ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ, ΑΡΧΙΠΡΕΣΒΥΤΕΡΟΣ ΓΩΑΝΝΙΝΩΝ, ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΧΟΣ ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΤΟΥ ΚΟΡΥΤΣΑΣ
Κυδαλίμη τὺ πόνων χ' ἰδέων Μπαλκάνι διὰ Ἑλλάς.
Ὅς φάνεν ἀγγὰν, πεδοσιτιοῖς
Πλίσιεν δώματα χεδιὰ Μαδήσιος, ὅσα τ' ἔμεν
Τῆς χθονίως τεύξαι χ' ὑρανίως σοφίας.
Coronat Virtus Cultores suos
Perpetuæ laudis monumentis.
ΑΨΧ'

Ο'ΔΟ'Σ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ΄Σ
Η' ΤΟΙ

Σειρὰ βαθμηδὸν προϊοῦσα, περιεκτικὴ τῶν κατ' εἶδος πυκνοτέρων τῆς Μαθήσεως πραγματειῶν, διῃρημένων εἰς Τόμους ρεῖς.

ΤΟ'ΜΟΣ ΠΡΩ΄ΤΟΣ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟ'Σ

Τῶν Στοιχείων τῦ Εὐκλείδου, καὶ Σφαιρικῶν τῦ Θεοδοσίυ.

Δ Ε Υ΄ Τ Ε Ρ Ο Σ.

Γεωμετρίας Θεωρητικῆς καὶ πρακτικῆς, καὶ Τεχνωνομετρίας,

Τ Ρ Ι΄ Τ Ο Σ.

Τῆς κατὰ Πρόκλον σφαίρας, τῦ περὶ χρήσεως σφαιρῶν Γορδάνυ, Α'στρολαβίυ, Γεωγραφίας τε, καὶ Ο'πτικῆς. προσέθεται καὶ

Τ Ε΄ Τ Α Ρ Τ Ο Σ.

Τῆς Α'ριθμητικῆς.

Ο΄ΔΟ΄Σ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ΄Σ

Η΄ ΤΟΙ

Σαρὰ βαθμηδὸν προϊοῦσα, περιεκτικὴ τῆ̃ κατ' εἶδος κυριωτέρων τῆ̃ς μαθήσεως πραγματειῶν, οἷον

Τῶν στοιχείων τῶ̃ Εὐκλείδη. Σφαιρικῶν κατὰ Θεοδόσιον. Γεωμετρίας θεωρητικῆ̃ς καὶ πρακτικῆ̃ς. Τριγωνομετρίας. Τῶ̃ περὶ Κεντρικῆ̃ς σφαίρας κατὰ Πρόκλον. Τῶ̃ περὶ χρήσεως σφαιρῶν. Ἀστρολαβίου. Γεωγραφίας, καὶ Ὀπτικῆ̃ς.

πρότερον μὲν παρὰ

ΤΟΥ̃ ΑΙΔΕΣΙΜΩΤΑ΄ΤΟΥ ΚΑἸ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΤΑ΄ΤΟΥ ΚΥΡΙ΄ΟΥ ΜΕΘΟΔΙ΄ΟΥ Α΄ΝΘΡΑΚΙ΄ΤΟΥ ΕΞ ΙΩΑΝΝΙ΄ΝΩΝ

Ἐκ τῆ̃ς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλληνίδα μεταχθεῖσά τε φωνὴν καὶ ἁρμοδίως λέξαι μέτρῳ συμπεπυγμένως, καὶ ἀμυδρῶς. ὕστερον δὲ παρὰ

ΤΟΥ̃ ΑΙΔΕΣΙΜΩΤΑ΄ΤΟΥ ΚΑἸ ΕΛΛΟΓΙΜΩΤΑ΄ΤΟΥ Α΄ΡΧΙΠΡΕΣΒΥΤΕ΄ΡΟΥ ΙΩΑΝΝΙ΄ΝΩΝ, ΚΑἸ ΔΙΔΑΣΚΑ΄ΛΟΥ

Τῶ̃ ἐκεῖ νῦν συμβιοῦντος ἐπὶ Ταύρῳ πρὸς ταῖς ἅλλαις ἐπιστήμαις, Ἀρχιγυμνασίου, ΚΥΡΙ΄ΟΥ ΜΠΑΛΑ΄ΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥ΄ΛΟΥ,

Ἀναπτυχθεῖσά τε καὶ καλλωπισθεῖσα τῆ̃ τε φράσει τῆ̃ς λέξεως καὶ τῆ̃ σαφηνείᾳ τῆ̃ς νοημάτων, πλατυνθεῖσά τε, καὶ πλουτισθεῖσα τῆ̃ προσθήσει ὀλίγων θεωρημάτων τε, καὶ προβλημάτων, παύν χρησίμων ὄντων ἀπαιθισμάτων, τῆ̃ μὲν συλλεχθέντων ἐκ διαφόρων ἐπιστήμων Συγγραφέων παλαιοτέρων τε καὶ νεωτέρων, τῆ̃ δὲ παρ' αὐτῶ̃ διηρθρώντων· καὶ ὅπως ἐς κρεῖττόν πως διαπεπλεῖσά τε, καὶ ἀναπληρωθεῖσα χάριν τῆ̃ παρ' αὐτῆ̃ μαθητιώντων, Προσφωνηθεῖσα μὲν

ΤΟΙ̃Σ ΕΚΛΑΜΠΡΟΤΑ΄ΤΟΙΣ ΚΑἸ ΕΥ̓ΓΕΝΕΣΤΑ΄ΤΟΙΣ ΤΙ΄ΟΙ̃Σ ΚΑΡΑΓΩΑ΄ΝΝΟΥ, ΚΑἸ ΜΑΡΟΥ΄ΤΖΗ, ΕΥ̓ΠΑΤΡΙ΄ΔΑΙΣ ΙΩΑΝΝΙ΄ΝΩΝ.

Τύποις δὲ νῦν πρῶτον ἐκδοθεῖσα, προσοπῆ μὲν καὶ σωφρομῆ τῆ̃ φιλομαθῶν καὶ φιλολόγων· ἐπιμελείᾳ δὲ, ᾗς οἷόν τε ἦν, καὶ διορθώσει

ΓΕΩΡΓΙ΄ΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙ΄ΝΟΥ ΖΑΟΡΙ΄ΤΟΥ Ε΄Ξ ΙΩΑΝΝΙ΄ΝΩΝ

Διαιρεῖται δὲ εἰς τόμους ἕξ· προστεθεμένης ἐπὶ τέλει καὶ τῆ̃ πάρτης, τῶ̃ τῆ̃ς Ἀριθμητικῆ̃ς.

ΤΟ΄ΜΟΣ ΠΡΩ΄ΤΟΣ.

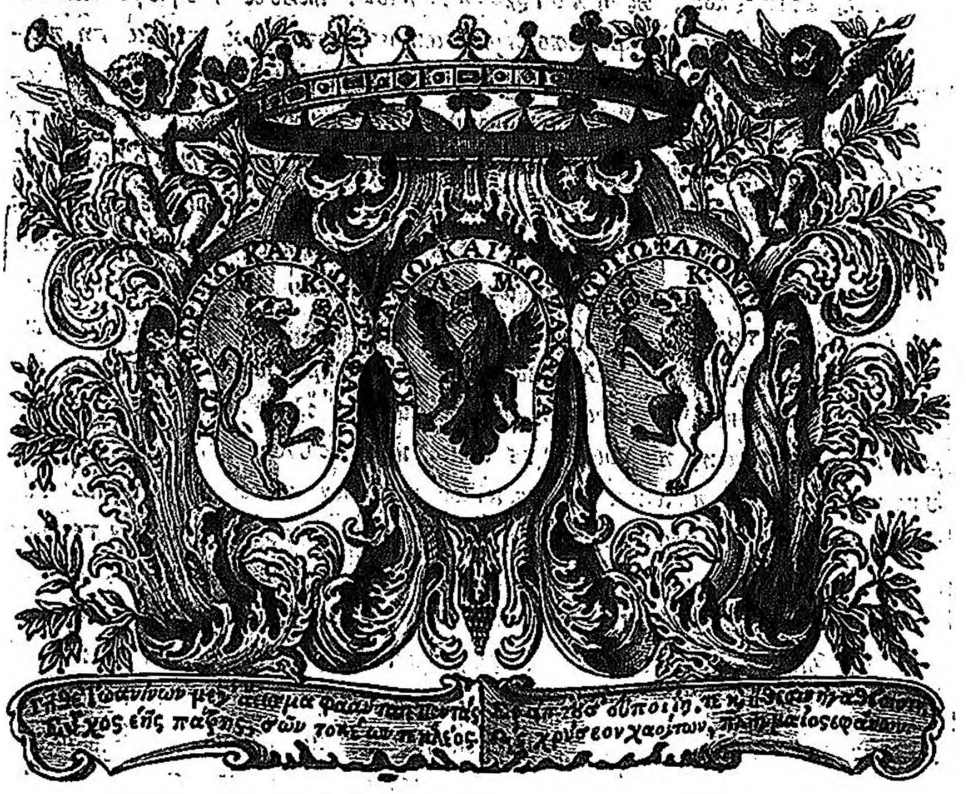
ΕΝΕΤΙ΄Η, ΣΙΝ ΕΤΕΙ ΤΩ̃ ΣΩΤΗΡΙ΄Ω, ᾳψμϑ.

Ἐν τῆ̃ Τυπογραφίᾳ Ἀτυπωσίου τῶ̃ Βόρτολι.

CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

Τοῖς Ἐλλαμφοτάτοις καὶ ἀγχιστάτοις, χρησιμωτάτοις τε καὶ χρεοπρεσβάτοις,

ΤΟΙΣΤΕ ΤΟΥ ΚΑΡΑΪΩΑΝΝΟΥ ΚΑΙ ΜΑΡΟΥΤΖΗ ΑΠΟΓΟΝΟΙΣ



Τῶν προσήκοντα ἐκάστῳ ἀποτίμων φρόνησιν, διδόμενος ὑπὲρ ὑμῶν ἐκτενῶς πρὸς Κύριον.

ΜΑ΄χη ὑπὲρ πατρίδος συγγένεσθαι ἀπόγονοι συγγενεσάτων προγόνων, ἔφη τις τῶν πάλαι φιλοσόφων, τὸ πρὸς αὐτὴν ἑκάστου ἀπαραίτητον χρέος δεῖξαι βουλόμενος. ἄλλος δέ τις πάλιν πρὸς τὸ τῆς πατρίδος ἀφορᾶν προτέρημα, τὸ πρῶτον τῶν ἐν τῷδε τῷ βίῳ ἐφετῶν, καὶ γλυκύτερον παντὸς ἄλλου ταύτην εἶναι ἀπεφήνατο, ὥστε καὶ προαιρεῖσθαι πολλοὺς τὸν ἐν τῇ πατρίδι θάνατον,

κἂν

κἄν τις αὐτοῖς ἐν ἀλλοδαπῇ καὶ ἀθανασίαν προεπηγγείλατο. ἀλλά γε ἡ τὸ, οὐκ ἔχομεν ὧδε μένουσαν πόλιν, ἀλλὰ τὴν μέλλουσαν ἐπιζητοῦμεν, οὐκ ἄλλοτι τῶντι βούλεται, ἢ ὅτι τοῖς ἀνθρώποις οὐδέν ἐστιν, ὡς ἡ πατρὶς ποθητόν. ἔκλυσα δ' ἔγωγε καί τινος τῶν καθ' ἡμᾶς ἐν φιλοσοφίᾳ διαπρέψαντος, ἡ πολλὰ τῇ πατρίδι θερμῶς πονήσαντος, μέχρι καὶ βαθυπάτρου γήρως τοῖς φιλομαθέσιν ἐπαρκοῦντος, ἐν τούτῳ καὶ μόνῳ καυχωμένου, ἐν τῷ τῇ ἐνεγκούσῃ χρηματίσαι διδάσκαλον, καὶ τὸ πρὸς αὐτὴν ὀφειλόμενον διὰ πολλῶν ἀποπληρῶσαι ἀγώνων, καίπερ ἄλλοις τε πολλοῖς κεκοσμημένου τοῖς προτερήμασι. Τοῦτο τοίνυν κἀγὼ πολλάκις κατ' ἐμαυτὸν διαλογιζόμενος, καὶ ὡς φιλοσοφικὴν παραίνεσιν τὰ παρὰ τοῦ ἀνδρὸς τούτου ἀποδεχόμενος, ὁρῶν δὲ καὶ τὴν φιλπάτριν πατρίδα τῶν ἄλλων μὲν πλουσίων πως μαθημάτων, ἡ ταῦτα ἐντοσαύτῃ τοῦ γένους ταπεινώσει, ἀμοιρήσαν δ' ὅλως τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης πολυειδῶν τε ἅμα καὶ ἀσύλων, ἵν' ὕστερον εἴπω, θησαυρῶν, τὴν πλείονά μου σπουδὴν καὶ τὸν κατὰ τὴν ἐμὴν δύναμιν ἀγῶνα εἰς αὐάπτυξιν τῆς παρ' αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων κατέβαλον, πολλὰς δὲ καὶ διὰ πολλοῦ τοὺς πόνους ὑπενεγκών, οὐκ ὀλίγους τε ἱδρῶτας ἐκχέας, καὶ μεγάλοις ὀσημέραι τοῦ βίου παλαίσας τοῖς δυσχερήμασιν, ὡς καὶ ὑμῖν τοῖς ἐρασμιωτάτοις γνωστὸν, τὰς χρησιμωτέρας ταύτας, τῆς ὄντως Μαθηματικῆς ἐπιστήμης, πραγματείας, εἰς ἣν τηροῦσι τάξιν τὰ ἐν αὐταῖς ἡ εἱρμὸν μετὰ τῆς προσηκούσης, ὅσον οἷόν τε, σαφηνείας τε καὶ ἀποδείξεως ἤγαγον, τὰ πλεῖστα μὲν τῆς ἐν ἑκάστῃ παρὰ τοῦ ἐμοῦ εἰς ταῦτα καθηγεμόνος ἔχων, ἄλλα δὲ παρ' ἄλλων ἀρχαιοτέρων ἐρευνῶμενος, ὧν καὶ τοῖς συγγράμμασιν ἐνέτυχον, καί τινα πρὸς κρείττονα ἑκάστης πραγματείας ἀπαρτισμὸν κατὰ τὴν ἐνοῦσάν μοι προθυμίαν διώρθωμαι. ἤδη δὲ καὶ εἰς τύπον τὰ διὰ πολλῶν συλλεχθέντα πόνων, ἡ πολλοῖς αὐαπτυχθέντα τε καὶ καλλωπισθέντα ἱδρῶσι ἐνδοθῆναι τοῦ θεοῦ δοκήσαντος, ἵνα ἐκ τούτων οἱ μεθ' ἡμᾶς λάβωσί τινας ἀφορμὰς, καὶ ζῆλον ἔνθεον εἰς ἀνάμνησιν τῆς παρὰ τοῖς πάλαι Ἕλλησι θαυμασίας τε καὶ ἀκριβεστάτης

τῶν

τῶν μαθημάτων τούτων διδασκαλίας, οὐκ ἔδοξέ μοι ἄλλοις τισὶ προσκομίσαι ταῦτα, ἢ ἀναθεῖναι, οἰκειότερον δ' εἰπεῖν, ἐνορμίσαι ὡς εἰς λιμένα εὔδιον καὶ ἀκύμαντον, ἢ τοῖς λαμπρότητι γένους, ἀφθονίᾳ τε πλούτου, καὶ τοῖς ἄλλοις ἔτι προτερήμασι φυσικοῖς τε ἅμα καὶ ἐπικτήτοις, τῶν ἄλλων τῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμωμένων πατρίδος πρέχουσιν, ὑμῖν λέγω τοῖς ἐκλαμπροτάτοις ἀπογόνοις ΚΑΡΑΪΩΑΝΝΟΥΤΕ καὶ ΜΑΡΟΥΤΖΗ, τοῖς ἀθαλεσάτοις βλαστοῖς ἐξ ἀθαλῶν ὄντως δένδρων, προθήσω δέ, εἶναι διὰ πασῶν τῶν ἀκοῶν περιβόητα, καὶ διαθρυλλούμενα, τῇ τελμόρφῳ καὶ θεοεικέλῳ εἰκόνι τῶν χαρίτων, τοῖς συμπαρεσάτοις περὶ τὸς δεομένους, τοῖς φιλοφρονουμένοις δαψιλεσάτῃ χειρί τους καίμοντας, τοῖς κηδεμόσι τῶν διαπραγόντων, τοῖς περιβεβλημένοις τὸν ἀποσίλβοντα χιτῶνα, τῆς σωτέρας, τῆς ἀκοσμίας, τῆς ἀτυφίας, καὶ ταπεινοφροσύνης, τῆς πρὸς παῦν ἀγαθὸν ἐπιρρεπῶς κλίσεως, καὶ σωμελόντι φαῦναι πεποικιλμένον παντοίῳ εἴδει ὑψηλῶν, καὶ διαπρυσίων προτερημάτων, καὶ οἷς ὡς δῶρον ἀρετῆς, συμπάροικος μὲν ἔφορος καὶ πρύτανις ἡ θεία χάρις, παρ' ἧς οἰκέτης τε καὶ ὀπαδὸς ἡ τύχη. εἰς ταῦτα ἀναβλέψας, τούτοις τε θαῤῥηκὼς, ἐκλιπαρῶν, ἀνακαλοῦμαι τὸ ὑμέτερον προσωπεῖς, καὶ ἀπρόσιτον, ἀποδέξασθαι φιλοφρόνως τὸ θεοτολχές μου τοῦτο ἀνάθημα, ὡς μικρόν τι τεκμήριον τῆς ἀγνώμονος, ἧς πρὸς ὑμᾶς ἔχω ὑπολήψεως, ὃ καὶ πέπεισμαι ἱκανῶς· ἔστε γὰρ ἄλλος τις ὑπωσὶ ἀσμένως, καὶ ὕπω φιλοδρῶς δέξαιτ' ἂν καὶ ἐναγκαλίσαιτο τὸ πρὸς αὐτὸν προσφερόμενον, ὡς ὁ φιλόπατρις τὸ ἐκ τῆς πατρίδος· διὸ δὴ καὶ ὁ διὰ μακροῦ πλανώμενος χρόνου, καὶ γῆν τὴν τῆς πατρίδος ἰδεῖν καπνὸν, ἐφίεται. ὅστε μοι δικαιότερον ἄλλο ἢ τοῖς οἰκείοις τὰ ἐκ τῶν οἰκείων ἀνατίθεσθαι. τί δὲ τοῖς φιλοπάτρισι τῶν ἐκ τῆς πατρίδος οἰκειότερον; ἀλλ' οὐδ' αὐτοῖς τοῖς προσφερομένοις ἄλλο πρὸς ἔπαινον προσφυέστερον. Δέξασθε τοίνυν ἀσμένως ἀγενέσατοί μοι καὶ προσφιλέσατοι τὰ νεοφανῆ πως ταῦτα μαθήματα, καίπερ τῷ γένεσιν ἐξ ἀρχαίων ἔχοντα εὑρετῶν, πρὸς ἔπαινον τῆς φιλτάτης πατρίδος, ἐπιδόσίν τε τῶν τοῦ γένους φιλομαθῶν, καὶ κλέος ὑμέτερον.

εὐελπις γάρ εἰμι τοῖς μὲν ἄλλοις, τοῖς φθόνου πάντας καθαρεύουσι, λόγου τε φανείσαν καὶ ὑποδοχῆς ἄξια, τοῖς δὲ νέοις μὴ τὴν τυχοῦσαν προμηνύσουσα λυσιτέλειαν εἰς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν ἐπίδοξιν· ἀλλά γε καὶ μοὶ τῷ ὑπ' ἀγάπης ταῦτα προσκομίζοντι πρὸς ἔνδειξιν τῆς φιλαγάθου ὑμῶν καὶ χρησοήθους διαθέσεως, τοῦτο καὶ μᾶλλον εἰς καύχησιν καὶ παραμυθίαν τῶν πολλῶν ἐν αὐτοῖς καταβαλομένων πόνων, πρὸς χάριν πάντως γε τῶν φιλομαθῶν, τὸ τοῖς φιλτάτοις τε καὶ ἀγχινεσάτοις προσενεχθῆναι τῆς πατρίδος γεννήμασιν· ὑμῖν δὲ τοῖς ταῦτα φαιδρῶς ἀποδεξαμένοις ἐπιβραβεύσαι ὁ τῶν ὅλων Δεσπόζων καὶ Παροχεὺς τῶν ἀγαθῶν, ὑγιείαν, μακροημέρευσιν, καὶ τὴν κατ' ἄμφω εὐδαιμονίαν πρὸς καύχησιν τῆς ἐνεγκούσης καὶ παραμυθίαν τῶν δεομένων.

Τῆς ὑμετέρας παμφιλεύς Εὐκλαμπρότητος.

Ε'ρρῶσθαι πρὸς θεὸν εὐχέτης Μιχαὴλος Βασιλόπουλος Ἀρχιπρεσβύτερος Ἰωαννίνων καὶ Διδάσκαλος.

ΠΡΟΟΙ-

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

ΤΩΝ ΥΠΟΓΡΑΦΑΝΤΩΝ ΧΑΡΙΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΣ ΤΙΝΟΣ

Καὶ βοηθείας, εἰς ἀμάκαφισμὸν τῆ Ἐκδότη διὰ τὸ δαπανηρὸν περὶ τὴν ἔκδοσιν τῆς Μαθηματικῶν τόπων πραγματειῶν.

Ἐξ ὧ δηλοῦται ὁ ἔνθεος αὐτῆς ζῆλος περὶ τὰ κρείττω τῆς ἐν τῷ βίῳ, ἡ διάπυρος ἔφεσις τῆ ἀμακαμισμῆ τῆς παλαιωθείσης τῆ γένους δόξης, τὸ ἐλεύθερον τῆς ὑποκειτικῆς προαιρέσεως, τὸ φιλογενὲς, τὸ περὶ τὰς μαθήσεις φιλότιμον, τὸ πρόθυμον καὶ γενναῖον φρόνημα εἰς ἐπιτέλεξιν, ὧν ἀδέκτως αὐτὰ μάγμα τῆς ἐν τῷ βίῳ λαμπρῶν ἢ τιμίων, θεῖον γὰ κτῆμά ἐστιν ἡ Μάθησις, αὔταρκές τε ἢ ἀναφαίρετον· διὸ ἢ ὑμνοικῆς ἀποδοχῆς ἔ φιλοτεργίας παρ' αὐτῆς ἀξίωται, ὅτε μάλιστα λιτὰ ἢ ἀτελῆ ὑπάρχει τὰ τῆς αὐτῆς ἐραστῶν. Ἐπαγγέλλεται δὲ ὑμῖν τοῖς αἰτίοις γεγονόσι τῆ τῶν μεσότητα ἀμαχολήσαι περὶ τὰς ἐπιστήμας, καὶ ἐπιδεικνύσι δαψιλῆ τὴν χορηγίαν περὶ τῶν αὐτῆς ἀμακαίμισιν, δῆλα καταστῆσαι τὰ χαριστήρια παρά τε τῷ αὐτῆς πατρὶ Διὶ, ἢ παρὰ πᾶσιν, ἐπιβοχομένη πᾶσαν εὐδαιμονίαν παντὸς ἀγαθῆ πλεονεκτήματος καθ' ἑκάτερον τὸν ἄνθρωπον, ὑμῶν φημι, ὧν τὰ ὀνόματα προσοίσει τῷ ἰδίῳ πατρὶ, ἢ ἐγχαράξει εἰς τῶν παρ' αὐτῷ βίβλον τῆς ἀτιμιωθίας, λέγουσα αὐτῷ λαμπρᾷ τῇ φωνῇ, παρ' οἷς ἔτυχον εὐμοίας, δεξιώσεως, ἀποδοχῆς τε καὶ φιλοφροσωίνης, τόπων ἀμέλει τὰ ὀνόματα εἰσὶ ταῦτα βαθμηδὸν προϊόντα· ἢ ἐν πρώτοις.

Τῆ Μακαριωτάτῳ ἢ λογιωτάτῳ Ἀρχιεπισκόπῳ τῆς μέας Ἰερουσαλὴμ καὶ πάσης Κύπρου κυρίῳ Φιλοθέῳ.

Τῆ παμσοιωτάτῳ ἢ λογιωτάτῳ Ἀρχιμανδρίτῃ τῆς Ἁγιωτάτης Ἐπισκοπῆς Κύπρου Κυρίῳ Παϊσίῳ.

Τῆ ἐν ἱερεῦσιν Αἰδεσιμωτάτῳ, καὶ λογιωτάτῳ Κυρίῳ Γεωργίῳ Πατέσα τοῦ ἐξ Ἀθηνῶν, Διδασκάλῳ τοῦ ἐν Ἐμετίῃσι Φλαγγιμιαμῆ Ἑλληνομουσείου.

Τῆ Αἰδεσιμολογιωτάτῳ ἐν Ἱερομοναχοις Κυρίῳ Τρύφωνος ἐξ Ἰωαννίνων.

Τῆ Αἰδεσιμολογιωτάτῳ ἐν ἱερεῦσι Κυρίῳ Παππαπάρῳ Μαρέσι τῆ ἐκ Κερκύρας.

Τῶν

Τῶν ἐκλαμπροτάτων ἐ δι'γερεσάτων υἱῶν Καραϊωαμὲ Κυρίε Γεωργίε, ὁ Κυρίε Στεφαμὲ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τῶν ἐκλαμπροτάτων ὁ δι'γερεσάτων υἱῶν Μαρούτζη Κυρίε Παύλε, ἐ Κυρίε Ζαχαρία ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐκλαμπροτάτε ὁ δι'γερεσάτε Κυρίε Λέοντος Καραϊωαμὲ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐκλαμπροτάτε καὶ δι'γερεσάτε Κὺ Ἰωαμὲ Δέκα τοῦ ἐξ Ἀθηνῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίε Δημητρίε Μπέρκε, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ἐ χρησιμωτάτε Κυρίε Ἰωαμὲ Μπέρκε, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίε Λάμπρε Σάρρε, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίε Σπάνε Δημητρίε, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίε Σκαρλάτε Δημητρίε, ἐκ Λαρίσσης.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίε Ἀναστασίε Μπιτζίνε, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμομουσικωτάτε Κυρίε Δημητρίε Παΐκε Θεσσαλομικέως.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ὁ δι'γερεσάτε Κυρίε Νικολάε Σελέκη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίε Ἀναστασίε Βασιλείε ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμολογιωτάτε ὁ χρησιμωτάτε Κυρίε Ἀμπρωσίε Παππᾶ ἐκ Σερρῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ὁ χρησιμωτάτε Θεοφυλάκτε Βυβῆ ἐξ Ἀθηνῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ὁ χρησιμωτάτε Διομυσίε Ταρωνίτε ἐξ Ἀθηνῶν.

Τῆς χρησιμωτάτης ἑταιρείας Κυρίε Δημητρίε Παππᾶ ὁ Κυρίε Ἰωαννίκε Πάσχε, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ὁ χρησιμωτάτε Κυρίε Πολυζώη Σπείρε, τοῦ ἐξ Ἀργυροκάστρε.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ὁ χρησιμωτάτε Κυρίε Νικολάε Τζικαλᾶ, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτε ὁ χρησιμωτάτε Κυρίε Πέτρε Κωμιάλη, τοῦ ἐκ Κύπρε.

Τοῦ ἐντιμωτάτε καὶ χρησιμωτάτε Κυρίου Ζαχαρία Φραγκίσκου, τοῦ ἐκ Κύπρε.

Τοῦ

Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Γ̈ωαμμυ Τζιγκιρλάρα Σμυρναίυ.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Γωαμμυ Κομματᾶ ἐκ Πάτμυ.
Τῦ ἐντιμολογιωτάτυ Κυρίυ Ρ̈ίζυ Μπακάλη, ἐκ Τυρνόβυ.
Τῦ ἐντιμολογιωτάτυ Κυρίυ Παναγιώτυ Ρ̈ογκώτη ἀξ Γ̈ωαμμίμων.
Τῦ ἐντιμολογιωτάτυ Κυρίυ Θεοφίλυ Κατεργάρη ἀξ Γ̈ωαμμίμων.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Παναγιώτυ Κορταξῆ, ἀξ Γ̈ωαμμίμων.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Πολυζώη Λαμπαμιτζιώτη ἀξ Γ̈ωαμμίμων.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Α̈γαζασίυ Δημητρίου Καλίτζυ, ἐκ Λαρίσσης.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Νικολάυ Δαμβόλυ, τῦ ἐκ Κρήτης.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Θεοδώρυ Σβάτη ἀξ Γ̈ωαμμίμων.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Γωαμμυ Παππακώτζα ἀξ Γ̈ωαμμίμων.
Τῦ ἐντιμωτάτυ καὶ χρησιμωτάτυ Κυρίυ Γεωργίυ Κυφαριώτη, τῦ ἀξ Α̈ρτης.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ

Πρὸς τὰς φιλομαθεῖς.

Ὀρθῶς τῷ ὄντι γε φθάσας, φιλομαθήσασι, Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, εἰ τῆς Ἐπιστήμης εἶναι τοῖς ἀνθρώποις ἀποφήναιτο γένος, τῷ Μαθηματικῷ καὶ μόνῳ, αὐτὸ τοῦτο ὑπάρχειν ἀποδείξειεν, κἂν τῇ τὰ λοιπὰ δύο τοῦ Θεωρητικοῦ μέρη, τὸ Φυσικόν φημι καὶ Θεολογικόν, ὁ δὲ Μεταφυσικὸν ἔκτισε, ὑπὸ τῷ ἐπιστήμῳ, ὡς ὑπὸ γένος οἰκεῖον σωφρονοῦμος οἱ πλείους, ἵνα μὴ πάσας εἴπω, ὑπάγεσθαι ἐθέλουσι. Προοιμιαζόμενος γὰρ πρὸς Σῦρον ἐν τῷ περὶ μεγάλης αὐτοῦ Συναξέως φιλοτιμήματι, τῷ τε ἀξίαν, καὶ τὸ χρήσιμον, ὅσον τῆς περὶ τὰ θεῖά τε καὶ ἀνάγκια καταγινομένης Θεωρίας πρὸς αὐτὸν δεῖξαι βουλόμενος, παραβάλλων ἀλλήλοις Φυσικόν τε, Μαθηματικόν τε, καὶ Θεολογικόν, τὰ μὲν δύο, φυσικόν τε καὶ Θεολογικόν, ἀνάγκαια μᾶλλον, ἢ καταλυτικὸν ἐπιστημονικῷ καλεῖσθαι δεῖν οἴεται· ἐπάγει δὲ καὶ τῷ αἰτίᾳ προσηκόντως λέγων, τὸ μὲν Θεολογικὸν, “διὰ τὸ ἀφανὲς αὐτοῦ καὶ ἀπερίληπτον, τὸ δὲ Φυσικὸν διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄ“στατον καὶ ἄδηλον. μόνον δὲ τὸ Μαθηματικὸν ἐπιστήμῳ εἶναι ἀποφαίνε“ται, καὶ τῇ τῆς ἐπιστήμης ὀνόματι καλεῖσθαι ἄξιοῖ, ἅτε δὴ βεβαίαν καὶ ἀμετάπτωτον, ὡς αὐτός φησι, τοῖς χρωμένοις τῷ ἀδήλῳ παρεχόμενον. εἰ γὰρ ἐπιστήμῳ τινὸς ἔχειν λέγομεν, κατὰ τὸν Φιλόσοφον, ὅτι τῷ αἰ“τίαν αὐτοῦ γινώσκομεν, διὰ ἣν τὸ πρᾶγμά ἐστι, καὶ ὅτι αὐτοῦ αἰτία ἐστὶ, “καὶ ἀδύχιται ἄλλως ἔχειν· τῷ δὲ ἐπιστημονικῷ γνῶσιν ἀκριβῆ εἶ“ναι προσήκει, καὶ ἀμετάπτωτον, πάντως γε ἐν μόνοις τοῖς Μαθήμασι ἐ“πιστήμῳ ποιήσασθαι δυνάμεθα. τῷ μὲν γὰρ ἀσωμάτων καὶ τῆς ὕλης πάντη κεχωρισμένων, ἀκριβῆ γνῶσιν ἀνθρώποις ἐν τῷ μετὰ σώματος βίῳ λαβεῖν ἀμήχανον, ὅτι μὴ τοῖς τῷ ἀδύτῳ κατιλαμπομένοις φωτὶ τῆς ἁγιωλίας θεότητος, καὶ οἷς τὰ περὶ τὸ Θεοῦ, καὶ τῷ θείων μὴ ὑπὸ

σαρκὸς καὶ αἵματος ἀποκαλύπτεται, ἀλλ' ὑπὸ τοῦ Θείου Παῦλος, κατὰ τὸ γεγραμμένον. ἐδεσός γὰρ τῶν φαντασίαν τινὰ ἔχομεν, ὅτι μὲν τὴν αἰτίαν αὐτὴν γνῶναι δυνάμεθα, μὴ μᾶλλον τὸ νοᾶς πρὸς αὐτὰ ἀτενίζειν ἔχοντος, ἢ πρὸς τὸ τοῦ Ἡλίου, φῶς αἰ νυκτερίδες. Ἐπὶ δὲ τῆς ἐνύλου καὶ σωθέντων ἐδέποτ' αὖ ἅπταισον ἔχειν δυνάμεθα τὴν γνῶσιν, κἂν καὶ τὴν αἰτίαν αὐτῆς ἴδωμεν, διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄζαπον, καὶ παντοίᾳ ὑποκεῖσθαι ταύτῃ ἐκ τῶν μεταβολῶν. εἰδὲ καί τινα ἐν τοῖς παθήλοις, γεύσεί τε φαμὲν καὶ εἴδεσι τῶν ἐνύλων, ἐπιστημονικὴν ἔχειν εἴδησιν δοκῶμεν, ἀλλ' ἢ κἂν τοῖς ἀτόμοις, ἢδ' οἵαν ἐν τοῖς μαθήμασι κοινῆς τε καὶ κατὰ μέρος. διὸ δὴ καὶ πάσας ἕδρα τὰς ἐπιστημονικὰς ἐφικνεῖσθαι γνώσεως, ἐν τοῖς μαθήμασι, πολλῷ μᾶλλον ἐναχολεῖσθαι, ἐν οἷς οἱ αὐτοὶ παρὰ πᾶσι λόγοι τε καὶ ἀποδείξεις, καὶ ἀδηλία κατὰ τῶν τοῖς τε πάλαι καὶ νεῶν δεικνύει ζήτησιν καὶ διαφωνία. τίς γὰρ, εἰπέ μοι, τὸ τὰς ἔσω τῶν ἐγγώνιον γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, δυνατ' ἂν ἀπασκάσαι, κἂν ὁ διαβατικώτατος ἐν νεοῖς καὶ διαλεκτικώτατος; ἢ τίς μὲν διχθεῖν πεπεισμένως τὰς ἐν ταῖς παραλλήλοις διὰ τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπιπτούσης γραμμῆς συνεσμένας ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας εἶναι, καὶ ὅσ' ἄλλα γεωμετρικῶς ἐμπεδοῦνται ἀποδείξεσι; τίς δὲ παρὰ τὸ ποσὸν συνεχὲς τε καὶ διωρισμένον, ἄλλοτι ἐπιστητὸν τῆς μαθηματικῆς ὑποθεῖν ὑποκείμενον; ἢ γοῦν ἄλλας ὑποθέσεις τε καὶ ἀρχὰς λαβεῖν, ὡς ἐν τῇ φυσικῇ θεωρίᾳ, ἐν ᾗ καὶ δόξαι τῶν φιλοσοφούντων διάφοροι ἀναφύονται. Ἐπεὶ δὲ ἕκαστον σύνθετά τε γίνεται, καὶ οὐδὲν μάτην, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς θεωρίας πέλος ἢ τῶν ζητουμένων, ἢ γοῦν προβαλλομένων ἐπίλυσις, ὥστε ἀφυσυχάζειν τὸν νοῦν, καὶ μηκέτι πορρωτέρω προβαίνειν εἰς ζήτησιν τῶν θεωρητέων, τοῦτο δὲ μᾶλλον διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἔχομεν δεῖξαι, ὡς δὲ ἀναμφισβητήτων ὁδῶν, κατὰ Πτολεμαῖον, τῆς ἐν τοῖς Μαθήμασιν ἀποδείξεως γινομένης, δῆλον, ὅτι καὶ κατὰ τοῦτο αὐθεκτέον τοῖς φιλεπιστήμοσι τῶν τὰ μαθηματικῶς προβαλλόμενά τε, καὶ ζητούμενα, πεμπτικῶν θεαμάτων, καὶ περὶ τῶν τῶν ἀεὶ, καὶ ὡσαύτως ἐχόντων τὸν σκέψιν ἀναγραφομένων. Παρὰ ταῦτα ἐπεὶ κἂν ταῖς ἄλλαις θεωρητικαῖς ἕξεσι σωτηρὸς ὅσα διαπλεῖ θαυμάσιος, ἡ Μαθηματικὴ, φόβος τὴν τῶν δύλων γνῶσιν ἡμᾶς ποδηγητοῦσα, καὶ φόβος τὴν τῶν ἐνύλων καταληψιν τὰ μάλιστα σωτηροῦσα, πῶς οὐ προληπτέα παντὶ φιλεπιστήμονι ἡ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων καὶ θεωρημάτων γνῶσις; τὰ γὰρ ὑπὸ τῆς μαθηματικῆς θεωρούμενα ἐπιστήμης κατὰ ἀφαίρεσιν ὑπάρχοντα, μέσην ἔχει τὴν τάξιν, καί τινα φόβος ἑκάτερον τῶν ἄκρων πρεῖ συγγένειαν, φόβος μὲν τὰ τῆς ὕλης ἐκτὸς, ὡς ἡ ἐπιπεδία, καὶ ταῦτα τῆς ὕλης κεχωρισμένα, φόβος δὲ τὰ μετὰ τῆς ὕλης καὶ σώματα, ὡς πολλὰ τῶν ἐν ἑκάστοις διεχόμενα παθῶν. τομαὶ γὰρ καὶ ταῦτα φόβεσίς τε καὶ

ἀφαι-

ἀφαιρέσεις, καὶ παντοίας ἐπιδέχονται μεταμορφώσεις, ὁμοιότητάς τε πάλιν καὶ ἀνομοιότητας κατά τε τὰς ἐν αὐτοῖς λόγους καὶ σχηματισμὰς διάφορα μὲν. Ἀλλά γε καὶ ὅσα τῆς ἀναλογίας τὰ εἴδη καὶ ὁποῖα, ἢ τὰ πάντα συνάγεται ἅμα καὶ συμπέραται, ἡ Μαθηματικὴ ἀποδείκνυσιν. Ὁ γοῦν ἐν τοῖς μαθηματικοῖς προβλήμασί τε καὶ θεωρήμασιν, ὡς δεῖ προγυμνασθείς, δυνήσεται διπλασίονα ἀπογράψασθαι τὸν τοῦ κύβου κατὰ τὸ ἐρικτὸν ἀθρόοις ἐλθεῖν καταλήψεσιν, καὶ τοῖς ἀπορρήτοις τῶν κατὰ φύσιν ἐμβαπῶσαι. ὅσῳ δὲ καὶ τὴν ἡδονὴν τοῖς ἰδίοις ἐρασταῖς ἡ Μαθηματικὴ χαρίζεται ἐπιστήμη, ἴσασιν οἱ τοῖς κάλλεσι ταύτης ἐνδυφῶντες, τὰ ἀμάραντα ἄνθη τῶν ἐν τῇ ταύτης περιβόλῳ ἀποθριπόμενοι φυτῶν, καὶ τῶν ἡδυπάτων καρπῶν τούτων συνεχῶς ἀπογευόμενοι, οὐκ οἶδα δ' ὅπως, ἢ ποσῶν εἰς γνῶσιν τοῖς ἀνθρώποις συμπλέουσα, καὶ ὥπω θαυμάσιος ἐπιστήμη τοῖς πλείοσιν ἄδηλα καταμέλπεται· καὶ φυσικὴν μὲν θεωρίαν καὶ μεταφυσικὴν διήσεσιν αὖτις ἐν οὐκ ὀλίγοις. Ῥητορικὴν τ' αὖ, Διαλεκτικήν τε, καὶ Ποιητικὴν οἱ πλείους διδάσκειν ἐπαγγέλλονται, Μαθηματικῆς δὲ οἱ μὲν πρὸς τὰς πόνους ἀποδειλιῶντες, ἄλλοι δὲ ὡς μικρόν τι συμβαλλόντας τοῖς φιλομαθέσι, καὶ ἄλλοι ὡς παραπόδη τινὰ ἐπαγγελλομένης διδάσκειν, ἡδύσματα λόγου ποιοῦνται, ἢ βραχύτι καὶ ταύτης φροντίζουσιν, ὡς αὖ μὴ τὰ ἐν τοῖς φυσικοῖς εἰς λόγον ὑποδεγμάτων λαμβανόμενα τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων ἀγνοοῦσιν. Ἀλλὰ δεινόν γε καὶ παῦ δεινὸν ἡ αἰχμαλωσία, τῆς γὰρ μαθηματικῆς ἐπιστήμης πλεῖστοι τῶν Ἑλλήνων ποτὲ ἐρασταί, ὡς ἔγωγε καὶ ἄλλοι τινές, γεγονότες, ὥπως ἐνηγκαλίσαντο, καὶ ὥπω τοῖς συνεχέσι πόνοις τε καὶ ἱδρῶσιν ἀρθόνως ἀνθρίψαντο, ὥστε πολλὰ καὶ γενναῖα τὰ ἐξ αὐτῆς ἀναδείξαι γεννήματα, ἢ πατρὶς πολλῷ μᾶλλον, ἢ ζοφοῖ τῶν λογίζεσθαι, ὧν καὶ τὰ μέχρι τῶν δὴ σωζόμενα συγγράμματα παρὰ πᾶσι θαυμάζονται, ὡς Εὐκλείδου μὲν τὰ στοιχειῶδες, Ἀρχιμήδους δὲ τὰ περὶ τὰς μηχανάς, καὶ Πολεμαίου τὰ περὶ μεγάλης συντάξεως, καὶ ἄλλων ἄλλα, ὅσ' ἀκριβῆ, καὶ πλειστέραν τὴν περὶ ἄλλων τινῶν ὑποθέσιον ἔχουσι τὴν διδασκαλίαν. παυῶ δὲ ἐν τοσαύτῃ τῶν Ἑλληνικῶν πραγμάτων καταπτώσει ὄντων, καὶ μηδενὸς ἄλλου ἐν τιμῇ ὑπάρχοντος, ὡς καὶ πρῶτον ἐν τῷ βίῳ τοῦτο λογίζεσθαι τῶν ἐρίτων, καὶ οἱονεὶ παρὰ πάντων λαβεῖν, ὧν παραχωρήσει θεῖ συμπαντικῶς ἤδη κρατοῦντων, ὅτι μὴ χρυσός τε καὶ ἄργυρος, καὶ χρήματα παρ' αὐτῷ ὁ σημήραι λησεικῶς τῷ δυσεβῶν ἀπαιτημένων, ὡς ποτε καὶ ὁ Σωκράτης δι' ἄκραν φιλανθρωπίαν τὸν κύνα. ἤδελ ὅπως θαυμαστόν, ἔγωγε τὸ Ἑλληνικὸν γένος, μετὰ τῶν ἄλλων αὐτῆ καλῶν, καὶ τὸ παρὰ τῆς μαθηματικῆς γιγνόμενον κόσμιον. ἐν ἠρεμίᾳ γὰρ τῷ παθῶν, καὶ γαλήνῃ τῆς πολυπαράκλητου ταύτης ζωῆς τῷ ἐπιστημῶν μαργαρίτας ὁ νοῦς συλλέγειν δύναται, καὶ τὸν ποικίλον

