοῦ διαιρέτου διαγράφουσιν ἅπαντα τὰ μηδενικά, ἐκ δὲ τοῦ διαιρετέου, ἰσαριθμούς χαρακτῆρας ἐκ τῶν δεξιῶν (πλὴν μετὰ τὴν ἐργασίαν προστίθουσιν εἰς τὸ πηλίκον ἐκ τῶν δεξιῶν τοὺς διαγραφέντας χαρακτῆρας. Ζητεῖσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τοῦ 1596 διὰ τοῦ 700.

Διαχωρίζω λοιπὸν τοὺς δύο χαρακτῆρας τοῦ διαιρε-

τέου οὕτως, 15(96.. καὶ ἐκτελών τὴν διαιρέσειν μόνου τοῦ 15 διὰ τοῦ 7, ἔχω πηλίκον $2\frac{1}{7}$. Τώρα προσέβημε τὰ μὲν δύο μηδεσικὰ εἰς τὸν διαιρετέον, τὰ δὲ 96 εἰς τὸν διαιρετέον (ἐκ τῶν δεξιῶν ὀηλονότι), καὶ ἔχω πηλίκον $2\frac{196}{700}$.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{1596}{700} = 2\frac{196}{700}$.

Ἄν ὁμως καὶ ὁ διαιρέτης ἔχη μονάδα μόνου διὰ πραγματικὸν χαρακτῆρα (τότε ἡ διαιρέσις ἄλλως ἐν θέλῃ γένῃ, εἰμὴ διὰ τοῦ διαχωρισμοῦ ἰσαριθμῶν χαρακτῆρων ἐκ τοῦ διαιρετέου. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαιρέσις τοῦ 1596 διὰ τοῦ 100. ἕκαστος ὁρᾷ ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι $= 15\frac{96}{100}$.

Εἰ δὲ καὶ ὁ διαιρέτης ᾗν 1000 (τότε ἤθελον ἔχοι διὰ πηλίκον $\frac{1596}{1000} = 1\frac{596}{1000}$, ὅπερ ἐμφανίζει διαγραφὴν τριῶν χαρακτῆρων ἐκ τοῦ διαιρετέου. Ὡσαύτως καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{238873}{10000}$ εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν $23\frac{8873}{10000}$.

47. Εἶναι βέβαια ἄξιον σημειώσεως τὸ νὰ θέλῃσιν οἱ ἀριθμητικοὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου, τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὰς τοῦ διαιρετέου: ὁ ἐξῆν ἂν ᾗναι ἐκεῖναι συγκεκριμέναι, συγκεκριμέναι νὰ ᾗναι καὶ αὐταὶ καὶ ἂν μὴ, οὔτε αὐταί: ὁ ἐξῆν, δοξάζουσιν ὅτι ἡ ἐργασία γίνεται δι' ὑλικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ ὀηλονότι εἶναι ψεῦδος ψηλαφητόν. Καθότι ἄντις προτείνῃ τὸ, 10 ἄνθρωποι ἐκ 40 γρόσιων, πόσα ἔχει νὰ λάβῃ ἕκαστος; Δῆλον ὅτι εἰς τὴν ἐργασίαν οὔτε ὁ διαιρετέος εἶναι ἀριθμὸς συγκεκριμένος, οὔτε ὁ διαιρέτης, οὔτε τὸ πηλίκον ἀλλὰ πάντες ἀφηρημένοι.

Καθότι ἄντις εἶπη 100 γρόσια πρὸς 13 τὸ βενέτικον πόσα βενέτικα κάμνουσιν; ἢ 100 πηχῶν ὕψοςμα πρὸς 13 γρόσια, πόσα γρ' κάμνουσι; τότε - ἡρᾶς ὄντων γρο-

σίων, ἢ πηχῶν τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου, θήλουσιν εἶναι τοιαῦται καὶ αἱ μονάδες τοῦ πηλίκου; ὅχι βέβαια.

β'. Κατ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμητικοὺς ἐγὼ δύναμαι νὰ λύσω τοῦτο τὸ ζήτημα καὶ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως (39), οὕτως $100 - 13 = 87$, καὶ $87 - 13 = 74$ καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ἔνθα ὁλ: ἔξω πηλίκον $= 7 \frac{0}{13}$.

Ἀλλὰ τίς - ποτὲ ἤθελεν εἰποι ὅτι τὸ ἀποθέσει σημείων ληθρὲν ἐπτάκις εἶναι ὡς συγκεκραμένον; ἢ τίς ἤθελεν εἰποι ὅτι ἀφαιροῦνται χρυσαὶ μονάδες ἐκ τοῦ ὑγράσματος, ἢ ἐκ τῶν ἀργυρίων; εἰτι ἂν μὲν ὁ διαιρετέος ἦν 40 γρ., ὁ δὲ διαιρετής 10 ἀνθρώποι· τότε ἐγὼ ἔπρεπε νὰ ἀφαιρέσω ἀνθρώπους ἐκ τῶν γρόσιων, καὶ ἡ ποσάκις ἀφαιρέσεις νὰ ᾖναι γρόσια; Τέρας τεράτων!

γ'. Τίς - δύναται νὰ ἀρνηθῇ ὅτι ἐκάτερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι ἔν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπὸ διαφορετικῶν μορφῶν; Ὡς προτεινόμενον τοῦ ζητήματος τοῦ, 10 ἀνθρώποι νὰ μοιράσωνται 40 γρ'. πόσα θέλει λάβοι ἕκαστος, καὶ οὕσης 4 τῆς ἀποκρίσεως, εἴτε $\frac{40}{10} = 4$ ὁλλον ὅτι ἂν ὑποτεθῇ συγκεκραμένον τοῦ μέλους 4 (πρέπει ἀφεύκτως νὰ ᾖναι τοιοῦτον καὶ τὰ $\frac{40}{10}$). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὰ $\frac{40}{10}$ ἀλλοθὲν σημαίνει, εἴμη τὸ ποσάκις εἰσέρχονται τὰ 10 εἰς τὰ 40, εἴτε ὅποιον μέρος εἶναι τοῦ 10 τοῦ 40 (ὁλλον ὅτι οὕτε τὰ 4 εἶναι συγκεκραμένον, εἴτε ὑλικὸν ἀλλ' ἀφηρημένον). Ὡς διὰ νὰ τὸ μετασιώσω εἰς συγκεκραμένον, εἶναι πᾶσα ἀνάγκη εἰς ἐμὲ νὰ προστέσω εἰς αὐτὸ καὶ τὸ, γρόσια (16).

48. Ἡ βίαστος ὅμως, εἴτε ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως ἤθελε γένει, ὡς καὶ ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ

τοῦ 9 (37). Ἐγώ, φέρε εἰπεῖν, διαιρέσας τὸν ἀριθμὸν 1680288 διὰ τοῦ 736, εὗρον πηλίκον τὰ 2283 (44). Τώρα ἀφαιρῶ τὸ ἐννεαπλάσιον ἐκ τοῦ 736, καὶ ἔχω 71 καὶ ἐκ τοῦ 2283, καὶ ἔχω 6. πολλαπλασιάζων ταῦτα τὰ λείψανα, καὶ ἀφαιρῶν ἀπὸ τοῦ γινόμενου τὸ ἐννεαπλάσιον, ἔχω λείψανον 6, ὅπερ δηλονότι εἶναι ἴσον μὲ τὸ λείψανον τοῦ ἐκ τοῦ διαιρετέου 1680288.

Ἡ ἀσφαλεστάτη ὁμῶς βέβαιος τῆς διαιρέσεως ἤθελεν εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός. Καθότι ἂν ἡ διαίρεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐργασία ἐκ διαμέτρου ἐναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (38) (δηλον ὅτι πολλαπλασιάζων τις τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἔξει διὰ γινόμενον αὐτὸν τὸν δοθέντα διαιρετέον. Καθότι ἂν $\frac{1680288}{736} = 2283$ (δηλον ὅτι καὶ $736 \times 2283 = 1680288$). Ὡς καὶ ἡ διαίρεσις ἤθελεν εἶναι βέβαιος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (37). Ὅθεν διὰ τὰ μάθητις ταχέως τὴν διαίρεσιν, ὁ μόνος τρόπος ἤθελεν εἶναι νὰ πολλαπλασιάξῃ δύο παραγόντας, εἴτα νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων.

Εἶναι ὁμῶς ἄξιον σημειώσεως ὅτι ἂν εἰς τὸ πηλίκον εὗρεθῇ κλάσμα τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ προσεθῶσιν αἱ μονάδες τοῦ κλάσματος, ὡς ἀπλῶς μονάδες, εἰς τὴν διὰ τῶν 9 βέβαιον, ἐν ᾧ πολλαπλασιάζονται εἰς τὴν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὡς τὼς ἡμεῖς διαιρέσαντες τὸν ἀριθμὸν 6523 διὰ τοῦ 6, εὗρομεν διὰ πηλίκον $1087 \frac{1}{6}$ (43).. πρὸς εὗρεσιν λοιπὸν τοῦ διαιρετέου, διὰ μὲν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσω ὅχι μόνον τὸν ἀριθμὸν 1087 ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$, οὕτως τὸ γινόμενον = 1 εἰς δὲ τὴν βέβαιον τὴν διὰ τοῦ 9 εἶναι ἀνάγκη νὰ

προσθέσω καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ οὕτως, ὡς ὁράται $\frac{6 \mid 7}{7 \frac{1}{2} \mid 7}$ ὡσαύ-
τως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν $\frac{753410}{125} = 6027$
 $\frac{35}{125}$ (44), ἔγω· ἔχω $\frac{8 \mid 2}{6 \frac{1}{2} \mid 2} : 6$ ἔστιν ἐκτελῶ καὶ
εἰς τὸ λείψανον, ὅσα καὶ εἰς τὸ πηλίκον.

Ἄν ὅμως παρατηρήσῃ τις τὴν διαίρεσιν ἡθέληεν ἰ-
δοῖ, ὅτι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον αὕτη δὲν ἐκτελεῖται ἐξηκριθώ-
μένως ἀλλὰ μένει λείψανόν τι, ὅπερ, ὡς εἵπομεν (42)
γράφοντες πλησίον τοῦ πηλίκου, καὶ ἄγοντες ὑπ' αὐτοῦ
γραμμὴν, ὑπὸ τῆς γραμμῆς ἐγχαράττομεν τὸν διαιρέτην·
ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἐῶμεν τὸ πρᾶγμα σπλημενόμενον
χωρὶς νὰ ἐξετάζωμεν τὴν σημασίαν αὐτοῦ, ὅπερ ὠνο-
μάσαμεν καὶ κλάσμα. Ἄλλ' ὡς φαίνεται καιρὸς εἶναι ἤδη
νὰ ἐμβώμεν καὶ εἰς τὴν τῶν κλασμάτων θεωρίαν.

Κ Ε Φ. ΣΤ'.

Περὶ Κλασμάτων.

49. Ἡμεῖς ὠνομάσαμεν ποσότητα πᾶν ἐκεῖνο, οὗτινος
δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἢ τὸ ἡμισυ, ἢ τὸ ἓν τρίτον, ἢ τὸ
ἓν τέταρτον, ἢ, καὶ τ. ξ. (1). Ἄν λοιπὸν καὶ αὐτὶ νὰ
λάβῃ τις ὁλόκληρον τὴν ποσότητα τὴν δοθεῖσαν, λάβῃ
ἓν μέρος, ἢ τινὰ αὐτῆς μέρη, ὑποτιθέμενα ὅμως ἴσα ἀλ-
ληλοῖς τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ αἱ ἀριθμητικοὶ ὀνομάζουσι
(38) Κλάσμα. Καὶ ἔτι πᾶσα διαίρεσις, ἥς τινος ὁ
διαιρέτης εἶναι μείζων τοῦ διαιρετέου, εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ
κλάσμα.

Ὡς ἡ ἰδέα τοῦ κλάσματος συνέχει ἐν ἑαυτῇ δύ-
τινα.

α'. τὸ εἶδος, ἡ μέγεθος τῶν μερῶν τῆς δοθείτης ποσότητος, ἡ μονάδος: τοῦτέστι πῶς ἐξ αὐτῶν πρέπει νὰ συνέλθῃσι πρὸς ἐκτέλεσιν αὐτῆς καὶ β'. τὸν ἀριθμὸν τῶν λελημμένων μερῶν, ἡ μονάδων. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν λελημμένων μερῶν λαμβάνει ὄνομα Ἀριθμητῆς, ἀπὸ τοῦ ἀριθμῷ δηλονότι καὶ Παρονομαστῆς τὰ μέ-
ρη, ἡ μονάδες, εἰς ἃς περ ἐδιαιρέθη ἡ δοθείσα ποσότης, ὡς ἐξ αὐτῶν λαμβάνοντος τὴν μορφήν, ἡ ὄνομα τοῦ κλά-
σματος. Οὕτω $\frac{1}{5}$, ὅπερ ἐκφράζεται τέσσαρα πέμ-
πτα, σημαίνει νὰ διαιρέσῃ τις μίαν ποσότητα λελημμένην ὡς μονάδα, εἰς πέντε ἴσα ἀλλήλοις μέρη, καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ λάβῃ τὰ τέσσαρα: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ, νὰ μὴ λάβῃ ὁλόκληρον τὴν δοθείσαν ποσότητα ἀλλὰ μέρη αὐτῆς, ἔνθα δηλ. ὁ μὲν ἀριθμητῆς τούτῳ τοῦ κλάσματος εἶναι τὰ 4, ὁ δὲ παρονομαστῆς, τὰ 5, καὶ κοινῷ ὀνόματι πάλιν ὁ, τε ἀριθμητῆς καὶ ὁ παρονομαστῆς, ὀνομάζονται Ὅροι τοῦ κλάσματος. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμητῆς παντὸς κλά-
σματος γράφεται ἄνωθεν μιᾶς γραμμῆς ὁ δὲ παρονομα-
στῆς ὑποκάτωθεν αὐτῆς, καὶ προφέρονται ὡς ἑπῶς.

$\frac{1}{2}$ — — ἡμισυ

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ — ἐν, ἡ δύο τρίτα, ἡ τριτημόρια.

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ — ἐν, ἡ δύο, ἡ τρία τέταρτα, ἡ τεταρτημόρια.

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ — ἐν, ἡ δύο, ἡ τρία, ἡ τέσσαρα πέμπτα, ἡ πεμπτημόρια. καὶ τ. ξ.

Ὡς κυρίως κλάσματα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἀριθμοὶ εἰς ὁποιοὺς μὲν οἱ, ἡ μερικοὶ, ἔχοντες δηλονότι

ἀναφοράν, ὡς πρὸς τὴν διαίρεσιν μιᾶς ἄλλης ποσότητος. Οὕτως τὰ μὲν 20 σημαίνουσι ἀριθμὸν ἀγνηρημένον μετὰ δὲ τῆς προσθήκης παράδων σημαίνουσι εἴκοσι μονάδας ἀργυρᾶς, στρογγύλας, λεπτάς. τὰ δὲ $\frac{20}{40}$ τῶν παράδων σημαίνουσι καὶ εἴκοσι παράδας, καὶ ὅτι τεσσαράκοντα ἐξ αὐτῶν ποιῶσι μίαν ἄλλην μονάδα, ἣτις καὶ γρῆσιον ὀνομάζεται. ὀνομάζονται δὲ ὁμοειδῆ, ὅσα τῶν κλασμάτων ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὡς τὰ $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ (καὶ ἑτεροειδῆ, τὰ μὴ, ὡς τὰ $\frac{1}{5}$, $-\frac{4}{6}$).

50. Ἐπὶ λοιπὸν ἐντεῦθεν δύο τινα: α'. ὅτι μόνος τῶν ὄρων τοῦ κλάσματος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι, ὅστις ἀριθμεῖται, καὶ ὁ παρονομαστής χρησιμεύει εἰς οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ εἰς γινώσκειν τοῦ μεγέθους τῶν ἀριθμουμένων μονάδων. Οὕτω τὰ μὲν $\frac{4}{5}$ ὀνομάζονται τέσσαρα πέμπτα (τὰ δὲ $\frac{4}{6}$ τέσσαρα ἕκτα παρωνόμασαι, τὰ δὲ $\frac{4}{100}$ τέσσαρα ἑκατοστά).

β'. Ὅτι πᾶν κλάσμα εἶναι ἑλλαττον μονάδος (καὶ τοῦτου ἕνεκεν ὀνομάσθη καὶ κλάσμα: ὡς δηλ. διατομή, ἢ τμήμα ποσότητος, εἴτε ἀριθμοῦ ἢ ὅθεν καὶ ὁ ὅρος ἀριθμητῆς εἶναι πάντοτε ἐλάσσων τοῦ παρονομαστοῦ. Πάντοτε ὅμως περιέχει ἢ μονὰς τὸ κλάσμα, ὡς ὁ παρονομαστής τὸν ἀριθμητήν. Οὕτως τὸ 1 περιέχει τὰ $\frac{20}{40}$ (ὡς 40 τὰ 20: ὁ ἐστὶ τὸ 1 τὸ $\frac{1}{2}$ (ὡς τὰ 2 τὸ 1, ὅπερ δηλονότι εἶναι ἐναντίον τῆς διαίρεσεως τῶν ὁλοσχερῶν (ὡς ἐκεῖ περιεχομένης τῆς μονάδος εἰς τὸ πηλίκον, ὡς ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον (38): ὁ ἐστὶν τὸ 1 περιέχεται εἰς τὰ $\frac{40}{20}$ καθὼς τὰ 20 εἰς τὰ 40).

51. Πλὴν δὲν εἶναι σπάνιον γὰρ ἀπαντήσῃ τις ἐκ-

φράτεις εἰς μορφήν κλάσμάτων, ἔνθα ὁ παρονομαστής νά ᾔηται ὅσος, ἢ καὶ ἐλάττωσιν τοῦ ἀριθμοῦ. Ὅταν ὁ μὲν ὁ παρονομαστής ᾔηται ὅσος μὲ τὸν ἀριθμητὴν (τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα.. οὕτως $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{10}{10} = 1$, $\frac{99}{99} = 1$ (40), καὶ οὕτως ἐρεξῆς. Εἰ δὲ καὶ ὁ παρονομαστής εἶναι ἐλάττωσιν τοῦ ἀριθμοῦ (τότε ἡ σημασία τοῦ κλάσματος εἶναι μείζων μονάδος: τουτέστιν εἶναι ἀριθμὸς ὀλοσχερῆς (πλὴν ὑπὸ μορφήν κλάσματος. Οὕτω $\frac{12}{3} = 4$, καὶ $\frac{49}{7} = 7$, καὶ $\frac{100}{9} = 11 \frac{1}{9}$. Καὶ τοῦτου ἕνεκεν τὰ κλάσματα ἐδιδαιρέθησαν εἰς δύο: εἰς κύρια, καὶ καταχρησικὰ (καὶ ὀνομάσθησαν κύρια μὲν ὅσα καὶ μορφήν καὶ σημασίαν ἔχουσι κλασματικὴν, καταχρησικὰ δὲ ὅσα μόνον μορφήν ἔχουσι κλασματικὴν. Κλάσμα τὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὀνομάζονται, ὅσοι σύγκεινται ἐξ ὀλοσχεροῦς καὶ κλάσματος, ὡς ὁ $11 \frac{1}{9}$. Ἄν ὅμως ὁ εἰς ἀριθμὸς περιέχῃ τινα ἄπαξ καὶ ἡμισυ, ὀνομάζεται ἡμιόλιος, ὡς ὁ 3 τὸν 2 (οὕτως $\frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$, ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{6}{4}$, τὰ $\frac{9}{6}$, καὶ τὰ $\frac{12}{8}$, καὶ τ. ξ. Καὶ ἂν περιέχῃ τὸν ἕτερον $1 \frac{1}{3}$, ὡς ὁ 4 τὸν 3, καὶ ὁ 12 τὸν 9, ἐπί-τρίτος (καὶ ἐπόγδοος, ἂν ἄπαξ $1 \frac{1}{9}$, ὡς ὁ 9 τὸν 8 (οὕτως $\frac{9}{8} = 1 \frac{1}{8}$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ὀλοσχερῆς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς κλάσμα, διαιρούμενος διὰ τῆς μονάδος, χωρὶς δηλονότι νὰ ἀλλάξῃ σημασίαν. Οὕτω τὰ $\frac{3}{1} = 3$ καὶ τὰ $\frac{10}{1} = 10$, καὶ τὸ $\frac{1}{1} = 1$.

Συμπέρασμα β'. ὅτι ἂν πᾶς ἀριθμὸς διαιρούμενος δι' ἑαυτοῦ = 1.. καὶ ἂν ὄντος καὶ τοῦ διαιρέτιου καὶ

τοῦ διαιρέτου ἀριθμοῦ τοιοῦτον τι πρέπη νὰ ᾖ καὶ τὸ πηλίκον (ἢ μονάς εἶναι ἀριθμὸς (3), ἀλλέως $\frac{19}{10}$, καὶ $\frac{100}{100}$ εἶναι μὴ ἀριθμοί, ἐν ᾧ τὰ $\frac{20}{10}$ καὶ τὰ $\frac{200}{100}$ διδύσασιν ἀριθμὸν.

Εἴτα ἂν τὸ 1 δὲν ᾖ ἀριθμὸς, τὰ δὲ 10 εἶναι. καὶ ἂν τὸ 0 δὲν ἀλλάττῃ τὴν φύσιν τῶν χαρακτηρῶν, εἴμῃ τὸ μέγεθος αὐτῶν (9) (πῶς - ἀράγε ἥλλαξε τὴν φύσιν τῆς μονάδος, καὶ ἐκ μὴ ἀριθμοῦ τὴν ἀπεκατέστησεν ἀριθμὸν; Τὸ μὴδὲν, ὡς φαίνεται, θαυματουργεῖ!

52. Ἄλλ' ἐπειδὴ, ὡς ἡμεῖς εἶδομεν (41), εἰς πᾶσαν διαίρεσιν μετὰ λειψάνου, τὸ μὲν λείψανον τίθεται ἄνωθεν μιᾷ γραμμῆς, ὃ δὲ διαιρέτης ὑποκάτω αὐτῆς τοῦτου ἔνεκεν, πᾶν λείψανον μιᾷ διαιρέσει εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκληρβῇ ὡς κλάσμα (49), ἔνθα ὁ μὲν διαιρέτης νὰ ἔχῃ τὸν ὁριζῶν μονάδος, καὶ διαιρεθείς εἰς ἴσα μέρη (τὸ δὲ λείψανον τὸν ὁριζῶν μερῶν. Ὡς κλάσμα ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἴμῃ διαιρέσις τις, ἔνθα ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι μείζων τοῦ διαιρέτου. Ὡς εἰπόντες, ὅτι διαιρέσις εἶναι τὸ νὰ εὕρη τις, ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχει τὸν διαιρέτην (38), ἂν εἰπόμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης περιέχει τὸν διαιρέτην, τοῦτο ἤθελεν εἶναι κλάσμα, ὅπου τὸ πηλίκον εἶναι ἑλασσον μονάδος.

Οὕτω τὰ μὲν $\frac{13}{3}$ εἶναι διαιρέσις (τὰ δὲ $\frac{3}{12}$ εἶναι κλάσμα, εἴτε σεσημειωμένη διαιρέσις. ἔνθα ὁ γινώσκων ἐπειδὴ καὶ τὰ 3 δὲν συνέχουσιν τὰ 12 (τοῦτου ἔνεκεν καὶ ἐγὼ σημεῖον μόνον ταύτην τὴν διαίρεσιν, ὡς φράσσαντες εἰπομεν.

53. Ὅσοις μέχρι τοῦδε ἐξελάσαμεν τὰ κλάσματα,

ὡς μέρη μιᾶς μονάδος εἰς ἴσα διαιρεθείσης, καὶ λελημμένα τινὰ ἐξ αὐτῶν, ἔνθα δηλονότι ὁ μὲν παρονομαστῆς παρίσχηται τὸ μέγεθος τῶν δευτέρων μονάδων, ὁ δ' ἀριθμητῆς τὸν ἀριθμὸν τῶν λελημμένων ἐξ αὐτῶν (49). Πλὴν δὲν εἶναι οὐσκόλον νὰ ἐκληθῇ τὸ κλάσμα καὶ ὡς μία διαιρέσις (52), ἔνθα ὁ μὲν ἀριθμητῆς νὰ παρίσῃ ποσότητα τινὰ, ὥστε νὰ διαιρεθῇ εἰς τοσαῦτα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ παρονομαστῆς (ὁ δὲ παρονομαστῆς διαιρέτην).

"Ὡς εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ, ἢ ὁ παρονομαστῆς νὰ παρίσῃ τὸ εἶδος τῶν μονάδων, καὶ ὁ ἀριθμητῆς τὸν ἀριθμὸν, ἢ ὁ ἀριθμητῆς τὸ εἶδος τῶν μονάδων, καὶ ὁ παρονομαστῆς τὸ ποσάκις εἰσέρχεται εἰς αὐτόν. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ γρόσιου, κατὰ μὲν τὴν πρώτην σημασίαν σημαίνει νὰ διαιρέσηται τὸ νόμισμα γρόσιον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν τὰ 3, ἅπερ = 30 παρ. κατὰ δὲ τὴν δευτέραν θέλει σημαίνει τὸν μὲν ἀριθμητὴν 3 γρόσια, τὸν δὲ παρονομαστὴν τὸ νὰ λάβῃ τις ἐξ αὐτῶν τὸ τέταρτον μέρος: ὅπερ δηλονότι εἶναι = $\frac{120}{4}$ παρ. = 30 παρ. Καὶ ἐπομένως γρόσιον $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ γρόσιος = $\frac{3 \times 40}{1}$ παρ. = 30 παρ. Καὶ ὁκάδ. $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{3}$ ὁκά. = $\frac{1600}{3}$ ὄρ. = 320 ὄρ. Ὡσαύτως καὶ κανδ. $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ κανδ. = $\frac{7 \times 44}{1}$ ὁκ. = 308 ὁκ. ὅ ἐστὶ μεθερμηνευόμενον, καθ' ἑκάτερον τὸ κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἀναφορὰ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν, εἴτε πηλίκον.

54. Καθότι ἂν καὶ τὸ κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σεσημειωμένη διαιρέσις. καὶ ἂν διαιρέσις δὲν ᾖ ἄλλο τι πραγματικῶς, εἰμὴ ἀναφορὰ ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν, ὅπερ καὶ πηλίκον ὀνομάζομεν (38) (ἐπόμενον εἶναι καὶ πᾶν κλάσμα νὰ μὴν ᾖ ἄλλο τι, εἰμὴ ἀναφορὰ τις.

Καὶ ἂν τοῦτο εἰ ἀκόλουθον εἶναι, πολλὰ κλάσματα νὰ ἔχωσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν σημασίαν. Ὡς $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{50}{100}$ καὶ τ. ξ. εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.. ὥσαύτως καὶ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{50}{150}$ καὶ τ. ξ. Ἐκαστὸν διαφέρει ὁλοτελῶς τὸ νὰ διαιρέσῃ τις μίαν μονάδα δι᾽ ἑα, καὶ νὰ λάβῃ τὸ ἐν μέρος, ἢ νὰ διαιρέσῃ αὐτὴν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβῃ τὰ δύο.. ὥσαύτως εἶναι τὸ αὐτὸ τὸ νὰ διαιρέσῃ τις μίαν μονάδα εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβῃ τὸ 1 εἰς 6, καὶ νὰ λάβῃ τὰ 2, ὅπερ ὁηλονότι εἶναι σαρῆς καὶ ἐκ τῶν προτέρων. Ἐκαστὸν $\frac{2}{4} = \frac{2}{2 \times 2}$ εἰ ἀλλὰ $\frac{2}{2} = 1$.. ὥς $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ὅμοιον τι ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ταιούτων κλασμάτων, ἅπερ δηλ. εἶναι τὰ αὐτὰ κλάσματα πολλαπλασιαζόμενα διὰ τῆς μονάδος: ὅ ἐστι μόνον κατὰ τὴν μορφήν διαφέρουντα. Ὡς πᾶν κλάσμα, οὗ τινος ἀμφοτέρω εἰ ὅροι ἢ διαιροῦνται, ἢ πολλαπλασιάζονται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ταυτοχρόνως, διαμένει ἀμετάβλητον κατὰ τὴν σημασίαν.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι κεῖται ἐπ' ἐμοί, ἢ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμητὴν ἐνὸς κλάσματος, ἢ νὰ διαιρέσω τὸν παρονομαστὴν, ἢ τὸ ἀνάπαλιν διὰ τῆς διαιρέσεως. Οὕτως ὄντος $\frac{6}{10} = \frac{1}{10}$, εἶναι ἐπίσης $\frac{6 \times 2}{10 \times 2} = \frac{2}{10}$, καὶ $\frac{6}{10} = \frac{2}{10}$.. ὥσαύτως καὶ $\frac{6 \times 2}{10 \times 2} = \frac{1}{20}$, καὶ $\frac{6}{10 \times 2} = \frac{1}{20}$. ὅ ἐστιν ἡ διαιρέσις τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι πολλαπλασιασμός τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ ἀνάπαλιν (7).

Συμπέρασμα β'. ὅτι πᾶν κλάσμα εἶναι δυνατόν νὰ λάβῃ ἄλλην μορφήν, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ σημασίαν.

Τὸ αὐτὸ βέβαιον ἔχει χώραν καὶ εἰς τὰ καταχρη-

στῶς κλάσματα: ὅ ἐς μεθερμηνεύμενον πολλά κλάσματα ἔχουσι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν σημασίαν. Καθότι $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ καὶ τ. ξ. ε καὶ $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{100}{25}$ καὶ τ. ξ. Καθότι $\frac{4}{2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 1}$, καὶ $\frac{6}{3} = \frac{3 \times 2}{3 \times 1}$, καὶ $\frac{100}{25} = \frac{50 \times 2}{50 \times 1}$.

Ταῦτα λοιπὸν τὰ κλάσματα, ἅπερ δηλ. ἔχουσι κοινὸν παράγοντα εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους, ὀνομάζονται σύμμετρα (41).

55. Ἄν λοιπὸν καὶ πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρῇται ταυτοχρόνως κατὰ τοὺς δύο ὅρους, δι' ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλάττει ὀλοτελῶς σημασίαν εἰς ἐπόμενον εἶναι ἂν ἓνα κλάσμα πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρῇται καθ' ἓνα μόνον ὅρου, νὰ μεταβάλληται κατὰ τὴν σημασίαν.. ἐκ τοῦ διότι δηλ. πᾶν κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ πηλίκον ἐκ δύο ἀριθμῶν (52) εἰς οὗ ἔπονται ταῦτα:

α'. Νὰ μεγεθύνηται πᾶν κλάσμα, ὅταν ἡ πολλαπλασιασθῇ τις μόνον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν παρονομαστὴν, ἢ διαιρῇται μόνον τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ. Οὕτως ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{20}{40}$ ἐγὼ πολλαπλασιάσω μόνον τὰ 20 (τὸ ἀποκαθίσω μείζον ἐαυτοῦ.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{20 \times 2}{40} > \frac{20}{40}$. Καὶ ἂν διαιρέσω μόνον τὰ 40 (τὸ ἀποκαθίσω ὡσαύτως μείζον ἐαυτοῦ.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{20}{20} < \frac{20}{40} > \frac{20}{40}$.

β'. Νὰ σμικρύνηται πᾶν κλάσμα ὅταν ἡ διαιρέσις τις μόνον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν παρονομαστὴν, ἢ πολλαπλασιάσῃ μόνον τὸν παρονομαστὴν χωρὶς νὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν ἀριθμητὴν. Οὕτως ἂν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{20}{40}$ διαιρέσω ἐγὼ μόνον τὰ 20 διὰ τοῦ 2 ε

τὸ ἀποκαθιστῶ ἔλασσον ἑαυτοῦ : ἐκ τοῦ διότι $\frac{20:2}{40} = \left(\frac{10}{40}\right)$
 $< \frac{20}{40}$. Καὶ ἂν πολλαπλασιάσω μόνον τὰ 40 διὰ τοῦ 2
 τὸ ἀποκαθιστῶ ἔλασσον ἑαυτοῦ : ἐκ τοῦ διότι $\frac{20}{40 \times 2} = \left(\frac{10}{80}\right)$
 $< \frac{20}{40}$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ὅσον τις διὰ μεί-
 ζονος πολλαπλασιασμοῦ πολλαπλασιάσῃ τὸν παρονομαστὴν
 ἐνὸς κλάσματος : ὁ ἔστιν ὅσον αὐξήσῃ αὐτὸν ἢ τοσοῦτον
 τὸ κλάσμα σμικρύνεται. Ὅθεν τὸ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$, καὶ
 τὸ $\frac{1}{5} > \frac{1}{5 \times 2} > \frac{1}{5 \times 4} > \frac{1}{5 \times 8}$, καὶ τ.ξ. Ὡς αὖ αὐξήσῃ
 τις ἀπείρως τὸν παρονομαστὴν, τὸ κλάσμα θίλει μετα-
 βληθῇ εἰς μηδὲν οὕτως $\frac{1}{\infty} = 0$. Καὶ ἐκ τούτου ἤθελε
 συναΐξει τις ὅτι $\frac{1}{0} = \infty$, ὥς φθάσαντες εἴπομεν (40),
 καὶ ὡς τοῦτο θέλομεν ἰδεῖ ἐχομένως.

56. Ὡς ἐκ πρώτης ὀψεως ἤθελε διακρίνοι τις τὸ
 μείζον τῶν κλασμάτων. Καθότι ἐκ τῶν $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$,
 $\frac{1}{100}$ ἢ τὸ μὲν $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ἢ τὸ δὲ $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ἢ τὸ δὲ
 $\frac{1}{10} > \frac{1}{100}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{2}{3} >$
 $\frac{2}{4} > \frac{2}{5}$: καὶ οὕτως ἐφεξῆς : ὁ ἐστὶν ὄντων τῶν αὐτῶν
 ἀριθμητῶν, μείζον τῶν κλασμάτων θέλει εἶναι ἐκεῖνο,
 ὃ ποῦ ἔχει ἔλασσον τὸν παρονομαστὴν.

Καὶ ἐξ ἐναντίας, ὄντων τῶν αὐτῶν παρονομαστῶν,
 μείζον τῶν κλασμάτων θέλει εἶναι ἐκεῖνο, ὃ ποῦ ἔχει μεί-
 ζονα τὸν ἀριθμητὴν. Οὕτω τὰ $\frac{9}{10} > \frac{8}{10} > \frac{7}{10}$
 $> \frac{6}{10}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐνίοτε ὁμοίως ἀπαντᾷ τις δυσκολίαν τινὰ τοῦ νὰ ἀ-
 ποφασίῃ ἐκ πρώτης ὀψεως, ὁποῖον ἐκ δύο ὁμοίων
 κλασμάτων εἶναι τὸ μείζον (καὶ διὰ τοῦτο τότε εἶναι χάρις

τεχνεύματος τινός, εἰς ὅπερ δίδω ὄνομα ἐπαγωγῇ, ἥτις ἐφευρᾷ εἰς τὸ νὰ μεταμορφώσῃ τις τὰ κλάσματα εἰς ὁμοειδῆ (49), ὃ ἔστι νὰ τὰ φέρῃ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν. Ζητεῖσθαι, φέρε εἰπεῖν, ὅποιον τῶν δύο τούτων κλασμάτων $\frac{8}{9}$, καὶ $\frac{6}{7}$ εἶναι μείζον; Τότε ἐγὼ διὰ νὰ συλλάξω τὴν σημασίαν αὐτῶν ἀμετάβλητον, πολλαπλασιάσω ἑκατέρου τοὺς ὅρους αὐτῶν πρὸ ἑνὸς ἀριθμοῦ (54), καὶ τοῦ μὲν πρώτου διὰ τοῦ 7, τοῦ δὲ δευτέρου διὰ τοῦ 9, καὶ ἔγω $\frac{8 \times 7}{9 \times 7} = \frac{56}{63}$, καὶ $\frac{6 \times 9}{7 \times 9} = \frac{54}{63}$: ἔνθα δηλ. τὸ $\frac{56}{63} > \frac{54}{63}$, ἐξ οὗ συνάγῃ ὅτι τὰ $\frac{8}{9} > \frac{6}{7}$.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ ἐνταῦθα ἔλαβον ὅχι κατὰ τύχην τοὺς πολλαπλασιασὰς ἀλλὰ κατ' ἐκλογὴν.. καὶ αὕτη ἦν νὰ λάβω τοὺς παρονομασὰς αὐτῶν (τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ φέρῃ τις δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν: ἢ ἂν θελῃς διὰ νὰ τὰ ἀποκαταστήσῃ ὁμοειδῆ, εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ τοὺς ὅρους θατέρου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἐτέρου.

57. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς ζητεῖ νὰ μάθῃ, ὅχι μόνον τὴν ὑπεροχὴν ἑνὸς κλάσματος ὡς πρὸς ἄλλο ἀλλὰ καὶ ὅσας εἰσὶν καὶ εἰς τὰ δύσληπτα.. καὶ ἐπειδὴ τοιαῦτα εἶναι ἅπαντα τὰ κλάσματα, ὅσα ἔχουσιν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους μεγάλους.. καὶ ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα, οὔτενος ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται ταυτοχρόνως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, μεταβάλλεται ὁλοτελῶς κατὰ τὴν σημασίαν (55) (τούτου ἕνεκεν καὶ οἱ ἀριθμητικοὶ ἐφεύρον τρόπον τοῦ νὰ μεταμορφοῦσιν, ἔνθα εἶναι ὁυνατόν, τὰ κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα πλην εὐ-

ληπτα, εἴτε μικροτέρων ὅρων, ὅπερ δηλονότι ἔχει χώραν τότε μόνον (ὅτε ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος διαιρούνται δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ: ἢ ἂν θέλῃς) ὅταν τὸ κλάσμα ᾗναι σύμμετρον (53). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ ζητούμενος καιρὸς διαιρέτης εἰς τὴν μεταμόρφωσιν ἑνὸς κλάσματος εἶναι συγκεκραμμένος, καὶ εὐρίσκεται διὰ ψηλασμοῦ (τούτου ἕνεκεν εἶναι ἀναγκαῖοι οἱ ἐξῆς κανόνες.

α'. Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς χαρακτηρὰ ἄρτιον εἶναι καὶ αὐτὸς ἄρτιος: ὁ ἐξὶ διαιρεῖται διὰ τοῦ 2. Ὡς πᾶν κλάσμα ἔχον ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἄρτιους, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2. ὁ ἐξὶ τὰ 2 εἶναι κοινὸν μέτρον αὐτῶν. Οὕτως τὰ $\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$, καὶ τὰ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$: ἐνθα δηλονότι τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀπλοῦσερον τοῦ $\frac{2}{4}$. Προσεθείσθω ὁμοίως εἰς τοὺς ἄρτιους τὰ, ἂν οἱ ἔσχατοι δύο χαρακτηρὲς διαιρῶνται διὰ τοῦ 4 (τότε τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ δις 2, εἴτε διὰ τοῦ 4. Οὕτω τὰ $\frac{88}{164} = \frac{44}{82} = \frac{22}{41}$, ἢ ὁμείως $\frac{88}{164} = \frac{22}{41}$. Καὶ ἔτι ἂν οἱ ἔσχατοι τρεῖς χαρακτηρὲς διαιρῶνται διὰ τοῦ 8 (τότε τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ τετράκις 2, εἴτε διὰ τῶν 8. Οὕτω τὰ $\frac{888}{2432}$ διαιρῶνται διὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ 2, εἴτε διὰ τῶν 8 καὶ διὰ τοῦτο $\frac{888}{2432} = \frac{444}{1216} = \frac{222}{608} = \frac{111}{304}$ ἢ ὁμείως $\frac{888}{2432} = \frac{111}{304}$.

β'. Πᾶς ἀριθμὸς, οὕτως τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτηρῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς, εἴτε διαιρούμενος διὰ τοῦ 9, εἴτε ἀφαιρουμένων ἐξ αὐτοῦ ἀπάντων τῶν ἐν αὐτῷ 9, δίδει τὸ αὐτὸ λείψανον (37), εἰς τρόπον ὅτι ἂν εἰς ἀριθμὸς διαιρῆται ἐξηκριβημένως διὰ τοῦ 9: τουτέστιν ἂν δίδῃ μηδὲν λείψανον, μηδὲν λείψανον θέλει δώσει, καὶ ἂν

ἀραιωθῶσιν ἀπ' αὐτοῦ ἅπαντα τὰ 9. καὶ ἐπειδὴ τὸ 9 εἶναι τετράγωνον τῶν 3 ἑᾶς καὶ τὰ 3 πρέπει νὰ ἔχη τὴν αὐτὴν ιδιότητα μὲ τὰ 9. Ὡς πᾶν κλάσμα ἔχον ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοιοῦτους, εἶναι τοιοῦτον. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{102}{438}$, ἔνθα οἱ μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ $1+2=3$, οἱ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ $4+3+8=15$, διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. ὣς $\frac{102}{438} = \frac{36}{146}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τοῦτο λήγει εἰς χαρακτηριστῆρας ἄρτιους, διὰ τοῦτο διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ 2 (α'). ὅπερ δεῖλει νὰ εἴπῃ, ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ 6. Καθότι πᾶς ἀριθμὸς ἄρτιος διαμετέτος διὰ τοῦ 3, διαιρεῖται διὰ τοῦ 6.

γ'. Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς 5, ἢ εἰς 0, εἶναι διαιρετός διὰ τοῦ 5. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{35}{145}$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 5, καὶ εἶναι $= \frac{7}{29}$. ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{75}{290} = \frac{15}{58}$.

δ'. Πᾶς ἀριθμὸς, οὗ τινος τὸ κεφάλαιον τῶν χαρακτηριστῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9, διαιρεῖται διὰ τοῦ 9. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{27}{918}$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 καὶ εἶναι $= \frac{3}{102}$.

ε'. Πᾶς ἀριθμὸς, ὡς εἶναι γνωστὸν (46), λήγων εἰς μηδὲν, εἶναι διαιρετός διὰ τοῦ 10. Οὕτω $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

ς'. Πᾶς ἀριθμὸς, οὗ τινος τὸ κεφάλαιον τῶν ἐναλλαξ χαρακτηριστῶν εἶναι ἴσον, διαιρεῖται διὰ τοῦ 11. Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{121}{4350}$, διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, καὶ εἶναι $= \frac{11}{395}$. ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ πάλιν τὸ κεφάλαιον τῶν ἐναλλαξ χαρακτηριστῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον, διὰ τοῦτο πάλιν διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, καὶ εἶναι $= \frac{1}{35}$.

58. Πλὴν μεταβαίνοντες ἐκ τῶν μερικῶν εἰς τὰ

γενηκᾶ, ἤθελεν εἰποῖ, ὅτι ταῦτα πάντα ὁμοῦ συμπεριλαμβάνονται, εἰς τὸ νὰ εὕρη τις τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δύο ὁρῶν τοῦ κλάσματος (πλὴν τὸ μέγιστον, ὅπερ καὶ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὀνομάζεται, ὡς ὄντος δυνατοῦ νὰ εὕριτκωνται εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐνὸς κλάσματος, πλέον τοῦ ἐνὸς κοινοὶ διαιρέται. Καὶ ἰδοὺ ἡ τούτου μέθοδος. Νὰ διαιρέσῃ τις τὸν μείζονα ὅρον τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἐλάσσονος.. β'. ἂν μείνῃ λείψανον, δι' αὐτοῦ νὰ διαιρέσῃ τὸν ἐλάσσονα ὅρον.. γ'. ἂν μείνῃ λείψανον, δι' αὐτοῦ νὰ διαιρέσῃ τὸ πρῶτον λείψανον, καὶ οὕτως ἀκολουθῶς, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μηδέν. Καὶ οὕτως ὁ τελευταῖος διαιρέτης θέλει εἶναι ὁ κοινὸς μέγιστος διαιρέτης. Εἰ δὲ καὶ ὁ τελευταῖος διαιρέτης ἤθελεν εἶναι μονὰς (τότε τοῦτο ἤθελεν ἐμφανίσει ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ἀσύμμετρον.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ κλάσματος $\frac{12}{18}$. Ἐγὼ λοιπὸν λέγω, ὅτι ἂν ἔχῃ οὗτος ἀδυνατεῖ νὰ ἦναι μείζων τοῦ 12, ὡς ὄντων τῶν 12 κοινῶν μέτρων ταῦτε παρονομαστοῦ καὶ ἀριθμητοῦ. Ὡς διαιρῶ τὰ 18 διὰ τοῦ 12, καὶ ἔχω λείψανον 6. ὃ ἔστι τὸ ὁθὲν κλάσμα μετεμορφώθη εἰς τὸ $\frac{12}{12 + 6}$. Τώρα διαιρῶ τὸν διαιρέτην 12 διὰ τοῦ λειψάνου 6.. ἐκ τοῦ διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{12}{12 + 6}$ ἔχῃ κοινὸν μέτρον (τοῦτο ἀδυνατεῖ νὰ ὑπερβῇ τὸν 6 ἀριθμὸν. Διαιρῶν λοιπὸν αὐτὸν διὰ τοῦ 6, ἔχω λείψανον μηδέν.. ὥς συνάγω ὅτι τὰ 6 εἶναι κοινὸς διαιρέτης (καὶ εἶναι καὶ ὁ μέγιστος τῶν λοιπῶν: τῶν τε 2 καὶ 3 δηλονότι.

Ζητείσθω δεύτερον ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ $\frac{576}{1164}$ κλάσματος.

Διαιρῶ τὸν μείζονα ὅρον διὰ τοῦ ἐλάσσονος: ἢ ἂν θείλῃς ἀμφοτέρους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 576 καὶ ὁ μὲν ἀριθμη-
 τῆς μοι δίδει λείψανον μηδὲν ὅσθ' πα-
 ρονομασῆς 12.. Ὅθεν διὰ τοῦ 12 διαι-
 ρῶ τὸν πρῶτον διαιρέτην: τὰ 576 καὶ ἔχω μηδὲν λεί-
 ψανον. Ὡς συνάγω ὅτι τὸ 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς
 διαιρέτης τοῦ δοθέντος κλάσματος. Καθότι $\frac{576}{1164} =$
 $\frac{576}{576 \times 2 + 12} = \frac{48 \times 12}{48 \times 2 + 12 + 2} = \frac{48 \times 12}{(48 \times 2 + 1) 12}$
 $= \frac{48}{97}$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἤθελεν εὔροι τις ὅτι $\frac{14349}{382641}$
 $= \frac{3}{8}$ καὶ ὅτι $\frac{3661}{11506} = \frac{7}{22}$.