τῆς μαθηματικῆς καὶ ἀμήχανον ὑφαίνειν κιγκλίδα. διὸ δὴ ἐν τοσαύτῃ παραχῇ ἡδῆ πραγμάτων καὶ ζάλῃ τῇ μετὰ τὸν δεινὸν ταύτην αἰχμαλωσίαν τῆς πολυκυμάντου ζωῆς, καὶ παντελῶς ἔτι τῶν πάλαι ποτὲ ἐν Ἑλλάδι θαυμασίων Ἀκαδημιῶν τε καὶ κοινῶν μουσοδοφείων ἐρημώσεως, τῶν μὲν ὑπὲρ τῶν φρὸς τὸ ζῆν ἀναγκαίων τὸν πᾶσαν αὐτῷ καταβαλλομένων φροντίδα, τῶν δ' ὅπως τὰς τῶν ἐργοδιωκτῶν φύγωσιν ὠμότητας σπουδαζόντων, μυδρεὸς ὄντος τὰ σωματιλαμβανομένου, μᾶλλον δὲ πολλῶν, εἴγε δεῖ πάντας εἰπεῖν, τῶ γενέσθαι τίνα, οὐκ οἶδα τίνος εἵνεκα καταβιαζόντων. Ποιητικὴς μὲν κάλλος, Ῥητορικῆς δεινότης, Φυσικῆς τε καὶ Μεταφυσικῆς ἀκριβὴς θεωρία, ἠμέλητοί πως καὶ ἠλαττώνηται. Μαθηματικῆς δὲ χάρις εἰς τὸ παντελὲς ἐξέλιπεν, ὡς μηδὲ εἴγε λῶ, ἢ ὅλως ποτὲ ἅψασθαι τῇ Ἑλληνικῇ πεισθῆναι γνώμῃ, κἂν τινες ταύτης ἐγλύσαντο, καθ' ὅσον ὁ καιρὸς αὐτοῖς συγκεχώρηκεν, ὡς ὅ, τε τὸ μακαρίᾳ τῇ λήξει γενέσθαι Χρύσανθος, ὁ Ἱεροσολύμων, Μελέτιος ὁ Ἀθηνῶν, Κωνσταντῖνος ὁ Γορδάπης, καὶ ἄλλοι τινὲς φρὸ αὐτῶν τε καὶ μετ' αὐτούς. ἀλλ' ὅν διὰ τὸ ἄλλῳ τινὰ βαπλῶσαι ἕκαστον ὁδὸν, ὅσα μόνον γραφῇ παραδοῦναι ἠδυνήθησαν, ταῦτα τοῖς μετάγνωσταροις εἰς ἀναζωπύρησιν τῶ φρὸς τὸν μαθηματικὸν κατέλιπον ἔρωτος. Μελέτιος δὲ ὁ Ἀνθρακίτης, ὁ ἐμὸς εἰς ταῦτα ὁδηγός τε καὶ ἡγεμὼν, ἐν τῇ αὐτῇ ταύτῃ παρέδι, τὰ Γεωπονικὰ φημι, Γραμματικὴν, Κυκλοπαιδείαν, Φυσικήν τε καὶ Μεταφυσικὴν παρὰ Γεωργίῳ φρεσβυμαθεῖ τῇ Σεγδηρῇ, δι' ἕρωτα δὲ τῆς Λατινίδος τὴς Οὐσιτίας καταλαβὼν, κἀκεῖ αὐθράσιν ἐντυχὼν ἐς ἄκρον τὴν τῶν μαθηματικῶν ἐξεσκημένοις θεωρίᾳ, καὶ παρ' αὐτῶν Γεωμετρίαν, Τεχνωτομετρίαν, Γεωγραφίαν, Ἀστρολάβιον, Ἀστρονομικὴν, Ὀπτικὴν, Διοπτικήν τε καὶ Κατοπτρικὴν, τήν τε Μηχανικὴν, καὶ ὅσα διὰ τὸ Ἀναλογικὸ Διαβήτη πολυτρόπως ἅμα καὶ εὐμεθόδως θεωρεῖται, διὰ μακρᾶ ἐκδιδαχθεὶς χρόνε, φρὸς τούτοις δὲ καὶ ἄλλαις τισὶν ἐγγυμναθεὶς μαθηματικαῖς φραγματείαις, ἵνα μὲ εἰς τὸν τὰ αὐθρὸς τοῦτο ἔπαινον τὸν λόγον ἐκτείνας, καθ' ἕκαστον λέγων, ἀκόσω παρέτεινες, τὸ, περὶ σεαυτῆ μὴ φράζε ἐγκώμια. ἐπανελθὼν εἰς τὴν ἐνεγκοῦσαν, τὴν τε ἐν Καισαρείᾳ φροντιστηρίῳ διαθεὶς ἐπισασίαν, ἐκεῖ τὰ πλείω τῶν ῥαθυμοτέρων τοῖς γνησίοις ἀκροαταῖς, πολλαχόθεν εἰς αὐτὸν διαδραμοῦσιν ἐκδιδωκὼς, πολλῶν κἀν τοῖς ἐχάτοις καιροῖς τὸν εἰς τὸν μαθηματικὸν ἐξέκαυσεν ἔρωτα.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ καπνίζειν τὸ καιρῷ, καὶ τὸν τῶν ἀκροατῶν ἄπλητον εἰς τὸ τοιοῦτο ἔχουσιν, καὶ ἄλλας τινὰς καιρικὰς πιεζάσεις, βουλόμενος τὰ πλείω τῆς μαθηματικῆς ἐνθεῖναι εἴδη, φρὸς χάριν τῶν τοῦ τῶν φιλομαθῶν ἀπεξιργαζόμενος, συμπυγμαίῳ πως, καὶ λίαν συμπεπυκνασμένῳ τὸν περὶ τῶν μαθηματικῶν φροβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων πεποίηκεν ἑρμηνείαν, καὶ δὶ αὐτὸ τοῦτο ἔνδοξα τῶν εἰρημένων φραγματειῶν τῆς φροσηκού-

σης

σης τῶν ἐν αὐτῇ ἀπολείπτο τάξεως, καὶ ῥυθμῦ· ἡ ἀλιπτόδεια ὄντα εἰς παράδοσιν, τὰ παρὰ τῶ ἀνδρὸς τότε ἐκδοθέντα, λύπης μᾶλλον, ἢ ἡδονῆς ἦσαν προξένα τοῖς φιλομαθέσιν. Ἵνα μὴ ὁ πρότερον εἰς τὸ ποιοῦν ἱερμόπτος τῶν φιλομαθῶν ἔρως, εἰς ποιῶν μῖσος διὰ τὸ ἀσαφὲς καὶ δύσληπτον μεταπέσῃ, ὡς μηδὲ ἐπαίειν τῶν τῶ λοιπῶ ἐθέλειν, καὶ τὸ λίαν προθυμον τῶν νέων ἐς τὸ ἄκρον μεταβαπῇ ἀμέλειαν, ἵνα μὴ τοῖνυν ταῦτα συμβῇ, καὶ τὸ διὰ πολλῆ σεσιωπημένον, καὶ παύν ὀλίγοις γνωσὸν, ἀρξάμενον ἤδη κατὰ μικρὸν κηρύττεθαί πως, καὶ τοῖς ἄλλοις γνωρίζεσθαι, ἢ παρὰ θεῦ αὐτιλήψει, ὡς καὶ τὸ πρότερον, ὑπὸ πάντων παριωραθῇ, καὶ ὀλίγον ἀναπνεῦσαν εἰς πλείαν ἐπανέληψι νέκρωσιν, τότε γε εἶπα τὸ πλεῖω τῶν ἐκείνε φιλοπονημάτων πολλοῖς τε πόνοις, καὶ ἐρῶσιν ἢκ ὀλίγοις εἰς ἣν ἤδη ὁρᾶται καπεῤῥώθησαν τάξιν, ἢ τὴν προσήκυσαν, ὡς γ' ἐμοὶ δοκεῖ αὐτοῖς ἑρμηνείαν τε ἢ διαίρισιν ἐδέξαντο, τινῶν μὲν τῶν ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε ἢ θεωρημάτων, ἀκριβῶς ἀναπτυχθέντων, ἄλλων δὲ ἀναπληρωθέντων, καὶ πολλῶν εἰς μείζονα τῶν κειμένων σαφήνειαν προτιθέντων, τῶν ὅρων ἐφ' ἑκάστε προικπτθέντων. Γέγονε δὲ ἡ τότων ἔκδοσις διιξοδικωτέρα πως τῶ προσήκοντος, ἢ τῶτο πρὸς χάριν τῶν φιλομαθῶν. τὰ γὰρ ἀρχόμενα τῶν μαθημάτων, καὶ ὀλίγοις τισὶ γνωριζόμενα, ἀνεπτυγμένα μᾶλλον εἶναι ὀφείλει, ὥσπερ δὴ ἐξ ἐναρχίας τὰ εἰς φῶς τῆ χρόνῳ ἐλθόντα, σωτηρίας τε ἢ κομψότητι καλλωπίζεθαι δεῖ. εἰδὲ καί τι ἐν αὐτοῖς ἐλλειπὲς εἶναι δόξῃ, ἢ τῶ λόγω παραδραμόντος, ἀπέτυχε τῆς προτέρης σαφηνείας, συγγνώμη ἔστω, ὡς τῶ καιρῶ μὴ συγχωρῦντος τὴν ἑκάστης πραγματείας ἐπαναλαβεῖν θεωρίαν, καὶ δόλτηρα γενέθαι τῶν ἐν αὐταῖς ἀναπόλησιν. οἶμαι δὲ, ἂν μὴ, κατὰ τὸν ἐλπόντα, δεινοὶ αἱ εὐνοιαι δικάσαι πᾶς ψήφος, τοῖς ἀσμενῶς ἀποδεξομένοις, τὰ νεοφανῆ ταῦτα, ὡς ὕπως εἰπεῖν μαθήματα, ἢ μεθ' ὅσης τῆς προθυμίας τε καὶ προσοχῆς ταῦτα διδαχθησομένοις, οὐ τὴν τυχῦσαν προμηνεῦσονται ἡδονήν. Ἐπαινῶ δὲ τὸ πρόθυμον, ἢ μηγίστω ἔχω τὴν χάριν τοῖς καὶ εἰς τύπον ταῦτα δοθῆναι σωπργήσασι πρὸς κοινὴν τῶν φιλομαθῶν ὠφέλειαν, ὧν τό, τε φιλότιμον, ἢ ὁ πρὸς τὰ καλὰ εὖθυς ζῆλος ἐν τοιότοις ἐδείχθη καιροῖς, ἐν οἷς ἀκμαζούσης τῆς κακίας ἡ ὀρτὴ παρορᾶται. τῇ δὲ Τρισηλίῳ θεότητι, ἧς τῇ ἀδύτῳ φωτὶ, ἢ τὸ ἐν τῇ σκότει τῆς ἀγνοίας ἀνακαλύπτεται, ἢ τὰ δοκοῦντα τοῖς ἀνθρώποις ἀδύνατα, δυνατὰ ἀποκαθίσαται, δόξα ἢ αἶνος εἰς ἀπείρονας αἰῶνας. Ἀμήν.

ΠΡΟΟΙΜΙΑΚΗ

Ἱστορία περὶ εὑρέσεως, ἀρχαιότητος, αὐξήσεως, καὶ τῆς κατὰ τὸ τέλειον ἐπιδόσεως τῆς Μαθηματικῆς.

Βουλομένῳ τὰς Μαθηματικὰς ταύτας ἐκδοῦναι πραγματείας, ἐκ ἀπαικὸς ἔδοξέ μοι προειπέσαι τινὰ, περὶ εὑρέσιος, ἀρχαιότητος, καὶ τῆς ἐπ' ἄκρον ἐξοχότητος τῆς Μαθήσιος, χάριν τῶν πρωτείρων μαθητιώντων. ὅπως γνώσωνται, ὁποία τις ἐπιστήμη πέφυκε, ἐν ᾗ παιδεύονται, καὶ ὁποίαν τὴν ἐν τῷ βίῳ ἀγαθῶν κρίσιν φέρουσι, οἱ καταμελοῦντες αὐτῆς, διὰ τὸ ἀφροδισθαι τῆς γνώσιος, ἀφίλωται ἐπομένως καὶ τῆς ἕξιος, ὧν οἱ πασῶν τὴν ἁλιτικῶν ἐπὶ σοφίᾳ μέγα κλέπτοντες ὄνομα, ἐνδιλιχεῖ σπουδῇ ἑαυτοῖς ἐπορίσαντο, καὶ περὶ ποιᾶν ἐποιοῦντο ταύτης, ὥστε προαιρεῖσθαι ὑπὸ λιτὸν ζῆν βιῶσιν ἀπαίδευτον μάθησιν μόνον, ἢ ὑπὸ τὸν χλαμύδα, πλοῦτον, δόξας, καὶ ὅσα τοῖς ἀφιλοσόφως παθοῦσι περὶ πολλοῦ ἄγεται. Ἐν τῷ ἐκφωνῆσαι δὲ τὸν περὶ τοῦ προκειμένου διήγησιν, ἐχρησάμην διαφόροις ἐπιστήμοις ἱστορῆσι περὶ ἀρχαιότητος, καὶ ἀκριβέστερον πραγματευομένοις, εἶναι σπερμάδιον, περὶ τῆς ἀρχαίων σοφῶν, οἷον τοῖς Ἡρόδοτος, Λαερτίῳ, Πολυβίῳ, Τέτζῃ, Πλουτάρχῳ, Βιτρουβίῳ, Γελλίῳ, καὶ τῆς παραπλησίων.

Πρώτη τοίνυν πασῶν τῶν ἐπιστημῶν εὕρηται ἡ Μάθησις, ὡς ἱστορεῖ Ἰώσηπος, ὁ Φλάβιος, βιβλίῳ πρώτῳ, κεφαλαίῳ ἕκτῳ, αὐτὴ ἐπίσημος τῇ τε ἀρχαιότητι, καὶ τῇ γενέσι τῆς γραφῆς. φησὶ γὰρ τὸν ἀπογόνους τοῦ Σὴθ, πρώτους παραπρῆσαι τὸν τάξιν τῶν ὁρατῶν σφαιρῶν, τὸν θέσιν, καὶ δρόμον τῶν ἄστρων. ἵνα δὲ τὰ ἀριθέντα, καὶ σωνχθέντα διὰ τῆς παρατηρήσιων, εἰς ἀμνημοσυνίαν μὴ ἐμπέσωσι τῇ γνώσει τῶν μπαγενετέρων, προτιμήσαντες τὸ Λ'δὰμ τὸν παγγενῆ φθορὰν τὸ πανὸς, ἔστισθαι μίαν μὲν τῷ κατακλυσμῷ, ἑτέραν δὲ τῷ ἐμπρησμῷ, ἀνέστησαν δύο στήλας, τὸν μὲν πλί-

πλί-

πλίνθειον, τῷ δὲ λίθινον, καὶ ἐπέγραψαν ἑκατέρᾳ τὰ εὑρεθέντα. ὥστε εἰ τύχῃ τῷ πλίνθειον ἀπολεσθῆναι τῇ κατακλυσμῷ, σωζομένη ἡ λίθινος, ἐπαρκέσῃ τοῖς ἀνθρώποις εἰς εὕρεσιν τῆς ἐπιστήμης. ὡσαύτως καὶ ἡ πλίνθεινος, ἐμπρησμῷ τῆς ἕνεκα ἀπολεσθείσης. λέγουσι δὲ τῷ λίθινον σώζεσθαι καὶ εἰσέτι ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς χρόνοις κατὰ τὴν Ἀσυρίαν, ταῦτα μὲν δὴ ἐκεῖνος, ἐφ' οἷς πιστέον διά τε τὸ ἐπίσημον τοῦ ἀνδρὸς, καὶ ἀρχαῖον τῆς Ἱστορίας.

Μετὰ τὸν κατακλυσμὸν πρώτους τῶν ἀνθρώπων τοὺς Ἀσυρίους, καὶ Χαλδαίους φασὶ σοφίσθαι τοὺς Μαθησίους, ὡς παραδίδωσιν ὁ αὐτὸς Ἱάσιπος, Διόδωρος, καὶ Πλίνιος, παρ' οἷς ἀναθαλπόμενοι, ὑξύθησαν, καὶ ἐκπανθέντα καπήλαβον τοὺς Αἰγυπτίους, μὴ τὴν ἀπὸ Χαλδαίας, καὶ Ἀσυρίας ἀποδημίαν, κατὰ τὸν Ἀβραάμ· ὕστερον γὰρ, ἐπιπάντωντος τοῦ θεοῦ, καταλιπεῖν τὴν πάροικον γῆν, ἐφίκετο εἰς Παλαιστίνην, καὶ ἐκεῖθεν εἰς Αἴγυπτον, ὁρῶν δὲ τοὺς ἐκεῖ σπουδάζοντας ἐνδελιχῶς περὶ τὰ κρείττω τῶν τεχνῶν, καὶ εὐφυεῖς πρὸς ἀντίληψιν καὶ ὑψηλοτέρων, ὡς ὁ αὐτὸς Ἱάσιπός φησι, βιβλίῳ δ: κεφαλαίῳ θ': τῆς Ἀρχαιολογίας καὶ Ἀστρονομίας μισθὸν αὐτοῖς, ὧν ἔδει προηγεῖσθαι τὴν Γεωμετρίαν· ὅτι εἰς τοσοῦτον προήκασαν τῆς περὶ τὸν μάθησιν ἐπιδόσεως, ὥστε πιστεύεσθαι αὐτοὺς πατέρας μαθήσεως, οἷα δὴ Ἀριστοτέλης ἀποφαίνεται ἐν τῇ δι' ὧν μετὰ τὰ φυσικὰ, κεφαλαίῳ δ: τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας πρῶτον ἐν τῇ Αἰγύπτῳ παρὰ τῶν ἱερέων εὑρεθῆναι.

Ἐκεῖθεν δὲ Μάθησις περιοδεύσασα ἀφίκετο εἰς Ἑλλάδα, καὶ τοῖς ἐκεῖ φιλοσόφοις ἐσπείσατο. Θαλῆς γὰρ ὁ Μιλήσιος, ὃς ἤκμασε πρὸ Χέρξου ἔτει φκε δ': πρῶτος τῶν Ἑλλήνων ἀπελθὼν εἰς Αἴγυπτον, καὶ ἐκδιδαχθεὶς ἐκεῖθι τὴν μάθησιν ἱκανῶς, μεταγαγὼν εἰς Ἑλλάδα, ἀρχόμενος δημοσιεύειν τὴν Γεωμετρίαν· ἵστος ἐφεῦρε τὰς τοῦ δ: κατ' Εὐκλείδην προτάσεις, ϛ: ια': καὶ κ ϛ': πάντα β': γ': δ': καὶ ϛ: τοῦ δ': ἐφ' οἷς ἐφόδρα μεγάλη διαχυθεὶς τῇ ἡδονῇ, βοῦν λέγεται θῦσαι. Αὐτὸς ἤρξατο παρατηρεῖν τὰς ἰσημερίας, ἡλιοστάσια, καὶ τροπὰς, μάρτυς ὁ Λαέρτιος, καὶ τὸν τοῦ Ἡλίου ἔκλειψιν αὐτὸς προείρηκεν, ὡς Ἱερώνυμός τε Ἱππίας, καὶ Ἀριστοτέλης, ὡς δὲ Τέτζης, καὶ τὸν τῆς Σελήνης ἔκλειψιν προαναγγεῖλαι τῷ Βασιλεῖ Κύρῳ, τούτου χάριν πρῶτος ἐνομίθη πατὴρ καὶ εὑρετὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης παρὰ τοῖς Ἕλλησι.

Μετὰ τοῦτον Πυθαγόρας ὁ Σάμιος ἀρχαιότατος τῶν φιλοσόφων, ἤυξησε, καὶ κατεκόσμησεν ἱκανῶς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας, ὑπερβαλλόντως δὲ τὴν Ἀριθμητικὴν, ὅπου διεπόνησε, καὶ ἐκαλλιεργήσατο, ὥστε καὶ πᾶς λόγος τοῦ φιλοσοφεῖν παρ' ἐκείνου, ἐκεῖθεν παρήγετο, ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἀμέλει. Τὴν δὲ Γεωμετρίαν, ὡς φησιν ὁ Λαέρτιος, αὐτὸς πρῶτος ἐξῆρε τῆς ὕλης,

αὐ-

αὐτὸς τῇ ἀγχινοίᾳ τῷ νοὸς εὗρεν ἐν τοῖς στοιχείοις τὸν λβ': μδ': μζ': καὶ μή: προτάσεις τῷ α: διὰ δὲ τὸν λβ': καὶ μζ': πανηγυρίζει ἐκπόμβιλλω, ὡς φησιν Ἀπολλόδωρος παρὰ τῷ Λαιρτίῳ, ἐπὶ ποσὸν διήκειν ἡγεῖτο τὸν εὕρεσιν τοιούτων θεωρημάτων. αὐτὸς τὰ δουμμίξα μιγέντα, καὶ τὰ πρίσπ κανονικὰ σώματα εἰς φῶς ἤγαγε τοῖς ἀνθρώποις, τήν τε Ἀστρολογίαν, καὶ Μουσικὴν ἁρμονικῶς καὶ ἐδίδαξε, καὶ μεγάλῳ καπέθετο περὶ αὐτὰς τὸν ἄσκησιν. ὅπως δὲ καὶ ἀγχινοίας ἐξείβη περὶ τὰς ἐπιστήμας, ὥστε καὶ Λιρισιάρχης, καὶ Γυμνασιάρχης ἐκκριθῆναι, καὶ τοὺς ἰδίους ὀπαδοὺς κοσμίοις καὶ περιφανέσιν ἐκάλλωσε ἐπιστήμαις. Τούτῳ καπελύθησαν Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὧν πειῶται μνήμλω ὁ Πλάτων ἐν τῷ περὶ ἴραξῶν διαλόγῳ, ἔνθα εἰσάγει τοὺς νέους συναγωνιζομένους τῷ Ἀναξαγόρᾳ καὶ Οἰνοπίδῃ περὶ τὰς τῶν κύκλων διαγραφάς. ὁ δ' Ἀριστοτέλης ἀποφαίνεται, Γεωμίξιαν τινα συγγεγράφθαι παρὰ τῷ Ἀναξαγόρᾳ, παρὰ δὲ Λαιρτίου παριλάβομεν, ἀποδεῖξαι τὸν Ἥλιον μείζονα τῆς Πιλοποννήσου. (σαφεῖς ἀρχαὶ τῆς Ἀστρονομίας) αὐτὸν διαλιχθῆναι καὶ περὶ τῶν ἐν Σιλήνῃ κατοικιῶν. αὐτῷ ἀποδίδωσιν ὁ Πρόκλος τήν τε ιβ': καὶ κγ': τὸ α: τὸ στοιχιωτῷ, βιβλίῳ σφοπάσεις. Τοῦτος διαλιχθέντα ὁ Βοίσων, ὁ Ἀττιρῶν, καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. ὑπὸ ἐπαινοῦνται, καὶ ἐλέγχονται παρὰ τῷ Ἀριστοτέλει περὶ τῶ δοκιμαθέντος παρ' αὐτῷ πραγωτισμῷ τῷ κύκλου. τούτων ὁ Ἱπποκράτης ὧφθη ἐπισημέστατος, ὃς ἐμπόρου γὰρ φιλόσοφος, καὶ Γεωμίξης. ὃς παρὰ τὸν πραγωτισμὸν τῷ κύκλου, καὶ τοὺ διπλασίασιν ἔτι τῷ Κύβου σφῶτος ἐφάνισατο διὰ τῆ δύο μίσων ἀναλόγων. ὧν ὁδὸν, ὡς ἀρίστου καὶ μοναδικοῦ ποιητοῦ μιτασχίσαι περιπτύξατο, αὐτὸν ἐστὶ τὸ μίγα ἐκείνο καὶ λαμφὸν ἐγκώμιον, ὡς ἴσορεῖ ὁ Πρόκλος, ὅτι σωιγραφὲ σφῶτος στοιχεῖα, καὶ τὰ παρ' ἄλλοις εὑρισκόμενα ῥυθμίδλω διέπαξε.

Ὁ δὲ Δημόκριτος ἐποῖος λῷ περὶ τοὺ Μαθηματικοῦ ἐν τῇ φιλοσοφίας αὐτῷ σωάγεται, θαυμάσιος γὰρ ἐπ' ἀμφοῖν. τούτου τὰ φυσικὰ ἀπομνημονεύματα, ἔτι ἴσως καὶ τὰ μαθηματικὰ, ἀπώλοντο, ὡς τινες λέγουσι, φθόνῳ τῷ Ἀριστοτέλους, τὰ ἴδια μέτα ἐφιμεύειν ἐν ταῖς χιρσὶ τῷ ἀνθρώπων διαβίβειν.

Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, καὶ πιρ αὐτῷ μαθηματικὰ συγγράμματα ἐσώζοντο, ποσὸν μεί τι μιγάλου ἐκληρώσατο ἐτόμιστος, ὅσον καὶ τῷ Πλάτωνος ἀπομνημονεύεται διδάσκαλος. Καπλάβομεν πίνω ποτὲ καὶ τὸν Πλάτωνα. ἔτινες ὑδεὶς ἔπρις εἰς μεῖζον φῶς ἤγαγε τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας. αὐτὸς μιγάλῳ καπατιθέμενος σπουδὴν περὶ τοὺ Γεωμίξιαν, μιγίστας καὶ φροθέσι καπαπλύτισεν, αὐτὸς φῶτος ἐφάπτεσθαι τῆς Ἀναλύσιως, ἀληθέστατος ὅπως ὁδῷ τὸ ὑρίσκειν καὶ συλλογίζεσθαι. τὰ ἴδια φιλοσοφικὰ συγγράμματα μαθηματικοῖς λόγοις διενκρίνει καὶ ἀπόδιξι, καὶ πωῦ ὅ, τι ἐν

μεθο-

μαθηματικοῖς ἀξιάγασον, ἰῶσαι τῇ φιλοσοφίᾳ. Ἀκαδημίαν ἐν Ἀθήναις αἱρήσεται, ἢ ἐπὶ τῆς πύλης ἐπέγραψε (ἀδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.) λαμπρὸν πάντα πανήγυριν, ἐφ' ὅσον μὲν ἀδόξου, ἢ ἀσωφρονῆς, ἢ ἄκοσμος, ἀλλ' οἰκεία, ἐπωφελὴς, καὶ ἐπιτηδεία ἡ μάθησις πρὸς τὸ ὀρθῶς φιλοσοφεῖν. ὅσον δὲ πρόθεν ὁ Πλάτων ἐχρημάτισε θεατὴς καὶ σπουδαῖος περὶ τὴν μάθησιν, εἴσεται ὁ ἀναγνὺς τὰ αὐτῷ ἀπομνημονεύματα.

Ἡ Ἀκαδημία τῷ Πλάτωνος Κύρας ἀπεδείχθη Ἀμαλθείας, κατακόσμησι Μαθηματικοῖς τὴν Ἑλλάδα. Εἰσηκαίδικα οἰκείας τῷ Πλάτωνος μαθητὰς παραδίδωσιν ὁ Πρόκλος, παραχθείσας ἐν τάυτῃ, ὧν διαφιρόσῃ σπουδῇ καὶ ἀσκήσει ἀπηρτίσθαι τὴν μαθηματικήν. ὧν ἦν Λεοδάμας ὁ Θάσιος. Ἀρχίτας ὁ Ταραντῖνος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος. παρ' ὧν διαφιρόντως ἐπλατυνθήσαν τὰ μαθηματικά. ὁ μὲν Λεοδάμας ἀκριβῶς ἐκδιδαχθεὶς τὴν Ἀνάλυσιν παρὰ τοῦ Πλάτωνος, μεγάλῳ εἰς ἔπεπα καταβαλὼν τὸν σπουδὴν περὶ αὐτὴν, μιγίστω περιεποίησατο καὶ τὴν ἐπίδοσιν, ᾗ τινι ὁδηγῷ χρησάμενος, πλεῖστα ἐφεῦρε μαθηματικὰ θεωρήματα, ὡς παρὰ Λαερτίῳ φαίνεται. τῷ δὲ Θεαιτήτῳ διαφημίζονται συγγράμματα, καὶ στοιχεῖα Γεωμετρικὰ, καὶ ἡ περὶ κανονικῶν σωμάτων διαγραφὴ καὶ παραβολή. ὁ δὲ Εὐτόκιος παραδίδωσι συγγραφῶαι τῷ Ἀρχίτᾳ καὶ στοιχεῖα Γεωμετρικὰ, καὶ ἄλλου παρὰ τὸν ῥηθέντα, λόγον περὶ διπλασιάσεως τοῦ Κύβου. αὐτὸν παραδῦναι τῷ μαθηματικῷ χρήσιμον τοῖς χειροτέχναις. ὅθεν καὶ παρὰ Γελλίῳ φαίνεται, πεμφθεὶς ξύλινον κατασκεύασθῶαι παρ' αὐτῷ, καὶ ἀφίπτασθαι. οὕτως ἐς ἄκρον ἀφίκετο σοφίας ὁ ἀνὴρ, ὥστε καὶ τοῖς φύσει ἀκινήτοις παρέχειν κινητικῷ ψυχῷ μηχανικῶς. οἵτινες ἐπόμενοι πολλοὶ τῇ μηχανικῶν πραγμάτων, θαυμάσια τῷ κόσμῳ ἐπέδειξαν διὰ τῆς τέχνης. Ἀρχίτας μὲν ὢν καὶ μαθηματικὸς ἐστράτηγει, καὶ ἐπὶ ταῖς παρίαις μάχαις πεντάκις στρατηγὸς ἀρχῆς, πεντάκις δὲ θεσμοβούσας ἐστέφανῦτο.

Νικοκλείδης μέγας τῇ φήμῃ, λαμπρὸς τῷ ὀνόματι, καὶ τῷ ἰδίῳ μαθητῇ Λέοντος πάχα περιβλεπτότερος ὑπὲρ τῆς αὐτῷ ἐφιλοτιμήσατο ἐν τῇ μαθήσει. ὁ γὰρ Λέων ὀπαδὸς αὐτῷ συμπέγραφε στοιχεῖα τῆς καθόλου μαθήσεως, καὶ τὰ διορθώματα ἤυξησε, καὶ πρὸς χρῆσιν ἐπιτηδειότερα παρεσκεύασε. τότε καὶ μόνα ἐπαξίως σωσαμένου τοῖς ἀρχαίοις γενομένοις τῆς μαθήσεως.

Εὐδόξιος ὁ Κνίδιος παραπλήσιος τοῖς αὐτόθεν, πολὺς γεγονὼς τῆς ἀριθμητικοῖς, καὶ ὡς ἱστορεῖ ὁ Σχολιαστὴς, ἅπαν τὸ στοιχειῶδες κατ' Εὐκλείδου πέμπτον βιβλίον συνέγραφε, ὁμοίως τε καὶ ἄλλα στοιχεῖα, καὶ γεωμετρικὰ ἀπεπάλεσι. καὶ τὰς κωνικὰς τομὰς ἀρχὴν λαβὼν παρὰ τοῦ Πλάτωνος ἱκανῶς ἤυξησε. περὶ τούτου αὐτὸς περῶτος πέφυκε αὐτουργὸς τῇ Ἀστρονομικῶν ὑποθέσιων, καὶ τὰς ἐκ τῆς Γεωμετρίας πηγὰς, ὡς ἀπορῶν ὁ Ἀρχίτας εἰς ὀργανικῷ καὶ μηχανικῷ προσήρμοσε. Ἀμύκλας ὁ Ἡρα-

κλειότης, Μενάιχμος, ὁ Δημόστρατος ὁ τούτου ἀδελφὸς, Ἑλικὼν ὁ Κυζικηνὸς, Θεόδιος, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, καὶ Φίλιππος ὁ Μενδμαῖος, πάντες ὅτι Πλατωνικοὶ, τῷ Γεωμετρίαν πολλῷ πλειστάριθμον ἀπεργάσασθαι. ὁ μὲν Μενάιχμος ἐφεύρετο τὰς κωνικὰς τομὰς δυεῖν, διὰ τοῦ ἐπ' ἄκρον περὶ αὐτὰς σπουδῆ, ὧν τῇ δυνάμει εὗρε τὰς δύο μέσους ἀναλόγους. δι' ὃ καὶ ἀφοτιμᾶται παρὰ τοῦ Εὐτοκίου. ὁ δὲ Θεόδιος, καὶ Ἑρμότιμος οἰκεῖα συνέγραψαν στοιχεῖα γενικώτερα, καὶ πλατύτερα. πάντες ὅτι τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας γενήματα, τῷ τι μαθηματικῷ καὶ φιλοσοφίαν εἰς τελειότητα ἕκαστον, ὡς φησι Πρόκλος. ὁ δὲ Ξενοκράτης ἀκροατὴς τοῦ Πλάτωνος, καὶ Διδάσκαλος ἀρὸς καιρὸν τοῦ Ἀριστοτέλους, περίβλεπτος περὶ τῷ μαθηματικῷ, ὅθεν ἐθέλοντί τινι αὐτοῦ ἀκροατῇ γενέσθαι, ἀπείρῳ Γεωμετρίας, ἀπειθῆσαι φησιν, ἃ γὰρ ἔχεις λαβὰς φιλοσοφίας.

Περὶ δὲ τοῦ Ἀριστοτέλους τί ἂν λέξω· πάντα τὰ αὐτοῦ συγγράμματα πλήρη μαθηματικῶν ἀποδείξεων. ἐξ ὧν συλλέξας, συνέθεικεν ὁλόκληρον εἰς βιβλίον ὁ Βλαγκάνης, εἰς τὴν νεωτέρων Λατίνων. Ἐκ τῆς τοῦ Ἀριστοτέλους σχολῆς δύο μόνοι διὰ φήμης ἄγονται, Εὔδημος, καὶ Θεόφραστος· ὅτι συνέθεικε δύο βιβλία περὶ ἀριθμῶν, περὶ Γεωμετρίας τέσσαρα, καὶ εἰ περὶ ἀόρων γραμμῶν, αὐτὸς καὶ μαθηματικῶν ἱστορίαν συνέγραψε. ἐξ ἧς ὅ,τι Πρόκλος, καὶ ἄλλοι τὰ οἰκεῖα ἐδαπανήσαντο.

Τούτοις διαδέχεται Ἀρίσταιος, Γεμῖνος, καὶ Τερψίων, Γεωμέτραι μεγάλοι ὀνόματος καὶ ἀγχινοίας, ὧν εἰσι γενήματα τὰ κατ' Εὐκλείδην πρόσθετα περὶ στερεῶν βιβλία. ὁ γὰρ Εὐκλείδης μετ' αὐτὸν ἐντυχὼν αὐτοῖς, καὶ ἕλκυσε παρὰ ἀρχαιοτέρων φιλοπονηθεῖσι στοιχείοις, καὶ ἀκριβῶς θεωρήσας, τὰ μὲν ἐλλιπῆ ἀνεπλήρωσε, τὰ δὲ συμπτυγμένα, καὶ ἀσαφῆ εἰς κρείττονα μετήγαγε σαφήνειαν, ἔνθεσί τε καὶ ἀσφαλέστερον ἀπέδειξε, διατάττων εἰς ὃν τοῦτον πρόσθε ῥυθμὸν, ἐδωρήσατο ἡμῖν καταλιπὼν ταῦτα τὰ Στοιχεῖα, ἅτινα ἤδη πανταχόθι τῆς Οἰκουμένης ἀνὰ χεῖρας εἰσὶ τῶν εἰς τὸν Λαβύρινθον τῆς Μαθηματικῆς ἀφημένων ἐκδιαβῆναι πέον. ὃς ἀπέτισε τὸ κείνου χρεών, πρὸ σπ δ': ἔτει πρὸ Χριστοῦ. Καπολούθησαν αὐτῷ μὴ ἕκαστον χρόνῳ ἕτι Ἐρατοσθένης τε καὶ Ἀρχιμήδης. Ἐρατοσθένης μὲν ἐπίσημος ὤφθη παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς διὰ τὰ αὐτοῦ συγγράμματα, ὧν πολλὰ μὲν ἀφάνισται τῷ χρόνῳ, σώζεται δὲ καί τινα. ὡσαύτως τε καὶ τῷ τὰ Ἀρχιμήδους τὰ πλεῖστα ἀπώλοντο, ἐκ τῶν σωζομένων γὰρ σωάγεται τὰ ἀπολωλότα.

Ἀπ' ὅταν τὸν Ἀρχιμήδη ὀνομάζω, τὸν κολοφῶνα τῆς ἀνθρωπίνης ἀγχινοίας εἰς τοῦτον ἀντιλαμβάνομαι, καὶ τῷ λύσιν ἀπάσης ὑψηλοτέρας μαθηματικῆς διδασκαλίας. τὰ σωζόμενα αὐτοῦ ἀξιάγαστα συγγράμματα ἐξέδωκαν εἰς φῶς ὁ Πολύβιος, ὁ Πλήθαρχος, ὁ Τζέτζης, καὶ ἄλλοι. Σύγ-

χρο-

χρονος τῷ Ἀρχιμήδη ἤκμασε Κόνων ὁ Γεωμέτρης ᾧ Ἀστρονόμος, ὃ τὸν θάνατον προθεῖ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ περὶ τετραγωνισμῶ Παραβολῆς βιβλίῳ. μετὰ τὰτας ἀμέσως μικρῷ παραδραμόντος χρόνῳ, ἐξῆλθεν εἰς φῶς Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, ἄλλος κοσμήτωρ τῆς Γεωμετρίας, ἕνεκα καὶ τῶν κλῆσιν τετύχηκε. Μέγας Γεωμέτρης· τάτε σώζονται ἑπτὰ βιβλία περὶ τῶν κωνικῶν· τάτῳ ὀφείλονται τὸ ι δ΄: καὶ ις΄: κατ' Εὐκλείδην, σωτετμημένα παρὰ τῶ Τυχικλέους, μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἤκμασαν Ἵππαρχός τε ᾧ Μενέλαος, ὧν ὁ μὲν ἓξ, ὁ δὲ πάσαρα συνέγραψαν βιβλία περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἐν τῷ κύκλῳ, δι' ἃ ἐκ τῶν τυχόντων οὐδαμῶν χάριν ἀμφοτέρων, ἐπωφελιςάτων ὑσῶν πραγματειῶν. ὁ δὲ Μενέλαος συνέγραψε καὶ ἕτερα βιβλία περὶ σφαιρικῶν ζητημάτων. Θεοδόσιος δὲ ὁ Τριπολίτης ἕτερα περὶ σφαιρικῶν ἐπωφελίςατα βιβλία ἡμῖν κατέλιπεν, ἅτινα ὁσημέραι αὐξάνεται παίτων διαβίβει.

Ὕστερον τῷ ὁ: μΧριςὸν ἐξῆλθεν εἰς τὸ φῶς Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, ὁ Κορυφαῖος τῶν Ἀστρονόμων, ἀνὴρ ὄντως θαυμάσιος, ᾧ ὥςησι Πλίνιος ὑπὲρ τὴν φύσιν τῶν θνητῶν. ὗτος μὲν μόνον περὶ τὴν Ἀστρονομίαν μεγάλας ἐποιήσατο τὰς ἐπιδόσεις, ἀλλὰ καὶ Γεωμετρίης ἀνεφάνη ἄριςος, ὡς βιβλιοῖ τὰ τοσαῦτα ὑπ' αὐτῶ γραφέντα Γεωμετρικῶς. ᾧ μάλιςα τὰ περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἓξ βιβλία τῶ Μενελάε, πάσαρα δὲ τῶ Ἵππάρχε, συνεπτυχθέντα παρ' αὐτῶ εἰς πέντε μόνα θεωρήματα, ᾧ Πλούταρχος ὁ ἐπισημότατος περὶ τὴν φιλοσοφίαν, ᾧ τὰ φιλολογικὰ, οὐκ ἧττον ᾧ περὶ τὴν Μαθηματικὴν ἓξ, ὅπερ βιβλιοῖ τὰ παρ' αὐτῶ συγγραφέντα μαθηματικὰ προβλήματα διαφόρων εἰδῶν. Τὰ δὲ τῶ Εὐτοκίε Ἀσκαλωνίτε, ᾧ Ἀπολλωνίε πολυμαθῆ σχόλια εἰς τὰ τῶ Ἀρχιμήδους, τίς ἀγνοεῖ; παρὰ τῶ αὐτῶ Εὐτοκίε ἀσκεθήμεναι Γεωμετρικὰ συγγράμματα ᾧ περὶ διπλασιάσεως κύβε, τὰ τῶ Φίλωνος, τῶ Διοκλέους, τῶ Σπόρε, τῶ Ἥρωνος, ᾧ ἄλλων, οἷον ὀχοπτόρων ἐν τοῖς Γεωμετρικοῖς, καὶ Μηχανικοῖς Διδασκάλων. ᾧ ὁ μὲν Ἥρων ἀμφοτέροις ἐδοκίμει Μηχανικῆ τε ᾧ Γεωμετρία, ἡ γὰρ παρ' αὐτῶ παραδοθεῖσα διπλασίασις τῶ κύβε, βιβλίῳ γ΄: προτάσει ζ΄: ἐλλιγκός ἐςι τῆς μεγαλοπρεπείας τῶ ἀνδρὸς, ᾧ παρὰ πᾶσι φέρει τὰ πρωτεῖα. οἱ δὲ ὕςεροι τῷ μὲν χρόνῳ ὕςεροι, τῇ δ' ἐγκυκλοπαιδείᾳ περὶ τὰ τοιαῦτα τοῖς ἀρχαίοις σωαριθμηθῆναι. μΧριςὸν τάτε ἤκμασε Κτησίβιος ὁ Ἀλεξανδρεὺς, ὃ τὰ ἀξιόλογα μαθηματικὰ συγγράμματα κρείττονα ἔδοξεν παιτὸς ἐγκωμίε παρὰ τῷ Βιτρυβίῳ, Πρόκλῳ, Πλινίῳ, ᾧ Ἀθηναίῳ, τῷ ἐναμιλός τε ᾧ σύγχρονος περιῶ ὁ Δύδιμος, ὕτως ἐνδόκιμος παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς, ὡς ᾧ οὕτως ἀποτιμᾶται τὰ Εὐκλείδε παρὰ τῷ Πρόκλῳ, παρὰ τὰ αὐτῶ ἀπομνημονεύματα.

Συγκαταλέγεται τῷ ἀνωτέρω ὅ, τε κλυτὸς Διόφαντος, Ἀλεξανδρείας ᾧ

αὐτὸς γόνος, μέγας περὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, οἷος Ἀρχιμήδης, Ἀπολλώνιός τε καὶ Εὐκλείδης, περὶ τὴν Μηχανικὴν καὶ Γεωμετρίαν. τῆς τοίνυν ἀγχινοίας ἐφεύρημά ἐστιν ἡ Θαυμασία ἐκείνη Ἀναλυτικὴ, ἡγοῦ συνθετικὴ μέθοδος, ἣ παρὰ τοῖς νεωτέροις Ἀραβικῷ ὀνόματι Ἄλγεβρα ἀποκαλεῖται. παρὰ τὰ ἄλλα αὐτῆς γραφόμενα, τοῦτο καὶ μόνον ἐπαρκεῖ πρὸς ἀφθονίαν τῆς μεγαλονοίας τὸν ἄνδρὸς, θεῖον γὰρ ὄντως ἐστὶν ἐφεύρημα, ἀνακαλύπτει γὰρ ἄδηλα τῆς φύσεως, καὶ ἀδιάπτωτα δοκεῖ τοῖς καὶ διαβατικωτέραις τῇ νοΐ, αὕτη μέθοδος ῥᾴστα καὶ πάνυ σαφῶς ἀποδεικνύειν, καὶ λύειν. παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ἐπαξίως ἀφνμνῦται, Μιχόμαχος καὶ Σπρωνὸς, ἐπίσημοι ἄμφω, περὶ τὴν Γεωμετρίαν, Ἀριθμητικὴν, καὶ Μουσικὴν, οἵους τὰ περὶ τούτων μαρτυρεῖ οἰκεῖα ἀπομνημονεύματα, καὶ ταῦτα τὰ περὶ τομῆς κυλίνδρου καὶ κώνου δύο βιβλία τοῦ Σπρωνὸς.

Τύπῳ καπελθόντων Πρόκλος ὁ Λύκιος, Θέων, Πρόκλος ἄλλος, (ὃς ἐπέστρεψε τὸν τοῦ Βιτελιανοῦ στόλον πολιορκοῦντος τὴν Κωνσταντινούπολιν τῷ ὀπτικῷ μηχανῇ τῶν καπνέξω, ἐπὶ βασιλείας Ἀναστασίου ἔτει τῷ σωτηρίῳ φιδ': ὡς παραδίδωσιν ὁ Ζωναρᾶς) καὶ Πάππος, ὃς περιορίζει τὸ πλῆθος τῶν Μαθηματικῶν, τῇ μὲν χρόνῳ ὕστατος πάντων γεγὸς, ἐπὶς τοῦ Πρόκλου τοῦ νέου, τῷ δὲ λαμπρότητι τοῦ ὀνόματος συγκαπλείπεις τοῖς πάλαι. ὁποίας γὰρ ἐπιδόσεις ἔσχον περὶ τὴν Μαθηματικὴν οἱ ἕξεις ὕστεροι, τὰ αὐτῶν ἐπίσημα συγγράμματα δηλοῖ. τῶν μὲν τὰ εἰς τὰ τοῦ Εὐκλείδου χόλια, καὶ Πτολεμαίου, τῶν δὲ ὡσαύτως τὰ περὶ πάντα τοῦ Πτολεμαίου. ὥσπερ καὶ τὰ τοῦ Πάππου, ἔστι τοῖς τοῦ Πτολεμαίου πᾶσι χόλια, καὶ ἃ παρ' αὐτοῦ συγγραφέντα συλλογὴ τῶν μαθηματικῶν ἐν παντὶ εἴδει μαθήσιως, συμπεσυμένη εἰς ὀκτὼ βιβλία, ὧν τὰ μὲν δύο, ὕστερον ἀπώλοντο, ἢ κρύπτονται ἐν βιβλιοθήκῃ τινὶ ἀδήλῳ, τὰ δὲ λοιπὰ ἓξ, ποσοῦτον ἀρξάνως παραχόθι ὑπάρχει, καὶ παρεχόμενα παντοῖα μαθήματα, ὥστε ὑπὸ πάντων διὰ τὰ φῶτα τῶν πάλαι ἀπομνημονεύματα συναριθμεῖται. ἕκμαζον δὲ ὕστερ καὶ τὸν ἕπαρτον αἰῶνα.