Εἰδὲ καὶ ἦν $\frac{13}{19}$ τὸ δοθὲν κλάσμα. Τότε εἰς μὲν τὴν
 πρώτην δαίρεσιν ἐγὼ ἤθελον ἔχει 6 λείψανον εἰς δὲ τὴν
 δευτέραν 1 ὅπερ δηλονότι ἤθελε μοι ἐμφανίσοι ἀμετά-
 βλητον τὸ κλάσμα, εἰς ἀπλουσέραν ἔκθεσιν. Οὕτως ὡς
 ὁρᾷ τις.

59. Ταῦτα λοιπὸν τὰ κλάσματα:

ἅπερ δηλονότι ἔχουσιν οὐδένα ἀριθμὸν,
 ἐκτὸς τῆς μονάδος, κοινὸν μέτρον, εἶ-
 ναι τὰ ἀσύμμετρα λεγόμενα (54), ἅ-
 περ καὶ ἀνάγωγα ἤθελον ὀνομασθῇ,
 ἐνθα δηλονότι πᾶς κόπος τοῦ ψηλαφί-
 σματος ἢ ἀποπείρας ἤθελεν εἶναι μάταιος, ὅπερ βέβαια
 χειρὰ ἐπακλουθήσῃ πάντοτε ὅταν οἱ ὅροι ἐνὸς κλά-
 σματος ἦναι πρῶτοι ἀριθμοί. Καὶ ὀνομάζονται πρῶτοι

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12 \overline{) 18} \\ \underline{12} \\ 6 \overline{) 2} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 13 \overline{) 19} \\ \underline{13} \\ 6 \overline{) 2} \\ \underline{13} \\ 1 \end{array}$$

ἀριθμοὶ ἐκείνοι (οἵτινες ἔχουσιν οὐδὲν ἄλλο κοινὸν μέτρον, ἢ τὴν μονάδα *): ὁ ἐξὸν ὅσῃ διαιροῦνται μόνον διὰ τῆς μονάδος καὶ οἱ ἑαυτῶν. Καὶ τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἐξῆς.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, καὶ τ. ξ.

Εἰς τούτους δὲ τοὺς ἀριθμούς οἱ γεωμέτραι ἐκαταγίνησαν ὅχι ὀλίγον, διὰ τὰ εὖρωσι δηλ. πῶς τὰ γινώσκητις ἀμέσως (αὐτὸ δὲ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦναι πρῶτος, ἢ μὴ πλὴν, ὡς φαίνεται, ἀπέτυχον. Ὅθεν εὐχαριστήθησαν μόνον εἰς τὸ τὰ δύνῃσι πίνακας τῶν περιπτῶν ἀριθμῶν. Πλὴν εἰς τὴν τοιαύτην ζήτησιν ἔυρον προβλήματα ὥρατα περὶ αὐτῶν (καὶ τοιοῦτον εἶναι τὸ, πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος εἶναι πηλίκον γινομένου ἐξ ἀπάντων τῶν πρὸ αὐτοῦ ἀριθμῶν θέσει μονάδος. Τὸ 5, φέρε εἰπεῖν, καταμετρεῖ ἐξηκριθόμενος τὸν ἀριθμὸν $25 = 4 \times 3 \times 2 + 1$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 1$ μετρεῖται ἄριστα ὑπὸ τοῦ 7.

Πολλάκις ὁμοῦ καὶ χωρὶς τὰ ἦναι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πρῶτοι ἐκ φύσεως, γίνονται τοιοῦτοι πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἐκ τῆς πρὸς ἀλλήλους ἀναφορᾶς (καὶ τότε ὀνο-

*) Εὐκλείδης βιβλ. γ. ὁρισ. ια'.

μάζονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*). ἐκ τοῦ διότι τὸ κλάσμα εἶναι καὶ τότε οὐδαμῶς ὀλιγώτερον ἀσύμμετρον. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$ καὶ τ. ξ. ἅπερ ὁδηλοῦντι ἀδυνατοῦσι νὰ λάθωσιν ἀπλousέραν μορφήν (καὶ ὁ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης εἶναι ἡ μονὰς μόνον). Ὅθεν ἤθελεν εἶναι πᾶς κόπος μάταιος τοῦ νὰ ζητήτις εἰς τὰ τοιαῦτα κλάσματα κοινὸν διαιρέτην. Ἡ μόνη δὲ μέθοδος τοῦ νὰ λάθωσι τὰ ἀσύμμετρα κλάσματα ἀπλousέραν μορφήν ἤθελεν εἶναι ἡ μέθοδος τῶν συνεχῶν κλασμάτων, περὶ τῶν ἐποίων θελομεν ὁμιλήσει ἐχομένως.

60. Ὡς ὅμως αἱ μονάδες τῶν ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τῆς προαιρέσεως (1) οὕτω καὶ τῶν κλασματικῶν. καὶ ὥςτινες ἐκείνων εἶναι ἡ ἐκ συνθήκης, ἡ ἐκ τέχνης (2) οὕτω καὶ ἐνταῦθα. Ὅθεν καὶ ἔχομεν ταύτας τὰς ἐξῆς.

Πᾶσα περιφέρεια, ἥτις ὁλ. εἶναι οὐδὲν ἄλλοτι, ἢ γραμμὴ ἀρχομένη καὶ περατουμένη εἰς ἓν σημεῖον, διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται μοῖραι, καὶ γράφονται οὕτω 360°. Πᾶσα μοῖρα λοιπὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται λεπτά, καὶ γράφονται οὕτως 60'. Πᾶν λοιπὸν λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅπερ ὀνομάζονται δεύτερα, καὶ γράφονται οὕτως 60''. Ὡσαύτως καὶ εἰς τρίτα γραφόμενα οὕτως 60'''. Ὡς $1^\circ = 60' = 3600'' = 216000'''$. Οἱ μαθηματικοὶ ὅμως τῆς Γαλλίας τὴν σήμερον διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς 100 μέρη, ἢ μοίρας, καὶ ἐκάστην μοῖραν εἰς

*) Δύοθι ἐρισ. β.

100', καὶ ἑκάστων λεπτὸν εἰς 100''. Ὡςτε κατ' αὐτοὺς
 $1^{\circ}=100'=10000''$.

β'. Ὁ χρόνος τῆς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ση-
 μείον ἐπιστροφῆς τῆς γῆς ἐπὶ τῆς ἐκλειπτικῆς, ἣτις δηλοῦ-
 ῖται εἶναι μία περιφέρεια, ὀνομάζεται ἐνιαυτός, ἢ
 ἔτος (ὁ δὲ χρόνος, ὅνπερ θάπαντ ἡ γῆ εἰς τὸ νὰ περι-
 στραφῇ περὶ τὸν ἴδιον ἄξονα, ἢ ἂν θέλῃς ἅπαντα τὰ σὺ-
 ράνια σώματα νὰ περιγράψωσι κύκλους περὶ τὴν γῆν, ὀ-
 νομάζεται ἡμέρα. Ἐκάστη λοιπὸν τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται
 εἰς 24 ἴσα μέρη, καὶ ὀνομάζονται ὥραι. Ἐκάστη δ' ὥρα
 διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, καὶ ὀνομάζονται λεπτά. Ἐ-
 καστων λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 μέρη, καὶ ὀνομάζονται
 δεύτερα. Ὡςτε τὸ μὲν ἔτος ἐκ φύσεως εἶναι $=365^{\text{h}} 5^{\text{w}} 48' 48''$ (ἢ δὲ $1^{\text{w}}=60'=3600''$) καὶ $1^{\text{h}}=24^{\text{w}}=1440'=86400''$. Οἱ μαθηματικοὶ ὅμως τῆς Γαλ-
 λίας διαιροῦσι τὴν ἡμέραν τὴν σήμερον εἰς 10 ἴσα μέρη,
 ὀνομάζοντες αὐτὰ ὥρας, καὶ ἑκάστην ὥραν εἰς 100 λε-
 πτά, καὶ ἑκάστων λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα. Ὡςτε κατ' αὐ-
 τοὺς $1^{\text{h}}=10^{\text{w}}=1000'=100000''$.

γ'. Ἡ διαιρέσις τῆς ἐκτάσεως, ἢ μήκους, εἶναι βέ-
 βαια καὶ αὕτη ἐκ συνθήκης (πλὴν τοσοῦτον ἄτακτος, ὥςτε
 καὶ εἰς ἑκάστων γένος, καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον καὶ εἰς τὸ
 αὐτὸ γένος εἶναι διαφορετικῇ. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἐν γένει
 τὰ ἐπισημονικὰ βιβλία δέχονται τὰ μέτρα τῆς Γαλλίας ἐ-
 τούτου ἔνθεν καὶ ἡμεῖς θέλομεν μεταχειρίζεσθαι αὐτὰ,
 ἀναφέροντες τὰ λοιπὰ εἰς αὐτά. Γραμμὴ λοιπὸν τῆς
 Γαλλίας εἶναι ἐν μέτρον μικρὸν, οὗτινος τὸ μέγεθος θέλει
 τὸ μάθει τις ἐκ τῶν βαρομέτρων, ἢ θερμομέτρων, ἣτις

διαίρεται εἰς 12 ἴσα μέρη, ὥστε λέγονται σημεῖα. Δώδεκα λοιπὸν γραμμαὶ ποιοῦσιν ἓνα δάκτυλον. καὶ 12 δάκτυλοι, ἓνα πῶδα. καὶ 6 πόδες μίαν ὀργυιάν. καὶ 2283 ὀργυιαὶ ἐκτελοῦσι μίαν λέγαν. Ἄν ὅμως καὶ ἀναφέρωμεν τὰ ἐπὶ τῆς γῆνης ἐπιφανείας μέτρα εἰς τὴν οὐράνιον σφαῖραν τότε 25 λέγαι = 1° τοῦ οὐρανοῦ.

δ'. Καὶ ἡ τοῦ βάρους μονὰς εἶναι ὀλιγώτερον ἄτακτος ἐπὶ τῆς γῆνης ἐπιφανείας. Ἡ ἡμετέρα λοιπὸν λίτρα εἶναι = 100 δραχμαῖς. καὶ ἐκάστη δραχμὴ = 60 κόκκοις. καὶ 400 δραχμαὶ = μιὰ ἐκά, καὶ 44 ἐκάδες = ἐνὶ κανταρίῳ. Ἡ δὲ λίτρα τοῦ Παρισίου εἶναι = 16 οὐγγίαις (ἐν ᾗ ἡ τῆς Ἰταλίας = 12). ἐκάστη αὐτῶν = 8 δραχμαῖς. καὶ ἐκάστη δραχμὴ = 72 κόκκοις = 3 δηνάρι. Ὡστε μία λίτρα = 128 δραχ. = 9216 κόκκοις. Καὶ εἰς πούς κυβικὸς νεροῦ βαρύνει λίτρας 70.

ε'. Καὶ ἡ τοῦ νομίσματος μονὰς ἔπριπε βέβαια νῦν ἦναι, καὶ εἶναι τῷ ὄντι, μᾶλλον ἄτακτος ἐπὶ τῆς γῆς, καὶ ἔτι πλέον εἰς ἕκαστον βασιλεῖον ὥς ἐκ τοῦ χρόνου. Τὸ γρόσιον λοιπὸν τῆς Τουρκίας διαίρεται εἰς τεσσαράκοντα ἴσα μέρη, ὥστε ὀνομάζονται παράδες, καὶ ἕκαστος παράς εἰς 3 λεπτά. Τὰ δὲ χρυσὰ αὐτῆς εἶναι μεταβλητὰ εἰς πᾶσαν σιγμὴν, καὶ εἰς πάντα τόπον αὐτῆς. Τὸ δὲ φράγκον, εἴτε λίτρα τῆς Γαλλίας διαίρεται εἰς 20 μέρη, σολεῖα ὀνομαζόμενα ἕκαστον δὲ σολεῖον εἰς 12 δηνάρια.

β1. Ἡμεῖς εἶπομεν (60) ὅτι ἡ μονὰς τῆς ἐκτάσεως, καὶ βάρους, καὶ νομισμάτων εἶναι διάφορος εἰς πᾶν μέρος τῆς γῆς, καὶ ἔτι εἰς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γῆς, ὥς ἐκ τοῦ χρόνου. Ἰδοὺ ὅμως πῶς οἱ πεπαιδευμένοι ἀναφέ-

ρουσιν αὐτὰ εἰς ἓν, εἰ καὶ μὴ οὐλοῦν συμφώνως, ὡς ἤ-
θελεν ἰδοῖν αὐτὰ εἰς πολλοὺς συγγραφεῖς, καὶ τὰ πλέον
ἐπίσημα αὐτῶν εἶναι ταῦτα.

Ποῦς τῶν παλαι Ἑλλήνων = $11^{\delta} 57 \frac{1}{2}$, καὶ κατ'
ἄλλους = $11^{\delta} 37$, καὶ κατὰ τὸν Βαρθολομῆν = $11^{\delta} 47$.

τῶν παλαι Ῥωμαίων . . = $11^{\delta} 17 \frac{1}{2}$, καὶ κατ'
ἄλλους = $10 107 \frac{1}{2}$.

τῶν πόλαι Ἑβραίων . . = $13^{\delta} 37$.

Ἀγγλίας = $11^{\delta} 37$.

Βιέννης = $11^{\delta} 87 \frac{1}{16}$.

Ἑνετίας = $12^{\delta} 87$.

Κωνσταντινουπόλεως . = $24^{\delta} 57$.

Εἰδὲ καὶ ἤθελεν ἀναφέρει τις ταῦτα τὰ μέτρα εἰς
δεκαδικὰ, ὑποτιθεμένου ὁλονότι τοῦ Γαλλικοῦ 1440 με-
ρῶν εἴξει ὡδέπως.

Ποῦς τῆς Γαλλίας . . = 1440

τῶν Ἑλλήνων = 1350

τῶν Ῥωμαίων = 1306

τῶν Ἑβραίων = 1590

Ἀγγλίας = 1351

Βιέννης = 1401

Ἑνετίας = 1541

Κωνσταντινουπόλεως . . = 3140

Ἰσοῦ καὶ ἡ τῶν μιλίων διχορρά κατὰ τὸν Βύτηγγ.

	εἰς ερ- γῆ	ἰξ αὐτῶν πράσαι	καὶ κατὰ τὸν λάν- δν.
Λέγα τῆς Γαλλίας ἀστρονομική=	2283	25 ¹	
ζάδιον τῶν Ἑλλήνων κοινόν, ἡ			
Οὐλυμπιακόν =	94 ¹	604	
ζάδιον τοῦ Πτολεμαίου, ἡ Λι- γυπτιακόν =	114	491	
μίλιον τῶν πάσαις Ῥωμαίων . =	756	76	757,5,
μίλιον κοινόν τῆς Ἰταλίας . =	952	60	958
μίλιον διορισθέν τῆς Ἀγγλίας =	829	69 ¹	830
λέγα θαλάσσιος τῆς Γαλλίας, καὶ Ἀγγλίας =	2855	20	
μίλιον τῆς Δανίας καὶ Σουΐας =	5439	10 ¹	
μίλιον τῆς Γερμανίας καὶ Ἰσπα- νίας =	3807	15	
μίλιον τῆς Τουρκίας . . . =	714	80	
βέρσιον τῆς Ῥωσσίας . . =	546	104 ¹	547
παρατάγῃς τῆς Περσίας . =	2568	22	
γὸς τῶν Ἰνδιῶν =	4564	12 ¹	
κό τῶν Ἰνδιῶν, καὶ τὸ ποῦ τῆς			
Κίνας =	2284	25	
λὶς τῆς Κίνας =	228	250	
μίλιον τῆς Λαπωνίας . . . =	1902	30	

Εἶναι ὅμως ἄξιον σημειώσεως, λέγει ὁ Πικάρδ, ὅτι τὰ ζάδια τῶν Ἑλλήνων τὰ παρὰ τοῖς συγγραφεῦσι δὲν ἔχουσι τὴν αὐτὴν σημασίαν ἀλλ' ὅτι τὰ ὕστερον ἦσαν μείζονα. Καθότι εἰς μὲν τὸν καιρὸν τοῦ Ἀριστοτέλους ζάδια 1111 ἦσαν ἴσα μετὰ μίαν μοῖραν, 700 δὲ παρὰ τοῦ Ἐρατοσθένους, ὑπὸ δὲ τοῦ Πωσιδονίου 666, ὑπὸ δὲ

τῶν ἀκολουθῶν αὐτοῦ 500. Τοῦ Ἐρατοσθένους ὁμῶς τὸ
 ζάδιον ἦν $= \frac{1}{8}$ τοῦ μιλίου τῶν Ῥωμαίων. Καθότι κατ' αὐ-
 τὸν ἀπὸ τῆς Ἀλεξανδρείας μέχρι τῆς Ῥόδου ἦσαν $7^{\circ} \frac{1}{2}$,
 εἴτε $\frac{1}{48}$ τῆς περιφερείας: τουτέστι 3752 ζάδια, ἔνθα κατὰ
 τὸν Πλίνιον τοῦτο τὸ διάστημα ἦν μιλίων 469, ἐξ οὗ
 συνάγεται ὅτι 500 ζάδια ἦσαν μία μοῖρα. Καὶ ἂν ὁ πα-
 ρασάγγης ἦν $= 2568$ ὀργυαῖς Γαλλικαῖς τότε ἐπεισθῇ
 κατὰ τὸν Ἡρώδοτον, ὁ παρσάγγης $= 30$ σταδίοις διὰ
 τοῦτο τὸ στάδιον εἰς καιρὸν τοῦ Ἡρώδοτου ἦν $= 84$ ὀργυαῖς
 Γαλλικαῖς.

Τὸ βῆμα πάλιν τὸ Ῥωμαϊκὸν ἦν $= 5$ ποδ. Ῥωμ $=$
 $4^{\pi} 6^{\delta} 57$ γαλλικοῖς. τὸ δὲ γεωμετρικὸν βῆμα εἶνα $= 5^{\pi}$.

62. Ἰδοὺ καὶ πῶς αἱ διάφοροι μονάδες τοῦ βάρους
 ἤσθλον ἔλθωσι εἰς ἐξίσωσιν. "Εν τάλαντον τῶν πάλαι Ἑλ-
 λήνων ἐδάρυνεν $= 60$ μναῖς $= 6000$ δραχμαῖς. Ὡςτε μία
 μνα ἦν $= 100$ δραχμαῖς, καὶ ἐν τετράδραχμον $= 4$ δραχ-
 μαῖς. Μία δραχμὴ λοιπὸν, κατὰ τὸν Βυρβολουμὴν, εἶναι
 $= 79$ κοκ. γαλλικοῖς καὶ ἐν τετράδραχμον $= 316$ κοκ.
 Γαλλ. καὶ μία μνα $= 13^{\circ} 75^{\delta} 52^{\kappa}$, καὶ ἐν τάλαντον
 $= 51^{\lambda} 6^{\circ} 7^{\delta} 24^{\kappa}$. Καὶ διὰ τοῦτο τάλαντα 100
 $= 5143^{\lambda} 3^{\circ} 7^{\delta} 24^{\kappa}$.

Καὶ κατὰ τὸν Γουβρὴν 100 λίτραι τοῦ Παρισίου
 ἰσοδυναμοῦσι μὲ λίτρας.

				δρ	οκ	
τῆς Τουρκίας	-	-	-	154	45	$= 38 \frac{62}{101}$
Λονδίου	-	-	-	157	$\frac{93}{101}$	

Λιδύρου	- - -	140	$\frac{60}{101}$
Ἑνετίας	{ βάρος παχὺ	102	$\frac{31}{101}$
	{ καὶ εἰλαφρόν	161	$\frac{64}{101}$
Βιέννης	- - -	87	$\frac{61}{101}$
Ῥωσσίας	- - -	118	$\frac{82}{101}$

Καὶ ἐπομένως μία λίτρα τοῦ Παρισίου ἰσοδυναμεῖ με $154^{\delta\rho} 21^{xix}$ Τουρκίας: ὁ ἐστὶ τοῦ Παρισίου δραχμαὶ $128=154$ δραχ. Τουρκ.+ 27^{xix} . Ὡστε τοῦ Παρισίου $9144^{xix}=9267^{xix}$ τῆς Τουρκίας, ἢ ἂν θέλῃς τοῦ Παρισίου $3048^{xix}=3089^{xix}$ τῆς Τουρκίας.

63. Οὐδαμῶς ὅμως ὀλιγώτερον εἶναι ἄτακτα, ὡς εἶναι γνώσων, καὶ αἱ μονάδες τῶν νομισμάτων.

Πλὴν ἐν τάλαντον ἀργυρίου τῶν παλαιῶν Ἑλλήνων= 60 μυαῖς= 6000 δραχμαῖς= 6000×6 ὀβολοῖς. Ὡστε μία μυᾶ ἦν= 100 δραχμαῖς.. καὶ μία δραχμὴ= 6 ὀβολοῖς. Κατὰ τὸν Βαρθολομῆν λοιπὸν $1^{\circ b}=3$ σολδ. Γαλλίας.. καὶ $1^{xx}=18$ σολ.. καὶ 4 δραχμαὶ, εἴτε ἐν τετραδράχμῳ= 3 φράγ.+ 12 σολδ.

Ὅθεν μία μυᾶ= 90 φραγ., καὶ ἐν τάλαντον= 5400 φραγ., ὑποτιθεμένου ὀφειλονότι νὰ ἔχωσι μέγμα τὰ Ἑλληνικὰ νομίσματα $\frac{1}{24}$. Καὶ ἐπειδὴ τὴν σήμερον: εἰς τοὺς 1813 λέγω, τὸ γρόσιον τῆς Τουρκίας σχεδὸν ἐξισοῦται μετ' ἐν φράγκον τῆς Γαλλίας (τούτου εὐεκεν ἐν τάλαντον τῶν παλαιῶν Ἑλλήνων ἐξισοῦται ὡς ἔγγιστα μετ' ἑξιαδὰς γροσίων τῆς Τουρκίας) πλὴν μόνον σήμερον.

64. Είναι ὅμως βέβαια ἄξιον σημειώσεως ὅτι αἱ μονάδες τῶν κλασμάτων δὲν σημαίνουνσι πάντοτε ποσότητας ἐλάσσονας τῶν ὀλοσχερῶν ἀλλὰ καὶ πολλάκις τὸ ἐναντίον. Καὶ ἡ λέξις κλάσμα δὲν πρέπει νὰ ὑποσύρῃ τινα, ὥστε νὰ σοχάζεται τὰς κλασματικὰς μονάδας ἐλάσσονας τῶν μονάδων τῶν ὀλοσχερῶν ἐν γένει, ἀλλέως ἢ θελεν εἶναι ἡπατημένος. Καθότι ὡς εἶναι γνωστὸν μίλλια καὶ λέγαι εἶναι βέβαια μονάδες ὀλοσχερεῖς, καὶ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἡλίου ἀπ' ἡμῶν = 34,000,000 λέγαις. Ἐγὼ λοιπὸν δύναμαι νὰ λάβω τὰ $\frac{3}{4}$ ταύτης τῆς ἀποστάσεως καὶ οὕτως ἐκάσῃ μονὰς τούτου τοῦ κλάσματος θέλει εἶναι = 8500000 λέγαις. Ὡσαύτως ἐγὼ δύναμαι νὰ λάβω τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ Ἑλληνικοῦ ταλάντου, οὕτως ἐκατέρᾳ μονὰς εἶναι ἴση μὲ 1800 φράγκα τῆς Γαλλίας, ἢ ἂν θέλῃς μὲ 1800 μονάδας ὀλοσχερεῖς. Πλὴν ἂς ἐμβώμεν εἰς τὰς ἐργασίας τῶν κλασμάτων.

Κ Ε Φ. Ζ'.

Περὶ τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῶν κλασμάτων.

65. **Ω**ς οἱ ὀλοσχερεῖς ἀριθμοὶ προστίθενται, ἀφαιροῦνται, πολλαπλασιάζονται, καὶ διαιροῦνται οὕτω καὶ τὰ κλάσματα ὡς ὄντων καὶ τῶν κλασμάτων ἀριθμῶν ἐλασ-

σύνων μονάδος (50), ἢ εἰδοπεποιημένων (49). Πλὴν εἶναι ἀνάγκη πρὶν νὰ ἔμβωμεν εἰς τινὰ τῶν ἐργασιῶν αὐτῶν, νὰ μάθωμεν πῶς γίνονται τὰ κλάσματα ὁμοειδῆ: ὃ εἰς πῶς φέρονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν. Καθότι οὔτε προσθίνονται, οὔτε ἀφαιρούνται κλάσματα ἑτεροειδῆ, ὡς δηλονότι οὔτε ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ (3).

Διὰ νὰ κάμῃ λοιπόν τις ὁμοειδῆ δύο κλάσματα εἶναι ἀνάγκη εἰς αὐτὸν νὰ πολλαπλασιάσῃ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δευτέρου, εἴτα διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου, τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος. Οὕτω διὰ νὰ κάμῃ ὁμοειδῆ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, εἴτε διὰ νὰ τὰ φέρω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν, πολλαπλασιάξω ἄνω καὶ κάτω τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ 5, καὶ ἔχω $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ (53).. ὡσαύτως πολλαπλασιάζω ἄνω καὶ κάτω καὶ τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ 3, ἔχω $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$. Καὶ οὕτως ἐγὼ μετέβαλον τὰ δοθέντα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ εἰς τὰ $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, ἅπερ εἶναι καὶ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα.

"Ομοιοῦντι ἤθελεν ἐκτελέσει τις, ἂν τὰ δοθέντα κλάσματα ἦσαν πλέον τῶν δύο: τουτέστι διὰ νὰ μεταβάλλῃ τις πολλὰ δοθέντα κλάσματα εἰς ὁμοειδῆ, εἶναι ἀνάγκη πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀριθμητὴν ἐκάστου κλάσματος διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν κλασμάτων. ἐξ οὗ ἔξει τοὺς ἀριθμηταὶς ἀπάντων τῶν κλασμάτων, καὶ δεύτερον νὰ πολλαπλασιάσῃ ἅπαντας ὁμοῦ τοὺς παρονομαστὰς, καὶ οὕτως ἔξει τὸ γινόμενον αὐτῶν κοινὸν παρονομασὴν. Ἐξωσαν, φέρε εἰπεῖν, δοθέντα κλάσματα τὰ

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}$. Τώρα πολλαπλασιάζω τὸν ἀριθμητὴν ἐκάστου διὰ τῶν παρονομασῶν τῶν λοιπῶν (καὶ οὕτως ἔχω τὸ μὲν $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{70}{105}$ τὸ δὲ $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7} = \frac{84}{105}$ καὶ τὸ $\frac{1}{7} = \frac{3 \times 5}{7 \times 3 \times 5} = \frac{15}{105}$. Ὡστε τὰ κλάσματα $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}$, καὶ $\frac{15}{105}$ εἶναι καὶ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα. Καὶ ἂν ᾗσαν $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}$ ἤθελον τὰ μεταβάλοι εἰς τὰ $\frac{56}{84}, \frac{60}{84}, \frac{63}{84}$.

Ἐνίοτε ὁμως λυτρῶνται τις ἐκ τοῦ κόπου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἐκτελεῖ ὁμοειδῆ τὰ δοθέντα κλάσματα διὰ μόνης τῆς διαγραφῆς. Καθότι ἔςωσαν δοθέντα κλάσματα τὰ $\frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}$. Τότε ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ βλέπω ὅτι τὸ μὲν $\frac{3}{6} = \frac{3 \times 1}{6 \times 1}$, τὸ δὲ $\frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{4 \times 1}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{3}{6} = 1$, καὶ $\frac{2}{4} = 1$ (διὰ τοῦτο διαγράφων ἄνω καὶ κάτω τὰ 3 καὶ τὰ 2, ἔξω ταῦτα τὰ τρία κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, ἅπερ δηλονότι εἶναι καὶ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα.

Ὁμοιόντι ἤθελεν ἐκτελέσει τις, ἂν τὰ δοθέντα κλάσματα ᾗσαν ταῦτα $\frac{50}{100}, \frac{6}{8}$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ μὲν $\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, τὸ δὲ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{3}{2 \times 2}$ (τούτου ἕνεκεν ἂν πολλαπλασιάσῃ μόνον τὸ πρῶτον κλάσμα ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ 2, ἔξει ὁμοειδῆ καὶ ἰσοδύναμα μὲ τὰ δοθέντα κλάσματα τὰ $\frac{2}{4}, \frac{3}{4}$.

Περὶ προσθέσεως τῶν κλασμάτων.

66. ^α **Α**ν λοιπὸν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων ἦναι ὁμοειδῆ τὰ δοθέντα κλάσματα τότε θέλει κάμει τις τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν μόνον εἰς τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν χωρὶς νὰ ἐπιβέσῃ ὁλοτελῶς χεῖρα εἰς τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν· εἰς δὲ τὸ κεφάλαιον αὐτῶν θέλει ὑποβέσει τὸν κοινὸν αὐτῶν παρονομαστήν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ παρονομαστής ἐνὸς κλάσματος σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμητοῦ (50) (τούτου ἕνεκεν ζητῶν τις τὸ κεφάλαιόν τινων κλασμάτων, πρέπει νὰ προσθέτῃ μόνον τὰς μονάδας τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τελείως τῶν παρονομαστῶν. Ζητήσθω τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων $\frac{20}{40}, \frac{30}{40}, \frac{40}{40}$. Ἐγὼ λοιπὸν ἐὼν ἀνεπαφείς τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν, προσέβημι τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν μόνους: τουτὶς $20+30+40=90$, καὶ ἔχω διὰ κεφάλαιον αὐτῶν $\frac{90}{40} = 2 + \frac{10}{40} = 2 + \frac{1}{4}$: διὰ τῆς ἐπαγωγῆς δηλονότι (56). Ὡς αὖν ὁ παρονομαστής αὐτῶν ἐπαρίσα μέρη γροσίου, εἴτε παράδες, τότε τὸ κεφάλαιον ἤθελεν ἐμφανίζοι 2 γρόσ. καὶ 10 παράδες. Καὶ οὕτως εἰς τὴν πρόσθεσιν τούτων τῶν κλασμάτων ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡσὰν νὰ ἐπρόσθετον μονάδας ὁλοσχερεῖς: παράδας δηλ. λέγων $20^{\pi} + 30^{\pi} + 40^{\pi} = 27\ 10^{\pi}$: ὃ ἐξὶν ὁ παρονομαστής 40 ἄλλο δὲν ἤθελε λέγοι, εἰμὴ ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι παράδες.

Εἰδὲ καὶ τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἑτεροειδῆ· τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀλλάξῃ τις πρῶτον τὴν ἑτερότητα

αὐτῶν, ἐκτελῶν αὐτὰ ὁμοειδῆ εἶτα τότε νὰ κάμῃ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν. Οὕτως ἔβωσαν δοθέντα κλάσματα τὰ $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}$, ὡς περ ὀηλονότι ζητεῖσθω τὸ κεφάλαιον. Τότε ἄγων αὐτὰ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομασὴν (63), εἶτε εἰς τὰ $\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{15}{105}$ ἔξω διὰ κεφάλαιον αὐτῶν τὸ $\frac{160}{105} = 1 + \frac{64}{105}$. Ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{6} = \frac{15+20+18+12+14+25}{30} = 3 + \frac{23}{30}$.

67. Ἄν ὁμοῦς καὶ ἐζητεῖτο τὸ κεφάλαιον κλάσματος καὶ ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ ἢ μέθοδος δὲν ἤθελεν εἶναι διάφορος τῆς ἀνωτέρω. Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς ἀριθμὸς ὁλοσχερῆς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς κλάσμα ἔχον μονάδα παρονομασὴν (51) τοῦτου ἕνεκεν καὶ ὁ δοθεὶς ὁλοσχερῆς ἀριθμὸς ἤθελε μεταβληθῇ εἰς κλάσμα (καὶ οὕτω τὸ πρᾶγμα νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ ἀνωτέρω συμβεβηκὸς (64). Καθότι ζητεῖσθω τὸ κεφάλαιον τῶν 4 καὶ $\frac{3}{5}$ τότε ἦν ὡστὶν νὰ ἐζητεῖτο τῶν $\frac{4}{1}$, καὶ $\frac{3}{5}$.

68. Εἰδὲ καὶ ἐζητεῖτο τὸ κεφάλαιον ἀριθμῶν κλασματικῶν: ἀριθμῶν λέγω συγκειμένων ἐκ μερῶν ὁλοσχερῶν καὶ κλασματικῶν (τότε ἢ πρόσθεσις αὐτῶν ἤθελεν εἶναι σύμθετος ἔκτε τῶν κλασματικῶν μονάδων καὶ ἐκ τῶν ὁλοσχερῶν. Οὕτως ζητεῖτω τὸ κεφάλαιον τῶν $264 \frac{2}{3}$ $353 \frac{4}{5}$, $678 \frac{1}{7}$.

Ἐπεὶ δὲ τὰ κλασματικὰ αὐτῶν μέρη ὁμοειδῆ: ὁ ἔστι μεταμορφῶ αὐτοὺς εἰς τοὺς $264 \frac{70}{105}$, $353 \frac{84}{105}$, $678 \frac{15}{105}$. τάττω αὐτοὺς ὡς ὁράται κατὰ $264 \frac{70}{105}$ $353 \frac{84}{105}$ $678 \frac{15}{105}$ καὶ ἔχω διὰ κεφάλαιον αὐτῶν

$$\begin{aligned} \tau\omega\acute{\nu} \mu\acute{\epsilon}\nu \kappa\lambda\alpha\sigma\mu\alpha\tau\iota\kappa\omega\acute{\nu} &= 1 \frac{64}{105}, \tau\omega\acute{\nu} \delta\epsilon \frac{678 \frac{13}{105}}{1266 + \frac{64}{105}} \\ \omicron\lambda\sigma\chi\epsilon\rho\omega\acute{\nu} &= 1295, \omega\delta\epsilon\nu \acute{\alpha}\mu\phi\omicron\tau\epsilon\rho\omega\acute{\nu} \\ &= 1296 + \frac{64}{105}. \end{aligned}$$

69. Ἄν ὁμως καὶ τὰ κλασματικά μέρη τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἦναι μονάδες ἐκ συνθήκης (58): ὁ ἐς μεθερμηνευόμενον ἂν ἦναι ἐκ φύσεως αὐτῶν ὁμοιοδῇ· τότε εἶναι οὐδεμία χρεὶα μεταμορφώσεως εἰς αὐτὰ· ἀλλ' εἶναι ἕκαστὴ μόνῃ ἢ εἰς σήλας καταξέρωσις αὐτῶν, γινομένης ὁλ. τῆς προσθέσεως πρώτον ἐκ τῶν μικρῶν μονάδων, εἶτα τῶν μειζόνων.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ κεφάλαιον τῶν $3^{\eta} 17^{\omega} 42' 16'', 9^{\eta} 13^{\omega} 25' 33'', 11^{\eta} 23^{\omega} 17' 44''$.

Τάττω ἐγὼ αὐτοὺς κατὰ σή- $3^{\eta} 17^{\omega} 42' 16''$
λας.. εἶτα ἄρχομαι τῆς προσθέ- $9 \quad 13 \quad 25' 33''$
σεως ἐκ τῶν δευτέρων λέγων $44'' + 11 \quad 23 \quad 17' 44''$
 $33'' + 16'' = 93'' = 1' 33''$.. $25^{\eta} \quad 6^{\omega} \quad 25' 33''$
καὶ γράφων εἰς τὸ κεφάλαιον τὰ 33 δεύτερα, κρατῶ
ἀνὰ χεῖρας τὸ 1'. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν σήλην τῶν
πρώτων, λέγω $1' + 17' + 25' + 42' = 85' = 1^{\omega} 25'$..
καὶ γράφων εἰς τὸ κεφάλαιον τὰ 25 λεπτά, κρατῶ
ἀνὰ χεῖρας τὴν 1^{ω} . Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν σήλην τῶν
ώρων, λέγω $1^{\omega} + 17^{\omega} + 13^{\omega} 23^{\omega} = 54^{\omega} = 2^{\eta} 6^{\omega}$..
καὶ γράφων εἰς τὸ κεφάλαιον τὰς 6 ὥρας, κρατῶ ἀνὰ
χεῖρας τὰς 2 ἡμέρας. Καὶ ἐρχόμενος εἰς τὴν σήλην τῶν
ἡμερῶν, λέγω $2^{\eta} + 11^{\eta} + 9^{\eta} + 3^{\eta} = 25^{\eta}$. Ὡς ἐγρά-
φω εἰς τὸ κεφάλαιον 25^{η} . Καὶ οὕτως ἔχω διὰ ζητού-
μενον κεφάλαιον $= 25^{\eta} 6^{\omega} 25' 33''$.

Ὅμοιόν τι ἤθελον ἐκτελέσειν ἂν οἱ θούλντες ἀριθμοὶ ἦσαν μοῖραι μετὰ λεπτῶν, ἢ γρόσια μετὰ παραδῶν καὶ λεπτῶν, ὡς ὁράται.

36° 25' 47"	1207ρ. 32π. 2λ.
49 33 28	28 19 1
55 31 49	18 14 2
141° 31' 4"	1677ρ. 26π. 2λ.

Περὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

70. Ἐπειδὴ οὐ καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐναντία τῆς προσθέσεως (25).. καὶ ἐπειδὴ ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων γίνεται οὐδέποτε εἰς κλάσματα ἑτεροειδῆ (64) ἐπόμενον εἶναι νὰ γίνηται οὐδέποτε οὐτὲ ἀφαίρεσις εἰς κλάσματα ἑτεροειδῆ. Ὡς ἂν τὸ μειωτέον καὶ τὸ ἀφαιρέτιον τῶν κλασμάτων εἶναι ἑτεροειδῆ εἶναι ἀνάγκη πᾶσα πρῶτον νὰ τὰ μεταμορφώσῃ τις εἰς ὁμοειδῆ καὶ τότε νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀφαίρεσιν. Πλὴν ὡς ἡ πρόσθεσις οὕτω καὶ ἡ ἀφαίρεσις θέλει γένη εἰς μόνους τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων, χωρὶς νὰ τεθῇ χεῖρα εἰς τοὺς παρονομαστὰς καὶ εἶτα εἰς τὴν διαφορὰν αὐτῶν θέλει ὑποτεθῇ ὁ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστής.

Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων $\frac{30}{40}$, $\frac{20}{40}$. Εἶναι οἷκεθεν σαφές ὅτι αὕτη εἶναι $= \frac{10}{40}$: ὃ ἐστὶ $\frac{30}{40} - \frac{20}{40} = \frac{10}{40}$. Καθότι ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ἴση μὲ τὸν μειωτέον, (26) τοῦτου ἔνεκεν ἐκτελῶν τὴν ἀπόπειραν, εὕρισκω τὸν μειωτέον $\frac{30}{40}$.

ὅ ἐστι $\frac{10}{40} + \frac{20}{40} = \frac{30}{40}$. Ὡς αὖ ἡ πρώτη μονὰς ἦν γρόσιον αἱ δευτέραι ἤβελον εἶναι παράδες καὶ αὐτῷ $30^{\pi} - 20 = 10^{\pi}$ καὶ διὰ τοῦτο καὶ $10^{\pi} + 20^{\pi} = 30^{\pi}$.

Εἰ δὲ καὶ τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι ἑτεροειδῆ, ὡς τὰ $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, φέρε εἰπεῖν, τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταμορφώσῃ τις αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμοειδῆ, ὡς εἰς τὰ $\frac{12}{15}, \frac{10}{15}$ δηλ., εἶτα νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀφαίρεσιν. Καὶ οὕτως ἔξει $\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$. ἐκ τοῦ οἷοι $\frac{2}{15} + \frac{10}{15} = \frac{12}{15}$. Ὡσαύτως καὶ αὖ ἦσαν δευδομένα ταῦτα $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{6} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ ἢ βελε τὰ μεταβάλοι τις εἰς τὰ ἐξῆς: $\frac{60+80+8+156}{1100-45-50-50} = \frac{327}{120} = 2 + \frac{29}{40}$.

71. Ἄν ὅμως καὶ θάτερον τῶν κλασμάτων ἦν ἀριθμὸς ὁλοσχερῆς τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ δώσῃ τις εἰς αὐτὸν πρῶτον μορφήν κλάσματος, εἶτα νὰ κάμῃ ἀφαίρεσιν. Ζητεῖσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ ἀφαίρεσις τῶν $\frac{4}{5}$ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 3. Πολλαπλασιάζω αὐτὸν διὰ τῆς μονάδος $\frac{5}{5} = 1$, καὶ ἔχω $\frac{15}{5}$: ὅπερ δηλ. ἀνήχθη εἰς τὸ ἀνωτίρω. (68).

Εἰ δὲ καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἦν κλασματίου ἀπὸ κλασματίου τότε εἰ μὲν καὶ τὰ κλασματώδη αὐτῶν μέρη εἶναι ὁμοειδῆ, ὡς τῶν $264 \frac{70}{105}, 678 \frac{15}{105}$ ἢ εἰλεῖ εἶναι οὐδεμία ἀνάγκη μεταμορφώσεως εἰς αὐτὰ, ἀλλ' εὐθὺς θέλω κάμει ἀρχὴν τῆς ἀφαιρέσεως. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ τὰ $\frac{70}{105}$ δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν $\frac{15}{105}$ ἢ τούτου ἕνεκεν θανείζομαι ἀπὸ τῶν 8 μίαν μονάδα, ἣτις εἶναι =

$$\begin{array}{r} 678 \frac{15}{105} \\ 264 \frac{70}{105} \\ \hline 413 \frac{50}{105} \end{array}$$

$\frac{105}{105}$ (καὶ οὕτως ἔχω διὰ μειωτέον $677 \frac{120}{150}$, ἐξ οὗ ἐκ-
τελῶν τὴν ἀφαίρεσιν, ἔχω διαφορὰν $413 + \frac{5}{105} = 413$
 $+ \frac{1}{21}$.

Ἄν ὅμως καὶ τὰ κλασματώδη μέρη τῶν κλάσμα-
τίων ἦναι ἑτεροειδῆ τότε εἶναι ἀνάγκη πρῶτον μεταμορ-
φώσεως εἰς αὐτὰ, εἴτα νὰ ἐκτελέσῃ τις τὴν ἀφαίρεσιν.
Ἄν, φέρε εἰπεῖν, καὶ ἐξηγεῖτο ἡ ἀφαίρεσις τῶν $264 \frac{2}{3}$
ἀπὸ τῶν $678 \frac{1}{7}$ (τότε μεταμορφῶν αὐτοὺς εἰς τοὺς
 $264 \frac{14}{21}$, $678 \frac{3}{21}$, ἐκτελῶ τὴν ἀφαίρεσιν.

72. Ὅμοιον τι ἤθελεν ἀκολουθήσει, καὶ ἂν αἱ μο-
νάδες τῶν κλασματωδῶν μερῶν τῶν κλασματίων εἶναι
ὠρισμέναι.. πλὴν πρέπει νὰ ἀρχίσῃ τις τῆς ἀφαιρέσεως ἐκ
τῶν μονάδων τῶν κατωτέρω μονάδων.. καὶ ἂν μὲν ἡ ἀ-
φαίρεσις ἦναι δυνατὴ, καλῶς (ἢ ἀλλέως νὰ θανεισθῇ μίαν
μονάδα ἐκ τοῦ ἐγγύς χαρακτηρος, καὶ οὕτω νὰ ἐκτελέσῃ
τὴν ἀφαίρεσιν.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ ἀφαίρεσις τοῦ κλασμα-
τίου $3^{\text{h}} 17^{\text{w}} 42' 16''$ ἀπὸ τοῦ $25^{\text{h}} 6^{\text{w}} 25' 33''$.
Τάττω αὐτοὺς ὡς εἰς τὴν πρόσθε- $25^{\text{h}} 6^{\text{w}} 25' 33''$
σιν, καὶ ἀρχομαι τῆς ἀφαιρέσεως $\begin{array}{r} 3 \ 17 \ 42 \ 16 \\ \underline{21^{\text{h}} \ 12^{\text{w}} \ 30' \ 17''} \end{array}$
ἀπὸ τῶν δευτέρων.. καὶ ἐπειδὴ τὰ $21^{\text{h}} \ 12^{\text{w}} \ 30' \ 17''$
 $42'$ θέν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν $25'$ (θαναίξομαι μίαν
μονάδα ἀπὸ τῶν 6^{w} , εἴτε $60'$ (καὶ ἔχω $65'$.. ὁμοιόντε
ἐκτελῶ καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ὥρων. Καὶ οὕτως ἔ-
χω διαφορὰν $= 21^{\text{h}} 12^{\text{w}} 33' 17''$, ὅπερ ἀποδεικνύ-
εται διὰ τῆς προσθέσεως τῆς διαφορᾶς μετὰ τοῦ ἀφαι-
ρετέου.

Ὅμοιόν τι ἤθελεν ἐκτελέσται τις καὶ ἂν αἱ κλάσμα-
ταί ἦσαν μοῖραι μετὰ λεπτῶν, ἢ λέγαι μετὰ ὠγειῶν,
ἢ γρόσια μετὰ παρὰδων κ. τ. ξ. εὐθάνει μόνον νὰ γι-
νώσκῃ τις πόσας μονάδας ταπεινὰς κάμνει μία μονὰς ὑ-
ψηλὴ (60).

Περὶ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων.

73. Πολλαπλασιασμός κλάσματος ἐπὶ κλάσμα εἶναι
νὰ λάβῃ τις τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πολλαπλασιαστέου τοσάκις,
ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πολλαπλασια-
σοῦ καὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τοσάκις, ὅσας μονάδας
περιέχει ὁ παρονομαστής τούτου: ὁ ἐστὶ νὰ κάμῃ τὸ γινόμε-
νον τῶν ἀριθμητῶν, ἀριθμητὴν, καὶ τὸ γινόμενον τῶν
παρονομαστῶν, παρονομαστὴν αὐτοῦ.