Ἔχειν τίνων, ἀμοιβῆς Ἀναγκαῖον, βραχεῖαν ἱστορίαν περὶ ἀρχῆς καὶ προόδου τῆς Μαθήσιως, ἐξ ὧν δηλοῦται ἡ ἀρχαιότης, καὶ ἐξοχότης αὐτῆς, καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ ὑγιμόνες τῆς Φιλοσοφικῆς Ἀιρεσιοκρατείας ἔτικτον σὺν πάσῃ δύο δυσίμως ἀδελφὰς τὴν φιλοσοφίαν, καὶ τὴν Μαθηματικὴν, ποσῶν οἰκείας καὶ συγγενεῖς, ὥστε ἀδιάκοπον ἀπ' ἀλλήλων χωρίζεσθαι, διὰ τὸν ἔμφυτον τῆς ὁμοιότητος δισμὸν, καὶ τὴν ἑτέραν ἀτελῆ εἶναι, ἐκλειπούσης τῆς ἑτέρας. τῶν γὰρ μάλιστα ἐπιτυχεῖν μοι ἐκδοῦναι τύποις τὰς παρούσας πραγματείας, βουλόμενον εἶναι κοινὰς πᾶσι τοῖς φιλοπονοῦσιν Ἑλλήνων παυσόν, εἶναι πολλοῖς ἐστύχον δυσχερείας, μὴ ὕστερας ὑπάρχειν καὶ τοῖς πόνοις, πρὸς σύγκασιν τῶν πράγματος, προσλόμενος τὸ κοινωφελὲς τοῦ ἰδίου,

καὶ

ὴ πάντα δόντερα ποιῶν, τῦτο ὴ μέγον ἡγέμενος φιλοτιμίαν, τὸ ἀναφανλῶαι παῦτα αὖθις τῇ Ἑλλωικῇ γλώττῃ. εἰδὴ καί τι παρέδραμε περὶ τὴν ἐπανόρθωσιν, συγγνώμη τῷ αἰτῦντι, ὅτι οἰκεῖον, ὅΘ' ὑπ' ἀμελείας, ἀλλ' ἐξωτερικὸν τὸ αἴτιον, πῶς γὰρ ὁ ὑπ' ἀγάπης κινέμενος, τοιῦτό τι πάθῃ; Ἐῤῥωμενέοι διαβιώσοιτε, ὴ εὐδαιμονοῖτε ἐν τοῖς κρείττοσι.

Εἴδησις περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Γρέον, ὅτι τὴν προσθεῖσαν Ἀριθμητικὴν καὶ πάρτον ἀποπληρῶσαν τόμον, μήτε μνείαν τινὰ παύτης τῆ ἐκδοτῆ ποιεμένε ἐν τῇ προσφωνητικῇ εἰδήσει περὶ τῶν ἄλλων φραγματειῶν, μήτε συμπεριλεισμένῳ ἐν τῇ τιμῇ τῶν ἄλλων, ἐπαγγελόμενός τις ἐκδῶναι τύποις ἄλλοθι, ἀπέτυχε τῆ σκοπῆ. μαθὼν δ' ἔγωγε τὸ συμβὰν, ὴ παρακαλεμένος ὑπὸ πολλῶν τῶν καθ' ἡμᾶς, ὴ μάλιστα τῆ ἐμῆ καθηγεμόνος, ὴ μήθ' ὑπεσχημένων χειράγειν τὰ καθ' ἡμᾶς τοιαύτης ἐπωφελῆς φραγματείας, ὴ κοινῆς ὑπηρέτιδος πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις, καὶ μάλιστα τῇ ἐμπορικῇ βίῳ, συμπεριθέμενος ταῖς ἄλλαις φραγματείαις, ὴ τοῖς βυλομένοις πᾶσαι, παρέχεται εἰς τιμὴν δέκα λιβρῶν τῷ Ἑνετιῶν, ὅσον ἀμέλει τιμᾶται ἐν τῷ τύπῳ, μὴ τὸν τύπον γὰρ τιμηθήσεται πλείονος.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Τῦ Κυρίυ Ἰγνατίυ Μπαξοπόλυ τῦ Κρητὸς, εἰς τὸν Μαθδάϊον.

Ὡς ἐθέλοντα δύειν ἀπὸ Ἑσπερίης ἐφ' Ἑῴας
Καλὰ Μαθήματ' ἄγεις ὡς παλινηχέως.
Ὧν κ ἑδηγὸς ἔης αἰ'κι Σοφῶν Γενετήρων,
Τοῖσιν ἴσῳθ' ἕξῆς, ὡς κ δίδωσι Θεός.
Τῷ πυκὺς περ ἐὼν, ὡς Τέρπανδρος, Μαθόδη,
Εὑρὶς Ἀθανασίῳ λείμμασι σῆς Σοφίης.
Πρὸς τὸν Διδασκαλικώτατον Κύριον Μπαλλαῖον.

Νῆσον Ἰταχίν σοφίει, Δευκ' ἀπὸ Λιμὸν,
Καὶ φαίθων ὄρνιθι ἀνηλίνθε φαέας.
Ἡ δὶ Σεφῦ Μπαλαίου Μάθησις, ὅσων ἀπαυρεῖ
Ἠελίν κείνων, Λύμην Ἐλλάδος, Ἀθμολίης.
Εἰς τὴν Μάθησιν.

Τίς ποτ' ἐγὼ πλίθω βάλεν μαθέειν, φίλ' ἑταῖρι;
Ἰ'δμενά σε Σπάθμη, καὶ Ζυγὸς ἐπλέες.
Ταύτῃσι Κρίσις Μίγας Αἶαν σὶ πτίσσω, ἄρυν
Αἰθέρα, ἢν τ' ἄλλων παθ' ὅσα καλὰ λίθω.
Κείνα, εἰ κατέχεις, καὶ ὅλως χρᾶ, Εἰκόν' ἀσλῶ
Ἀντιπυς ἐκποδοίς, τῷ Κρίσιν ἐκφανέω.
Εἰς τὴν Βίβλον τῆς Μαθήσεως.

Τίπτε με δίρμις ἀγὼν ἐρύσσῃ; πάλλθέ με Κῦρι.
Δείξω γὰρ Γαίης, κ' ὑρανίων Σοφίην.
Τῆς εἴχ' ὡς Μέγ' ἄριστα τοὶ Κλείος Γενετῶρις.
Κληρονομεῖν βάλεν; πείθεο, δ' καλέω.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α Τ Α

Εἰς τὸν παιδιατρικώτατον καὶ Ἐπιστημονικώτατον Ἀρχιατρίσβυτερον Γωανίνων, καὶ Διδάσκαλον τῆς ἀρίστης σχολῆς τῇ ἐκεῖ, τὸν συγγραφέα τῇδε τῇ Μαθηματικῶν ἀρσαμασιῶν.

Η Ρ Ω Ε Λ Ε Γ Ε Ι Ο Ν

Η Μπέρης γενεῆς μέγ' ὄνειαρ, πάμμιγάτ' εὔχος
Η Ἠπείρῳ, ἰδὶ ϕῶς Ἑλλάδος ἀρτιφαὴς,
Γωανίτων Ἀρχιατρισβύτερε ἱρὲ
Η δὶ καθηγῆτερ Μπαλλαῖε πολυΐδρι;
Οἷλβιος ἐσσὶ πότνων σῶν ἱδρώτων' ἀμιβήτων
Ἐμπνος γὰρ βίβλους γράϕις, ἰδ' ἄρτι γράϕεις
Τόσσας, ὅσσας ἔσχε διδασκαλίης σέο μοῦσα
Ἐλλάδι, σῆς σοϕίης κήρυκες ὑψιβόαι.
Νῦν δ' αὖ ἅπασι μετὰ, πολυηχέες δ' Ἑλλάδι βίβλους
Τάς δὶ, μαθηματικὰς ϕῶς μίγα μυσοπόροις,
Μνημόσυνον σοϕίης γράϕας σῆς. ὄϕρ' ὀλέσσαι
Τέκνα σέο κλέος ζώοιπ ἠὲ ϕθιμένοις.

Ἐπρον.

Ἄρτι, πάλαι ποθέον γένος Ἑλλάνων, σοϕὸν ἄνδρα
Ἄξιον Λιώνων ἔλαχε τῇ ἑωυτῶν,
Μπαλλαὶς ἱδμοσύνῃσι μαθηματικῇ ἀρεσίροπα,
Μάρτυρις αὖδὶ βίβλοι, Ἑλλάδα αἷς γαιόεις.
Ζώοις, ϕῶς σοϕίης παλαιὸν ἀν' Ἑλλάδα ϕαίνων,
Πολλὰς εὐδαίμων εἰς ἐτέων ἕλικας.

Ἐπρον.

Τάς δὶ μαθηματικὰς ὡς εἶδον ἄρτω τετραχεῖς
Πυκνίδας, ὡς ἔϕασαν αἱ Ἑλικωνιάδες
Θάμβεῖ συχόμεσθα μοῦσαι; ἦρ' Εὐκλείδης τε,
Ὅς τοιχειώσεις ἐστὶ μαθηματικὰς,
Ἐκθορε ἐκ πηγάων νῦν; καὶ ἐμπνεικὸς ἰὼ ὅς
Νικόμαχος; συὶ τῖς μηχανικοῖς αὐίβη,
Ἐξοχες ἆρ' ἴδμων Ἀρχιμήδης; Πτολεμαῖος
Πρὸς τῖς Ἀτρεκόμος ἐς βίον ἦλθε πάλιν;
Τὰς δ' ἀναμειβόμενος ἀρετῇσι μυσηγέτα Φοῖβος.
Ὠ πότνιαι κοῦραι Λιθερίοιο Διὸς;

Γ'αντ-

Γωανίνων γόνον εὖ ἴσ' ἐκ ἀπορεῖτε;
Τ'μμί πρόφημι Θρέμμα, τὸν ὀξωίδον,
Ἀρχικαθηγητὴν παῤ ἰδόξης ἐν πολυΐδρει,
Ἀρχιαρισβύτερον Μπαλλᾶνον ἱερόσοφον.
Κείνων ἀντὶ μόνος νυνὶ πάντων ἦρχεσεν ἅπας.
Ἑλλάδι, πᾶς δὲ βίβλους φίρπαξ σωθέμενος.
Αἱ δ' ἄῤ ἔφαν μῦσαι πάλιν, ἐκεῖν' εἰπτέος ὅς δὲ
Τοῖς πάντων κείνων μυσοδόποις τεφάνοις.

Ἕτερα δὶ ἰαμβικῶν εἰς ἑκάστων πραγματείαν

Εἰς τὸν ἀδωνόπτον Ἑρμωνίαν τῶ Εὐκλείδε.

Εὐκλείαν ἴσχει ἄρτι τὸν Εὐκλείδε
Εὔλιπτον αὐτὸν ἐκδιδοῦσας Μπαλλάνος.

Εἰς τὸ κατὰ Θεοδόσιον Φαιρικά.

Κατὰ Μπαλλᾶνον, Θεοδόσιον μὲν λέγε.
Σφαῖρα Μπαλλᾶνος ἔστι γὰρ Λατινικῶς.

Εἰς τὸν Γεωμετρίαν.

Γεωμετρίη γῆς μὲν ἂν μάθῃς μέτρα
Οὐ μείων μέτρον πῦρ πόνων τῶ Μπαλλάνε.

Εἰς τὸν Τετραγωνομετρίαν

Πρόσκτιν ἴσχε τὸν Τριγωνομετρίη,
Ὅσον γὰρ ὀξὺς ὄδε γνώσῃ Μπαλλάνος.

Εἰς τὸ Ἀστρολάβιον

Λαβὼν δὶ πῦρων ἀστέρων Ἀστρολάβῳ
Στίλβειν Μπαλλᾶνον ἀστέρων γνώσῃ δίκλω.

Εἰς τὸν Γεωγραφίαν

Ὧ δ' αὖ γένης σφαίρας τε πίνακας γράφει
Ἀτμῶν πέρι σφαίρας τε ὁ σφαιρώνυμος.

Εἰς τὰ Ὀπτικά.

Καὶ ὀπτικὸν δὶ μανθάνῃς χαίρων μάλα
Ὀδηγὸν ὄμμα ἢ γὰρ ἴσχεις Μπαλλάνον.

Εἰς τὸν Ἀριθμητικόν.

Πράξεις ἀριθμῶν ἢ λόγους ἐκμανθάνων,
Θάμβει ἀρίθμει Μπαλλάνε σοφᾶ πόνους

Εἰς αἰδίν ὀγκωμοσωνης τεκμήριον

Ὁ τῷ σῶν μαθητῷ ἐλάχιστος μὲν, ἀλλ' ὀγνώμων

Νικόλαος ὁ ἐκ Μισόβε

Πρὸς τὸν Αἰδεσιμολογιμώτατον καὶ Ἐπισημονικώτατον κύριον Μπαλᾶον

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Χαῖρι καθηγητὰ Μπαλαῖε, ὑπερτελὲς ὄντως
Φιλομαθῶν ἰύχος, πᾶσι τε νυῦ ὄφελος
Καὶ γὰρ Ἐπισήμας, ἅς κρύψε χθόνος γε ποτήσας
Σοῖς τ' Ἠπειρώταις, καλλοδαπεῖσι φαίης
Ἀφειδῶς δ' αὖ τοῖσιν σῶν γε πόνων μισθώσας
Τίσει' ἄν σε Διὸς Γᾶς ἔπι ἐν δὶ Πόλῳ.
Ἔπρον ὡρὸς τὸν αὐτόν.

Σφαῖρα μὲν εἶρται ψυχὴ πᾶς φιλοσοφοῦσι
Σφαῖρα δὶ ἡ Γαῖα, σφαῖρα τε καί γε Πόλος
Ἄστρασι τῇ σφαίρᾳ τῷ χρίματι ἄκιλα, Σφαῖρα
Καί μοι Μπαλαῖος Λατινικῶς λέγεται.
Γᾶς γὰρ χρίματος, δὲ' ἄστρων τε, πόλοισι πίεζε,
Καὶ ψυχῆς ἥδε φιλοσόφοισι μόνος.
Ἔπρον πεδέστιχον ὡρὸς τὸν αὐτὸν καὶ νῦν αὐτῶ
Θαυμάσιον μαθηματικὼ βίβλον.

Χαῖρ' Εὐκλείδη, ὅς γε μαθηματικῆς κατέχεις κλεῖν,
Χαῖρε Γεωμέτρων Ἀστρονόμων τε κλέος
Πᾶσι γὰρ Ἑλλήνων ἄγαρι μαθηματικοῖς γε,
Μπαλαῖος κάμνων φρὶν γε πιστὸν ἄλλω
Ἔπρον διὰ στίχων Γαμβικῶν
Σεμνεί τε καὶ παύσιμοι Ἑλλάνων γόνοι.
Ὅσοις μέλισσα τῷ μαθημάτων μέλι.
Ψυχῶ ὠφείας τε ἐκθέσεων καὶ παρείω
Καρπῶς ἀθαάπτις γε Μπαλαῖε πόνοις
Πρὸς αὐτὸν ἥδε σωδραμόντες ὦπονες
Λάβετε κάπὶ τὸ ποθυμεῖν πλέον.
Ἔπρον εἰς νῦν αὐτῶ παύσοφον βίβλον.

Τῶν βίβλον ἰδὼν Μπαλαῖε Σεμνοπάτα
Ἑρμῆς λόγε ἄρισος ὢν ὑπερίτας
Χ' ὡ Τρισμέγιστος καὶ σοφὸς Ἑρμῆς πάλιν
Θεὸς ἔφασκε τὸ βροτῶ αὖτε βίβλος.
Εἰς Λ'ἴδια Ἀνοίας τῇ Θερμοπάτης Εὐλαβείας πεμπόμενον,
Καμπίτης παπποφιλίστωρ ὁ φιλόπονος, ὁ ἐκ Ναύσης τῆς ἐν Μακεδονίᾳ ὁ
καὶ σπουδαίων Ἐλάχιστος.

Πρὸς

Πρὸς τὸν αὐτὸν Κὸ Δημοξένου Παπαπαπαναιόου.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Η Ἅλιος αὐτολίηθε σελασφόρος ἦκεν ἐπ' αἶαν
Φωτί τε παῦπε φαέων κρυπτὰ πῶν βολάων
Ἄλλος Γωανίηθε δ' ἑωσφόρος ἔκθορεν αὖτως
Δείξε τι οἱ σοφίη πᾶσι πύλας ἀδύτας
Ἀ'ριθμητικῦς τε, Γεωμετρίης ἰδὺ τ' αἶθις
Ἀ'στρονομίης, χ' ἅπερ ποσόπτα ὅλως
Ἔ"χον, σωπιχί" ἠδὲ θ' ὁμιλῶ, παύπσι δ' ἀῤῥα
Ὀ"ργὶ ἅρπε σαφῆ θῆκεν ἐμειρομένοις.

Ε"προν.

Ὀλβιόδαιμον χαῖρε καὶ ἀρνπαρ Μπαλαὼ μῦσα.
Κλεινὸν ἀεὶ σεπτὸν, ὖχος Γωανίνων.

Πρὸς τὸς φιλομαθεῖς.

Εἴ τῳ ἐν φίθισφιν Ε'πιστήμης ἔρον ἴδμεν,
Τάνδ' ἐχέτω χέρσιν ἠδὲ βίβλον ζαθέλω
Η"ν Μπαλαύνιος πόνος πολυώδμητος ἐς φάος ἦξε.
Ὃν σιγέων κεύτις ἤπιστε ἢ λαλέων,

Γαμβικὸν εἰς τὸν μαθηματικὸν.

Μῦσαι καλεῖσι τὸς ἐρασὰς τῷ λόγων
Λαμπρᾷ γε φωνῇ πάντας εἰς Ἀωχίαν
Δραμόντας ἄκα διῦπε τῷ ἡδυπνόων
Καρπῶν μιπαχοίπε τῷ μαθημάτων.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α

Ἡρωλιγείου εἰς τὸν αὐτὸν Κόσμα Τοῦ τῆ Συγγραφέως.

Γῆς ὕπο εἰλίσιο φαισφώρε καπεδυίπης,
Λίχας πῖς πᾶσιν σπίδναται αἶψα μίγα,
Λύπὴρ σίλβει παύπα φανεύπως πᾶδε ὑπὲρ γλῶ·
Ὡς ευῶ κὴ βίβλω, ἰῶγε λαβὼν καπέχεις
Ἀγιώτω ὅσης, μίγα μύσαις ἔπλιπο ἄχθος,
Νωῦ δ' αὖ πάρσονται, ὅττι τύποις ἐδόθη.

Ἕτερον.

Εἴσα λάβῃ πετ' ἔρως δρέψασθαι ἔνθεα μισῶν
Νωῦ τε Ἐπισημῶν καίλισιν ὡραίσαι
Δίχυσο πὰς δὲ βίβλως τέξαντύι χῆμα φερύσας
Ἡ'δ' ἀόυνος πάσας, ὣς γιδωὴ μελίπα.

Ἀνωνύμου εἰς τὸν αὐτὸν

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Ρεῖ κρίων χύσεια ῥίεθρα μαθηματικόῤῥυς
Ἧς φιλτατεῖμεν εἰς κόρον ἐξαρύω.
Μπαλάσας ἰῶ πελνίδεμς ἔτεύξε μυριόκρωτον.
Ὄμματο Δυγκείῳ, πυδαλίμῳ τε πόνῳ.

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΟΡΩΝ;
ΚΑΙ' ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΕΚΑΣΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παρόντι πρώτῳ τόμῳ,

Οἱ ὅροι τῆ πρώτης βιβλίου τῆ Στοιχειωτῆ. Φύλλα 7

Ὅρος Α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. 8

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. 8

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα. 8

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. 9

ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. 10

ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί. 10

ζ'. Ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. 10

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. 11

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. 12

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑκατέρα γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα καθέτος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. 12

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς. 12

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς. 12

ιγ'. Ὅρος ἐστὶν, ὃ τινός ἐστι πέρας. 13

ιδ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον. 13

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται. 13

ις'. Διάμετρος δὲ κύκλου ἐστὶν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. 14

ιζ'.

ιζ'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον χῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς κύκλου περιφερείας. 15
ιη'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 15
ιθ'. Εὐθύγραμμα χήματά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα. 16
κ'. Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν. 16
κα'. Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων. 16
κβ'. Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα. 16
κγ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων χημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. 17
κδ'. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. 17
κε'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς. 17
κς'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων χημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. 17
κζ'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον, ἀμβλεῖαν γωνίαν. 17
κη'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας. 17
κθ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων, τετράγωνόν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον. 18
λ'. Ἑτερόμηκες δὲ, τὸ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. 18
λα'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. 18
λβ'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω. 18
λγ'. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις. 18

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α'. Ἠτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 19
β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν. 19
γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι. 19

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

Α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. 19
β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. 19
γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. 19
δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. 19
ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα. 19
ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 19
ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 19
η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 19
θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι. 19
ι'. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 19

ιδ'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. 19

ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. 19

ιγ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν. 19

ιδ'. Καὶ τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσι. 20

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Πρότασις Α'. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. 21

β'. Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. 21

γ'. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. 22

δ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι. 22

ε'. Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 23

ϛ'. Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 23

Πόρισμα. Ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶν τρίγωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὸ ἰσογώνιον, ἰσόπλευρον. 24

ζ'. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. 24

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο τρίγωνα ἴσα, ἰσόπλευρα, καὶ ἰσοσκελῆ οὐ δυνατὸν συσταθῆναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, καὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 24

η'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. 25

θ'. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν. 25

ι'. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν. 26

ια'. Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 26

ιβ'. Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἢ ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 26

ιγ'. Ὡς ἀν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν καθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἅπαι δύο ὀρθαὶ, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. 27

ιδ'. Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ποτὲ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 27

ιε'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι. 28

ις'. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί. 28

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν μὴ δύνασθαι πλείονας εὐθείας ἴσας ἀγεσθαι, ἢ δύο μόνας. 29

ιζ'. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 29

Πόρισμα. α'. Ἐκ τούτου δῆλον, μὴ δυνάσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους πίπτειν. 29

β'. Ἔτι παντὸς τριγώνου, εἷπερ ἐν ἡ μία τῶν γωνιῶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα τύχῃ, τὰς λοιπὰς ὀξείας εἶναι. 29

γ'. Ἔτι ἐὰν ἐπί τινος εὐθείας εὐθεῖα καθεῖσα γωνίας ἀνίσους ποιῇ, τοῦ μὲν πρός τινος σημείου τῆς ἐφεστηκυίας εὐθείας πίπτουσαν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποκειμένην, πρὸς τὰς ὀξείας γωνίας πίπτειν μέρη. 29

δ'. Ἔτι τῶν μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ὀξείας εἶναι, τῶν δὲ ἰσοσκελοῦς τὰς δύο πρὸς τῇ βάσει. 29

ιη'. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τοῦ μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. 30

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, τῶν μὲν σκαληνοῦ τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ἀνίσους εἶναι, τῶν δὲ ἰσοπλεύρου ἴσας. 30

ιθ'. Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τοῦ μείζονα γωνίαν ἐμείζων πλευρὰ ὑποτείνει. 30

Πόρισμα. α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς ἀφ' ἑνὸς σημείου ἀπτομένων εὐθειῶν ἐπί τινος εὐθείας, ἡ μὲν κάθετος ἐλαχίστη ἐστὶν, ἄλλη δὲ ἡ ἀπώτερον τοῦ ἐγγύτερον μείζων. 30

β'. Ἔτι ἐν μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ἢ τοῦ ὀρθοῦ ὑποτείνουσα γωνίαν μείζων ἐστὶ τῶν λοιπῶν, ἐν δὲ τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἢ τοῦ ἀμβλείαν. 30

κ'. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 30

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τραπεζίου ἡ διαγώνιος διαμέτρου, ἐλάττων ἐστὶ τῶν ἑκατέρωθεν δύο πλευρῶν. 31

κα'. Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνισταθῶσιν, αἱ συνισταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν. 31

Πό-

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου συνάγεται μὴ δύεσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο τρίγωνα ὅμοια συνίστασθαι. 31

κβ'. Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συνίστασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ ἐν παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας. 32

κγ'. Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συνίστασθαι. 32

κδ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. 33

κε'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. 33

κς'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. 34

κζ'. Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 34

κη. Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 35

κθ'. Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιεῖ, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. 35

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, παντὸς παραλληλογράμμου τὰς δύο γωνίας, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, καὶ τὰς τέσσαρας τέσσαρσιν ἴσας. 36

λ'. Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 36

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου ἡ τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀχθεῖσα παράλληλος καὶ τῇ ἑτέρᾳ παράλληλος ἔσται. 36

λα'. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 36

λβ'. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς. 37

Πόρισμα δ. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μὲν ὀρθογωνίων ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἡμισειά ἐστιν ὀρθῆς, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων, ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, τῶν δὲ ὀξυγωνίων μείζων. 37

β'. Ἔτι τῶν ἰσοπλεύρων ἑκάστη τῶν γωνιῶν δύο τρίτα μέρη περιέχει τῆς ὀρθῆς. 37

γ'. Ἔτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ ταῖς εἰσὶ δύο ὀρθαῖς τρισὶ γωνίαις ὁμοῦ λαμβανομέναις. 37

δ'. Ἔτι παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. 37

λγ'. Αἱ τῆς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. 38

λδ'. Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. 38

λε'. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 39

λς'. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 39

λζ'. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 40

λη'. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 40

λθ'. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. 40

μ'. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. 41

μα'. Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. 41

μβ'. Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 41

μγ'. Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 42

μδ'. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 42

με'. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 43

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι κἂν δύο ὦσι τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα, καὶ ζητῆται συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν, ἔχοντι διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου τὸ προσταττόμενον ποιεῖν, διαιροῦσι δὲ τὰ δοθέντα εἰς τρίγωνα, εἰς ὅσα ἂν διαιρῶνται. ὁμοίως κἂν πλείω ᾖ. 44

μς'. Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τρίγωνον ἀναγράψαι. 44
μζ'. Εἰς τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. 44
μη'. Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστιν. 45

Π Ι Ν Α Ξ.

Τῶ Δευτέρω τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Παν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν. 47
β'. Παντὸς δὴ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ σὺν παραλληλόγραμμοις ὁποιοισοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω. 47

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ε Ι Σ.

α. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. 48
β'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. 49
γ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, ὡς ἔτυχε, τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσόν ἐστι τῷτε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. 49
δ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 50
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν παντὶ τετραγώνῳ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστι. 51
ε'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. 52
ς'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης

ἐπὶ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφόντι τραγώνῳ. 52

ζ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 52

η'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. 53

θ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. 54

ι'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου. 55

ια'. Τῷ δοθείσῃ εὐθείᾳ τριγώνῳ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 56

ιβ'. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. 57

ιγ'. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. 57

ιδ'. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. 58

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Τρίτου Εὐκλείδου Σπιχείου.

Ὅρος Α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσί. 60

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον. 60

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους. 61

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τῆ κέντρῳ εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι, μεῖζον δ' ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ᾧ μείζων κάθετος πίπτει. 62

ε'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 62

ς'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 63

ζ'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῆ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. 63

η'. Ὅταν δὲ αἱ περέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι περιλαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. 64

θ'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου συσταθῆ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς περιλαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας. 64

ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 64

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

α'. Τὸ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν. 65

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθειά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπ' αὐτῆς ἔσται τὸ κέντρον. καὶ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνουσιν, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἔσται τὸ κέντρον. 65

β'. Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῆ δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνύμενη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. 65

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ καὶ πλείονα σημεῖα, ἢ οὗ ἁπτομένη τοῦ κύκλου εὐθεῖα τέμνει τὸν κύκλον, καὶ οὐχ ἅπτεται αὐτοῦ. 66

γ'. Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθειά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ. καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. 66

Πόρισμα α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ τὴν βάσιν δίχα τέμνουσα κάθετός ἐστιν ἐπ' αὐτῆς. καὶ πάλιν, καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς καθέτου, 66

Πόρισμα β'. Ἔτι σωδήσεται, ὅτι ἐν τοῖς ὁμοκέντροις κύκλοις τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμήματος τῆς τεμνούσης αὐτοὺς εὐθείας ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 66

δ'. Ἐὰν

δ'. Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὦσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. 67

ε'. Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 67

ς'. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 67

ζ'. Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου λαφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶν, δύο δὲ μόναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἑφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 68

η'. Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ, ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τῷ κοίλῳ περιφέρειᾳ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τῷ κυρτῷ περιφερείᾳ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόναι εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἑφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 69

θ'. Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ λαφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. 70

ι. Κύκλος ἑνὶ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο. 71

ια'. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ λαφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸν συναφῆ πεσεῖται τῶν κύκλων. 72

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δύο κύκλων ἀλλήλων ἀπτομένων ἐντὸς οὐκ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἑνὸς κέντρον ἀγομένη εὐθεῖα διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου. 72

ιβ'. Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἁφῆς ἐλεύσεται. 72

ιγ'. Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἓν, εἴτε ἐντὸς, εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτηται. 73

ιδ'. Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 74

ιε'. Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγίον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. 75

Πόρισμα. Ἐκ τούτου ἔπεται, ἑφ' ἑκάτερα τῆς αὐτῆς, δύο μόνας ἴσας συνίστασθαι εὐθείας, εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται αἱ ἀπώτερον τῆς ἐγγίον ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον. 75

ιε'. Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. 76

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ἅπτεται τοῦ κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, ἐντὸς πεσεῖται, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ πάλιν, ἡ ἅπτομένη τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ διαμέτρῳ. 76

ιζ'. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 77

ιη'. Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἀπτομένην. 77

ιθ'. Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. 77

κ'. Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν. 78

Πόρισμα. α. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ τὸ ζ'. ἀξίωμα, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν. 78

β'. Ἔτι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου συνισάμεναι γωνίαι ἐπὶ διπλασίων βιβήκασι περιφερειῶν, ἢ αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ ἴσαι ταῖς πρὸς τῇ περιφερείᾳ συνισάμεναι. 79

κα. Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 79

κβ'. Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. 79

κγ'. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συνσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 79

κδ'. Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 80

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἀφαιροῦσιν, ὁποιασδηποτοῦν ἐναρμοζόμενα. 80

κε. Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶ τμῆμα. 80

κς'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βιβήκασιν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 81

κζ'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 81

κη'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν. 82

κθ'.

κθ'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. 82

λ'. Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. 83

λα'. Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν εἰς τὸ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. ἔτι δὲ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. 83

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἓν τριγώνου ἡ μία τῶν γωνιῶν ταῖς λοιπαῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν. ὅτι δὲ ἡ ὑφ' ἑξῆς ἐκείνης τοῖς δυσὶν ἴση ἐστί. 84

λβ'. Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. 84

λγ'. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 85

λδ'. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 86

λε'. Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 86

λς'. Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ. 87

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀφ' οὗ σημείου ἐκτὸς ὄντος τοῦ κύκλου ἐκπίπτουσαι εὐθεῖαι δύο τέμνωσι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. τὸ γὰρ ἀφ' ἑκάστης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς τεμούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ κυρτοῦ περιφερείας καὶ τοῦ σημείου, ὡς δέδεικται. 88

λζ'. Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τεμούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου. 88

Π Ι Ν Α Ξ.

Τῶ Τετάρτω τῶν τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅροι Α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς χῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τῶ ἐγγραφομένω χήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τῶ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται. 91

β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ χῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῶ περιγραφομένω ἑκάστης γωνίας τῶ, περὶ ὃ γράφεται, ἅπτηται. 91

γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τῶ ἐγγραφομένω ἅπτηται τῆς τῶ κύκλω περιφερείας. 92

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῶ περιγραφομένω τῆς τῶ κύκλω περιφερείας ἅπτηται. 92

ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς χῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τῶ κύκλω περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τῶ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται. 92

ς'. Κύκλος δὲ περὶ χῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τῶ κύκλω περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τῶ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται. 92

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τῶ κύκλω. 93

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ε Ι Σ.

α. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τῶ κύκλου διαμέτρω, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. 93

β'. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι. 94

γ'. Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι. 94

δ'. Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 95

ε'. Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. 95

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὅταν τῶν δύο τῶ τριγώνου πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, αἱ ἐπ' αὐτῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐντὸς τῶ τριγώνου συμπίπτωσιν, ἡ ὑπὸ τῆς ἀτμήτου ὑποτεινομένη γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ πάλιν, ἐὰν μείζονι χρὴ ἐστὶ τμήματι, ὅτω δὲ ἐπὶ τῆς ἀτμήτου, ὀρθὴ, καὶ πάλιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ὅταν δὲ ἐπὸς τῶ τριγώνου, μείζων ὀρθῆς, ἐν ἐλάττονι γάρ ἐστι τμήματι κύκλου. 96

ς'. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι. 96

ζ'. Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. 96

η'. Εἰς τὸν δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 97

θ'. Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι. 97

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ διάμετροι δίχα τέμνονται. 98

ι. Ἰσοσκελὲς δίγωνον συνίστασθαι ἔχον ἑκάτερον τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. 98

ια. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 99

ιβ. Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι. 100

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις καὶ ἰσοπλεύροις πενταγώνοις τῶν πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, καὶ ἐπ' αὐτῶν καθέτων ἀγομένων, αἱ ἀπὸ τοῦ συμβόλου τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, δίχα τὰς γωνίας τέμνουσι. 101

ιγ. Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, κύκλον ἐγγράψαι. 101

ιδ. Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι. 101

ιε. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 102

Πόρισμα. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. 103

ις. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 103

ΠΙΝΑΞ.

Τῶν Πέμπτης τῆς τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. 106

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. 106

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. 107

δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. 108

ε. Ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, λαμβάνεται καταλλήλα. 108

Πόρισμα. Ὅτι δυνάμεθα ἐκ τῶν συναγεῖν καὶ ἀφαιρεῖν, ὅτι ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, τοῦτ' ἔστι τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ὑπερέξει, ἢ ἅμα ὑπερέχει, ἢ ἅμα ἴσα ἐστὶ ληφθέντα καταλλήλα. 109

ε'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογα καλείσθω. 109

ζ'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ'. πρὸς τὸ δ'. 110

η'. Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. 110

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισίν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. 111

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. 111

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς εἷς πλείων, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. 111

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις. 112

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον. 113

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου, ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον. 114

ιε'. Συνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. 114

ις'. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. 115

ιζ'. Ἀνταποδοσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου. 115

ιη'. Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. ἢ ἄλλως. λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων. 115

Τίνα τὰ ἴδια ἑκάστου εἴδους τῶν ἐν μεγέθεσι λόγων. 116

ιθ'. Τεταραγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ἀεὶ ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ᾖ δὲ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι. 118

δ'. Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἴσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. 121

ε'. Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστιν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. 121

ζ'. Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. 122

η'. Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. 122

θ'. Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 124

ι. Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν. 124

ια'. Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. 124

ΠΙΝΑΞ.

Τεμαχίων ἐξ ἀναγλύφου ἐπὶ λίθου πίναξ

Ἐν ᾧ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν ἐγκεκολαμμένα ἐστὶ τὰ ὀνόματα τῶν ἐν τῇ ἀγορᾷ πωλουμένων ἰχθύων, καὶ ἐπὶ τῶν ἀνάγλυφα ἐκτετυπωμένα τὰ εἴδη αὐτῶν, ἅπερ ἐστὶν ἐν τῇ ἀγορᾷ τῶν Ἀθηναίων πιπρασκόμενα, ἐν τῷ ἔτει τῷ πρώτῳ τῆς ἑβδομηκοστῆς καὶ ἑκατοστῆς ὀλυμπιάδος, ἐπὶ ἄρχοντος Ἀθήνησι Νικοκλέους τοῦ Ἀντιφάνους, ἐν μηνὶ Ἑκατομβαιῶνι, ἐν ᾧ καὶ ἡ μεγάλη τῶν Παναθηναίων ἑορτὴ ἐτελεῖτο.

ΠΟΤΑΜΕΙΣ.

Ἀ. Ἐμὲ ἐκόμισεν ἐκ τοῦ ἐν Ἀρκαδίᾳ ποταμοῦ Ἐρυμάνθου ἐπὶ τὴν ἀγορὰν τῶν Ἀθηναίων Ἡρακλῆς ὁ Ἀλκμήνης, ἐπειδὴ τὸν ἐν τῷ ὄρει τούτῳ ἐνοικοῦντα ἄγριον σῦν ἐθήρευσε καὶ ἔδησε καὶ ἀπήγαγε ζῶντα πρὸς Εὐρυσθέα τὸν Σθενέλου.

Β. Ἐμὲ ἐκόμισεν ἐκ τῆς Ἀρκαδίας ἐπὶ τὴν ἀγορὰν τῶν Ἀθηναίων Ἡρακλῆς ὁ Ἀλκμήνης, ἐπειδὴ τὴν ἐν τῇ λίμνῃ ταύτῃ ἐνοικοῦσαν ὕδραν ἀπέκτεινε καὶ ἀπήγαγε πρὸς Εὐρυσθέα τὸν Σθενέλου.

Γ. Ἐμὲ ἐκόμισεν ἐκ τῆς Ἀρκαδίας ἐπὶ τὴν ἀγορὰν τῶν Ἀθηναίων Ἡρακλῆς ὁ Ἀλκμήνης, ἐπειδὴ τὴν ἐν τῇ λίμνῃ ταύτῃ ἐνοικοῦσαν ὕδραν ἀπέκτεινε καὶ ἀπήγαγε πρὸς Εὐρυσθέα τὸν Σθενέλου.

Δ. Ἐμὲ ἐκόμισεν ἐκ τῆς Ἀρκαδίας ἐπὶ τὴν ἀγορὰν τῶν Ἀθηναίων Ἡρακλῆς ὁ Ἀλκμήνης, ἐπειδὴ τὴν ἐν τῇ λίμνῃ ταύτῃ ἐνοικοῦσαν ὕδραν ἀπέκτεινε καὶ ἀπήγαγε πρὸς Εὐρυσθέα τὸν Σθενέλου.

ιβ'. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μιγέντα ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. 125

ιγ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. 126

ιδ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. 126

ιε'. Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα. 127

ις'. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται. 127

ιζ'. Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. 128

ιη'. Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται. 129

ιθ'. Ἐὰν ᾖ, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. 129

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀντιστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. 129

κ'. Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. 130

κα'. Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ παραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. 130

κβ'. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. 131

κγ'. Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ παραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. 132

κδ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. 133

κε'. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν λοιπῶν δύο, μείζονά ἐστιν. 233

ΠΙΝΑΞ.

Τῶ Ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς τῶ Εὐκλείδου Στοιχείωσεως.

Ὅροι Α'. Ὅμοια χήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα ταῖς τε γωνίας ἴσας ἔχει τὴν μίαν ἴσας, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον. 134

β'. Ἀντιπεπονθότα δὲ χήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν χημάτων ἡγούμενός τε καὶ ἑπόμενος λόγος ᾖσιν. 135

γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον. 136

δ'. Ὕψος ἐστὶ παντὸς χήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη. 137

ε'. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πολλαπλασιαθεῖσαί τινα ποιῶσί τινα. 138

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

α. Τὰ ἴσα τρίγωνα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. 143

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη, ὡς ἔτυχε, εὐθεῖα, ἀναλόγως τέμνει τὸ τρίγωνον τῇ αὐτῇ βάσει. 143

β'. Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τμηθήσονται αὐτοῦ αἱ τοῦ τριγώνου πλευραί· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν ἔσται παράλληλος. 144

γ'. Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν. 144

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ἰσοσκελέσι τριγώνοις μιᾶς τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐκτὸς γωνίας παράλληλος τῇ βάσει εὐθεῖα ἀχθῇ, δίχα ἡ αὐτὴ τμηθήσεται γωνία. 145

δ'. Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, αἵ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. 145

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, τὸν αὐτὸν αὐτῷ ἕξει λόγον πρὸς τὸ

αὖ

αὐ παραλλήλως ἀχθείη, ὃν ἑκατέρα τῇ λοιπῶν τῶ ἑτεροίου πλαγίων ἴσον ἔχει πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς. 146

ε'. Ἐὰν δύο ἑτερόγωνα τὰς πλαγίας ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ ἑτερόγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλαγίαι ὑποτείνουσιν. 147

ς'. Ἐὰν δύο ἑτερόγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλαγίας ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ ἑτερόγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλαγίαι ὑποτείνουσιν. 147

ζ'. Ἐὰν δύο ἑτερόγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλαγίας ἀνάλογον, περὶ δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ ἑτερόγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλαγίαι. 148

η'. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ ἑτερογώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ ἑτερόγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 149

Πόρισμα. Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἑτερογώνοις ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. 150

β'. Ἔτι τῶν τῆς βάσεως καὶ ὑποτεινουσῶν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλαγία, μέση ἐστὶν ἀνάλογον. 150

θ'. Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφαιρεῖν. 150

ι'. Τῷ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἄνιμον τὴν δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν. 150

ια'. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτῃ ἀνάλογον προσλαβεῖν. 151

ιβ'. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτῃ ἀνάλογον προσλαβεῖν. 151

ιγ'. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσῃ ἀνάλογον προσλαβεῖν. 152

ιδ'. Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλαγίαι, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλαγίαι, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 152

ιε'. Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἑτερογώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλαγίαι, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλαγίαι, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 153

ις'. Ἐὰν πέντε εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῆς ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ πέντε εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 154

ιζ'. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιε-

χόμενον

χόμενον ὀρθογωνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μίσης τετραγώνῳ, αἱ ῥηταὶ δυνάμει μόνον συμμετροι ἔσονται. 155

ιά. Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῇ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι. 155

ιβ'. Τὰ ὅμοια ῥητὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 156

ιγ'. Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 157

Πόρισμα. α. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ ὅμοια τετράπλευρα χωρία ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς δέδεικται καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε ἐπὶ πάντων ἐχόμενα συναγαγεῖν καθόλου, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 158

β'. Ἐπεὶ δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἀπὸ τῆς α. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἔχει, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην. 158

γα. Τὰ τῇ αὐτῇ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. 159

γβ'. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, 159

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων τε καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ἴσαι εἰσί. 160

γγ'. Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. 160

γδ'. Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 161

γε. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. 162

γς'. Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. 163

γζ. Πάντων τῶν περὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι. 163

γη. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι

εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένῳ, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλείμματος, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τῷ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, παραλληλογράμμων. 164

κδ'. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἀθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι. 166

κε'. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. 167

κς'. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. 167

κζ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, καὶ λοιπὰὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται. 168

κη'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνεστάμενοι. 169

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν. 171

ΠΙΝΑΞ.

Τῶν Ἑβδόμου τοῦ τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. 172

β'. Ἀριθμός ἐστι τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. 172

γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. 173

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ. 173

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. 173

ς'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος. 173

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου. 173

η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. 173

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. 174

ι'. Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. 174

ια'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος. 174

ιβ'. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. 174
ιγ'. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος. 174
ιδ'. Σύνθετοι δ' πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. 174
ιε'. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις. 175
ις'. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δ' αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. 175
ιζ'. Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται, πλευραὶ δ' αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους. 175
ιη'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. 175
ιθ'. Κύβος δέ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. 176
κ'. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ μὲν τοῦ β' τὸν γ' πολλαπλασιάσας, ἢ ὁ τοῦ γ' τὸν β' ἰσάκις ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσι. 176
κα'. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. 176
κβ'. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς αὑτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν. 176

Π Ρ Ο Τ Α' Σ Ε Ι Σ.

Α'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 177
β'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 177
Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρεῖ. 178
γ'. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 178
δ'. Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅτου μέρος ἐστὶν, ἢ μέρη. 179
ε'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ εἷνός. 179
ς'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ εἷνός. 180

ζ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. 180

η'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. 181

θ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου· τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β' τοῦ δ'. 181

Πόρισμα. Ἐκ τούτου σωμάγεται, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος τὸ αὐτὸ μέρος ὦσιν, ἕκαστος ἑκάστου, ὅπερ ἕνὸς τις ἀριθμὸς ἑνὸς τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ πάντες ὁμοῦ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πάντων τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν ἔσονται τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ ῥηθεὶς τοῦ ῥηθέντος. 182

ι'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ μέρος. 182

ια'. Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον. 182

ιβ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. 183

ιγ'. Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται. 183

ιδ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος συνὶ δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου, ἐν τῇ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. 183

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι καὶ τοὐναντίον, ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τῷ πλήθει δι' ἴσου λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ συνὶ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. 184

ιε'. Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ β' τὸν δ'. 184

ιϛ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται. 184

Πόρισμα δ'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ μὲν πολλαπλασιάζων μετρεῖ τὸν γενόμενον κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ μονάδας, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος τὸν αὐτὸν, κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι. 185

Πόρισμα β'. Ἔτι δυόλον ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα, ὁ πολλαπλασιαζόμενος πρὸς τὸν γενόμενον. ὥστε ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσῃ, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οὕτως ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν γενόμενον. 185

ιζ'. Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν. 185

ιή. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι. 185

ιθ'. Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐν τῷ α: πρὸς δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν β: πρὸς γ': γινομένῳ ἀριθμῷ, πρὸς ἐὰν ὁ ἐκ τῶν α: πρὸς δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τῶν β: πρὸς γ': οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται. 186

κ'. Ἐὰν ἓξ ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ ἓξ ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται. 186

κά. Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὡσαύτως ὁ μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα. 187

κβ'. Ἐὰν ὦσι ἓξ ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι καθ' ἓν τὸν αὐτὸν λόγον, ᾖ δὲ ταραγμένη ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται λόγῳ. 187

κγ'. Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 188

κδ'. Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 188

κε. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν εἷς αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται. 189

κς'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται. 189

κζ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐπὶ τὸν εἷς αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται. 190

κή. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσι, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 190

κθ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ οὗτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει. 190

λ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται, καὶ ἐὰν συναμφότερος πρός τινα αὐτῶν, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 191

λά. Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρῇ, πρῶτός ἐστι. 192

λβ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ τὸν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει. 192

λγ'.