Ἄν, φέρε εἰπεῖν, ζητηθῇ ὁ πολλαπλασιασμός τῶν
 $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τότε πολλαπλασιάζων τὰ μὲν 4 ἐπὶ τὰ 2,
ἔξω 8 δι' ἀριθμητὴν τοῦ γινομένου καὶ 5 ἐπὶ τὰ 3,
ἔξω 15 διὰ παρονομαστὴν αὐτοῦ, εἴτε $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$. Καθότι
ἂν ἦν ὁ πολλαπλασιαστής ἀριθμὸς ὁλοσχερῆς ὁ πολλα-
πλασιασμός ἤθελεν εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν τῶν ὁλοσχερῶν.
Οὕτω $\frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$, καὶ $\frac{4}{5} \times 5 = 4$: ὁ ἐστὶ πρέπει νὰ
λάβῃ τις τὸ κλάσμα τοσάκις ὅσας μονάδας περιέχει ὁ
ὁλοσχερῆς πολλαπλασιαστής, εἴτε $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$
 $+ \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{4}{5} = \frac{4}{5:5}$

Ὡςτε πολλαπλασιασμός κλάσματος ἐπ' ὁλοσχεροῦς εἶναι
ὅτε πολλαπλασιασμός τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ

παρονομασῶ διὰ τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ὡς, ὡς ὁράται, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων ἐκτελοῦνται ταυτοχρόνως δύο ἐργασίαι: πολλαπλασιασμὸς δηλ. καὶ διαιρέσεις: πολλαπλασιασμὸς λέγω τῶν ἀριθμητῶν, καὶ διαιρέσεις τοῦ ἐξ αὐτῶν γινομένου διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομασῶν (καὶ δικαίως).

Καθότι τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ δὲν θέλει νὰ εἰπῇ νὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{5}$ δις, ἀλλέως τοῦτο ἤθελεν εἶναι πολλαπλασιασμὸς τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ μόνου τοῦ 2, εἴτε $= \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$ (ἀλλὰ νὰ τὰ λάβῃ δις τριτῶς, ὅπερ ἐηelonότι ἐκτελεῖται καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τῶν παρονομασῶν. Ὡς ὅμως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὁλοσχερῶν (οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἔχειχώραν ὁ γενικὸς νόμος (ἐναντίως ὅμως) (29): τουτέστι τὸ γινόμενον περιέχεται εἰς θάτερον τῶν παραγόντων (ὡς ὁ ἕτερος αὐτῶν εἰς τὴν μονάδα. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ (τούτου ἕνεκεν τὸ $\frac{1}{8}$ περιέχεται εἰς τὸ $\frac{1}{4}$, ὡς τὸ $\frac{1}{4}$ εἰς τὸ 1. Ὁμοίοντι ἤθελεν ἀκολουθήσει, καὶ ἂν ὁ εἰς τῶν δοθέντων κλασμάτων ἦν ὁλοσχερής. Ἐς, φέρε εἰπεῖν, 4 καὶ $\frac{1}{2}$ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ (τότε $4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$, ἐνθα δηλ. τὰ 2 περιέχονται εἰς τὰ 4, ὡς τὸ $\frac{1}{2}$ εἰς τὸ 1.

74. Ἀλλόκοτον βέβαια πρᾶγμα θεωρεῖται ἐνταῦθα: εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν λέγω τῶν κλασμάτων. Καθότι ἡμεῖς ἐμάθομεν (29) ὅτι πολλαπλασιασμὸς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ γένεσις ἐνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λαμβάνεσθαι ἓνα δοθέντα ἀριθμὸν (καὶ ἐνὶ βλεπομένῳ ὅτι α-

κολουθεῖ ὅλον τὸ ἐναντίον: ὃ ἐστὶν ὁ γενόμενος ἀριθμὸς, ἕνεκα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δοθέντος, εἶναι ἐλάσσον ἐκατέρου τῶν παραγόντων: τὸ $\frac{1}{8}$ λέγω, ὅπερ γεννᾶται ἐκ τοῦ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{4}$, εἶναι ἐλάσσον καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$. Ἀλλ' ὡς φαίνεται ἐν τοιούτοις ἔπρεπεν εἶναι ἀνάγκης καὶ ἐπακολουθήσῃ ὡς ἐκ τῆς φύσεως τῶν κλασμάτων. Καθότι ἐνταῦθα πολλαπλασιάζονται ἀριθμοὶ ὅχι ὁ λοτχερεῖς ἀλλ' ἐλάσσονες μονάδος. Ὅθεν πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι πραγματικῶς, εἰμὴ διαίρεσις ποσότητος.

Καθότι τὸ καὶ πολλαπλασιᾶται εἷς ἀριθμὸν ἐπ' ἄλλον, τὰ 10 φέρε εἰπεῖν ἐπὶ τὰ 2, ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ, καὶ τὸν λάβῃ δις ὅθεν $10 \times 2 = 10 + 10$. Καὶ τὸ καὶ πολλαπλασιᾶται τὰ 10 ἐπὶ τὸ 1, ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ καὶ τὰ λάβῃ ἅπαξ ὅθεν $10 \times 1 = 10$. Ὡς τὸ καὶ πολλαπλασιᾶται τὰ 10 ὅχι ἐπὶ τὴν μονάδα ἀλλ' ἐπ' ἐλάσσονα αὐτῆς, τοῦτο μετὰ ἄλλους λόγους θέλει καὶ εἰπῇ καὶ μὴν τὸν λάβῃ ὅλοτχερῶς ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ: ὃ ἐστὶ μεθερμηνευόμενον καὶ τὸν διαίρεση. Ὡς ἔπεται ἐντεῦθεν ὅσον μικρὸς ἤθελεν εἶναι ὁ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὸν παρονομασὴν τοῦ πολλαπλασιαστέου τοσούτον καὶ τὸ γινόμενον.. καὶ τοῦτου ἕνεκεν τὸ $10 \times \frac{1}{2} > 10 \times \frac{1}{10} > 10 \times \frac{1}{100} > 10 \times \frac{1}{1000}$ κ. τ. ξ. $= 5 > 1 > \frac{1}{10} > \frac{1}{100}$ κ. τ. ξ.

75. Ἄν ὅμως τὰ δοθέντα κλάσματα ἦναι ἀριθμοὶ κλασματικοὶ τότε πρέπει καὶ ἐκτελεῖται αὐτοὺς πρῶτον ἐντελῶς κλάσματα εἶτα καὶ ποιῇ τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, ὁ πολλαπλασιασμός τῶν $3\frac{2}{9}$ ἐπὶ τὰ $7\frac{1}{3}$. Τώρα ἐπειδὴ $3\frac{2}{9} = \frac{29}{9}$, καὶ $7\frac{1}{3} = \frac{22}{3}$ ἢ τούτου ἕνεκεν καὶ ἐγὼ ἔχω $\frac{29}{9} \times \frac{22}{3} = \frac{638}{27} = 23\frac{17}{27}$. Ὡσαύτως καὶ τὰ $10\frac{3}{100} \times 15\frac{1}{10} = \frac{1003}{100} \times \frac{151}{10} = \frac{151453}{1000} = 151 + \frac{453}{1000}$.

Πλὴν πολλάκις ἤθελον εἶναι συντομωτέρα ἢ οὗτος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασματικῶν ἢ μὴ μεταμόρφωσις αὐτῶν εἰς κλάσματα ἀλλ' ὁ ἀνὰ μέρος αὐτῶν πολλαπλασιασμός. Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, $3406\frac{2}{3}$ ὁκάδες σηρικῶν νήματος πρὸς $56\frac{3}{4}$ γρ. πόσα γρόσια κάμνουσιν;

Ἐνταῦθα λοιπὸν ἐγὼ μεταμορφῶ τελείως τοὺς δοθέντας κλασματίας εἰς ἐντελῆ κλάσματα ἢ $3406\frac{2}{3}$ ἀλλ' ἀμέσως πολλαπλασιάζω τὸν πολλαπλασιαστέον διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἢ $56\frac{3}{4}$

3406 $\frac{2}{3}$	
56 $\frac{3}{4}$	
20436	
17030	
37 $\frac{1}{5}$	
2554 $\frac{1}{2}$	
193328 $\frac{1}{5}$	

πλὴν ἀνὰ μέρος: ὁ ἐστὶν α'. τὰ ὁλοσχερῇ αὐτῶν μέρη, εἴτε τὰ 3406×56 . β'. τὰ κλασματώδη αὐτῶν μέρη ἐπὶ τὰ ὁλοσχερῇ, εἴτε τὰ $3406 \times \frac{3}{4}$, καὶ γ'. τὰ κλασματώδη αὐτῶν πρὸς ἀλλήλα μέρη, εἴτε τὰ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$.

Ἰαὶ οὕτως ἐπισυνάπτων αὐτῶν τὰ μερικὰ γινόμενα, ἔξω διὰ γενικὸν γινόμενον $= 193328\frac{1}{5}$.

76. Ἄν ὅμως τὰ κλασματικὰ μέρη τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἦναι μονάδες, ἐκ συνδύχης θεωρισμένα (60) τότε ὁ πολλαπλασιασμός αὐτῶν πρέπει νὰ γίνηται κατὰ τὴν δευτέραν σημασίαν τῶν κλασμάτων (54).

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, 34 ὀκάδες καὶ 13 δραχμαὶ
νῆμα σηρικόν, πρὸς 57 γρο. καὶ 14 παράδες, πῶσα
γρόσια κάμνουσιν;

Ἐν πρώτοις λοιπὸν πολλαπλασιάζω τὰ 57 ἐπὶ τὸ
34 (καὶ τὸ γινόμενον εἶναι γρόσια καὶ 57^{γρ} 14^{πρ}
μηδὲν παράδες. 34^{εκ} 13^{δρ}

β'. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὰς $\frac{13}{40}$ ἐπὶ τὰ 14^{πρ}, εἴτε ἐπὶ τὰ $\frac{14}{40}$ 228^{γρ} 0^{πρ}
γρόσια, ἐγὼ βλέπω ὅτι $\frac{14}{40} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$ 171 8 20
ὅθεν λαμβάνω ἐκ τῶν 34 τὸ $\frac{1}{4}$ πρῶ- 3 16
τον, τουτέστι 8^{γρ} καὶ 20^{πρ}, ἅπερ 1 17
δηλονότι καὶ τὰ γράφω εἴτα τὸ $\frac{1}{10}$, 17 $\frac{1}{10}$
εἴτε 3^{γρ} καὶ 16^{πρ}, ἅπερ δηλονότι $\frac{1}{2}$
τὰ γράφω. 1951^{γρ} 30^{πρ} $\frac{1}{2}$

γ'. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὰ 57^{γρ} ἐπὶ τὰς 13
δραχμάς, τὰ πολλαπλασιάζω ἐπὶ τὰς $\frac{13}{400}$ ὀκάδ. ἀλλ'
ἐπειδὴ $\frac{13}{400} = (\frac{1}{4} + \frac{3}{400})$ ὀκ. (τούτου ἕνεκεν λαμβά-
νω ἐκ τῶν 57 τὸ $\frac{1}{40}$ πρῶτον, τουτέστι 1^{γρ} καὶ 17^{πρ},
ἅπερ δηλονότι καὶ τὰ γράφω εἴτα τὰ $\frac{3}{400}$, ἣ ἐκτελῶν
αὐτὰ παράδες (ἐκ τοῦ διότι $\frac{3\gamma\rho}{400} = \frac{3 \times 40\pi\rho}{400} = \frac{3\pi\rho}{10}$),
ἔχω 17^{πρ} $\frac{1}{10}$, ἅπερ καὶ τὰ γράφω.

δ'. Πολλαπλασιάζων $\frac{13\delta\rho}{400}$ ἐπὶ τοῦς 13^{πρ}, μόλις
ἔχω γινόμενον $\frac{1\pi\rho}{2}$ ὥς ἐπισυνάπτων ταῦτα πάντα τὰ
μερικὰ γινόμενα, ἔχω διὰ γενικὸν 1951^{γρ} 30^{πρ} $\frac{1}{2}$.

Δηλὸν οὖν ὅτι ἐδυνάμην νὰ μεταβάλλω τούτους

τοὺς κλασματίας: τουτέστι τὰ 577^p 14^p , καὶ 34^o 13^o ,
εἰς 577^p $\frac{14}{40}$, καὶ 34^o $\frac{13}{400}$: ὅ ἐστιν εἰς τὸ ἀνωτέρω (73).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λοιπὸν ἤθελον πολλαπλα-
σιάσαι καὶ τοὺς κλασματίας τῆς ἐκτάσεως ἐπὶ νομίσμα-
τα, ἢ ἐπὶ μονάδας χρόνου, ἢ ἄλλου τινὸς αὐθιέποτε ὁ-
μως τῆς αὐτῆς φύσεως: γρόσια, φέρε εἰπεῖν, ἐπὶ γρόσια..
ἐκ τοῦ διότι ἤθελον εἶναι ἄλογον τὸ νὰ ζητήσητις 577^p .
ἐπὶ 34^p . πόσα γρόσια κάμνουσιν. Εἰς τὰ τῆς ἐκτάσεως
ὅμως, καὶ μάλιστα. Καθότι ἄριστα τις ἐξωτὰ 57 ὀργυαὶ
ἐπὶ τὰς 34 ὀργυιάς, πόσας ὀργυιάς κάμνουσι; Πλὴν
τότε τὸ γινόμενον ὁρὶν εἶναι πλείον ὁμοειδὲς μὲ τοὺς πα-
ράγοντας (ἀλλ' εἶναι ἐπιφάνεια, ὅπερ εἶναι τῆς γεωμε-
τρίας, καὶ ὅχι τῆς ἀριθμητικῆς.

77. Εἶναι βέβαια ἄξιον σημειώσεως εἰς τὸν πολ-
λαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, ὅτι παλλάκις τις λυτροῦ-
ται ἐκ τοῦ κόπου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ μόνης τῆς
διαγραφῆς. Καθότι ἂν ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἐνὸς κλάσμα-
τος ᾖναι ἢ παράγων, ἢ ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ
ἐτέρου κλάσματος (τότε ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσῃτις τὰ
κλάσματα, διαγράφων ἄνω καὶ κάτω τοὺς κοινοὺς παρά-
γοντας, ἔξει τὸ ζητούμενον. Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο νὰ πολ-
λαπλασιάσῃτις τὰ 3 ἐπὶ τὸ $\frac{1}{12}$ (τότε ἀντὶ νὰ πολλαπλα-
σιάσῃ, διαιρεῖ μόνον τὸν παρονομαστὴν 12 διὰ τοῦ 3 ϵ
καὶ τὸ πηλίκον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον ὡς
ὅντος $3 \times \frac{1}{12} = \frac{3 \times 1}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$. ὡσαύτως καὶ ἂν ἐζητεῖτο
νὰ πολλαπλασιάσῃτις $\frac{3}{13}$ ἐπὶ τὰ 13 , οὗτος ἤθελε δια-
γράφοι ἄνω καὶ κάτω τὰ 13 , ὡς ὅντος $\frac{3}{13} \times 13 = 3$.

Ὁμοιόντι ἤβηλεν] ἀκολουθήσοι καὶ ἂν ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τινῶν κλάσμάτων, ὧν περ ὁ παρονομαστικὸς ἐκείνων νὰ ᾖ ἡ παραγωγὴ, ἢ ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ἀριθμητικὸν τῶν λοιπῶν. Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο τὸ γινόμενον τῶν κλάσμάτων $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, κ. τ. ξ. τότε ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐγὼ διαγράφων ἄνω καὶ κάτω τοὺς κοινούς παραγόντας: τοὺς 3, 4, καὶ 5 λέγω ἐξω διὰ γινόμενον $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ἐκ τοῦ διότι $\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ὡσαύτως καὶ $\frac{3}{7} \times \frac{21}{40} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{5}$.

78. Ἀπορία ὅμως οὐσιώδης προκύπτει ἐνταῦθα τὸ, τίνας ἐνείκεν, οὔτε προθέσεως οὔτε ἀφαιρέσεως γινόμενης εἰς κλάσματα ἑτεροειδῆ (65), νὰ γίνηται πολλαπλασιασμός; Ἐγὼ ὅμως λέγω, ὅτι πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ κόπου τοῦτο γίνεται, καὶ ὅτι τὸ πρᾶγμα εἶναι δοκόμενον, καὶ ὅχι πραγματικόν: ὁ ἐς καὶ ὁ πολλαπλασιασμός γίνεται ὅχι εἰς ἑτεροειδῆ ἀλλὰ εἰς ὁμοειδῆ, καὶ ἡ διαφορὰ ὑφίσταται εἰς οὐδέν ἄλλο, εἰμὴ εἰς τὸ ὅτι γίνεται πρῶτον ὁ πολλαπλασιασμός· εἴτα τότε διὰ τῆς διαιρέσεως μεταβάλλεται τὸ γινόμενον εἰς ὁμοειδές. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ἐργασία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θέν εἶναι ἀπλή ἀλλὰ σύνθετος (71) ὁ δὲ ὅτι συνέχει ἐν ἑαυτῇ, ὅχι μόνον πολλαπλασιασμὸν κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, ἀλλὰ καὶ μεταμόρφωσιν τινὰ, ὅπερ καὶ διὰ τῶν πραγμάτων ἀποδεικνύεται. Καθότι ἐπειδὴ, ὡς εἶναι γνωστὸν, ἂν πολλαπλασιασθῇ $\frac{1}{2}$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$ γεννᾶται $\frac{1}{6}$, εἴτε $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ὁ δὲ ὅτι ἂν ἐγὼ πρὶν νὰ κάμω τὸν πολλαπλασιασμὸν, φέρω εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστικὸν τὰ κλάσματα ἐξω ὡσαύτως $\frac{1}{6}$,

ὥς οὗτος $\frac{5}{2 \times 3} \times \frac{2}{2 \times 3} = \frac{3 \times 2}{2 \times 3 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$. Ὡς ἤ-
θελεν εἶναι μάταιον τὸ πρὶν τῆς ἐργασίας νὰ φέρη τις εἰς
τὸν παρονομασὴν τὰ κλάσματα. Ὅμοιον βέβαια ἤθελεν
ἐπακολουθήσῃ καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων.

Περὶ διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

79. ^α **Α** ἡ διαίρεσις τῶν ὁλοσχερῶν ἦναι ἐργασία ἐ-
ναντία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπόμενον εἶναι καὶ ἡ διαί-
ρεσις τῶν κλασμάτων νὰ μὴν ἦναι ἄλλοτι, εἰμὴ πολλα-
πλασιασμὸς μὲν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν πα-
ρονομασὴν τοῦ διαιρετέου, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἐπὶ
τὸν ἀριθμητὴν ἐκείνου: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ ἀνα-
τρέψῃ τις τὸν διαιρετὴν, καὶ νὰ ἐκτελέσῃ τὸν πολλαπλα-
σιασμὸν τῶν δύο κλασμάτων. Οὕτω νὰ διαιρέσῃ τις τὰ
 $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ θέλει νὰ εἰπῇ νὰ ἀνατρέψῃ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ νὰ ἐκ-
τελέσῃ τὸν πολλαπλασιασμὸν οὕτω $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = 1 +$
 $\frac{1}{5}$, τὰ γράφω ὅ οὕτω $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{12}{10}$

Καὶ ὁ λόγος τούτου εἶναι οὗτος. Νὰ διαιρέσῃ τις
ἓνα ἀριθμὸν ὅποιονδήποτε ὁλοσχερῇ διὰ τοῦ 2, δὲν θέ-
λει νὰ εἰπῇ ἄλλο, εἰμὴ νὰ λάβῃ τὸ ἡμισυ αὐτοῦ. Οὕτω
νὰ διαιρέσῃ τὰ 4, τὰ 10, τὰ 100, κ. τ. ξ. διὰ τῶν 2,
θέλει νὰ εἰπῇ νὰ λάβῃ 2, 5, 50, κ. τ. ξ. Ἀλλὰ τὰ
κλάσματα εἶναι ἀριθμοί. Ὡς νὰ διαιρέσῃ τις καὶ τὰ
κλάσματα $\frac{4}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{100}{200}$, κ. τ. ξ. διὰ τοῦ 2, δὲν θέλει
νὰ εἰπῇ ἄλλο, εἰμὴ νὰ λάβῃ τὸ ἡμισυ αὐτῶν: τουτέστι

$\frac{2}{10}, \frac{5}{20}, \frac{50}{200}$, κ. τ. ξ. Ὡς καὶ ἐν γένει νὰ διαίρηται τις ἐν κλάσμα δι' ὀλοσχεροῦς, θέλει νὰ εἰπῇ νὰ διαμεῖσθαι μόνον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, χωρὶς τὰ βάλῃ χεῖρα εἰς τὸν παρονομασὴν: Ἀλλ' ἡ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι τοῦτο αὐτὸ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ παρονομαστοῦ (73) < τούτου ἕνεκεν, νὰ διαίρηται τις ἐν κλάσμα δι' ἐνὸς ὀλοσχεροῦς ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ πρόσλημα ἐνταῦθα δὲν εἶναι τὸ νὰ διαίρηται τις τὸ κλάσμα δι' ὀλοσχεροῦς < ἀλλὰ διὰ κλάσματος < τούτου ἕνεκεν τὸ πηλίκον τὸ προκύπτου θέλει εἶναι ἑλασσον τοῦ ὀρθοῦ. Καθότι εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ δὲν ζητεῖται ποσάκις τὰ 2 εἰσέρχονται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ < ἀλλὰ ποσάκις τὰ $\frac{2}{3}$. Ὡς εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὸν παρονομαστὴν τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ τοῦ 3, εἴτε διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ διαρέτου. Ὡς νὰ διαίρηται τις τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{2}{3}$ θέλει νὰ εἰπῇ νὰ πολλαπλασιάσῃ τὰ $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν $\frac{3}{2}$. Ὡς καὶ ἡ διαίρεσις τῶν κλασμάτων εἶναι διπλὴ ἐργασία, ὡς ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν. Ὡς ὁμως εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ὀλοσχερῶν (38) < οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἔχει χώραν ὁ γενικὸς νόμος < πλὴν ὅχι καὶ ἐναντίας: ὅτι δηλονότι τὸ πηλίκον περιέχει τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρετέος τὸν διαρέτην. Οὕτω διαρῶν $\frac{1}{2}$ διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, εἴτε $\frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = 1 + \frac{1}{2}$, ἔχω πηλίκον $1 + \frac{1}{2}$, ὅπερ περιέχει τὸ 1 < ὡς τὸ $\frac{1}{2}$ τὰ $\frac{1}{3}$. Σημειωτέον ὁμως ὅτι ἂν καὶ εἰλάβανον τὸ μείζον κλάσμα διὰ διαρέτην, εἴτε τὸ $\frac{1}{2}$ < τότε τὸ πηλίκον ἤθελε περιέχεται εἰς τὴν μονάδα, καὶ ὅχι νὰ τὴν περιέχῃ ὡς ὁ διαιρετέος εἰς τὸν διαρέτην.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι αὕτη ἡ $\frac{4}{5}$ εἶναι
μορφή ἰσοδύναμος μετὰ τὴν $\frac{4 \times 3}{5 \times 2}$: ὃ ἐστὶ τὰ δύο $\frac{5}{12}$
ἄκρα, ὡσαύτως καὶ τὰ μέσα γὰρ πολλαπλασιασ- $\frac{5}{3}$
σθῶσι πρὸς ἀλλήλα.

80. Ἰδοὺ ὅμως καὶ ἄλλο ἀλλόκοτον (74) εἰς τὰ
κλάσματα: ὃ ἐστὶ τὸ πηλίκον εἶναι μείζον καὶ τοῦ διαιρε-
τέου καὶ τοῦ διαιρέτου. Καὶ ἔπρεπε

α'. Ἐπειδὴ καὶ ἡ διαίρεσις εἶναι ἐργασία ἐναντία
τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασια-
σμὸν τῶν κλασμάτων τὸ γινόμενον εἶναι ἕλασπον ἑκατέρου
τῶν παραγόντων (αὐτόθι)· τούτου ἕνεκεν ἐνταῦθα τὸ
πηλίκον ἔπρεπε γὰρ ἦναι μείζον καὶ τοῦ διαιρετέου
καὶ τοῦ διαιρέτου, ἀλλέως ὃ πολλαπλασιασμὸς τοῦ
πηλίκου μετὰ τοῦ διαιρέτου δὲν ἤθελε δώσῃ τὸν διαι-
ρέτεον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον (48). Καθότι ἂν ἦναι $\frac{4}{5}$
 $= 1 + \frac{1}{5}$ · ἐπόμενον εἶναι καὶ $(1 + \frac{1}{5}) \frac{2}{3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. $\frac{6}{3}$

β'. Ἄν πᾶς ἀριθμὸς διαιρεθεὶς δι' ἑαυτοῦ δίδῃ μονά-
δα (40).. καὶ ἂν τὰ κλάσματα ἦναι ἀριθμοί, ἐπόμενον
εἶναι καὶ ἓν κλάσμα διαιρεθὲν δι' ἑαυτοῦ γὰρ δίδῃ μονάδα.

Οὕτω $\frac{2}{3} = 1$, καὶ $\frac{1}{10} = 1$ καὶ ἐν γένει $\frac{a}{\beta} = \frac{a \times \beta}{a \times \beta}$
 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{\beta}{\beta}$

$= 1$.. ὅπερ δηλονότι δὲν ἤθελεν ἔχει χώραν· ἂν ἡ ἀνα-
τροπὴ εἰς τὸν διαιρέτην δὲν ἐγένετο. Ἀλλὰ τούτου γινो-
μένου, ἔπεται ἀναγκαίως τὸ πηλίκον γὰρ ἦναι μείζον καὶ
τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, ὡς ὁράται ἐξ ἑαυτοῦ.

81. Ἄν ὅμως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων ὁ διαι-

ρέτης ἦναι ὁλοσχερῆς ἢ τότε εἶναι ἀνάγκη πρῶτον νὰ τὸν μεταβάλῃ τις εἰς κλάσμα, εἴτα νὰ τὸν ἀνατρέψῃ. Οὕτως ἂν ἐζητεῖτο ἡ διαιρέσις τῶν $\frac{4}{5}$ διὰ τῶν 2 ἢ τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. καὶ ἂν διὰ τῶν 5 ἢ τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι $= \frac{4}{5} \times \frac{5}{1} = 4$. Ὡς, ἤθελε συνάξῃ τις, πᾶν κλάσμα διαιρεθὲν δι' ὁλοσχεροῦς ἴσου μὲ τὸν παρνομασὴν, εἶδει πηλίκον τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{4}{5} \times 5 = \frac{4}{\cancel{5}^5} = \frac{4}{5:5} = 4$, τούτου ἕνεκεν ἡ

διαίρεσις τοῦ παρνομασίου παντὸς κλάσματος δι' ὁλοσχεροῦς εἶναι πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ ὁλοσχεροῦς.

Εἰ δὲ καὶ τὰ δοθέντα εἶναι ἀριθμοὶ κλασματικοί ἢ τότε πρῶτον πρέπει τις νὰ μεταβάλῃ αὐτὰ εἰς ἑντελῆ κλάσματα, ἢ καὶ τὸν διαιρέτην, εἴτα νὰ ἐκτελέσῃ τὴν διαίρεσιν. Ζητήσω, φέρε εἰπεῖν, ἡ διαίρεσις τῶν $7 + \frac{1}{3}$ διὰ τῶν $3 + \frac{2}{9}$. Τότε μεταβαλὼν αὐτοὺς εἰς τὰ $\frac{22}{3}$, $\frac{29}{9}$ ἢ εἴω διὰ πηλίκον $= \frac{108}{81} = 2 \frac{8}{29}$.

Εἰ δὲ καὶ ἐζητεῖτο ἡ διαίρεσις τῶν $193328\frac{1}{3}$ διὰ τῶν $3406\frac{2}{3}$ ἢ τότε ἐγὼ ἤθελον μεταβάλαι μόνον τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα, εἴτε εἰς τὰ $\frac{10220}{3}$ λέγῳ, καὶ οὕτω νὰ ἐκτελέσω τὴν διαίρεσιν, ἥτις ἤθελε μοι δώσῃ διὰ πηλίκον $56\frac{1}{4}$.. ὥς ὅντος $\frac{193328\frac{1}{3}}{\frac{10220}{3}} = 54 + \frac{9368}{10220}$. Διότι ἂν πολλαπλασιάσω τὸ πηλίκον διὰ τοῦ 3 ἢ ἐξῶ $56\frac{1}{4}$. Καθότι εἶναι ἔν καὶ τὸ αὐτὸ ἢ τὸν διαιρέτην νὰ πολλαπλασιάσῃ τις διὰ τινος ἀριθμοῦ, ἢ τὸ πηλίκον (38).

82. Ἄν ὅμως καὶ αἱ μονάδες τῶν κλασματικῶν μερῶν τῶν κλασματικῶν ᾗναι ὠρισμένοι ἐκ συνθήκης (τότε ἡ διαίρεσις αὐτῶν θέλει γένει ὡδέπως. Καὶ ἂν μόνον ὁ διαιρετέος ᾗναι συγκεείμενος ἐκ τῶν τοιούτων μονάδων (τότε ἤθελε διαίρεσαι τις πρῶτον τὰς μεγάλας αὐτοῦ μονάδας (εἶτα νὰ φέρῃ τὸ λείψανον εἰς τὰς δευτέρας, εἰς τὰς ὁποίας νὰ προσθέσῃ τὰς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, καὶ νὰ ἐπακολουθήσῃ τὴν διαίρεσιν. Ἦθελε ὁ ἐκτελείσαι τὸ αὐτὸ, καὶ ἂν ᾗσαν μονάδες καὶ τρίτης τάξεως. Ἄν ὅμως καὶ ᾗναι συγκεείμενοι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαίρετης ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων (τότε εἶναι χρεια νὰ ἀναχθῶσιν ἑκάτεροι εἰς τὰς σμικροτάτας αὐτῶν μονάδας (εἶτα νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ τούτων διαίρεσις, ὡς ἐπὶ παραδειγμάτων θεωρεῖται.

Ἐδόθησαν, φέρε εἰπεῖν, $62\gamma^{\circ} 28\pi^{\circ}$ δι' οἰκοδομὴν 7 ὀργυιῶν (καὶ ζητεῖται πόσον ἀνήκει εἰς μίαν ὀργυιάν.

Διαιρὼ λοιπὸν τὰ 62 διὰ τῶν 7, καὶ ἔχω πηλίκον 8, καὶ λείψανον 6, ἅπερ διὰ νὰ φέρω εἰς ἐλάττωνας μονάδας πολλαπλασιάζω αὐτὰ διὰ τῶν 40, εἰς ὅπερ προσωόμενος καὶ τὰ 28, ὡς ὄντα τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἐπακολουθῶ τὴν διαίρεσιν, καὶ οὕτω μοι προκύπτει διὰ πηλίκον $8\gamma^{\circ}$ καὶ $38\pi^{\circ}$ $\frac{2}{7}$

Εἰ δὲ καὶ ἐδόθοντο $62\gamma^{\circ}$ 7 $\overline{) 62}$ $28\pi^{\circ}$ $\overline{) 28}$
 $28\pi^{\circ}$ δι' οἰκοδομὴν $7^{\circ} 5\pi 5\delta$, $\overline{) 56}$
καὶ ἐζητεῖτο πόσον ἀνήκει εἰς $\overline{) 6}$
μίαν ὀργυιάν (τότε ἔπρεπε νὰ 7 $\overline{) 268\pi^{\circ}}$
ἀνάξῃ τις ἑκάτερα εἰς μονάδας τῆς σμικροτάτης τάξεως,
καὶ τότε ἐκτελεσθῇ τὴν διαίρεσιν.

Οὕτως ἐγὼ ἐκτελῶν παράδες τὰ 627ρ, καὶ εἰς αὐ-
τὰς προσθίμενος τὰς 28, ἔχω 2508 παράδες, ὅσας δη-
λονότι ἔπρεπε νὰ ἦναι διὰ νέος διαιρετέος.. ἀλλ' ἐπειδὴ
καὶ ζητεῖται πόσον κάμνει μία ὄργυια, εἴτε 72 δακτυ-
λοι, ἐξ ὧν δηλ. συνίσταται ὁ διαιρετής (τούτου ἕνεκεν,
εἶναι χρεῖα νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν διὰ τοῦ 72 (καὶ
οὕτως ἔχω διὰ διαιρετέον 180576, ὅστις δηλ. εἶναι 72^{25}
μείζων τοῦ πραγματικοῦ. Ἐκ τοῦ ἑτέρου. πάλιν μέρους
ἐκτελῶν καὶ τὰς ὄργυϊας καὶ τοὺς πόδας δακτύλους, καὶ
εἰς αὐτοὺς προσθίμενος τοὺς 5 δακτύλους, ἔχω διὰ
νέον διαιρετὴν 56γ^{δακ}. Ὡς ἐκτελῶν τὴν διαίρεσιν ἔχω
διὰ πηλίκον $317^{\text{παρ}} + \frac{203}{569} = 77^{\text{ρ}} 37^{\text{πρ}} + \frac{203}{569}$, ὅπερ
δηλ. εἶναι 72^{25} μείζον τοῦ πραγματικοῦ, καὶ ἐπομένως
ὀρθόν. Καθότι ἂν εἰδέμεν τὰς 2508 παράδ. διὰ τῶν
569 δακτ. ἤθελον ἔχει πηλίκον $4^{\text{παρ}} \frac{20}{72}$, ὅπερ δηλ. εἶ-
ναι ἑλασσον τοῦ ὀρθοῦ, ὥς μὴ διαίρεσαντός μου εἰ ὀρ-
γυῖαν (ἀλλὰ διὰ δακτύλων. Δῆλον ὅμως ὅτι τοῦτο τὸ
πρόβλημα ἦν δυνατόν νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ (82). Καθότι
 $627^{\text{ρ}} 28^{\text{παρ}} = 627^{\text{ρ}} \frac{28}{40}$, καὶ $7^{\text{ορ}} 5^{\text{πρ}} 5^{\text{δ}} = 7^{\text{ορ}} \frac{65}{72}$.
Πλὴν τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνήκουσιν εἰς τὴν ἀναλο-
γίαν μάλιστα, εἴτε μέθοδον τῶν τριῶν, ὥς θέλωμεν ἰδεῖ
ἐκεῖ, ἢ εἰς τὴν ἀπλῶς διαίρεσιν.

83. Ὡς ὅμως ὁ πολλαπλασιασμός τῶν κλασμάτων
ἐγένετο, χωρὶς πρῶτον νὰ ἀναχθῶσι τὰ κλάσματα εἰς τὸν
αὐτὸν παρονομασὴν (78). οὕτω καὶ ἡ διαίρεσις. Καὶ ὁ
λόγος εἶναι εἰς καὶ ὁ αὐτός: ἡ ἀποφυγὴ τοῦ κόπου δη-
λονότι. Καθότι ἂν διαμεθῇ τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$, ἔχει νὰ προ-
κύψῃ πηλίκον $\frac{3}{2}$, κατὰ τὸν ἐκθέντα νόμον (79).. ἀλλὰ

καὶ ἂν κάμη τις πρῶτον ὁμοιοῦν τὰ δευτέρα κλάσματα, καὶ τότε ἐκτελέσῃ τὴν διαίρεσιν, ἔξει ἐπίσης $\frac{3}{2}$: τουτέστι $\frac{3}{6} \times \frac{6}{2} = \frac{3}{2}$. Ὡς εἶναι τὸ αὐτὸ πηλίκον, καὶ ἂν τὰ κλάσματα ἐγίνοντο πρῶτον ὁμοιοῦν, εἴτα ἐδαιροῦντο, καὶ ἂν μὴ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ διαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι ἀπλὴ διαίρεσις ἢ ἀλλ' ἐνταυτῷ καὶ πολλαπλασιασμός ἢ τούτου ἕνεκεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκμορφοῦνται τὸ πηλίκον, χωρὶς νὰ ᾔναι χρεῖα προπαρασκευῆς τινος.

84. Δῆλον ὅμως ὅτι ἐπολλαπλασιασμός τῶν κλασμάτων, ἄλλως πως θεωρούμενος, δύναται καὶ ἄλλως πως νὰ ὀνομασθῇ. Καθότι ἡμεῖς λαβόντες μέρη τινὰ μιᾶς ποσότητος τὰ ὀνομάσαμεν κλάσμα (49). Πλὴν δὲν εἶναι δύσκολον νὰ εἴῃ τις, ὅτι ἡμεῖς θυνάμεθα ἀντὶ νὰ λάβωμεν ἅπαντα τὰ εἰρημένα μέρη, νὰ λάβωμεν τινὰ μόνον ἐξ αὐτῶν: ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ διαίρεσις διαιρέσεως ἢ καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται κλάσμα κλάσματος. Οὕτω μιᾶς ποσότητος: τῆς ἡμέρας, φέρε εἶπεῖν, διαιρεθείσης εἰς 24 ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τούτων ληφθέντων τινῶν μόνων: 16 φέρε εἶπεῖν, ὅπερ καὶ οὕτως $\frac{16}{24}$ γράφεται, ὀνομάζεται ὡς ἐμάθομεν κλάσμα. Πλὴν ἂν ἀντὶ νὰ λάβω ἅπαντα ταῦτα: τὰ $\frac{16}{24}$ λέγω, λάβω μόνον τινὰ ἐξ αὐτῶν: τὰ ἡμίσεα φέρε εἶπεῖν, ὅπερ καὶ γράψω οὕτω $\frac{1}{2}$ ἢ τοῦτο πλέον ὀνομάζεται κλάσμα κλάσματος.

Ὡς κλάσμα κλάσματος ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ὁ ἀριθμητικὸς ἐνός κλάσματος τὸ νὰ ληφθῇ ὡς νέα ποσότης, καὶ νὰ διαιρεθῇ εἰς τινὰ μέρη, καὶ ἐκ τούτων νὰ ληφθῶσι

τινά. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὰ $\frac{16}{24}$ τῆς ἡμέρας εἶναι 16 ὥραι, καὶ ἐγὼ ἔλαβον ὅχι ἅπαν τὸ κλάσμα, ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, δῆλον ὅτι ἐγὼ ἔλαβον 8 ὥρας. Ὡς τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24}$ τῆς ἡμέρας θέλει νὰ εἰπῇ 8 ὥρας, ἢ $\frac{8}{24}$ τῆς ἡμέρας. Ἀλλ' ἐν τοιούτου ἤθελε γεννηθῆ καὶ ἂν ἐγὼ ἐπολλαπλασιάζον πρὸς ἀλλήλα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{24}$, ὥς ὅντος $\frac{1}{2} \times \frac{16}{24} = \frac{8}{24}$, τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ φέρῃ τις τὸ κλάσμα τοῦ κλάσματος εἰς ἀπλῶς κλάσμα, εἶναι ἀνάγκη νὰ πολλαπλασιάσῃ αὐτὰ πρὸς ἀλλήλα. Καθότι νὰ λάβῃ τις τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ κλάσματος $\frac{16}{24}$ σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ λάβῃ τὰ ἡμίσεια τῶν 16 τῶν 24: ὅπερ δηλονότι εἶναι τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{24}$. Ὡς θάτερος παράγων ἐνὸς κλάσματος (73) ἄλλο δὲν εἶναι ἀναφερόμενός ὡς πρὸς τὸν θάτερον, ἢ κλάσμα κλάσματος. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, τούτου ἕνεκεν τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι κλάσμα τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$: ὅπερ δηλονότι μεθερμηγευόμενον θέλει νὰ εἰπῇ ἐκ μίης ποσότητος εἰς 5 διηρημένης νὰ λάβῃ τις τὰ 4, εἴτα τούτων διαιρεθέντων εἰς 3, νὰ λάβῃ τὰ 2, ὥς ἂν ἢ εἰς 5 διαιρεθεῖσα ποσότης ἦν γρόσιον, τότε τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ γρ. = 32 παρ. οἷτινες εἰς τρία διαιρεθέντες, καὶ δύο ἐκ τούτων ληφθέντων, σημαίνουναι $21\frac{1}{3}$ παρ. = $\frac{64}{15}$ γρ. δηλονότι.

Ἐμποδίζει οὐδὲν εἰς τὸ νὰ ποιήσῃ τις καὶ κλάσμα κλάσματος κλάσματος. Οὕτω τὸ ἂν λάβῃ τις τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24}$, τούτο θέλει εἶναι κλάσμα κλάσματος κλάσματος, καὶ σημαίνει τὸ ἐκ τίνος ποσότητος εἰς 24 διηρημένης νὰ λάβῃ τις τὰ 16, καὶ ἐκ τούτων τὰ ἡμίσεια, καὶ ἐκ τούτων τὰ δύο τρίτα, εἰς τρόπον ἐτι, ἂν τὸ 24

ἐσθῆμαινεν ὥρως ἢ τότε τὰ $\frac{16}{24} = 16\omega\rho$, καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24}$
 $= 8\omega\rho$ ἢ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{16}{24} = 5\frac{1}{3}$. Ὡς τὸ κλάσμα
 τοῦ κλάσματος τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον
 τῶν τριῶν κλασμάτων. Ὅθεν $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{16\eta\mu}{24} = \frac{16}{3 \times 24}$
 $= \frac{16\omega}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ὅτι εἰς παράγων ἐκ
 τριῶν κλασμάτων πολλαπλασιαζόμενος καὶ ἀναφερόμενος
 ὡς πρὸς τοὺς λοιποὺς δύο παράγοντας, εἶναι κλάσμα
 κλάσματος κλάσματος, καὶ διὰ τοῦτο ἴσος μὲ τὸ ἐκ τῶν
 τριῶν τούτων γινόμενον. Ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$
 τῆς μινιάδος, ἅπερ ἐκτίθενται οὕτως $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$
 εἶναι κλάσμα κλάσματος κλάσματος κλάσματος. Ὡς οὖν ὁ
 πολλαπλασιασμός τῶν κλάσματος εἶναι οὐδὲν ἄλλο,
 ἢ κλάσματα κλασμάτων.

Κ Ε Φ. Η'.

Περὶ τῶν συνεχῶν Κλασμάτων.

85. **Η**μεῖς εἶδομεν, ὅτι ὅταν τὰ κλάσματα ᾖναι σύμ-
 μετρα τότε λαμβάνουσι μορφήν ἀπλυσέραν (58) ἀλλέως
 διαμένουσιν εἰς τὴν ἑαυτῶν σκοτεινὴν μορφήν. Ἀλλ' ἐ-
 πειδὴ καὶ ὁ ἀνθρώπινος νοῦς εὐχαρισεῖται οὐδόλως εἰς
 τὴν ὄρασιν τῶν σκοτεινῶν (τούτου ἕνεκεν καὶ οἱ μαθημα-
 τικαὶ ἐζήτησαν τρόπον διὰ τὸ λαμπρύνουσιν ὁπωσοῦν καὶ

τὰ τριαῦτα, ἐκτελέσαντες τοῦτο διὰ τῆς συνεχοῦς διαι-
ρέσεως ἀμφοτέρων τῶν ὄρων τοῦ κλάσματος (καὶ τοῦτο
εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται κλάσμα συνεχές.
Κλάσμα λοιπὸν συνεχές εἶναι α'. νὰ διαιρέσῃ τις
ἀμφοτέρους τοὺς ὄρους ἐνὸς κλάσματος διὰ τοῦ ἐλάσσο-
νος τῶν ὄρων αὐτοῦ.. β'. τὸν ἐλάσσονα αὐτοῦ ὄρον διὰ
τοῦ λειψάνου.. γ'. τὸ πρῶτον λείψανον διὰ τοῦ δευτέρου..
δ'. τὸ δεύτερον διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, χάριν
τοῦ ὁποίου δηλονότι ἤθελεν ἐκτυλιχθῇ τοῦτο τὸ κλάσμα
εἰς μίαν σειράν κατιούσαν.. καὶ πρὸς λαμπροῦσιν ας λά-
βωμεν ἓν παράδειγμα.

Ζητήσθω νὰ ἀναχθῇ εἰς ἀπλουσίαν μορφήν τὸ
κλάσμα $\frac{10000000000}{31415926535}$, ὅπερ, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὴν
γεωμετρίαν, παρὶς ὥς ἐγγίσα τὴν ἀναφοράν τῆς διαμέ-
τρου πρὸς τὴν περιφέρειαν (πλὴν διὰ συντομίαν παρα-
λείπω τοὺς πέντε αὐτοῦ τελευταίους ὄρους, καὶ ἔχω
 $\frac{100000}{314159}$, ὅπερ ὀνομάζω Α.

Διαιρῶ λοιπὸν αὐτὸ ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ ἀριθμοῦ
100000, καὶ ἔχω $A = \frac{1}{3} + \frac{14159}{100000}$. Διαιρῶ αὖθις αὐτὸ

διὰ τοῦ 14159, καὶ ἔχω $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{887}{14159}$. Διαιρῶ

τρίτον αὐτὸ διὰ τοῦ 887, καὶ ἔχω $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{854}{887}$

Καὶ ἔτι $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{33}{854}$ καὶ ἐδὼ ἴσονται.

Τώρα ἂν ἐκτέλουν μόνον μίαν διαίρεσιν ὥστε νὰ
ἔχω $A = \frac{1}{3}$ ὅτι τοῦτο ἤθελεν εἶναι μείζον τοῦ ὀρθοῦ. Εἰ

δὲ καὶ ἐκτέλουν δύο μόνον διαιρέσεις, ὥστε νὰ ἔχω $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} = \frac{7}{22}$ ἢ τότε βέβαια ἤθελον μὲν πλησιάσαι μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθόν ἢ πλὴν ἤθελον εἶναι ἑλασσον τοῦ ὀρθοῦ. Καὶ ἂν ἐκτέλουν τρεῖς ὥστε νὰ ἔχω $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} = \frac{106}{333}$ ἢ τότε ἤθελον μὲν πλησιάσαι μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθόν ἢ πλὴν τοῦτο, τὰ $\frac{106}{333}$ λέγω, ἤθελον εἶναι μείζον τοῦ ὀρθοῦ. Καὶ ἂν ἐκτέλουν τέσσαρας ὥστε $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} = \frac{113}{355}$ ἢ τότε ἤθελον μὲν πλησιάσαι μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθόν ἢ πλὴν τοῦτο, τὰ $\frac{113}{355}$ λέγω, ἤθελον εἶναι ἑλασσον τοῦ ὀρθοῦ. Καθότι $\frac{1}{3} > \frac{10000000000}{31415926535}$, καὶ $\frac{1}{3} > \frac{7}{22}$ ἢ καὶ ἐξ ἐναντίας τὰ $\frac{7}{22} < \frac{106}{333}$.. Ὡστε ἀλληλοδιαδόχως ἐγὼ ἔχω πλέον μεγαλήτερα, καὶ πλέον μικρότερα τοῦ δοθέντος κλάσματος A ἢ πλὴν πάντοτε πλησιάζοντα μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς τὸ ὀρθόν.

86. Ἄν ὅμως καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα ληφθῇ ἀναγε-
τραμμένως ἢ τότε ἤθελε παριστᾷ τὴν ἀναφορὰν τῆς περι-
φερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον: ἔνθα δηλονότι
 $\frac{\text{περιφ.}}{\text{διάμ.}} = \frac{31415926535}{10000000000}$. Καὶ ἂν ἐνταῦθα ἐκτελέσω ὡς ἀ-
νωτέρω, ὀνομάζων B τοῦτο τὸ κλάσμα, ἔξω

$$B = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}, \text{ καὶ τ. ξ.}$$

ἔνθα δηλονότι ἂν λάβω μόνον τὸν πρῶτον ὅρον, εἰς τρό-
πον ὅτι $B=3$ τότε εἶναι ὁρατὸν ὅτι αὕτη ἡ σημασία

εἶναι ἐλάσσων τῆς ὀρθῆς.. ἡ δὲ δευτέρα $\frac{22}{7}$ εἶναι μείζων τῆς ὀρθῆς (πλην μᾶλλον ὀρθή.. ἡ δὲ τρίτη $\frac{333}{100}$ ἐλάσσων τῆς ὀρθῆς, πλην μᾶλλον ὀρθή· ἡ δὲ τετάρτη $\frac{355}{113}$ μείζων τῆς ὀρθῆς (πλην ἐγγιζουσα μᾶλλον τῆς ὀρθῆς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἶναι βέβαια ἄξιον παρατηρήσεως, ὅτι εἰς μὲν τὸ κλάσμα Α (85) ὁ πρῶτος μόνον ὅρος ληφθεὶς ἦν μείζων τοῦ ὀρθοῦ: ἐν ᾧ εἰς τὸ κλάσμα Β εἶναι ἐλάσσων τοῦ ὀρθοῦ.. ὁ δὲ δεύτερος, ἐκεῖ μὲν ἐλάσσων, ἐνταῦθα δὲ μείζων τοῦ ὀρθοῦ, καὶ οὕτως ἀκολουθῶς.. Εἰς ἑκάτερα ὅμως, ὅσον περισσότερους ὅρους λάβῃ τις (τεσσούτεν τὸ γινόμενον πλησιάζει εἰς τὴν ἀληθειαν, καὶ ὁ ἀπομακρυσμὸς τῆς ἀληθείας εἶναι πάντοτε ἐλάσσων μονάδος, διαιρουμένης διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἰδίου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἀκολουθοῦ κλάσματος. Οὕτω τὸ ἀμάρτημα τοῦ κλάσματος $\frac{3}{1}$ εἶναι ἐλάττον, ἢ $\frac{1}{7}$.. καὶ τὸ τοῦ $\frac{22}{7}$ ἐλάττεον, ἢ $\frac{1}{7 \times 100}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς: εἴθε δὴλ. ὁράται ὁ λόγος τοῦ διατεῖ πλησιάζει τις εἰς τὴν ἀλήθειαν, ὅσον περισσότερους λάβει ὅρους τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

87. "Ετι, κατὰ τὸν Καίλλ, τὸ ἡλιακὸν, ἢ τροπικὸν ἔτος εἶναι = 365^h 5^m 48' 49'' καὶ τούτου ἕνεκεν εἶναι μείζων τοῦ κοινοῦ ἔτους 365^h 48' 49''. Τώρα ἂν αὕτη ἡ ὑπεροχὴ ἦν ὅ ὥραι, ἐξηκριθωμένως τότε τὸ ἀμάρτημα ἦθελεν ἐπιδιορθωθῆ διὰ τῆς ἐπακτῆς μιᾶς ἡμέρας εἰς ἑκάστον τέταρτον ἔτος. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ δὲν εἶναι δῆλον ὅτι ἡ τοιαύτη παρενθήκη τῶν 24 ὥρῶν θελεῖ εἶναι ἡμερησίαν: ὅ ἐς δὲν θελεῖ γένει σύμπτωσις τοῦ κοινοῦ.

ἔτους μετὰ τοῦ τροπικοῦ. Ἄν λοιπὸν θελήσῃ τις νὰ μά-
θῃ, εἰς πόσα ἔτη κοινὰ, ἐπακταί τινων ἡμερῶν ἤθελεν ἐκ-
τελέσαι ἐξηκριδωμένως τὴν σύμπτωσιν τοῦ κοινοῦ ἔτους
μετὰ τοῦ τροπικοῦ τότε εἶναι ἀνάγκη εἰς αὐτὸν νὰ ζητήσῃ
τὴν ἀναφορὰν τῶν 24 ὥρῶν ὡς πρὸς τὰς $5^{\circ} 48' 49''$,
ἥτις εἶναι $= \frac{86400}{20929}$, ὅπερ θέλει νὰ εἰπῇ, ἂν εἰς ἔτη 86400
κοινὰ παρενθέσῃ τις ἡμέρας 20929 τότε θέλει μεταφέ-
ρει τὸ κοινὸν ἔτος εἰς τὸ τροπικόν.. καὶ οὕτως ὁ μὲν ἀριβ-
μητης τοῦ κλάσματος παρίσῃσι τὰ κοινὰ ἔτη, ὁ δὲ πα-
ρονομαστὴς τὴν ἐπακτὴν τῶν ἡμερῶν.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀναφορὰ τῶν 86400 πρὸς 20929
εἶναι σκοτεινὴ διὰ τὸ μέγεθος τῶν ὄρων τοῦτου ἔνεκεν
ζητεῖται νὰ εὕρηται εἰς μικροτέρους ὄρους ἀναφορὰς πλη-
σιαζούσας, ὅσων εἶναι δυνατόν, εἰς τὴν ἀλήθειαν. Ὡς
εἶναι ἀναγκαῖα εἰς τοῦτο ἡ χρῆσις τοῦ συνεχοῦς κλάσμα-
τος, ἢ ἂν θέλῃς ἡ μέθοδος τῆς εὐρέσεως τοῦ κοινοῦ διαί-
ρέτου (58).

Διαιρῶν λοιπὸν ἄνω καὶ κάτω ὡς εἰς τὸν (85), ἔχω

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 20929 \overline{) 86400} \quad 7 \\
 \underline{83716} \quad 7 \\
 2684 \quad 20929 \overline{) 18788} \quad 1 \\
 \underline{20929} \quad 1 \\
 7859 \quad 2141 \overline{) 2004} \quad 3 \\
 \underline{6423} \quad 3 \\
 1431 \quad 2141 \overline{) 543} \quad 1 \\
 \underline{2141} \quad 1 \\
 329 \quad 512 \overline{) 512} \quad 1 \\
 \underline{512} \quad 1 \\
 17 \quad 512 \overline{) 16} \quad 1 \\
 \underline{512} \quad 1 \\
 15 \quad 31 \overline{) 31} \quad 1 \\
 \underline{31} \quad 1 \\
 15 \quad 10 \overline{) 10} \quad 1 \\
 \underline{10} \quad 1 \\
 5 \quad 15 \overline{) 15} \quad 1 \\
 \underline{15} \quad 1 \\
 0
 \end{array}$$

"Ὡς αὖ λάβω μόνον ἑναὶ ὄρου $\frac{4}{7}$ ἔξω εἰς 4 ἔτη μίαν
 ἡμέραν, ἐπακτὴν μείζων τοῦ ὀρθοῦ, ὡς καὶ εἰς τὸν (86)
 εἴτε ἀντὶ νὰ προσθέσω μίαν ἡμέραν εἰς 1512 ἡμέρας,
 τὴν προσθέτω εἰς 1460, εἰδὲ καὶ λάβω δύο ἑτά τε $\frac{29}{7}$:
 ὅπερ θέλει νὰ εἴπῃ, ὅτι εἰς τὰ 29 ἔτη πρέπει ἐπακτὴ
 7 ἡμερῶν ἢ πλὴν ἐλάττων τοῦ ὀρθοῦ καὶ οὕτως ἐφεξῆς :
 ὁ ἔξω ταῦτα τὰ κλάσματα $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, $\frac{128}{31}$
 $\frac{161}{39}$, $\frac{2865}{694}$, $\frac{2704}{655}$, $\frac{5567}{1349}$, $\frac{86400}{20929}$, ἔνθα δηλονότι ὡς ὁ-
 ρᾶται τὰ $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, κ. τ. ξ. εἶναι ἀλληλοδιαδόχως μείζονα
 καὶ ἐλάττωνα τοῦ δοθέντος $\frac{86400}{20929}$ ἢ καὶ οὕτως ἡ μὲν ἐπα-
 κτὴ μίαν ἡμέραν εἰς τέσσαρα ἔτη εἶναι μείζων τοῦ ὀρθοῦ,
 ἡ δὲ τῶν ἑπτὰ εἰς 29 ἔτη εἶναι ἐλάττων τοῦ ὀρθοῦ καὶ
 ἡ τῶν ὀκτὼ εἰς 33 ἔτη εἶναι μείζων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἢ
 πλὴν ἑκάστη τῶν ἐφημέρων ἐπακτῶν εἶναι πλέον ἀκριβοῦς
 τῶν ὁσίων εἶναι δυνατόν εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα νὰ παρεν-
 τιθῶσι. Καὶ ἐπειδὴ ὡς ὁρᾶται τὸ ἔσχατον κλάσμα εἶναι
 τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δοθὲν : $\frac{86400}{20929} = \frac{24^h}{5^h 48' 49''} = \frac{86400}{20929}$ ἢ
 τοῦτο ἐμφανίζει ὅτι τὸ συνεχὲς κλάσμα ἀδυνατεῖ νὰ προ-
 χωρήσῃ περαιτέρω. Καὶ κατὰ μὲν τὸ καλενδαρίον τοῦ
 Γρηγορίου ἡ εἰς 400 ἔτη ἐπακτὴ εἶναι ἡμερῶν 97 μόνον ἢ
 πλὴν τότε εἰς τὴν κατασκευὴν δηλονότι αὐτοῦ ἐδέχθησαν
 τὸν διορισμὸν τοῦ ἔτους τὸν ὑπὸ τοῦ Κοπερνίκου, ἔνθα ἦν
 $= 365^h 5^m 49' 20''$ κατὰ δὲ τὴν παρούσαν διαίρεσιν,
 ὡς θέλομεν εἶδαι εἰς τὴν ἀλγεβραν, εἶναι ἀνάγκη νὰ πα-
 ρεντιθῶσιν ἡμέραι 109 εἰς 450. Καὶ ἐπειδὴ τὴν σήμε-
 ρον κατὰ τὸν τοῦ Λαῖου τὸ ἡλιακὸν ἔτος $= 365^h 5^m 48'$
 $48''$ μόνον ἢ ἐπακταὶ πρέπει νὰ μεταβληθῶσιν.

Κ Ε Φ. Θ'.

Περὶ Δεκαδικῶν κλασμάτων.

88. **Κ**λάσματα δεκαδικὰ, ἢ καὶ ἀπλῶς δεκαδικὰ, ὀνομάζονται, ὅσα τῶν κλασμάτων ἔχουσι παρονομασὴν τὸ 10, ἢ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτῶν: τοῦτέστι τὸ 100, 1000, κ. τ. ξ. ὡς ταῦτα $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{31415926535}{10000000000}$, κ. τ. ξ. Ὡς τὰ δεκαδικὰ διαφέρουσι μὲν ὁλοτελῶς τῶν λοιπῶν κλασμάτων εἶναι ὅμως ἐπιτηδεότερα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας καὶ τούτου ἕνεκεν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτεθῇ ἀνὰ μέρος ἡ θεωρία αὐτῶν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ 10 χιλιοσὰ = 1 ἑκατοσῶν.. καὶ 10 ἑκατοσὰ = 1 δεκάτῳ.. καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν ἐν χιλιοσὸν γράφεται οὕτως $\frac{1}{1000}$, τὸ δ' ἐν ἑκατοσὸν οὕτως $\frac{1}{100}$, τὸ δὲ δέκατον οὕτως $\frac{1}{10}$ ἐπόμενον εἶναι οἱ παρονομασταὶ τῶν δεκαδικῶν νὰ ἦναι τῆς αὐτῆς κλίμακος, ἥς περ εἶδομεν ὅτι εἶναι καὶ οἱ ὁλοσχερεῖς ἀριθμοὶ (8) ἐπὶ ἐναντίας. Ὡς δύνανται τις νὰ κάμῃ πρὸςθesis καὶ ἀφαιρέσεις τούτων τῶν κλασμάτων, χωρὶς νὰ μεταμορφώσῃ αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμοιοτῆτιν, ὡς ὄντα ὁηλονότι τοιαῦτα ἐκ φύσεως. Καθότι ἐπειδὴ καὶ $\frac{321}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{1}{100} = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$ τούτου ἕνεκεν, ἂν μοι δοθῶσι νὰ προσθέσω ταῦτα τὰ κλάσματα $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ἐγὼ ἀμέσως θέλω γράψω $\frac{321}{1000}$.. ἐκ τοῦ διότι ὡς φαίνεται τὰ 300 χιλιοσὰ, εἶναι ἴσα μετὰ 3 δέκατα καὶ τὰ 20 χιλιοσὰ εἶναι τὰ αὐτὰ μετὰ 2 ἑκατοσὰ.

89. Ἄν λοιπόν καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὑπό-
 κηται εἰς τὸν αὐτὸν νόμον τῶν ὁλοσχερῶν (ὅηλον ὅτι
 εἶναι δυνατόν νὰ ἀφαιρήσῃ τις ἐξ αὐτῶν τὴν κλασματι-
 κὴν μορφήν: τοῦτέστι τὴν ὀριζόντιον γραμμὴν, καὶ νὰ τὰ
 γράψῃ, ὡς ἄλλους ὁλοσχερεῖς ἀριθμούς: καὶ οὕτω νὰ ἐκ-
 τελέῃ τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας εἰς αὐτὰ ὡς καὶ τῷ ὄντι
 ἡκολούθησε.

Συνέβητο λοιπὸν οἱ γεωμέτραι ἐκ συνθήκης, νὰ γρά-
 ψωσι τὰ δεκαδικὰ τότε, ἀφ' οὗ πρῶτον γράψουσι κόμμα.
 Οὕτω τὰ μὲν $25 \frac{321}{1000} = 25, 321$, καὶ προφέρονται εἴ-
 κοσι πέντε μονάδεις, 321 χιλιοσά: τὰ δὲ $\frac{31415926535}{10000000000} =$
 3, 1415926535, καὶ προφέρονται τρία, καὶ 141592
 6535 δεκάκις χιλιάκις μιλιοσά. Εἰ δὲ καὶ τὰ δεκαδικὰ
 εἶναι ἀντὶ ὁλοσχερῶν ἀριθμῶν τότε πρὸ τοῦ κόμματος
 τίθεται μηδενικόν. Οὕτω $0, 3 = \frac{3}{10}$, καὶ $0, 32 = \frac{32}{100}$
 καὶ $0, 321 = \frac{321}{1000}$. Ἀλλ' ἂν $0, 3 = \frac{3}{10}$, καὶ $0, 32 =$
 $\frac{32}{100}$, καὶ $0, 321 = \frac{321}{1000}$: ὅηλον ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν
 εἶναι πλεόν, ἢ ἀληθές: τοῦτέστι $\frac{3}{10} = 0, 3$, καὶ $\frac{32}{100} = 0,$
 32 , καὶ $\frac{321}{1000} = 0, 321$. Ἀλλὰ $\frac{3}{10}$, καὶ $\frac{32}{100}$, καὶ $\frac{321}{1000}$
 ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ διαίρεσις τις: ἢ ἂν θέλῃς πηλίκον ἢ
 ἄρα καὶ τὰ 0, 3 καὶ 0, 32 καὶ 0, 321 εἶναι τοιαῦτα.

90. Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι μετὰ τὸ κόμ-
 μα, τὰ μὲν δεκαδικὰ κατέχουσι τὸν πρῶτον χώρον: τὰ δὲ
 ἑκατοςά, τὸν δεῦτερον: τὰ δὲ χιλιοσά, τὸν τρίτον καὶ οὕτως
 ἐφεξῆς: καὶ ἐπομένως ἑκάστος αὐτῶν χαρακτήρ εἶναι δε-
 κάκις μείζων τοῦ ἐξῆς (88). Ὡς ἂν ἦναι νὰ γράψῃ τις

$\frac{1}{100}$, πρέπει νὰ τὸ γράψῃ οὕτως, 0, 01 .. καὶ ἂν $\frac{1}{1000}$, οὕτως 0, 001.. καὶ ἂν $\frac{1}{10000}$ οὕτως 0, 0001; καὶ οὕτως ἐρεξῆς. Ὡς τιθέμενα τὰ μηδενικά πρὸ τῶν χαρακτήρων, σμικρύνουσι τὴν σημασίαν αὐτῶν. Ὅθεν εἰς χαρακτήρ ϵ ὅσον ἡ τοποθεσία αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κόμματος τοσαῦτα μηδενικά ἥθελεν ἔχει ὑποκάτω ἑαυτοῦ ϵ ἂν δηλ. ἐλάβανε μορφήν κλασματικὴν. Οὕτω τὸ 0, 0001 εἶναι $= \frac{1}{10000}$ καὶ τὸ 0, 001 $= \frac{1}{1000}$, καὶ τὸ 0, 01 $= \frac{1}{100}$, καὶ τὸ 0, 1 $= \frac{1}{10}$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τὰ δεκαδικὰ χωροῦσιν ἐναντίως με τοὺς ὀλοσχερεῖς.. ἐκ τοῦ οἷοι, φέρε. εἰπεῖν, τῶν τριῶν χιλιάδων γράφεται οὕτως 3000: ὁ εἰς τοῦ κατέχοντος τὸν τέταρτον χώρον πρὸς τὰ ἀριστερὰ (τὸ τρία χιλιάς) γράφεται οὕτως 0, 003: ὁ εἰς κατέχει τὸν τρίτον χώρον μετὰ τὸ κόμμα, ἡ τὸν τέταρτον συναριθμουμένου καὶ τοῦ ὀλοσχεροῦς (τούτου ἕνεκεν οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τῶν δεκαδικῶν φυλάττουσι τὸν νόμον τὸν γενικὸν τῶν ἀριθμῶν: ὁ εἰςιν ἡ σημασία ἐνὸς χαρακτῆρος αὐξάνει δεκάκις ϵ ὅταν ἐκ τῶν δεξιῶν προχωρῇ πρὸς τὰ ἀριστερὰ μίαν τοποθεσίαν (8). Οὕτως εἰς τὸν ἀριθμὸν 111, 111, ἐκ τῶν ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ὁ πρῶτος χαρακτήρ εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ δευτέρου (ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου (ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου, ὁ τέταρτος τοῦ πέμπτου, καὶ ὁ πέμπτος τοῦ ἑκτου: ὁ εἰς 111, 111 $= 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$: ἔνθα δηλονότι ὁ χώρος τῶν μονάδων εἶναι ὄριον, καὶ τῶν ὀλοσχερῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν.

91. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ἔχουσιν ὀνομασίας, ἐναντίας μετὰς τῶν ὀλοσχερῶν (89) ϵ

τούτου ἔνεκεν ὅσα ἐξ αὐτῶν κατέχουσι· μετὰ τὸ κόμμα τὸν πρῶτον χώρον, ὀνομάζονται δεκαδικὰ καὶ ἑκατοστὰ, ὅσα τὸν δεύτερον, καὶ οὕτως· ἐφεξῆς ἐξ οὗ ἀκολουθεῖ ἡ πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν ἐκ τῶν δεξιῶν (ὡς ὁδηλοῦντι εἰς τοὺς ὀλοσχερεῖς ἐκ τῶν ἀριστερῶν) νὰ ἀλλάττῃ τελείως τὴν σημασίαν αὐτῶν. Οὕτως $0,30=0,3$, καὶ $0,3200=0,32=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{0}{1000}+\frac{0}{10000}$, καὶ $0,321000=0,321$, καὶ $0,0010=0,001$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καθότι ἐπειδὴ εἰς χαρακτηρ δεκαδικὸς αὐξάνεται κατὰ τὴν σημασίαν, ὅσον πλησιάζει εἰς τὸ κόμμα καὶ σμικρύνεται ὅσον αὐτοῦ ἀπομακρύνεται, καὶ ἐπειδὴ, πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν ἀπὸ τῶν δεξιῶν, τὸν ἀπομακρύνει ὅλοτε-λῶς ἀπὸ τοῦ κόμματος ἐπόμενον εἶναι ἡ πρόσθεσις τῶν μηδενικῶν ἀπὸ τῶν δεξιῶν νὰ ἀλλάττῃ ὅλοτελῶς τὴν σημασίαν ἐνὸς δεκαδικοῦ χαρακτηρος. Ὡς αὖ εὐρεθῇ ἐν τῷ μεταξύ μηδὲν τοῦτο θέλει ἀλλάξαι ὅλοτελῶς τὴν σημασίαν τοῦ πρὸ αὐτοῦ χαρακτηρος. Οὕτως τὰ 25,301 προφέρονται εἰκοσιπέντε μονάδες, τριακόσια ἑν χιλιοστὰ. Ἐξ ἐναντίας ὁμως τὰ μηδενικὰ τιθέμενα πρὸ τοῦ χαρακτηρος ἀλλάττουσι τὴν σημασίαν αὐτοῦ (αὐτίθι). Ὡς $0,1 > 0,01 > 0,001$, κ. τ. ξ. ἐκ τοῦ διότι τὸ μὲν $0,1 = \frac{1}{10}$, τὸ δὲ $0,01 = \frac{1}{100}$, καὶ τὸ $0,001 = \frac{1}{1000}$.

92. Συνάγεται λοιπὸν ἐκ τῶν ἐκτεθέντων, ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες ἐργασίαι τῶν δεκαδικῶν πρέπει νὰ γίνωνται, ὥσταν νὰ ἦσαν ἀριθμοὶ ὀλοσχερεῖς. Ὡς αὖ μοι δοθῶν δεκαδικὰ, ἡ ὀλοσχερεῖς μετὰ δεκαδικῶν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ

τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν ἐγὼ δὲν ἔχω νὰ κάμω ἄλλο, εἰμὴ νὰ τὰξω κατὰ σήλην τὰ κόμματα, χάριν τοῦ ὁποῖου δη-
λονότι ἔχουσι νὰ τεθῶσιν ἐπίσης εἰς σήλας καὶ αἱ δεκα-
δικαὶ μονάδες, καὶ αἱ ἑκατοσταί, κ. τ. ξ. τῶν τε ὁλοσχερῶν
καὶ τῶν κλασμάτων καὶ οὕτω νὰ κάμω ἀρχὴν τῆς ἐρ-
γασίας.

Οὕτως ἄν μοι ζητηθῇ τὸ κεφάλαιον τῶν 4852, 701
4,00745 (2,7 + 0,0049) ἐγὼ ἤθελον κάμῃ τὴν
πρόσθεσιν αὐτῶν ὥσταν νὰ ᾔσαν ὁλοσ- 4852, 701
χερεῖς (23), φθάνει μόνον νὰ θέσω 4,00745
εἰς τὸ κεφάλαιον τὸ κόμμα ὑπὸ τῶν 2,7
ἄνω κομμάτων, ὡς ὁρᾶται. 0, 0049

Τοῦτο αὐτὸ ἤθελον ἐκτελέσῃ καὶ 4859,41335
εἰς τὰ ἐξῆς τρία παραδείγματα.

65, 995	498, 650	1, 50
64, 392	1, 350	23, 67
1, 603	500, 000	25, 17
0, 018		
<u>132, 008</u>		

93. Ἄλλ' ὡς ἡ πρόσθεσις οὕτω καὶ ἡ ἀφαίρεσις
τῶν κλασμάτων γίνεται, ὡς ἡ τῶν ὁλοσχερῶν, ὡς ὁρᾶται
ἐνταῦθα, τῶν κομμάτων μόνον τιθεμένων κατὰ σήλην
(92).

23, 67	498, 650	6, 0043	6,
-1, 50	-1, 350	-0, 17	-0, 17
<u>22, 17</u>	<u>497, 300</u>	<u>5, 8343</u>	<u>5, 83</u>

Καὶ ἡ βράχυνος δ' ἐνταῦθα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι ἡ πρόσθεσις, καὶ ἡ τῆς προσθέσεως ἡ ἀφαίρεσις (ὡς δηλονότι καὶ εἰς τοὺς ὁλοσχερεῖς (26)).

§4. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς δὲ τῶν δεκαδικῶν εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ὁλοσχερῶν. Καθότι ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ πολλαπλασιαστέου, δι' ἐκάστου χαρακτήρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ χωρὶς νὰ γίνεται τίς φροντίς περὶ τῶν κομμάτων αὐτῶν· εἰς τὸ γινόμενον ὅμως εἶναι ἀνάγκη νὰ τεθῇ τὸ κόμμα οὕτως ὥστε νὰ διαμείνωσιν ἐκ τῶν δεξιῶν τοσοῦτοι δεκαδικοὶ χαρακτήρες ὅσον εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων, τοῦτε πολλαπλασιαστοῦ καὶ πολλαπλασιαστέου.

Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, τὸ γινόμενον τῶν 60, 24 ἐπὶ τὸ 1, 25. Καὶ ἐπειδὴ $6024 \times 125 = 753000$ · τούτου ἕνεκεν, ἐγὼ πρέπει νὰ διαχωρήσω ἐξ αὐτοῦ τέσσαρας δεκαδικούς χαρακτήρας, εἴτε τοὺς 3000, ὡς τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ περιεχόντων τέσσαρας· ἑκατέρου δηλονότι δύο.

Ὅμοιοντι ἤθελον ἐκτελέσω· καὶ εἰς τὰ ἐξῆς παραδείγματα, ὡς ὁρᾶται.

21, 32	1, 22	43, 3
0, 100103	0, 9	33
6396	1, 098	1311
2132		1311
2132		14421
2,13419596		

Εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα, ὡς ὁρᾶται, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἦν ὁλοσχερὴς· πλὴν τὸ πρᾶγμα ἦν τὸ αὐτὸ,

ὥσαν νὰ ἦσαν ἀμφότεροι κλασματαί: ὅθεν τὸ κόμμα, εἰς τὸ γινόμενον ἐτέθη οὕτως, ὥς νὰ διαχωρήσῃ ἕνα χαρακτηριστῆρα δεκαδικόν.. ἐκ τοῦ διότι δηλονότι ἀμφότεροι οἱ παράγοντες περιεῖχον, ὅχι πλεόν τοῦ ἑνὸς δεκαδικοῦ χαρακτηριστῆρος.

95. Ὁ δὲ λόγος, δι' ὃν περ τὸ κόμμα διαχωρίζεται ταῦτα δεκαδικὰ εἰς τὸ γινόμενον, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ τοῦτε διαιρετέου καὶ διαιρέτου, εἶναι τεθεμελιωμένος ἐπὶ τὸν γενικὸν νόμον τῶν κλασμάτων: ὅτι δηλονότι τὸ γινόμενον πρέπει νὰ περιέχεται εἰς τὸν ἕνα τῶν παραγόντων, ὥς ὁ ἕτερος εἰς τὴν μονάδα (73). Καθότι ἔσω νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{1}{10}$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{100}$.. τότε τὸ γινόμενον τούτων θέλει εἶναι $= \frac{1}{1000} = 0,001$ (90). Ὡς καὶ τὸ 0,1 $\times$ 0,01 πρέπει νὰ μοι δώσῃ διὰ γινόμενον τὸ 0,001 ἔνθα τὸ 0,001 περιέχεται εἰς τὸ 0,01 ὥς τὸ 0,1 εἰς τὴν μονάδα, ἀλλέως ἡ ἀναλογία δὲν ἠθελεν ἔχει χάραν. Ὡς, ὡς ὁράται, τὸ κόμμα ἐτέθη εἰς τὸ γινόμενον οὕτως, ὥς νὰ διαχωρίσῃ τρεῖς χαρακτηριστῆρας δεκαδικούς: ἰσαριθμούς δηλ. μὲ τοὺς εἰς τὸ 0,1, καὶ 0,01.

96. Ἄν ὅμως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δεκαδικῶν, ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος ἦναι δεκαδικός, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁλοσχερὴς καὶ μονάς μετὰ δεκαδικῶν τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ἄλλο δὲν ἠθελεν εἶναι, εἰμὴ ἀπλῶς μετακόμησις τοῦ κόμματος πρὸς τὰ δεξιά τοσούτον ὅσα μηδενικά περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Οὕτως ἂν ζητηθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 6,1234 ἐπὶ τὸν ὁλοσχερῆ 10 ἢ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔσαι 6,1234

$\times 10 = 61,234..$ ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ $6,1234 \times 100$
 $612,34..$ καὶ τὸ τοῦ $6,1234 \times 1000 = 6123,4..$ καὶ
τὸ τοῦ $6,1234 \times 10000 = 61234$. Καθότι ἔντος τοῦ
 $6,1234 = \frac{61234}{10000}$, τὸ $6,1234 \times 10000$ ἦν τὸ αὐτὸ
ὥσάν νὰ ἦν $\frac{61234}{10000} \times 10000 = 61234$. Ἄν ὅμως καὶ
ὁ μὲν 100000 ἦν πολλαπλασιαστῆς, ὁ δὲ $6,1234$ πολ-
πλασιαστέος, τότε τὸ γινόμενον ἤθελεν εἶναι 612340 :
ὅ ἔστιν ὅχι μόνον ἤθελε γένει μετακινηθεῖ εἰς τὸ κόμμα,
ἀλλὰ καὶ προσθήκη ἐνὶς μηδενικοῦ, καὶ οὕτως ἐξεξῆς.

Καὶ ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁμῶς τῶν δεκαδικῶν
βάσις, γίνεται ὡς ἡ τῶν ὁλοσχερῶν (37): ὁ ἔστι καὶ
διὰ τῆς διαγραφῆς τῶν 9, καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως.

97. Πλὴν καὶ ἡ διαιρέσις τῶν δεκαδικῶν εἶναι ἡ
αὐτὴ μὲ τὴν τῶν ὁλοσχερῶν, τὸ κόμμα ὁμῶς τίθεται
εἰς τὸ πηλίκον οὕτως, ὥστε αἱ διαχωριζόμενοι πρὸς τὰ
δεξιὰ χαρακτῆρες νὰ ἦναι ἴσται μὲ τὴν ὑπεροχὴν τῶν δε-
καδικῶν τοῦ διαιρετέου, ὡς πρὸς τὰ δεκαδικὰ τοῦ διαι-
ρέτου, ὡς ὁράται ἐνταῦθα.

$$\begin{array}{r} 1442,1 = 43,7. \\ \hline 33 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,098 = 1,22. \\ \hline 0,9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,13419596 \\ \hline 0,100103 \end{array}$$

Ἄν ὁμῶς καὶ ὁ διαιρετέος ἔχῃ δεκαδικούς χαρα-
κτῆρας ἐλάσσονας τοῦ διαιρέτου, ὥστε νὰ μὴ δίδωται ὑ-
περοχὴ, τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ προσεθῶτι μηδενικά εἰς
τὸν διαιρετέον, ἅπερ δηλονότι ἀλλάττουσιν ὁλοτελῶς τὴν
σημασίαν αὐτοῦ (90) ὡς νὰ δοθῇ ὑπεροχὴ εἰς τὰ δε-
καδικὰ τοῦ διαιρετέου, ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην.

Οὕτως ἂν ἐξητεῖτο ἡ διαιρέσις τῶν $49,1$ διὰ τῶν

20,074: οὕτως τὸ πηλίκον ἤθελεν εἶναι περὶ 2 $\frac{1}{2}$ · ἐγὼ ἔπρεπε νὰ προσθέσω τέσσαρα μηδενικά εἰς τὸν διαιρέτην, μεταβάλλων αὐτὸν εἰς τὸν 49,10000 = 49,1.. καὶ οὕτως ἐκτελὼν τὴν διαίρεσιν, νὰ ἔχω διὰ πηλίκον 244: τουτέστι $\frac{40.10000}{20,074} = 2,44$. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ $\frac{1442,1}{33} = \frac{1442,1}{33,0}$, καὶ $\frac{1.098}{0,9} = \frac{1.098}{0,900}$, καὶ $\frac{40,1}{20,074} = \frac{40.100}{20074}$ τούτου ἔνεκεν δύναται τις πρὶν τῆς διαιρέσεως νὰ προσθήσῃ μηδενικά εἰς θάτερον τῶν ὄρων, ὥστε νὰ ἐξισωθῶσι τὰ δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἀφαιρέσῃ τὸ κόμμα. Καθότι $\frac{1.098}{0,9} = \frac{1.098}{0,900} = \frac{1098}{900} = 1,22$.. καὶ $\frac{40,1}{20,074} = \frac{40.100}{20074} = \frac{40100}{20074} = 2 \frac{8052}{20074} = 2,44$.. καὶ $\frac{0,212}{0,0000100} = \frac{0,2120000}{0,0000100} = 2000$.. ἐκ τοῦ διότι $20000 \times 0,0000100 = 0,212$.

98. Ὁ δὲ λόγος, οἱ ὃν περ τὸ κόμμα τίθεται εἰς τὸ πηλίκον οὕτως, ὥστε νὰ διαιρέσῃ πρὸς τὰ δεξιά τοσούτους χαρακτήρας, ὅση εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τῶν δεκαδικῶν τοῦ διαιρέτου πρὸς τὸν διαιρέτην, εἶναι τεθεμελιωμένος ἐπὶ τὸν γενικὸν νόμον τῆς τῶν κλασμάτων διαιρέσεως: ὅτι δηλ. τὸ πηλίκον πρέπει νὰ περιέχῃ τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρέτης τὸν διαιρέτην (79). Οὕτως ἂν διαιρέσῃ τις τὸ 0,1 διὰ τοῦ 0,01, εἴτε τὸ $\frac{1}{10}$, διὰ τοῦ $\frac{1}{100}$, ἔχει νὰ προκύψῃ πηλίκον 10.. ἐκ τοῦ διότι $\frac{1}{10} = \frac{100}{10} = 10$. ἔνθα τὰ 10 $\frac{1}{100}$

ἔχουσι πρὸς τὸ 1 ὡς τὸ $\frac{1}{10}$ πρὸς τὸ $\frac{1}{100}$.

Ὅθεν ἐπειδὴ καὶ $\frac{1442,1}{33} = 43,7$ (96)· τούτου ἔνεκεν καὶ τὸ πηλίκον 43,7 περιέχει τὴν μονάδα, ὡς ὁ

διαίρετός 1442,1 τὸν διαίρετην 33, ἐν ᾧ ἂν τὸ κόμμα δὲν ἐτίθετο πρὸ τοῦ 87 εἰς τὸ πηλίκον· αὕτη ἡ ἀναλογία δὲν ἐδύνητο νὰ λάβῃ χώραν.

99. Ἄν ὅμως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ὁ διαίρετης ἦναι καὶ ὁλοσχερῆς καὶ μονὰς μετὰ δεκαδικῶν (τότε ἡ διαίρεσις δὲν θίλει εἶναι ἄλλοτι, εἰμὴ μετακομιδὴ τοῦ κόμματος ἐκ τῶν δεξιών πρὸς τὰ ἀριστερά, καὶ τοσούτων χαρακτηρῶν, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ διαίρετης. Οὕτω τὰ $\frac{612,34}{10} = 61,234$.. καὶ τὰ $\frac{612,34}{100} = 6,1234$.. καὶ τὰ $\frac{612,34}{1000} = 0,61234$.. ὡσαύτως καὶ τὰ $\frac{31415026535}{10000000000} = 3,1415926535$.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πᾶν κλάσμα δεκαδικὸν δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς πηλίκον, προκύψαν ἐκ διαίρεσεως διαίρετου ὁλοσχεροῦς συγκειμένου ἐκ μονόδου μετὰ μηδενικῶν. Οὕτω τὸ 0,1 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\frac{1}{10}$, καὶ τὸ 0,9 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὰ $\frac{9}{10}$, καὶ τὸ 0,01, ἢ 0,99 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\frac{1}{100}$, ἢ $\frac{99}{100}$. Ὡς εἰς ἂν μοῖ δοθῇ κλάσμα δεκαδικὸν διὰ νὰ τὸ διαίρῃσω ἄνω καὶ κάτω ἐν ταυτῷ διὰ τοῦ 10 (ἐγὼ βέβαια πρέπει νὰ κάμω οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ φέρω εἰς τὰ ὀπίσω ἓνα χαρακτηρὰ εἰς ἑκατέρους τοὺς ὅρους τὸ κόμμα. Οὕτω τὰ $\frac{40,1 : 10}{20,074 : 10} = \frac{4,01}{2,0074}$. Καὶ ἐξεναντίας ἂν ζητηθῇ νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ 10, ἐγὼ βέβαια δὲν ἔχω νὰ κάμω ἄλλο, εἰμὴ νὰ φέρω εἰς τοῦμπροσθεν ἓνα χαρακτηρὰ εἰς ἑκατέρους τοὺς ὅρους τὸ κόμμα. Οὕτως $\frac{40,1 \times 10}{20,074 \times 10} = \frac{401}{200,74}$. Ὅμοιοντι ἤθελον ἐκτελέσει·

καὶ ἂν ὁ πολλαπλασιασθῆς περιεῖχε πλεόν τοῦ ἐνὸς μηδενικοῦ.

Συμπέρασμα ἐντεῦθεν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ κόμματος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ πολλαπλασιασμός, ἢ διαίρεσις διὰ τοῦ 10.

100. Ἄν ὅμως καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες ἦναι πολλοὶ τότε δὲν θέλει σχεδὸν ἀμαρτήσῃς εἰς ἀπορρίψῃ τοὺς ἐσχάτους, ὡς σχεδὸν μηδὲν σημαίνοντας. Οὕτως εἰς τὸ δεκαδικὸν 0,890002, ἂν τις ἀπορρίψῃ τὸ 2, αὐτὸς δὲν θέλει σμικρύνει τὴν ποσότητα πλεόν τῶν $\frac{2}{1000000}$.. πρᾶγμα δηλονότι εὐκαταφρόνητον ὄθεν καὶ ὁ σμικρυσμὸς τῆς ποσότητος ἀνεπαίσθητος.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ πάντοτε ἤθελεν εἶναι ἀμάρτημα τὸ τοιοῦτον (ὅσον σμικρὰ καὶ ἂν ἦναι ἢ διαγραφείσα ποσότης τούτου ἕνεκεν, ὅταν ἦναι δυνατόν, πρέπει τις νὰ τὸ ἐπιδιορθῇ ὅπως οὖν, ὕπερ ὑφίσταται εἰς τὸ νὰ προσθέτῃ εἰς τὸν ἔσχατον τῶν καταλειμμένων χαρακτῆρων μονάδα εἰς ἂν ὁ πρῶτος τῶν διαγραφέντων ὑπερέχῃ τὸν 5. Οὕτως ἂν εἰς τὸ δεκαδικὸν 0,123456789 διαγράψῃ τις τοὺς ἐσχάτους τέσσαρας χαρακτῆρας, τὰ 6789 λέγω (τὸ ἀμάρτημα θέλει εἶναι νὰ ἔλαττον ἐνὸς $\frac{1}{10000}$.. πλην ἤθελε σμικρυνθῇ ἔτι εἰς ἂν εἰς τὸν ἔσχατον χαρακτῆρα τοῦ 0,12345 προσεθῇ μονὰς .. ἐκ τοῦ διότι τὸ 0,123460000 πλησιάζει εἰς τὸ 0,123456789 μᾶλλον, ἢ τὸ 0,123450000. Ὡς εἰς ἂν ὁ πρῶτος τῶν διαγραφομένων χαρακτῆρων ἦναι ἀνώτερος τοῦ 5, ἢ καὶ 5 μετ' ἄλλων ἀκολουθῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῆς μονάδος εἰς τὸν ἔσχατον τῶν διαλειπομένων, θέλει εἶναι ἐπικερδιστέρα. Ἐν γένει ὁμως

εἰς τοὺς κοινούς λογαριασμοὺς εἶναι σπανιωτάτη ἡ χρῆσις τῶν ἑξ̄ δεκαδικῶν χαρακτήρων καὶ τρεῖς μόνοι ἤθελον εἶναι ἱκανώτατοι.

Εἰ δὲ καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα περατοῦνται εἰς μηδενικά (τότε βέβαια ἡ διαγραφὴ τῶν μηδενικῶν, ὡς μηδὲν σημαίνοντων (91), εἶναι παντελῶς ἀθῶα. Οὕτω $0, 123460000 = 0, 12346$.

101. Ἐκτὸς ὅμως ταύτης τῆς ὥραιας ιδιότητος τῶν δεκαδικῶν, πρόσεστιν εἰς αὐτὰ καὶ ἄλλη, ἣτις εἶναι νὰ μεταβάλλωσιν εἰς δεκαδικὰ ἅπαντα τὰ κλάσματα, χάριν τοῦ ὁποίου δηλονότι, ὡς καὶ τὰ συνεχῆ (85), ἐκλαμβάνουσι τὰ σκιαρὰ τῶν κλασμάτων, ὅπερ ἐφεδράζει εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσῃ τις τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ 10, ἢ 100, ἢ κ. τ. ξ. καὶ νὰ ἐπακολουθῇ τὴν διαίρεσιν. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ διὰ τοῦ 10 πολλαπλασιασμός ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δεκάκις μεγεθυσμός τοῦ πηλίκου (τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ δοθῇ ἡ ὀρθὴ σημασία εἰς αὐτὸ, εἶναι ἀνάγκη νὰ ταχθῇ εἰς τὸν χώρον τῶν δεκαδικῶν. Καὶ ἰδοὺ πῶς γίνεται αὕτη ἡ μεταβολή.

Ἡμεῖς εἶδομεν ὅτι ἂν διαφθερῇ ὁ ἀριθμὸς 753410 διὰ τοῦ 125 (βλ. πηλίκον 6027, καὶ λείψανον $\frac{55}{125}$ (44), ὅπερ ἀφήσαμεν ἐκεῖ εἰς ταιαύτην μορφήν. Τώρα ὅμως ἐγὼ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ 10, καὶ ἔχω $= \frac{350}{125} = 2 \frac{100}{125}$. Ὡς προσθεόμενος τὰ 2 πηλίκον εἰς τὸ πρῶτον, ἔξω 60272. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐγὼ διὰ τούτου ἠῤῥησα τὸ πηλίκον δεκάκις (τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ δώσω εἰς αὐτὸ τὴν ὀρθὴν σημασίαν, πρέπει νὰ δια-

χωρίσω τὸν τελευταῖον χαρακτήρα διὰ τοῦ κόμματος, καὶ ἔξω διὰ ὀρθοῦ πηλίκου 6027, 2 $\frac{100}{125}$. Τώρα πολλαπλασιάζω αὐτὴν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{100}{125}$ διὰ τῶν 10, καὶ διαφῶν ἔχω πηλίκον 8, ὅπερ προσθίμενος εἰς τὸ πηλίκον, ἔχω 6027, 28. Ὡς συνάγω ὅτι τὰ $\frac{753410}{125} = 6027, 28$.

Ἔτι ἡμεῖς εἶδομεν ὅτι $\frac{62}{7} = 8\frac{6}{7}$ (41). Ὡς αὖ θελήσω νὰ μεταβάλω τὸ $\frac{6}{7}$ εἰς δεκαδικὰ, διὰ νὰ ἰδῶ σαφεστέρως τὴν σημασίαν αὐτῶν (ἰδοὺ τί ἐκτελῶ. Πολλαπλασιάζω τὰ 6 διὰ τῶν 10.. διαφῶ τὸ γινόμενον διὰ τῶν 7.. τὸ δὲ λείψανον 4 πολλαπλασιάζω αὐτὴν διὰ τῶν 10.. καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν διὰ τῶν 7 πολλαπλασιάζω αὐτὴν διὰ τῶν 10 τὸ λείψανον 5, καὶ ἔδω

8, 85gr
ἵσταμαι. Καὶ ἔχω διὰ πηλίκον $\frac{62}{7} = 8,85gr$
πλὴν ὅχι ἐξηκριβωμένους.

Ὡς αὕτη ἡ μέθοδος, ὡς ὁρᾶται, κεῖται εἰς τὸ νὰ προσέγῃ τις ἐν μηθευτικὸν εἰς ἕκαστον λείψανον, διὰ νὰ γίνηται δυνατὴ ἡ διαίρεσις.. καὶ ἐπειδὴ διὰ τούτου ἀποκαθιστᾷ τὸ λείψανον δεκάκις μείζον ἑαυτοῦ (θελεῖ ἐπιδιορθῆναι τὸ ἀμάρτημα, σμικρύνων τὸ πηλίκον διὰ τῆς μετὰ τοῦ κόμματος τάξεως τῶν δεκαδικῶν.

102. Πολλάκις ὅμως συμβαίνει, ἐνῶ τις μεταβάλλει ἐν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, νὰ πίπτῃ εἰς πηλικά μερικὰ ὅμοια πρὸς ἀλλήλα, ἅπερ καὶ περιόδικὰ κλάσματα

ονομάζω, ἔνθα ὁηλονότι λυτροῦνται τὶς πλεον τοῦ κόπου τῆς θαιρέσεως, ἰδὼν ἅπαξ τὸν νόμον τῆς προόδου.

Οὕτω τὸ $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$, καὶ τὰ $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$, καὶ τὸ $\frac{1}{9} = 0,1111\dots$, ὅθεν καὶ τὸ $\frac{1}{99} = 0,010101\dots$, καὶ τὸ $\frac{1}{999} = 0,001001001\dots$, καὶ τὰ $\frac{3}{11} = 0,272727\dots$, καὶ τὰ $\frac{12}{37} = 0,324324\dots$, καὶ τὸ $\frac{1}{7} = 142857\dots$

Ἐνίστε ὅμως ἡ περίοδος ἄρχεται ὅχι εὐθὺς ἀλλὰ μετὰ δύο, ἢ τρεῖς χαρακτῆρας. Οὕτω τὰ $\frac{5}{12} = 0,41666\dots$ τὸ $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$ καὶ τὰ $\frac{7}{12} = 0,58333\dots$, καὶ τὰ $\frac{16}{25} = 0,64$. Δῆλον ὅμως ὅτι ὅσας περιόδους καὶ ἂν λάθῃ τις ποτὲ δὲν θέλει φθάσει εἰς τὴν ἀληθῆ σημάσιαν τοῦ κλάσματος.