λγ'. Ἅπας σωθεὶς ἀριθμὸς, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μιβεῖται. 192
λδ'. Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μιβεῖται. 193
λε'. Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 193
λς'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μιβοῦσιν ἀριθμόν. 194
λζ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μιβῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μιβούμενος, τὸν αὐτὸν μιβήσει. 195
λη'. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μιβοῦσιν ἀριθμόν. 195
λθ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μιβῆται, ὁ μιβούμενος, ἀμώνυμον μέρος ἕξει τοῦ μιβοῦντος. 196
μ'. Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁποιονοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μιβηθήσεται τοῦ μέρους. 196
μα'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν, ἕξει τὰ δοθέντα μέρη. 197

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Ὀγδόου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσιοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 198
β'. Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ. 198
Πόρισμα. Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς ὦσιν, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν. ἐὰν δὲ πέντε, κύβοι. 199
β'. Ἔτι ἐὰν ἀριθμὸς ὁσουδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται, καθ' ὃν, καὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ πολλαπλασιαθέντες, λόγον. 199
γ'. Ἔτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ ἕτερόν τινα ἀλλήλους, ποιήσατω τινάς· οὗτοι ἑξῆς ἐλαχίστους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. 199
δ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 200
ε'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. 220

Λῆμμα. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οὗτοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅσ-

τὰ δὲ διαφόροις, ὁ ἑρῶτος πρὸς τὸν ἕχατον, λόγον ἕχει τὸν συγκείμενον ἔκ τῆ δὲ αὐτοῖς λόγων. 201

ε'. Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἕχουσι, τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν. 202

ς'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῆ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. 203

ζ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῆ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει. 203

η'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτὰς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἐμπεσοῦνται. 204

θ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονὰς ἑξῆς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 204

ι. Δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μονὰς καὶ τετραγωνικὸς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 205

ια. Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. 206

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὸν τοῦ ἑτέρου, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ πρῶτος τετράγωνος πρὸς τὸν μέσον ἀνάλογον, καὶ ὁ μέσος ἀνάλογος πρὸς τὸν β'. τετράγωνον. 207

ιβ'. Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογόι εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς πρὸς τὸν κύβον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. 207

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι μονάδος δύο κύβων, δύο μέσων ἀνάλογον πιπτόντων, οἱ πέντε ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ πλευρῶν. 208

ιγ'. Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται. καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τῶν συμβαίνει. 208

ιδ'. Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν αὐτὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. 208

ιε'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει,

σει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μιᾷ, καὶ ὁ κύβος τοῦ κύβου μιᾷσει. 209
ις'. Ἐὰν τριγώνου ἀριθμὸς τριγώνου ἀριθμοῦ μὴ μιᾷ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μιᾷσει. καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μὴ μιᾷ, οὐδὲ ὁ τρίγωνος τοῦ τριγώνου μιᾷσει. 209
ιζ'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβου ἀριθμοῦ μὴ μιᾷ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μιᾷσει. καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μὴ μιᾷ, οὐδ' ὁ κύβος τοῦ κύβου μιᾷσει. 210
ιή. Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ ἐπιπέδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 210
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανεροῦν, ὅτι δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ μίαν τὸν μέσου αὐτῶν ἀνάλογον ἔξουσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν. 211
ιθ'. Δύο ὁμοίων στερεῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 211
κ'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί. 212
κα. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί, 213
κβ'. Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος, τετράγωνος ἔσται. 214
κγ'. Ἐὰν πέντε ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ πέμπτος κύβος ἔσται. 214
κδ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται. 214
κε'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. 214
κς'. Οἱ ὅμοιοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. 215
κζ'. Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. 215

Π Ι Ν Α Ξ.

Τῶ Ἐμβάτου τῆς τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Πρότασις. Α'. Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται. 216

β'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. 216

γ'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται. 217

δ'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται. 217

ε'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται. 218

ς'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. 218

ζ'. Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται. 219

η'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν δεύτερος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἐφεξῆς διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πρὸς διαλείποντες πάντες. 219

θ'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὸν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὸν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται. 220

ι'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὸν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ ἐφεξῆς ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τοῦ εἷς διαλειπόντων πάντων, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὸν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ πέμπτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων. 220

ια'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. 221

ιβ'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τούτου καὶ ὁ παρὰ τὸν μονάδα μετρηθήσεται. 222

ιγ'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὸν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πλὴν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. 223

ι δ'. Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' ὑδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάριξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων. 225
ι ε'. Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὅσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποσοιοῦν συντιθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν. 225
ι ς'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἑαυτοὺς ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά. 226
ι ζ'. Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά. 226
ι η'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτοῖς ἕτερον ἀνάλογον προσαρεῖν. 227
ι θ'. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσαρεῖν. 227
κ'. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείνες εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. 228
κ α'. Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι. 229
κ β'. Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὅλος ἄρτιος ἔσται. 229
κ γ'. Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται. 229
κ δ'. Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. 229
κ ε'. Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται. 230
κ ς'. Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. 230
κ ζ'. Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται. 230
κ η'. Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται. 230
κ θ'. Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται. 231
λ'. Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. 231
λ α'. Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται. 231
λ β'. Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνος. 232
λ γ'. Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσὸν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνος. 232
λ δ'. Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς, μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσὸν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. 233
λ ε'. Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπό τε τοῦ

δλλήρε ἡ τῶ ἐχάτω ἴσος τῇ ορθήρῳ · ἔσαι ὡς ἡ τῶ δλλήρε ὑπεροχὴ ορὸς τὸν ορθῆνα, ὕπως ἡ τῶ ἐχάτω ὑπεροχὴ ορὸς τὰς ορὸ αὐτῶ ἅπαπας. 233

λς'. Ἐαὶ ἀπὸ μοναδος ὁποσωῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκπεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι αἰαλογίᾳ, ἕως ὃ ὁ σύμπας συμπεθεὶς ορῶπος γένηται, ἡ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔχαπον πολλαπλασιαθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος, τέλειος ἔσαι. 234

ΠΙΝΑΞ.

Τῶ Ἑνδεκάτω τῦ τῶ Εὐκλείδε Στοιχείω.

Ὅρος Α'. Σπριόν ἐσι τὸ μῆκος, πλάπος, ἡ βάθος ἔχον. 236

β'. Σπριᾶ δὲ πέρατα, ἐπιφάνειαι. 237

γ'. Εὐθεῖα ορὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐσιν, ὅταν ορὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, ἡ ὅσας ἐν τῇ αὐτῇ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας. 237

δ'. Ἐπίπεδον ορὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐσιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ορὸς ὀρθὰς ἀχθῶσαι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ ορὸς ὀρθὰς ὦσιν. 237

ε'. Εὐθείας ορὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐσὶν, ὅταν ἀπὸ τῦ μιπρὸν πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀπὸ τῦ γενομένου σημείου, ἡ ἀπὸ τῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης ἡ τῆς ἐφεσώσης. 237

ς'. Ἐπιπέδου ορὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐσὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν ορὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων, ορὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκαπέρῳ τῶν ἐπιπέδων. 238

ζ'. Ἐπιπέδου ορὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίδαι λέγεται, ἡ ἕπερον ορὸς ἕπερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν. 238

η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐσι, τὰ ἀσύμπωπα. 238

θ'. Ὅμοια σερεὰ σχήμαπά ἐσι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος. 239

ι'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια σερεὰ σχήμαπά ἐσι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει. 239

ια'. Σπερεὰ γωνία ἐσὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ὄσων ορὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἢ καὶ ὕπω, σερεὰ γωνία ἐσὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ ὄσων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ορὸς ἑνὶ σημείῳ συνισαμένων. 239

ιβ'. Πυραμίς ἐσι σχῆμα σερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου ορὸς ἑνὶ σημείῳ συνισός. 240

ιγ'. Πρίσμα ἐσὶ σχῆμα σερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐσι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. 240

δ'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα. 240

ε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται. 240

ς'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου. 240

ζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. 241

η'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν χῆμα. καὶ ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος. ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος. 241

θ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡ μένουσα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται. 241

ι'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος. 241

ια'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν χῆμα. 241

ιβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται. 241

ιγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι. 241

ιδ'. Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἱ τε ἄξονες, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν. 241

ιε'. Κύβος, ἐστὶ χῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περεχόμενον. 241

ις'. Ὀκτάεδρον, ἐστὶ χῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περεχόμενον. 241

ιζ'. Δωδεκάεδρον, ἐστὶ χῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ ἰσογωνίων περεχόμενον. 241

ιη'. Εἰκοσάεδρον, ἐστὶ χῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περεχόμενον. 241

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. 242

β'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. 242

γ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλλα, ἃ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ἀλλήλαις εἰσί. 243
δ'. Ἐὰν ἀλλήλων δύο ἀλλήλαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, ἡ ἀπ' αὐτῶν ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 243
ε'. Ἐὰν ἀλλήλων δύο ἐπίπεδα ἀπτόμενα ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσονται. 244
ς'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἐπὶ τρία ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ᾖ, παράλληλα ἔσονται τὰ ἐπίπεδα. 244
ζ'. Ἐὰν ὦσι δύο ἐπίπεδα παράλληλα, ληφθῇ δέ τι ἐν ἑκατέρῳ αὐτῶν σημεῖον, ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ θάτερον ἐπίπεδον κάθετος ἐπιζευχθεῖσα ἐπὶ ἀμφότερα πεσεῖται τὰ παράλληλα. 245
η'. Ἐὰν ὦσι δύο ἐπίπεδα παράλληλα, ἐπίπεδόν τι ἕτερον αὐτοῖς ἐπίπεδον τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἕτερον αὐτοῖς ἐπίπεδον τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 246
θ'. Αἱ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῷ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 247
ι'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἁπτόμενα ἀλλήλων πρὸς δύο ἐπίπεδα ἁπτόμενα ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι. 247
ια'. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετέωρον ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 248
ιβ'. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. 248
ιγ'. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο μέρη. 249
ιδ'. Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. 249
ιε'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων κατὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. 250
ις'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. 252
ιζ'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. 252
ιη'. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πᾶν τὸ δι' αὐτῆς ἐπίπεδον τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 252
ιθ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλλο ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 252
κ'. Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιασοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 253
κα'. Ἁπάσα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεττάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. 254

κβ'. Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι παντῇ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, τρίγωνον συστήσασθαι. 254

κγ'. Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι παντῇ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰ γωνία συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς τρεῖς παντῶν ὀρθῶν ἐλάττονας εἶναι. 256

κδ'. Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσά τε, καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι. 260

κε'. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. 260

κς'. Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. 261

κζ'. Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι. 263

κζ'. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 263

κθ'. Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσιν εὐθεῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 264

λ'. Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 264

λα'. Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. 265

λβ'. Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. 267

λγ'. Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 267

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδὴ περ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν. 268

λδ'. Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 269

λε'. Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι

εὐθεῖαι ἐπισαθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ πρὸς ἀρχῆς εὐθειῶν, ἕκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ πρὸς μείζοσι σημεῖα, ἢ ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, καθεῖσι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ πρὸς γενομένων σημείων ὑπὸ πρὸς καθείσας ἐν πῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μὴ πρὸς μείζοσι. 271

Πέφυκε. Ἐκ τῶν δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισαθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῆς μείζονες εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 273

λς'. Ἐὰν ξῆς εὐθεῖαι ἀδιάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν ξῆς εὐθειῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἰσόνεστι πρὸ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ πρὸ ἀρειμμένῳ. 278

λζ'. Ἐὰν πέντε εὐθεῖαι ἀδιάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀδιάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀδιάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀδιάλογον ἔσονται. 274

λη'. Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσεῖται τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. 275

λθ'. Ἐὰν στερεῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ στερεῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. 275

μ'. Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. 276

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δωδεκάτου Εὐκλείδου Στοιχείου.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 278

β'. Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 279

γ'. Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τρίγωνον βάσιν ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσ-

σχήματα ἴσα, καὶ τὰ δύο σχήματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. 281

δ'. Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχούσας βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκάτερα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο σχήματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν ἕξει τρόπον γενομένη διῃρημένη, καὶ τῶν ἀεὶ γενέτων, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι σχήματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σχήματα πάντα ἰσοπληθῆ. 283

ε'. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὦσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἐχούσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις. 285

ς'. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὦσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἐχούσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 286

ζ'. Πᾶν σχῆμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 287

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ σχήματος, τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδὴ περ καὶ ἕτερόν τι χῆμα ἔχῃ ἡ βάσις τὸ σχῆμα, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπενάντιον, διαιρεῖται εἰς σχήματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον. 288

η'. Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 288

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 289

θ'. Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. 289

ι. Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. 290

ια'. Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς βάσεις. 293

ιβ'. Οἱ ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. 295

ιγ'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. 298

ιδ'. Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. 299

ιε'. Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. 299

ις'. Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἀρτιοπλεύρου ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆ ἐλάσσονος κύκλου. 301

ιζ'. Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὑσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. 301

Πόρισμα. Ἐὰν καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν ἄλλο στερεὸν πολυέδρον ἐγγραφῆ, ὅμοιον τῷ ἐνταῦθα, τὸ παρὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ πολυέδρον ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. 305

ιε'. Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν ἐπιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. 305

ΠΙΝΑΞ.

Τῶ Τρισκαιδεκάτῳ τῆς τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης. 307

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τί; 308

Ἀνάλυσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. 308

Σύνθεσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ἐπὶ τὸ τοῦ ζητουμένου κατάληψιν. 308

Β'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματα ἑαυτῆς πενταπλάσια δύναται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. 309

Τῶ Εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις. 310

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 310

Γ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τίθεται. 310

Τῶ εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις. 311

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 311

Δ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τῇ ἐλά-

γω-

γωνον, καὶ τῶ ἐλάσσονος τμήματος τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μείζονος τμήματος τετραγώνου. 312
Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις. 312
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 313
ε'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῇ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα. 313
Ἀνάλυσις τοῦ εἰρημένου θεωρήματος. 313
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 314
ς'. Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 314
ζ'. Ἐὰν τετραγώνου ἰσοπλεύρου αἱ πρὸς γωνίαι, ὅπου αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ τετράγωνον. 315
η'. Ἐὰν τετραγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν αἱ πλευραί, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ. 216
θ'. Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά. 317
ι'. Ἐὰν εἰς κύκλον τετράγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ δυναται τριπλασίου τοῦ τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τοῦ τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγιγραμμένων. 317
ια'. Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τοῦ διαμέτρου τετράγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. 319
ιβ'. Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυναμένη τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. 320
ιγ'. Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τὴν δοθεῖσαν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυναμένη ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. 321
ιδ'. Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τοῦ πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυναμένη διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. 323
ιε'. Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ ἀρμόνια, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυναμένη τριπλῆ ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. 324
ις'. Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ εἰρημένα χήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. 325
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυναμένη πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ τὰ ἑξῆς. 328

ιζ'. Δωδεκαέδρου συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ὅμοιόν ἐστι καὶ τὰ πρότερα γράμματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς δωδεκαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 328

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πρὸς τὴν τοῦ κύβου πλευρὰν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ τῆς δωδεκαέδρου πλευρά. 331

ιθ'. Τὰς πλευρὰς τῆς πρότης γράμματος ἐκθέσθαι, καὶ συγκεῖσθαι πρὸς ἀλλήλας. 331

Π Ι' Ν Α Ξ:

Τοῦ Τεσσαρεσκαιδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Π Ρ Ο Τ Α' Σ Ε Ι Σ.

Α'. Ἐὰν ἀπὸ κέντρου κύκλου τινὸς, ἐπὶ τὰ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, τὰ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφόμενα, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἡμίσειαι ἔσονται σωμαφοῦσαι, τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. 336

β'. Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πενταγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῆς εἰς τὰ αὐτὰ σφαῖραν ἐγγραφομένων. 336

γ'. Ἐὰν ᾖ πενταγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ τὸν κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ ἑξακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῆς πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ. 338

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι αἱ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειαι πρὸς τὰς τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείας, καὶ τὰς ἑξῆς. 339

δ'. Τούτου δῆλον ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔστι, αἱ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειαι πρὸς τὰς τοῦ εἰκοσαέδρου, ὅπερ ἐστὶ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὰς τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράς. 339

Πόρισμα. Α'. Δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὰς αὐτὰς σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρόν τε καὶ εἰκοσαέδρον, λόγον ἕξουσιν ἄθετοι οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθεῖσης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὰς δυναμένας τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. 343

Πόρισμα. β'. Τούτων δὲ παντων γεγραμμένων δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὰς αὐτὰς σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρον καὶ εἰκοσαέδρον, τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον λόγον ἔχει, ὃν ἄθετοι οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθεῖσης. 344

Π Ι Ν Α Ξ.

Τῶ Πεμπτεκαιδεκάτῳ τῆς τῶ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ε Ι Σ.

Α'. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι. 345
β'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. 345
γ'. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. 346
δ'. Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι. 346
ε'. Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι. 347

Π Ι Ν Α Ξ.

Τῶ Πρώτῳ τῆς Σφαιρικῶν.

Ὅρος. α'. Σφαῖρα ἐστὶ χῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσί. 354

β'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται. 354

γ'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, ᾗ περατουμένη, ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα περιφέρεσθαι δοκεῖ. 354

δ'. Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τοῦ ἄξονος πέρατα. 354

ε'. Πόλοι δὲ κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κείμενον τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 354

ς'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφεστάναι, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι. 354

ζ'. Κύκλοι μείζονοι εἰσιν ἐν σφαίρᾳ, οἱ διὰ τῶν κέντρων τῆς σφαίρας διερχόμενοι ἢ δίχα τὴν σφαῖραν τέμνοντες. 354

η'. Κύκλοι ἐλάττονές εἰσιν, οἱ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας, ἢ εἰς δύο ἄνισα τὴν σφαῖραν τέμνοντες. 354

θ'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἐξ ἴσου τῶν οἰκείων ἀφεστάμενοι πόλων, ἢ ὧν ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τοῦ οἰκείου ἀφεστάμενος πόλου. 354

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ, ἐπὶς πίπτει τῆς σφαίρας. 355

β'. Ἐὰν σφαῖρα οἱῳδήποτε τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος ἐστί. 355

Πόρισμα, α'. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ αὐτὸ ἐστι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου, τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ὡς ἐπὶ τοῦ α': δέδεικται χήμπως. 356

Πόρισμα, β'. Ἔτι ἐὰν ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ β': χήμπως. 356

γ'. Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν. 356

Πόρισμα, α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τοῦ τῆς σφαίρας κέντρου ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος ἐν αὐτῷ κύκλου ἀγομένης καθέτου ἐστί. 357

Πόρισμα, β'. Ἐὰν ἡ τομὴ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ἢ τοῦ ἐξῆς. 357

δ'. Ἡ σφαῖρα ὑχ ἅπτεται τοῦ ἐπιπέδου κῇ πλειόνα σημεῖα, ἢ ἕν. 357

Πόρισμα. Δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡ δύο τινὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐκτὸς ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει. 358

ε'. Ἐὰν σφαῖρα ἅπτηται ἐπιπέδου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν ἁφὴν εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον. 358

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἁφῆς τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀνενεχθῇ ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, ἐπ' αὐτῆς ἐστι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. 358

ς'. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν κύκλον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον. 359

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διήρχται. 359

ζ'. Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου, διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διήρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, καὶ ἔτι οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τῷ ἐγγύτερον ἐλάσσονές εἰσι. 359

Πόρισμα. α'. Ἐκ τούτου ῥᾴδιον συνάγεται, ὅτι πάντων οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι, ἴσοι εἰσιν, ἕ γὰρ τοῦ μεγίστου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας. 361

Πί-

Πόρισμα. β'. Ἔστι ἐκαπέρωθεν τῆ οἱασδήποτε ἐν σφαίρᾳ μιγίστου κύκλου ἓ πλείους, ἢ δύο μόνον ἴσους εἶναι τῶν ἐλαττόνων ἐν αὐτῇ κύκλων. 361

ι'. Ἐὰν παρὰ τὴν κίνδυν τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου καθέτος ἀχθῇ, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διελεύσεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κάθετος ἀχθῇ, διά τε τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διελεύσεται, καὶ τοῦ ἀντικειμένου πόλου τοῦ κύκλου. 361

ια'. Ἐὰν διὰ τῶν πόλων τινὸς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. 363

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς κύκλου κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἀχθῇ, ἐπὶ τοῦ κέντρου πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ ἀνάπαλιν. 363

ιβ'. Οἱ μίγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλους τέμνονται, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δίχα ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλους τεμνόμενοι κύκλοι, μίγιστοί εἰσιν. 364

ιγ'. Ἐὰν κύκλος μίγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλον ἐλάσσονα πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δίχα αὐτὸν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνει. 365

ιβ'. Ἐὰν κύκλος μίγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διέρχεται, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. 366

Πόρισμα, α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μίγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τῶν πόλων μιγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διέρχηται, κἀκεῖνος διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἑκάτερος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἕτερον. 366

Πόρισμα, β'. Ἔστι κύκλος ἐν σφαίρᾳ δι' ἑκατέρου τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διερχόμενος μίγιστός ἐστιν, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. 366

ιγ'. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου μιγίστου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εὐθεῖα ἀχθῇ, ἴσαι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐν μιγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ τῇ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ τοῦ ἐν μιγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ, μίγιστός ἐστιν ἐκεῖνος. 367

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ μίγιστοι κύκλοι τετραπλευρὸν ἀφίσανται τῶν ἰδίων πόλων, καὶ οἱ τετραπλευρὸν ἀφισάμενοι τῶν ἰδίων πόλων, μίγιστοί εἰσι. 368

ιδ'. Τῷ διαμέτρῳ παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν. 368

ιε'. Τῷ διαμέτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν. 369

ις'. Δύο, ὡς ἔτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν διὰ αὐτῶν διερχόμενον μίγιστον κύκλον εὑρεῖν. 370

ιζ'. Παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου τοὺς πόλους εὑρεῖν. 370

ιη'. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. 371

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δευτέρου τῆς Σφαιρικῆς.

Ὅρος. Α'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ παράλληλοί εἰσιν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτα. 373

β'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλων ἐφάπτεσθαι λέγονται, ὅτε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων ἐφάπτεται ἑκατέρου τῶν κύκλων κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ καὶ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται. 373

γ'. Κύκλος σφαῖρας κύκλον ἐγκλίνειν λέγεται, ὅταν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἀπὸ ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων ἐν ἑκατέρῳ τῶν κύκλων ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἑκατέρου τῶν κύκλων ὀξεῖα ᾖ, ἥτις καὶ κλίσις τῶν αὐτῶν κύκλων ἀπὸ ἀλλήλους λέγεται. 373

δ'. Κύκλος σφαῖρας κύκλον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἕτερος σφαῖρας ἑτέρᾳ, ὅταν αἱ τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 373

ε'. Κλίσεως δύο κύκλων σφαῖρας ἀλλήλους μίξον ἐστὶ τάξει μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν κύκλων διερχομένου, τὸ μεταξὺ τῶν κύκλων ἐναπολαμβανόμενον. 373

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Οἱ παράλληλοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους, καὶ οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐν σφαίρᾳ πόλους ἔχοντες κύκλοι, παράλληλοί εἰσιν. 373

β. Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τῇ αὐτῇ συμπίπτωσι σημείῳ, μεγίστου τινὸς κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου, οἱ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων. 374

γ'. Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται. 375

δ'. Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς καὶ κοινῆς αὐτῶν ἁφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, δίχα τεμεῖ καὶ διὰ τῶν πόλων τὸν ἕτερον. 376

ε'. Ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἐλασσόνων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλων, δυνατὸν ὁ αὐτὸς καὶ ἑτέρῳ ἅπτεσθαι κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ προτέρῳ. 377

Πόρισμα. α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἑκατέρωθεν δύο ἐλασσόνων κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τὰς τῆς ἁφῆς σημεῖα καὶ διάμετρον αὐτίζευκται. 378

Πόρισμα. β'. Ἔτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλασσόνων δύο ἅπτηται κύκλων, οἱ ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. 378

γ'. Ἐὰν

ε'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐλάσσονες ἴσοι τε καὶ παράλληλοι, ὁ τῶν ἐνὸς ἁπτόμενος μέγιστος κύκλος καὶ τὸν ἕτερον ἅπτεται. 378

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν δυνατόν ἐστιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλείονες, ἢ δύο ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοι εἶναι. 379

ς'. Ἐὰν κύκλος μέγιστος κύκλον τινὰ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλαγίως τέμνῃ, δίχα τέμνεται ὁ αὐτὸς δύο κύκλων ἅπτεσθαι ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ. 379

ζ'. Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων ἀλλήλοις τεμνομένων διὰ τοῦ πόλου ἑκατέρου κύκλος μέγιστος διέλθῃ, δίχα τὰ τεμνόμενα ἑκατέρου τοῦ αὐτοῦ κύκλων τέμνει. 380

η'. Ἐὰν κύκλοι μέγιστοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διὰ τοῦ πόλων παραλλήλων κύκλων διέλθωσι, τὰ μὲν τοῦ παραλλήλων τόξα τὰ ὑπὸ τοῦ μεγίστων περιλαμβανόμενα κύκλων, ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ τῶν μεγίστων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσα ἐστί. 381

θ'. Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰς εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τόξα ἴσα ἀλλήλοις ὑπερέχοντα, ἢ ἐλλείποντα τῷ ἡμίσει τῶν τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν εὐθεῖαι ἴσαι ἐπὶ τὰς τῶν κύκλων περιφερείας ἀχθῶσι, τὰ ὑπολαμβανόμενα τῶν κύκλων τόξα μεταξὺ τῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἀγομένων εὐθειῶν ἴσα ἔσονται. 382

ι'. Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰς εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, ἀπὸ δὲ τῶν τμημάτων τε καὶ κύκλων ἴσα τόξα ἀφαιρεθῇ, αἱ τὰς τομὰς τῶν τόξων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 385

Λῆμμα. Ἐὰν δύο ζῴγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανδήποτε γωνίᾳ ὁποιᾳδήποτε ἴσην, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν τῇ λοιπῇ ἴσην ἕξει, καὶ ὅλον τὸ ζῴγωνον ὅλῳ τῷ ζῳγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 386

ια'. Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι, πολλῶν ὄντων παραλλήλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τῶν μὲν ἐλάσσονος ἅπτωνται, τὰς δὲ λοιπὰς τέμνωσι, τὰ τῶν μεγίστων τόξα, τὰ ὑφ' ἑκάστῃ τῶν παραλλήλων περιεχόμενα, καὶ τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ὑπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, αὐταύτως δὲ καὶ τὰ τῶν παραλλήλων τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τῶν αὐθις ὅσα μὲν διὰ τῆς τομῆς τῶν μεγίστων διέρχεται κύκλων ἀπό τινος προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως ὁμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν ἀφῶν τόξῳ, τῷ ὑπὸ οἱ μέγιστοι παραλλήλῳ ἅπτονται, ὅσα δὲ διὰ τῶν καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται μερῶν διέρχεται μὴ ἀφαιρέσεως, ὅσα δὲ διὰ τῶν πρὸς ἃ ὁ πόλος τέμνοντα οἱ κύκλοι διαβαίνουσι μὴ προσθήκης ἐκείνῳ ὁμοιά εἰσιν. 387

ιγ'. Κύκλε ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ δοθέντος κύκλον μέγιστον καταγράψαι ἀπτόμενον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τὸ δοθὲν σημεῖον. 389

ιδ'. Δοθέντος σημείου ἐν σφαίρᾳ μιπτοῦ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλον μέγιστον διὰ τοῦ δοθέντος γράψαι σημείου ἁπτόμενον ἑκατέρου τῶν παραλλήλων. 389

ιε'. Δύο μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι, ἐὰν ὅμοια τόξα παραλλήλων κύκλων ἐναπολαμβάνωσιν, ἢ ἄμφω διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ ἑκάτερος ἅπτεται, ἢ γοῦν τοὺς παραλλήλους ἑκάτερος πέμνει. 391

ις'. Τῶν ἐν σφαίρᾳ παραλλήλως κειμένων κύκλων μιγίστῳ τινὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, οἱ ἐξ ἴσου τοῦ μιγίστου ἀφισάμενοι κύκλοι, καὶ ὧν μιπτοὶ καὶ τοῦ μιγίστου τὰ τόξα ἴσά ἐστιν, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν, ὁ δὲ ἔλαττον ἀφισάμενος, καὶ ὁ μιπτοὶ καὶ τοῦ μιγίστου ἔλαττον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, μείζων ἐστὶν, ἢ δὲ μιπτοὶ μεῖζον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, ἐλάττων ἐστίν. 392

ιζ'. Ἐὰν ὦσι ἴσοι κύκλοι παράλληλοι μιγίστῳ τινὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλῳ, τὰ τοῦ μιγίστου κύκλου τόξα τὰ μιπτοὶ αὐτῷ τε καὶ τοῖς, οἷς ὁ παραλλήλως ἔχουσι, μιγίστου κύκλου ἐναπολαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 394

ιη'. Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ἑλάσσονός τε καὶ παραλλήλου πέμνῃ κύκλους μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῷ διερχόμενος, ἅ πέμνει αὐτοὺς δίχα, καὶ τὰ τῷ παραλλήλων μείζονα τμήματα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορῶσι πόλον. 394

ιθ'. Ἐὰν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μιγίστου πέμνωνται κύκλου, μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῷ διερχομένου, ὁ ἐγγύτερος τῷ πόλῳ μᾶλλον αὐίσως πέμνεται. 395

κ'. Ἐπὶ τῶν ἴσων σφαιρῶν κύκλος κύκλῳ μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν, ἢ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσαται τοῦ πόλου τοῦ, ᾧ ἐγκλίνεται, κύκλου, ὧν δὲ οἱ πόλοι ἐξ ἴσου ἀφίσανται ἴσας καὶ τὰς ἐγκλίσεις ἔχουσιν. 396

Πόρισμα. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν πόλων τῶν ἐγκλινομένου, καὶ τοῦ, ᾧ ἐγκέκλινται ὁ αὐτὸς, μέγιστος διέλθῃ κύκλος, τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον τοῦ μιγίστου κύκλου ὑπό τε τοῦ ἐγκλινομένου, καὶ ᾧ ἐγκέκλινται, μιπτὸν ἐστὶ τοῦ τοῦ κύκλου κλίσεως. 398

κα'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν πόλος κύκλου τινὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαί τινες ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μιγίστα μέν ἐστιν ἡ ὑπὸ τὸν πόλον τοῦ κύκλου, ὡς δὲ αὐτῇ ἀγομένη, ἐλαχίστη δὲ ἡ καὶ διάμετρον ταύτην αὐτικειμένη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς ὑπὸ τὸν πόλον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ, δύο δὲ μόναι ἴσαι προσπιπτοῦνται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἑφ' ἑκάτερα τῆς τε μιγίστης καὶ ἐλαχίστης. 398

κβ'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τόξα μιγίστων κύκλων ἀχθῶσι, μίγιστον μέν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπὸν,

τῶν

τῶν δ' ἄλλων φέρε τὸ ἔγγιον τῆ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἀπώπερον μεῖζόν ἐστι, δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῶν μιγίστου ἐλαχίστου. 399

κγ'. Ἐὰν κύκλος μίγιστος ἅπτηται μὲν τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παραλλήλων, τέμνῃ δὲ τὸν μείζονα, ὥστε τὸν πόλον αὐτοῦ μιπτὸν εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἅπτωνται δὲ καὶ τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων κύκλοι μίγιστοι ὁσοιδηποτοῦν, οἱ πόλοι τῶν ἁπτομένων τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ τοῦ αὐτοῦ εἰσι κύκλου, παραλλήλου ὄντος καὶ αὐτοῦ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλοις, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρου, καὶ πρὸς τὸν ἁπτόμενον τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, ὁ μὲν τοῦ μείζονος ἁπτόμενος, καθ' ὃ τὸ ἔλαττον αὐτοῦ τμῆμα δίχα τέμνεται, μιγίστου ἔχει καὶ τοῦ κλίσιν, ὁ δὲ, καθ' ὃ τὸ μεῖζον αὐτοῦ τμῆμα δίχα τέμνεται ἁπτόμενος, ἐλαχίστου ἔχει τοῦ κλίσιν πρὸς τὸν αὐτὸν, τῶν δ' ἄλλων ὁ ἐγγύτερον τοῦ τοῦ μιγίστου ἔχοντος κλίσιν τοῦ ἀπώπερον μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν. 400

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἐξ ἴσου ἀφεστάμενοι τοῦ τοῦ μιγίστου ἔχοντος κλίσιν, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι. 402

κδ'. Ἐὰν κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μιγίστου τμηομένου κύκλου κύκλοι μίγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἁπτομένων τόξα τὰ μιπτὰ τῶν ἀφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος ὑμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μίγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ. 402

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Τρίτου τῆς τοῦ Θεοδοσίου Σφαιρικῶν.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἢ ἐγκλινόμενον ᾖ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑτέρου τινὸς κύκλου, τέμνον τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ τμήματος περιφερείας, ὥστε τὸ τμῆμα εἰς δύο κατ' αὐτὸ ἄνισα τέμνεσθαι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τοῦ τοῦ κύκλου μείζονα περιφέρειαν εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τὸ ἔλαττον τοῦ τμήματος ὑποτείνουσα τόξον, ἀφ' ἧς αὔξονται μὲν ἀεὶ τῆς διαμιπτῆς τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κάθετος πίπτει, ἐλαττοῦνται δὲ ἕως ἐπὶ πρὸς τὸν αὐτοῦ ἀποκατασταθῶσι. 404

β'. Ἐὰν δύο μίγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἴσα ἐν ἑκατέρῳ τόξα ληφθῶσιν, αἱ τὰ τόξα αὐτῶν ὑπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται. 405

Λῆμμα, Α'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ τυχόντος τόξου δίχα τμηθείσης δύο ἑκατέρωθεν ληφθῶσι σημεῖα, ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφεστάμενα, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου

μείων κάθητι ἐπ' αὐτῆς ἀφαρθῶσι τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ τῆ καθέτων τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. 406

Λῆμμα, β'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τινὸς τόξου δίχα τμηθείσης κάθητος ἀπὸ τῆς τομῆς ἀφαρθῆ, λαφθῆ δὲ ἑκατέρωθεν δύο σημεῖα ἐξ ἴσου τῆ μέσου ἀφεστάμενα, ἢ ἀπ' αὐτῆ παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, καὶ τῶν ἡ μὲν συμπίπτη τῆ καθέτῳ ἐκβαλλομένη, ἡ δὲ μὴ συμπίπτη, ἡ συμπίπτουσα ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον. 407

γ'. Ἐὰν ὦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο κύκλοι μίγιστοι, καὶ ἐπὶ τῶν ἑνὸς δύο σημεῖα λαφθῶσιν, ἐξ ἴσου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀφεστάμενα τομῆς, διὰ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέλθωσι πέμποντα τὸν ἕτερον τῶν μιγίστων κύκλων, καὶ τῶν τὰ μὲν ἐκβαλλόμενον συμπίπτη τῆ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ κοινῆς τομῆς τῶν μιγίστων κύκλων ἐκβαλλομένη εὐθεῖα, τὸ δὲ μὴ, τὸ συμπίπτον ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον ἀπὸ τοῦ πεμπομένου μιγίστου κύκλου. 407

δ'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῆ αὐτῆ σφαίρᾳ δύο κύκλοι μίγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ κοινοῦ περιφερείας τόξα ἴσα λαφθῶσιν, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ ἑτέρου σημείου, ὃ μή ἐστι πόλος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ πεμνομένου, καὶ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σημείου κύκλοι παράλληλοι διὰ τῶν περάτων τῶν λαφθέντων τόξων ἐπὶ τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὑπὸ τόξα οὐκ ἴσα ἀφαιρήσουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐφ' ἃς τὸ σημεῖον ἐλήπται, καὶ ὁ μείζονι γραφόμενος διαστήματι, μεῖζον τὸ τόξον ἀφαιρήσει. 409

ε. Ἐὰν δύο κύκλοι μίγιστοι πλαγίως ἀλλήλοις τέμνωνται, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ κοινοῦ περιφερείας τόξα ἴσα λαφθῶσι, διὰ δὲ τοῦ πόλου τοῦ ἑτέρου κύκλου καὶ τῶν περάτων τῶν ἐλλειμμένων τόξων κύκλοι μίγιστοι γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὑπὸ ἄνισα τόξα ἀφαιρήσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας, ἧ πόλος ἐστὶ τὸ ἐλλειμμένον σημεῖον, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τεμνόντος ἀγομένων μιγίστων κύκλων μεῖζόν ἐστιν. 410

ς'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῆ αὐτῆ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μίγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μίγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ πέμπται σημεῖον, λαφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἀπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὧν ἐν τῇ αὐτῇ ἔναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν λαφθέντων τόξων παράλληλοι κύκλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς ἀχθῶσιν, οἱ κύκλοι ὑπὸ ἄνισα τόξα ἀφαιρήσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἀπτομένου τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, καὶ τὸ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων ἔλαττον ἔσαι. 411

ζ. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῆ αὐτῆ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μίγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μίγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ πέμπται σημεῖον. λαφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς

περι-

περιφερείας τῆ ἀπτομένῃ τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῇ αὐτῇ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων κύκλοι μέγιστοι ἀχθῶσιν ἁπτόμενοι τῆ ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, οἱ κύκλοι ὅποι ἂν ἐπιστα τόξα ἐναπολήψονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν διερχομένων κύκλων διὰ τῶν πράτων τῆ ἐγγύτερον τῆ πόλου ὄντος τόξον μεῖζον ἔσται. 413

Λῆμμα. Δύο ἀνίσων μιγιθῶν δοθέντων, μίσον τύπον εὑρεῖν, σύμμιξον ἑτέρῳ τινὶ, μὴ ἴσῳ ὄντι τῇ τῆ μείζονος τῶν δοθέντων πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾷ. 414

ιδ'. Ἐὰν ἐπὶ μιγίστω κύκλω περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τύπον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τῆ λοξῆ ἴσαι περιφέρειαι ἀπολημφθῶσι, μὴ ἴσαι ἐξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων κύκλω. διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων, καὶ τῆ πόλω μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσας ἀπολήψονται περιφερείας τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἐγγίον τῆ ἐξ ἀρχῆς μιγίστω κύκλου τῆς πορρώτερον. 415

ιε'. Ἐὰν ἐπὶ μιγίστω κύκλω περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τύπον τέμνωσι δύο κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τῆ λοξῆ ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν σημείων καὶ τῆ πόλω τῶν παραλλήλων μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἔσται ὡς ἡ τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῆ ἐξ ἀρχῆς μιγίστω κύκλω, καὶ τῆ ἐξῆς διὰ τῆ πόλω, πρὸς τὴν τῆ λοξῆ κύκλω περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων, οὕτως ἡ ἐξῆς τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων, ἡ μεταξὺ τῶν διὰ τῆ πόλω καὶ τῶν ληφθέντων σημείων, μέγιστων κύκλων, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς τῆ λοξῆ κύκλω περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῶν ληφθέντων σημείων. 417

Λῆμμα. Ἐὰν ἀπὸ ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίω τινὸς τριγώνω εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον αὐτῆ πλευρὰν, ὅλην αὖτη πλευρὰ, ἐφ' ἣν πίπτει ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τῆ ὀρθῆ γωνίαν μέρος, ἥπερ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν. 419

ιζ'. Ἐὰν ἐπὶ μιγίστω κύκλω ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τύπον τέμνωσι δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενος, τέμνῃ τὸν λοξὸν, μεταξὺ τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων, καὶ ἡ ὁ λοξὸς ἅπτηται, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆ κύκλω διάμετρον, ἣ ἁφάπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆ μιγίστω τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τούτου ἐξ ἀρχῆς μιγίστω κύκλω, καὶ τῆ ἐξῆς

διὰ

διὰ τῶν πόλων, πρὸς τὴν τῆ λοξῆ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐ. τῶν κύκλων. 420

ιδ. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μίγιστοι κύκλοι τῆ αὐτῆ τῶν παραλλήλων ἅπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντις περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μίγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἅπτεται, ἢ ὧν οἱ ἐξ ἀρχῆς ἅπτοντο, καὶ πάντας τοὺς αὐτῆ ἁπτομένους μεταξὺ τῆ μιγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ ἃ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἅπτοντο, ἢ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τῆ κύκλου διάμετρον, ἃ ἅπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἢ τῆ μιγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια, ἢ μεταξὺ τῶν τῆ αὐτῆ κύκλου ἁπτομένων, πρὸς τὴν τῆ λοξῆ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μετα. ξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων. 422

ιβ. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μιγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μίγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γρα. φῶσι μίγιστοι κύκλοι, ἃ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενοι, ἃ τῆ αὐτῆ τῶν παραλλήλων ἁπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τῆ μιγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν. 423

ιγ. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μίγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἅπτηται, ἄλλος δέ τις μίγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἅπτεται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἅπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλή. λων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται δηλ., αἱ ἔγ. γιον ἀποστήσουν τῶν πόλων τῆς παρ' ἀμφω. 424

ΕΚΘΕΣΙΣ
ΑΚΡΙΒΕΣΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Προοίμιον.

ΩΣΠΕΡ τῷ βαλομένῳ εἰσιλθεῖν εἰς πολυανθῆ τινα λειμῶνα, καὶ λαβυρινθώδη ταῖς φρασιαῖς, καὶ τὰ ἐν αὐτῷ ποικίλα τῷ ἀνθῶν εἶδη αὐτοφεὶ θεωμένῳ θιάσασθαι, καὶ ἑκάστου τῶν τὸ κάλλος, τὸ μέγεθος, τὴν χροιὰν, τὴν ποικιλίαν, τὴν ὀσμὴν, καὶ τ' ἄλλα, ὅσα τοῖς ἄνθεσι συμφύεται δὴ καὶ ἐπιφύεται, διαγνῶναι ζητοῦντι, φρονίκως φρῶτον εἰδέναι τὴν εἰς τὸν αὐτὸν φέρουσαν λειμῶνα, καὶ τὴν ἐν τῷ περιβόλῳ τούτῳ θύραν μαθεῖν, καὶ ἀφειδῶς ταύτῃ κόψασθαι. τῷ δὲ ἀδοιχθείσης, εἰσιλθόντι ὁδηγῷ τῷ κηπορῷ χρήσασθαι, καὶ ὁδὸν μικρὸν εὐθὸν ἐνδιαβῆναι. Οὕτω τοι καὶ τῷ ποθοῦντι τῆς μαθηματικῆς ἕδη ἐπιστήμης μέχρι μυχῶν γενέσθαι, καὶ τὰ ἄδυτα ταύτης ὀδοῦσαι, καὶ τὰ ὄργια μυηθῆναι, καὶ σωφρόντι φαίαι, ὡς εἰκὸς τῷ μαθηματικῶν λόγων ἐγκρατεῖ γενέσθαι, ἀμήχανον αὐτῷ μὴ φρύτιρον ἐν τῷ ταύτης προπυλαίῳ ἀκριβῶς ἀσκηθέντι, καὶ τῷ εὐθήμονι τῷ μαθηματικῶν ἀρχῶν τε καὶ ἀποδείξεων ποδηγητομένῳ, καὶ βαθμηδόν πως ἀφ' ἑνὸς φρὸς ἕτερον τῷ ἐκείνης εἰδῶν μεταβαίνοντι καὶ σκοπὸν βάλλειν. Πολυανθὴς μὲν γὰρ ἡ Μαθηματι-

καὶ Ἐπιστήμη πέφυκεν ἐκ ὕπνου, ἢ πολυειδὴς, ἅτε δὴ περὶ πολλῶν καὶ παποδαπῶν θεωρημάτων ἡ προβλημάτων, καὶ μὲν καὶ μηχανῶν ἐφαρμοδίουσα, καὶ ἐπισημονικάς γε καὶ ἐξηκριβωμένας ἀπὸ γνωριμωτέρων τε καὶ πιστοτέρων τὰς ἀποδείξεις ποιοῦσα· διὸ καὶ ἥθαλὲς ἀνῆσαι, ἐκ ὅλως πάντη ἀνέκειον. Λαβυρινθώδης δὴ τῇ πολυπλέκτῳ σειρᾷ τῶν εἰδῶν, καὶ τῷ πάντα πόρρω ἐγγὺς, φοβόδης τινὰς, ἢ μᾶλλον εἰσόδους εἶναι· καὶ μὴ δυνάσθαι τὸν πάντας ἑρκείῳ ἐπιλῶσε γε τῷ ποθουμένου τυχεῖν, ἢ ὅλως ἀφεστάτως ἐπὶ τὰ ὀφθαλμῶν χωρῆσαι, εἰμή γε ὀφθαλμὸν ἐν ἄλλοις ὀφθαλμοῖς ἔνθη.