103. Πολλὰ ὅμως τῶν τειούτων κλασμάτων μεταβάλλονται εἰς ἐξηκριθωμένα δεκαδικά. Καθότι τὸ $\frac{1}{2} = 0,5$.. καὶ τὸ $\frac{1}{4} = 0,25$.. καὶ τὸ $\frac{1}{5} = 0,20$.. καὶ τὰ $\frac{3}{4} = 0,75$.. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ $\frac{10}{20} = 0,5$, καὶ τὰ $\frac{10}{40} = 0,25$, καὶ τὰ $\frac{30}{40} = 0,75$, ἐξ οὗ ὁδηλονότι ἀποκαθίσταται ψηλαφητὸν τὸ, ἂν ἐν κλάσμα πολλαπλασιασθῇ ὁμοῦ ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἢ σημασία αὐτοῦ διαμένει ἡ αὐτή. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ μὲν κλάσμα $\frac{35}{125} (101)$ μετεβλήθη, ὡς εἶδομεν, εἰς δεκαδικὰ ἄνευ τινὸς λειψάνου: ὃ ἐστὶ $\frac{35}{125} = 0,28$.. τὸ δὲ $\frac{1}{8} = 0,125$. Καὶ εἶναι εὐκόλον νὰ προβλέψῃ τις, ποῦ ἔχει

τούτο να επακολουθήσῃ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἐνταῦθα ὁ ἀριθμητὴς ἔχει παράγοντα τὸ 10, οὗ τινος αἱ διαιρέται εἶναι 2 καὶ 5 (ὁ δὲ παρονομαστὴς ἔχη τοὺς αὐτοὺς παράγοντας, 2 ἢ 5 λέγω, ἢ τὰ τούτων πολλαπλάσια τὸ κλάσμα ἐξ ἀναγώγου θέλει τραπεῖ εἰς ἀνωγικόν.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι ἀντὶ τῆς λάθης τοῦ $\frac{1}{2}$ μιᾶς μονάδος: ἐνὸς γρασίου, φέρε εἰπεῖν, ἡ μιᾶς ὀργυῖας, ἢ κ. τ. ξ. αὐτὲς δύναται νὰ λάθῃ τὰ 0, 5.. καὶ ἀντὶ τῶν $\frac{3}{4}$, τὰ 0, 75.. καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{4}$, τὰ 0, 25.. καὶ ἀντὶ τοῦ $\frac{1}{5}$, τὰ 0, 20.

104. Ἄν ὅμως καὶ ᾗται εὐκολωτάτη ἡ μεταμόρφωσις παντὸς κλάσματος εἰς δεκαδικὸν (πλὴν ὅχι καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἐξαιρουμένων τῶν ἐξηκριθωμένως δεκαδικῶν (103) καὶ τῶν περιοδικῶν. Καθότι τὸ $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, καὶ τὸ $0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$. Ὅταν ὅμως τὸ δεκαδικὸν ᾗται μὴ ἐξηκριθωμένως (ἀλλ' ὡς ἔγγιστα τότε τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους τὰς λύσεις, καὶ μένει ἀπροσδιόριστον. Οὕτως ἕκαστον τῶν δεκαδικῶν $0,751\dots, 0,752\dots, 0,753\dots$, εἶναι $= \frac{3}{4}$ μετὰ τινος κλάσματος ἀγνώστου.

Τὰ περιοδικὰ ὅμως δεκαδικὰ ἐπιστρέφονται ἄριστα εἰς τὰ ἀρχικά διὰ τῆς τῶν 9 διαιρέσεως. Πλὴν ἐπειδὴ καὶ ταῦτα εἶναι δύο εἰδῶν: ὁ ἐστὶ ἡ ἀρχοῦται ἐκ τοῦ κόμματος, ἢ μετέπειτα (102) (τούτου ἕνεκεν καὶ ἡ μέθεξις ᾗθελεν εἶναι διττή. Καὶ εἶναι αὕτη. Ἡμεῖς εἶδομεν

(αὐτόθι) ὅτι $\frac{1}{9} = 0,1111\dots$ καὶ $\frac{1}{99} = 0,010101\dots$, καὶ $\frac{1}{999} = 0,001001\dots$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡς εὐ-
 ναιται τις νὰ ἐκλάβῃ ἐκάστην περίοδον δεκαδικῶν ὡς γινώ-
 μενον ἐξ ἑαυτῆς καὶ τῆς μονάδος διαιρουμένης διὰ τοσοῦ-
 των 9, ἐξ ὧων χαρακτηρῶν σύγκειται ἡ περίοδος. Οὕ-
 τως εἰς τὸ δεκαδικὸν $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ (αὐτόθι), συγ-
 κειμένης τῆς περιόδου ἐξ ἐνὸς χαρακτηρῶς, δύναται τις νὰ
 τὴν ἐκβάλῃ ὡς γινόμενον ἐκ τοῦ 6 καὶ 0,111... ὥθεν
 $0,666\dots = 6 \times 0,111\dots = 6 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$.. ὡσαύτως
 καὶ τὸ $0,2727\dots = 27 \times 0,0101\dots = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$,
 ὡς εἶδομεν εἰς τὸν (αὐτόν).. καὶ τὸ $0,342342\dots =$
 $\frac{342}{999} = \frac{4}{111}$.. καὶ τὸ $0,571428571428\dots = \frac{571428}{999999}$
 $= \frac{392857}{592057} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$. Ἄν ὅμως καὶ ἡ περίοδος ἀρχηται
 ὅχι ἐκ τοῦ κόμματος τότε εἶναι δυνατόν νὰ ἐκληφθῇ τὸ
 δεκαδικὸν ὡς κεφάλαιον, ἢ διαφορά περιοδικῶν, καὶ μὴ.
 Οὕτω τὸ $0,58333\dots = 0,33333\dots + 0,25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{7}{12}$... καὶ τὸ $0,21333\dots = 0,33333\dots - 0,$
 $12 = \frac{1}{3} - \frac{3}{25} = \frac{16}{75}$.. καὶ τὸ $0,1666\dots = 0,6666$
 $\dots - 0,5 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Πλὴν ἢν δυνατόν ἀμέσως
 νὰ φθάσῃ τις εἰς τὸ αὐτὸ συναγόμενον ὅδε πως. $0,1666\dots$
 $= 0, \frac{16}{9} = 0,1 \frac{2}{3} = \frac{1}{10} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. Ὡς
 συνάγῃ ὅτι ταῦτο ἐκτυλίχθη ἐκ τοῦ $\frac{1}{8}$. Πλὴν ἢν ἁδηλον
 εἰς ἐμὲ ἂν ἐν δοθὲν δεκαδικόν, ὡς τὸ 0,125, ἢν ἐξηκρι-
 βωμένως, ἢ ὡς ἔγγιστα. Καθότι ὡς $\frac{1}{8} = 0,125$ οὕτω
 $\frac{100}{799} = 0,125\dots$

105. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ τὰ δεκαδικὰ εἶναι εὐκο-
λώτατα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας (92).. καὶ ἔπειδὴ
εἰς τὸν κοινωνικὸν ἡμῶν βίον, ἡμεῖς ἔχομεν ἀναγκαιῶς
μονάδας μερίζοντας διηρημένους εἰς εἰλάσσοντας (60) τοῦτου
ἕνεκεν ἤθελεν εἶναι εὐκταῖον ἂν ἡ τούτων διαιρέσεις ᾖ
εἰς 10, ἢ 100, ἢ κ. τ. ξ. Πλὴν δὲν ὑπῆρξεν ἐν τοιοῦ-
τον, ἐξαιρεῖται μόνον ἡ μὴ τῶν Ἑλλήνων.

Οἱ Γάλλοι λοιπὸν τὴν σήμερον ἔασαντες τὰ ἑαυτῶν
μέτρα ἀντεκατέστησαν νέα, διαιρέσαντες καὶ υποδιαιρέ-
σαντες τὰς μονάδας αὐτῶν εἰς δεκαδικὰ. Οὕτω διαιρέ-
σαντες τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ γηῖνου μεσημβρινοῦ, εἴτε ἀπὸ τοῦ ἰση-
μερινοῦ μέχρι τοῦ πόλου, εἰς 30784440 ὅσα μέρη, ὠνό-
μασαν αὐτὰ μέτρα καὶ ἐπομένως $1^{\circ} = 307844,4$
μέτροις (αὐτόβι). Τὴν μονάδα πάλιν τοῦ ὅγκου ὠνόμα-
σαν $\varsigma\epsilon\rho\rho\acute{o}\nu$, ἢ $\kappa\upsilon\beta\epsilon\kappa\acute{o}\nu$ μέτρον (τὴν δὲ τῆς δια-
χωρήσεως λίτραν τοῦ δὲ βάρους γράμμα. Καὶ
ἐπομένως ἡ μονὰς τῆς ἐκτάσεως, ἡ μέτρον $= 3^{\text{ποδ}} 117\rho$
 $44 = 0,513074^{\text{εργ}}$, ἐξ οὗ ὀργυιὰ $1 = 1,94903$
μέτ.

τοῦ ὅγκου, ἢ $\varsigma\epsilon\rho\rho\acute{o}\nu = 29,173$

δακ. κυβικα.

τῆς διαχωρήσεως, ἡ λίτρα $= 50,412 = \frac{1}{10}$ μέτρον
κυβικοῦ

τοῦ βάρους, ἡ γράμμα $= 18,83^{\text{κοκ.}}$ ἐξ οὗ ἐν μέ-
τρον κυβικόν

νεροῦ $= \begin{matrix} \text{λιτ} & \delta\gamma & \delta\rho & \text{κοκ} \\ & 14 & 0 & 14. \end{matrix}$

Κ Ε Φ. Ι'.

Περὶ τετραγώνων, καὶ τετραγωνικῶν ῥιζῶν, ἢ περὶ δυνάμεων.

106. **Η**μεῖς μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ὅλα (πλὴν ἅπαντας ὡς ὅλα συγκείμενα ἐκ μερῶν ἱσομεγεθῶν, ἢ μονάδων. Δὲν εἶναι ὁμοῦς δύσκολον γὰρ θεωρήσῃ τις αὐτοὺς καὶ ἀπολύτως τῶν κοινῶν μονάδων, εἰς τρόπον ὅτι ἕκαστος αὐτῶν γὰρ σύγκηται ἐκ διαφορετικῶν μονάδων: ὅπερ ὑποδυναμει μὲ τὸ ἀντί γὰρ θεωρήσῃ τις τοὺς ἀριθμοὺς ὡς κεφάλαια, γὰρ τοὺς θεωρῇ ὡς γινόμενα (κινούμενα ὁμοῦς ἴσων ἀλλήλοις παραγόντων. Καὶ τότε λοιπὸν ἀλλάσσουσιν ὄνομα οἱ ἀριθμοί, καὶ ὀνομάζονται τετράγωνα, ὡς πρὸς τὸν ἐξ οὗ δηλονότι παράγονται: παράγοντα αὐτῶν (31). Οὕτως ἂν ἐγὼ λάβω εἰς τὰ δύο (ἐξω 4.. καὶ ἂν τρεῖς τὰ 3, 9.. καὶ ἂν τετράκις τὰ 4, 16.. καὶ ἂν δεκάκις τὰ τὰ 10, 100, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὰ μὲν 4 λοιπὸν ὀνομάζονται τετράγωνον τῶν 2 (τὰ δὲ 9 τῶν 3 (τὰ δὲ 16, τῶν 4 (τὰ δὲ 10, τῶν 100, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καὶ γράρονται οὕτω $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $10^2 = 100$. Οὕτω λοιπὸν θεωρούμενοι οἱ ἀριθμοὶ ὀνομάσθησαν τετράγωνα, ὡς ἐκ τῆς γεωμετρίας βέβαια, ἐνθα ἐκεῖ τὸ τετράγωνον εἶναι σχῆμα ἔχον τέσσαρας πλευράς ἴσας ἀλλήλοις, καὶ γωνίας ὀρθὰς (ὡς δηλονότι καὶ οἱ ἀριθμοὶ θεωρούμενοι τετραγωνικῶς, ἐνθα δηλ. τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἔχουσιν ἴσας πρὸς ἀλλή-

λας τὰς πλευράς. Οὕτω τὸ $3^2 = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$: ἴσον δηλονότι
 μὲ ἑννέα μονάδας τετραγωνικῶς θεωρουμένας. Ἀλλ' ἐ-
 πειδὴ καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν δύναται τις νὰ τὸν ἐκ-
 λάσῃ ὡς πρόσθεσιν (29) (τούτου ἕνεκεν καὶ ἐγὼ θύναμαι
 νὰ εἰπῶ $2+2=4=2^2$, καὶ $3+3+3=9=3^2$, καὶ 4
 $+4+4+4=16=4^2$: ὁ ἐς τὸ μὲν 4 τετράγωνον ἔχει
 μονάδας τὰ 2 (τὸ δὲ 9, τὰ 3 (τὸ δὲ 16, τὰ 4 (τὸ δὲ
 100 τὰ 10, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὅπερ εἶναι ἴδιον τῶν ἀ-
 ριθμητικῶν τετραγώνων. Καθότι εἰς τὴν γεωμετρίαν: ἡ
 αὖ θέλης εἰς τὸ συνεχὲς ποσόν, αἱ μονάδες τῆς πλευρᾶς
 τοῦ τετραγώνου διαφέρουσιν οὐσιωδῶς τῶν μονάδων τοῦ
 τετραγώνου (ἐν ᾧ εἰς τὰ τετράγωνα τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι
 τῆς αὐτῆς φύσεως εἰς ἑκάτερα τὰ μέρη.

107. Ἄν ὅμως ἀντὶ νὰ θεωρῇ τις πῶς εἰς ἀριθμὸς
 γεννᾶται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν ἑνὸς ἄλλου,
 θεωρῇ τὸ ἀνάπαλιν: ὅς τις τὸ, εἰς δύο εἰς ἀριθμὸς ἐκλη-
 φθῆις ὡς τετράγωνον, ὁποῖαν ἔχει πλευρὰν τετραγωνικὴν
 τότε οὗτος ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὀνομάζεται **ρίζα τε-**
τραγωνική, ἢ ἀπλῶς **ρίζα**. Οὕτως ἡ ρίζα τῶν 4
 εἶναι τὰ 2.. καὶ ἡ ρίζα τῶν 9, τὰ 3.. καὶ ἡ ρίζα τῶν
 25, τὰ 5, καὶ γράφεται οὕτως $\sqrt{}$: τουτέστι $\sqrt{4}=2$,
 καὶ $\sqrt{9}=3$, καὶ $\sqrt{100}=10$. Ὡς ἐπειδὴ ρίζα τετρα-
 γωνικὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι εἰς ἀριθμὸς, ὅς τις πολλαπλα-
 σιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν γεννᾷ τὸν εἰρημένον ἀριθμὸν (τούτου
 ἕνεκεν ἐξαγαγεῖν τὴν ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ θέλει νὰ εἰπῇ νὰ
 εὑρῇ τις ἕνα ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν
 νὰ γεννᾷ τὸν δοθέντα, ὅπερ δηλ. εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ
 σαφὴς διαίρεσις, ὡς ἐναντία τοῦ τετραγωνισμοῦ (105).

Ὡς φυσικῶς πως ἐπεται τὸ, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα νὰ περιέχῃ τὴν μονάδα ὡς τὸ τετράγωνον τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν (29): ὡς, φέρε εἰπεῖν, τὰ 5 περιέχουσι τὸ 1 ὡς οὕτω καὶ τὰ 25 τὰ 5.

108. Τώρα ἐπειδὴ καὶ ἐν τετράγωνον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα πολλαπλασιασθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν: ἡ αὖ θέλῃς μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης (πλὴν ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἡ δυνάμεως (τούτου ἕνεκεν καθ' ἑαυτοὺς μὲν οἱ ἀριθμοὶ θεωρούμενοι ὀνομάζονται πρώτης δυνάμεως, ἡ βαθμοῦ (δευτέρας δὲ, ἡ δευτέρου βαθμοῦ τὰ τετράγωνα αὐτῶν, εἴτε οἱ γεννώμενοι ἀριθμοὶ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως. Ἰὲς ἡ λέξις ἀριθμὸς πρώτης δυνάμεως ἡ βαθμοῦ, καὶ ρίζα τετραγωνικὴ εἶναι λέξεις συνώνυμοι ὡσαύτως καὶ ἡ λέξις ἀριθμὸς δευτέρας δυνάμεως, ἡ βαθμοῦ εἶναι λέξις συνώνυμος μὲ τὴν λέξιν τετράγωνον.

Ἄλλ' αὖ ἐν γινόμενον ἀναγερόμενον ὡς πρὸς τὸν ἐξ οὗ παρήχθη παράγοντα ὀνομάσθῃ δευτέρα δύναμις. καὶ αὖ ἐγὼ δύναμαι ὅχι ὀλιγώτερον νὰ πολλαπλασιάσω πάλιν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἴδιον παράγοντα: ἡ αὖ θέλῃς τὴν δευτέραν δύναμιν ἐπὶ τὴν πρώτην (δήλον ὅτι τὸ νέον γινόμενον θέλει εἶναι ἀνωτέρας δυνάμεως, ἡ βαθμοῦ. καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται τρίτης δυνάμεως, ἡ βαθμοῦ, ἡ κύβος. Οὕτως εἰς τὸ $5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 = 125$, τὰ μὲν 5 εἶναι πρώτης δυνάμεως, τὰ δὲ 25 δευτέρας, τὰ δὲ 125 τρίτης, ἡ κύβος. Ὅθεν τὰ 5 εἰμέν καὶ ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὰ 25 ὀνομάζεται τετραγωνικὴ ρίζα, εἰδὲ ὡς πρὸς τὰ 125, κυβικὴ καὶ γράφε-

ται οὕτως $\sqrt[3]{125}=5$. Ὡσαύτως ἐπειδὴ $2 \times 2 \times 2 = 8$, καὶ $3 \times 3 \times 3 = 27$, καὶ $4 \times 4 \times 4 = 64$ τούτου ἔνεκεν $\sqrt[3]{8}=2$, καὶ $\sqrt[3]{27}=3$, καὶ $\sqrt[3]{64}=4$, καὶ προφέρεται ῥίζα κυβική, τὰ μὲν 2 τῶν 8, τὰ δὲ 3 τῶν 27, τὰ δὲ 4 τῶν 64.

Τὰ ὀνόματα λοιπὸν τετράγωνον καὶ κύβος ἐλήφθησαν ἐκ τῆς γεωμετρίας (τὰ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης δυνάμεως εἶναι τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ ἀλγέβρας.

Δήλον ὅμως ὅτι δίδονται καὶ ἀνωτέρων δυνάμεων, ἢ βαθμῶν ἀριθμοί: τετάρτης δηλονότι, καὶ πέμπτης, κ. τ. ξ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ εἶναι τετάρτης δυνάμεως, καὶ ὁ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ πέμπτης, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡσαύτως καὶ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ εἶναι δευτέρας δυνάμεως, καὶ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ τρίτης δυνάμεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$. Ὡς πολλὰπλασιάζων τις ἓνα ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν ἅπαξ, δὶς, τρίς, ἔξει τὰς δυνάμεις β', γ', κ. τ. ξ. Οὕτως

α'. β'. γ'. δ'. ε'. ς'. ζ'. η'. θ'.

2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125

109. Ο' ἑκάρτεσις ὅμως ἐφεῦρε τρόπον ἄριστον διὰ νὰ ἐμφανίζῃ ἓνα ἀριθμὸν ὁποίας δυνάμεως, ἢ βαθμοῦ εἶναι, ὅς τις εἶναι νὰ γράφῃ τις ἄλλον ἀριθμὸν ἐπ' αὐτοῦ, εἰς ὅπερ ἤθελε δοθῇ ὄνομα ἐκ θ' ἐτ' ης. Οὕτω τὸ μὲν 1 ἐκ-

θέτης σημαίνει ὅτι ὁ ὑπ' αὐτὸ ἀριθμὸς εἶναι τῆς πρώτης
δυνάμεως (τὰ δὲ 2, δευτέρας (τὰ δὲ 3, τρίτης, καὶ
οὕτως ἐφεξῆς.. Οὕτω τὸ $2^2 = 2 \times 2 = 4$, καὶ τὸ $2^3 =$
 $2 \times 2 \times 2 = 8$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡς αὖν εἰς ἀριθμὸς
ἔχη ἐκδέτην 10 (τοῦτο θέλει νὰ εἰπῇ νὰ πολλαπλασια-
σῇ ἐφ' ἑαυτοῦ ἐννεάκις: ὁ εἰς πάντοτε ἦτον ἅπαξ τοῦ
ἐκθέτου.. ἐκ τοῦ οἷόςτι $2^2 = 2 \times 2$ καὶ $2^5 = 2 \times 2 \times 2$
καὶ $2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$
 1024 (καὶ ἐντεῦθεν $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$, κ.τ.ξ.

110. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λοιπὸν ἐκτεθέντων ἡ-
θελε μαυτεύσαι τις, ὅτι δύο εἰδῶν εἶναι μόνον τὰ περὶ τῶν
δυνάμεων προβλήματα: α'. δηλ. δοθέντος ἐνὸς ἀριθμοῦ,
νὰ εὑρῇ τις τὴν τοιάνδε αὐτοῦ δύναμιν, ἢ βαθμὸν.. β'.
δοθείτης τῆς τοιᾶςδε δυνάμεως νὰ εὑρῇ τὴν ῥίζαν αὐτοῦ.
Πλὴν δὲν εἶναι ὀλιγώτερον σαφές ὅτι τοῦ μὲν πρώτου εἰ-
δους τὰ προβλήματα δεῖνται οὐδεμιᾶς διδασκαλίας, ὡς
οὗτα ἀπλοῦς πολλαπλασιασμὸς τοῦ αὐτοῦ παράγοντος
(106). Οὕτως ἄν τις ζητήσῃ τὸ τετράγωνον τῶν 5 (τοῦτο θέλει εἶναι $5 \times 5 = 25$ καὶ ἂν τὸ τετράγωνον τῶν
10 (τοῦτο θέλει εἶναι $10 \times 10 = 100$ καὶ ἂν τὸ τετρά-
γωνον τοῦ $\frac{1}{2}$ (τοῦτο θέλει εἶναι $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ καὶ ἂν τὸ
τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{10}$) τοῦτο θέλει εἶναι $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$. Ο-
μοίοντι ἡθελε λεχθῇ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν δυνάμεων, ἢ βαθμῶν.

Δὲν ἀκολουθεῖ ὁμῶς τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ προβλήμα-
τα τοῦ δευτέρου εἰδους, ὅπερ καὶ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης
ὀνομάζεται: ἐνταῦθα λέγω εἶναι ἀναγκαία καὶ τις διδα-
σκαλία τῆς μεθόδου. Ὡς ἀρξώμεθα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τε-

τραγωνικῆς ρίζης: ὁ ἐστὶ θεθέντος ἐνὸς ἀριθμοῦ, νὰ εὕρῃ τις ὅποιος ἀριθμὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτοῦ, γέννη τὸν θεθέντα.

111. Σημειωτέον ὅμως πρῶτον ταῦτα.. α'. ὅτι ἐξαιτίας τῆς μονάδος εἶναι τὸ νὰ ἦναι ἡ αὐτὴ πάσης οὐνάμεως: τουτέστι $1 \times 1 = 1$, καὶ $1 \times 1 \times 1 = 1$ (καὶ διὰ τοῦτο $\sqrt{1} = 1$, καὶ $\sqrt[5]{1} = 1$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς).

β'. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐξ ἐνὸς χαρακτῆρων δὲν ὑπερβαίνει τοὺς δύο χαρακτῆρας. Καθότι τὸ τετράγωνον τοῦ 10, ὅς τις εἶναι ἀριθμὸς ἐκ δύο χαρακτῆρων, εἶναι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῶν ἐκ τριῶν χαρακτῆρων συγκεῖμενος, εἴτε $= 100$. Ἰδού καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἐξ ἐνὸς χαρακτῆρος ἀριθμῶν εἰς τοῦτον τὸν πίνακα.

ἀριθμοὶ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Τετράγωνον αὐτῶν	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ὅς τις δηλονότι εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ μέρος τοῦ Πυθαγορικοῦ πίνακος (30), εἴτε τὰ γινόμενα τῶν ἴσων μόνον παραγούτων. γ'. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκ δύο χαρακτῆρων ἔχει ὅρια τρεῖς καὶ τέσσαρας χαρακτῆρας. Καθότι τὸ μὲν τοῦ πρώτου αὐτῶν: τοῦ 10 τὸ τετράγωνον, εἶναι $= 100$ (τοῦ δὲ τοῦ ἐσχάτου: τοῦ 99, εἶναι $= 9801$).

δ'. Ὅτι τὸ τετράγωνον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκ τριῶν χαρακτῆρων ἔχει ὅρια πέντε καὶ ἕξ χαρακτῆρας. Καθότι τὸ μὲν τοῦ πρώτου αὐτῶν: τοῦ 100 τετράγωνον, εἶναι

$= 10000 < \tau\acute{o} \delta\acute{\epsilon} \tau\omicron\upsilon \epsilon\sigma\chi\acute{\alpha}\tau\omicron\upsilon: \tau\omicron\upsilon \ 999$, εἶναι $= 998001$. Καὶ οὕτως ἀκολουθῶς.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν α'. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐξ ἐνὸς ἢ δύο χαρακτήρων συγκείμενος, ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν συγκειμένην ἐξ ἐνὸς μόνου χαρακτήρος: τουτέστιν ἐκ μόνων μονάδων.

Συμπέρασμα β'. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐκ τριῶν, ἢ τεσσάρων χαρακτήρων συγκείμενος, ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν συγκειμένην ἐκ δύο μόνων χαρακτήρων: τουτέστιν ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.

Συμπέρασμα γ'. ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐκ πέντε, ἢ ἑξ χαρακτήρων συγκείμενος, ἔχει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐκ τριῶν χαρακτήρων. Ἀλλὰ ταῦτα πάντα — τί ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν συγκειμένην ἐκ τσοῦτων χαρακτήρων, ὅσα ζεύγη ἔχει αὐτὸς οὗτος;

112 Ἄν λοιπὸν καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς, οὗ τινος δηλονότι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, σύγκηται ἐκ δύο χαρακτήρων < τότε δεῖται οὐδεμιᾶς διδασκαλίας... ἐκ τοῦ διότι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ πίνακος (111). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐκεῖ αἱ ρίζαι εἶναι μόνον ἐννέα < οἱ δ' ἀριθμοὶ οἱ ἐκ δύο καὶ ἐνὸς χαρακτήρος εἶναι 99 < τοῦτο ἐμφανίζει ὅτι ἡ ρίζα αὐτῶν ἤθελεν εὐρεθῇ ὡς ἔγγιστα, καὶ οὐδέποτε ἐξηκριθώμένως. Ἄν, φέρε εἰπεῖν, ζητηθῇ ἡ ρίζα τοῦ 78 < αὕτη θάλει καίται μεταξὺ τῶν 8 καὶ 9 < ὡς τοῦ τετραγώνου 78 κειμένου μεταξὺ τῶν 64 καὶ 81 τετραγώνων: ὃ ἐστὶν εἶναι 8 καὶ κλάσμα < κλάσμα ὅμως, οὗτινος ἡ σημασία δὲν ἤθελεν εὐρεθῇ ποτὲ ἐ-

ξηκριθωμένως ἢ ἀγκαλὰ, ὡς θέλομεν ἰδεῖ μετ' οὐ πολὺ, δύναται τις νὰ πλησιάσῃ, ὅσον θέλει.

Ἄρρητος λοιπὸν ὀνομάζεται πᾶσα ρίζα, ἣτις δὲν εὐρίσκεται ἐξηκριθωμένως.

113 Ὡς ἄς ἐλθωμεν εἰς τὰ τετράγωνα τὰ ἐκ πλείον τῶν δύο χαρακτήρων συγκείμενα. Δήλον ὅμως, νομίζω ἐγώ, ὅτι ἤθελε λάβοιτις τέτε μόνον γνῶσιν ἀκριβεστέραν τοῦ πράγματος ἢ ἂν πρῶτον ἐμάνθανε τὰ μέρη, ἐξ ὧν ἕκαστον τῶν τετραγώνων σύγκειται; ὅπερ βέβαια εἶναι τὸ νὰ προχωρῇ τις ἀναλυτικῶς.

Νὰ τετραγωνίσω λοιπὸν ἕνα ἀριθμὸν σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν ἐφ' ἑαυτὸν. Νὰ πολλαπλασιάσω πάλιν ἕνα ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ πολλαπλασιάσω ἅπαντα τὰ μέρη αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτὰ. Οὕτω $25 \times 25 = (20+5)(20+5) = 625$. Ὡς ἐκτελῶ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν $20+5$ ἐφ' ἑαυτὰ, καὶ ἔχω

$$\begin{array}{r} 20+5 \\ 20+5 \\ \hline 20^2 + 2 \times 20 \times 5 + 5^2 = 625 \end{array}$$

Ἐνθα δηλονότι, ὡς εἶναι ὀρατὸν, τὸ τετράγωνον $20^2 + 2 \times 20 \times 5 + 5^2$ σύγκειται ἐκ τριῶν ὁρῶν διαφορετικῶν: τοιούτεσιν ἐκ δύο τετραγώνων τῶν δύο χαρακτήρων τῆς ρίζης: τῶν 20 λέγω καὶ 5, καὶ ἐκ τοῦ δις γινόμενου τούτων αὐτῶν τῶν δύο χαρακτήρων: τοιούτεσι τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας.

Ὡς ἂν μοι ζητηθῇ ἡ ρίζα ἐνὸς ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ὡς τοῦ 625 ἢ ἐγὼ ἀμέσως γνωρί-

ζωά. ὅτι ἡ ρίζα αὐτοῦ σύγκειται ἐκ δύο χαρακτῆρων: μονά-
δων ὁηλονότι καὶ δεκάδων (111) ἢ καὶ ἐπομένως δια-
χωρίζω αὐτὸν εἰς δύο ζεύγη οὕτω 6,25.. καὶ β'. ὅτι ἡ
τοῦ πρωτοῦ ζεύγους ρίζα εἶναι 2.. ὅθεν ζητῶ μόνου τῶν
6 τὴν ρίζαν, ἣτις θέλει εἶναι δεκάδες. Καθότι ἐπειδὴ καὶ
πᾶς ἀριθμὸς συγκείμενος ἐκ δύο χαρακτῆρων ἔχει ρίζαν
μονάδα (αὐτίθι) ἢ τούτου ἕνεκεν ἡ ζητούμενη ρίζα τῶν
μὲν μονάδων εὐρίσκεται εἰς τοὺς δύο τελευταίους χαρα-
κτῆρας: τὰ 25, τῶν δὲ δεκάδων εἰς τὰς ἑκατοντάδας,
εἰς τὰ 600 λέγω

$$\begin{array}{r} 25 \\ 6,25 \\ 4 \\ 4 \overline{) 225} \\ 20 \\ 25 \\ 0 \end{array}$$

Η' ρίζα λοιπὸν τῶν 6, λέγω, εἶναι μιλίων
 τῶν 2, καὶ ἑλάσπων τῶν 3 ἢ ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ
 ἡ ἐξαγωγή τῇ ρίζῃς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σαφῆς
 διαιρέσεις (107) ἢ τούτου ἕνεκεν προκρίνω τὰ
 2, τῶν 3, καὶ τὰ γράφω, ὥς ἄλλο πηλίκου
 ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, εἴτα τετραγωνίζω
 αὐτὸ, ἀφαιρῶ τὸ τετράγωνον ἀπὸ τῶν 6, καὶ ἔχω δια-
 φορὰν 2, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων καταβιβάζω τὸν δεύ-
 τερον χαρακτῆρα 2 τοῦ δοθέντος, καὶ ἔχω διαιρετέον
 τὸν ἀριθμὸν 22: ἔνθα ὁηλονότι εὐρίσκονται αἱ μονάδες
 τῆς ζητούμενης ρίζης. Ὡς διὰ τὰς εὗρω, διπλασιάζω
 τὴν εὐρεθεῖσαν ρίζαν: τῶν δεκάδων, λέγω τὰ 2, καὶ
 ἔχω διὰ διαιρετὴν 4, ὅστις εἰσέρχεται πεντάκις εἰς τὸ 22:
 ὅθεν γράφω 5 εἰς τὰ δεξιὰ τῆς εὐρεθείσης ρίζης ἢ καὶ οὕ-
 τως ἔχω 25 διὰ ζητούμενην ρίζαν. Πρὸς πληροφορίαν λοι-
 πὸν πρῶτον πολλαπλασιάζω τὴν ρίζαν 5 διὰ τοῦ διαιρέ-
 του 4, καὶ ἔχω 20 ἢ εἴτα εἰς ἑαυτήν, καὶ ἔχω 25 (ὁῦ-
 λον δ' ὅτι τὰ 20 εἶναι δεκάδες, εἴτε = 200), καὶ ἀφαι-

ρῶν αὐτὰ ἀπὸ τῶν 225, ἔχω διαφορὰν μηδέν. Ὡς συνάγω ὅτι τὰ 25 εἶναι ρίζα ἀκριβοῦς τοῦ 625 ἀριθμοῦ

114. Ὁμοιοῦντι θέλει λεχθῆαι καὶ ἂν ἡ ζητούμενη ρίζα σύγκηται ἐκ μᾶλλον τῶν δύο χαρακτῆρων, πάντοτε δηλονότι τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκηται ἔκτε τῶν τετραγώνων τῶν ἰσίων αὐτῆς μερῶν, καὶ ἐκ τῶν δις γινομένων αὐτῶν πρὸς ἄλληλα.

Καθότι ζητεῖσθω ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 390625, ἥτις δηλονότι εἶναι 625. Τώρα $625 = 600 + 20 + 5$. Ὡς ἡ τὸ ὅλον, ἡ τὰ μέρη αὐτοῦ γὰρ τετραγωνίσω (τ' τετράγωνον θέλει εἶναι τὸ αὐτό. Ὡς

$$600 + 20 + 5$$

$$600 + 20 + 5$$

$$600^2 + 20 \times 600 + 5 \times 600,$$

$$+ 600 \times 20 + 600 \times 5 + 20^2 + 5 \times 20$$

$$+ 20 \times 5 + 5^2$$

$$600^2 + 2 \times 600 \times 20 + 20^2 + 2 \times 600 \times 5 + 5^2 = 390625$$

"Ενθα δηλονότι, ὡς ὁράται, τοῦτο τὸ τετράγωνον σύγκηται α'. ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνων τῶν χαρακτῆρων τῆς ρίζης, καὶ β'. ἐκ τῶν τριῶν δις γινομένων πρὸς ἄλλήλους τῶν χαρακτῆρων. Καὶ ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χαρακτήρ τῆς ζητούμενης ρίζης εἶναι ἡ ρίζα τῶν 600², εἴτε τὰ 6 (ἂν διὰ τοῦ δις τούτου διαιρέσω τὸν δεύτερον ὅρον: τὸν $2 \times 600 \times 20$ λέγω (ἔξω πηλίκον 2 (=20).. καὶ ἂν αὐτῷ διαιρέσω τὸν ἀκόλουθον ὅρον διὰ τῆς δις ρίζης 62: εἴτε τὸν $2 \times 620 \times 5$ (ἔξω διὰ πηλίκον 5 (ὑπερθλ. εἶναι ὁ τρίτος χαρακτήρ τῆς ζητούμενης ρίζης. Καὶ ἰσοῦ πῶς ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν.

Διαιρὼ τὸν δευτέρα ἀριθμὸν εἰς
 ζεύγη, ἀνὰ δύο χαρακτῆρας λέγω, ἀρ-
 χόμενος πάντοτε ἐκ τῶν δεξιῶν, καὶ
 οὕτω βλέπω ἀμέσως ὅτι ἡ ζητούμενη
 ρίζα π' ἔγκειται ἐκ τριῶν χαρακτήρων.
 Διὰ τὴν μὴ συμβῇ ὅμως εἰς τὴν διαί-
 ρεσιν σύγχυσις τις, ἄνω καθέτους ἀπὸ
 τῶν τοιμῶν, ὡς ἄλλας σήλας. Καὶ
 οὕτως ἐγὼ ζητῶ τὴν ρίζαν μόνου τοῦ
 πρώτου τμήματος: τοιτέσι τοῦ 39, ἥτις δηλονότι εἶναι
 6 (111). Τὴν γράφω λοιπὸν ὡς ἄλλο πηλίκον ἐπὶ τοῦ
 δευτέρου ἀριθμοῦ.. τὴν τετραγωνίζω, καὶ ἀφαιρῶν τὸ τε-
 τραγώνιον αὐτῆς ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος, ἔχω διαφο-
 ρὰν 3, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων κατὰ γὰρ τὸν πρώτον
 χαρακτήρα τοῦ δευτέρου τμήματος, καὶ ἔχω 30, ὅς τις
 δηλ. εἶναι ὁ δεύτερος διαιρετέος. Διαιρῶν λοιπὸν αὐτὸν
 διὰ τοῦ εἰς 6, ἔχω πηλίκον 2, ὅπερ δηλονότι εἶναι ἡ
 ρίζα τῶν δεκάδων, καὶ τὴν γράφω εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ρί-
 ζης 6. Τώρα ἀφαιρῶν τότε γινόμενον τοῦ πηλίκου 2 ἐπὶ
 τὸν διαιρέτην 12, καὶ τὸ τετραγώνιον αὐτοῦ 4 ἀπὸ τῶν
 306, ἔχω διαφορὰν 62, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ὁποίων κατὰ-
 γων τὸν πρώτον χαρακτήρα τοῦ τρίτου τμήματος, ἔχω
 622, ὅς τις δηλονότι εἶναι ὁ τρίτος διαιρετέος, διαιρέ-
 την δ' ἔχω τὸ διπλάσιον τῆς ρίζης 62, εἴτε τὸ 124..
 καὶ οὕτω μοι προκύπτει πηλίκον 5, ὅπερ εἶναι ἡ ρίζα
 τῶν μενᾶδων.. Ὅθεν καὶ τὴν γράφω εἰς τὰ δεξιὰ τῆς
 ρίζης 62. Καὶ ἐδῶ κάμνω τὰ ὅμοια: ὁ ἐστὶν ἀφαιρῶ
 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου 5 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 124,

$$\begin{array}{r|rr}
 & 6 & 2 & 5 \\
 39 & 06 & 25 \\
 \hline
 36 & & \\
 12, 3 & 06 & \\
 & 4 & \\
 & 4 & \\
 \hline
 124 & 62 & 2 \\
 & 62 & 0 \\
 \hline
 & & 25 \\
 & & 0
 \end{array}$$

καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ 25. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ εἶ-
ναι μηδέν, συνάγω ὅτι ἡ ζητούμενη ῥίζα εἶναι = 625.

Ὡς εἰς πάντα δοθέντα ἀριθμὸν ἐγὼ θέλω ἐκτελεῖ
τὰ ὅμοια. Καθότι ζητεῖσθω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθ-
μοῦ 11948691929344.

Χωρίζω εἰς ζεύγη αὐτὸν,
καὶ ἔχω ζεύγη· ἑπτὰ. Ἐ-
πτά λοιπὸν λέγω ὅτι εἶναι
οἱ χαρακτῆρες τῆς ζητου-
μένης ῥίζης ἢ πρὸς εὐρε-
σιν τῶν ὁμοίων, ἀφ' οὗ
κατάξω ἀπὸ τῶν τομῶν
γραμμάς, ζητῶ ἀνὰ μέ-
ρος ἐκάστου τμήματος τὴν
ῥίζαν. Ἡ ῥίζα λοιπὸν τοῦ
11 εἶναι 3.. τὴν γράφω
ὡς ἄλλο πηλίκον ἢ καὶ
ἀφαιρῶν τὸ ταύτης τετρά-
γωνον ἔχω 2 διαφοράν.

Εἰς ταύτην τὴν δια-
φοράν καταβιβάζων τὸν
πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ
δευτέρου τμήματος, ἔχω
διὰ μὲν διαιρετέον 29,
διὰ δὲ διαιρέτην 6: τὸ
διπλάσιον δηλ. τῆς ῥίζης 3, ἐξ οὗ δηλονότι μοι προ-
κύπτει πηλίκον 4, ὅπερ εἶναι ὁ δεύτερος χαρακτῆρ τῆς
ζητούμενης ῥίζης. Τώρα ἀφαιρῶ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ

	3	4	5	6	6	8	8
11	94	86	91	92	93	44	
9							
62	9						
2	4						
	16						
68	38	8					
	34	0					
		25					
690	4	61	9				
	4	14	0				
			36				
6912	47	55	9				
	41	47	2				
			36				
69132	6	08	36	9			
	5	53	05	6			
				64			
691336	55	30	69	4			
	55	30	68	8			
				64			
							0

πηλίκου 4 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 6, καὶ τὸ τετράγωνον αὐ-
τοῦ 16.. εἶτα εἰς τὴν διαφορὰν 38 κατὰ γω τὸν πρῶτον
χαρακτῆρα τοῦ τρίτου τμήματος, ὅπερ θέλει γένει ὁ
τρίτος διαιρετέος, καὶ διαιρέτης τὸ διπλάσιον τῆς ρίζης
34. Καὶ οὕτως ἐπακολουθῶν, ἐγὼ ἔξω διὰ ρίζαν τοῦ δο-
θέντος ἀριθμοῦ = 3456688, ἥτις δηλ. ἂν πολλαπλα-
σιασθῇ ἐφ' ἑαυτὴν θέλει μοι δῶσαι τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

115. Σπάνιοι ὅμως εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ρί-
ζας τετραγωνικὰς ἐξηκριθωμένας. Καθότι ἂν πάρα τηρή-
σῃ τις εἰς τὸν πίνακα (111) ἢ ἤθελεν ἰδοῖ ὅτι ἐκ τῶν
ἐννεήκοντα ἐννέα ἀριθμῶν, μόνοι ἐννέα εἶναι οἱ ἔχοντες
ρίζας ἐξηκριθωμένας. Καὶ ἔτι ὅμως σπανιώτεροι εἶναι ὅ-
σοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνωτέρω τῶν 100. Καθότι ἂν 10
 $\times 10 = 100$ ἢ καὶ ἂν $34 \times 34 = 1156$ ἢ δηλονότι ὅτι
μόνοι 24 ἀριθμοὶ παρευρίσκονται ἀκριβεῖς τετράγωνοι εἰς
1056 ἀριθμούς.

Ὅταν λοιπὸν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς δὲν ᾖ ἐντελὲς
τετράγωνον ἢ τὸ μόνον μέσον τοῦ νὰ φθάσῃ τις ὡς ἔγγιστα
εἰς τὴν ἀληθῆ ρίζαν, εἶναι ἡ χρῆσις τῶν δεκαδικῶν: ἡ-
τις δηλονότι ἐφεδράζει εἰς τὸ νὰ προσθέτῃ τις εἰς τὸ λεί-
ψανον τοσαῦτα ζεύγη μηδενικῶν, ὅσους 12^2 , 100^2 ἢ
ὅσα δεκαδικὰ θέλει εἰς τὴν ρίζαν, ἐπακολουθῶν τὴν ἐρ-
γασίαν κατὰ τὸ εἰρηδὸς δηλονότι (113). Οἱ τοιοῦτοι λοι-
πὸν ἀριθμοὶ ὀνομάζονται ἄλογοι, καὶ ῥητοὶ οἱ ἐ-
ναντία, ὡς οὕτως ἀνεκφράστου τῆς ἐκφράσεως αὐτῶν, καὶ
σημειοῦνται μόνον οὕτως $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$.

Ἐξω, φέρε εἰπεῖν, νὰ ἐξαχθῇ ἡ ρίζα τοῦ 26, ὅς
τις δηλονότι εἶναι ἄλογος ἀριθμός.

"Αν λοιπόν, φάρε εἶπεῖν, θελήσῃ τις νὰ φάσῃ ἡ-
τον ἑνὸς χιλιοσοῦ εἰς τὴν ἀληθῆ ρίζαν τῶν 26 ἢ πρέπει
νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτὰ τρία ζεύγη μηδενικῶν, καὶ οὕτω
νὰ ἐξάγῃ τὴν ρίζαν κατὰ τὸν
ἐγνωσμένον τρόπον, ἥτις εἶ-
ναι 5,099. ἔνθα ὡς ὁρά-
ται, ἐπειδὴ καὶ εἰς τὴν δι-
αίρεσιν ἔμεινε λείψανον 199,
καὶ ὅχι μηδέν διὰ τοῦτο τὰ
5,099 δὲν εἶναι ρίζα ἀκρι-
βοῦς τῶν 26. Εἶναι ὅμως ἄ-
ξιον παρατηρήσεως ὅτι ἐπει-
δὴ ὁ ἀριθμὸς 5099 εἶναι τε-

$$\begin{array}{r}
 5,099 \\
 \hline
 26 \overline{) 126,00,00} \overline{) 00} \\
 \underline{25} \\
 100 \overline{) 100} \\
 \underline{90} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 1 \\
 9 \\
 16 \\
 81 \\
 \hline
 199
 \end{array}$$

τραγωνικὴ ρίζα τοῦ 26000000 ἢ καὶ ἐγὼ δὲν ζητῶ τὴν
ρίζαν τοῦ 26000000 ἢ ἀλλὰ τοῦ 26: ὅςιν ἐπειδὴ καὶ
εἰς τὸ γινόμενον προσετέθησαν ἑξ δεκαδικὰ ἢ τοῦτου ἔνε-
κεν ὁ εἰς τῶν παραγόντων, ὁ 5099 λέγω, πρέπει νὰ ἔ-
χῃ τὸ ἥμισυ τῶν δεκαδικῶν, ὡς τοῦτο εἶδομεν εἰς τὸν
(91).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἐξάξοις καὶ τὴν
ρίζαν τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Καθότι $\sqrt{2} = 1,4142136$,
καὶ $\sqrt{3} = 1,7320508$: ἔνθα δηλονότι ἔγινε πρόσθεσις
μηδενικῶν ἑπτὰ ζευγῶν εἰς ἑκάτερον, καὶ διὰ τοῦτο τὸ
ἀμάρτημα εἶναι ἔλασσον ἑνὸς μιλιονισοῦ.

116. Εἰ δὲ καὶ ἤθελε ζητηθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα
τινὸς κλάσματος ἢ τότε ἢν ἀνάγκη νὰ ἐξαχθῇ ἡ ρίζα τοῦ
ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἀνὰ μέρος ἢ καὶ τοῦτο
ἤθελεν εἶναι ἡ ζητούμενη ρίζα. Καθότι αὖν ὁ πολλαπλα-

σιασμός ενός κλάσματος ἐπὶ κλάσμα δὲν γίνηται ἄλλως, εἰμὴ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομασῶν (73) (τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ ἐξάξη τις τὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξάξη τὴν ῥίζαν ἑκατέρωθεν : τοῦτε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ λέγω. Οὕτως ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ εἶναι $= \frac{2}{3}$: τουτέστι $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$. Ἐκ τοῦ διότι δηλονότι $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. ὡσαύτως καὶ ἡ τοῦ $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$, καὶ ἡ τοῦ $\sqrt{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{100}$. Ἐκ τοῦ διότι ἡ μὲν ῥίζα τοῦ 1 εἶναι 1, ἡ δὲ τοῦ 10000, εἶναι 100, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

117. Πλὴν ἂν ᾖναι σπάνιοι οἱ ἀριθμοὶ οἷτε τετράγωνοι, ἢ λογικοὶ (πολὺ πλέον ἤθελον εἶναι τοιαῦτα τὰ κλάσματα. Καὶ ἐπομένως ἡ ἐξαγωγή τῶν ῥιζῶν αὐτῶν ἤθελε γένοι διὰ τῶν δεκαδικῶν (115). Εἰδὲ καὶ ὁ εἰς μένος τῶν ὄρων ἑνὸς κλάσματος εἶναι ρητὸς, καὶ ὁ ἕτερος ἄλογος : τότε τοῦ μὲν ἑνὸς θέλει ἐξαχθεῖν ἐξηκριθμένως ἡ ῥίζα τοῦ δὲ ἑτέρου, ὡς ἔγγραφα. Οὕτω $\sqrt{\frac{26}{49}} = \frac{5.000}{7} = 0,728$, καὶ $\sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2}{3.162} = 0,632$.

Δήλον ὅμως ὅτι πᾶν κλάσμα ἄλογον κατὰ τοὺς δύο ὅρους, μεταβάλλεται κατὰ τὸν ἕτερον μόνον (προτιμᾶται δὲ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν, μεταβαλλομένου δηλ. εἰς ἑντελὲς τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς παρισῶντος τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν τῶν ἐν τῇ μονάδι. Οὕτως ἂν μοι ζητηθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$ (ἐγὼ τὸ μεταμορφῶ εἰς τὸ $\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$, ἔνθα δηλονότι $\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2.449}{3} = 0,$

816. Ὡσαύτως καὶ $V\frac{3}{7} = V\frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{V21}{7} = \frac{4.585}{7} =$
 0,655. Ὡσαύτως καὶ $V(3\frac{5}{7}) = V\frac{26}{7} = \frac{1}{2} V\frac{102}{7} =$
 $\frac{13.4007}{7} = 1,9272.$

118. Εἰ δὲ καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα εἶναι δεκαδικὸν εἰ
 τότε εἶναι ἀνάγκη προσθιέμενός τις μηθενικὰ καὶ ἐκτελέσθαι
 ἅπαντα τὰ δεκαδικὰ, ὅπερ δηλονότι ἐκτελεῖται διὰ τῆς
 προσθέσεως 3, ἢ 5, ἢ κ. τ. ξ. μηθενικῶν. Οὕτω διὰ
 καὶ ἐξάξω τὴν ῥίζαν τοῦ 0,457 προσίθηναι τρία ἢ πέντε
 μηθενικά: ἢ πρόσθεσις τῶν ὁποίων δηλονότι ἀλλάττει
 ὁλοτελῶς τὴν σημασίαν αὐτοῦ καὶ οὕτως ἐξάγω τὴν ῥί-
 ζαν τῶν 457000: σοχαζόμενος δηλονότι αὐτὸν ὡς ὁ-
 λοσχερῇ, ὅς τις ἔχει διὰ ῥίζαν 676, εἴτε 0,676. Ὡ-
 σαύτως καὶ ἡ ῥίζα τοῦ 21,935, εἴτε τοῦ 21,935000
 εἶναι = 4,683.

Καὶ τέλος ἂν τὸ δοθὲν κλάσμα συνέχη καὶ χα-
 ρακτῆρας ὁλοσχερεῖς, εἴτε ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ᾖ καὶ κλα-
 σματίας εἰ τότε πρῶτον τις μεταβάλλει αὐτὸν εἰς κλάσμα
 ἐντελὲς εἴτα ἐξάγει τὴν ῥίζαν αὐτοῦ (116). Οὕτω διὰ
 καὶ ἐξάξω τὴν ῥίζαν τοῦ $8\frac{3}{7}$ εἰ πρῶτον τὸν μεταβάλλω
 εἰς τὸν $\frac{59}{7} = \frac{413}{49}$ καὶ οὕτως ἐξάγω τὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ἥ-
 τις εἶναι $\frac{20.377}{7} = 2,903$. Ὡσαύτως καὶ ἡ $V66\frac{1278}{3000}$
 $= V\frac{238878}{3000} = \frac{1}{60} V238878.$

Περὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ὁδῆς.

Κ Ε Φ. ΙΑ΄.

119. **Η** μετὰ εἰσόδου εἰς κύβους εἰς ἀριθμὸν ἀλλο οἶον εἶναι, εἴτε ἡ πρώτη αὐτοῦ δύναμις (108), ἢ αὐτῆς, εἶναι εἰς ἀριθμὸς γινόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ὁδόν. Ὡς εἶναι ἔστι τετραγώνος τεσσάρου τοῦ να ἐκτελέσῃ τις τὸν κύβον παρὰ ἀριθμῶν. Καὶ ἴδου οἱ κύβοι τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν.

ἀριθμοὶ											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	τετραγῶνοι		
κύβοι αὐτῶν											
1	8	27	64	125	216	343	512	729	κύβοι αὐτῶν		

Ὡς πᾶς κύβος ἀριθμῶν εἰς εἰνός τετραγῶνα αὐτῶν (111). β. Ἐπειδὴ ὁ κύβος ἐκ δύο τῶν πρώτων ἐκ δύο τετραγῶνων ἀριθμῶν, ὡς δηλονότι καίται ὁ χι πλῆτον, ἢ ἐκ τριῶν τετραγῶνων, ὡς δηλονότι οὗτος ἀριθμῶν ἐκ δύο τετραγῶνων ἀριθμῶν, ὡς οὗτος 10 X 10 X 10 = 1000, καὶ ὁ κύβος τοῦ πρώτου ἐκ τριῶν τετραγῶνων ἀριθμῶν τοῦ 100 λέγω, συγκρίται ἐξ ἑπτά, ὡς οὗτος 100 X 100 X 100 = 1000000 ὁ ἐπόμενος εἰς πᾶν ἀριθμὸν συγκρίσθαι ἐκ δύο τετραγῶνων ἀριθμῶν, ὁ κύβος να τὴν ὑπερβὴ τοῦς ἐξ τετραγῶνων ἀριθμῶν, οἷον οὗτος 99 X 99 X 99 = 970299.

γ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ κύβος τοῦ ἐκ τῶν χαρκακτηρίων ἀριθμῶν ἀδυνατεῖ νὰ ὑπερβῇ τοὺς ἐννέα χαρκακτηρίων, εἴτε τοῦ 999, συγκρίται ἐξ ἐννέα χαρκακτηρίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

120. Ἐξ οὗ ἀναπόρριπτον εἴναι ταῦτα. α. ἂν ὁ κύβος ἀριθμῶν εἴναι ὑπερβαλὺς διδακταλίας πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμῶν, ὡς ἐξ ἀρκούντων περὶ τοῦτον τοῦ πινάκος (119). β. Ἦας ἀριθμῶν συγκρίτους ἐκ τῶν αὐτῶν, ἢ πῦρε, ἢ ἐξ ἁρᾶ-
κτηρίων νὰ ἔχῃ κυβικὴν γινῶν ἀριθμῶν ἐκ δύο χαρκακτηρίων.

Ἡ δὲ αὖ ὁ πρῶτος τῶν ἐξ ἑπτά: ὁ 10000, ἔχῃ τὰ 10. καὶ αὖ ὁ πρῶτος τῶν ἐξ ἑπτά: ὁ 100000, ἔχῃ γινῶν κυβικὴν τοῦ πρῶτου τῶν ἐκ ἑπτὰ: τοῦ 100 ὁ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀπαιτεῖται ὁ κύβος αὐτοῦ τῶν 100 καὶ 1000 000 νὰ ἔχῃται κυβικὴν γινῶν συγκρίτους ἐκ δύο χαρκα-
κτηρίων. γ. Ἦας ἀριθμῶν συγκρίτους ἐξ ἑπτά, ἢ ὁκτώ, ἢ ἀριθμῶν χαρκακτηρίων, ὡς αὐτοὺς 100 Χ 100 Χ 100 = 1000 000, καὶ 1000 Χ 1000 Χ 1000 = 1000000, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡς ἀναπόρριπτον εἴναι πᾶσι ταῖς καὶ οὕτως ἀδυνατεῖ εἶναι ἐκ δύο χαρκακτηρίων συγκρίτους ἢ κυβικὴν γινῶν τοῦ δόξεντα καὶ ἑπτακτῶν χαρκακτηρίων ἀριθμῶν. καὶ οὕτως ἀδυνατεῖ εἶναι ἐκ δύο χαρκακτηρίων ἀριθμῶν ὡς ἀπαιτεῖται ὁ κύβος τοῦ δόξεντα καὶ ἑπτακτῶν χαρκακτηρίων ἀριθμῶν.

121. Ἀπέχεται λοιπὸν τὴν αὐτὴν ὁ ἑρπύς, δι' οὗπερ ἠθέληεν εὐνοῖαι τοὺς αὐτοὺς τοὺς χαρκακτηρίων τῆς κυβικῆς γινῶν. καὶ

οὕτως ἤθελεν εἶναι, νομίζω ἐγώ, ἡ διάγνωσις τῶν μερῶν τοῦ κύβου, ἐξ ὧν δηλονότι παρήχθη.

Νὰ κυβίσω λοιπὸν ἓνα ἀριθμὸν σημαίνει οὐδὲν ἄλλο, ἢ νὰ πολλαπλασιάσω ἐπ' αὐτὸν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ. Ὡςτε ἂν πολλαπλασιάσω τὸ $25^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 5 + 5^2$ (113), ἐπὶ τὰ $20+5$ ἔξω τὸν κύβον τῶν 25, ὅς τις ἐλθ. εἶναι = 15625, τουτίς:

$$\begin{array}{r}
 20^2 + 2 \times 20 \times 5 + 5^2 \\
 20+5 \\
 \hline
 20^3 + 2 \times 20^2 \times 5 + 20 \times 5^2 \\
 + 20^2 \times 5 \quad + 2 \times 20 \times 5^2 + 5^3 \\
 \hline
 20^3 + 3 \times 20^2 \times 5 + 3 \times 20 \times 5^2 + 5^3 = 15625 \\
 = 25^3 \times 25.
 \end{array}$$

Ἐνθα ὡς ὁράται ὁ κύβος 15625 τοῦ 25 ἀριθμοῦ σύγκειται α. ἐκ τῶν δύο κύβων τῶν χαρακτήρων τῆς ρίζης β'. ἐκ τοῦ τρις γινομένου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· καὶ γ'. ἐκ τοῦ τρις γινομένου τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας.

Ἄν λοιπὸν μοι ζητηθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 15625 ἔγωγ ἐκ πρώτης ὀψews θέλω γνωρίσει πρῶτον ὅτι αὕτη σύγκειται ἐκ δύο χαρακτήρων· ἢ ἂν θέλῃς ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων· δεύτερον ὅτι ἡ τῶν δεκάδων εὐρίσκεται εἰς μόνους τοὺς πρώτους δύο χαρακτήρας· τουτίςιν εἰς τὰ 15, ἥτις δηλ. εἶναι = 3 (119)· καὶ τρίτον ὅτι διὰ τὰ εὗρω καὶ τὸν χαρακτήρα τῶν μονάδων τῆς ρίζης, εἶναι ἀνάγκη νὰ διαιρέσω τὸ λείψανον διὰ τοῦ τρις τετραγώνου 2· τουτίςιν διὰ τοῦ 3×2^2 . (Ἐνθα δηλονότι

τὸ 2^2 εἶναι δεκάδες). Καὶ ἰδοὺ πῶς ἐκτελῶ τὴν ἐργασίαν.

Διαχωρίζω αὐτὸν εἰς δύο τμήματα :

	2	5
	15	625
	8	
12	7	6
	6	0
	1	50
		125
		0

ζητῶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν μόνου τοῦ πρώτου τμήματος, ἥτις δηλονότι εἶναι. 2 (αὐτό-
 θε) : γράφω αὐτὴν ὡς πηλίκον ἄνωθεν τοῦ κύβου : εἴτα κυβίζων αὐτὰ, ἀφαιρῶ τὸν κύβον ἀπὸ τῶν 15, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν 7 καταβιβάζω τὸν πρῶτον χαρακτήρα τοῦ δευτέρου τμήματος : καὶ οὕτως ἔχω διαδαι-
 αρετέον 76, ἔνθα δηλ. εὐρίσκεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν μονάδων. Ὡς λαμβάνω διὰ διαιρέτην τὸ τρις τετράγωνον τῶν 2 : τουτέστι τὰ 12, ἐξ οὗ μοι προκύπτει πηλίκον 5, ὅπερ γράφω εἰς τὰ δεξιά τῆς ῥίζης 2.. καὶ οὕτως ἔχω διὰ ῥίζαν κυβικὴν τὰ 25. Πλὴν πρὸς πληροφάνειαν ἀφαιρῶ τρία τινα : α'. τὸ τρις τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, εἴτε τὸ $3 \times 2^2 \times 5 = 60$.. β'. τὸ τρις τετράγωνον τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, εἴτε τὸ $3 \times 5^2 \times 2 = 150$.. καὶ γ' : τὸν κύβον τῶν μονάδων, εἴτε τὸ $5^3 = 125$.. Καὶ ἐπειδὴ μετὰ τὴν τούτων ἀφαιρέσιν ἐγὼ εὐρίσκω μηδὲν διαφορὰν : συνάγω ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει κυβικὴν τὰ 25.

122. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λοιπὸν ἤθελον εὑροί τις τὴν κυβικὴν ῥίζαν παντὸς ἀριθμοῦ. Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 244140625.

Ἐπειδὴ βλέπω τούτον τὸν ἀριθμὸν συγκεῖμενον ἐξ εὐνέα χαρακτήρων : ἐγὼ ἐννοῶ ἀμέσως ὅτι ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα σύγκειται ἐκ τριῶν, καὶ ἰδοὺ πῶς τοὺς εὐρίσκω. Τέμνω

αὐτὸν ἀνὰ τρεῖς χαρακτῆρας ἐζητῶ
 τὴν κυβικὴν ρίζαν μόνου τοῦ πρώ-
 του τμήματος, εἴτε τῶν 244, ἥτις
 δηλοῦντι εἶναι 6 (119), ἣν περ
 γράφω ὡς ἄλλο πηλίκον ἄνω τοῦ
 δευτέρου ἀριθμοῦ. Κυβίζω τὰ 6,
 καὶ τὸν κύβον αὐτῶν 216 ἀφαι-
 ρῶ ἀπὸ τῶν 244.. καὶ εἰς τὰ δε-
 ξιά τῆς διαφορᾶς 28 καταβιβάζω
 τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ δευτέ-
 ρου τμήματος, καὶ οὕτως ἔχω δια-
 νέον διαιρετέον 281. Διὰ δὲ διαιρέτην ἐγὼ λαμβάνω
 τὸ τρις τετράγωνον τῆς ἐξαχθείσης ρίζης 6, εἴτε τὰ 108
 (121), καὶ οὕτω μοι προκύπτει πηλίκον τὰ 2, ἅπερ δηλ.
 εἶναι ἡ ρίζα τῶν δεκάδων ὅθεν καὶ τὰ γράφω εἰς τὰ δε-
 ξιά τῶν 6.

	6 2 5	
	244	140, 625
	216	
108	28	1
	21	6
		72
		8
11532	5	812 6
		766 0
		46 50
		125
		000 000

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν λοιπὸν τοῦ πράγματος, καὶ ἐν
 ταυτῷ πρὸς κατοχὴν καὶ τοῦ λειψάνου, ὥς νὰ εὕρω καὶ
 τὴν ρίζαν τῶν μονάδων, ἀφαιρῶ τρία τινα: α'. τὸ τρις τε-
 τράγωνον τῶν δεκάδων (οἵτινες τῷ ὄντι εἶναι ἑκατοντάδες)
 ἐπὶ τὰς μονάδας, εἴτε $3 \times 6^2 \times 2 = 216$.. β'. τὸ τρις
 τετράγωνον τῶν μονάδων ἐπὶ τὰς δεκάδας, εἴτε 3×2^2
 $\times 6 = 72$.. καὶ γ'. τὸν κύβον τῶν δεκάδων, εἴτε $2^3 = 8$,
 ὧν περ δηλοῦντι τὸ κεφάλαιον εἶναι $= 21600 + 720 + 8$
 $= 22328$. Εἰς τὴν διαφορὰν λοιπὸν 5812 καταβιβάζω
 τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ τρίτου κόμματος, καὶ οὕτως
 ἔχω διὰ νέον διαιρέτην τὸν 58126.

Διὰ δὲ διαιρέτην ἐγὼ λαμβάνω, ὡς καὶ ἀνωτέρω,

τὸ τρεῖς τετράγωνον τῆς ῥίζης 62, εἴτε $3 \times 62^2 = 11532$ (ἄμειον ἤθελον ἐκτελέσῃ, καὶ ἂν οἱ χαρακτῆρες τῆς ἐξαχθείτης ῥίζης ἦσαν τρεῖς καὶ τέσσαρες, κτξ.) (καὶ οὕτω μοι προκύπτει πηλίκον τὰ 5, ὅπερ εἶναι ὁ χαρακτήρ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ὅθεν καὶ τὸ θέτω εἰς τὰ δεξιά τῶν 62.

Πρὸς ἐπιθεβαίωσιν λοιπὸν τοῦ πράγματος ἀφαιρῶ, ὡς ἀνωτέρω, τρία τινα, α'. τὸ τρεῖς τετράγωνον τῶν δεκάδων 62 ἐπὶ τὰς μονάδας 5, εἴτε $3 \times 62^2 = 57660$. β'. τὸ τρεῖς τετράγωνον τῶν μονάδων 5 ἐπὶ τὰς δεκάδας 62, εἴτε $3 \times 5^2 \times 62 = 4650$. καὶ γ'. τὸν κύβον τῶν μονάδων, εἴτε 125, ὥνπερ τὸ κεφάλαιον εἶναι $= 5766000 + 46500 + 125 = 5812625$. Καὶ ἐπειδὴ ἔχω μηδὲν διαφοράν (συνάγω ὅτι ἡ ζητούμενη ῥίζα εἶναι $= 625$, πρὸς ἐπιθεβαίωσιν τοῦ ὁποίου ἂν κυβίσω αὐτὴν (ἐξω τὸν δοθέντα ἀριθμὸν.

Εἶναι, ἴσως, περιττὸν τὸ νὰ σημειώσωμεν καὶ ἐνταῦθα, ὅτι τὸ πηλίκον, ἡ ῥίζα λαμβάνεται οὐδέποτε μᾶλλον τοῦ 9 εἰς μίαν διαίρεσιν.. καὶ ὅτι ἂν ἦναι ἡ ἀραίρεσις ἀδύνατος (τοῦτο ἤθελεν εἶναι σημεῖον, ὅτι ὁ χαρακτήρ τῆς ῥίζης ἐλήφθη μείζων τοῦ ὀρθοῦ.

123. Πλὴν ἂν, ὅσοι τῶν ἀριθμῶν ἔχουσιν ἐξηκτιζομένους ῥίζας τετραγωνικάς ἦναι σπάνιοι (115) (πολύ πλέον ἤθελον εἶναι τοιοῦτοι, ὅσοι ἔχουσι κυβικάς. Καθότι ἐκ τῶν χιλίων ἀριθμῶν, ὡς ἕκαστος τοῦτο ὀρᾷ, μόλις εἶναι δέκα τοιοῦτοι (119). Καὶ εἰς τοιαύτην λοιπὸν περιέσασιν ἡ σημειοῦται τὸ πρᾶγμα διὰ τοῦ ῥιζώδους σημείου ³V, ἐνθα δηλονότι τὸ 3 ἐμφανίζει τὴν κυβικὴν ῥί-

ζαν, ἢ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν δεκαδικῶν.. τουτέστι 10^3
πλησιάζει τις ὅσον θέλει εἰς τὴν ἀληθείαν.

Καθότι ζητεῖσθω

ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθ-
μοῦ 26. Τότε διὰ νὰ
εὗρασθω ἥττον ἐνὸς χι-
λίου εἰς τὴν ἀληθῆ
αὐτοῦ ῥίζαν, ἐγὼ προ-
σίστημι τρεῖς τριάδας μη-
δενικῶν εἰς αὐτὸν, καὶ
διαίρων αὐτὸν ὡς ἀνω-
τέρω εἰς τμήματα, ἄρ-
χομαι νὰ ζητῶ τὴν κυ-

$$\begin{array}{r|l}
 2, 962 & \\
 \hline
 26, & 000, 000, 000 \\
 8 & \\
 \hline
 18 & 0 \\
 10 & 8 \\
 4 & 86 \\
 \hline
 & 729 \\
 2523 & 1 \quad 611 \quad 0 \\
 & 1 \quad 513 \quad 8 \\
 & 31 \quad 32 \\
 & 216 \\
 \hline
 262848 & 65 \quad 664 \quad 0
 \end{array}$$

βικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου μόνου τμήματος, εἴτε τῶν 26,
ἥτις δηλοῦσι εἶναι 2. Ἐκτελῶ ὡς εἰς τὸν (122).. καὶ
οὕτω διὰ μὲν τοῦ δευτέρου τμήματος εὕρισκω ῥίζαν τὰ 9,
διὰ δὲ τοῦ τρίτου τὰ 6, διὰ δὲ τοῦ τετάρτου τὰ 2. Καὶ
οὕτως ἔχω διὰ ζητουμένην ῥίζαν ὡς ἔγγιστα τὰ 2,962 ε
ἧς περ δηλοῦσι ὁ ἐξηκριβωμένος κύβος εἶναι = 25,986
941128. Δῆλον δ' ὅτι ἐπειδὴ ὁ ἀσθὲς κύβος εἶχεν ἐν-
νέα χαρακτῆρας δεκαδικῶν (διὰ τοῦτο ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔπρε-
πε νὰ σχῇ τρεῖς. Ὡσαύτως εὕρισκω ὅτι καὶ $\sqrt[3]{3} = 1,$
442249..

124. Ἐπειδὴ δὲ καὶ διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τις τὸ τε-
τραγωνιον ἐνὸς κλάσματος ἄλλο δὲν ἔκαμεν, εἰμὴ νὰ πολ-
πλασιασῇ τὸν ἀριθμητὴν ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ τὸν παρονομαστὴν
ὡσαύτως (116) ε τούτου ἕνεκεν διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τις τὸν
κύβον ἐνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσῃ τὸν ἀ-

ριθμητὴν τοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, καὶ τὸν παρονομασὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομασὴν ἐκείνης. Οὕτως ἐπειδὴ $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2}$ διὰ τοῦτο καὶ $\frac{2^2}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$. Ὡς ἐξ ἐναντίας διὰ τὰ ἐξάξις τις τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξάξις τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀνὰ μέρος τοῦτε ἀριθμητοῦ, καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ προκύπτον κλάσμα θελεῖ εἶναι ἡ ζητούμενη ῥίζα. Οὕτως $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, καὶ $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$. Καὶ ἐπειδὴ ἡμεῖς ἐμάθομεν νὰ ἐξάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν παντὸς ἀριθμοῦ (122) ἄρα καὶ τῶν κλασμάτων.

125. Πλὴν ἂν ἦναι σπάνιοι, ὅσοι τῶν ἀριθμῶν εἶναι κύβοι ἀκριβεῖς < πολλὰ πλέον ἤθελον εἶναι τοιαῦτα τὰ κλάσματα. Ἡμεῖς ὅμως πάντοτε δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν θάτερον τῶν ὁρῶν ἑνὸς κλάσματος εἰς κύβον ἑντελῆ, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἄνω καὶ κάτω διὰ τοῦ τετραγώνου, ἢ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τοῦ παρονομαστοῦ < πλὴν προτιμᾶται ἡ τοῦ παρονομαστοῦ < καὶ οὕτως ἀνάγεται τὸ πρῶμα εἰς τὸ ἄνωτέρω συμβεβηκός (123). Καθότι ζητεῖσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$. Τότε εἶναι ὁρατὸν ὅτι $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 3^2}{3 \times 3^3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{18}$.. ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 7^2}{7 \times 7^3}} = \sqrt[3]{\frac{147}{7}} = \frac{5,27}{7}$ 0,75 ὥς ἔγγιστα ὁηλοῦντι: τουτέστιν ἦτον ἑνὸς ἑκατοστοῦ.

Ἐνίοτε ὅμως: ὅταν λέγω τὰ κλάσματα ἦναι περιοδικὰ, εἶναι ἴσως ἀπλούστερον μετὰ τὴν διαίρεσιν νὰ ἐξά-

ξη τις τὴν κυβικὴν ῥίζαν. Καθότι ζητεῖσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{5}{9}$ μετὰ τριῶν δεκαδικῶν. Τότε γράψω αὐτὸν οὕτως $\frac{5,00000000}{9}$, ὅπερ δηλ. εἶναι $= 0,555555555$: οὕτως δηλονότι ἡ κυβικὴ ῥίζα εἶναι ὡς ἔγγιστα $= 0,822$.

126. Ἄν ὅμως καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ᾗται κλασματίας, εἴτε ὁλοσχερῆς μετὰ κλάσματος τότε εἶναι ἀνάγκη νὰ μεταβάλη τις αὐτὸν πρῶτον εἰς κλάσμα ἐντελές, εἴτα ἐχομένως νὰ ἐξάγῃ τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν, ὡς ἀνωτέρω (125). Οὕτω $\sqrt[3]{17\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{53}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{477}$.

Πολλάκις ὅμως συμφέρει μᾶλλον νὰ μεταβάλη τις πρῶτον τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν (εἴτα νὰ ἐξάγῃ τὴν κυβικὴν ῥίζαν αὐτοῦ (αὐτόν)). Οὕτω ζητεῖσθω ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ $7\frac{3}{11}$ ἥττον ἐνὸς χιλιοσοῦ. Τότε ἐπειδὴ $\frac{3}{11} = 0,27272727$ ἑνεκεν $\sqrt[3]{7\frac{3}{11}} = \sqrt[3]{7,27272727} = 1,937$.

Ἄν ὅμως καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς περιέχῃ καὶ δεκαδικὰ, ὡς ὁ 26,26 φέρε εἰπεῖν τότε εἶναι ἀνάγκη προσθέμῃς τις εἰς αὐτὸν δεκαδικὰ, νὰ ἐκτελέσῃ τριῶν τούς μετὰ τὸ κόμμα χαρακτῆρας ἐθεν ἐνταῦθα πρέπει νὰ προσθέσῃ ἢ τέσσαρα, ἢ ἑπτὰ μηδενικά, ἢ κ.τ.ξ. Ὡςτε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 26,260,000,000 $= 2,978$, ὡς ἔγγιστα.

Ἡ δ' ἐξαγωγή τῆς ῥίζης τῶν ἐνωτέρω τῆς τρίτης δυνάμεως θάλει ἔχει βέβαια χώραν μὲ τὴν τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ἀλλ' ἐπειδὴ οὔτε ἡ ἀριθμητικὴ ποιεῖ χρῆσιν

τινα αὐτῶν, καὶ τὸ πρᾶγμα εἶναι περιπεπλεγμένον (τού-
του ἕνεκεν πέμποντες τοῦτο εἰς τὴν ἀλγεβραν, ἡμεῖς ἐμ-
βαίνομεν εἰς ἄλλο οὐσιώδες μέρος τῆς ἀριθμητικῆς, ὅπερ
εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ αὐτὰ ταῦτα τὰ κλάσματα ἄλλως
πὺς θεωρούμενα (καὶ τότε λαμβάνουσιν ὄνομα λόγος,
καὶ ἐκ τούτου ἀναλογία.

Κ Ε Φ. ΙΒ'.

Περὶ ἀναλογίας.

127. **Η**μεῖς εἶπομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἄλλο δὲν εἶναι,
εἰμὴ ὅλον, οὕτως τὰ μέρη εἶναι μονάδες, καὶ τοῦτο εἶ-
ναι ἢ ἐπαρίθμησις (1). Ἔτι εἶδομεν ὅτι εἶναι δυνατόν
οἱ ἀριθμοὶ νὰ ἐκκληφθῶσιν ὡς ὅλα, ὥπερ ἀντὶ νὰ ἔχωσι
μονάδας διὰ μέρη, νὰ ἔχωσι τὴν τετραγωνικὴν αὐτῶν ῥί-
ζαν (106). Τώρα ὁμῶς λέγομεν ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ
ἐκκληφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ ὡς ὅλα, ὥνπερ τὰ μέρη νὰ ᾔναι
ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν: τουτέστι καὶ τὰ 2, καὶ τὰ 3, καὶ
τὰ 100, κ. τ. ξ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 3600, ὃς τις δηλονότι
σύγκειται ἐκ 3600 μονάδων, καὶ ὃς τις $= 60^2$, ἂν μὲν
θεωρηθῇ ὡδέπως $\frac{3600}{2}$ τότε εἶναι ὅλον συγκείμενον ἐκ
δύο μερῶν, ὥνπερ θάτερον $= 1800$.. εἰδὲ καὶ οὕτω $\frac{3600}{3}$,
τότε σύγκειται ἐκ τριῶν μερῶν, ὥνπερ ἕκαστον $= 1200$..
εἰδὲ καὶ οὕτω $\frac{3600}{4}$ τότε σύγκειται ἐκ τεσσάρων μερῶν,
ὥνπερ ἕκαστον $= 900$.. εἰδὲ οὕτω $\frac{3600}{90}$ τότε σύγκειται ἐξ
ἐννευήκοντα μερῶν, ὥνπερ ἕκαστον $= 40$, καὶ οὕτως ἐ-
ξεξῆς.

Τούτων οὕτω λοιπὸν ἐχόντων, διττῶς δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ πρᾶγμα : ἢ ὡς ἐκ τοῦ ὅλου δηλ. πρὸς τὰ μέρη, ἢ ὡς ἐκ τῶν μερῶν πρὸς τὸ ὅλον (καθ' ἐκάτερον ὁμῶς παρεντίθενται δύο σιγμαὶ μεταξὺ αὐτῶν, οὕτω 360: 90, ἢ 90:360, ὥνπερ τὸ μὲν πρῶτον ἐμφανίζει ὁποῖον εἶναι τὸ ὅλον πρὸς τὸ μέρος αὐτοῦ, τὸ δὲ δεύτερον ὁποῖον εἶναι τὸ μέρος ὡς πρὸς τὸ ὅλον αὐτοῦ.. καὶ τοῦτο εἶναι ὁ λόγος εἰς τὴν ἀριθμητικὴν, ὅς τις θηλοῖσι σύγκειται ἐκ δύο ὅρων πάντοτε, ὥνπερ ὁ πρῶτος ὀνομάζεται ἡ- γούμενον, καὶ ἐπόμενον ὁ δεύτερος.

Ἄλλ' ἡμεῖς εἶδομεν ὅτι τοῦτο τὸ σημεῖον τοῦ λόγου παρίσθην ἐν ταυτῷ καὶ διαίρειν (22) (τούτου ἕνεκεν πᾶσα διαίρεσις ἄλλο δὲν ἠθέλειν εἶναι, εἰμὴ εἰς λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν.. ὥς καὶ πᾶς λόγος ἄλλο δὲν ἠθέλειν εἶναι ; εἰμὴ διαίρεσις τις. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ διαίρεσις παρίσταται διὰ κλάσματος (τούτου ἕνεκεν πᾶν κλάσμα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ λόγος δύο ἀριθμῶν. Οὕτως ἐπειδὴ $360:90=4$, καὶ $\frac{360}{90}=4$ (τούτου ἕνεκεν καὶ $360:90=\frac{360}{90}$. Ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ $90:360=\frac{1}{4}$, καὶ $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ (τούτου ἕνεκεν καὶ $90:360=\frac{90}{360}$. Καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ὑφίσταται εἰς οὐδὲν ἄλλο, ἢ ὡς πρὸς τὸ τέλος. Καθότι εἰς μὲν τὴν διαίρεσιν ζητεῖται πόσον ἔχει τις νὰ λάβῃ (εἰς δὲ τὸν λόγον, τοῦτο τὸ ὅλον πόσα μέρη ἔχει ἐν ἑαυτῷ ἴσα μὲ τὰ ἐπόμενον, ἢ τοῦτο τὸ μέρος ποσάκις ἂν ληφθῇ ἐκτελεῖ τὸ ἐπόμενον ὅλον : ὅ ἐστι μεθερμηνευόμενον εἰς μὲν τοῦ λόγου εἶναι ἀπλὴ θεωρία, εἰς δὲ τὴν διαίρεσιν, καὶ πράξις ἡ συναγόμενον. Καὶ

ἐπειδὴ τὸ συναγόμενον εἶναι ἔξωθεν τούτου ἔνεκεν εἰς τὴν ἔκφρασιν ὁ λόγος διαφέρει ὑλοτελῶς τοῦ κλάσματος. Καὶ ἐπειδὴ ἡμεῖς ὠμιλήσαμεν περὶ κλασμάτων καὶ διαιρέσεως, ἄρα ὠμιλήσαμεν καὶ περὶ λόγου.

128. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ λόγος σημαίνει ὅχι μόνον τὸ, πόσάκις εἰς ἀριθμὸς περιέχει, ἢ περιέχεται ὑπ' ἄλλου ἢ ἄλλ' ἀπλῶς ἀναφορὰν δύο ἀριθμῶν, ἢ ποσοτήτων.. καὶ ἡ ἀναφορὰ ἔχει ὅχι μόνον τὴν ἀνωτέρω σημασίαν (127) ἢ ἄλλ' ἀπλῶς πᾶσαν παραβολὴν δύο ἀριθμῶν, ἢ ποσοτήτων.. καὶ ἐπειδὴ δύναται τις νὰ παραβάλλῃ δύο ἀριθμούς, ὅχι μόνον κατὰ τὸ, πόσάκις περιέχει, ἢ περιέχεται ὁ εἰς ὑπὸ τοῦ ἑτέρου ἀλλὰ καὶ πόσον ὁ εἰς εἶναι μείζων, ἢ ἐλάσσων τοῦ ἑτέρου: ἢ ἂν θέλῃς, τὴν ὑπεροχὴν, ἢ καθυπόθεσιν τοῦ πρώτου πρὸς τὸν δεύτερον τούτου ἔνεκεν ὁ λόγος διαιρεῖται εἰς δύο: εἰς γεωμετρικὸν καὶ ἀριθμητικόν. Καὶ ὀνομάζεται γεωμετρικὸς, ἢ ὁ ἀπλῶς λόγος, ὁ ἀνωτέρω (αὐτότε) καὶ ἀριθμητικὸς ὅταν ζητῇ τις τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν. Οὕτως ἂν τις συγκρίνῃ τὰ 7 μὲ τὰ 5, ἢ τὰ 5 μὲ τὰ 7, διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ὑπεροχὴν, ἢ τὴν ὑφ᾽ ἑστίν καὶ καθυπόθεσιν, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, νὰ εὕρῃ τις τὴν διαφορὰν αὐτῶν τούτο λέγεται λόγος ἀριθμητικὸς. Διὰ νὰ ἐμφανισθῇ ὅμως ἡ σύγκρισις τῶν δύο ἀριθμῶν, παρεντίθεται μεταξὺ αὐτῶν μία σιγμὴ, οὕτω 7·5, καὶ 5·7. Ἦ γούμενον ὀνομάζεται καὶ ἐνταῦθα ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου, καὶ ἐπόμενον ὁ δεύτερος.

Ὡς διὰ νὰ εὕρῃ τις τὸν ἀριθμητικὸν λόγον δὲν ἔχει νὰ κάμῃ ἄλλο, εἰμὴ νὰ ἀφαιρέσῃ τὸν ἕνα ὅρον ἐκ τοῦ ἑτέρου. Οὕτω $5 \cdot 7 = 2$, καὶ $7 \cdot 5 = -2$. Ἐκαστος

ὅμως ὅρα, ὅτι τὸ ὄνομα γεωμετρικὸς λόγος, καὶ ἀριθμη-
τικὸς δὲν ἐπέτυχε κατὰ σκοπὸν τὴν σημασίαν.

129. Εἶναι ὅμως ἄξιον σημειώσεως ὅτι εἰς λόγος γεωμετρικὸς ἀλλάττεται ὁλοτελῶς κατὰ τὴν σημασίαν, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν ἑκάτεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ δι' ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως ὁ λόγος τῶν 3 : 12 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν 6 : 24, καὶ μὲ τὸν 30 : 120.. καὶ ὁ τῶν 30 : 120 εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν 6 : 24 καὶ μὲ τὸν 3 : 12, καὶ μὲ τὸν 1 : 4. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ γεωμετρικὸς λόγος εἶναι οὐδὲν ἄλλο πραγματικῶς, εἰμὴ κλάσμα (127).. καὶ ἐπειδὴ παντὸς κλάσματος, ἑκατέρων τῶν ὅρων πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ, ἡ σημασία διαμένει ἀμετάβλητος (τούτου ἕνεκεν καὶ ὁ γεωμετρικὸς λόγος θέλει μείνει ἀμετάβλητος (ἂν ἀμφοτέρω οἱ ὅροι πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ).

Ὡσαύτως δὲ καὶ πᾶς λόγος ἀριθμητικὸς διαμένει ἀμετάβλητος (ἂν εἰς ἑκατέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ προσθή-
σῃ τις, ἢ ἀφαιρέσῃ ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οὕτως ὄντος $5 \cdot 7 = 6 \cdot 8$, εἶναι καὶ $2 \cdot 4 = 3 \cdot 5$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ ἀριθμητικὸς λόγος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ διαφορά δύο ἀριθμῶν (128) (δηλὸν ὅτι ἂν αὐξηθῶσιν, ἢ μειωθῶσιν ἐπίσης ὅ,τε μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος, ἡ δια-
φορά αὐτῶν θέλει μείνει ἡ αὐτή.

Συμπέρασμα λοιπὸν ὅτι ἡμεῖς δυνάμεθα κάλλιστα νὰ μεταμορφώσωμεν ἓνα λόγον εἰς ἀπλούστερον, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σημασίαν αὐτοῦ. Οὕτως ἂν ὁ δοθεὶς

λόγος ἦν $3 : 120$ (ἡμεῖς ἠθέλαμεν τὸν μεταβάλλει εἰς τὸν $3 : 12$, ἢ $1 : 4$).

130. Εἰς τὸν γεωμετρικὸν λόγον ὁ Εὐκλείδης ὀνομάζει μέρος *) ἐκεῖνον τὸν ὅρον, ὅς τις καταμετρεῖ ἐξηκριθωμένως τὸν ἕτερον. Οὕτως εἰς τὸν λόγον $12 : 3$ τὰ 3 εἶναι μέρος τῶν 12. Καὶ ὀνομάζει μέρη **) ἐκεῖνον τὸν ὅρον, ὅς τις δὲν καταμετρεῖ ἐξηκριθωμένως τὸν ἕτερον. Οὕτως εἰς τὸν λόγον $12 : 5$, τὰ 5 λέγονται μέρη τῶν 12. Καὶ ἐπομένως τὸ μέρος ἔχει χώραν πάντοτε ὅταν ὁ εἰς τῶν ὁρῶν ἦναι πολλαπλάσιος τοῦ ἑτέρου (29). Ὡς μέρος καὶ πολλαπλάσιον εἶναι λέξεις συνώνυμοι.

Ἐπεὶ δὲ λόγος γεωμετρικὸς εἶναι οὔτε τὸ ἡγούμενον, οὔτε τὸ ἐπόμενον (ἀλλ' ἢ τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὸ ἐπόμενον ἀναφορὰ (127)). καὶ ἐπεὶ δὲ ἡ ἀναφορὰ δύο ἴσων ἀλλήλοις ἀριθμῶν εἶναι μονὰς ἐπόμενον εἶναι ὅσον τὸ ἡγούμενον εἶναι μείζον, ὅχι ἀπολύτως, ἀλλ' ὡς τὸ ἐπόμενον (τόσουτον καὶ ὁ λόγος αὐτῶν νὰ ἦναι μείζων, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Οὕτως ἐπεὶ δὲ $3 : 3 = 1$, καὶ $12 : 6 = 2$, καὶ $12 : 3 = 4$, καὶ $6 : 12 = \frac{1}{2}$, καὶ $3 : 12 = \frac{1}{4}$ τούτου ἕνεκεν $12 : 3 > 12 : 6 > 3 : 3 > 6 : 12 >$. Καθότι ταῦτα τρέπονται εἰς τὰ $4 > 2 > 1 > \frac{1}{2}$. Ὡς ὁ λόγος τῶν $12 : 3$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν $20 : 5$. ὡσαύτως καὶ ὁ τῶν $3 : 12$ μὲ τὸν τῶν $5 : 20$. Ἀλλὰ τὸ νὰ ἔχητις δύο λόγους ἴσους, οὗτος τί-ἄλλο ἔχει, ἢ ἐξίσωσίν τινα;

*) Εἰς τὴν Γεωμετρίαν

**) αὐτόθεν

131. Ὡς τὸ νὰ ἔχη τις δύο λόγους ἴσους ἀλλή-
 λους τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομάζεται ἀναλογία.
 Ὡς ἀναλογία εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἐξίσωσις δύο λόγων.
 Οὕτως ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν 12 : 3 εἶναι ἴσος ἢ ὁ αὐτός,
 μὲ τὸν λόγον τῶν 20 : 5· οὗτοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ὀνο-
 μάζονται ἀνάλογα, καὶ γράφονται οὕτως 12 : 3 :: 20 :
 5.. καὶ προφέρονται ὡδέπως, 12 πρὸς 3 καθὼς 20 πρὸς
 5 : ὕπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ, οἷον εἶλον εἶναι τὰ 12 τῶν 3·
 τοῖόνδε καὶ καὶ τὰ 20 τῶν 5. Ἐκ τῶν τεσσάρων λοιπὸν
 ὄρων τῆς ἀναλογίας 12 : 3 :: 20 : 5 οἱ μὲν 12 καὶ
 5 ὀνομάζονται ἄκροισι, οἱ δὲ 3 καὶ 20 μέσοι.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ λόγος πραγματικῶς ἄλλο δὲν
 εἶναι, εἰμὴ κλάσμα (127).. καὶ ἐπειδὴ ἀναλογία εἶναι
 ἰσότης δύο λόγων τοῦτου ἕνεκεν ἀναλογία ἄλλο δὲν ἤ-
 θελον εἶναι, εἰμὴ ἰσότης δύο κλασμάτων. Καθότι ἂν $12 : 3 = \frac{12}{3}$.. καὶ $20 : 5 = \frac{20}{5}$ ἐπόμενον εἶναι καὶ τὸ $12 : 3 :: 20 : 5$ νὰ ᾔναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$.
 Ὡς καὶ ἐξεναντίας $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ τὸ
 $12 : 3 :: 20 : 5$. Καὶ ἂν μέντις θεωρῇ τὸ $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ ὡς
 κλάσμα λέγει ὅτι τὰ 3 διαιροῦσι τὰ 12, ὡς τὰ 5 τὰ 20..
 εἰδὲ ὡς ἀναλογίαν τότε λέγει τὰ 12 περιέχουσι τὰ 3
 τετράκις ὥς καὶ τὰ 20 τὰ 5.

Ἄλλ' ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὰ μὲν $\frac{12}{3} = \frac{4 \times 3}{1 \times 3} = \frac{4}{1}$
 $\times 1$ καὶ δὲ $\frac{20}{5} = \frac{4 \times 5}{1 \times 5} = \frac{4}{1} \times 1$ τοῦτου ἕνεκεν πᾶσα
 ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης
 πολλαπλασιασθεῖσα διὰ τῆς μονάδος, διάφορον μορφήν
 ἐχούσης. Οὕτως ἐπειδὴ $5 = 5$, καὶ $\frac{6}{6} = \frac{7}{7} = 1$

τούτου ἔνεκεν θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{5 \times 6}{0} = \frac{5 \times 7}{7}$
 εἴτε $\frac{30}{0} = \frac{35}{7}$ καὶ διὰ τοῦτο $30 : 6 :: 35 : 7$. Πρὸς
 τούτοις ἐπειδὴ $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ καὶ $\frac{6}{0} = \frac{7}{7} = 1$ (τούτου ἔνε-
 κεν θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{6}{5 \times 0} = \frac{7}{5 \times 7}$ καὶ διὰ τοῦτο
 $6 : 30 :: 7 : 35$.. ἢ καὶ οὕτως ἐπειδὴ $5 = 5$, καὶ
 $\frac{6}{0} = \frac{7}{7}$, καὶ ἐκ τούτου $5 \times \frac{6}{0} = 5 \times \frac{7}{7}$, εἴτε $\frac{30}{0} = \frac{35}{7}$ καὶ
 διὰ τοῦτο $30 : 5 :: 35 : 7$. Ἄν ὅμως καὶ εἴπω, ὡς
 τὰ 30 περιέχουσι τὰ 5, οὕτω τὰ 7 περιέχονται εἰς τὰ
 35 καὶ τότε ὁ λόγος λέγεται ἀντιπεπονητός.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι πᾶσα ἀναλογία
 τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, καὶ πᾶσα ἐξίσωσις εἰς ἀναλογίαν.

132. Ὡς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ
 τὸ γινόμενον τῶν μέσων. Καθότι ἂν μία ἀναλογία ἄλλο
 δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐξίσωσις δύο κλασμάτων.. καὶ ἂν μία ἐ-
 ξίσωσις φθείρηται ὁλοτελῶς καὶ ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς
 πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσι δι' ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ
 ἀριθμοῦ (ἐπόμενον εἶναι, ἅντις πολλαπλασιάσῃ τὰ ἴσα
 κλάσματα διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἰδίων παραγόντων καὶ
 σχῇ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων τῆς ἀναλογίας ἴσον μὲ τὸ
 γινόμενον τῶν μέσων. Οὕτως ἐπειδὴ ἡ ἀναλογία $12 : 3 :: 20 : 5$ ἐγεννήθη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$ (131),
 ἥτις μεταμορφοῦται εἰς τὴν $12 \times 5 = 20 \times 3$,
 ἀμφοτέρων δηλ. τῶν μελῶν αὐτῆς πολλαπλασιασθέντων
 διὰ τοῦ 3×5 ἀριθμοῦ καὶ τούτου ἔνεκεν ἡ ἐξίσωσις $12 \times 5 = 20 \times 3$
 εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ δύο γινόμενα, ὧν ἑκά-
 τερον σύγκειται ἐκ τῶν δύο ὅρων τῆς ἀναλογίας $12 : 3 :: 20 : 5$ · τοῦτε πρῶτον λέγω ὅρου ἐπὶ τὸν τέταρτον,

καὶ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον: ὁ ἐστὶ μεθερμηνεύμενος, τὸ γινόμενον τῶν μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν, ἂν εἰς μίαν ἀναλογίαν ὁ πρῶτος, ἢ ὁ τέταρτος ὅρος ἦναι μονὰς τότε τὸ γινόμενον τῶν μέσων νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν τέταρτον, ἢ πρῶτον ὅρον. Οὕτως ἐπειδὴ $1:3::6:18$, καὶ $18:6::3:1$ (τούτου ἕνεκεν $18=3 \times 6$).