Ἀμέλει τοι τὸν δύλοις ποσὶν ἀφεστώτως τε, καὶ ἀπλανέσι τῷ μαθηματικῷ ἐπιστήμῳ περιπολεῖσαι ἐθέλοντα, καὶ ἰθυπόροις πτέρυξι καὶ ἀκμήτοις εἰς τὸν κολοφῶνα πάντως ἀναδραμεῖν, χαλεπὸν, δίκῃ θεσπέσου τῇ Αἰακίδῃ, διὰ τὰς τῶν τοῦ γενεαιότητος τῇ φρένῃ καὶ περικαλλὲς πάντως θυγατρὶ γνωσθῆναι, καὶ δὴ αὐτῶς ὡς Δαιδαλέου τινὸς ὑφηγήσεως δυνήσεται εἰσιέναι, ἢ μόνον εἰς τὰ ἐκδέπατα τῆς Μαθηματικῆς, καὶ τοῖς πολλοῖς ἥδη ἀθέατα, ἀλλά γε τῷ ὄντι καὶ τὰς καρυφὰς τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν ἐφίπταθαι, ἢ χαλεπὸν αὐτῷ ἔσεται. Ὃ δὴ μέγιστον, ὅτι καὶ τοῖς ὕπνοι δὴ ἀθύνειαν τοῦς, ἢ ἀποτυχίαν ὀδυνᾷ, ἢ ἄλλῳ τινὰ αἰτίαν εἰσιλθεῖν μὴ δυνηθεῖσι, τῆς ὁδῦ οἱόσπερ ἡγήσασθαι.

Τὸ χρήσιμον τῶν τῶ Εὐκλείδου στοιχείων. Πρωτόλαιον ἥδη τῆς Μαθηματικῆς ἁπάσης ἐπιστήμης εὕρετο τὸ κυριώτατον καὶ χαριδέστατον πέφυκεν· ὅπερ Εὐκλείδης, ὁ Δαιδάλεα δὴ μηχανώτερος, τὰς τῶν πάλαι στοιχειώδεις ἐριθείσας ὁροθεσίας, καὶ ἀκριβῶς ἀναπτυχθείσας, αὖθ' ὕλης συλλήβδας, αὖ ὀλίγας δὲ καὶ ἐξ αὐτῶ ὁροθεὶς, τὰς μαθηματικὰς ἀρχὰς ὁροπέξας, ὕπως ἐξευρέσατο, ὕπω κατερρυθμίσατο· ὥστε μιᾶς μόνης ἀφαιρεμένης, ἢ γὰρ παρεωραμένης, ἅπαν τὸ ὕφασμα ἀπλοῦς εἶναί τε καὶ γινώσκεσθαι. διὸ καὶ στοιχεῖα Εὐκλείδου παρονομάζονται, οἱονεί τινες ἀρχαὶ καὶ βάσεις τῆς Μαθηματικῆς χαδὸν ἁπάσης ἐπιστήμης καὶ ὁροπύλαιον. Ταῦτα καὶ θυγατὴρ φρένα, καὶ περικαλλὲς τῆς αὐτῆς καθέζεται. Ταῦτα Δαιδάλεον μηχανὴ εἰπὼν ἐκ ἂν ἁμάρτοις. Εἰδέναι καὶ κλεὲν ἀριστὸν μαθηματικῆς ἁπάσης ταῦτα ὀνομάσαι, φόδης καὶ τῶν τοῖς λοιποῖς αὐτῷ ὀνόμασι. Κἂν ἕπρόν τι τῶν ἁρμοδιώτερον αὐτῆς εὕρῃς ὄνομα, μὴ φθονήσειας εἰπεῖν. Καὶ γὰρ μὴ μόνον ταῖς περὶ τὰ εὐθύγραμμα τῷ χημάτων ἀκολουθείαις ἀραγματείαις, ἀλλὰ καὶ ταῖς περὶ τὰς ἀριθμὰς, καὶ τὰ περὶ τῷ σωμάτων στοιχειώδη καθέζεται.

Διαίρεσις τῶν στοιχείων. Τοσοῦτον μὲν τὸ χρήσιμον τῷ τῶ Εὐκλείδου στοιχείων. Διήρηται δὲ πάντα εἰς πεντεκαίδεκα τὰ πάντα βιβλία. ὧν ἓξ μὲν περὶ τῷ ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένων χημάτων διαλαμβάνει. Τέτταρα δὲ τὸ πέμπτον καὶ μόνον τὰς τῷ μιγνυμένων φορὰς ἄλληλα χόσεις καὶ λόγους ἀναπτύσσει. Τὰ δὲ λοι-

πὰ

πὰ πεῤὶ τῦ ἐπιπλέδου, πεῤαπλέδων τε, καὶ ἄλλων τινῶν σημάτων, καὶ ὅτι πεῤὶ κύκλον ἐφιρμονέδει. Μετὰ δὲ τὰ ἐξ αὐτῦ, ἕδεα τῦ λοιπῶν βιβλία τὰς τῦ ἀρεθμῶν φύσεις ἀποδησαυρίζει. Τὸ δὲ ἓν δίκαιον πεῤὶ τῦ φύσιων τῦ πεμιεχυσῶν τὰ σήματα πλέδρων, καὶ μὴ, καὶ τῦ ἐκ τύπων χωρίων, καὶ ἄλλων τινῶν πολυφραγμονεῖ. διὸ καὶ πεμιεργωδέσερον μᾶλλον, καὶ δύσληπτον νοῦς δίδωσιν. Τὰ λοιπὰ δὲ πέντε Στοιχεῖα σεριῶν σωμάτων ἐπιγράφεται, ἅτε δὴ τὰ αὐτοῖς τοῖς σεριοῖς ἀνεχόμενα σώμασιν.

Σύγκειται δὲ ταῦτα ἐκ μερῶν, ἐξ Ὅρων, Ἀξιωμάτων, Λήμμάτων τε καὶ Προτάσιων. Καὶ τύτων δὲ τῦ μερῶν τὰ μὲν εἶσιν ἀρχαὶ ἀναπόδεικτοι, τὰ δὲ ἀποδείξεως δίδωσα. καὶ ἀναπόδεικτα μὲν δή εἶσιν οἱ Ὅροι, τὰ Λήμματα, καὶ Ἀξιώματα. ἀποδείξεως δὲ αἱ Προτάσεις δίδονται. Ἀλλ' ἵνα ὁ λόγος καθ' ὁδὸν βαδίζῃ, ἐκ τῦ ἀναποδείκτων ὡρῶν τὴν ἐρμήνειαν ἀρξώμεθα. Ὅσα γὰρ τῦ τοιύτων τὸ τοσὸν οἰκοθεν ἔχουσιν, ὡς γνώρισμα μὴ μόνον τῷ διδάσκοντι, ἀλλ' ὑδὲ ἧττον καὶ τῷ μανθάνοντι, καὶ εἰς ἀρχὴν τάξιν λαμβάνονται, ταῦτά ἐστι τὰ Ἀξιώματα, οἷον τὸ, τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. ὅσα δ' ἂν ἔχει ἐξ αὐτῦ τὸ τοσὸν, ὡς μὴ καθ' αὑτὰ γνώρισμα τῷ μανθάνοντι, συγχωρεῖται δὲ τῷ λαμβάνοντι, Ὑποθέσεις τὰ τοιαῦτα καλεῖται. οἷον Κύκλος ἐστὶ χῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς τοιεχόμενον, ἣ καλεῖται τοιφέρεια. καὶ τὰ ὅμοια. Καὶ ὑποί εἰσιν οἱ ὅροι. Λ' δὲ ὅτι γνωτὰ καθ' ἑαυτὰ ὑπάρχουσιν, οὔτε μὴν συγχωρεῖται παρὰ τῷ μανθάνοντος, λαμβάνεται δ' ὅμως εἰς κατασκεδήν τινα τροσήκοντα, καλεῖται Λήμματα. Καὶ ταῦτα μὲν ὁ Πρόκλος. Διωδέμεθα δὲ καὶ ἡμεῖς ἐκ τῦ εἰρημένων ὑτοσὶ ταῦτα ὀρίσασθαι, ἀπὸ τῦ ὅρου ἀρχόμενοι.

Ὅρος μὲν δή ἐστι γνῶσις ἀναπόδεικτος καθ' ὑπόθεσιν, μὴ καθ' αὑτὴν γνώρισμος, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη.

Λῆτημα δὲ, γνῶσις ἀναπόδεικτος, οὔτε καθ' αὑτὴν γνώρισμος, οὔτε μὴν παρὰ τῷ μανθάνοντος δεχομένη, λαμβανομένη δὲ εἰς κατασκδήν τινος καὶ ἀρχήν.

Ἀξίωμα δὲ, γνῶσις ἀναπόδεικτος, γνώρισμος, καὶ καθ' ἑαυτὴν τὸ τοσὸν ἔχουσα, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη. καὶ ταῦτα μὲν ἱκανὰ τεῤὶ τῦ Ἀναποδείκτων.

Τῶν δὲ Προτάσεων τῦ ἀποδείξεως δεομένων, ὅσαι μὲν ἂν τὰς γενέσεις τῦ σημάτων, τὰς τομὰς, τὰς ἀφαιρέσεις, ἢ τροσθέσεις, καὶ ὅλως τὰ τύτων τοιήματα τεμέχουσι, Προβλήματα λέγονται· ὡς ταῖς τοιητικαῖς ἀναλογοῦσαι ἔξεσιν. οἷόν ἐστι τὸ τρῶτον, καὶ δεύτερον τρόβλημα τῦ α'. βιβλίυ· καὶ τὰ παραπλήσια.

Ὅσαι δὲ τὰ ἐν τοῖς σήμασι συμβαίνοντα ἐπιτημονικῶς ἀποδεικνύυσι,

Τίνα ἐστὶ τὰ μέρη τῶν αὐτῶν.

Τί τρόβλημα καὶ τί θεώρημα.

θεωρήματα καλεῖται, ὡς οἰκειότερα ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις. οἷόν ἐστι τὸ πέμπτον, πέμπτον δ' ἔστιν τῶν ἀρχῶν βιβλίου, καὶ τὸ ὅμοια. ὥστε ἅπασι ταῦτα δείσασθαι, ἃ ὑπογράψαι δυνάμεθα.

Πρόβλημά ἐστι γνῶσις, δι' ἀποδείξεως τὰ τῆς χημάτων παθήματα ἐρευνῶσα, καὶ τὸ ποιητέον ποιοῦσα.

Θεώρημα δ' γνῶσις, δι' ἀποδείξεως τὰ ἐν τοῖς χήμασι συμβαίνοντα ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύουσα, καὶ πρὸς ἄλλα πάντων λόγους ζητοῦσα.

Τοιαύτα μὲν δὴ ἡμῖν ἡ τῆς φησίσεως ἁπλουστέρα καὶ συντομωτέρα διαίρεσις.

Τινὲς δὲ τῆς πάλαι θεωρήματα πάντα καλεῖν ἠξίωσαν, ὡς περὶ τῆς εἴδεσιν καὶ ἄλλων τὰς θεωρίας ποιήσεσα. τὰς γὰρ τῶν χημάτων γενέσεις καὶ τ' ἄλλα, ἃ πειρητικῶς, ἀλλὰ γνωστικῶς καθορῶμεν, καὶ ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύομεν.

Ἔτερει δὲ τὰ πάντα προβλήματα τῇ αὐτῇ προσηγορίᾳ ἐκάλεσε. Τῶν δὲ προβλῶν διττὼν ὄντων ἔλεγον. ἐπὶ μὲν δυλοτέτι τὸ ζητούμενον ποιήσασθαι σπεύδειν, ὅπὶ δὲ ἀσυμφώνου λαβόντας ζητεῖν εἰδέναι, εἰ τί ἐστιν, ἢ ποιεῖτί ἐστιν, ἢ πόσον ἐστὶν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο τὰς σχέσεις. ἀλλ' εἶναι ἑκατέρας τὰς μερίδος εἰ προῖσάμενοι ὀρθῶς λέγειν δοκοῦσιν, ἡμεῖς μετὰ τι διὰ τὸ ἀσύγχυτον καὶ σαφέστερον τῶν χαίρειν ἐῶντες, τῶν φησίσεων ἐπὶ ἀσπασώμεθα διαίρεσιν.

Τίνα δὲ πέντε τὰ μέρη τῶν προβλημάτων, καὶ θεωρημάτων.

Τέσσαρ δὲ ἔστι διαιρεθέντων τὰ δεικθέντων. ἔστιν ὅτι ἕκαστον τῶν προβλημάτων καὶ θεωρημάτων πάντα ταυτὶ ἐν ἑαυτῷ χρὼν ἔχειν, Πρόπασιν, Ἔνθεσιν, Διορισμὸν, Κατασκεύὴν, Ἀπόδειξιν, καὶ Συμπέρασμα. ὧν ἡ μὲν φόπασις τί τὸ ζητούμενον τῶ διδομένῳ λέγει, ἢ τί τὸ ἐκ τῆς πιᾶς δὶ, ἢ πιᾶς δι ὑποθέσεως συμπερανθησόμενον.

Ἡ Ἔνθεσις δὲ αὐτὸ καθ' αὑτὸ τὸ διδόμενον, καὶ ὑποτιθέμενον τῇ ζητήσει φράζει πῖζει, καὶ τί τὸ συμπερανθησόμενον φραγγίλλει.

Ὁ δὲ Διορισμὸς τὸ ζητούμενον, ἢ συμπερανθησόμενον χωρὶς δείζει, καὶ εἰσεὶ ἁπάντων γενέσθαι.

Ἡ δὲ Κατασκεὺὴ τὰ εἰς ἀπόδειξιν τὰ διδομένα συμβάλλοντα προσάγει πειᾶν, καὶ εἰ τις φρεπαρασκεὺὴ ἀποδείξεώς ἐστι.

Ἡ Ἀπόδειξις δὲ ἐπιστημονικῶς, καὶ ἐξεταζομένως ἀπὸ τῆς ὁμολογουμένων καὶ γνωρίμων σωάγει τὸ ζητούμενον, ἢ τὸ προκείμενον.

Τὸ δὲ Συμπέρασμα ὡς ἔχαστον, ἅπερ ἐπὶ τοῖς φησίσιν ἐπανερίφων, ἢ τὸ διεγνθὸ ἀναμιμνῆσκον, βιβαιοῖ τὸ συναχθέν.

Καὶ ταῦτα μὲν ἁπλῶς ἑκάστης φησίσεως μέρη. Ἀναγκαιότερα δὲ, Πρόπασις, Ἀπόδειξις, καὶ Συμπέρασμα. Διὸ συντομίας χάριν τῇ μὲν ἡ Ἔνθεσις τῇ διεγμῷ εἶται, τῇ δὲ ἡ Κατασκεὺὴ, ὡς μὴ συμβάλλουσα παρρᾶ.

ρορᾶται. διὰ δὲ τὸ ἀδιαπτῶτον, φέρε δὴ καὶ ἐπὶ παραδείγματος τὸ ῥηθὲν ἀναπτύξωμεν.

Τοῦ μὲν οὖν ἀ. προβλήματος τῶ ἐν τῇ ἀ. τῶ Εὐκλειδ. Βιβλίῳ Πρότασις λέγεται, ἡ φρὼν ἐν αὐτῇ περίοδος, ὑποσὶ λέγουσα, ἐπὶ τῆς δοθείσης ἀδιάλου πεπερασμένης ξίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. Τί ἡ Πρότασις.

Ἔκθεσις δὲ, τὸ λέγον, ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ἀδιάλος, ἡ αβ. Διορισμὸς δὲ, τὸ, δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ, ἀδιάλου ξίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ β. μέχρι τοῦ, ἐπιζευχθῶσαι ἀδιάλοι αἱ γα, γβ, Κατασκευὴ λέγεται. τὸ δὲ ἀπὸ τούτου, μέχρι τοῦ, αἱ ξεῖς ἄρα γα, αβ, βγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἀπόδειξις. ἢ τὸ λοιπὸν, Συμπέρασμα. Ἐπεὶ δὲ τούτων ὑμνήθημεν, ὑπ' ἄκρον σκοπεῖν πῶσιν τε καὶ περί τινων ἄλλων τοῖς σωματικοῖς βραχέα διιλθεῖν. ἢ φρῶτον μὲν, τί Λῆμμα, τί Πῶσις, τί Πόρισμα, τί Ἔνστασις, τί Ἐπαγωγὴ, εἴπωμεν. τέλος δὲ τῇ τί ἡ Ἐπαγωγὴ, τῆς εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγῆς διεξιόντι, ἢ ὕστερας τῷ λόγῳ δώσομεν.

Τί λῆμμα.

Λῆμμα μὲν οὖν ἐστι πρότασις προαποδεδειγμένη, ἡ μὴ, ἀποδείξεως δὲ τε καὶ λόγου δεομένη, εἰς κατασκευὴν, ἡ ἀπόδειξιν ἄλλης τινὸς προτάσεως λαμβανομένη. διεσώσατο δὲ τὸ Λ'ξιώματος, ὅτι ἐκεῖνο μὲν ἀναπόδεικτον, Λῆμμα δὲ, ἀποδείξεως καὶ λόγου δεόμενον.

Τί Πῶσις.

Πῶσις δ' ἐστὶ διάφορος κατασκευῆς τρόπος, καὶ ἐξαλλαγὴ θέσεως, ἡ τῆς τῶν σημείων, ἡ τῶν γραμμῶν, ἡ τῶν ἐπιπέδων, ἡ τῶν στερεῶν, διὸ καὶ πῶσις καλεῖται, οἷα μετάθεσις τῆς κατασκευῆς.

Τί Πόρισμα.

Πόρισμα δέ ἐστι θεώρημα ἐκ προβλήματός τινος, ἡ θεωρήματος ἀναφαινόμενον, ἡ καὶ συναγόμενον, καλεῖται δὲ πόρισμα, ὡς τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάριεργον.

Τί Ἔνστασις.

Ἔνστασις δὲ διακοπή ἐστι τοῦ λόγου, καὶ ἐπὶ τὰναντίον μετάβασις, ἡ πρὸς τινὰ κατασκευὴν, ἡ πρὸς τινὰ ἀπόδειξιν ἀπωτάτω. δεῖ δὲ τὸν προθέμενον, ἀνελεῖν μὲν τὴν ἔνστασιν, δεῖξαι δὲ τὸν χώμενον αὐτῇ ψευδόμενον.

Τί Ἐπαγωγή.

Ἐπαγωγὴ δέ ἐστι μετάβασις ἀπ' ἄλλου προβλήματος, ἡ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο ὁμοίως πρόβλημα, ἡ θεώρημα. οὗ γνωσθέντος, ἡ προεισθέντος, καὶ τὸ προκείμενόν ἐστι καταφανές.

Τί ἐστὶ εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγή.

Ἡ δὲ εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγὴ λῆψις ἐστὶ τοῦ μαχομένου τῇ ζητουμένῳ. καταντῶσα δὲ εἰς ἄτοπον ὁμολογούμενον, διαβεβαιοῖ τὸ ζητούμενον.

Ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ τῶ παρόντος σωματικῶς ἤδη ἀποσεσημείωται τῇ βουλομένων χάριν τῆς μαθηματικῆς ἡδύτητος γεύσασθαι. ὅπως οὖν καὶ πάσῃ κτήσαμένοι, ἐπὶ τὰ ἑξῆς ἀφορμὴν χωρήσωσι, καὶ τοῦ ποθουμένου εὐτόχως τύχωσι. Διήρηται δὲ πάντα τὰ Εὐκλείδου Στοιχεῖα, καὶ αἱ

Προ-

Προτάσεις. ἢ τὸν ὁρισμὸν αἱ ἀρχαὶ, αἱ ὁροτάσεις, ἢ τὰ ἑπόμενα ταύταις ἐδίξατο. ἵνα μήτις ἀκύων τὰς διαφόρους τῆ μιρῶν τῆ ὁροτάσιων ὀφσηγορίας, ἃ τῆ ταύταις ἀπορημενέων ξυνίζηται. ἢ περὶ τύπων ἐρωτήσεως ἐρυθείᾳ, μὴ εἰδὼς ἀκριβῶς τί τοῖς ἐρωτῶσι δίον ἀποκριθῆναι. ὥρα δὴ τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας κατὰ Πρόκλον ἄρξασθαι.

ΣΥΝ.

ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ.

Ὅρος Πρῶτος. Σημεῖόν ἐστιν, ὃ μέρος οὐθέν.

Τὸ μὲν Σημεῖον παρὰ τοῖς Γεωμέτραις ποσότητος ὅλως ἀνιπίδεκτον ὑποτίθεται καὶ ἀμέτοχον· διὸ καὶ ἀμερὲς παρ' Εὐκλείδῃ ὑπογραφόμενον εἶναι λέγεται, καὶ τὴν φράσιν τῆς ὅρου ἔλαχε τάξιν. τίνος δὲ χάριν τοιοῦτον λαμβάνεται; ἢ ὅτι ἐστὶν ἀρχὴ φράσεως. τὴν δὲ τοιαύτην ἀρχὴν ἁπλουστάτην δεῖ εἶναι, καὶ παντὸς πάθους ἐκτός· ὡς πάντων μὲν ἐξ αὐτῆς διαλυομένων, ἐξ ἧς καὶ συνίστανται· αὐτὴ δὲ εἰς ἄλλην ἕτερον. Ἐπεὶ δὲ ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη, μᾶλλον δὲ ἡ Γεωμετρία ἐπιστητὸν ἔχει ὑποκείμενον τὸ συνεχὲς ποσόν, τοῦτο δὲ διαιτικόν ἐστι παντὸς τοῦ ὑπ' αὐτῆς θεωρουμένου παθῶν, αὐξήσεως φημι, τομῆς τῆς ἐπ' ἄπειρον, μεταμορφώσεώς τε τῆς εἰς ἄλληλα τῶν χημάτων, καὶ τῶν λοιπῶν· δεῖ ἄρα πάντως καὶ τὴν ἀρχὴν ταύτης ἀνιπίδεκτον εἶναι τῶν τοιούτων παθῶν, τὸν αὐτὸν καὶ ἀμερῆ ὑποτίθεται. Ἔτι δ' ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ μὲν πάθη πάντα καὶ ἰδιώματα, περὶ ἃ καταγίνεται, ἐκ τῆς ἰδίας ἀρχῆς τὴν γένεσιν ἔχει· ἡ δὲ ταύτης ἀρχὴ ἀδιάστατον τῶν παθῶν. Εἰ δὲ καὶ τῆς Γεωμετρίας τὰ πάθη καὶ ἰδιώματα αὐδὲ ποσότητος ἄχ ὑφίστανται, καὶ φράσεως ἀρχὴ τὸ Σημεῖον· τὸ Σημεῖον ἄρα ἀμερὲς δεῖ εἶναι ὅλως καὶ ἄποσον. εἰ γὰρ καὶ τὸ Σημεῖον ἐν ποσότητι τὴν ὕπαρξιν ἔχει, πάθος, ἃ μὴν δ' ἀρχὴ τῆς Γεωμετρίας αὐ ἔστι, αὐτὸ δ', τῶν ἀδιάστατον, ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ πᾶσιν ὁμολογεῖται. ὅθεν καὶ Εὐκλείδης ἀποφατικῶς αὐτὸ ὑπέγραψεν, αὐτὸ τοῦτο δηλῶσαι βουλόμενος, τὸ παντὸς μὲν, περὶ ἃ ἡ Γεωμετρία καταγίνεται, ἀρχὴν εἶναι, μηδενὸς δ' τούτων μετέχειν· ὁ δ' Ἀριστοτέλης ἐν τῷ γ'. τοῦ περὶ ψυχῆς ἀδιαίρετον δὲ ἔλεγεν

ὅτε-

στοιχεῖον. Ἀνάλογον δὲ τὸ παρὰ τοῖς Γεωμέτραις Σημεῖον τῇ μονάδι, τῇ παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς, ὡς ἀρχῇ λαμβανομένῃ. ὥσπερ ἐν ἐκ τῆς μονάδος πάντες οἱ ἀριθμοὶ παράγονται, αὐτὴ δὲ ἀδιαίρετόν ἐστιν ἀριθμός· οὕτω κἀκεῖ Σημεῖόν ἐστι γραμμὴ, ἣ διὰ τῶν γραμμῶν τὰ πάντα εἴδη τῶν χημάτων ἀποτελεῖται. αὐτὸ δὲ καθ' αὑτὸ ὅτι χῆμά ἐστιν, ὅτι μῆκος μόνον, ἀλλ' ὅρος καὶ ἀρχή. παραστατικὸν δὲ τούτου, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν εἰκών, τὸ ἐνταῦθα κείμενον Σημεῖον α.

Δεύτ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἁπλατές.

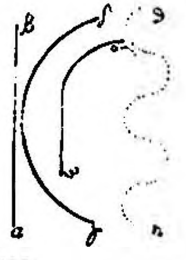
Ἡ δὲ Γραμμὴ τὴ διαιρετικὴ τῷ σημείῳ ἴσχουσα παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς, ὡς ἀρχὴ καὶ αὕτη λαμβάνεται. Τριῶν δὲ ὄντων τῶν τῆς διαστάσεως εἰδῶν, μήκους λέγω, πλάτους, καὶ βάθους, τὸ μήκους μόνον διαιρετικόν ἐστιν, ἀναπόδεικτος δ' ὅλως πλάτος καὶ πολλῷ μᾶλλον βάθος· διὸ καί τινες ὑποσὰ ταύτῃ ὡρίσαντο· Γραμμή ἐστι μέγεθος ὑφ' ἓν διαστατόν. Εὐκλείδης δὲ μῆκος ἀπλατὲς ὑπέγραψε, φρονιμώτερον καὶ τὸ ἀληθές· ἀνάλογος δ' ἐστὶ τῇ δυάδι. ὅθεν δὴ, ὥσπερ ἡ δυὰς παρὰ τὰς μετάδοσι τὸ γείτονι ἴσχει, οὕτω καὶ Γραμμὴ παρὰ τὸ σημεῖον. Σημεῖον γὰρ ῥυέντος, καὶ ἰχνος ἐγκαταλιμπάνοντος, * πᾶν τὸν ἐπόπτην, Γραμμὴ ἀποπλεῖται. Λαμβάνεται δὲ ποικίλα, ὅτι παρ' αὐτῆς μὲν πάντα σωίζεται τὰ χήματα· αὐτὴ δὲ πάντων τύπον καθαρεύουσά ἐστι. καὶ ἀρχῆς μὲν λόγον ἔχει ὁρᾶς πάντα τὰ χῆμα, ἐδὸν δὲ αὐτὰ χήματά ἐστιν. ὥσπερ καὶ ἡ δυὰς, ἀρχὴ μὲν πάντων τῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει, αὐτὴ δὲ καθ' αὑτὴν ἀδιαίρετόν ἐστιν ἀριθμός. εἰκονίζει δὲ ταύτην ἡ β γ, οἵαπερ Γραμμή. β——————γ

Τρίτ. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ Γραμμὴ μῆκός ἐστιν ἁπλατὲς, δῆλον, ὅτι καθ' ἑαυτὴν μὲν ἄπειρός ἐστιν καὶ ἀόριστος, περαίνεται δὲ καὶ ὁρίζεται παρὰ τὸ σημεῖον. διὸ καὶ Εὐκλείδης πέρατα Γραμμῆς τὰ σημεῖα λέγει, καὶ πάνυ εἰκότως. τῶν γὰρ σωμάτων τὰ ἁπλᾶ εἰσιν ὅροι, καὶ τῶν μιγάδων τὰ ἄμιρη. Ἐπεὶ τοίνυν σωμάτων τί ἐστι καὶ ἡ Γραμμὴ, ὡς μήκους μετέχουσα, καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖσθαι δυναμένη· τὸ δὲ σημεῖον ἁπλοῦν τι καὶ ἄμιρές, πάντως γε τὸ σημεῖον πέρας ἐστὶ τῆς γραμμῆς καὶ ὅρος, ὥσπερ καὶ καὶ τῆς δυάδος ἡ μονάς. Ἔστι τῶν γενητῶν, οὗ ἓν τινὶ γείτονι ταῦτα ἔχει, ἐκείνου καὶ ἀρχὴ καὶ πέρας ἐστίν· ἀπ' ἡ Γραμμὴ ἐκ τοῦ σημείου γενέσθαι, ὡς ἤδη εἴρηται. ἄρα τὸ σημεῖόν ἐστιν ἀρχὴ καὶ πέρας τῆς Γραμμῆς.

Τέτ. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Lib. 1. Fig. 1.

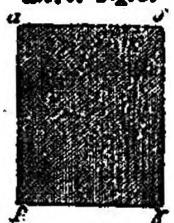


Δοκεῖ μὲν διὰ τῶν Εὐκλείδης πολλὰ εἶναι τὰ εἴδη τῆς Γραμμῆς ὑπαινίττεσθαι. ἵνα δὲ τι σαφέστερον γένηται, φέρε δὴ πρότερον περὶ τῆς διαιρέσεως τῆς Γραμμῆς εἴπωμεν. διαιρεῖται μὲν οὖν πρῶτον ἡ γραμμὴ εἰς εὐθεῖαν καὶ περιφερῆ, ἥτις καὶ καμπύλη καὶ κυρτὴ λέγεται. διαιρεῖται δὲ δεύτερον εἰς ἁπλῆν καὶ μικτήν. καὶ ἁπλῆ μὲν λέγεται ἥ τε εὐθεῖα μόνη, οἷα ἡ α β, ἥ τε κυρτὴ μόνη, οἷα ἡ γ δ. μικτὴ δέ, ἥ ἔκ τε εὐθείας καὶ κυρτῆς συγκειμένη, οἵαι εἰσὶν αἱ ε ζ, η θ, καὶ ἄλλαι. τούτων μὲν δὴ τῶν διαιρέσεων μέμνηται ὁ Πρόκλος τῆς τε Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει ἐπόμενος. Ἕτεροι δὲ ἔγχωρίως τὴν γραμμὴν διαιροῦσιν εἰς εὐθεῖαν, κυρτὴν, καὶ ἑλικοειδῆ, ἀλλ' αὕτη ἡ διαίρεσις οὐκ ἔστιν ὑγιής, οὐδὲ τοῖς πᾶσιν ἀρέσκει. ἡ γὰρ ἑλικοειδὴς μικτή ἐστιν, διὰ τὸ ἐκ δύο γενέσθαι κινήσεων. καὶ γὰρ τῆς εὐθείας κύκλῳ κινουμένης περὶ τὸν ἄξονα τὸν κυλίνδρου παραλλήλως τούτῳ κειμένης, καὶ τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς εὐθείας φερομένου, ἡ κυλινδρικὴ ἕλιξ ἀποτελεῖται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς. ἐπεὶ δὲ ὁ περὶ παντὸς εἰπεῖν τῶν ταύτης εἰδῶν τὸ παρόντος ἐστὶ σκοπῷ, φέρε δὴ περὶ μόνης τῆς εὐθείας βραχέα διέλθωμεν.

Εὐθεῖα τοίνυν καθ' ὃν Εὐκλείδην ἐστὶν, ἡ ἴσον κατέχουσα διάστημα, τὸ μεταξὺ τῶν δεξιομένων αὐτὴν σημείων, τοῦτον, ὅπερ τις γραμμὴ ποσοῦτον μέγεθος ἔχει, ὅσον ἐστὶ τὸ διάστημα τῶν ἄκρων αὐτῆς σημείων, εὐθεῖα λέγεται. καὶ τοῦτό ἐστι τὸ ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι. ὥστε τὴν κυρτὴν οὐ δυνάμεθα εὐθεῖαν λέγειν. δύναται γὰρ μείζων εἶναι, ἡ ὅσον τὰ δεξίοντα αὐτὴν σημεῖα ἀλλήλων ἀφίστασθαι. ἡ γὰρ γ δ, μείζων ἐστὶν, ἢ ὅσον τὸ γ, τὸ δ, ἀφίστανται. καὶ τοιοῦτος μὲν ὁ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ τῆς εὐθείας Ὁρισμός. Οἱ δὲ πάλαι ποικίλως πως ταύτην ὁρισμοὺς ἀποδιδόασιν, οἵ τινες οἱ αὐτοὶ τῇ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ εἰσίν. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης ὑπὲρ τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. ὁ γοῦν Ἥρων δύο γραμμὰς ὑποτιθέμενος, ἡ μὲν εὐθεῖα, ἡ δὲ κυρτὴ, ὥστε τὰ αὐτῶν πέρατα ἴσον ἀλλήλων ἀφίστασθαι, ὡς ἡ α β, καὶ γ δ, ἡ εὐθεῖά ἐστιν ἐλάττων, ἢ ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς κειμένοις σημείοις. Ἄλλοι δὲ εὐθεῖαν γραμμήν ἐστιν, λέγουσιν, ἡ ἐπ' ἄκρον τετμημένη. καὶ ἄλλοι εὐθεῖά ἐστιν, ἧς μέρος μὲν οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ὑποκειμένῃ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῇ μεταξύ, καὶ ἧς τὰ μέρη παντὶ πάσῃ ὁμοίως ἐφαρμόζει. καὶ ἄλλοι ἄλλως, ὧς διὰ τὸ σωφρονοῦν παραιτούμεθα.

Πέμπ. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Lib. 1. Fig. 2.



Καὶ ἡ Ἐπιφάνεια δὴ ἔστι πᾶσα τὴν ἀρχὴν, ἡ πάσας τὰς διαστάσεις ἔχει, ἀλλὰ δύο μόνας, τὸ μῆκος καὶ πλάτος. ἔχει δὲ τὰς αὐτὰς γένεσιν ἐν τῇ γραμμῇ, ὥσπερ γραμμὴν ἐν τῷ σημείῳ. γραμμῆς πέρας ῥυείσης, Ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται. Ἀναλογεῖ δὲ, κατὰ τὴν Πυθαγορείους, τὸν Τετράγωνον ἀριθμόν. ὥσπερ γὰρ ὁ Τετράγωνος ἀριθμὸς πρῶτός ἐστι τῶν ἄλλων ἀριθμῶν, οὕτω καὶ ταῖς Ἐπιφανείαις πρῶτον παρίσταται τὰ διάφορα σχήματα. δυνάμεθα δὲ αἴσθησίν τινα τῆς Ἐπιφανείας ἔχειν εἰς τὰς σκιὰς ἀποβλέποντες, αἳ βάθος οὐκ ἔχουσιν, ἀλλὰ μῆκος μόνον μετὰ πλάτους. Τινὲς δὲ ταύτῃ ὡρίσαντο μέγεθος διχῇ διαστατὸν, ἔπερι δὲ τὸ πέρας σώματος, ἢ ἄλλοι ἄλλως, ἀλλ' ἅπαντες διαφόρως λέξισι τὸ αὐτὸ παρεμφαίνειν σπεύδουσι. παραστατικόν πως ταύτης ἐστὶ τὸ α β γ δ, σχῆμα.

Ἕκτ. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί.

Ὥσπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὡρίσαμεν ἔφημεν, ὅτι τὰ ἄπλατα τῶν μικτῶν, ἢ τὰ ἀμιγῆ τῶν μεμιγμένων ἀρχαὶ ἢ ὅροι, καθέστηκε· τὸν αὐτὸν ἢ ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας εἰπεῖν δίον. ἐπεὶ γὰρ ἡ γραμμὴ ἁπλουστέρα ταύτης ἐστὶν, γραμμὴ γὰρ μέγεθος ὑφ' ἓν διαστατὸν, Ἐπιφάνεια δὲ μέγεθος διχῇ διαστατὸν· διὰ τοῦτο αἱ γραμμαὶ τῆς Ἐπιφανείας πέρατα λέγονται· μᾶλλον δὲ αἱ γραμμαὶ πέρατα Ἐπιφανείας εἰσὶ, διὰ τὸ, τὴν Ἐπιφάνειαν ἐκ τῶν γραμμῶν τὴν γένεσιν ἔχειν.

Ἕβδ. Ἐπέπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Lib. 1. Fig. 3.

Καθάπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἡ φρόνησις ὑγιὴς γέγονε διαίρεσις εἰς εὐθεῖαν καὶ περιφερῆ· οὕτω καὶ ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας, εἰς ἐπίπεδον καὶ σφαιρικὸν τὴν ὑγιῆ διαίρεσιν ποιεῖσθαι. Αὐθις ὥσπερ ἐκείνων ἐπιδιαιρουμένων, τὸ μὲν ἁπλοῦν, τὸ δὲ μικτὸν ἔφημεν· οὕτω καὶ τὴν Ἐπιφάνειαν εἰς τὰ αὐτὰ ἐπιδιαιρετέον. καὶ ἁπλῆ μέν ἐστιν, ἥ ἐστι μόνη ἐπίπεδος, ἢ ἡ μόνη σφαιρικὴ· μικτὴ δὲ, ἡ ἔκ τε ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς συνιστάμενη. ὥσπερ ἡ τὸ α β γ, κῶνος, ἡ μὲν βάσις ἐπίπεδος, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς βάσεως, κυρτόν. Τῆς Ἐπιφανείας τοίνυν ὑποστὰς διαιρετέον, καὶ ἐπιδιαιρετέον, τὸ ἐπίπεδον, ὡς καὶ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁρίσεσθαι. Ἐπίπεδός τοίνυν Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἴσον διάστημα κατέχει, τὸ μετα-

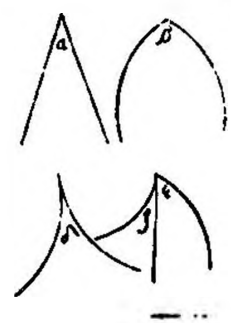
ξὺ

ξὺ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν. ὡσὶκα γὰρ ἡ Ἐπιφάνεια κῦ μῆκος πατᾶπον διάστημα, ἡ κῦ πλάτος ἔχει· ὅσον ἀφίστανται ἀλλήλων κὴ αἱ περιέχουσαι αὐτὴν γραμμαὶ κατά τε μῆκος, κὴ πλάτος, ἐπίπεδος λέγεται· κὴ τοῦτό ἐστι τὸ ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς κεῖσθαι γραμμαῖς. ἡ ὅπως ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια ἐστιν, ἡ ἐπ' ἄκρου πεπαμένη, ἡ ἧς τὰ μέρη πάσπα πᾶσιν ἐφαρμόζει, κὴ τὰ ὅμοια.

Η'. Ἐπιπέδου δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ὑπὸ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, κὴ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Τῶν γωνιῶν αἱ μὲν ἐπίπεδοί εἰσιν, αἱ δὲ στερεαί κὴ ἐπίπεδοι μὲν, αἱ ἐν ἐπιφανείαις συνισάμεναι, κὴ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμεναι· στερεαὶ δὲ, αἱ ἐκ πλείων στερεῶν σώμασι, κὴ ὑπὸ ἐπιφανειῶν περιεχόμεναι. αὖθις τῶν γωνιῶν τῶν τε ἐπιπέδων κὴ στερεῶν, αἱ μέν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί· κὴ ἁπλαῖ μὲν, αἱ ὑπὸ ὁμοειδῶν γραμμῶν περιεχόμεναι· αἱ μὲν γὰρ ἁπλαῖ ἐπίπεδοι γωνίαι, ἡ ὑπὸ δύο γραμμῶν εὐθειῶν, ὡς ἡ α, ἡ ὑπὸ δύο κυρτῆς, περιέχονται, ὡς ἡ β. αἱ δὲ ἁπλαῖ στερεαὶ, ἡ ὑποβρίων γραμμῶν εὐθειῶν περιέχονται, ἡ ὑπὸ βρίων κυρτῆς. μικταὶ δὲ, αἱ ὑπὸ ἀνομοειδῶν γραμμῶν, τῆς μὲν εὐθείας, τῆς δὲ κυρτῆς, περιεχόμεναι. τῶν δὲ ἐπιπέδων ἁπλῶν γωνιῶν, ὅσαι ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιέχονται μοιοειδῶν τέ εἰσι, κὴ εὐθύγραμμοι καλοῦνται. τῶν δὲ ὑπὸ κυρτῆς κὴ περιφερῶν, δύο τὰ εἴδη· αἱ μὲν γὰρ καλοῦνται ἀμφίκυρτοι, αἱ δὲ ἀμφίκοιλοι· ἀμφίκυρτοι μὲν, ὅπου αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν περιφερεῖς γραμμαὶ, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἔχουσιν, ὡς ἡ β· ἀμφίκοιλοι δὲ, ὅπου τὸ κοῖλον ἐκτὸς ἔχουσιν, ὡς ἡ δ. ὡσαύτως δὲ κὴ τῶν μικτῶν δύο τὰ εἴδη, ἡ γὰρ σύγκειται ἡ γωνία ἐξ εὐθείας γραμμῆς κὴ περιφεροῦς, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἔχόσης, ὡς ἡ ε, ὥστε δύο καλεῖσθαι καλεῖσθαι εὐθύκυρτος· ἡ δὲ εὐθείας κὴ περιφερεῖς, ἐκτὸς τὸ κοῖλον ἔχόσης, ὡς ἡ ζ, κὴ καλεῖται εὐθύκοιλος. Τοσούτων δ' ὄντων τῶν τῆς γωνίας εἰδῶν, περὶ τίνος ὁ Εὐκλ. τὸν λόγον ποιεῖται, ἐν τῷ ἑξῆς ὀφθήσεται ὅρῳ. Ἔφη δὲ τὰς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, μὴ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι, ὅτι αἱ ἁπτόμεναι ἀλλήλων κὴ ἐπ' εὐθείας κείμεναι, οὐχὶ μόνον γωνίαν οὐ ποιοῦσιν, ἀλλὰ κὴ εἰς εὐθεῖαν μίαν καταπίπτουσι. κλίσιν δ' εἶπεν τὸ γένος ταύτης ὑφήλωσι.

Lib. 1. Fig. 4.



Θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

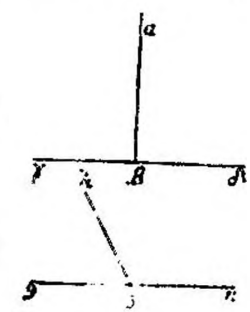
Ἐκ τῶν παρόντων δῆλον, ὅτι καὶ Εὐκλ. εὐθύγραμμον γωνίαν λέγει, τὴν ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιεχομένην, περὶ ἧς καὶ τὸν λόγον ποιεῖται.

Ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, ἡ δὲ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ΙΑ'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ΙΒ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς.

Lib. 1. Fig. 5.



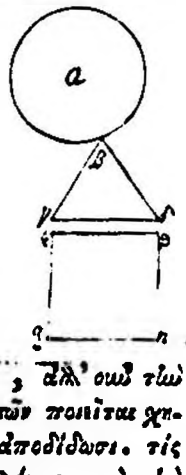
Τρία τῆς εὐθυγράμμου γωνίας τὰ εἴδη, ἡ μὲν γὰρ ὀρθὴ λέγεται, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα. ἡ μὲν ὀρθὴ γνῶσιν ἔχομεν, ὁπλοῦσα τις εὐθεῖα, ὡς ἡ α β, ἐπ' εὐθείας τινὸς, τῆς ε η, σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τὴν ὑπὸ α β γ, καὶ α β δ, ἴσας ποιῇ· ἑκατέρα γὰρ τῶν ὀρθή ἐστιν, ὡς τὸ ἴσον πρᾶσα. ἡ δὲ α β, καθητις λέγεται ἐπὶ τὴν γ δ. ἀμβλεῖα δὲ, ἡμίζων ὀρθῆς, εἶα ἡ ὑπὸ ι ζ η. ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς, ὡς ἡ ὑπὸ ι ζ θ. πάντα ἄδη τὴν διαίρεσιν πάντες οἱ γεωμέτραι ἀποδέχονται· πολλοὶ δὲ τὸν λόγον τῆς ἐρωτήσεως οὐκ ἔχουσιν ἀποδιδόναι· οἱ δέ γε μάντοι πάντα τινὰ λόγον τῆς διαιρέσεως πάντως ἀποδιδοῦσιν. Ἐπεί φασι, τῶν ἀρχῶν ἡ μὲν κατὰ πέρας, ὅπερ ἁπλοῦσθαι, καὶ ἀπαθίδικτος ὅλως αὐξήσεως, ἢ μειώσεώς ἐστιν, ὡς ἡ μονὰς, καὶ αἰτία πᾶσι τοῖς ἀσπλέσμασι τοῦ ὄρου, παντάπασός τε καὶ ἰσότητος· ἡ δὲ ἄπειρος, ὡς ἡ δυαδικὴ, καὶ αἰτία τοῖς ἐπ' ἄπειρον τρεπόδου, αὐξήσεώς τε καὶ μειώσεως, ἔτι δὲ καὶ ἀνισότητος, καὶ παντοίας ἑτερότητος τοῖς γινομένοις ὑπ' αὐτῆς. διὰ ταῦτα καὶ τῶν γωνιῶν ἡ μὲν ὀρθὴ, ὡς τρόπον ἀρχὴ, τῶν γωνιοειδῶν χαμάτων τὸ ἴσον πρὸς, καὶ ἀπαθίδικτός ἐστιν ὅλως αὐξήσεως ἢ μειώσεως· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, ὡς δόξεσοι, καὶ τῇ δυάδι ἀνάλογοι, ἡ μὲν κατὰ τὸ μεῖζον, ἡ δὲ κατὰ τὸ ἔλαττον τῆς ὀρθῆς διεσωθήκασιν. ὅθεν δὴ κυρίως καὶ ἀφισμένως γωνία ἐστὶν ἡ ὀρθὴ, αἱ δὲ λοιπαὶ δόξεσοι· ὁ λόγος δὲ ἐπαύθα περὶ τῶν εὐθυγράμμων μένει.