Συμπέρασμα β'. ὅτι ἂν μία ἀναλογία δὲν ἦναι ἄλλο, εἰμὴ ἐξίσωσις γινομένων ἐκ τε τῶν ἄκρων καὶ μέσων αὐτῆς ὅρων.. καὶ ἂν ἐξίσωσις ἄλλο δὲν ἦναι, εἰμὴ εἰς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἑκάτερα αὐτῆς τὰ μέλη (131) (ἐπόμενον εἶναι ἡ ἀναλογία νὰ μὴν ἦναι ἄλλοτε, εἰμὴ τέσσαρες παράγοντες, ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτως ἐπειδὴ $60=12 \times 5$, καὶ $=20 \times 3$ (διὰ τοῦτο καὶ $12:3::20:5$.. ὡσαύτως ἐπειδὴ $24=8 \times 3$, καὶ $=6 \times 4$ (διὰ τοῦτο $8:4::6:3$: ὁ ἐστὶν ἐκλαμβάνονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων οἱ ὅροι ἀντιπεπονηθότως (αὐτόθι).

133. Ἄν ὅμως καὶ εἰς μίαν ἀναλογίαν τὸ ἐπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἡγούμενον τοῦ δευτέρου τότε αὕτη ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται συνεχῆς, ἀλλέως, ὡς ἡ ἀνωτέρω (132), διακεκριμένη.

Οὕτως ἡ ἀναλογία $24:12::12:6$ εἶναι συνεχῆς, καὶ γράφεται οὕτω $\div\div 24:12:6$, ἐνθα δηλονότι ἡ κεραία μετὰ τῶν τεσσάρων σιγμῶν ἐμφανίζει ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ δις τὸν μέσον ὅρον. Ὡς εἰς τὴν συνεχῇ ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου (131): ὁ ἐστὶ $24 \times 6 = 12^2$

Δήλον ὅμως ὅτι ἡ συνεχὴς ἀναλογία δύναται νὰ συνιστᾶται ἐκ πλείον, ἢ τριῶν ὄρων. Οὕτω $\div$ 2: 4: 8: 16: 32: 64: κ. τ. ξ. εἶναι συνεχὴς ἀναλογία, ἥτις μεταμορφοῦται εἰς ταύτην $\div$ 2: 2²: 2³: 2⁴: 2⁵: κ. τ. ξ., ἥτις καὶ γεωμετρικὴ σειρὰ ὀνομάζεται. ταύτη ἤθελεν εἶναι καὶ αὕτη $\div$ α: α²: α³: α⁴: κ. τ. ξ.

134. Ἐκεῖ ο, ὅπερ ἐλέχθη περὶ δύο ἴσιον λόγων γεωμετρικῶν (131), ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ ἀριθμητικῶν: ὅτι ὁηλονότι δύο λόγοι ἴσοι ἀλλήλοις ἀριθμητικοὶ ἐκτελοῦσιν ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν καὶ γράφονται οὕτως 7 · 5: 4 · 2 καὶ προσφέρονται 7 πρὸς 5 καθὼς 4 πρὸς 2.

Καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν λοιπὸν ἀναλογίαν θεωρεῖται ἐξίσωσις, καὶ ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν μέσων. Οὕτω $7+2=5+4$.

Καὶ, ὡς εἰς τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν ἔχομεν συνεχὴ (133) οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν καὶ γράφεται οὕτω $\div$ 7 · 5 · 3: ἔνθα δὴλ. ἡ κεραία μετὰ τῶν δύο σιγμῶν ἐμφανίζει ὅτι πρέπει τις νὰ ἐκλάβῃ δις τὸν μέσον ὄρον. Δήλον ὅμως ὅτι καὶ ἔνθα ἡ συνεχὴς ἀναλογία δύναται νὰ συνιστᾶται ἐκ πλείον, ἢ τριῶν ὄρων, ὥσθως $\div$ 1. 2. 3. 4. 5. 6. κ. τ. ξ.

Τὸ νὰ ἐκταυθῇ ὅμως τις πλείον περὶ τῆς ἀναλογίας, τοῦτο εἶν ἤθελεν εἶναι πλείον τῆς ἀριθμητικῆς, ἀλλὰ τῆς ἀλγέδρης.

135. Εἶναι ὅμως ἄξιον βέβαια σημειώσεως τοῦτο, ὅτι πρὶν νὰ μάθωμεν τό, τί ἐστὶν ἡ ἀναλογία, ἡμεῖς τὴν ἐ-

μεταχειρίζομεθα. Καθότι ὅταν ἡμεῖς ἐλέγομεν, ὅτι εἰς πάντα πολλαπλασιασμὸν τὸ γινόμενον περιέχει θάτερον τῶν παραγόντων τοσάκις, ὅσάκις ὁ ἕτερος τὴν μονάδα (29) ϵ τί – ἄλλο ἐλέγομεν, εἰμὴ ὅτι οὗτοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογα; Καὶ ὅταν ἐλέγομεν, ὅτι εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην τοσάκις ϵ ὅσάκις τὸ πηλίκον τὴν μονάδα (38) ϵ τοῦτο – τί ἄλλο ἐσημαίνειν, εἰμὴ ὅτι οὗτοι οἱ τέσσαρες ὅροι εἶναι ἀνάλογα; Ὅμοιον θεωρεῖται καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν τῶν κλασμάτων.

Πρὸς τοῦτοις ὁ τετραγωνισμὸς ἐνὸς ἀριθμοῦ τί – ἄλλο εἶναι, εἰ μὴ εὑρεσις τοῦ τρίτου ὅρου μιᾶς συνεχούς ἀναλογίας, ἐνθα ἡ μονὰς εἶναι πρῶτος ὅρος, καὶ δευτέρος ἡ τετραγωνικὴ ρίζα; Οὕτως ὅντος, φέρε εἰπεῖν, 9 τετραγώνου τῶν 3, καὶ τῶν 16 τῶν 4 ϵ ἐγὼ ἔχω ταύτας τὰς ἀναλογίας $1:3::3:9$, καὶ $1:4::4:16$.

Ὡσαύτως καὶ ὁ κυβισμὸς ἐνὸς ἀριθμοῦ τί – ἄλλο εἶναι, ἢ εὑρεσις τοῦ τετάρτου ὅρου μιᾶς ἀναλογίας, ἐνθα ὁ μὲν πρῶτος ὅρος εἶναι μονὰς, ὁ δευτέρος ἡ κυβικὴ ρίζα, καὶ ὁ τρίτος τὸ τετράγωνόν αὐτῆς; Οὕτως ὄντων 27 κύβου τῶν 3, καὶ τὰ 9 τετραγώνου τῶν 3, ἐγὼ ἔχω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $1:3::9:27$ ϵ ἢ ἂν θέλῃς ταύτην $1:3::3^2:3^3$, ὡς δηλονότι εἶδόμεν εἰς τὸν (133). Ἡ δὲ ἐξαγωγή τῆς τε τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ρίζης, τί – ἄλλο εἶναι, εἰ μὴ εὑρεσις ὅρου μιᾶς ἀναλογίας, ἐνθα εἶναι δεδομένοι οἱ λοιποί;

136. Δευτέρᾳ σημείωσις ἐνταῦθα ἠθελὲν εἶναι αὕτη. Πᾶς ἀριθμὸς θεωρούμενος ὅχι ὡς κεφάλαιον μονάδων ϵ

ἀλλ' ὡς γινόμενον δύο παραγόντων (127), ὀνομάζεται ἐπίπεδος. Καὶ ὁ λόγος εἶναι ὅτι ὁ μὲν εἰς τῶν παραγόντων δύναται καὶ ἐκληφθῇ ὡς βάσις, ὁ δ' ἕτερος ὡς ὕψος, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δηλονότι τῶν ὁποίων καὶ συνιστᾶται ὀρθογώνιον. Ὡς ἐκάτερα τὰ μέλη μιᾶς ἐξίσωσως ἄλλο ὅθεν εἶναι, εἴμῃ ἀριθμοὶ ἐπίπεδοι. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐν ταυτῷ εἶναι καὶ ἴσα ἀλλήλοις τὰ μέλη τοῦτου ἔνεκεν εἶναι ἀνάγκη οἱ παράγοντες αὐτῶν καὶ ἀντιπάσχωσιν (132). Οὕτως οὗτος $60 = 12 \times 5$, καὶ $= 20 \times 3$ ἢ ἀναλογία αὐτῶν ἤθελε γένῃ οὕτως $12 : 3 :: 20 : 5$ (αὐτόθεν) : ὁ ἐς τῶν ὅρων λαμβανομένων ἀντιπεπονθότως, ὡν περ αἱ μὲν βάσεις ὀνομάζονται ὅροι ὁμοσεθεῖς, ἢ ὁμόλογοι, τὰ δὲ ὕψη ὡσαύτως.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀδιάφορον, α'. ὅποιον τῶν ὀρθογωνίων καὶ ἐκλάθῃ τις πρῶτον, β'. ὅποιον τῶν πλευρῶν αὐτῶν καὶ ἐκλάθῃ διὰ βάσιν, ἢ ὕψος τοῦτου ἔνεκεν ἢ ἐξίσωσις $12 \times 5 = 20 \times 5$, εἴτε ἢ ἀναλογία $12 : 3 :: 20 : 5$ ἤθελε λάβῃ πολλὰς μορφάς, ὡς ὁρᾶται.

$$12 : 3 :: 20 : 5$$

$$12 : 20 :: 3 : 5$$

$$5 : 20 :: 3 : 12$$

$$5 : 3 :: 20 : 12$$

$$3 : 12 :: 5 : 20$$

$$3 : 5 :: 12 : 20$$

$$20 : 12 :: 5 : 3$$

$$20 : 5 :: 12 : 3$$

Ἐνθα δηλονότι, ὡς ὁρᾶται, εἰς ἐκάστην ἀναλογίαν διασώζεται ὁ γενικὸς νόμος : τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν

ἄκρων νὰ ᾖται ἴσου μετὰ τὸ γινόμενον τῶν μέσων: τουτέστι

60 (132). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ αὐτὸς ὁ νόμος φυλάττεται καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν $12 + 20 : 3 + 5 :: 12 : 3$ (τούτου ἕνεκεν εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγούμενων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπομένων, ὡς ἔν ἡγούμενον πρὸς τὸ ἴδιον ἐπόμενον. Ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ $20 - 12 : 5 - 3 :: 12 : 3$ (τούτου ἕνεκεν εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορά τῶν ἡγούμενων ἔχει πρὸς τὴν διαφοράν τῶν ἐπομένων, ὡς ἔν ἡγούμενον πρὸς τὸ ἴδιον ἐπόμενον.

Εἰ δὲ καὶ θελήσειτε νὰ παραβάλητε δύο ἐπιπέδους ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους, ἤθελεν ἰδοῖ ὅτι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν παραγόντων αὐτῶν. Οὕτως ὁ λόγος 60 : 20 εἶναι ἴσος μετὰ τὸν $12 \times 5 : 10 \times 2$, εἴτε $\frac{12}{10} \times \frac{5}{2}$. Καθότι $60 : 20 = 3$, καὶ $12 \times 5 : 10 \times 2$ εἶναι ἴσος μετὰ τὸν $12 : 10 \times 5 : 2$, εἴτε $\frac{12}{10} \times \frac{5}{2} = 1 \frac{1}{5} \times 2 \frac{1}{2} = 3$. ὡσαύτως καὶ $60 : 20 = 30 \times 2 : 10 \times 2 = 30 : 10 \times 2 : 2$, ἢ $30 : 2 \times 2 : 10 = \frac{30}{2} \times \frac{2}{10} = 15 \times \frac{1}{5} = 3$, ὅς τις καὶ λόγος σύμθετος, ἢ συγχείμενος ἐνομάζεται.

137. Ἄν λοιπὸν, ὅπερ εἶναι ἡ κυριωτέρα χρῆσις τῆς ἀναλογίας, καὶ μία ἀναλογία ᾗται οὐδὲν ἄλλο, ἢ μία ἰσότης τῶν γινόμενων. Ἐκ τε τῶν ἄκρων καὶ μέσων αὐτῆς ὄρων ἀκόλουθον εἶναι, δοθέντων τῶν τριῶν ὄρων μιᾶς ἀναλογίας, νὰ εὕρηται τὸν τέταρτον. Καθότι ὁ τοιοῦτος ἄλλο δὲν ἤθελεν εἶναι, εἰμὴ τὸ πηλίκον τὸ προκύπτον ἐκ μιᾶς διαιρέσεως, ἐνθα ὁ μὲν διαιρετέος νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν μέσων, διαιρετὴς δὲ ὁ πρῶτος ὄρος. Οὕτως

ἔσω ἄγνωστος ὁ τέταρτος ὅρος εἰς τὴν ἀναλογίαν $12:3::$
 $20:\chi$. Καὶ ἐπομένως ἔξω $20 \times 3 = 12\chi$ (132). Ὡσε
 διαιρῶν ἑκάτερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως δι' ἐνὸς καὶ τοῦ
 αὐτοῦ ἀριθμοῦ: τοῦ 12 λέγω, ἔξω $\chi = \frac{20 \times 3}{12} = 5$.

Ἄν δὲ καὶ ἡ ἀναλογία ἦναι συνεχῆς, καὶ ἄγνωστος
 ὁ μέσος ὅρος τότε εἶναι ἀνάγκη πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ ἐ-
 ξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Οὕτως ἔσω εἰς τὴν ἀ-
 ναλογίαν $1:3::3:9$, εἴτε εἰς τὴν $\div\div 1:3:9$,
 ἄγνωστος ὁ μέσος ὅρος, ὅπερ ὀνομάζω μ τότε ἔξω ταύτην
 τὴν ἀναλογίαν $1:\mu::\mu:9$ καὶ διὰ τοῦτο $\mu^2 = 9$ ϵ
 ὅθεν $\mu = \sqrt{9} = 3$. Καὶ τοῦτο εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ὀνομά-
 ζεται μέθοδος τῶν τριῶν.

Κ Ε Φ. ΙΒ'.

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

138. Ἡ μέθοδος λοιπὸν τῶν τριῶν εἶναι ἄλλοτι,
 εἰμὴ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία, ἔνθα οὐτῶν διδομένων τῶν
 τριῶν ὁρῶν, ζητεῖται ὁ τέταρτος. Εἶναι ὅμως τοσούτου
 ἀναγκαία εἰς τὴν πολιτείαν ὥς εἰς πᾶν βῆμα ποδὸς εἰς
 τὸν ἐμπορικὸν βίον τὴν ἀπαντᾶ τις. Καὶ τοῦτου ἔνσκεν ἡ
 ἀναλογία εἶναι τῶν ὧν οὐκ ἄνευ, ὅχι μόνον εἰς τὰς ἐπιση-
 μας ἀλλ' οὐδαμῶς ὀλιγώτερον καὶ εἰς τὸν πολιτικὸν βίον,
 εἴτε εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ τὰς λοιπὰς τέχνας.

Καὶ ἀγκαλὰ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι οὐδὲν ἄλ-
 λο, εἰμὴ σαφὲς ἀναλογία ϵ διὰ τὴν σύμπτωσιν ὅμως
 τινῶν περιστάσεων, ἠβέλησαν οἱ ἀριθμητικοὶ νὰ δώσωσιν

κῆς αὐτῶν διὰ τὰς ἐνέμαρτα, ὁὐκ ἔμελλεν αὐτῶν εὐ-
θεΐαν ἀπλῆν, ἀπλῆν ἀνταπεικονοθῆεν, σὺν-
θετον, σὺνθετον ἀνταπεικονοθῆεν, τῆς σὺν-
τροφίας, κ.τ.ξ. ἄπειρ πρᾶγματιως εἶναι· οὐδὲν ἄλλο,
εἰμὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ἀναλογία, καὶ διαφέρουσα ταῦτα
πᾶντα μόνον τῷ ἐνέματι, ὡς ἔκκευς θίλει πληροσφρηθῆ
εἰς αὐτῶν τῶν πρᾶγματων.

Εἶναι ὅμως οὐκ ὀφείει σαφές, ὅτι εἰς τὴν μέθοδον τῶν
τριῶν πρέπει νὰ ὑπονοῦται ἀμετασλήτων τὸ πρᾶγμα, καὶ
οἱ ὅροι αὐτῆς οἱ ἐμειθεῖς (136) νὰ κατέχων τὸν χώρον
αὐτῶν, ἀλλήως τὸ συναγόμενον ἦθελεν εἶναι ἡμαρτημέ-
νον. Οὕτω λέγωντες, αὐ εἰς ἐργάτης ἔσταθμεν εἰς 10
ἡμέρας· πέντε ἐργάται εἰς 20 ἡμέρας πόσον — ἦθελον
σταθμοί· πρέπει νὰ ὑπονοῇ ὅτι ὁ πρῶτος ἐργάτης ἔπρεπε
νὰ σκάπη ἐπίσης καθεκάστην, καὶ ὅτι οἱ πέντε ἐργάται
νὰ ἦναι καὶ τῆς αὐτῆς δύναμεως, καὶ νὰ σκάπτωσιν ἐπί-
σης (καὶ εἴη ἂν ὁ εἰς ἐργάτης ἦν ἀνθρώπος ἀνθρώποι νὰ
ἦναι καὶ οἱ πέντε).

Περὶ τῆς ἀπλῆς καὶ εὐθείας μεθόδου τῶν τριῶν.

139. Ἡ ἀπλῆ λαπὸν καὶ εὐθεΐα μέθοδος
τῶν τριῶν ὡς ἐμαρβη ἀπλῆ, μὲν, ἐκ τοῦ διότι τὸ πρό-
βλημα εἶναι περιέχει μάλλον τῶν τεσσάρων ὅρων· εὐθεία
δὲ ἐκ τοῦ διότι ἐκ τῶν τεσσάρων ὅρων οἱ δύο ὄχι μόνον
ἀναφέρονται πρὸς τοὺς λοιποὺς δύο (ἀλλὰ καὶ εἶναι καὶ

αἰτία αὐτῶν, ἢ ἴσα, ὅπερ ἤθελε σαφηνισθῇ διὰ παραδείγματων.

Παράδειγμα α'. 20 ἐργάται ἔσκαψαν εἰς τινὰ χρόνον 124 ὀργυιάς τετραγωνικάς.. 30 ἐργάται – εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, πόσας ὀργυιάς ἔχουσι νὰ σκάψωσι; Ὀνομάζω χ τὰς ζητούμενας ὀργυιάς ἢ καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $20 : 124 :: 30 : \chi$, ἢ καὶ οὕτως $20 : 30 :: 124 : \chi$, τουτέστι $2 : 3 :: 124 : \chi$: ὅ ἐστι $2 \chi = 124 \times 3$, καὶ $\chi = \frac{124 \times 3}{2} = 186$.

Παράδειγμα β'. 1 τοῦ οὐρανοῦ εἶναι ἴση μὲ 25 Γαλλικάς λέγας, ἐπὶ τῆς γῆς.. ζητεῖται – λοιπὸν 360 τοῦ μεσημβρινοῦ, ἢ ἂν θέλῃς ἡ περιφέρεια τῆς γῆς, πόσας λέγας συνέχουσι; Ὀνομάζω χ ταύτας τὰς λέγας ἢ καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $1 : 25 :: 360 : \chi$, ἢ καὶ οὕτω $1 : 360 : 25 . \chi$: ὅ ἐστι $\chi = 360 \times 25 = 8700$.

Παράδειγμα γ'. ἐδόθησαν 62 28 πρὸς οἰκοδομὴν $\epsilon\rho \pi \delta$ 7 5 5 ἢ καὶ ζητεῖται πόσα – ἔχει νὰ δώσῃ τις διὰ 23 $\pi \delta$ 3 3 τῆς αὐτῆς οἰκοδομῆς; Ὀνομάζω χ τὴν ζητούμενην τιμὴν τῆς οἰκοδομῆς ἢ καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $\epsilon\rho \pi \delta$ 7 5 5 : 62 28 :: 23 3 3 : χ , ἢ καὶ οὕτως 7

$\pi \delta : \epsilon \rho \pi \delta : \gamma \rho \pi \rho$
 $55 : 2333 : 6228 : \chi$, ἡ μεταβάλλων ταῦτα
 εἰς τὰς μικροτάτας μονάδας, ἔξω $564 : 1692 :: 2508 :$
 $\pi \rho \delta \delta \pi \rho \pi \rho$
 χ καὶ διὰ τοῦτο $141 : 423 :: 2508 : \chi$ ἔθεν $\chi =$
 18613 .

Παράδειγμα δ'. 10 πήχεις ὑφάσματος σθηκῶ ἐκ-
 τιμῶνται 30 γροσίων.. καὶ ζητεῖται πόση – εἶναι ἡ τιμὴ
 25 πηχῶν τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; Ὀνομάζω χ τὴν ζη-
 τουμένην τιμὴν ϵ καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν, $10 :$
 $30 :: 25 : \chi$, ἡ καὶ οὕτως $10 : 25 :: 30 : \chi$, εἴτε
 $2 : 5 :: 30 : \chi$ ἔθεν $\chi = \frac{30 \times 5}{2} = 75$.

Ἐνθα δηλονότι οἱ ὁμοειδεῖς ὅροι, οἱ ὄντες εἰς μὲν
 τὸ α'. παράδειγμα, οἱ ἐργάται εἰς δὲ τὸ β'. αἱ μοῖραι
 εἰς δὲ τὸ γ'. αἱ ὀργυαὶ εἰς δὲ τὸ δ'. οἱ πήχεις, δύ-
 νανται νὰ ἐκληφθῶσι καὶ ἡγούμενα τῶν δύο λόγων, καὶ
 ὅροι τοῦ ἐνὸς μόνου λόγου, ὅπερ ἀδυνατεῖ νὰ ὑπάρξῃ εἰς
 τὴν ἀπλὴν καὶ ἀντιπεπονθυῖαν μέθοδον τῶν τριῶν, ἐξ οὗ
 καὶ τὸ ὄνομα ἔλαβε.

Περὶ τῆς ἀπλῆς καὶ ἀντιπεπονθυίας με-
 θόδου τῶν τριῶν.

140. Ἡ ἀπλὴ λοιπὸν καὶ ἀντιπεπονθυῖα μέθοδος τῶν
 τριῶν ὠνομάσθη μὲν ἀπλὴ ϵ ἐκ τοῦ διότι τὸ πρόβλημα

δὲν περιέχει μᾶλλον τῶν τεσσάρων ὅρων ἡ ἀντιπεπονηθὺς δὲ ἔκ τοῦ διότι οἱ δύο ὁμοιοθεῖς αὐτῆς ὅροι εἶναι ὁλοτελῶς ἀνάλογα μὲ τοὺς λοιπούς· δύο ὁμοιοθεῖς ἢ ἀλλ' ἀντιπεπονηδότης, καὶ διὰ τοῦτο ὁ ἄγνωστος ὅρος κατέχει τὸν τρίτον χώρον τῆς ἀναλογίας· ἢ ἂν θέλῃς εἶναι παρονομασῆς τοῦ τετάρτου· ὁ ἐστὶν εἰς τοῦτο τὸ πρόβλημα ἑκάτερος τῶν προφερομένων λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα ἢ καὶ διὰ τοῦτο καὶ πρὸς ἀλλήλους ἢ καὶ τούτου ἕνεκεν διὰ τὰ μεταβληθῶσιν εἰς ἀναλογίαν εἶναι ἀνάγκη τὰ ληθῶσιν ἀντιπεπονηδότης (131) ἢ ὡς τὸ πρᾶγμα ὁράται ἐπὶ τῶν παραδείγματων.

Παράδειγμα α. 12 ἐργάται εἰς 5 ἡμέρας ἔσκαψαν τὸν σὸν ἀμπελῶνα.. 20 ἐργάται εἰς πόσας — ἡμέρας δύνανται τὰ τὸν σκάψωσι; ἂν ὀνομάσω μ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, ὅνπερ ἔχουσι τὰ θάπανήσωσιν, ὥς τὰ σκάψωσι τὸν ἀμπελῶνα, καὶ ὡ τὸν ἀμπελῶνα ἢ ἔξω $12\acute{\epsilon}\rho \times 5^{\eta} = \omega$, καὶ $20\acute{\epsilon}\rho \times \mu^{\eta} = \omega$.. ἔκ τοῦ διότι δηλονότι καὶ εἰς ἑκάτερα τὰ μέρη οἱ ἐργάται ἔχουσι τὰ ἐκτελέσωσιν ἐν καὶ τὸ αὐτὸ ἔργον. Ὡς $12\acute{\epsilon}\rho \times 5^{\eta} = 20\acute{\epsilon}\rho \mu^{\eta}$.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἐξίσωσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ μία ἀναλογία (αὐτόθι)· τούτου ἕνεκεν καὶ ἐγὼ ἔξω $12\acute{\epsilon}\rho : 20\acute{\epsilon}\rho :: \mu^{\eta} : 5^{\eta}$, εἴτε $3\acute{\epsilon}\rho : 5\acute{\epsilon}\rho :: \mu^{\eta} : 5^{\eta}$ · εἴτε $3\acute{\epsilon}\rho : 5\acute{\epsilon}\rho :: 1^{\eta} : \frac{5^{\eta}}{\mu^{\eta}}$ ἢ ὅθεν $\mu^{\eta} = 3^{\eta}$, ἐνθα, ὡς ὁράται, οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου μέρους τοῦ προβλήματος· τὸ 12 ἐργάται λέγω, καὶ τὸ 5 ἡμέραι, δὲν εἶναι εἰς λόγος· ἢ ἂν θέλῃς, ἐν κλάσμα καὶ ὡς οὔτε οἱ τοῦ δευτέρου μέρους, εἴτε τὸ 20 ἐργάται καὶ τὸ μ ἡμέραι καὶ διὰ

τουτο οὔτε ἀνάλογα καὶ ἀλλὰ γινόμενα καὶ ἴσα πρὸς ἀλλή-
λα καὶ ἐπομένως καὶ ἀντιπάσχουσιν οἱ ὅροι αὐτῶν, εἴτε
αἱ ἡμέραι μὲ τοὺς ὅρους τῶν ἐργασιῶν.

Παράδειγμα β'. Δι' ἐν ἔνδυμα ἔφθασεν ὕφασμα 6
πηχῶν, ὄντος τοῦ πλάτους αὐτοῦ $\frac{2}{3}$ πήχεως.. ἂν λοιπὸν
καὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ ᾗ $\frac{3}{4}$ πήχεως πόσοι - πήχεις ἤθελον
φθάσαι; Ὀνομάζω χ τοὺς ζητούμενους πήχεις.. καὶ ἐ-
πειδὴ τὸ ἔνδυμα εἶναι ἐν καθ' ἑκάτερα διὰ τοῦτο ἔξω
 $\overset{\text{πηχ}}{6} \times \overset{\text{πηχ}}{\frac{2}{3}} = 1$, καὶ $\overset{\text{πηχ}}{\frac{3}{4}} \chi = 1$ καὶ διὰ τοῦτο $\frac{3}{4} \chi = 6 \times \frac{2}{3}$,
εἴτε $\chi = 5 \frac{1}{3}$. Καὶ ἐπομένως ἡ ἀναλογία ἤθελεν εἶναι
 $\overset{\text{πλ}}{\text{τοιαύτη}} \frac{2}{3} : \overset{\text{πλ}}{\frac{3}{4}} :: \overset{\text{πηχ}}{\chi} : 6$, εἴτε $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} :: 1 : \frac{6}{\chi}$.

Παράδειγμα γ'. Τὰ ἐφόδια ἐνὸς πλοίου ἦσαν ἰκα-
νὰ διὰ 12 ἡμέρας.. τοῦ καιροῦ ἐμποδίσαντος, ἔπρεπε
να ζήσῃσι δι' αὐτῶν 20 ἡμέρας.. ζητεῖται λοιπὸν πόσον
πρέπει νὰ σμικρυνθῇ ἐκάστου ἡ μερίς διὰ νὰ ἐξαρκέσῃσι
τὰ ἐφόδια. Ὀνομάζω χ τὴν μερίδα ἐκάστου τὴν εἰς τὴν
δευτέραν περίεσιν, οὗσης 1 δηλονότι εἰς τὴν πρώτην ϵ
καὶ οὕτως ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $12 : 20 :: \chi : 1$ $\overset{\eta}{\chi} \overset{\eta}{\mu\epsilon}$
καὶ διὰ τοῦτο $\chi = \frac{3}{5}$. Καθότι ὄντων τῶν αὐτῶν καὶ τῶν
ἐφοδίων καὶ τῶν ἐσθιόντων, ὅσον ὁ χρόνος αὐξάνει ἐπο-
σοῦτον ἡ μερίς ἐκάστου ἔχει νὰ σμικρυνθῇ, ὅπερ δηλονότι
εἶναι ὁ ἀντιπεπονηὸς λόγος.

Παράδειγμα δ'. Ἐχοντος τοῦ σίτου $4 \frac{1}{2}$ γρόσια το
κοιλὸν, τὸ ψωμὸν ἐπωλεῖτο πρὸς 60 δραχμας τοῦ παρῆ. ὁ

σίτος ἤδη τιμᾶται 9 ἰρ. τὸ κοιλὸν.. πόσα-πρέπει νὰ πω-
 λῆται τὸ ψωμίον; Ἐγὼ λέγω $4\frac{1}{2}$ γρ. = 180 παρ. &
 ἀλλ' 180 παρ.=1 κοιλῶ.. καὶ ὡσαύτως 9 γρ.=360 παρ..
 ὅθεν καὶ 360 παρ.=1 κοιλῶ. Ἀλλὰ πρῶτον ἐπωλείτο 60
 δραχμαὶ εἰς τὸν παρὰ $\overset{\pi}{\text{ὡς}} 180 \times \overset{\delta\rho}{60} = 1$ ὡσαύτως 360
 $\times \overset{\delta\rho}{\psi} = 1$. καὶ διὰ τοῦτο $180 : 360 :: \psi : 60$, εἴτε $1 :$
 $2 :: \psi : 60$.. καὶ διὰ τοῦτο $\psi = 30$, ὅπερ καὶ ἄνευ ἀ-
 ναλογίας ἤθελεν εὑρεθῆ. Καθότι ἂν ἡ τιμὴ τοῦ σίτου ἐ-
 διπλασιάσθῃ, ὁῖλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ ψωμίου θέλει διπλασια-
 σθῇ καὶ ἐχομένως νὰ ὑποδιπλασιασθῶσιν αἱ δραχμαί.

Περὶ τῆς συνθέτου καὶ εὐθυίας μεθόδου τῶν τριῶν.

141. Ἄν ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ἔχῃ μὲν ἑκατέρους
 τοὺς ὁμοειδεῖς ὅρους ἀνάλογα μὲ ἑκατέρους τοὺς ὁμοει-
 δεῖς πλην πάντας, ἢ τινὰς ἐξ αὐτῶν συνθέτους ἐκ δύο,
 ἢ τριῶν παραγόντων (τότε ὀνομάζεται σύνθετος.

Παρόδειγμα α'. 20. ἐργάται εἰς 8 ἡμέρας ἔσκα-
 ψαν 124 ὀργυιάς τετραγωνικάς.. 30 ἐργάται λοιπὸν εἰς
 10 ἡμέρας πόσας ὀργυιάς ἔχουσι νὰ σκάψωσι; Ὀνο-
 μάξω ψ τὰς ζητούμενας ὀργυιάς καὶ συλλογίζομαι ὥδε
 πῶς. Ἡ 20 ἐργάται νὰ σκάψωσι 8 ἡμέρας, ἢ 160
 μίαν, εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ.. ὡσαύτως καὶ, ἢ 30 ἐργάται
 νὰ σκάψωσι 10 ἡμέρας, ἢ 300 μίαν, εἶναι ἐν καὶ τὸ
 αὐτὸ.. ὥς ἐξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $160 : 300 ::$

$$124: \psi, \text{ είτε } 8: 15 :: 124: \psi \text{ ὅθεν } \psi = \frac{124 \times 15}{8} =$$

$\frac{31 \times 15}{2} = 232 \frac{1}{2}$. Ἄν ὁμως καὶ ἔβαλλον τοὺς ἐργάτας πολλαπλασιαζομένους ἐπὶ τὰς ἡμέρας: ἢ ἂν θέλῃς, ἂν ἐκθετον τὴν ἀναλογίαν συνθετικῶς, καὶ ὅχι ἀπλῶς ἡθε-
λον ἔχοι ταύτην $20 \times 8: 30 \times 10 :: 124: \psi$, ἥτις
δηλονότι διαφέρει ὁλοτελῶς τῆς ἀνωτέρω, εἰμὴ καθὺ οἱ
ὅροι τοῦ πρώτου λόγου εἶναι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

Παράδειγμα β'. 10. ἐργάται ἐσκαψαν ἐντὸς φρέα-
τος 18 ὀργυιάς εἰς τινα χρόνον, ἔκθα καθημερινῶς ἐξήν-
τλουν 5 πόδας νεροῦ. 20 λοιπὸν ἐργάται εἰς τὸν αὐτὸν
χρόνον, καὶ ἐξαιτλῶσι 8 πόδας νεροῦ καθημερινῶς, πόσας
ὀργυιάς θέλουσι σκάψοι; Ὀνομάζω ψ τὰς ζητούμενας ὀρ-
γυιάς, καὶ ἐπειδὴ ὡς τὸ σκάψιμον οὕτω καὶ ἡ ἐξαιτλη-
σις τοῦ νεροῦ εἶναι ἔργον τῶν ἐργατῶν: τουτέστιν ἀποτε-
λεσμα δυνάμεων τούτου ἕνεκεν αἱ δυνάμεις θέλουσιν
εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ ἀποτελέσματα αὐτῶν ὅθεν ἔξω
 $10: 20 :: 18 \times 5: 8 \psi$, ἔτε $1: 2 :: 18 \times 5: 8$

ψ καὶ διὰ τοῦτο $\psi = \frac{18 \times 5 \times 2}{8} = \frac{9 \times 5}{2} = 22 \frac{1}{2}$: ἔκθα
δηλονότι οὕσης μείζονος τῆς ἐξαιτλήσεως, τὸ σκάψιμον
ὑπῆρξεν ἑλάσσον, ἢ εἰς τοὺς πρώτους ἐργάτας. Ἄν ὁ-
μως προσεθῇ καὶ ὁ χρόνος τὸ πρόβλημα: θέλει γενέται
εἰς συνθετον.

Παράδειγμα γ'. 10 τέκτονες ἐργαζόμενοι 12 ὥρας
τὴν ἡμέραν, εἰς 8 ἡμέρας ὑπεδόμησαν 124 ὀργυιάς τε-
τραγωνικάς. 20 λοιπὸν τέκτονες ἐργαζόμενοι 11 ὥρας

τὴν ἡμέραν, εἰς 7 ἡμέρας πόσας-ὀργυιάς θέλουσιν οἰκοδομήσει; Δῆλον ὅτι οὗτοι οἱ ἐπτά ἐγνωσμένοι ὄροι μεταβάλλονται εἰς τρεῖς: ὁ ἓστιν εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν (139). Καθότι τὸ τέκτονες, καὶ τὸ ὥραι, καὶ τὸ ἡμέραι εἶναι πραγματικῶς εἰς ὄρος.. καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζων ψ τὸ ζή-

τούμενον ἀποτέλεσμα ἐξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $10 \overset{τίκ}{\times} 12 \overset{τίκ}{\times} 8: 20 \overset{τίκ}{\times} 11 \overset{ὄρ}{\times} 7 :: 124: \psi$, εἴτε $12: 77 :: 31: \psi$ καὶ διὰ τοῦτο $\psi = 198 \frac{11}{12}$.

Εἶναι ὅμως δυνατόν νὰ τεθῶσι καὶ ἄλλαι περιστάσεις, ὡς νὰ μεταβληθῇ τὸ πρῶτον εἰς μᾶλλον σύνθετον ἢ πλὴν πάντετε δυνατόν εἰς τὸ νὰ μεταβληθῇ εἰς τὴν ἀπλὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

20. Ἔργαται, φέρε εἰπεῖν, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 22 ἡμέρας ἐξήγαγον χῶμα 70 ὀργυιῶν κυβικῶν.. τῶρα ζητεῖται ἂν οἱ ἐργάται ἦσαν 14, καὶ ἐργάζωντο 9 ὥρας τὴν ἡμέραν εἰς 44 ἡμέρας πόσον χῶμα ἤθελον ἐξάξαι, ὑποτιθεμένου ἐν ταυτῷ ἡμῖν δύναμις τῶν πρώτων νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν δύναμιν τῶν δευτέρων, ὡς 4 πρὸς 5 (ἡ δὲ σκληρότης τῆς γῆς τῶν πρώτων ὡς πρὸς τῶν δευτέρων, ὡς 8 πρὸς 9;

Τώρα εἶναι ὀρατὸν ὅτι τὸ ἐργάται, τὸ ἡμέραι, τὸ ὥραι, καὶ ἡ δύναμις τῶν ἐργατῶν εἶναι αἷτιον καὶ ὅτι τὸ ἐξαχθισόμενον χῶμα καὶ ἡ ἀντίστασις τῆς γῆς εἶναι ἀποτέλεσμα

καὶ διὰ τοῦτο ἐξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν. $20 \overset{ὄρ}{\times} 10 \overset{ὄρ}{\times} 22 \times 4: 14 \overset{ὄρ}{\times} 9 \overset{ὄρ}{\times} 44 \times 5 :: 70 \overset{ὄρ}{\times} 8: 9 \psi$, εἴτε $11: \psi$

$\overset{\epsilon\rho}{7} :: \overset{\epsilon\rho}{1386} : 9\psi$, $\overset{\epsilon\rho}{\eta} \overset{\epsilon\rho}{11} : \overset{\epsilon\rho}{7} :: \overset{\epsilon\rho}{154} : \psi$ και διὰ τοῦτο
 $\psi = \overset{\epsilon\rho, \chi\omega\mu}{98}$.

Περὶ τῆς συνθέτου καὶ ἀντιπεπονθυίας με-
 θόδου τῶν τριῶν.

142. Ἄν ὁμῶς καὶ εἰς τὴν ἐκτεθεῖσαν σύνθετον μέθωδον τῶν τριῶν ᾗναι τὰ δύο ἐπόμενα ἴσα ἀλλήλοις· τότε ἀναγκαίως καὶ τὰ ἡγούμενα θείλουσιν εἶναι ὡσάυτως· καὶ ἐπομένως αὕτη ἡ ἀναλογία τότε ἀλλάσσει ὄνομα, καὶ ἀντὶ εὐθείας ὀνομάζεται ἀντιπεπονθυία (140). Καὶ ἂν μὲν ἐκάτερον τῶν ἡγουμένων ᾗναι ἀριθμὸς μὴ ἐκ μάλ-
 λον, ἢ δύο παραγόντων συγκείμενος ὀνομάζεται ἀπλῇ αὕτη ἡ μέθοδος· εἰδὲ μὴ, σύνθετος. Καὶ ἰδοὺ πῶς.

12 τέκτονες ὠκοδόμησαν μίαν οἰκίαν εἰς 5 ἔτη..
 20 τέκτονες εἰς πόσα-ἔτη ἤβελον τὴν οἰκοδομήσει; ὀνομά-
 ζω ὡ ταῦτα τὰ ἔτη· καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $12 \times 5 : 1 :: 20 \times \omega : 1$, εἴτε $12 \times 5 : 20 \times \omega :: 1 : 1$ (136). Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἔροι τοῦ δευτέρου λόγου εἶ-
 ναι ἴσοι· ἄρα καὶ οἱ τοῦ πρώτου· καὶ διὰ τοῦτο $\overset{\tau\iota\kappa}{\overset{\tau\iota\kappa}{12}} \overset{\epsilon\tau}{\times} \overset{\epsilon\tau}{5} = 20 \times \omega$, ὅθεν $12 : 20 :: \omega : 5$ καὶ διὰ τοῦτο
 $\overset{\epsilon\tau}{\omega} = 3$ · ὃ ἐστὶν εἶναι ἡ λεγομένη ἀπλῇ ἀντιπεπονθυία μέ-
 θωδος τῶν τριῶν (αὐτόθι)· ἰδοὺ καὶ ἡ σύνθετος.

Παράδειγμα α'. 12 τέκτονες ὠκοδόμησαν εἰς 5 ἔτη, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας· τὴν ἡμέραν, μίαν οἰκίαν.. 20 λοιπὸν τέκτονες ἐργαζόμενοι 9 ὥρας· τὴν ἡμέραν, εἰς

πότα - ἔτη ἤθελον τὴν οἰκοδομήσοι; ὀνομάζω ω τοῦτον τὸν ζητούμενον χρόνον (καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $12 \times 10 \times 5 : 1 :: 20 \times 9 \times \omega : 1$, εἴτε $12 \times 10 \times 5 : 20 \times 9 \times \omega :: 1 : 1$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου λόγου εἶναι ἴσοι ἄρα καὶ οἱ τοῦ πρώτου καὶ διὰ τοῦτο $12 \times 10 \times 5 = 20 \times 9 \times \omega$. ὅθεν $12 \times 10 : 20 \times 9 :: \omega : 5$ καὶ διὰ τοῦτο $\omega = \frac{12 \times 10 \times 5}{20 \times 9} = 3 \frac{1}{3} = 3$ καὶ τέσσαρσι μῆσι.

Παράδειγμα β'. 20 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς 22 ἡμέρας ἐξήγαγον χῶμα 70 ἐργουῶν κυδικῶν.. 14 λοιπὸν ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας-ἡμέρας ἤθελον ἐξάξοι χῶμα ἴσον; ὀνομάζω ω τοῦτον τὸν χρόνον (καὶ ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $20 \times 10 \times 22 : 70 :: 14 \times 9 \times \omega : 70$, εἴτε $20 \times 10 \times 22 : 14 \times 9 \times \omega :: 70 : 70$. Καὶ διὰ τοῦτο $20 \times 10 \times 22 = 14 \times 9 \times \omega$: τουτέστιν ἀντιπεπονητὰ ἡ μέθοδος, εἴτε $20 \times 10 : 14 \times 9 :: \omega : 22$ καὶ διὰ τοῦτο $\omega = \frac{20 \times 10 \times 22}{14 \times 9 \text{ ἡμ}} = \frac{10 \times 10 \times 22}{7 \times 9 \text{ ἡμ}} = 34 \frac{59}{63} \text{ ἡμ.}$

Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τρέκων.

143. Ὁ τοκισμὸς τῶν χρημάτων ἄλλο δὲν εἶναι, ἢ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν (μέθοδος ὅμως εὐθεῖα (πλὴν ἡ ἀπλῆ, ἡ σύνθετος μέθοδος εἰς εὐρεσιν τοῦ συμφωνηθέντος τόκου εἰς τὰ 100 : τουτέστιν ἡ 8, ἡ 10, ἡ 15 ἢ κ.τ.ξ., ἅπερ γράφονται οὕτως $8 \text{ τὰ } \frac{0}{100}$. Καὶ ἔχει ὥδέ πως· 100 γρόσια μοι δίδουν εἰς ἓν ἔτος 15 γρόσια τόκον.. 1232 γρόσια

λοιπὸν πόσα - ἔχουσι νά μαι δώσωσι; Ὀνομάζω χ τοῦτον τὸν τόκον (καὶ ὄντων τῶν κεφαλαίων ἀναλόγων μὲ τοὺς

τόκους, ἔξω $100 : 1232 :: 15 : \chi$ καὶ διὰ τοῦτο $\chi =$

$$\frac{1232 \times 15}{100} = \frac{308 \times 15}{25} = \frac{308 \times 3}{5} = 184 \frac{4}{5} = 184 \frac{32}{100}.$$

ὥς τε τὰ 1232 θέλουσι μοι δώσει $184 \frac{32}{100}$ πρὸς $15 \frac{0}{100}$:

ὃ ἐστὶ τὸ $\pi\alpha\nu = 1416 \frac{32}{100}$.

Εἰ δὲ καὶ ἦσαν πρὸς δέκα $\frac{0}{10}$ τότε ἡ ἀναλογία ἦθε-

λεν εἶναι αὕτη, $100 : 1232 :: 10 : \chi$ ὥθεν $\chi = \frac{1232}{10}$

$= 123 \frac{2}{5} = 123 \frac{8}{20}$. εὐθὰ δηλονότι ὁ τόκος τῶν τοκίζο-

μένων χρημάτων εἶναι πάντοτε ἴσος μὲ τὰ τοκιζόμενα ἐπὶ

τὸν τόκον, καὶ διαιρούμενα-διὰ τῶν 100 . Ἦν ὁμως τὸ

αὐτὸ ἢ τόσα τὰ $\frac{0}{10}$ νὰ ζητή τις, ἢ τόσα τὸ ἐν γρόσιον. Κα-

θότε 10 τὰ $\frac{0}{10}$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ 4 παράδες τὸ ἐν γρόσιον.

Ὡς τε ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $1 : 4 :: 1232 : \chi =$

$1232 \times 4 = 123 \frac{8}{10}$, εἴτε $1 : \frac{1}{10} :: 1232 : \chi = 123$

$\frac{2}{10}$. Ἄν ὁμως ἦν δεδομένον τάδε τοκισθέντα χρήματα,

καὶ τὸ πόσα τὰ $\frac{0}{10}$, καὶ ἐζητεῖτο πόσα γρόσια ἐδόθησαν

εἰς τὸν τόκον: ὃ ἐστὶν ἂν ἦν δεδομένον ὅτι ἦσαν $1416 \frac{32}{100}$

$32 \frac{\pi\alpha\rho}{100}$ καὶ ὅτι πρὸς 15 τὰ $\frac{0}{10}$ τότε ἡ ἀναλογία ἔπρεπε νὰ

γένη οὕτως $115 : 100 :: 1416 \frac{32}{100} : \chi$ ὥθεν $\chi = \frac{141680}{115}$

$= 1232 \frac{72}{100}$.

144. Ἄν ὁμῶς καὶ εἰς τὸν τοκισμὸν τῶν χρημάτων δοθῇ καὶ ἡ περίσσεια τοῦ χρόνου : ὃ ἐστὶ μεθερμηνευόμενον, ἂν ὁ χρόνος δὲν εἴναι μονὰς τότε ἡ μέθοδος τῶν τριῶν δὲν εἶναι πλέον ἀπλῇ εἶναι σύνθετος. Πλὴν ἡμεῖς, ὡς φαίνεται, ἐμάθαμεν νὰ μεταβάλλωμεν τὴν σύνθετον εἰς ἀπλὴν (141). Ζητείσθω φέρε εἰπεῖν τὸ, 232 γρόσια εἰς 18 μῆνας πόσον-τόκον δίδουσι πρὸς 10 τὰ $\frac{0}{10}$; Ἐγὼ λοιπὸν λέγω, ὀνομάσας χ τὸν ζητούμενον τόκον, ἡ 100 γρόσια νὰ τοκισθῶσι 12 μῆνας, ἡ γρόσια 100×12 εἰς ἓνα μῆνα, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ.. καὶ ἔτι ἡ 1232 γρόσια νὰ τοκισθῶσι 18 μῆνας, ἡ γρόσια 1232×18 εἰς ἓνα μῆνα, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ.. καὶ ἐπειδὴ τὰ κεφάλαια πρέπει νὰ ᾔναι ἀνάλογα μετὰ τοὺς τόκους αὐτῶν (διὰ τοῦτο ἔξω $100 \times 12 : 1232 \times 18 :: 10 : \chi$ ὅθεν $\chi =$

$$\frac{1232 \times 18 \times 10}{100 \times 12} = \frac{1232 \times 3}{20} = \frac{1848}{10} = 184 \frac{4}{5} = 184 \frac{32}{100}$$

Ὁμοίον τι ἤθελεν ἐκτελεσθῇ ἂν ὁ χρόνος. ἦσαν ἡμέραι. Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, 200 γρόσια, 15 τὰ $\frac{0}{10}$ εἰς 19 ἡμέρας πόσον-τόκον γεννῶσι; Τώρα εἶναι γνωστὸν ἐξ ἑαυτοῦ, ὅτι ἡ 100 γρόσια νὰ δουλεύωσι 12 μῆνας, ἡ ὡδεκάκις 100 γρόσια νὰ δουλεύωσιν ἓνα μῆνα, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ.. καὶ ἐπειδὴ αἱ 19 ἡμέραι = $\frac{19}{30}$ μηνὸς τοῦτου ἔνεκεν ὀνομάσας χ τὸν ζητούμενον τόκον, ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν, $100 \times 12 : 200 \times \frac{19}{30} :: 15 : \chi$ καὶ διὰ τοῦτο $\chi = \frac{200 \times 15 \times \frac{19}{30}}{100 \times 12} = \frac{200 \times 15 \times 19}{300 \times 120}$.

Εἶναι ὁμῶς ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι ὁ μὲν ἀριθμητὴς

τοῦ κλάσματος $\frac{200 \times 15 \times 10}{300 \times 120}$ εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ γινόμενον τῶν τοκισθέντων γροσίων: τῶν 200 λέγω, ἐπὶ τὰς τε παρελθούσας ἡμέρας: τὰς 19, καὶ ἐπὶ τὸν συμφωνηθέντα τόκον, εἴτε $200 \times 15 \times 19$. ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι $= 300 \times 120$, ἐνθα ἐπειδὴ καὶ 120 λεπτὰ ἐξιστοῦνται μὲ ἐν γρόσιον (τούτου ἕνεκεν αὖ ἀντὶ τῆς κάμης παρονομαστὴν τὸν 300×120 , κάμω τὸν 300 μόνον) τότε τὸ προκύπτον ἀντὶ τῆς ἡναι γρόσια θέλει εἶναι λεπτὰ, ἐξ οὗ ἔπεται ὅτι διὰ τῆς εὐρηγίας τὸν τόκον γροσίων τινων, φθάνει μόνον νὰ πολλαπλασιάσῃ τὰ τοκισθέντα γρόσια ἐπὶτε τὰς παρελθούσας ἡμέρας, καὶ ἐπὶ τὸν συμφωνηθέντα τόκον τῶν $\frac{0}{0}$, εἴτα νὰ διακρίσῃ τὸ γινόμενον διὰ τῶν 300 (καὶ τὸ προκύπτον πηλίκον θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τόκος εἰς λεπτὰ, εἴτε εἰς $\frac{1}{3}$ τοῦ παρᾶ.

Ζητείσθω, φέρε εἰπεῖν, 200 γρόσια, 12 τὰ $\frac{0}{0}$, εἰς 15 ἡμέρας πόσα γρόσια μοι δίδουσι; Καὶ ἐγὼ λέγω $= \frac{200 \times 12 \times 15}{300}$ λεπ. $= \frac{2 \times 12 \times 15}{3}$ λεπ. $= 2 \times 12 \times 15$ λεπ. $= 120$ λεπ. $= 40$ παρ, ὅπερ ὀφείλουσι ἢ γνωστὸν οἰκοθεν. Ὡς αὐτῶς καὶ αὖ ἐζητεῖτο καὶ 1000 γρόσια εἰς 16 ἡμέρας πρὸς 10 τὰ $\frac{0}{0}$ πόσον τόκον δίδουσι; Ἡ ἀπόκρισις ἔθελον ἡναι $= \frac{1000 \times 16 \times 10}{300}$ λεπ. $= \frac{1600}{3}$ λεπ. $= 533 \frac{1}{3}$ λεπ. $= \frac{533 \frac{1}{3}}{12072}$ γρ πα λε $= 4 \frac{1}{3}$.

145. Πολλάκις ὁμως ζητεῖται καὶ ὁ τόκος τῶν τόκων (καὶ τότε τὸ πρόβλημα εἶναι περιπεπλεγμένον.

Ἐτόκισέ τις, φέρε εἰπεῖν, γρόσια 3000 πρὸς 10 τὰ $\frac{0}{0}$ καὶ μετὰ πέντε ἔτη ζητεῖ λογαριασμόν. Ἐπειδὴ λοι-

πὸν καὶ ἐτοκίσθησαν πρὸς 10 τὰ $\frac{0}{0}$ τούτου ἕνεκεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους: τοῦτέστιν εἰς τὸ β'. ἔτος τὸ κεφάλαιον ἦν $= 3000 + \frac{3000}{10} = 3300$.

Εἰς δὲ τὸ γ'. ἔτος $= 3300 + \frac{3300}{10} = 3630$.

Εἰς τὸ δ'. $= 3630 + \frac{3630}{10} = 3993$.

Εἰς τὸ ε'. $= 3993 + \frac{3993}{10} = 4392 \frac{3}{10}$.

Καὶ ἐπειδὴ ταῦτα ἐτόκισε τὸ πέμπτον ἔτος τούτου

$$\begin{array}{r} \text{ἕνεκεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ πρέπει νὰ λάβῃ } 4392 \frac{3}{10} + \\ \frac{4392 \frac{3}{10}}{10} = 4731 \frac{53}{100} = 4731 \text{ } 21 \frac{1}{5} \end{array}$$

Παράδειγμα β'. ἐτόκισέ τις 3000 γρ. πρὸς 8 τὰ $\frac{0}{0}$.. καὶ μετὰ ἔτη 3 ζητεῖ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον τῶν τόκων. Εἰς τὸ τέλος λοιπὸν τοῦ α'. ἔτους: τοῦτέστιν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ β'. τὸ κεφάλαιον ἦν $= 3000 + 8 \times \frac{3000}{100} = 3240$ γρ. Εἰς δὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ γ'. ἔτους ἦσαν $= 3240 + 8 \times \frac{3240}{100} = 3499 \frac{1}{5}$. Ὡς εἰς τὸ τέλος τοῦ γ'. ἔτους τὸ κεφάλαιον θέλει εἶναι $= 3499 \frac{1}{5} + 8 \times \frac{3499 \frac{1}{5}}{100} = 3779, 23 \frac{3}{5}$. Δῆλον ὁμῶς ὅτι διὰ ταύτης

τῆς μεθόδου βαίνει τις εἰς τὸ ζητούμενον βαθμῆδόν: ὃ ἐστὶν ἐξ ἔτους εἰς ἔτος, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὴν λύσιν γίνεταί μερικῶς (καὶ ἐπομένως ἂν τὰ παρελθόντα ἔτη ἦσαν πολλὰ) τὸ πρόβλημα θέλει εἶναι ἐπίμοχθον. Διὰ τῶν λογαρίθμων ὁμῶς λύνονται τὰ τοιαῦτα προβλήματα γενικῶς καὶ εὐκόλως ὥθεν καὶ τὰ μετακομίζομεν εἰς τὴν ἀλγεβραν.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ὑφαίρεσεως.

146. Μέθοδος ὑφαίρεσεως ἤθελεν ὀνομασθῇ ὅταν χρεωσῶν τις τὰ δῶση εἰς ἐποχὴν μακράν, καταβάλλῃ ἤδη, ὅπερ ἀκολουθεῖ μάλιστα εἰς τὰ συναλλάγματα (πό-
λιτζας) τῶν ἐμπόρων. Ἐχων τις, φέρε εἰπεῖν, τὰ λάβῃ 5000 γρ. μετὰ 7 μῆνας ἐκ τινος, ὅντων πρὸς 8 τὰ $\frac{0}{0}$, ἢ $\frac{2}{3}$ γρ. τὸν μῆνα, ζητεῖ ἤδη τὰ χρήματα. Ἡ ζημία λοι-
πὸν αὐτοῦ, ἢ ἡ ὑφαίρεσις θέλει εἶναι $= 233 \frac{1}{3}$. Καθότι
ἐγὼ ἔχω ταύτην τὴν ἀναλογίαν $100 : \frac{7 \times 2}{3} :: 5000 :$
 $\chi = 233 \frac{1}{3}$. Ὡς εἰμιναν τὰ λάβῃ $4766 \frac{2}{3}$ γρ. Οὗτος
λοιπὸν ὁ τρόπος λέγεται ὑφαίρεσις, ἐξωτερικῶς, καὶ εἶναι
μᾶλλον ἐν χρήσει, ἐνθα δηλ. κρατοῦσι μὲν τόκον 5000 γρ.,
πραγματικῶς ὅμως πληρώνουσι μόνον $4766 \frac{2}{3}$.

Ὑφαίρουν δ' ἐσωτερικῶς ὀνομάζουσιν ὅταν τις ὑφέ-
λῃ τὸν τόκον ἐξ ὀλοκλήρου τοῦ κεφαλαίου, ὅπερ πληρώ-
νει. Καὶ ἰδοὺ πῶς. Ἐσὼ πρὸς 8 τὰ $\frac{0}{0}$: ταυτέσι $\frac{2}{3}$ γρ. τὸν
μῆνα τὰ 100. Ὡς μετὰ 7 μῆνας τὰ $100 + \frac{14}{3}$ γρ. $=$
 $104 \frac{2}{3}$ τρέπονται εἰς 100 καὶ ἐχομένως ἔξω ταύτην τὴν
ἀναλογίαν, $104 \frac{2}{3} : 100 :: 5000 : \chi = 4777 \frac{11}{15}$.

Ἐξ πραγματευτῆς εἰμινε τὰ λάβῃ ἐκ τινος μετ'
ἐνιαυτὸν γρ. 3000.. δίδει τὴν ὁμολογίαν εἰς ἓνα τραπε-
ζίτην, συμφωνῶν τὰ λάβῃ ἐξ αὐτοῦ πρὸ 8 μηνῶν τῆς
διορίας τὰ εἰρημένα γρόσια. Ζητεῖται λοιπὸν πόσα-πρέπει
τὰ δῶσθαι αὐτὸν ὁ τραπεζίτης; Τώρα ἐπειδὴ καὶ τὰ κα-
ταβαλλόμενα χρήματα ἔχουσι τὰ ἐπιστρέψωσιν εἰς τὸν
τραπεζίτην μετὰ 8 μῆνας ὅτι εἰς τὴν ἐκπλήρωσιν

πρέπει να κρατήσῃ καὶ τὸν τόκον τοῦ καταβαλλομένου κεφαλαίου.. εἰς τρόπον ὅτι ἂν δώσωμεν ὁ τόκος νὰ ᾖ 12 τὰ $\frac{0}{9}$ τότε εἰς 8 μῆνας θέλει εἶναι 8: 12, εἴτε 2: 3: ὁ εἶναι 8 γρόσια: ὁ εἶναι ὁ δανεισθεὶς πρέπει νὰ ἐάσῃ ἀντὶ 100, 108 (καὶ διὰ τοῦτο ἔξω ταύτην τὴν ἀναλογίαν, ἐὰν τὰ 108 ἔγιναν 100 (τὰ 3000, πόσα-θέλουσι, γένη; ὁ εἶναι 108: 100:: 3000: χ, εἴτε 9: 25:: 1000: χ (καὶ διὰ τοῦτο $\chi = 2777\frac{7}{9}$: ὁ εἶναι ὁ τραπεζίτης πρέπει νὰ δώσῃ γρ. $2777\frac{7}{9}$: ὁπερ δηλονότι εἶναι τὸ ἐνχυτίον τῆς μεθόδου τῶν τόκων.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς συντροφίας.

147. Μέθοδον τῆς συντροφίας ὀνομάζουσιν ἐκείνην, δι' ἧς περ διανέμουσιν εἰς πολλοὺς συντρόφους τὸ κέρδος, ἢ τὴν ζημίαν τῆς αὐτῶν συντροφίας, ἥτις δηλονότι ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ διαίρεσις τοῦ κέρδους, ἢ ζημίας εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τὸ καταβληθὲν ὑφ' ἑκάστου κεφάλαιον.

Τρεῖς, φέρε εἰπεῖν, πραγματευταὶ κατέβαλον εἰς τὴν ἑαυτῶν συντροφίαν κεφάλαια διάφορα: ὁ μὲν πρῶτος 6000 γρόσια (ὁ δὲ δεύτερος 4900 (καὶ ὁ τρίτος 1900. Αἱ περιστάσεις συνέτρεξαν, καὶ ἡ συντροφία ἐκέρδησε 5000 γρόσια (ζητεῖται λοιπὸν πόσον-ἐκ τοῦ κέρδους ἀνήκει εἰς ἕκασον τῶν πραγματευτῶν;

Εἶναι οἰκοθεν σαφές ὅτι τὸ ἀνήκον εἰς ἕκασον αὐτῶν κέρδος, θέλει εἶναι ἀνάλογον μὲ τὸ εἰς τὴν συντροφίαν καταβληθὲν κεφάλαιον. Ὡστε ἂν ὀνομάσω ψ τὸ κέρδος τοῦ

πρώτου, χ τοῦ δευτέρου, καὶ ψ τοῦ τρίτου εἴσω ταύτην
κρ. τοῦ α. κρ. τοῦ β. κρ. τοῦ γ.
 τὴν ἀναλογίαν. 6000: ψ :: 4900: χ :: 1900: ψ

Ἀλλ' εἶδομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων, εἰς
 μίαν ἀναλογίαν, ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπομένων
 ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἐπόμενον (136).. καὶ ἐπειδὴ
 τὸ μὲν κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων εἶναι = 12800 τῶν
 δὲ ἐπομένων = $\psi + \chi + \psi = 5000$ τοῦτου ἕνεκεν εἴσω
 ταύτας τὰς τρεῖς ἀναλογίας

$$12800: 5000:: 6000: \psi, \text{ εἴτε } 16: 25:: 1500.$$

$$\psi = 2343 \frac{12}{10}: \text{ κέρδος τοῦ πρώτου.}$$

$$12800: 5000:: 4900: \chi, \text{ εἴτε } 16: 25:: 1225:$$

$$\chi = 1914 \frac{1}{10}: \text{ κέρδος τοῦ δευτέρου.}$$

$$12800: 5000:: 1900: \psi, \text{ εἴτε } 16: 25:: 475:$$

$$\psi = 742 \frac{3}{10}: \text{ κέρδος τοῦ τρίτου.}$$

5000

148. Ἄν ὅμως προσεθῇ καὶ ἡ περίσσις τοῦ χρόνου:
 ὃ ἐστὶν ἂν ὁ παρελθὼν χρόνος δὲν ἦναι ἴσος μονάδι: ἡ ἂν
 θέλης ἴσος εἰς ἅπαντας τοὺς συντρόφους τότε ἡ μέθοδος
 ἠθέλειν ἦναι σύνθετος.

Τρεῖς, φέρε εἰπεῖν, πραγματευταὶ κατέβαλον εἰς τὴν
 ἑαυτῶν συντροφίαν καὶ κεφάλαια διάφορα, καὶ οἱ χρόνοι
 τῆς διαμονῆς αὐτῶν διάφοροι: ὁ μὲν πρῶτος, φέρε εἰπεῖν,
 κατέβαλεν 6000 γρ. καὶ διέμειναν 4 μῆνας ὁ δὲ δεύ-
 τερος 4000, καὶ διέμειναν 8 μῆνας ὁ δὲ τρίτος 3000,
 καὶ διέμειναν 12 μῆνας εἰς τὴν συντροφίαν καὶ ἡ συν-
 τροφία ἐκέρδησε 5000 γρόσια. Ζητεῖται λοιπὸν - πόσον
 ἀνήκει εἰς ἕκαστον αὐτῶν;

Δήλον ὅτι αὕτη ἡ συνύετος ἀναλογία μεταβάλλεται εἰς ἀπλὴν (141). Καθότι εἶναι οἰκοθεν σαφές ὅτι ἡ 6000 γρόσια νὰ δουλεύσωσι 4 μῆνας, ἡ τετράκις 6000 ἓνα μῆνα, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό. ὡσαύτως καὶ ἡ 4000 γρόσια νὰ δουλεύσωσι 8 μῆνας, ἡ ὀκτάκις 4000 γρόσια ἓνα μῆνα, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό. καὶ τέλος ἡ 3000 γρόσια 12 μῆνας, ἡ 12 Χ 3000 ἓνα μόνον, εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτό. Ὡς ἐνομαζών ψ τὸ κέρδος τοῦ πρώτου, χ τοῦ δευτέρου, υ τοῦ τρίτου ἐξω τὴν ἐξῆς ἀναλογία.

$$6000 \times 4 : \psi :: 4000 \times 8 : \chi :: 3000 \times 12 : \upsilon$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον τῶν ἡγουμένων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπομένων ὡς ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν ἐπόμενον (αὐτοβί) τούτου ἕνεκεν μοι προκύπτουσιν αἱ ἐξῆς τρεῖς ἀναλογίαι.

$$92000 : 5000 :: 24000 : \psi = 1304 \frac{8}{23} \dots \text{κέρδος τοῦ } \alpha.$$

$$92000 : 5000 :: 32000 : \chi = 1739 \frac{5}{23} \dots \text{κέρδος τοῦ } \beta.$$

$$92000 : 5000 :: 36000 : \upsilon = 1956 \frac{12}{25} \dots \text{κέρδος τοῦ } \gamma.$$

$$5000$$

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς μίξεως.

149. Μέθοδος τῆς μίξεως ἡθελεν ὀνομασθῇ ἡ μέθοδος, δι' ἧς περ, ὁσθέντων διαφόρων, ἡ διαφορετικῶν σωμάτων, νὰ ἐκτελέσῃ τις ἓν μίγμα... ἢ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ μίγματος ὁσθέντος, νὰ εὕρῃ τις τὴν ποσότητα ἐκάστου τῶν εἰδῶν, ἐξ ὧν σύγκειται.

Εἷς, φέρε εἰπεῖν, οἶνοπώλης ἔχων οἶνους διαφόρου

τιμῆς: 15 φέρε εἶπεν παραδῶν τῇ οἰκῇ καὶ 8, ζητεῖ πόσον πρέπει νὰ βάλῃ ἐξ ἑκατέρου ὥς νὰ ἀξίξῃ 12 πα-
ράδες ἢ οἰκᾶ.

Ἐγὼ τάττω ταύτας τὰς τρεῖς τιμὰς τοῦ οἴνου:

τὰ 12 λέγω 15, καὶ 8, οὕτως, ὡς ὁρῶνται $12 \begin{cases} 15 \dots 4 \\ 8 \dots 3 \end{cases}$

ἔπειτα γράφω τὴν μὲν διαφορὰν τῶν 12 ὡς πρὸς τὴν ἐ-
λάττωσα τιμὴν: τουτέστι τὰ 3 ἀντίκρυ τῆς κρείττονος τι-
μῆς, εἴτε τῶν 8 ἢ τὴν δὲ διαφορὰν τῶν 12 ὡς πρὸς τὴν
ἐλάττωσα τιμὴν: τουτέστι τὰ 4 ἀντίκρυ τῆς κρείττονος
τιμῆς, εἴτε τῶν 15. Καὶ λέγω ὅτι ἐκ μὲν τοῦ οἴνου τῆς
χειρόνος τιμῆς πρέπει νὰ βαλθῇ ὡς 3, ἐκ δὲ τῆς κρείτ-
τονος ὡς 4. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς τῶν
μιχθησομένων οἴνων εἶναι 7.. ἐκ τοῦ διότι $15 - 8 = 7$ ἢ
τοῦτου ἕνεκεν καὶ ἡ μονὰς τοῦ μίγματος πρέπει νὰ εἶναι $= \frac{7}{7}$ ἢ
συγκειμένη ἐκ μὲν τοῦ κρείττονος $\frac{4}{7}$, ἐκ δὲ τοῦ ἐλάτ-
τονος $\frac{3}{7}$.

Εἰ δὲ καὶ ἐζητεῖτο νὰ ἀξίξῃ τὸ μίγμα 14 παράδες
ἢ οἰκᾶ ἢ τότε ἔπρεπε ἐκ μὲν τοῦ κρείττονος νὰ περιέχῃ ἡ
μονὰς $\frac{6}{7}$ ἢ ἐκ δὲ τοῦ χειρόνος $\frac{1}{7}$. Καὶ ἐξαναπτίας αὖ ἐ-
ζητεῖτο ἡ οἰκᾶ τοῦ μίγματος νὰ ἀξίξῃ 9 παράδες ἢ τότε
ἡ μονὰς τοῦ μίγματος ἔπρεπε νὰ περιέχῃ ἐκ μὲν τοῦ
κρείττονος $\frac{1}{7}$ ἢ ἐκ δὲ τοῦ χειρόνος $\frac{6}{7}$.

Παράδειγμα β'. Εἰς οἰνοπώλης ἀγοράσας οἴνους
διαφόρου τιμῆς: 130, φέρε εἶπεν, ἀκάδες πρὸς 10 πα-
ράδες.. 231 πρὸς 12.. 75 πρὸς 15.. καὶ 27 πρὸς 20.
ζητεῖ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν οἰκᾶν τοῦ μίγματος; ἐν-

ταῦθα ἡ ποσότης τῶν μεχθησομένων ὅλ. εἶναι δεδομένη.
Καὶ ἐπειδὴ ἐγὼ βλέπω ὅτι ἡ μὲν τιμὴ τοῦ ὅλου μίγματος

εἶναι = $57\overline{3}7$ ^{παρ}.. τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν ὀκάδων εἶναι =
463 < τοῦτου ἕνεκεν, διαιρέσας τὸν ἀριθμὸν $57\overline{3}7$ διὰ
τοῦ 463, ἔχω διὰ πηλίκον $1\overline{2}\frac{1}{3}$, ὅπερ δηλονότι εἶναι ἡ
τιμὴ τῆς ὀκάς τοῦ μίγματος.

150. Ἄν ὁμῶς καὶ δοθῇ τὸ μίγμα, καὶ ζητηθῇ ἡ
ποσότης ἐκάστου εἶδους τοῦ μίγματος < τὸ πρόβλημα 9:-
λοι εἶναι ἄλυτον. Εἰ δὲ καὶ τὰ εἶδη τοῦ μίγματος εἶναι
διαφόρου εἰδικῆς βαρύτητος < τότε εἶναι δυνατόν νὰ λυθῇ.
Οἱ Ἱέρων, φέρε εἰπεῖν, ἐζήτησε παρὰ τοῦ Ἀρχιμήδου,
ἂν τὸ σέμμα αὐτοῦ ἦν ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ, ἢ περιεῖχε καὶ
ἄργυρον μεμιγμένον.

Τώρα εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς ὑδροστατικῆς ὅτι ἡ εἰδι-
κὴ βαρύτης τοῦ μὲν χρυσοῦ εἶναι περὶ 19, τοῦ δὲ ἄρ-
γύρου ὡς 10.. καὶ ὅτι πᾶν σῶμα εἰδικῶς βαρύτερον ἑνὸς
ῥευστοῦ, βαπτιζόμενον ἐντὸς αὐτοῦ ἀπολλύει βάρος ἴσον
μὲ ὑπογκοῦν ῥευστόν. Ὡς αὖν τὸ σέμμα τοῦ Ἱέρωνος βαπτι-
ζόμενον ἐντὸς νεροῦ ἀπώλλυεν $\frac{1}{10}$ τοῦ ἰδίου βάρους < ὁ Ἀρ-
χιμήδης ἔπρεπε νὰ ἀποφασίσῃ ὅτι τὸ σέμμα ἦν ἄδολον..
εἶδὲ καὶ ἀπώλλυε $\frac{1}{10}$ < ὅτι ἦν ἐκ μένου ἀργύρου. Δεδόσθη
λοιπόν ὅτι ἀπώλλυε $\frac{1}{15}$. Τότε ἐπειδὴ καὶ ἡ εἰδικὴ βαρύτης
τῶν εἰρημένων μετάλλων εἶναι ὡς 19 καὶ 10, καὶ διὰ
τοῦτο ἡ διαφορά αὐτῶν ὡς 9 < τοῦτου ἕνεκεν, τὸ δοθὲν μίγ-
μα ἔχει διὰ μονάδα $\frac{9}{9}$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μὲν χρυτὸς δια-
φέρει τοῦ μίγματος: ὅστος δηλονότι ὡς 15, κατὰ τὴν
εἰδικὴν βαρύτητα ὡς 4 < ὁ δὲ ἄργυρος ὡς 5 < τοῦτου ἕνε-

κεν τὸ μίγμα σύγκειται ἐκ μὲν χρυσοῦ $\frac{5}{9}$, ἐκ δ' ἀργύρου $\frac{4}{9}$.

Εἶδε καὶ τὸ μίγμα συνέκειτο ἐκ μάλλον, ἢ δύο μετάλλων: ἐκ τριῶν, φέρε εἰπεῖν, χρυσοῦ, ἀργύρου, καὶ χαλκοῦ τότε τὸ πρόβλημα ἠθέλεν εἶναι ἀπροσδιόριστον: ὁ ἔστιν ἠθέλει δέχεται πολλάς λύσεις πάντοτε ὁμῶς γνωσόν, ὅτι δὲν ἦν ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ.

Περὶ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου.

151. Μέθοδον συνεζευγμένην ὀνομάζουσι τὸ, γινώσκουμένης τῆς ἀναφορᾶς τινων ποσότητων μιᾶς πόλεως ὡς πρὸς ἄλλας δύο, νὰ εὕρῃ τις τὴν ἀναφορὰν αὐτῶν ἐν ἐκείναις.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι 100 λίτραι τοῦ Παρισίου ἐξισοῦνται 154 $\frac{45}{100}$ λίτραις τῆς Τουρκίας.. καὶ ὅτι 50 λίτραι τοῦ Παρισίου ἐξισοῦνται 59 $\frac{41}{101}$ λίτραις τῆς Ῥωσσίας.. ζητεῖται λοιπὸν ἡ ἀναφορὰ τῆς λίτρας τῆς Τουρκίας ὡς πρὸς

τὴν τῆς Ῥωσσίας: ἐπειδὴ λοιπὸν $100 \overset{\lambda. \text{Παρ.}}{\underset{\lambda. \text{Τουρ. } \delta\rho}{=}} 154 \frac{45}{100}$ διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{154 \frac{45}{100}}{100} = 1$. Ὡσαύτως ἐπειδὴ $50 \overset{\lambda. \text{Παρ.}}{\underset{\lambda. \text{Ῥωσ.}}{=}} 59 \frac{41}{101}$ διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{59 \frac{41}{101}}{50} = 1$. Ὡς ἔξω $\frac{154 \frac{45}{100}}{100} = \frac{59 \frac{41}{101}}{50}$..

$\lambda. \text{Τουρ. } \delta\rho \quad \lambda. \text{Ῥωσ.}$
 ὅθεν $154 \frac{45}{100} = 118 \frac{82}{101}$, ἥτις εἶναι ἡ ἀναφορὰ τῆς λίτρας τῆς Τουρκίας ὡς πρὸς τὴν τῆς Ῥωσσίας.

Εἶναι δυνατόν· να ᾔηται πλείονες αἱ ἀναφοραὶ ὡς ἄλλοι κρίκοι ἀλύτου. Ζητήσθω, φέρε εἰπεῖν, 100 πισό-
 λαι τῆς Ἰσπανίας πόσα φράγκα τῆς Γαλλίας κάμνουςι..
 γνωσκομένου ὅμως ὅτι ἐν δοκάτον τῆς Ἰσπανίας ἐκτιμᾶται
 95 δηνάρια παχέα τοῦ Αμσερδάμ.. ὅτι 34 σολδία πα-
 χέα ἐκτιμῶνται μίαν λίτραν σερλίγγ τοῦ Λονδίου.. ὅτι 32
 δηνάρια σερλίγγ ἐκτιμῶνται 3 φράγκα.: ἔτι ὅτι μία πισό-
 λα τῆς Ἰσπανίας ἐκτιμᾶται 1088 μαραυέδες, ἐξ ὧν 375
 ἐκτιμῶνται ἐν δοκάτον.. καὶ ὅτι ἡ παχέα λίτρα, ὁμοίως
 καὶ ἡ λίτρα σερλίγγ εἶναι ἐξ 20 σολδίων, ὧν περ ἐκάσῃ
 ἐξισοῦται μὲ 12 δηνάρια: Ὡς ἐξω ταύτας τὰς ἐξισώσεις.

$$\begin{array}{rcl} \varphi\rho & \delta. \varsigma\epsilon\rho & \\ 3 & = & 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \delta. \varsigma\epsilon\rho & \lambda. \varsigma\epsilon\rho & \\ 240 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda. \varsigma\epsilon\rho & \sigma. \pi\alpha\chi & \\ 1 & = & 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma. \pi\alpha\chi & \delta. \pi\alpha\chi & \\ 1 & = & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \delta. \pi\alpha\chi & \delta\omicron\upsilon\kappa & \\ 95 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \delta\omicron\upsilon\kappa & \mu\alpha\rho & \\ 1 & = & 375 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mu\alpha\rho & \pi\iota\varsigma & \\ 1088 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \pi\iota\varsigma & \varphi\rho & \\ 100 & = & \chi \end{array}$$

Πολλαπλασιάζω ταύτας τὰς ἐξισώσεις, καὶ ἔχω $x =$

$$\frac{3 \times 240 \times 95 \times 1088 \times 100}{32 \times 34 \times 12 \times 375} = 4 \times 19 \times 20. \text{ Ὡς } 100 \text{ πη-}$$

 $\text{ξολαι} = 1520 \text{ φράγ } \text{ καὶ διὰ τοῦτο } 1 = 15 \frac{1}{5} \text{ φράγ.}$

Περὶ ἡμαρτημένης ὑποθέσεως.

152. Ὑποθέσιν ἡμαρτημένην ὀνομάζουσιν οἱ ἀριθμητικοὶ τὸ νὰ διαιρήσῃ τις μίαν ποσότητα ἢ ἀριθμὸν, εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ ἄλλους δοθέντας ἀριθμοὺς, δι' ἧς δηλονότι λύουσι ζητήματα τῆς μεθόδου τῆς συντροφίας (147).

Ζητεῖσθω, φέρε εἰπεῖν, νὰ διαρῆσῃ τις κέρδος γροσίων 658 εἰς τρεῖς συντρόφους οὕτως ὥς ὃ μὲν δευτερος νὰ λάβῃ τριπλάσια τοῦ πρώτου, ὃ δὲ τρίτος ἴσα ἀμφοτέροις.

Ὑποτίθῃμε λοιπὸν τὴν μερίδα τοῦ πρώτου $\overset{\gamma\rho}{=} 1$ καὶ διὰ τοῦτο ἡ τοῦ δευτέρου θίλει εἶναι $\overset{\gamma\rho}{=} 3$, καὶ ἡ τοῦ τρίτου $\overset{\gamma\rho}{=} 4$ καὶ ἐπομένως ἡ τῶν τριῶν $\overset{\gamma\rho}{=} 8$ ἐνθα, ὡς ὀράται, ἡ ἐμὴ ὑπόθεσις ὑπῆρξε μὲν ἔχει ἀληθῆς.. ἐκ τοῦ διότι ἀντὶ τῶν 658 ἐγὼ εὗρον 8 μόνον.. πλὴν εἶναι πλεόν, ἡ ἀληθὲς ὅτι τὰ ὑποτεθέντα μέρη ἔχουσι πρὸς τὸ ἔλον αὐτῶν 8 ὡς καὶ τὰ πραγματικά πρὸς τὰ 658: ὥς ἐξω ταύτας τὰς ἀναλογίας:

8: 1 :: 658 πρὸς τὴν πρώτην πραγματικὴν μερίδα, ἥτις $\overset{\gamma\rho}{=} 82 \frac{1}{4}$ 8: 3 :: 658 πρὸς τὴν δευτέραν πραγματικὴν

μερίδα, ἥτις $= 246 \frac{3}{4}$ 8 : 4 :: 658 πρὸς τὴν τρίτην
πραγματικὴν μερίδα, ἥτις $= 329$

Καὶ τούτου ἕνεκεν $82 \frac{1}{4} + 246 \frac{3}{4} + 329 = 658$.

Παράδειγμα β'. Νὰ διαιρέσῃ τις γρόσια 550 εἰς
τρεῖς συντρήφους οὕτως ὥστε ὁ μὲν β'. αὐτῶν νὰ λάβῃ
τετραπλάσια τοῦ α'.. ὁ δὲ γ'. διπλάσια τοῦ β'.

ὑποτίθῃμι λοιπὸν τὴν μερίδα τοῦ α' $\overset{\gamma\rho}{=} 3$ (καὶ εἰς
τοῦτο ἢ τοῦ β' θέλει εἶναι $\overset{\gamma\rho}{=} 12$, καὶ ἢ τοῦ γ' $\overset{\gamma\rho}{=} 35$.)

καὶ ἐχομένως τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $\overset{\gamma\rho}{=} 50$ εἶνθα ὁηλουότι
ἡ ἐμὴ ὑπόθεσις ὑπῆρξε μὲν ἡμαρτημένη.. ἐκ τοῦ οἷοι
ἀντὶ τῶν 550 ἐγὼ εὗρον 50 μόνον.. πλην εἶναι ἀληθέ-
στατον ὅτι τὰ ὑποτεθέντα μέρη εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ ζητού-
μενα καὶ διὰ τοῦτο ἔξω, ὀνομάσας αὐτὰ ψ, χ, υ, ταύ-
τας τὰς ἀναλογίας.

$$50 : 3 :: 550 : \psi$$

$$50 : 12 :: 550 : \chi$$

$$50 : 35 :: 550 : \upsilon$$

εἴτε

$$1 : 3 :: 11 : \psi = 32$$

$$1 : 12 :: 11 : \chi = 132$$

$$1 : 35 :: 11 : \upsilon = 385$$

Καὶ τούτου ἕνεκεν $33 + 132 + 385 = 550$.

Εἶναι ὁμῶς οἰκοθεν σαφές ὅτι τὰ τοιαῦτα προβλή-
ματα λύονται καὶ ἀνευ τῆς ἡμαρτημένης ὑποθέσεως. Κα-
θότι ἂν εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ἐγὼ ὀνομάσω χ τὴν

μερίδα τοῦ πρώτου τοῦ δευτέρου θέλει εἶναι $= 3\chi$ καὶ τοῦ τρίτου $= 4\chi$ καὶ ἐπομένως αἱ τρεῖς ὁμοῦ μερίδες $= 8\chi$, ἅπερ δηλονότι εἶναι $= 658$: ὁ ἐστὶν $8\chi = 658$ καὶ διὰ τοῦτο $\chi = \frac{658}{8} = 82\frac{1}{4}$. Τώρα ἂν ἐγὼ πολλαπλασιάσω ταύτην τὴν μερίδα διὰ τοῦ 3 ἐξω τὴν μερίδα τοῦ β'. καὶ ἂν διὰ τοῦ 4, τὴν μερίδα τοῦ τρίτου, ὅπερ δηλονότι εἶναι τῆς ἀλγέβρης. Συμπέρασμα λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι τὰ τοιαῦτα προβλήματα καὶ ἄλλα ὅμοια λύονται εὐκολοτέρως διὰ τῆς ἀλγέβρης καὶ τούτου ἕνεκεν δὲν ἤθελεν εἶναι φρόνησις ἢ μάλλον διατριβὴ εἰς τὴν ἀριθμηκὴν. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ἀλγεβρα ἔχει δι' ὑποκείμενον ὅχι μόνον τοὺς ἀριθμοὺς ἀλλὰ καὶ τὸ συνεχές ποσόν τοῦτου ἕνεκεν ἡ τάξις προαπαιτεῖ τὴν γεωμετρίαν πρὸ τῆς ἀλγέβρης.

Τ Ε Λ Ο Σ.

Παροράματα

Σελ. Στοιχοι

9 24 ἀντὶ τοῦ δὲν εἶχεν ἀγνοῇ περὶ αὐτῶν, γράφε
δὲν ἦν ἀγνώστους τούτων..

22 1 ἀντὶ τοῦ $100 =$, γρ. 100..

24 24 ἀντὶ τοῦ ὁ εἰς μονάς, γρ. ὁ εἰς μονάδες.

29 20 ἀντὶ τοῦ ἔχω 64372, γρ. ἔχω 64392.

— 22 ἀντὶ τοῦ μείζονες, γρ. ἐλάσσονες.

32 2 ἀντὶ τοῦ τῶν 478640, γρ. τῶν 498640.

43 20 ἀντὶ τοῦ γινόμενον 157600, γρ. γινόμενον
159600.

60 6 ἀντὶ τοῦ πηλίκον $128 \frac{514}{672}$, γρ. πηλίκον $128 \frac{4}{7}$

61 2 ἀντὶ τοῦ διαιρέτην, γρ. διαιρέτεον.

73 22 ἀντὶ τοῦ διότι $\frac{20}{20} < \frac{20}{20} > \frac{20}{40}$, γρ. διότι
 $\frac{\frac{20}{40}}{2} (= \frac{20}{80}) > \frac{20}{40}$.

74 1 ἀντὶ τοῦ διότι $\frac{20:2}{40} = (\frac{10}{40}) < \frac{20}{40}$, γρ. διότι
 $\frac{20:2}{40} (= \frac{10}{40}) < \frac{20}{40}$.

— 3 ἀντὶ τοῦ διότι $\frac{20}{40 \times 2} = (\frac{20}{80}) < \frac{20}{40}$ γρ. διότι
 $\frac{20}{40 \times 2} (= \frac{20}{80}) < \frac{20}{40}$.

76 6 ἀντὶ τοῦ συγκεκριμένους, γρ. κεκρυμμένους.

77 7 ἀντὶ τοῦ $\frac{102}{438} = \frac{36}{140}$, γρ. $\frac{102}{438} = \frac{34}{140}$.

79 11 ἀντὶ τοῦ $\frac{576}{576 \times 2 \div 2} = \frac{48 \times 12}{48 \times 2 \times 12 \div 12}$, γρ.
 $\frac{576}{576 \times 2 \div 12} = \frac{48 \times 12}{48 \times 2 \times 12 \div 12}$.

$$86 \quad 26 \text{ ἀντὶ τοῦ } 154 \overset{\lambda}{45} = 38 \overset{\delta}{\frac{62}{101}}, \gamma\rho. 154 \overset{\lambda}{45} \frac{1}{2} \\ 38 \overset{\delta}{\frac{62}{101}}.$$

$$87 \quad 7 \text{ ἀντὶ τοῦ } 154 \overset{\delta\rho.}{21}, \gamma\rho. 154 \overset{\delta.}{20}.$$

$$— \quad 9 \text{ ἀντὶ τοῦ } 9144 = 9267, \gamma\rho. 9216 = 9267.$$

$$— \quad 10 \text{ ἀντὶ τοῦ } 3048 = 3089, \gamma\rho. 3072 = 3089.$$

$$— \quad 17 \text{ ἀντὶ τοῦ καὶ } 1 = 18, \gamma\rho. \text{ καὶ } 1 = 18.$$

$$95 \quad 10 \text{ ἀντὶ τοῦ } \frac{60 + 80 + 84 + 56 + 100 - 45 - 30 - 50}{120}, \\ \gamma\rho. \frac{60 + 80 + 72 + 84 + 56 - 100 - 45 - 30 - 50}{120}.$$

$$96 \quad 2 \text{ ἀντὶ τοῦ } 413 + \frac{5}{105}, \gamma\rho. 413 \frac{50}{105} = 413 \\ + \frac{10}{21}.$$

$$— \quad 21 \text{ ἀντὶ τοῦ } 21 \overset{\eta}{12} \overset{\omega}{30} 17', \gamma\rho. 21 \overset{\eta}{12} \overset{\omega}{43} 17'.$$

$$— \quad 23 \text{ ἀντὶ τοῦ ἔχω } 66', \gamma\rho. \text{ ἔχω } 85'.$$

$$98 \quad 9 \text{ ἀντὶ τοῦ νὰ τὸ λάβῃ δις. τριτῶς, \gamma\rho. νὰ τὸ λάβῃ} \\ \text{ὑποτρίτως.}$$

$$99 \quad 23 \text{ ἀντὶ τοῦ } 10 \times \frac{1}{10} > 10 \times \frac{1}{1000} \text{ κτξ. } \gamma\rho. \\ 10 \times \frac{1}{100} > 10 \times \frac{1}{1000} \text{ κτξ.}$$

$$101 \quad 17 \text{ ἀντὶ τοῦ } \frac{15}{400} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{400}\right) \gamma\rho. \frac{13}{400} = \left(\frac{1}{40} \\ + \frac{3}{400}\right).$$

$$— \quad 22 \text{ ἀντὶ τοῦ } 54 + \frac{9368 \frac{1}{2}}{10220}, \gamma\rho. 54 + \frac{9368 \frac{1}{2}}{\frac{10220}{3}} = \\ 56 + \frac{1533}{2044}.$$

107 4 ἐκ τούτου μέχρι τοῦ 10 εἶχον εἶναι ἀντιγραφῶν προσθήκη ἀποβλητέα.

111 24 ἀντὶ τοῦ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{1}{2}$, γρ. τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$.

112 4 ἀντὶ τοῦ ἔθεν $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{24}$, γρ. ἔθεν $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{16}{24}$.

113 25 ἀντὶ τοῦ καὶ εἶτι $A = \frac{1}{3}$, γρ. καὶ ἔχω $A = \frac{1}{3}$ κτξ.

120 12 ἀντὶ τοῦ ὃ ἐστὶ τοῦ κατέχοντος, γρ. ὃ ἐστὶ τοῦ 3 κατέχοντος.

123 19 ἀντὶ $\frac{43, 3}{33}$, γρ. $\frac{43, 7}{33}$.

125 19 ἀντὶ τοῦ $\frac{2, 15410506}{0, 100103}$, γρ. $\frac{2, 15410506}{0, 100103} = 21,32$

127 2 ἀντὶ τοῦ πρὸ τοῦ 87, γρ. πρὸ τοῦ 7.

130 15 ἀντὶ τοῦ $\frac{62}{7} = 8,859$, γρ. $\frac{62}{7} = 8,857$

132 15 ἀντὶ τοῦ $\frac{75}{100} = \frac{5}{4}$, γρ. $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

133 12 ἀντὶ τοῦ $\frac{542}{999} = \frac{4}{111}$, γρ. $\frac{542}{999} = \frac{58}{111}$

— 13 ἀντὶ τοῦ $\frac{302857}{392857} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$, γρ. $\frac{142057}{142057} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$

— 21 ἀντὶ τοῦ $0, \frac{16}{9} = 0,1 \frac{2}{3}$, γρ. $\frac{16}{99} = 0,1 \frac{2}{3}$

— 22 ἀντὶ τοῦ ἐκ τοῦ $\frac{1}{8}$, γρ. ἐκ τοῦ $\frac{1}{6}$.

134 17 ἀντὶ τοῦ $\overset{\text{πρὸ γρ}}{3} \overset{\text{πρὸ γρ}}{11} 44$, γρ. $\overset{\text{πρὸ γρ}}{3} \overset{\text{πρὸ γρ}}{11}, 44$

150 2 ἀντὶ τοῦ $\sqrt{\frac{26}{7}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{182}{7}}$, γρ. $\sqrt{\frac{26}{7}} = \sqrt{\frac{182}{7}}$

156 9 ἀντὶ τοῦ $3 \times 62^2 = 57660$, γρ. $3 \times 62^2 \times 5 = 57660$

162 · 16 ἀντὶ τοῦ ἡ ὁ ἀπλῶς λόγος, γρ. ἡ ἀπλῶς λόγος

166 7 ἀντὶ τοῦ 30 : 5 :: 35 :, γρ. 30 : 6 :: 35 : 7

166 18 ἀντὶ τοῦ τῶν ἰδίων παραγόντων, γρ. τῶν ἰδίων
παρονομασιῶν.

170 17 ἀντὶ τοῦ $12 \times 5 = 20 \times 5$, γρ. 12×5
 $= 20 \times 3$

174 15 ἀντὶ $\chi = 360 \times 25 = 8700$, γρ. $\chi =$
 $360 \times 25 = 9000$

175 2 ἀντὶ τοῦ $564 : 1692 :: 2808 :$ χ , γρ.
 $569 : 1695 :: 2508 :$ $\chi = 186 \frac{31}{\pi}$

185 22 ἀντὶ τοῦ $\frac{533\frac{1}{2}}{120\gamma\rho} = 4 \frac{17}{3}$, γρ. $\frac{533\frac{1}{2}}{120} =$
 $4 \frac{17}{3}$

189 14 ἀντὶ τοῦ 5000, γρ. $1914\frac{1}{2}$

$$\frac{742\frac{1}{2}}{5000}$$

191 7 ἀντὶ τοῦ ἐλάσσονα, γρ. κρείττονα, καὶ ἀντὶ
τῆς κρείττονος, γρ. ἐλάσσονος.