ΙΓ'. Ὅρος ἐστὶν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

Ὅρος κυρίως μὲν τὰς γεωμέτρας τὰ τῶν χωρίων λήγοντα πέρατα, καθὸ πάντα περιορίζουσι, καὶ ἀσύγχυτα φυλάττουσιν, ἃ λέξις αὕτη οἰκείαν γεωμετρίᾳ. ὅθεν δὲ καὶ Εὐκλ. ἐνταῦθα ὅρον λέγει, οὐχ ἁπλῶς ἅπαν πέρας, ἀλλὰ μόνον τὸ τῶν χωρίων καὶ ἐμβαδῶν, τὸ περιορίζον ἅμα καὶ περατῶν. τὰ γὰρ ἄκρα τῆς γραμμῆς σημεῖα, πέρατα μὲν λέγονται, ὁμοῦ δὲ καὶ ὅροι, ὅτι καὶ περιορίζουσί τι χωρίον, περατοῦσι δὲ μόνον τὴν γραμμήν.

ΙΔ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

Lib. 1. Fig. 6.



Πολλαχῶς τὸ σχῆμα λαμβανομένου, καὶ γὰρ τῶν τε φυσικῶν ἁπάντων αἱ μορφαὶ σχήματα λέγονται, καὶ τῶν παρὰ τῆς τέχνης γινομένων, φέρε εἰπεῖν, ἀνδριαντοποιητικῆς καὶ ἄλλης, αἱ μορφαὶ ὡσαύτως σχήματα ἔκεσαι. δίδονται δ' ἔστι καὶ ψυχῆ σχήματα, ἐνταῦθα μόνον περὶ τῶν παρὰ τοῖς γεωμέτραις σχημάτων ὁ λόγος, ἰδίως δὲ περὶ τῶν ἐν ἐπιπέδῳ. Ἔστι τοίνυν σχῆμα χωρίον τι ὑπὸ μιᾶς, ἢ πολλῶν γραμμῶν περιεχόμενον καὶ ὁριζόμενον. ὑπὸ μιᾶς μὲν, ὡς ὁ α, κύκλος, πλειόνων δὲ, ὡς τὸ ἑπτάγωνοειδὲς, πεντάγωνοειδὲς, οἷα τὰ β γ δ, ε ζ η θ, καὶ λοιπά. ὧν τὸ μὲν περιέχον ὅρος λέγεται, τὸ δὲ περιεχόμενον ἐμβαδὸν, τὸ σωθὲν δὲ ἔκ τε ὅρου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ σχῆμα. Ἴσον δὲ, ὅτε εἶναι ὁ γεωμέτρης ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἐναλλάττεται σχήμασιν, ἀλλ' οὐ τῷ ἀκριβῆ θεωρίαν περὶ τῶν ἀΰλων καὶ νοητῶν, καὶ εἰκόνων τῶν αἰσθητῶν ποιεῖται σχημάτων, καὶ περὶ ἐκείνων τὰς ἀποδείξεις μηχανᾶται, καὶ τοὺς λόγους ἀποδίδωσι. τίς γὰρ μηχανὴ ἀκριβῆ σχῆμα ὕλης ἐνεῖναι, ὥστε τοὺς νοητοὺς διέχεσθαι λόγους, καὶ τῷ θεωρίαν περὶ αὐτὸ ἄπταιστον γίνεσθαι;

ΙΕ'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια. πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέκλημένον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

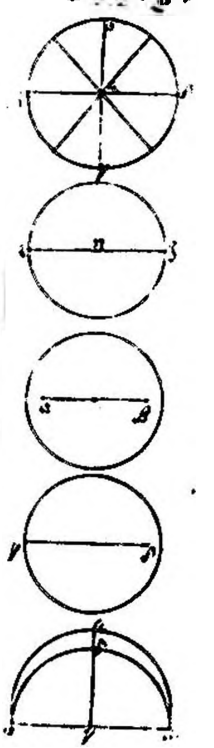
Τῶν σχημάτων ἁπάντων τὸ πρωτίστον καὶ ἁπλούστατον, ἅμα δὲ καὶ πλειόπαντον, ὁ κύκλος ἐστί. καὶ γὰρ πᾶν μὲν τριῶν περιφέρει, τῷ δὲ ἁπλουστέρᾳ τάξει τοῦ ὑπάρξιν ἔχειν. μίγεθος γάρ ἐστι διχῇ διαστατὸν, ἐκείνων ἐν ἴσοις σωιστομένων διαστάσεσι. τῶν δὲ ἐν ἐπιπέδοις ὑφεσταμένων τῇ τε ὁμοιότητι καὶ τῇ ταυτότητι ὑπερί-

πτει-

περίχει, ἢ ἔστιν ἀνάλογον ἡ πέρατι ἢ τῇ μονάδι. λέγεται μὲν οὖν σχῆμα, διὰ τὸ πεπεράσθαι· ἐπίπεδον δὲ, εἰς διαφορὰν τῶν στερεῶν σχημάτων· ὑπὸ μιᾶς δὲ γραμμῆς περιεχόμενον, ἅπερ μετὰ τοῦ πεπειλίαι τῶν ἔξω διχόμενον ὅρων, ὡς τὰ λοιπὰ σχήματα. καλεῖται δὲ ὁ τοῦ κύκλου περιφέρεια, εἰς διαφορὰν τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων. οὐδὲν γὰρ τῶν εὐθυγράμμων ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιορίζεται. εἴρηται δὲ, ὅτι ἀφ' ἑνὸς σημείου, ἴσαι ἀπὸλαις εἰσὶν, ὅτι γε ἢ αἱ ἐλλείψεις ὑπὸ μιᾶς πως περιφερείας ἐφίζονται, ἃ μὴν δὲ αἱ ἀφ' αὐτοῦ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, εἰσὶν ἴσαι. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ἐντὸς κειμένων προσπίπτει, ὅτι κἀντῦθα σχήμα τῇ περιγραφομένῃ κύκλῳ, ἔστι τι κέντρον ὁ πόλος, ἀλλ' οὐκ ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐστὶν, μᾶλλον δ' ἐκτός. τὸ δὲ ἀφ' ἑνὸς, ὅτι ἐν εἶναι τὸ κέντρον ἀφείλει. εἰκὼν τούτου τὸ α β γ δ, σχῆμα, ἃ κέντρον τὸ ε.

Ις'. Διάμετρος δὲ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Lib. 1. Fig. 7.



Τῆς φωνῆς ταύτης διαμέτρου ἐν πολλοῖς σχήμασι λαμβανούσης, ἢ γὰρ καὶ ταῖς παραλληλογράμμοις, καὶ ταῖς ἐλλείψεσι ἢ σφαίραις, διάμετρός ἐστιν. ἰδίως διάμετρον τοῦ ἐν κύκλῳ δεῖ καλεῖν· ἡ μὲν γὰρ τῶν παραλληλογράμμων διάμετρος, διαγώνιος μᾶλλον προσηκόντως ὀνομάζεται· ἡ δὲ τῶν ἐλλείψεων ἢ σφαιρῶν, ἄξων λέγεται. μόνη δὲ τῶν κύκλων διάμετρος ἁπλῶς προσηκόντως καλεῖσθαι πεπλήρωται. Τὸ μὲν οὖν εὐθεῖα γένος χώραν ἐπέχει. ἐπεὶ δὲ πολλαὶ εὐθεῖαι δύνανται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἄγεσθαι, μόνη ἐκείνη διάμετρος λέγεται, ἡ διὰ τοῦ κέντρου. ὥσπερ ἢ πολλῶν σημείων ἐντὸς τοῦ κύκλου ὄντων, ἓν ἢ μόνον κέντρον λέγεται, τὸ μεσαίτατον. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἢ διὰ τοῦ κέντρου δύνανταί τινες εὐθεῖαι ἄγεσθαι, ὁμοίως δὲ ἢ περατοῦσθαι, ὡς ἡ α β, ἡ καθ' ἓν μόνον περατοῦσθαι μέρος, ὡς ἡ γ δ, ἐχεῖ δὲ ἢ ἀφ' ἑκάτερα τὸ ἕτερον, ἢ διάμετρος οὐκ ἔστι. διὰ τοῦτο προσέθηκε καὶ τὸ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ ε ζ, ἢ ταύτῃ μὲν διαφερόντως ἀναπληροῦσι τόπον. Τὸ δὲ δίχα τὸν κύκλον τέμνειν τοῦ διαμέτρου, φανερόν ἐστι τὸν θαλοῦ ἀποδεῖξαι, διὰ τοῦ εὐθεῖαν εἶναι, ἢ διὰ τοῦ κέντρου διήρχθαι, ἢ περατοῦσθαι. Διείσονται δὲ ἢ διὰ μαθηματικῆς ἀποδείξεως· εἰ γὰρ τοῦ κύκλου εἰς δύο διαιρουμένου ὑπὸ τῆς διαμέτρου, θάτερον τῶν μερῶν ἐπὶ τὸ λοιπὸν ἐφαρμοσθῇ, πάντως γε εἰ ἔστιν ἴσα,

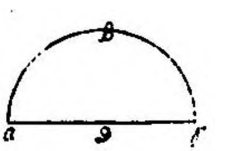
σα,

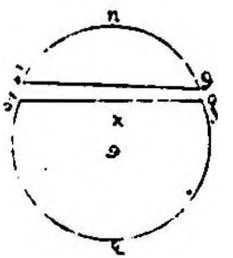
σα, ἁρμοσθήσεται θάτερον θατέρῳ, ὥστε μηδ' ἕτερον ἐλλείπειν τῇ λοιπῇ, ἢ ὑπερέχειν. εἰδ' ἄνισα, τὸ μὲν ἐντὸς, τὸ δὲ ἐκτὸς πεσεῖται. τῶν δὲ γωνιῶν ἄτοπόν τι ἔσται. ἡ γὰρ ἐπὶ αἱ ἀπὸ τῶν κύκλων ἴσαι εἰσὶν, μὴ ἁρμοττομένων τῶν αὐτῶν τῷ κύκλῳ μερῶν, ἔσαι ἡ ἐλάττων ἴση τῇ μείζονι, ἡ γ δ, τῇ γ ε, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον μόνον, ἀλλὰ καὶ ἀδύνατον.

ΙΖ'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ΙΗ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Lib. 1. Fig. 8.





Εἶναι τὸ ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα κύκλου κοινωνεῖν ἀλλήλοις δοκεῖ, καθ' ὃ ἕκαστον αὐτῶν ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιέχεται, διεσωλώχασιν ἅμπης. ὅτι τὸ μὲν ἡμικύκλιον ὑπὸ ὡρισμένης περιέχεται εὐθείας, τῆς διαμέτρου. τὸ δὲ τμῆμα ὑπὸ τῆς τυχούσης, ἥτις καὶ χορδὴ λέγεται. καὶ τὸ μὲν τμῆμα καθολικώτερόν ἐστι, τὸ δὲ ἡμικύκλιον μερικώτερον. διὸ καὶ λέγεται μὲν τὸ ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα, ὁμοίως δὲ καὶ ἀνάπαλιν, τὸ τμῆμα καὶ ἡμικύκλιον. Ἔτι τὸ μὲν ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἔχει τὸ κέντρον, οἷον τὸ θ, τῶν α β γ, ἡμικυκλίων. τὸ δὲ τμῆμα, ἐλάσσω μείζον ἐντὸς, ὡς τὸ θ, ἐντὸς ὂν τῆς περιμέτρου τοῦ δ ε ζ. εἰδὲ ἔλαττον ἐκτὸς, οἷον τὸ δ η θ, ἔχον τὸ κέντρον κ, ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ μείζονος. ὥστε ἔξεστιν ἐκ τούτου δυνάμεθα σωμαγαγεῖν τὸ κέντρον τοῦ τόπου. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἴσαι τοῦ ἡμίσεος, ἢ ἐντὸς ταύτης, ἢ γοῦν ἐκτὸς, ὡς εἴρηται. διὸ καὶ ξένα τὰ τμήματα τοῦ κύκλου εἴδη, ἡμικύκλιον, μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. ἑκάτερον δὲ τό, τε ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα κύκλου δυσειδές ἐστι. καὶ γὰρ ἕκαστον τῶν σχημάτων, ἢ μονοειδὲς ἐστιν, ὡς ὁ κύκλος ἐν ταῖς ἐπιπέδοις, καὶ ἡ σφαῖρα ἐν τοῖς στερεοῖς. ἢ δυοειδὲς, ὡς τὸ ἡμικύκλιον καὶ τὸ τοῦ κύκλου τμήματα ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, ἐν δὲ τοῖς στερεοῖς τὸ ἡμισφαίριον, καὶ τὰ τῆς σφαίρας τμήματα. ἢ γοῦν πολυειδὲς, ὡς τὰ κῶνος, πυραμὶς, καὶ λοιπὰ ἐπίπεδά τε καὶ στερεά. εἰδὲ ἀδύνατον σχῆμα ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεσθαι, τῶν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων ἀληθεύει, δύο γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. τὸ δὲ ἡμικύκλιον καὶ κύκλου τμῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ περιφερῶς περιέχεται, διὸ καὶ δυοειδὲς λέγεται.

ΙΘ'. Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Κ'. Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.

ΚΑ'. Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

ΚΒ'. Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα.

Καθάπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἡ μονὰς ὡρίσθη ἓν ἀφ' οὗ πᾶσα ἀρχὴ ἀμιγὴς ὑπολείπεται, ἡ δὲ δυὰς μέσον μονάδος καὶ τῶν ἀριθμῶν, ὡς δοκεῖ· ἀπὸ δὲ τῆς δυάδος ἡ ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν ἄρχεται αὔξησις. οὕτω καὶ ἐν τοῖς σχήμασιν, ὁ μὲν κύκλος, ὡς ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενος, μονάδος τόπον ἐπέχει· τὸ ἡμικύκλιον δὲ δυάδος, ὡς ὑπὸ δύο περιεχόμενον. τὸ δὲ τρίγωνον ἀρχὴν λαμβάνει τῆς ἐπ' ἄπειρον τῶν σχημάτων προόδου. Τίνος δὲ χάριν οἱ ἀριθμητικοὶ παύεσθαι τοιοῦτον ὡρίσαντο; ἢ ὅτι ἡ μὲν μονὰς ἐφ' ἑαυτὴν, ἢ καὶ πρὸς ἄλλον πολλαπλασιαζομένη ἀριθμόν, οὐδὲν αὔξει, προσιθεμένη δὲ αὔξει. ὁ ἀριθμὸς δὲ πάντων, πολλαπλασιαζόμενος μᾶλλον αὔξει ἢ προστιθέμενος. ἐπεὶ δὲ ἡ δυὰς πολλαπλασιαζομένη καθ' ἑαυτὴν τὸ αὐτὸ ποιεῖ, ὅπερ καὶ προστιθεμένη, τότε εἴπερ τὴν μίσην χώραν ἔσχε. ταύτης δὲ τῆς τάξεως κρίνοις σχήμασι πραμένης, σφῶν μὲν ὁ Σπεύσιππος περὶ τὸν κύκλον διαλαβὼν, μὴ δεῖ τὸν κύκλον περὶ τὸ ἡμικύκλιον, ἐπὶ τὸ παρόντος, εἶδη ὅπως ἕκαστον τῶν σχημάτων δίον καλεῖσθαι διὰ βίων διδάσκει ὅρων, καὶ τῶν' αὖθις ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐρωτιζόμενος. Ὅσα τοίνυν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων βίσι περιέχονται ὅροις, βίπλευρα καλεῖ· ὅσα δὲ πλείοσι, πεδάπλευρα· ὅσα δὲ πλείοσι τῶν πεντάρων πολύπλευρα. τὰ δ' ἑξῆς τῶν βιπλεύρων μόνων καὶ πεδαπλεύρων τὴν ἰδίαν ἐπωνυμίαν προσηγορίαν, τῶν δὲ λοιπῶν τὰς κοινὰς ἐμιτέθη, τὴν ἰδίαν ἑκάστῳ ἀποσιωπήσας; ὅτι κρίνοις ἀριθμοῖς ὁ βιαδικὸς ἀριθμὸς καὶ πεδαδικὸς φαίνεται, ὁ μὲν ἐν τοῖς περιττοῖς, ὁ δὲ ἐν τοῖς ἀρτίοις. διὸ καὶ Εὐκλείδης τὰ δύο φαύτισα τῶν σχημάτων βίγωνόν φησι καὶ πεδάγωνον εἰς μέσον λαβὼν, τὰ λοιπὰ πάντα τῇ κοινῇ περιλαβὶ προσηγορίᾳ. Γίνον δὲ, ὅτι ἐπαυδὶ περὶ τῶν εὐθυγράμμων μόνον τὸν λόγον ποιεῖται. Ἐπισάσιως δὲ καὶ τὸ ἄξιον, ὅτι ὥσπερ τῶν γραμμῶν αἱ μὲν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί· οὕτω καὶ τῶν σχημάτων, τὰ μὲν ἁπλᾶ λέγονται, τὰ δὲ μικτά. καὶ ἁπλᾶ μὲν τὰ ὑπὸ ἁπλῶν περιεχόμενα γραμμῶν· τούτων δὲ τὰ μὲν ὑπὸ ὁμοειδῶν περίκειται, τὰ δὲ ὑπ' ἀνομοειδῶν· τῶν δὲ ὑπὸ τῶν ὁμοειδῶν αὖθις, τὰ μὲν ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περίκειται, τὰ δὲ ὑπὸ περιφερῶν. μικτὰ δὲ τὰ ὑπὸ μικτῶν γραμμῶν περιεχόμενα, ὡς τὰ ἑλικοειδῆ, ἢ παντοειδῆ καὶ ἄλλα.

ΚΓ. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

ΚΔ. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

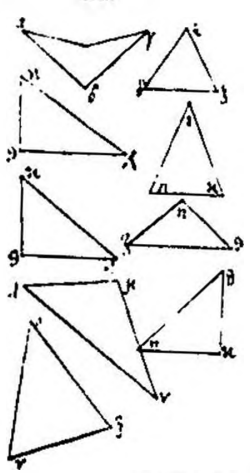
ΚΕ. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

ΚϚ. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

ΚΖ. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

ΚΗ. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Eucl. Lib. 1. Fig. 9.



Ἄρχεται δὲ καὶ τῆς τῶν σχημάτων διαιρέσεως Εὐκλ. ἀπὸ τῶν τριπλεύρων· ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦ τραπεζίου ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις ἐπέχει τάξιν, ὡς εἴρηται. λαμβάνεται δὲ ἡ τῶν τριπλεύρων διαίρεσις, ὅτι μὲν ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ὅτι δ' ἀπὸ τῶν γωνιῶν· καὶ τοῦτο εἰκότως. πᾶν γὰρ τὸ τρίπλευρον, ἔστι καὶ τρίγωνον, ἁμοῦ δὲ καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν τὸ τρεῖς γωνίας ἔχον, ἔχει καὶ τρεῖς τὰς πλευράς. τὸ γὰρ αβγ, φησὶν εἰπεῖν, σχῆμα ἔχει μὲν τρεῖς γωνίας, πλευρὰς δὲ τέσσαρας. Ἀπὸ τῶν πλευρῶν μὲν οὖν διαιρεῖται τὰ τρίγωνα, εἰς ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ, καὶ σκαληνά. καὶ ἰσόπλευρα μέν ἐστιν, ἅπερ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἔχει, ὡς τὸ δεζ. ἰσοσκελῆ δὲ, ἃ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχει, ὡς τὸ ηθκ, καὶ σκαληνά, ἅπερ καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἀνίσους ἔχει, ὡς τὸ λμν. Ἀπὸ δὲ τῶν γωνιῶν διαιρεῖται αὖθις εἰς ὀρθογώνια, ἀμβλυγώνια, καὶ ὀξυγώνια. Ὀρθογώνια μὲν οὖν ἐστι, τὰ ἔχοντα μίαν τῶν αὐτῶν γωνιῶν ὀρθήν· ἐπεὶ γὰρ δυνατὸν τρίγωνον δύο ὀρθὰς πώποτ' ἔχειν γωνίας, ὡς δειχθήσεται. Ἀμβλυγώνια δὲ, ἃ τὴν μίαν ἀμβλεῖαν ἔχει· καὶ ὀξυγώνια, ἅπερ καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχει. ὥστε ἐκ τούτων συμβαίνει ἐπὶ τὰ εἴδη τῶν τριγώνων εἶναι. τὸ γὰρ ἰσοπλεύρου μονοειδοῦς ὄντος καὶ τὰς γωνίας, τυγχάνειν ὀξυγωνίου· τῶν δὲ λοιπῶν δύο, τὸ ἰσοσκελοῦς, φημὶ, καὶ σκαληνοῦ ἑκάτερα λαμβανομένου καὶ τὰς γωνίας, ἐπὶ τὰ πάντα τῶν τριγώνων ἀποπλεῖται εἴδη. Πρῶτον τὸ ἰσόπλευρον ἰσογώνιον δεζ. δεύτερον τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον ηθκ. τρίτον τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον ζηθ. τέταρτον τὸ ἰσοσκελὲς ὀξυγώνιον ηικ. πέμπτον τὸ σκαληνὸν ὀρθογώνιον θκλ. ἕκτον τὸ σκαληνὸν ἀμβλυγώνιον λμν. καὶ ἕβδομον τὸ σκαληνὸν ὀξυγώνιον νοξ. καὶ περὶ μὲν τῶν τριπλεύρων, διαιρέσεως ἅλις. ἐπόμενον δέ ἐστιν εἰπεῖν καὶ περὶ τῶν τετραπλεύρων.

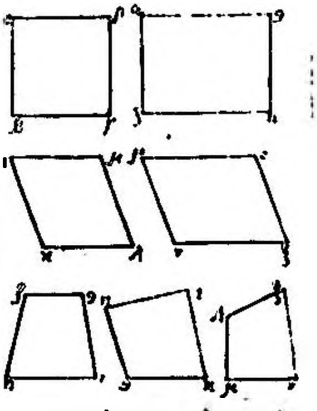
ΚΘ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον.

Λ'. Ἑτερόμηκες δέ, τὸ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

ΛΑ'. Ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

ΛΒ'. Ῥομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ ὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

Euel. Lib. 1. Fig. 10.



Πεπαχὼς τῶ Στοιχειωτῆ τὸ τετράπλευρον ὧδε διαιρῶντες, φαίνεται ἡμῖν καὶ τοῦ παρ' ἄλλοις τῶν διαίρεσιν λαβεῖν, ἐπαχῶς καὶ τὰ τετράπλευρα, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα διαιρεῖν. τῶν γὰρ τετραπλεύρων τὰ μὲν, παραλληλόγραμμά ἐστι, τὰ δ' οὔ. καὶ τῶν παραλληλογράμμων αὖθις τὰ μὲν, ἰσόπλευρα ἅμα τε καὶ ὀρθογώνια, ὡς τὰ τετράγωνα· τὰ δὲ, ἑτερόμηκες τύπων, ὡς τὰ ῥομβοειδῆ· τὰ δὲ ἰσόπλευρα μὲν, οὐκ ὀρθογώνια δὲ, ὡς εἰ ῥόμβοι· τὰ δὲ, ὀρθογώνια μὲν, οὐκ ἰσόπλευρα δὲ, ὡς τὰ ἑτερομήκη. τῶν δὲ μὴ παραλληλογράμμων τὰ μὲν, τὰς δύο μόνας τῶν πλευρῶν ἔχει παραλλήλους, ὁμοίως δὲ καὶ τὰς λοιπὰς, καὶ καλεῖται τραπέζια· τὰ δὲ, οὐδ' ὅλως ἔχει τῶν πλευρῶν τινας παραλλήλους, καὶ καλεῖται τραπεζοειδῆ. τῶν δὲ τραπεζίων τὰ μὲν, ἴσας ἔχει τὰς συναπτούσας τὰς δύο παραλλήλους, καὶ καλεῖται τραπέζια ἰσοσκελῆ· τὰ δὲ, ἀνίσους, καὶ καλεῖται τραπέζια σκαληνά. ὥστε ἐπτά εἰσι τὰ εἴδη καὶ τῶν τετραπλεύρων σχημάτων. Τετράγωνον, ὡς τὸ αβγδ. Ἑτερόμηκες, ὡς τὸ εζηθ. Ῥόμβος, ὡς τὸ ικλμ. Ῥομβοειδὲς, ὡς τὸ μνξο. Τραπέζιον ἰσοσκελὲς, ὡς τὸ ζηθι. Τραπέζιον σκαληνὸν, ὡς τὸ ηθικ. καὶ τραπεζοειδὲς ὡς τὸ λμνξ.

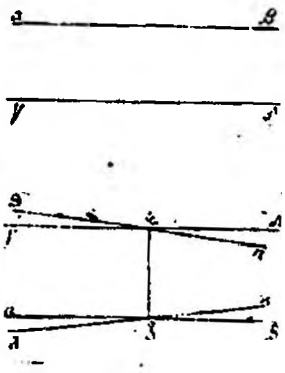
ΛΓ'. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Πληρώσας τὴν τῶν τετραπλεύρων τε καὶ τετραπλεύρων σχημάτων ἑρμηνείαν, καθ' ὅσον εἰς λόγον ὅρων συμβάλλεται, προπέμψας τὴν τοῦ μοιοειδοῦς καὶ τῶν τούτου μερῶν, προτίθησι καὶ τὴν καὶ τὴν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν δεικτικὴν διδασκαλίαν. ἔστι δὲ [illegible] εὐθεῖαί τινες παράλληλοι εἰσὶ, τὰ τοιαῦτα φησὶ, δεῖ [illegible], τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ, τὸ ἐκβάλλεσθαι ἐπ' ἄπειρον, καὶ τὸ

ἐφ'

ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν, ὡς αἱ α β, γ δ. εἰσὶ γὰρ ἐλλείποντες, τὸ παραλλήλους εἶναι οὐχ ὑπάρχουσι. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας καὶ Πρόκλον τὸν διάδοχον ἀρκείσθω ἡμῖν. Τὰ Αἰτήματα δὲ καὶ Ἀξιώματα ἐκκείσθωσαν ἐπὶ τὰ παρόντος, ὡς καὶ παρὰ τῷ Εὐκλείδ. διάκεινται. τὰ μὲν γὰρ καθ' αὑτὰ τὸ γνωστὸν ἔχει, τὰ δὲ λαμβάνονται μόνον, ὡς εἰς κατασκεδήν τινων συμβάλλοντα, ὡς προείρηται. μετὰ δὲ τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα, ἃ τῶν προτάσεων ἑρμηνεία ἀμέσως παχθήσεται· συνεπτικωτέρα μέντοι τῆς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ· σεσημειωμένων ἐν ἑκάστῃ προτάσει, τῶν τε ὅρων, ἀξιωμάτων, καὶ προτάσεων, οἷς ὧν δείκνυται. καὶ τοῦτο εἰς ῥᾳστέραν τῶν ἀρχομένων κατάληψιν.

Eucl. Lib. 1. Fig. 11.



Α Ι Τ Η Μ Α Τ Α.

Α΄. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ παν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι, ἤτοι Ἀξιώματα.

Α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

Δ΄. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Ε΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἄνισα.

ϛ΄. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ζ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Η΄. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Θ΄. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Ι΄. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

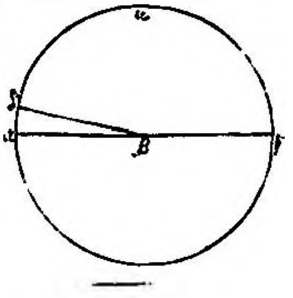
ΙΑ΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας (οἷον τὰς η θ, κ λ,) εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ἡ ε ζ.) τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ὡς τὰς ὑπὸ η ε ζ, κ ζ ε. ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ΙΒ΄. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.

ΙΓ΄. Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν.

Παρὰ τὰ ιβ'. ἐν τῇ Εὐκλ. Διαιρούμενα Ἀξιώματα, τάδε Αἰτήματα ἢ τὰς Ὅρους, τίθεται Ἀρχὴ μαθηματικὴ ἡ λέγουσα, Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν, ὧν φησι Πρόκλος ἐν τοῖς αἰτήμασι ταυτί. ὁ δὲ τῆς αὐτῆς πιθανός ἐστιν, ὅτι ἐὰν εὐθεία τις καθ' ἑαυτῆς μέρος μόνον ἐφαρμοσθῇ ἑτέρᾳ τινὶ εὐθείᾳ, ἅπασα ἐφαρμοσθήσεται· διὰ τὸ ἐξ ἴσου τοῖς εὐθείαις τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι, ἃ μὲν δὴ μέρος μετὰ ταύτης ἐφαρμοσθήσεται, ἡ δὲ λοιπὴ οὔ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐφαρμοσθήτω ἡ δβγ, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς αβγ, καὶ τῆ μετὰ βγ, αὐτῆς μέρος ἐφαρμοττομένη, τὸ λοιπὸν βδ, ἀφάρμοστον μετέπιπτε· ὥστε εἶναι τῶν αβγ, καὶ δβγ, εὐθειῶν κοινὸν τμῆμα τὸ βγ. κείσθω μετὰ δὴ τῆ β, διαχύματι δὴ τῆ βα, κύκλος γεγράφθω ὁ αδε γ. καὶ ἐπεὶ ἡ δβγ, εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου διήρχεται, διαμέτρός ἐστι τοῦ τὸν ις'. ὅρον, καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον· ὥστε τὸ δεγ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ τὸ αεγ, ἡμικύκλιον, ὅτι καὶ ἡ αβγ, διὰ τοῦ κέντρου διήρχεται, ὥστε τὸ δεγ, ἴσον ἐστὶ τῷ αεγ, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπερέχει γὰρ τὸ αεγ, τοῦ δεγ, τῇ αδ, τόξῳ.

Euc. Lib. 1. Fig. 12.



ΙΔ'. Καὶ τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσι.

Περίληψις τῆ Πρώτη Βιβλίῳ Εὐκλείδ.

Ἐπὶ τῆ παρούσῃ Πρώτῃ Βιβλίῳ ὁ Εὐκλείδης ἐν τῇ ἐνθέσει τῆ ὅρων, πραγματεύται περὶ τῆ γραμμῶν, καὶ τῆ ἐκ τούτων ποικίλως πως εὐθυλίνεως συμβεβηκυιῶν, εὐαρμοσμένων γωνιωδῶν, καὶ μὴ, σχημάτων. τούτοις ἐπιφέρει τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα. εἰς εἶδος κλασὶ κεχρημένος ἐπὶ τινὶ ἀποδείξιν χωρεῖ τῆ προτάσεων· ὧν ἐπὶ μὲν τῆ ὀκτὼ πρώτων περὶ τῆ ἐπιπέδων πραγματεύεται ξυγάνεων, τινὶ φύσιν αὐτῆ ἀπαντώντων. μεθ' ταύτας δὲ περὶ τὰ διχοτομῆν γωνίας τε καὶ γραμμάς, καὶ καθέτους ἀορθῶν, ἢ καθετοῦ τινὶ μέθοδον παραδίδωσιν. ἐπὶ τούτοις τὰ λοιπὰ τῶν ξυγάνων πάθη καὶ παραλλήλων, μεθ' ἃ καὶ τὰς τῶν τριπλεύρων καὶ παραλληλογράμμων ἰδιότητας, θεωρεῖ, ἀποδεικνύων τίνι λόγῳ τὰ πολύγωνα, καὶ μὴ κανονικὰ σχήματα δυνατὰ ἀναγνῶναι εἰς ὀρθογώνια, ἴσα παραλληλόγραμμα, ἢ ξύγωνα, σαφήσιρα ἀμίλλη καὶ κανονικά. καὶ τέλος ἐπιτίθησι τῷ λόγῳ, τῷ πολυθρυλλήτῳ Πυθαγορείῳ θεωρήματι τῆς ἑκατόμβης ἀκριβείας προπαίσιως, παρὰ τὸ ἑκατὸν θῦσαι βόας ἐπὶ τῇ ταύτης εὑρέσει.

Αἱ χρησιμώτεραι δὲ ταῖς ἐπιστήμαις προτάσεις, ὑπὲρ ὧν ὁ ἅπας γίνεται λόγος, εἰσὶν αὗται, ἡ λβ'. λε'. λζ'. μδ. μδ'. μι'. καὶ μζ'.

ΕΡΜΗ.

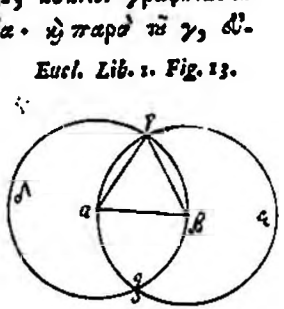
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Πρότασις Πρώτη. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἐπὶ τῆς αβ, ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. κέντροις μὲν τοῖς α β, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ αβ, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ γδζ, γεζ, τεμνόμενοι κατὰ τὸ γ, ἀφ' ὧν τὰ γ, ζ, σημεῖα. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἐπὶ τὰ α, β, εὐθεῖαι ἠχθωσαν αἱ γα, γβ. καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γδζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γεζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αγ τῇ αβ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν γα, γβ τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ γα, αβ, βγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. τὸ δὲ ἰσόπλευρον τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον εὐθείας· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

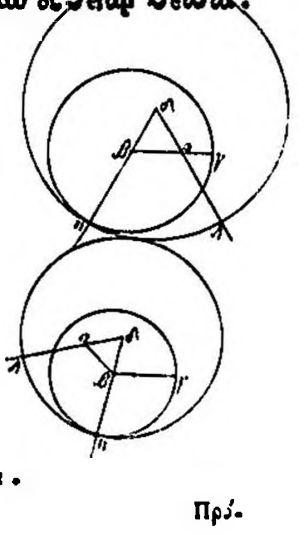
Eucl. Lib. 1. Fig. 13.



Πρότασις Δευτέρα. Πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θεῖναι.

Δοθὲν μὲν τὸ α σημεῖον, δοθεῖσα δὲ εὐθεῖα ἡ βγ, δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ ἴσην εὐθεῖαν θεῖναι. ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ β σημεῖον εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβδ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δβ, δα, εὐθεῖαι αἱ βε, αζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω ὁ γεη, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ ηλκ. καὶ ἐπεὶ τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γεη κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ βη. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ηλκ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δλ τῇ δη, ὧν ἡ δβ τῇ δα ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ αλ λοιπῇ τῇ βη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ βγ τῇ βη ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν αλ, βγ τῇ βη ἐστὶν ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ αλ ἄρα τῇ βγ ἐστὶν ἴση. πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ ἴση εὐθεῖα τέθειται ἡ αλ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

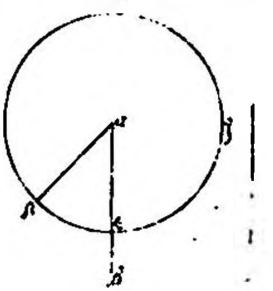


Πρό-

Πρότασις Τρίτη. Πρόβλημα.

Δύο δοθασῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

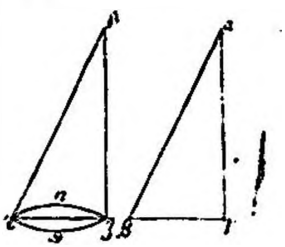
Euclid. Lib. 1. Fig. 24.



Ἔστω δὲ ἀπὸ μείζονος τῆς αβ, ἴσῃ εὐθείᾳ τῇ ἐλάττονι γ, δεῖλειν. εἰλήφθω πίνυ ἡ αδ, ἴση τῇ γ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δεζ, τέμνων τὴν αβ, κατὰ τὸ ε. πάνυ γὰρ χρησιμεύει, ἔσαι ἡ αε, ἴση τῇ δοθείσῃ γ. ἐπεὶ γὰρ αἱ αε, τῇ γ, ἴσαί εἰσιν ἑκατέρα τῇ αδ, ἡ μὲν ἐκ τῆς καταστάσεως, ἡ δὲ ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, τῇ ἀπέναντι ἄρα εἰσὶν ἴσαι καὶ τὸ ἀ. ἀξίωμα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Τετάρτη. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.



Τριγώνων ἔστω τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὴν μὲν αβ, πλευρὰν τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἴσην, καὶ τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴσην. ἔσαι δείκνυσθαι καὶ ἡ βγ, βάσις ἴση, τῇ εζ, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβγ, ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση. τὸ γὰρ αβγ, τριγώνου ἐφαρμοσθέντος τῷ δεζ, ἐφαρμοσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε καὶ ἡ αβ, πλευρὰ ἐφαρμοσθήσεται τῇ δε, πλευρᾷ, καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, καὶ τὸ ε. ἀξίωμα. πάνυ δ' ὅπου ἐπικειμένων, ἀνάγκη ἐφαρμοσθῆναι καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰγαρ μὴ, ἢ ἐντὸς ὡς ἡ εη, πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς ὡς ἡ εθ ζ. καὶ δύο δὲ εἶναι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ ε. ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς καὶ τὰ ἑξῆς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

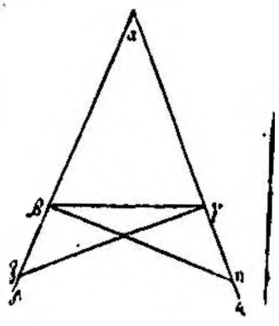
Πρό-

Πρότασις Πέμπτη. Θεώρημα.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

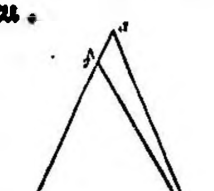
Τετράγωνα ἤδη τὰ αβγ, ἰσοσκελῆς, λέγω, ὅτι αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ. ἴσαι εἰσί. καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν προσεκβληθεισῶν τῶν αβ, αγ, πλευρῶν πρὸς τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα τυχόντα ἴσα ἀπ' αὐτῶν τῶν βάσεων, αἱ ὑπὸ βγε, γβδ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῇ βζ, γη, ἴσαι, καὶ τῇ βη, γζ, ἡμισείων διχῶς ἄμφω δεδιχθήσεται. Ἐπεὶ γὰρ τῇ αβ ἴση, αγζ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αβ, αη, ἴσαι εἰσί, δυσὶ ταῖς αγ, αζ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, γωνία κοινή, ἄρα καὶ αἱ βη, γζ, βάσεις ἴσαι ἔσονται καὶ τὸ αὐτόρρω. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αβη, γωνία τῇ ὑπὸ αγζ, ὁμοίως ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ βηα, τῇ ὑπὸ γζα. αὖθις ἐπεὶ τῇ βγη, γβζ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ βζ, ζγ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γη, ηβ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία τῇ πρὸς τῷ η, ὡσαύτως ἴση· ἔστι δ' ἔτι καὶ ἡ βγ, βάσις κοινή, ἄρα καὶ ὅλον τὸ βλ. γωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται καὶ τὸ αὐτόρρω. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γβζ, γωνία τῇ ὑπὸ βγη, ἴση, αἵτινες εἰσὶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. προδέδεικται δ' εἶναι καὶ ἡ ὑπὸ αβη, ἴση τῇ ὑπὸ αγζ. ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ μὲν τῆς αβη, τῆς γβη, ἀπὸ δὲ τῆς αγζ, τῆς βγζ, ὑγκαταλειφθήσονται κατὰ τὸ ἠ. δεξιώμα, καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, καὶ αγβ, γωνίαι ἴσαι, καὶ αὐταί εἰσιν αἱ πρὸς τῇ βάσει. τῷ ἰσοσκελῶν ἄρα τριγώνων καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 1. Fig. 15.



Πρότασις Ἕκτη. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστωσαν δὴ τριγώνου τοῦ αβγ, αἱ δύο γωνίαι, αἵτινες ὑπὸ αβγ, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, ἴσαι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ταύτας ὑποτείνουσαι αἱ αβ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰ γὰρ μή, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω παραδέχεσθαι, ἡ αβ, μείζων τῆς αγ. καὶ κατὰ τὸ γ'. τῇ παρούσῃ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, ἡ δβ, ἴση τῇ αγ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δγ. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα δβγ, αγβ, ὑπείρ ἔχουσι τὰς δύο πλευ-

ρὰς

ρὰς δβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ δβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγβ, ἴσην, ἴσα ἐπὶλοις ἔσονται κατὰ τὴν δ'. τὸ αὐτῶ. ὅπερ ἔπρεπον ἦν τὸ δ'. δεῖγμα. ἐὰν ἄρα ξυγώνε αἱ δύο γωνίαι ἴσαι τ'ξ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

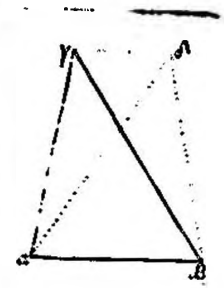
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι παν ξύγωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὸ ἰσογώνιον, ἰσόπλευρον.

Πρότασις Ἑβδόμη. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἐπὶ τῆς αβ, πίνω εὐθείας, ἐφ' ἧς συνεστάτωσαν αἱ γα, γβ. δυνατὸν συνεστάθωσαν ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς γα, γβ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταύτας. εἰ γὰρ δυνατὸν συνεστάθωσαν αἱ δα, δβ. πρὸς ἄλλῳ σημείῳ τῷ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐφ' ἃ καὶ αἱ γα, γβ, εἰσὶ, τὰ αὐτὰ ἔχουσαι πέρατα τὰ α, καὶ β. καὶ ἔστω ἡ μὲν δα, ἴση τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ βγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ καὶ τὴν ὑπόθεσιν ἡ μὲν δα, ἴση ἐστὶ τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ γβ. πάντως γε τὸ γαδ, γβδ, ξύγωνα ἰσοσκελῆ εἰσι, καὶ καὶ τὴν ε'. τὸ παρόντος, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ δὲ ὑπὸ βδγ, τῇ ὑπὸ βγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βγδ, ἡ ἴση τῇ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ. ἴση δὲ τῇ ὑπὸ αδγ, δέδεικται ἡ ὑπὸ αγδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ αγδ, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄτοπον ἦν τὸ δ'. δεῖγμα. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα εὐθείας δυσὶ καὶ τ'ξ.

Εucl. Lib. 1. Fig. 16.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

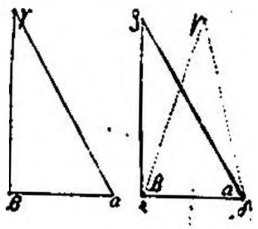
Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο ξύγωνα ἴσα, ἰσόπλευρα, καὶ ἰσοσκελῆ ἐπὶ δυσὶν εὐθείαις ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, καὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ε'αν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

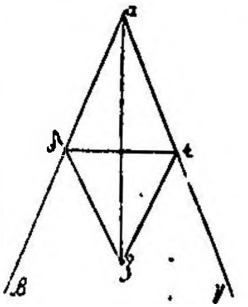
Τρίγωνα γὰρ τὰ αβγ, δεζ, ἐχέτωσαν τὴν μὲν γα, πλευρὰν ἴσην τῇ ζδ. τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν αβ, βάσιν τῇ δε, βάσει. λέγω, ὅτι καὶ αὐτὰ τρίγωνα ἴσα ἔσται καὶ τὴν πρὸς τῇ γ, γωνίαν, ἴσην τῇ πρὸς τῇ ζ. καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. ἐφαρμοζομένης γὰρ τῆς αβ, βάσεως τῇ αβγ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς δε, πεσεῖται τὸ μὲν α, σημεῖον ἐπὶ τῷ δ, τὸ δὲ β, ἐπὶ τῷ ε, καὶ ἐπομένως ἡ αγ, ἐφαρμοθήσεται ἐπὶ τῆς δζ, ἴσης αὐτῇ, καὶ ἡ γβ, πλευρὰ ἐπὶ τῆς εζ. ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἐφαρμοθήσεται τῇ πρὸς τῷ ζ. εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ' ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, πρὸς ἄλλῳ ἔσται σημείῳ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ζ, πρὸς ἄλλῳ, συμπεσοῦνται πάλιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αβ, ἡ δε, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, δύο εἰπεῖν, δζ, εζ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ αγ, βγ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἀδύνατον ἦν τῷ αὐτῷ. ἐαν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὴν βάσιν.

Euch. Lib. 1. Fig. 17.



Πρότασις Θ'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.



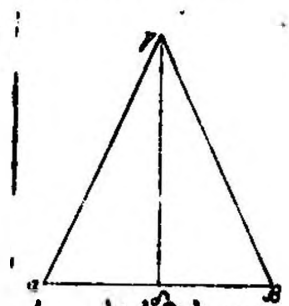
Ε'στω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, καὶ εἰλήφθω τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν αβ, αγ, σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ αδ, ἴση ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ δεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ διαιρεθήσεται δίχα ἡ ὑπὸ βαγ, δοθεῖσα γωνία. τὰ γὰρ δα ζ, καὶ εαζ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ καὶ τὴν αὐτὴν, καὶ τὰς ὑπὸ τὴν ἴσων εὐθειῶν ὑποτεινομένας γωνίας ἴσας ἔχουσιν. ὥστε ἡ ὑπὸ δαζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εαζ, διὰ τὸ καὶ τὴν δζ, ἴσην εἶναι τῇ εζ. ἡ δοθεῖσα ἄρα γωνία δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Ι'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω δὴ δίχα τμηῖν τὴν αβ, πεπερασμένην εὐθεῖαν, ἣ συστήσεται ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον, διὰ τῆς α. τὸ αγβ. εἶτα διαιρεθήτω ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία δίχα, διὰ τῆς αὐτέρω, τῇ γδ, εὐθείᾳ, καὶ τμηθήσεται παύτως δίχα καὶ ἡ αβ. ἐπεὶ γὰρ πὰ αγδ, βγδ, ἰσόπλευρα ἔχεσι τὰς δύο πλευρὰς αγ, γδ, ἴσας δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν ὑπὸ αγδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ βγδ, ἴσαι ἄρα καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ βδ, καὶ τὴν δ'. ἡ δοθεῖσα ἄρα αβ, εὐθεῖα δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

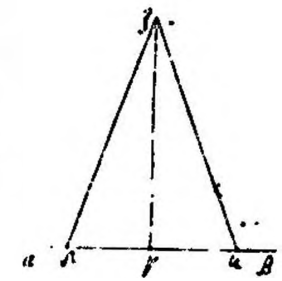
Euel. Lib. 1. Fig. 18.



Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

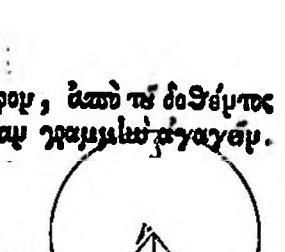
Ἔστω δὴ ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ τὸ σημεῖον πρὸς αὐτῇ τὸ γ, ἀφ' οὗ τὴν καθέτον δεῖ ἀγαγεῖν. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ, τὸ γδ, γε, διαστήματα ἴσα, καὶ συστάσθω διὰ τῆς α. ἰσόπλευρον ἐπὶ τῆς δε, τὸ δζε. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ ζγ, λέγω καθέτον εἶναι. τῇ γὰρ δζγ, εζγ, ἰσογώνων τὰς δγ, γζ, πλευρὰς ἴσας ἐχόντων ταῖς εγ, γζ, καὶ τὴν ζδ, βάσιν τῇ ζε, ἴσαι καὶ ἡ ὑπὸ δγζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εγζ, καὶ τὴν ἡ. ἄρα ὀρθὴ τὸν ἑ. ὅρον, ἡ ζγ, καθέτός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, καθέτου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἐπὶ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν καθέτον ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ γ, σημείου, τὸ μὴ ἐπ' αὐτῆς. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ γδ, γεγράφθω κύκλος ὁ εζδη, δίχα δὲ τῆς δε, τμηθείσης κατὰ τὸ θ, διὰ τῆς ι. ἐπιζεύχθω ἡ γθ, καὶ αὕτη καθέτος ἔσται ἐπὶ τῆς αβ. τῇ γὰρ



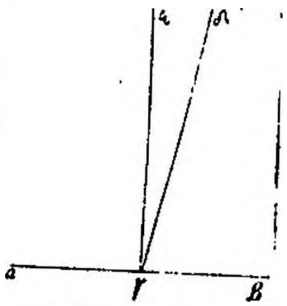
γδ,

γδ, γε, εὐθειῶν ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ δθ, ἴση ἐστὶ τῇ θε, ἡ δὲ θγ, κοινὴ, ὑὴ ἡ γδ, ἴση τῇ γε, καὶ τὸν ιέ. ὅρον, παντὸς γε πὸ δθγ, εθγ, βίγωνα ἴσα ἐστὶ καὶ τλω ἡ. ὑὴ ἡ ὑπὸ δθγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ. ὥστε ἡ γθ, κάθετός ἐστι καὶ τὸν ι. ὅρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ὡς αὖ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. *Euc. Lib. 1. Fig. 19.*

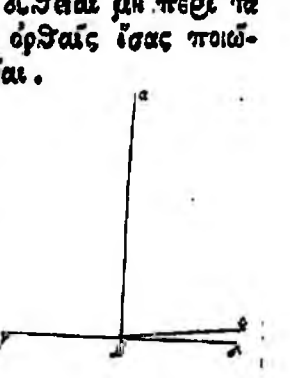
Ἐπὶ γὰρ τῆς αβ, εὐθεῖα σταθεῖσα ἡ γδ, εἰμὲν τὰς ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσῃ, κάθετος καλεῖται ἑκατέρα ἐπὶ τῆς αβ, καὶ τὸν ι. ὅρον, ὑὴ αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι ὀρθαί. εἰδὲ ἀνίσους, ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γε, ἀπὸ τοῦ γ, σημείου καὶ τλω ια. ὑὴ δειχθήσονται αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγδ, ὑὴ δγα, γωνίαι ἴσαί εἰσι ταῖς ὑπὸ βγδ, δγε, εγα, ὡς περιεκτικαὶ αὐτῇ, ταῖς δὲ ὑπὸ ταύταις γωνίαις ἴσαί εἰσιν διὰ τὸ αὐτὰ, ὑὴ αἱ ὑπὸ βγε, εγα, δύο ὀρθαί. παντὸς γε καὶ τοῦ δ. ἀξιώμα αἱ ὑπὸ βγδ, δγα, ἴσαί εἰσι ταῖς ὑπὸ βγε, εγα, δυσὶν ὀρθαῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ποτὲ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ μὴ ποτὲ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι αἱ γβ, δβ, συνεστάτωσαν πρὸς τῷ β, σημείῳ, ὥστε ποιεῖν τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, ὑὴ ἔσονται αὗται ἐπ' εὐθείας. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ εβ, ἐπ' εὐθείας τῇ γβ. ὑὴ ἐπεὶ ἐπὶ τῆς γβε, εὐθείας πέπτωκεν ἡ αβ, παντὸς γε αἱ ὑπὸ γβα, αβε, γωνίαι ἴσαί εἰσιν ὀρθαῖς καὶ τλω ἀνωτέρω. ἦσαν δὲ ὑὴ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τλω ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ὁ. ἀξιώμα αἱ ὑπὸ γβα, αβε, ἴσαί εἰσι



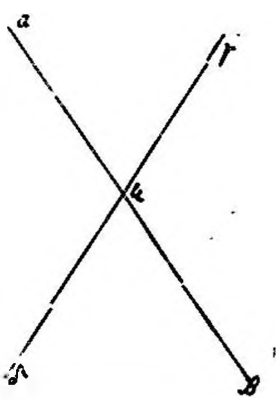
ταῖς ὑπὸ γ β α, α β δ. κοιναὶ δὲ ἀφαιρεμέναι αἱ ὑπὸ γ β α, ὑπολείπεται καὶ ἡ ὑπὸ α β ε, ἴση τῇ ὑπὸ α β δ. ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ θ'. ἀξίωμα. ἄρα αἱ γ β, β δ, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἄλλαι εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Τετμήτωσαν γὰρ αἱ α β, γ δ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε. λέγω, ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῷ γωνίαι, αἵτε ὑπὸ α ε δ, γ ε β, καὶ αἱ ὑπὸ δ ε β, α ε γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ α ε δ, δ ε β, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ιγ'. εἰσὶ δὲ διὰ τὰς αὐτὰς καὶ αἱ δ ε β, β ε γ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, παντὸς ἄρα αἱ ὑπὸ α ε δ, δ ε β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δ ε β, β ε γ, κατὰ τὸ α. ἀξίωμα. κοιναὶ δὲ ἀφαιρεμέναι αἱ ὑπὸ δ ε β, ὑπολείπονται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ὑπὸ α ε δ, β ε γ, κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ δ ε β, α ε γ, ἴσαι. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσι, κ.τ.ε.

Euel. Lib. 1. Fig. 20.



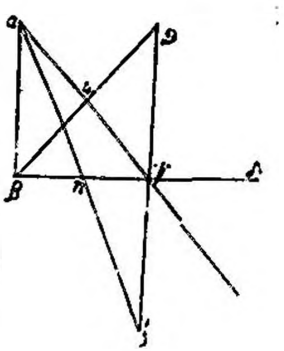
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὑπὸ ὁποσωνοῦν εὐθειῶν τεμνόντων ἀλλήλας, αἱ πρὸς τῇ τομῇ γωνίαι πάσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι.

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί.

Τοῦ β γ, ἔστω πλευρᾶς τὸ α β γ, τρίγωνον ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ δ, ἡ ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς αὐτῷ γωνία μείζων ἔστω ἑκατέρας τῶν ὑπὸ γ α β, α β γ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. τῆς γὰρ α γ, δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι. ἐξαχθεῖσα ἡ β ε, ἐπὶ τὸ θ. ἔστω τῇ β ε, ἴσον εἶναι τῇ ε θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θ γ. καὶ ἐπεὶ τῇ ε α β, ε γ θ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αε, ε β, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γ ε, ε θ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γ ε θ, κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἡ α β, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ θ γ, βάσει κατὰ τὸ δ'. καὶ αἱ λοιπαὶ αὐ-



τῷ

τῇ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι εἰσιν. ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ εβα, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ, τῇ ὑπὸ εγθ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγθ, ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ εαβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ, δίχα τῆς βγ, διαιρεθείσης κατὰ τὸ η, καὶ τῆς αη, ἐπὶ τὸ ζ, ὑξαχθείσης, τῆς δὲ κατασκευῆς ὡς καὶ ἀνωτέρω γενομένης. παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

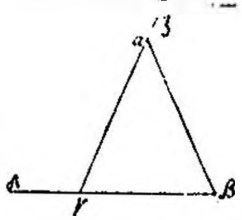
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς εὐθείας μὴ δυνάσθαι πλείονας εὐθείας ἴσας ἀγεσθαι, ἢ δύο μόνας.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἐλάσσονές εἰσι παντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Τριγώνου ἔστω τὸ αβγ, λέγω τὰς δύο γωνίας παντῃ μεταλαμβανομένας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. εἰ γὰρ ἡ βγ, πρὸς τὸ δ, ἀχθῇ, ἔσονται αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ, ἐλάσσονες τῶν ὑπὸ αγδ, αγβ, διὰ τὸ τὴν μὲν ὑπὸ αγδ, μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ αβγ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὴν δὲ ὑπὸ αγβ, κοινήν. αἱ δὲ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγ'. ἄρα αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ, ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν. εἰδὴ ἡ βα, ἀχθῇ κατὰ τὸ ε, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον, τὰς ὑπὸ γαβ, γβα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. ὡσαύτως δὲ καὶ τῆς γα, καὶ τὸ ζ, ἀχθείσης, δειχθήσεται καὶ τὰς βαγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 1. Fig. 21.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, μὴ δυνάσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους πίπτειν.

Β'. Ἔτι παντὸς τριγώνου, εἰπερ αἱ μία τῶν γωνιῶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα τύχῃ, τὰς λοιπὰς ὀξείας εἶναι.

Γ'. Ἔτι δυνατὸν ἐπί τινος εὐθείας εὐθεῖα καθεῖσα γωνίας ἀνίσους ποιῇ, τὴν παρά τινος σημείου τῆς ἐφεστηκυίας εὐθείας πίπτουσαν καθετον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης, πρὸς τὰ τῆς ὀξείας γωνίας πίπτειν μέρη.

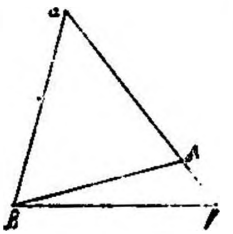
Δ'. Ἔτι τὸ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου πᾶσας τὰς γωνίας ὀξείας εἶναι, τὸ δὲ ἰσοσκελοῦς τὰς δύο πρὸς τῇ βάσει.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζονα πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τὸ αβγ, τριγώνου ἡ αγ, πλευρὰ μείζων τῆς αβ, λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ αγβ. ἀχρήθω γὰρ ἀπὸ τῆς αγ, ἴση τῇ αβ, ἡ αδ, καὶ τὴν γ'. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβδ, αδβ, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὴν ε'. ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβδ, καὶ τὸ δ'. ἀξιώμα. παύσω γε ἡ αὐτὴ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶν ἔτι καὶ τῆς ὑπὸ αδβ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ, καὶ τὴν ις'. ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ προτεθέν.

Euel. Lib. 1. Fig. 22.



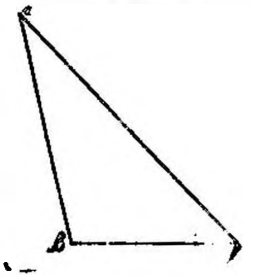
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, τὸ μὲν σκαληνὸν τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ἀνίσους εἶναι, τὸ δὲ ἰσοπλεύρου ἴσας.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τὸ αβγ, τριγώνου ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία μείζων τῆς ὑπὸ βγα. λέγω, ὅτι καὶ ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴση ἔσται, ἢ ἐλάττων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔσται, ἔσται γὰρ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, καὶ τὴν ε'. οὐκ ἔστι δὲ μείζων, ἄτοπον ἄρα. οὐδὲ ἡ αγ, ἐλάττων εἶναι τῆς αβ, ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ, διὰ τὰ αὐτὰ, ὅπερ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον, οὐκ ἄρα γὰρ ἴση. πάντως ἄρα ἔστιν ὑπὸ τὴν μείζονα καὶ τὴν ἐξῆς.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῇ ἀφ' ἑνὸς σημείου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐπὶ τινος εὐθείας, ἡ μὲν κάθετος ἐλαχίστη ἐστὶν, ἡ δὲ ἀπώτερον τῆς ἐγγύτερον μείζων.

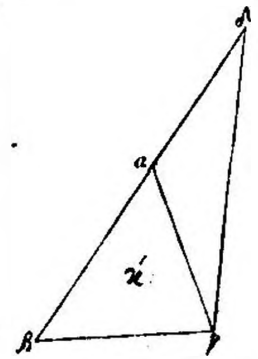
Β'. Ἔτι ἐν μὲν ταῖς ὀρθογωνίοις ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα γωνίαν μείζων ἐστὶ τῶν λοιπῶν, ἐν δὲ ταῖς ἀμβλυγωνίοις ἡ τὴν ἀμβλεῖαν.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι παντῇ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω δὲ τρίγωνον τὸ αβγ, λέγω, τὰς τῶν αβ, αγ, πλευρὰς μείζονας εἶναι τῆς βγ. ἤχθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, ὥστε εἶναι τὴν αδ, ἴσην, τῇ αγ, καὶ ἐπιζεύχ-

ζεύχθω ἡ δγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, παύπως γὶ αἱ ὑπὸ αγδ, αδγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ε. τῶ παρόντος. τῆς δὲ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βγδ, ἄρα ἡ αὐπὶ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς αδγ. ὥστε καὶ τὸν αὐτῆρω ἡ βδ, πλευρὰ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ἀλλὰ τῇ βδ, ἴσαι εἰσὶ συναμφότεραι αἱ βα, αγ, ἄρα καὶ αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῆς βγ. ὅπερ ἓν τὸ προπθεν. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ πὰς βγ, γα, μείζυς ἐναι τῆς αβ, πὰς δὲ αβ, βγ, τῆς αγ. τῆς καπασκευῆς ὡς ἐπὶ γενομένης, καὶ τὸν προειρημένον τρόπον.



Euclid. Lib. 1. Fig. 23.

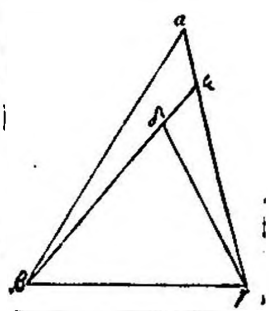
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ πύπυ φανερὸν, ὅτι παντὸς τραπλεύρυ ἡ διαγώνιος διάμιτρος, ἐλάτπων ἐστὶ τῆ ἑκατέρωθεν δύο πλευρῶν.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ζιγώνυ ἐπὶ μιᾶς τῆ πλευρῶ ἀπὸ τῆ περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συναθῶσιν, αἱ συναθεῖσαι τῆ λοιπῶ τῶ ζιγώνυ δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξυσιν.

Τῶ αβγ, ἤδη ζιγώνυ, ἐπὶ τῆς βγ, πλευρᾶς, ἀπὸ τῆ περάτων βγ, συνεστάθωσαν δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αἱ βδ, γδ. λέγω, παύπας ἐλάττονας μὲν ἐναι τῶν βα, αγ, μείζονα δὲ γωνίαν τὴν ὑπὸ βδγ, περιέχειν, τῆς ὑπὸ βαγ. διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ τὸν αὐτῆρω διήπωθεν αἱ βα, αε, πλευραὶ τῶ αβε, ζιγώνυ μείζονές εἰσι τῆς βε, κοινῆς δὲ τῆς εγ, προσκειμένης, αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῶν βε, εγ. ἔπει δὲ καὶ τῶ δεγ, ζιγώνυ αἱ δε, εγ, πλευραὶ μείζονές εἰσι τῆς δγ. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς βδ, παύπως γε αἱ γε, εβ, μείζονές εἰσι τῶν γδ, δβ. ἀλλὰ τῶν γε, εβ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, ἄρα αἱ βα, αγ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν βδ, δγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ α. Λύθις τῶ γεδ, ζιγώνυ ἡ ἐκπὸς γωνία, ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεγ, καὶ τὸν ε'. τῶ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ δεγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, καὶ τὸν αὐτὸν, ἡ βδγ, ἄρα γωνία πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ β'. Ἐὰν ζιγώνυ ἄρα ἐπὶ μιᾶς καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

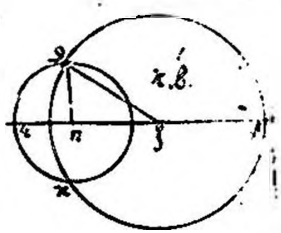
Ἐκ δὴ πύπυ συνάγεται μὴ δύνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο ζιγωνα ὅμοια συνίστασθαι.

Πρότασις ΚΒ'. Πρόβλημα.

Εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι τὰς δοθείσας εὐθείας, δύνανται συνίστασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι παντῇ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, παντῇ μεταλαμβανομένας.

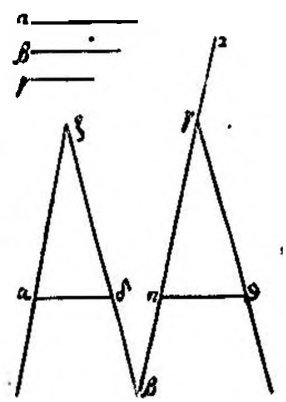
Εἰλήφθω τοίνυν ἡ δε, καὶ ἐξ αὐτῆς τμηθέντω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β, ἡ ζη, καὶ τῇ γ, ἡ ηε. καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ, η, διαστήμασι δὲ τοῖς ζδ, ηε, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ δθκ, εθκ, τεμνέτωσαν κατὰ τὸ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θζ, θη. λέγω δὴ τῷ ζθη, τριγώνῳ τὰς πλευρὰς εἶναι ἴσας ταῖς α, β, γ, δοθείσαις. ἐπεὶ γὰρ ζθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζδ, καὶ τὸν αὐτὸν ὅρον. καὶ δὲ τὸ α. ἀξίωμα καὶ τῇ α. ἀσαύτως ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε, καὶ τὸν αὐτὸν ὅρον. ἡ δὲ ηε, εἴληπται ἴση τῇ γ, ἄρα καὶ τὸ ῥηθὲν ἀξίωμα, ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γ. γέγονε δὲ καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ β, ἄρα τῷ ζθη, τριγώνου αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς α, β, γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 24.



Πρότασις ΚΓ'. Πρόβλημα.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρός αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συνίστασθαι.



Ἔστω δὲ πρὸς τῇ αβ, δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ γ, πρὸς αὐτῇ σημείῳ, γωνίαν εὐθύγραμμον συνίστασθαι, ἴσην τῇ ὑπὸ εζδ, δοθείσῃ. εἰλήφθωσαν τοίνυν τυχόντα τὰ ζε, ζδ, διαστήματα, ὡς ἔτυχε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εδ. εἶτα συνεστάθω διὰ τῶν αὐτῶν πρὸς τῇ αβ, εὐθείας πρὸς τῇ γ, σημείῳ τριγώνου, ἐκ τριῶν πλευρῶν ἴσων ταῖς δε, εζ, ζδ, τὸ γηθ. ὥστε τὴν μὲν γη, ἴσην εἶναι τῇ ζε, τὴν δὲ γθ, τῇ ζδ, καὶ τὴν ηθ, τῇ εδ. Ἐπεὶ οὖν τὰ εζ δ, καὶ ηγθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς εζ, ζδ, ἴσας, δυσὶ ταῖς ηγ, γθ, καὶ τὴν εδ, βάσιν, βάσει τῇ ηθ, ἴσην, ἕξουσι καὶ γωνίαν τὴν ὑπό. καὶ τὴν ὑπὸ εζδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ηγθ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

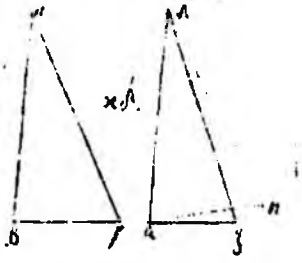
Πρό-

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

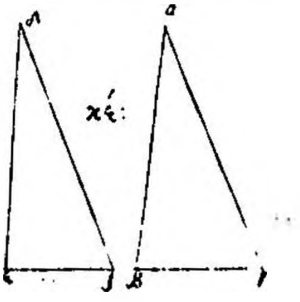
Τριγώνων γὰρ τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὰς δύο πλευρὰς αβ, αγ, ἴσας ταῖς δυσὶ πλευραῖς δε, δζ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας μείζονος ἔστω, τῆς ὑπὸ εδζ. λέγω καὶ τὴν βγ, βάσιν, μείζονα εἶναι τῆς εζ, βάσεως. κατεσκευάσθω γὰρ τοίνυν τὸ εδη, τρίγωνον ἴσον τῷ βαγ, καὶ τὴν κβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ δη, ἴση γέγονε τῇ αγ, ἴση δὲ καὶ ἡ δζ, ἴση τῇ αὐτῇ αγ. παίσης γὰρ αἱ δη, δζ, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸ α'. ἀξιώμα. καὶ ἡ ὑπὸ δηζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δζη, καὶ τὴν ε'. ἡ δὲ ὑπὸ δηζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δζη, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ δζη, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, ἄρα ἡ ὑπὸ εζη, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε. ὥστε καὶ τὴν ε δ'. ἡ εη, ὑποτείνουσα, μείζων ἐστὶ τῆς εζ, ἴδη δὲ εη, ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἄρα καὶ ἡ βγ, μείζων ἐστὶ τῆς εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 1. Fig. 25.



Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



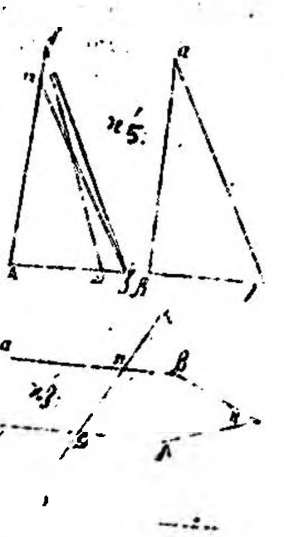
Ἐχέτωσαν γὰρ τὰ αβγ, εδζ, τρίγωνα πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ἴσας, πλευραῖς ταῖς δε, εζ, καὶ τὴν βγ, βάσιν μείζονα ἔστω τῆς εζ, βάσεως. λέγω καὶ τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ εδζ. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴση ἔσται, ἢ ἐλάττων. εἰμὲν οὖν ἴση ὑποτεθῇ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἔσται καὶ ἡ βγ, βάσις τῇ εζ, βάσει, καὶ τὴν δ'. ὅπερ ἄτοπον, ὑπεκειτο γὰρ μείζων. εἰδὲ ἡ ὑπὸ βαγ, ὑποπεσῇ ἐλάττων τῆς ὑπὸ εδζ. ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ βγ, βάσις τῆς εζ, βάσεως, καὶ τὴν ἀναπάλιν. ὃ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον. οὐκ ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κς'. Θεώρημα.

Ε'αν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ε'στωσαν δὴ τῶν αβγ, δεζ, τριγώνων αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ δεζ, δζε, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευρὰ, ἡ βγ, ἴση τῇ εζ. λέγω ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, καὶ τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ. εἰ γὰρ μή, ἔσται παύτως ἡ μία τῶν ἑτέρας μείζων. Ε'στω πρότερον ἡ δε, μείζων τῆς αβ. καὶ γεγράφθω ἡ βη, ἴση τῇ αβ, καὶ τὴν γ'. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηζ. καὶ ἐπεὶ τῶν ηβζ, αβγ, τριγώνων ἡ βη, ἴση γέγονε τῇ αβ, καὶ ἡ βζ, ἴση ὑπόκειται τῇ βγ, καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ β, ὁμοίως ἴση· ἄρα καὶ τὴν δ'. ἴση ἔσται καὶ ἡ ηζ, τῇ αγ. καὶ ὅλον τὸ ηεζ, τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αβγ, τριγώνῳ· καὶ ἡ ὑπὸ ηζε, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, γωνίᾳ· ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηζε, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτὰς, ὅπερ ἄτοπον ἄρα, ὥστε ἐδὲ μείζων ἡ δε, τῆς αβ, ἀλλ' ἴση. Ε'στω αὖθις ἡ αβ, ἴση τῇ δε, λέγω πάλιν τὴν αγ, ἴσην εἶναι τῇ δζ, καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ εζ, μείζων τῆς βγ, τῇ δὲ εθ, ἴσης κειμένης τῇ βγ, ἐπεζεύχθω ἡ δθ. ἐπεὶ οὖν τῶν δεθ, αβγ, τριγώνων, ἡ μὲν δε, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ἡ δὲ εθ, τῇ βγ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία τῇ πρὸς τῷ β, παύτως γε, καὶ τὴν δ ἄρα ἡ δθ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, καὶ ἡ ὑπὸ δθε, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, ἴση· ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δζε, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δθε, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ δζε, ἡ ἐκτὸς τῷ ἐντός· ὅπερ ἄτοπον καὶ τὴν ις'. Ε'αν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 1. Fig. 26.



Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Ε'αν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ἀλλήλαις.

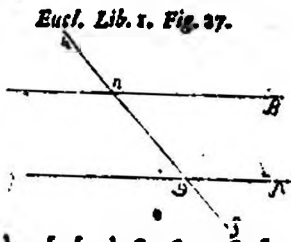
Εἰς δύο γὰρ εὐθείας τὰς αβ, γδ, ἐμπίπτουσα ἡ εζ, ποιείτω τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἴσας ἀλλήλαις· λέγω, ὅτι αἱ αβ, γδ, εὐθείαι παράλληλοί εἰσιν, ἐκβαλλομένας γὰρ αὐτὰς ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἤτοι πρὸς τὰ β, δ, μέρη συμ-

πιπτέτωσαν καὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν ἡ κΘ, τετμήσθω δίχα τῷ ε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ γ, παράλληλος ἡ ὑπὸ γΘη, γωνίαν μείζονα ἔξει τῆς ὑπὸ βηΘ, καὶ τῷ ις'. ὑπεκείσθω δὲ καὶ ἴση, ὅπερ ἄτοπον ἄρα. ὥστε αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη οὐ συμπίπτουσιν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τῷ ἐντὸς μοιρίαν τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο γὰρ εὐθείας τὰς αβ, γδ, πιπτέτω εὐθεῖα ἡ εζ, ποιείτω τὴν ὑπὸ εηβ, ἐντὸς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ηΘδ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω ὅτι αἱ αβ, γδ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηΘδ, τῇ δὲ ὑπὸ εηβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηΘ, καὶ τῷ ις'. καὶ αἱ ὑπὸ αηΘ, ηΘδ, εἰσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ ἐναλλάξ. ἄρα καὶ τὰν ἀνωτέρω αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι.



Euclid. Lib. 1. Fig. 27.

Ποιείτω δὴ πάλιν ἡ εζ, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, τὰς ὑπὸ βηΘ, ηΘδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βηΘ, ηΘδ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι καὶ τῷ ὑπόθεσιν, εἰσὶ δὲ ὁμοίως καὶ αἱ βηΘ, Θηα, δυσὶν ὀρθαῖς εἶσαι καὶ τῷ ις'. παύεται ἄρα αἱ βηΘ, ηΘδ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς βηΘ, Θηα. κοινῆς δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς βηΘ, ὑπολείπονται ἴσαι αἱ ηΘδ, Θηα, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. αἱ αβ, γδ, ἄρα εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν καὶ τῷ ἀνωτέρω. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

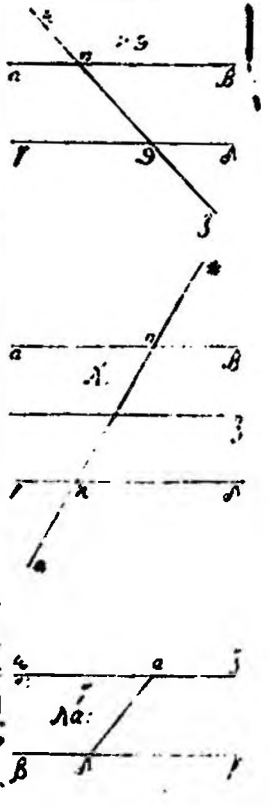
Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τῷ ἐντὸς τῇ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιεῖ, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ.

Εἰς παραλλήλους γὰρ τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα πιπτέτω ἡ εζ. λέγω, πρῶτον τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αηΘ, ηΘδ, ἴσας εἶναι. εἰ γὰρ μή, ἔσω ἡ ὑπὸ ηΘδ, ἐλάττων τῆς ὑπὸ αηΘ, καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηΘ. αἱ ἄρα ὑπὸ αηΘ, βηΘ, μείζονες τῶν ὑπὸ βηΘ, ηΘδ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ βηΘ, αηΘ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τῷ ις'. ἄρα αἱ ὑπὸ βηΘ, ηΘδ, ἐλάσσονές εἰσι δυσὶν

ὀρθῶν, ἢ ὑπομείωσε ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὰ β, δ, μέρη, συμπεσοῦνται, κατὰ τὸ ι α'. ἀξίωμα. ὅπερ ἄτοπον. ὑποτίθενται γὰρ αἱ παράλληλοι. ἄρα αἱ ὑπὸ α ν θ, ν θ δ, γωνίαι ἴσαι εἰσί. λέγω δὴ ὅτι, καὶ τῶν ἐκτὸς, τῶν ὑπὸ ε ν β, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ν θ δ. ἡ γὰρ ὑπὸ ε ν β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α ν θ, κατὰ τὸν ι ε'. τῇ δὲ α ν θ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ν θ δ, ὥστε κατὰ τὸ α', ἀξίωμα, ἡ ὑπὸ ε ν β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ν θ δ. λέγω τοίνυν, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ β ν θ, ν θ δ, ἴσας εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ε ν β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ν θ δ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ β ν θ, ἔσονται παῦται κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα, αἱ ὑπὸ ε ν β, β ν θ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ β ν θ, ν θ δ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ ε ν β, β ν θ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ β ν θ, ν θ δ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 1. Fig. 28.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι πάσης παραλληλογράμμου τὰς δύο γωνίας, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας, καὶ τὰς τέσσαρας τέσσαρσιν ἴσας.

Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Εὐθεῖα γὰρ ἥδε ἡ ε ζ, ἑκατέρα παράλληλος αἱ α β, γ δ, λέγω ταύτας καὶ ἀλλήλαις παραλλήλους εἶναι. περιπιπτούσης γὰρ ἐπ' αὐτὰς τῆς ν θ ν, ἔσονται αἱ ὑπὸ α ν θ, ν θ ζ, γωνίαι, καὶ τοῦ ἀπείρου, ἴσαι. ἀναπαλιν καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ν θ ζ, ἴση τῇ ἐντὸς ὑπὸ θ ν δ. ὥστε καὶ τὸ α. ἀξίωμα καὶ αἱ ὑπὸ α ν θ, ν ν δ, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ ἐναλλὰξ, ἄρα καὶ τοῦ ν ζ. αἱ α β, γ δ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐπὶ πάσης παραλληλογράμμου ἡ τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτῇ ἀχθεῖσα παράλληλος καὶ τῇ ἑτέρᾳ παράλληλος ἔσται.

Πρότασις ΛΑ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παραλλήλου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἀπὸ σημείου ἔδω τοῦ α, εὐθεῖα τῇ β γ, ἔστω εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἀχθέτω τίνων ὡς ἔτυχε ἡ α δ, καὶ γεγράφω, κατὰ τὸ ν γ'. τῇ ὑπὸ α δ γ, γωνίᾳ ἴση

ἴση ἡ ὑπὸ δ α ε· ᾗ διὰ τῆ α, ᾗ ε, σημείων διήχθω ἡ ε ζ, λέγω ταύτῃ παράλληλον εἶναι τῇ β γ. ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῆ ε ζ, β γ, εὐθεῖῶν πίπτουσα ἡ α δ, πεποίηκε τὰς ἐναλλὰξ ἴσας κατὰ τὸ κ ζ'. παίτως γε αἱ ε ζ, β γ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσι.

Τετράγωνος ἔστω τὸ α β γ, ἐκβεβλήσθω ἡ β γ, πλευρὰ ἐπὶ τὸ δ. λέγω τὴν ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ β α γ, α β γ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ α β, ἡ γ ε. καὶ ἐπεὶ εἰς παράλληλους τὰς α β, γ ε, πέπτωκεν ἡ α γ· παίτως γε αἱ ὑπὸ α γ ε, γ α β, γωνίαι ἴσαί εἰσι κατὰ τὸ κθ'. Ἐπεὶ δ' αὖθις εἰς παραλλήλους πέπτωκεν καὶ ἡ β γ· δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ ε γ δ, α β γ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ αὐτό. αἱ δύο ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ α γ ε, ε γ δ, ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ. ἀλλ' αἱ α γ ε, ε γ δ, ἴσαί εἰσι τῇ ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς· ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α γ δ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ. ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον. Λέγω δ' ὅτι, καὶ τρεῖς αἱ τοῦ τριγώνου πλευρὰς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἡ α γ δ, ἴση δέδεικται ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ α γ β, ἔσονται αἱ ὑπὸ α γ δ, α γ β, ἴσαι ταῖς ἔσωθεν τοῦ τριγώνου τρισὶ γωνίαις, ταῖς ὑπὸ γ α β, α β γ, β γ α. ἀλλ' αἱ α γ δ, α γ β, ἴσαί εἰσι δυσὶν ὀρθαῖς, κατὰ τὸ ε γ'. ἄρα καὶ τὸ δ. ἀξιώματα, καὶ αἱ ἔσωθεν τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν. ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι πᾶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, πᾶσα μὲν ὀρθογωνίου ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἡμισειά ἐστιν ὀρθῆς, πᾶσα δὲ ἀμβλυγωνίου, ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ πᾶσα ὀξυγωνίου μείζων.

Β'. Ἔτι πᾶν ἰσοπλεύρου ἑκάστη τῶν γωνιῶν δύο τρίτα μέρη περιέχει τῆς ὀρθῆς.

Γ'. Ἔτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ ἴσαί εἰσι ταῖς οἱουδήποτε τριγώνου τρισὶ γωνίαις ὁμοῦ λαμβανομέναις.

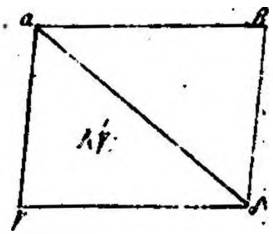
Δ'. Ἔτι παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαί τε καὶ παραλληλοί εἰσιν.

Αἱ αγ, βδ, ἤδη εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς αβ, γδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εὐθείας. λέγω καὶ τὰς αγ, βδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εἶναι. ἤχθω γὰρ ἡ αδ, διαγώνιος· καὶ ἐπεὶ τρίγ αβδ, δγα, τρίγωνον αἱ βα, αδ, πλευραὶ ἴσαί εἰσι ταῖς γδ, δα, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδα, παίπως γὰρ καὶ τλω πϑ'. καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ βάσει τῇ βδ· ὅπερ ἦν τὸ α. Λύθις ἐπεὶ τρίγ αβδ, αγδ, αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς δγ, γα, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινή· παίπως γὰρ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγδ. καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβδ, ὅλῳ τῷ τρι-γώνῳ αγδ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς· τπέσιν ἡ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· ἄρα αἱ αγ, βδ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, καὶ τλω κζ'. ὅπερ ἦν τὸ δεῖπρον.

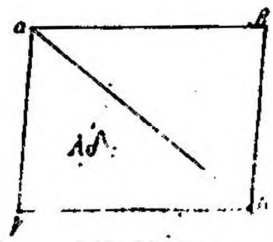
Eucl. Lib. 1. Fig. 30.



Πρότασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, λέγω ὅτι αἱ τοῦ ἀπεναντίον πλευραὶ, αἱ αβ, γδ, αγ, βδ, ἴσας εἶναι, καὶ τὰς γωνίας ἴσας τὰς ὑπὸ αβδ, αγδ, καὶ τὰς ὑπὸ γαβ, βδγ, ἴσας ὁμοίως δηλονότι εἶναι. τλω δὴ αδ, διάμετρος δίχα αὐτὸ τεμνέτω, τπέσι τὰ αβδ, αγδ, τρίγωνα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκε ἡ αδ, παίπως γὰρ καὶ τλω κϑ'. αἱ ἐναλλὰξ ὑπὸ βαδ, καὶ γδα, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὡσαύτως καὶ τλω αὐτλω καὶ αἱ ὑπὸ βδα, γαδ, γωνίαι ἴσαί εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰ κοινὴ, ἄρα καὶ τλω κς'. καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαί εἰσι, τπέσιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ τπόεστι τὸ α. Ἔστι δ' ἔτι καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, ἡ δὲ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βδγ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ τπόεστι τὸ β'. Ἐπεὶ δὲ τρίγ αβδ, αγδ, τρίγωνον αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς αγ, γδ, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινὴ, παίπως γὰρ καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβδ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ τριγώνῳ αγδ. καὶ τλω ε. καὶ τπόεστι τὸ γ'.



Πρό-

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

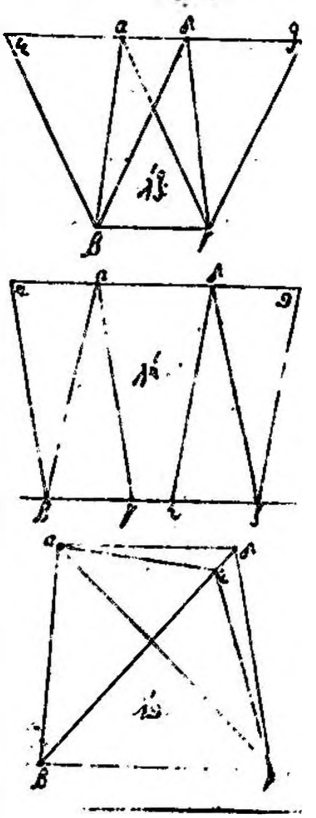
Ἐστωσαν ἤδη ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς γδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, γδ, τὰ αδ, ζδ, παραλληλόγραμμα. λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ αβ τῷ ζβ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβ· ὅλον ἄρα τὸ αζ ὅλῳ τῷ ηδ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ αγ τῷ ηδ ἐστὶν ἴσον· καὶ γὰρ ἡ αγ τῇ ηδ ἴση ἐστίν· καὶ ἡ βδ ἑκατέρα τῶν γδ, ηζ παραλλήλων ἐστίν· καὶ τὸ αγ ἄρα τῷ ηζ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβ· ὅλον ἄρα τὸ αδ ὅλῳ τῷ ζγ ἐστὶν ἴσον· ἀλλὰ τὸ αδ τῷ βγ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ βγ ἄρα τῷ ζγ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβ· ὅλον ἄρα τὸ ηγ τῷ ζβ ἐστὶν ἴσον· ἀλλὰ τὸ ηγ τῷ αβ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ αβ ἄρα τῷ ζβ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ζγ· καὶ τὸ αγ ἄρα τῷ ζβ ἐστὶν ἴσον· ἀλλὰ τὸ αγ τῷ ηδ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ηδ ἄρα τῷ ζβ

ἡ τὸ α'. ἀξίωμα τὸ αγ, εη, παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς βγ, τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς εζ, βγ. λέγω ταῦτα, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βε, παραλλήλως τῇ αγ, καὶ τῆς γζ, τῇ βδ, ἔσονται τὰ εγ, βζ, παραλληλόγραμμα, καὶ ἴσα ἀλλήλοις· καὶ τοῦ μὲν τὸ ἥμισυ ἐστὶ τὸ αβγ, δβγ, τρίγωνα, ἡ γὰρ βγ. ἀξίωμα τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Eucl. Lib. 1. Fig. 38.



Πρότασις ΛΗ'. Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν παραλλήλοις ταῖς ηθ, βζ, τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ. λέγω ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ παραλλήλως τῇ μὲν αγ, ἡ βη, τῇ δὲ εδ, ἡ ζθ. ἔσονται πάλιν τὰ ηγ, εθ, χωρία παραλληλόγραμμα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα· ἡ γὰρ βγ τῇ ζε. τούτων δὲ τὰ ἥμισυ ἐστὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα· ἡ γὰρ η δ. ἄρα καὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν δὲ ἴσα τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βγ, βάσεως, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δὸς εἶπεῖν, τὰ αὖω. λέγω ταῦτα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. εἰ γὰρ μή, ἐπιζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, βγ, κατὰ τὸν ὑπόθεσιν ἄρα εἰσὶ παράλληλοι, ἔστω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αε. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εγ. Ἐπεὶ οὖν τὸ αβγ, εβγ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τῆς βγ, καὶ παρὰ ταῖς αε, βγ. παράλληλοι γάρ εἰσι τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δβγ, τριγώνῳ ἴσον ἐστί. ἄρα καὶ τὸ α'. ἀξίωμα, τὸ δβγ, ἴσον

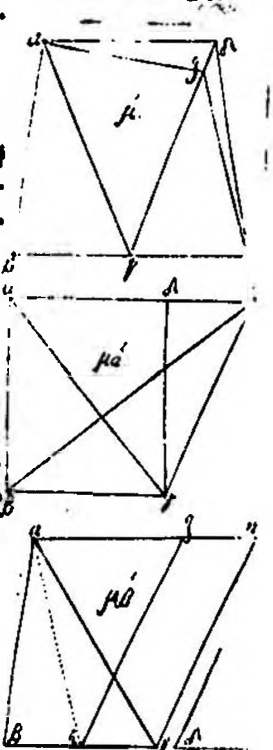
ἐστὶ τῇ ε β γ, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτὸ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ α ε, παράλληλός ἐστι τῇ β γ, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς α δ.

Πρότασις Μ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα τὰ α β γ, δ γ ε, ἴσα, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν β γ, γ ε. Λέγω πρῶτον καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις ταῖς β ε, α δ. εἰ γὰρ μή, ἔστω παράλληλος τῇ β ε, ἡ α ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζ γ. τρίγωνον ἄρα τὸ α β γ, τῷ ζ γ ε, τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· ἴσον δὲ τὸ α β γ, τῷ δ γ ε· καὶ τὸ δ γ ε, ἄρα τῷ ζ γ ε, ἴσον ἐστίν, τὸ μείζων τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ α ζ, τῇ β ε· ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδεμία ἄλλη πλὴν τῆς α δ, παράλληλός ἐστι τῇ β ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 33.



Πρότασις Μ Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Ἐχέτω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ α γ, τὴν αὐτὴν βάσιν τῇ β γ ε, τρίγωνον τὴν β γ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς β γ, α ε. Λέγω τὸ α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τοῦ β γ ε, τριγώνου. τῶν γὰρ α γ, ἀχθείσης, ἔσται παντὸς τὸ α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ α β γ, τριγώνου καὶ τὴν λ δ'. ἀλλὰ τῷ α β γ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ τὸ β γ ε, τρίγωνον καὶ τὴν λ ζ'. ἄρα τὸ α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ β γ ε, τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

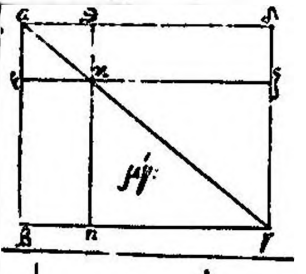
Πρότασις Μ Β'. Θεώρημα.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ α β γ· ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ πρὸς τῷ δ. δεῖ δὴ τῷ α β γ, τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ δ, γωνίᾳ. τετμήσθω τοίνυν ἡ β γ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ

τῆς ι'. καὶ πρὸς τῇ ε, σημείῳ συνεστάδω ὑπὸ γεζ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῇ δ, καὶ τῶν κγ'. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αη. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἤχθω ἐμοίως παράλληλος τῇ εζ, ἡ γη. καὶ ἐπιξευχθω ἡ αε. Λέγω δὴ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον εἶναι τῷ αβγ, τετραγώνῳ ἐν τῇ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. τὰ γὰρ αβε, αεγ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τῶν λι. ὥστε τὸ διπλάσιον, ἐστὶ τὸ ὅλον αβγ, τοῦ ἑτέρου αεγ, διπλάσιόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ αεγ, καὶ τῶν αὐτῶν, ἄρα τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ καὶ τῶν ς'. ἀξίωμα. ἔχει δὲ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον τῷ τῶν ὑπὸ ζεγ, γωνίαν ἴσων τῇ πρὸς τῇ δ, δοθείσῃ. τῇ δοθείσῃ ἄρα αβγ, τριγώνῳ συνέστα ἴσον τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἐν τῇ πρὸς τῇ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

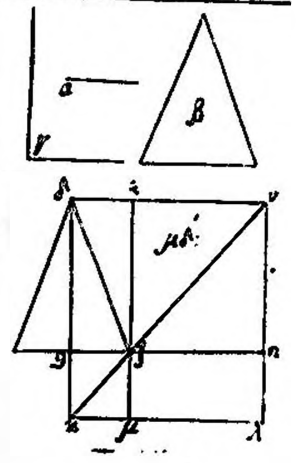
Euclid. Lib. 1. Fig. 44.



Πρότασις ΜΓ'. Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω δὴ τοῦ βδ, παραλληλογράμμου περὶ τὴν αγ, διάμετρον παραλληλόγραμμα τὰ ζν, θε, λέγω τὸ τῶν παραπληρώματα βη, ηδ, ἴσα εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βδ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, παντὸς γε τοῦ τῶν λδ'. τὸ αβγ, αδγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὡσαύτως δὴ καὶ τὰ κηγ, κζγ, καὶ ἔτι τὰ αεκ, αθκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἀφῶν ἀπὸ τοῦ αβγ, αδγ, ἴσων ἀφαιρεθῇ τὰ κηγ, κζγ, ἴσα, ἐγκαταλειφθήσεται καὶ τὸ ι. ἀξίωμα τὰ αβηκ, αδζκ, τραπέζια ἴσα. ἐπεὶ δ' αὖθις ἀπὸ τοῦ αβηκ, αδζκ, ἴσων, ἀφαιρεθῇ τὰ αεκ, αθκ, τρίγωνα ἴσα, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ βη, ηδ, ἴσα ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΜΔ'. Πρόβλημα.

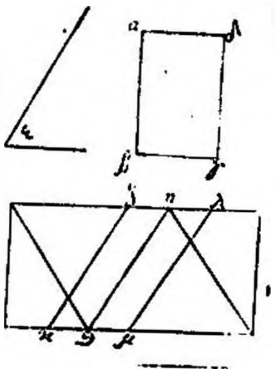
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἥδε παραβαλεῖν ἐπὶ τῆς α, δοθείσης εὐθείας παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ τῶν ὑπὸ ζεθ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ. τῷ δὴ εζ, κείσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ζμ, ἴση τῇ α. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ δθ, καὶ τῷ συνεστάδω ἀπὸ τοῦ θ, σημείου. εἶτα διὰ τοῦ μ, παράλληλος τῇ θζ.

ἤχθω

ἴχθω ἡ κλ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κζ. ἐπεὶ δὲ αἱ κμ, δο, παράλληλοί εἰσι καὶ τὸ πέρασμα τῶν λ. καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκε ἡ δκ, παντὸς γὰρ αἱ ὑπὸ μκδ, ιδκ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ τῷ κϑ. αἱ δὲ ὑπὸ ζκδ, ιδκ, ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, ὥστε ἐκβαλλόμεναι αἱ δι, κζ, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν δὴ καὶ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ ν, παράλληλος τῇ ιμ, ἤχθω ἡ νλ, καὶ περατάσθω ἑκατέρα τῶν ϑζ, καὶ τὸ ν. τὰ δλ, πέρατα παραλληλογράμμου τοῦ δζ, ζλ, παραπληρώματα τῶν περὶ τὴν κν, διάμετρον παραλληλογράμμων ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ καὶ τῷ αὐτῷρω, ἀλλὰ τὸ δζ, γίγονται ἴσον τῷ β, ξιγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ ιζϑ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ημ, καὶ τῷ ιέ. ἄρα καὶ τὸ ζλ, ἴσόν ἐστι τῷ β, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ημ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ιζϑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ιζϑ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ, ἡ δὲ ζμ, εὐθεῖα ἴση τῇ α. ἄρα ἐπὶ τῆς ζμ, εὐθείας ἴσης τῇ α, παραβέβληται τὸ ζλ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ημ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euel. Lib. 1. Fig. 35.



Πρότασις ΜΕ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι αβγδ, εὐθυγράμμῳ, ἔχον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε. Ἐπιζεύχθω ἡ αγ, καὶ συνεστάτω διὰ τῶν μβ'. τὸ ζϑ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ αβγ, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ζκϑ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. καὶ διὰ τοῦ ηϑ, εὐθείαν παραβεβλήσθω τὸ ημ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ αδγ, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηϑμ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ ζκϑ, ηϑμ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ε, γωνίᾳ, καὶ τὸ δ. δεῖσμα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ κϑη, ἔσονται αἱ ὑπὸ κϑη, ηϑμ, ταῖς ὑπὸ ζκϑ, κϑη, ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζκϑ, κϑη, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσι καὶ τὸ πέρασμα τῶν κϑ'. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ κϑη, ηϑμ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ τῷ ιδ'. αἱ κϑ, ϑμ, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. ὁμοίως δειχθήσεται, καὶ τὰς ζη, ηλ, ἐπ' εὐθείας εἶναι. ὥστε ἐπεὶ αἱ ζλ, κμ, ἐπιζευγνύουσι τὰς ζκ, λμ, παραλλήλας, παράλληλοι καὶ αὐταί εἰσι καὶ τῷ λγ'. τὸ ζμ, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ ζϑ, ἴσον γέγονε τῷ αβγ, ξιγώνῳ, τὸ δὲ ημ, τῷ αδγ. τὸ ὅλον δηπεθεν ζμ, ἴσόν ἐστι τῷ αβγδ, εὐθυγράμμῳ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ζκϑ, γωνίαν ἴσην τῇ ε, καὶ δέδεικται εἶναι παραλληλόγραμμον. τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ καὶ τῷ ξ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

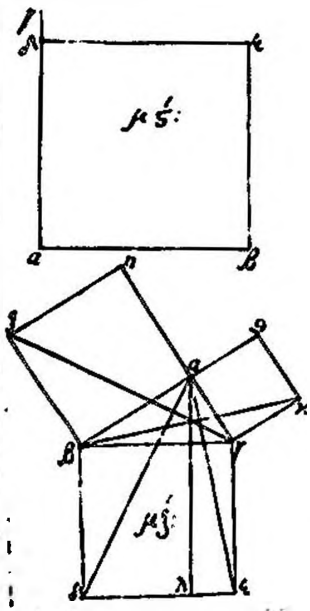
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι κἂν δύο ὦσι τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα, καὶ ζητηθῇ συσταθῆναι παραλληλόγραμμον ἴσον συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν, ἔξεστι διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου τὸ προσταττόμενον ποιεῖν, διαιροῦσι δ. τὰ δοθέντα εἰς τρίγωνα, εἰς ὅσα αὐ διαιροῦται· ὁμοίως κἂν πλείω ᾖ.

Πρότασις Μς'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἀναγράψαι τετράγωνον ἀπὸ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας. Ἀνεστάθω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ, εὐθεῖα ἴση τῷ ιδ. καὶ ἀρχέσθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου, ἡ αδ, ἴση τῇ αβ, τῇ τῷ γ'. εἶτα ἀπὸ τοῦ δ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ δε. ἀπὸ δὲ τοῦ β, ὁμοίως παράλληλος τῇ αδ, ἤχθω ἡ βε, ἐν τῷ α ε, ἔσται τετράγωνον. κατὰ γὰρ τὸν κατασκευὴν παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ὥστε αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὸν λδ'. ἀλλὰ τῆς μὲν πρὸς τῇ α, ἡ δ, γωνιῶν ἑκατέρα ὀρθή ἐστι κατὰ τὸν κθ'. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, αδ, πλευραὶ ἴσαι, ἄρα καὶ αἱ πρὸς τῇ ε, καὶ β, αὐτοῦ γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ δε, εβ, λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ταῖς δα, αβ, καὶ ἀλλήλαις. τὸ αε, ἄρα ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον· τὸ δὲ τοῦτον τετράγωνον· τὸ αε, ἄρα τετράγωνόν ἐστιν· ὅπερ καὶ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. Lib. 1. Fig. 36.



Πρότασις Μζ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Τὸ αβγ, ἔστω τρίγωνον τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν ὀρθὴν ἔχον· καὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τετράγωνον γεγράφθω τὸ βε, βε, γδ. Λέγω τὸ βε, ἴσον εἶναι τοῖς δυσὶ βκ, γθ. Ἀπὸ γὰρ τοῦ α, σημείου, τῇ αλ, παράλληλος τῇ βδ, ἡ γε, ἐπεζεύχθωσαν τῇ αδ, αε, γζ, βκ. ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βαγ, βακ, εἰσὶν ὀρθαί, πάσης γὰρ ἡ ακ, ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ αγ, κατὰ τὸν ιδ'. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θα, ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ αβ· ὥστε ἡ μὲν κγ, παράλληλός ἐστι τῇ ζβ, ἡ δὲ βθ, τῇ γκ. ἀλλ' ἐπεὶ αἱ ζβα, δβγ, γωνίαι ἴσαί εἰσι διὰ τὸ ἑκατέραν ὀρθὴν εἶναι. κοινὴ προσκείσθω ἡ αβγ, ὅλαι ἄρα αἱ ὑπὸ ζβγ, δβα, ἴσαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γβ, βζ, ἴσαι δυσὶ ταῖς δβ, βα, ἄρα κατὰ τὸν δ'. καὶ ἡ ζγ, βάσις τοῦ ζβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ αδ, βάσει τοῦ αβδ, τριγώ-

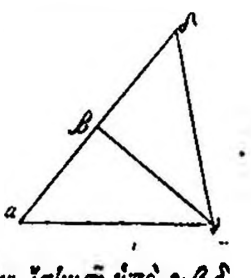
τριγώνου, καὶ ὅλον τὸ ζβγ, τριγωνον, ὅλῳ τῷ αβδ. Αὐθις ἐπεὶ τὸ ζα, παραλληλόγραμμον τῷ αὐτῷ ζβ, βάσιν ἔχει τῷ ζβγ, τριγώνῳ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις ταῖς ζβ, ηγ, παύτως γε καὶ τῷ μα. διπλάσιόν ἐστι τὸ ζα, παραλληλόγρ. τῷ ζβγ, τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ βλ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τῷ αβδ, τριγώνῳ, ἐπεὶ τῷ αὐτῷ βδ, βάσιν ἄμφω ἔχουσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς βδ, αλ. ἀλλὰ τὸ ζβγ, τρίγωνον ἴσον δέδεικται τῷ αβδ, ἄρα καὶ βη, βλ, παραλληλόγραμμα διπλάσιά ἐστιν ἑκάτερον τῶν αὐτῶν, καὶ ἐπομένως ἴσα καὶ τὸ ς'. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὸ γθ, ἴσον εἶναι τῷ γλ, ὥστε ὅλον τὸ βι, ἰσόν ἐστι τοῖς βη, γθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΗ'. Θεώρημα.

Ἐαν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστιν.

Ἔστω δὴ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πλευρᾶς τετράγωνον τῷ αβγ, τριγώνου, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνοις. Λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ὀρθὴν εἶναι. εἰ γὰρ ἡ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ βγ, συνεστάτω, ἴση τῇ αβ, καὶ ἡ δγ, ἐπιζεύχθω, παύτως γε τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἴσόν ἐστι καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δβ, βγ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς αὐτοῖς τετραγώνοις ἴσόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον καὶ τοῖς ὑποδιπλασίοις, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἐπομένως ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ αγ. ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, γβδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς δβ, βγ, καὶ βάσιν τὴν αγ, βάσει τῇ γδ, ἴσην, ἔχουσι παύτως, καὶ τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ γβδ, καὶ τὴν ἡ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γβδ, ὀρθή ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 1. Fig. 37.



Τέλος τοῦ Πρώτου Βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου.

Προοιμιακὴ περίληψις τῆ Δευτέρα τῆ τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείωι.

✣ Τὸ αὐτὰ χεῖρας τῶν Βιβλίον τῆ μὲν μεγέθει μικρὸν δοκεῖ, τῆ δ' ὑποκόπτειν τὴ λυσιπλεία τῆ αὐτῆ θεωρημάτων, τὴ ἐναντίως μέγα. τὴ τοῖς νέοις, οἶδα ὃ λέγω, δυσκαπάλυπτον μυσθέμα διδάσκειν δοκῦσιν. ἀλλ' ἴσν ἐπὶ τὰ πρόσω προβιβασόντες, τὴ ἐπιμελῶς ἀναπολῦντες, ῥᾴστα κατανοήσονται. Αἱ γὰρ παραλαμβανόμεναι ἐν αὐτῆ ἀποδείξεις, χρεῶν πᾶσαι ἐπιρείδονται τῆ σαφεστάτῳ ἀξιώματι, Τὸ ὅλον δηλ. ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσιν. ὅθεν μὴ ἀπεγνώσωνται, εἰ τῷ πρώτῳ βολῷ ἐπιλῶς καταλαμβάνειν αὐτοῖς δυσχερές. ἡ γὰρ περὶ τὰ τέλη ἐπανάληψις σφόδρα ἐκπλαγῖναι αὐτὲς ποιήσει, πῶς τὰ ὕπω σαφῆ, πάλαι δυσκατάληπτα ἐδόκει;

Πραγματεύεται δὲ ἐπὶ τῆ παρόντι Δευτέρα Βιβλίῳ ὁ Στοιχειωτὴς περὶ δυνάμεως τῆ ἀθέτων γραμμῶν, τουτέστι τῆ πεφαγώνων. παραβάλλει τὰ ἐκ τῆ μερῶν τῆ γραμμῶν, ἡ διχοτομηθέσων, ἡ ἄλλως πως διαιρεθέσων, αὐξανόμενα ὀρθογώνια, τοῖς ὀρθογωνίοις τὴ πεφαγώνοις τῆ ὅλων γραμμῶν. Τὸ μέρος τῶν τῆ Στοιχείων λυσιπλέστατον παίσης γε, μάλιστα δ' ὅταν θεμέλιον τῆ χρειωδεστέρων Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων. Αἱ μὲν ἓξ πρῶται προτάσεις ἀποδεικτικαὶ τὴ πολλαπλασιασμῶ. Ἡ δὲ πεμπτη τῆ ἐξαγωγῆ τῆς πεφαγωνικῆς ῥίζης τὰς ἀρχὰς παρέχει. ὥσπερ τὴ αἱ ἑπόμεναι, πέμπτη, ἕκτη, ἑβδόμη, τὴ ὀγδόη, ταῖς τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδυ πράξεσι. Τὰ δὲ λοιπὰ θεωρήματα τερατωδεστέρας μᾶλλον λυσιπλῆ.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Α'. Παῦ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τοῦ ὀρθοῦ γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν.

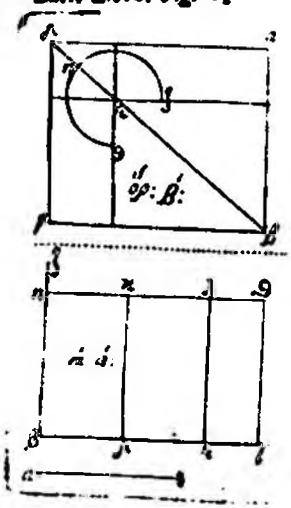
Εἴρηται ἐν τοῖς ἔμπροσθεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα εἰς δύο διαιρεῖται εἴδη τὰ καθολικώτερα, εἰς ὀρθογώνια καὶ μὴ ὀρθογώνια. καὶ τῶν αὖθις ἑκάτερον ὑποδιαιρεῖται εἰς ἰσόπλευρα καὶ ἀνισόπλευρα. καὶ τῶν μὲν ὀρθογωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται τετράγωνα, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα, λέγονται ἰδίως παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, καὶ ἔχουσι τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας, ὡς δέδεικται, προτάσει λδ', τοῦ α. τῶν δὲ μὴ ὀρθογωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται ῥόμβοι, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα ῥομβοειδῆ. Ἐπαῦθα ἤδη ὁ λόγος περὶ τῶν ὀρθογωνίων, ἰσοπλεύρων τε καὶ ἀνισοπλεύρων, τετραγώνων φημὶ καὶ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. ἐπεὶ δὲ τῇ μὲν τοῦ τετραγώνου προσηγορίᾳ, ἡ περιλείπεται καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, τῇ δὲ τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων συμπεριλαμβάνεται καὶ τὰ τετράγωνα. πάντα χάριν περὶ μόνων τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων εἰπών, καὶ περὶ τῶν τετραγώνων ἡρμήνευσε. Τὸ μὲν παραλληλόγραμμον γενικὸν χώραν ὑπέχει, τὸ δὲ ὀρθογώνιον καὶ τὰ λοιπὰ διαφορῶν. ἔφη δὲ, ὅτι ἐκ δύο πλευρῶν λέγεται περιέχεσθαι, ἐπεὶ παῦ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, τῶν μίαν τῶν αὐτοῦ περιεχουσῶν γωνιῶν, συμπληροῦται. μᾶλλον δὲ, ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς προείρηται. ὅθεν ἐπεὶ τὸ τετράγωνον πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἴσαί εἰσι καὶ τὸν λ'. ὅρον, οὐκ ἄλογον, ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεσθαι λέγεσθαι. τῶν γὰρ δύο αὐτοῦ πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας πολλαπλασιαζομένων, τὸ αὐτὸ γενήσεται, ὅπερ καὶ τῆς μιᾶς πρὸς ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης γίνεται. διὸ δὴ τοῖς μὲν παραλληλογράμμοις ἡ, ὑπὸ, προσέθεται πρόθεσις ὑπωσὶ, τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται. τοῖς δὲ τετραγώνοις ἡ, ἀπὸ, οἷον τὸ τετράγωνον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεται.

Β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμονα καλείσθω.

Τίνα μὲν τῶν τετραπλεύρων σχημάτων παραλληλόγραμμα ὑπάρχει, εἴρηται ἀρτίως, καὶ πῶς ἔμπροσθεν ἔτι καὶ νῦν σεσημείωται. Διάμετρος δὲ παραλληλογράμμου λέγε-

λέγεται εὐθεῖά τις, ἡ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτῆ γωνίας τέμνουσα, ἥτις καὶ διαμέτρος διαγώνιος προσαγορεύεται, καὶ δίχα τὸ παραλληλόγραμμον τέμνει, καὶ τῶν λδ, τὰ ά. Ὅταν δὲ ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ὑφ' ὧν περιέχεται τὸ παραλληλόγραμμον δύο ἐνὸς εὐθεῖαι παράλληλοι ἀχθῶσιν, ἔχουσαι κοινὴν τομὴν μετὰ τῆς διαμέτρου, τῶν τεττάρων γενομένων παραλληλογράμμων τὰ μετὰ δύο, τὰ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τεμνόμενα, παραλληλόγραμμα περὶ τὴν διάμετρον ὀνομάζεται. τὰ δὲ λοιπὰ παραπληρώματα. Λεχθέντος τοίνυν ἑνὸς τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, καὶ τῶν δύο παραπληρωμάτων ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ τρία ὁμοῦ γνώμων καλεῖται. φέρει γάρ τοι τὸ χωρίον, ὅπερ, καὶ τὸ παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς ὄργανον, τὸ καλούμενον γνώμων, ὡς ἐπὶ τοῦ δὶ τοῦ χωρίου καθοράται. ἐν δὲ διάμετρος μέν ἐστιν ἡ βδ, εὐθεῖα, παραλληλόγραμμα δὲ περὶ τὴν διάμετρον τὰ βε, εδ, καὶ παραπληρώματα τὰ αε, εγ. τὸ δὲ ζηθ, ὅλον χωρίον, γνώμων καλεῖται.

Eucl. Lib. 2. Fig. 1.



Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α, βγ, καὶ τετμήσθω ἡ βγ, κατὰ τὰ δ, ε, σημεῖα· λέγω δὲ, τὸ ὑπὸ τῶν α, βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτμήτου εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἀνεστάθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν βγ, ἡ βζ. διὰ μὲν τοῦ ε, τῇ α, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ὁμοίως ἡ βη, ἴση τῇ α, διὰ τοῦ γ'. τῇ αὐτῇ. καὶ τῇ μὲν βγ, ἤχθω παράλληλος ἡ ηθ, τῇ δὲ βη, αἱ δκ, ελ, γθ, διὰ τοῦ λ ά, τῇ αὐτῇ. καὶ ἐπεὶ τὸ ηγ, σύγκειται ἐκ μερῶν τῶν βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίων. παντὸς γὰρ κατὰ τὸ ε δ'. ἀξίωμα, ἴσον ἐστὶ τοῖς βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίοις. ἀλλὰ τὸ μὲν ηγ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχομένου ὀρθογωνίου, περιέχεται γὰρ ὑπὸ τῆς βγ, καὶ βη, ἴσης τῇ α, καὶ πρὸς ὀρθὰς συσταθείσης γωνίαν· τὰ δὲ βκ, δλ, εθ, ἐστὶ τὰ ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, τὸ μὲν γὰρ βκ, περιέχεται ὑπὸ τῆς βκ, τῆς ἴσης τῇ α, ἀτμήτῳ, καὶ τοῦ βδ, τμήματος, τὸ δὲ δλ, ὑπό τε τῆς δκ, ἴσης καὶ αὐτῇ οὔσης τῇ α, καὶ τοῦ δε, τμήματος, καὶ τὸ εθ, ὑπό τε τῆς ελ, τουτέστι δι' ἴσου τῆς α, καὶ τοῦ εγ, τμήματος. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτ-

α, ἀπὸ τῆς ΔΙΘΕΙΑΣ, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων, ὅπερ ἐδεῖ τὸ ὑποκείσθαι.

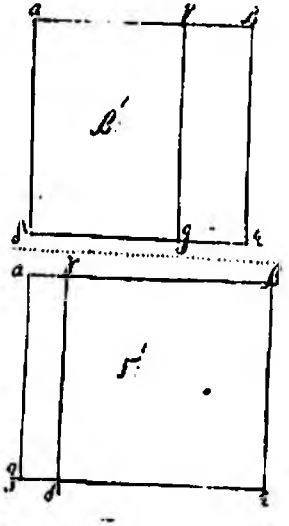
Ὅτι δὲ ἑκάτερα τῶν δκ, ελ, ἴσον ἐστὶ τῷ α, δῆλον. τὰ γὰρ βκ, δλ, εθ, παραλληλόγραμμά εἰσι, τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τὴν λδ', τὰ ά. ὥστε ἑκάτερα τῶν δκ, ελ, ἴσον ἐστὶ τῷ βκ, ὅπερ τῷ α, ἴσον γὰρ ἐλήφθαι ἡ βκ, τῷ α.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, καὶ τὸ γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, καὶ τῶν αγ, γβ, μιᾶς αὐτῶν περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνῳ. Γεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, διὰ τῆς με', τῆ ά. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἡ βε, ἡ γζ, καὶ τῷ λά, τῇ αὐτῇ. καὶ ἐπεὶ τὸ αζ, γε, ἴσα ἐστὶ τῷ αε, καὶ τὸ ιδ'. ἀλλὰ μὴν τὸ αζ, γε, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ὅλης αβ, καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων αγ, γβ, περιεχόμενα ὀρθογώνια. τὸ μὲν γὰρ αζ, περιέχεται ὑπὸ τῶν αδ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ αβ, καὶ τὸν λ'. ὅρον, καὶ τοῦ ἐφεξῆς τμήματος αγ. τὸ δὲ γε, περιέχεται ὑπὸ τῶν γζ, ἴσης καὶ αὐτῇ ὔσης τῇ αδ, καὶ τῷ λδ'. τῇ αὐτῇ, καὶ ἑπομένως τῇ αβ, καὶ τῷ ά. ἀξίωμα, καὶ τῷ ἑτέρῳ τμήματος γβ. καὶ τὸ αε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 2. Fig. 2.



Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, ὡς ἔτυχε, τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, καὶ τὸ γ, καὶ συνεστάθω ὀρθογώνιον τὸ αε, ἔχον τὴν βε, ἴσην τῇ γβ, τμήματι. λέγω τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τῆς γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ αγ, γβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, τμήματος τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ τῆς γδ, παραλλήλως τῇ αζ, ἡ βε, τὸ αε, πάλιν ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς αδ, γε, ὀρθογωνίοις καὶ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, ὡς εἰς αὐτὰ διαιρεμένου, καὶ ἐξ αὐτῶν συγκειμένου. ἀλλὰ τὸ μὲν αδ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθο-

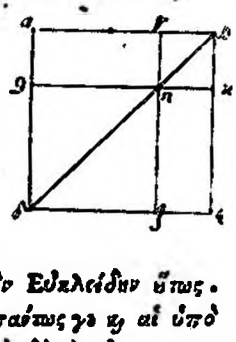
γώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῶν α γ, εἴδος τμήματος, καὶ τῆς γ δ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ ἑτέρᾳ γ β, τμήματι· τὸ δὲ γ ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γ β, τμήματος τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ γ β, τῇ β ε· ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ τῆς γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γ β, τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τμηθείσθω γὰρ ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς τε ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α ε, τῷ τοῦ μ ς', τῶν ά. καὶ ἤχθω ἡ β δ, διαμέτρος· ἀπὸ δὲ τοῦ γ, παράλληλος τῇ α δ, ἡ β ε, ἤχθω ἡ γ ζ, τῷ τοῦ λ ά. τῶν αὐτῶν, ἡμισεια τοῦ β δ, διάμετρον τῷ τὸ κ· καὶ διὰ τοῦ κ, ἤχθω παράλληλος τῇ α β, ἡ δ ι, ἡ θ κ. τὸ πάλιν α ε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ζ θ, γ κ, καὶ τοῖς α κ, κ ε, παραλληλογράμμοις τῷ τὸ ι δ', ἀξίωμα. ἀλλὰ τὸ μὲν α ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, δοθείσης τετραγώνου, τὰ δὲ θ ζ, γ κ, τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετράγωνα, καὶ τὸ α κ, κ ε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὡς δειχθήσεται· ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Λείπεται δὴ δεῖξαι τὰ ῥηθέντα ὁμολογηθέντα. ὅτι μὲν οὖν τὸ α ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. ὅτι δὲ τὰ μὲν θ ζ, γ κ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τετράγωνα, τὰ δὲ α κ, κ ε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, δείκνυται κατὰ τὸν Εὐκλείδην οὕτως. Ἐπεὶ τῶν δ α β, ἐξεγήνται αἱ δ α, α β, πλευραὶ, εἰσὶν ἴσαι, πάσης γὰρ καὶ αἱ ὑπὸ α δ β, α β δ, γωνίαι τῶν αὐτῶν ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ε, τοῦ ά. ἐπεὶ δὲ καὶ εἰς παραλλήλους τὰς α δ, γ ζ, πέπτωκεν ἡ β δ· δῆλον, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ β κ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α δ β, ἐντὸς καὶ τὸ κατὰ τὸ κ θ', τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α δ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β κ γ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὸ ά. ἀξίωμα, τῇ ὑπὸ γ β κ, καὶ κατὰ τὸ ε, τοῦ ά. αἱ γ β, γ κ, ἴσαι εἰσί. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων, ἐπεὶ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ λ δ'. τοῦ αὐτοῦ, πάσης γὰ τὸ γ κ, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Αὐθις ἐπεὶ αἱ γ ζ, β ι, παράλληλοί εἰσι, δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ γ β κ, β γ κ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσι κατὰ τὸ κ θ', τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γ β κ, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ β γ κ, καὶ ἑπομένως

Eucl. Lib. 2. Fig. 4.



νως καὶ τὴν λδ', τῇ αὐτῇ. ἡ δὲ λοιπὴ γωνία τῇ γκ, παραλληλογράμμε ὀρθή ἐστιν. ὥστε τὸ γκ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ θζ, τετράγωνον εἶναι. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ γη, ἡ δὲ γη, τῇ γβ, τμήματι καὶ τῷ ῥηθείσῃ λδ'. τὸ αη, δίπυθον περιέχεται ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων. ὁμοίως ἐπεὶ αἱ βα, βι, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπ' αὐτῶν ἴσαι αἱ γβ, βκ, ἡ κι, παύτῃ ἴση ἐστὶ τῇ αγ, τμήματι. ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, ἴση τῇ ὑπερῳ γβ, τμήματι. ἄρα καὶ τὸ ηι, περιέχεται ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

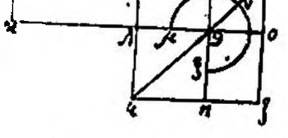
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν παντὶ τετραγώνῳ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστι.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Τμηθέτω δὴ ἡ αβ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ. Λέγω τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ τὸ γζ, τετράγωνον ἀπὸ τῆς γβ. καὶ τῆς δὲ βε, ἐπιζευχθείσης, ἀχθέτω ἡ δη, παράλληλος τῇ γε, ἡ βζ, τέμνουσα τὴν βε, κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ κο. ἀπὸ δὲ τοῦ α, παράλληλος τῇ γε, ἡ αλ. καὶ ἐπεὶ τὸ γθ, ἰσόν ἐστι τῷ θζ, κατὰ τὴν μγ', τοῦ δ. κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ δο, παύτως γε κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα τὸ γο, δζ, ἴσα ἐστὶν, ἀλλὰ τὸ γο, ἴσόν ἐστι τὸ κγ. κατὰ τὸ α, ἄρα ἀξίωμα τὸ κγ, ἴσόν ἐστι καὶ τῷ δζ. κοινοῦ δὴ προσκειμένου τοῦ γθ, τὸ αθ, παύτως ἴσόν ἐστι τῷ μνξ, γνώμονι. ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ λν, κοινὸν ληφθῇ, τὸ αθ, ἄρα μετὰ τοῦ λν, ἴσόν ἐστι τῷ μνξ, γνώμονι καὶ λν. ἀλλ' ὁ μνξ, γνώμων μετὰ τοῦ λν, ἴσός ἐστι τῷ γζ. τὸ αθ, ἄρα μετὰ τοῦ λν, ἴσόν ἐστι τῷ γζ. ἔστι δὲ τὸ μὲν αθ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. (περιέχεται γὰρ ὑπὸ τοῦ αδ, εἰδὸς τμήματος, καὶ τῆς δθ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ δβ, ἑπέρῳ τμήματι καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὠπέρω,) τὸ δὲ λν, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τετράγωνον, γέγονε γὰρ ἀπὸ τῆς λθ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ γδ. καὶ τὸ γζ, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἡμισείας τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 2. Fig. 4.

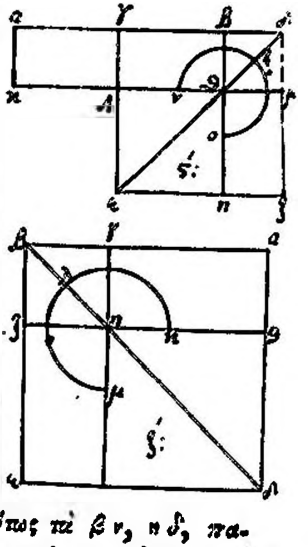


Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Τμηθέτω γὰρ ἡ αβ, γραμμὴ δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ προστεθέτω ἡ βδ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. τῆς γὰρ αὐτῆς κατασκευῆς τῇ τοῦ προτέρου γεγενήσθω. ἐπεὶ τὸ θζ, ἴσον ἐστὶ τῷ γθ, τουτέστι τῷ λδ', τοῦ δ. τῷ δὲ γθ, ἴσον ἐστὶ τὸ αλ, τουτέστι τῷ λς'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ δ. λεῖπον τὸ θζ, ἴσον ἐστὶ τῷ αλ. κοινὸν δὲ προσκείσθω τὸ γμ, ὅλον τὸ αμ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ νξο, γνώμονι. κοινὸν δ' αὖθις προσκείσθω τὸ λπ, παντὶ γε τὸ αμ, μετὰ τοῦ λπ, ἴσον ἐστὶ τῷ νξο, γνώμονι, καὶ λπ, παραλληλογρ. ἀλλ' ὁ νξο, γνώμων μετὰ τοῦ λπ, ἴσος ἐστὶ τῷ γζ, τετραγώνῳ τουτέστι τὸ εδ'. λεῖπον, ἄρα τὸ αμ, μετὰ τοῦ λπ, ἴσον ἐστὶ τῷ γζ, τετραγώνῳ. τὸ δὲ αμ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῶν αδ, καὶ δβ, ἡ γὰρ δμ, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ'. καὶ τὸ λπ, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, τετράγωνον, ἡ γὰρ λθ, αὐτῇ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ γβ, καὶ τοῦ λδ'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. ὅπερ καὶ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 2. Fig. 5.



Πρότασις ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

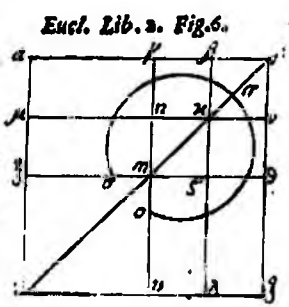
Τμηθέτω γὰρ ἡ αβ, εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα ἴσα εἶναι τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος αγ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ αε, τετράγωνον διὰ τῆς με', καὶ τοῦ δ. καὶ ἐπεζεύχθω τὸ βδ, καὶ διὰ μὲν τοῦ γ, ὁποτέρᾳ τῶν αδ, εβ, παράλληλος ἤχθω ἡ γζ, διὰ δὲ τοῦ ζ, ὁποτέρᾳ τῶν αβ, γδ, παράλληλος ἤχθω ἡ θκ. καὶ ἔτι διὰ μὲν τοῦ α, ὁποτέρᾳ τῶν γλ, βκ, παράλληλος ἤχθω ἡ αλ, διὰ δὲ τοῦ κ, ὁποτέρᾳ τῶν αβ, λμ, παράλληλος ἤχθω ἡ κμ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αθ, ἴσην ἔχει τὴν αη, διαμέτρον τῷ ηθ, παραλληλογράμμῳ τῇ διαμέτρῳ τῆς ηβ, καὶ ἔστι τὰ μὲν αλ, ηζ, περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τὰ δὲ λθ, κβ, περὶ τὴν διάμετρον τοῦ ηθ, παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ αλ, παραλληλόγραμμον τῷ κβ, παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ αλ, τῷ γκ, ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ αγ, τῇ γβ, ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ γκ, ἄρα τῷ κβ, ἐστὶν ἴσον. προσκείσθω κοινὸν τὸ θζ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ γθ, ὅλῳ τῷ ζβ, ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ γθ, τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ γβ, τῇ βδ, ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ ζβ, ἄρα τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα γθ, ζβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶν ἴσα. καὶ ἐπεὶ τὸ γθ, τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον, προσκείσθω κοινὸν τὸ λμ, τὸ ἄρα γθ, μετὰ τοῦ λμ, τῷ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ γθ, μετὰ τοῦ λμ, ὅλον ἐστὶ τὸ λη, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἄρα τετράγωνον τῷ λη, ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα αλ, ηζ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶν ἴσα, καὶ τὸ λη, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αλ, τῷ γκ, προσκείσθω κοινὸν τὸ λμ, τὸ ἄρα αλ, μετὰ τοῦ λμ, τῷ γκ, μετὰ τοῦ λμ, ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ αλ, μετὰ τοῦ λμ, ὅλον ἐστὶ τὸ αε, καὶ τὸ γκ, ἄρα μετὰ τοῦ λμ, τῷ γκ, μετὰ τοῦ λμ, ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ γκ, μετὰ τοῦ λμ, ὅλον ἐστὶ τὸ γμ, καὶ τὸ γμ, ἄρα τῷ αε, ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ αε, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἐστὶ τετράγωνον. καὶ τὸ γμ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἐστὶ τετράγωνον. τὰ ἄρα γμ, λη, τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ τετράγωνα. ἔστι δὲ τὰ γμ, λη, τὰ συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα. τὰ ἄρα συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς αγ, τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

τρίγωνον, τὸ δὴ η δ, τῷ ἀπὸ τῆς α γ. Αὐθις ἐπεὶ πὰ α η, η ε, ἴσα ἐστὶ τῇ τῷ μγ'. τῷ δ'. κοινῷ λαμβανομένῳ τῷ β η, παντως γε πὰ α ζ, γ ε, ἴσα ἐστιν. εἰσὶ δὴ καὶ αἱ α β, β ε, τῇ γ β, β ζ, ἴσαι καὶ τὸν λ'. ὅρον τῷ δ'. πὰ α ζ, ἄρα γ ε, ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῆς α β, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. ἀλλὰ πὰ α ζ, γ ε, ὁ κ λ μ, ἐστὶ γνώμων μῆ τῷ β η, τετραγώνῳ, ἄρα ὁ κ λ μ, γνώμων μῆ τῷ β η, ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῆς α β, β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινῷ δὴ προσκείσθω τῷ η δ, παντως γε ὁ κ λ μ, γνώμων μῆ τῆς β η, η δ, τετραγώνων ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῆς α β, β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος α γ, τετραγώνῳ, τῷ η δ. ἀλλ' ὁ κ λ μ, γνώμων, καὶ πὰ β η, η δ, τετράγωνα, ὅστι τὸ ὅλον α ε, τετράγωνον καὶ β η. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον δηλ. τὸ α ε, μῆ τοῦ β η, τοῦ ἀπὸ τοῦ β γ, τμήματος τετραγώνου, ἴσόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος β γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ η δ, τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ δηλ. τμήματος α γ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχιθέν.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ε'αν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μῆ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης & τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ α β, τετμήσθω, ὡς ἔτυχε, καὶ τὸ γ, τῷ πρὸς ἴσθήτω αὐτῇ ἡ β δ, ἴση τῇ β γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς α β, ὅλης καὶ τοῦ γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετράκις, μῆ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ α γ, τμήματος τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς α δ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α δ, τετράγωνον τὸ α ζ. καὶ κατασκευάσθήτω τὸ χῆμα διπλοῦν. καὶ ἐπεὶ τὸ α ζ, τετράγωνόν ἐστι, παντως γε καὶ πὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα πὰ β ν, η ρ, ξ υ, τετράγωνά εἰσι καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ'. τοῦ παρόντος. αὐθις ἐπεὶ ἡ β δ, ἴση γέγονε τῇ γ β, δῆλον, ὅτι πὰ γ κ, β ν, ἴσά ἐστι καὶ τὸν λ ς', τῷ δ'. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ κ η, κ ν, ταῖς γ β, β δ, ἴσαι καὶ τὸν λ δ', τῷ δ'. καὶ ὑπομένως ἄλληλαις, ἄρα καὶ πὰ η ρ, κ θ, ἴσά ἐστιν. ἀλλὰ καὶ πὰ η ρ, β ν, ἴσά ἐστιν, ἡ γὰρ η κ, ἴση ἐστὶ τῇ γ β, ἥτοι τῇ β δ. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα γ κ, β ν, η ρ, κ θ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Πάλιν ἐπεὶ πὰ γ κ, η ρ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἄρα καὶ αἱ τούτων βάσεις γ ν, η π, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τὸν λ ς'. τῷ αὐτῷ, καὶ ὑπομένως καὶ τὸν αὐτὸν ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ πὰ α η, μ π' ταῖς δὴ α η, μ π, ἴσά ἐστι πὰ π λ, ρ ζ, καὶ τὸν μ γ'. τῷ δ'. ἄρα πὰ πέντε παραλληλόγραμμα α η, μ π, π λ, ρ ζ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. προσκείσθω δὴ τῷ μὲν α η, τοῦ γ κ, τῷ δὲ μ π, τῷ η ρ, τῷ δὲ π λ, τῷ β ν, καὶ τῷ



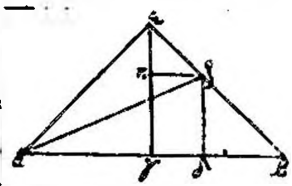
καὶ τῷ ρζ, τοῦ κϑ. παύσως γὰρ ἡ τὸ β'. δεῖξμα τὰ α κ, μ ρ, κ ζ, καὶ π λ, μῆ τοῦ β ν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἀλλὰ τὸ α κ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς α β, β γ, ἴσον γὰρ ἡ β κ, τῇ γ β, ἄρα τὰ πάσαρα παραλληλόγραμμα α κ, μ ρ, κ ζ, καὶ π λ, μῆ τοῦ β ν, ἐστὶ τὸ τριγώνις ὑπὸ τῆς α β, β γ, περιεχόμενον. ἔστι δὲ καὶ τὸ ξ υ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ἀναγραφόμενον τριγώνου, ἴσον γὰρ ἡ ξ π, τῇ α γ, καὶ τὰ πάσαρα παραλληλόγραμμα, α κ, μ ρ, κ ζ, π λ, μῆ τοῦ β ν, σωὶ τῷ ξ υ, ὅλον ἐστὶ τὸ α ζ, τριγώνου, τὸ ἀπὸ τῆς α δ, ἀναγραφόμενον. ἄρα τὸ τριγώνις ὑπὸ τῆς α β, ὅλης καὶ τοῦ γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον μῆ τοῦ ἀπὸ τοῦ α γ, τμήματος τριγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α δ, τριγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ α β, εἰς ἴσα μὲν τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ τῇ τὸ δ, λέγω τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων ὅλης τμημάτων α δ, δ β, τετράγωνα, διπλάσια εἶναι τοῦ ἀπό τῆς ἡμισείας α γ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν γ δ, τετραγώνου. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α β, κάθετος ἡ ε γ', ἴση τῇ α γ, καὶ τὰ ε, ε β, ἐπιζευγνύσθω, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ γ ε, ἡ δ ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, παράλληλος τῇ α β, ἤχθω ἡ ζ ν. καὶ ἐπεὶ αἱ α γ, γ ε, ἴσαι εἰσὶ· παύσως γὰρ αἱ ὑπὸ γ α ε, γ ε α, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ α γ ε, ὀρθή ἐστιν, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ α ε, γ ε α, ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ β ε, γ ε β, ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς. ὅστε ἐπεὶ δέδεικται ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ ε α, γ ε β, ἡμίσεια ὀρθῆς, ὅλη παύσως γὰρ ἡ ὑπὸ α ε β, ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, αἱ ν ζ, α β, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ ε γ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ ε ν ζ, ε γ β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ τῇ τῶν α ϑ', τῶν α'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ε γ β, ὀρθή ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε ν ζ, ὁμοίως ὀρθή ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ν ε ζ, ἡμίσεια ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ν ζ ε, ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς. ὥστε αἱ ν ε, ν ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ε', τῶν αὐτῶν. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ δ β, δ ζ, ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν τὸ α γ ε, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι καὶ τὸ γ, παύσως γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α γ, γ ε, τετραγώνοις καὶ τῷ μ ζ', τῶν α'. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ ε, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς α γ, γ ε· τῶν ἐπὶ ὅρα, ἐπὶ. τὰ ἀπὸ τῆς α γ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α ε. ὡσαύτως δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ν ζ, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς γ δ, ἴσαι γὰρ αἱ ν ζ, γ δ, καὶ τῷ λ δ', τῶν α'. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν α ε, ε ζ, τετρά-

Euclid. Lib. 2. Fig. 7.



γωνα

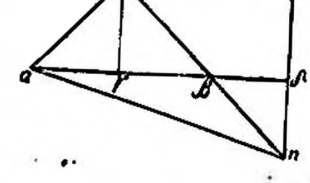
γωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν α γ, γ δ, συναμφότερα συναμφοτέρων· ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν α ε, ε ζ, τετραγώνοις ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α ζ, κατὰ τὸν ΠΘ θεώρημα μζ'. ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α ζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν α γ, γ δ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α ζ, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ ζ, καὶ τοῖς αὐτοῖς, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ ζ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν α γ, γ δ. ἀλλ' ἡ δ ζ, ἴση δέδεικται τῇ δ β. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ β, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν α γ, γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Τῆς α β, εὐθεῖα δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ γ, τμηθείσης, καὶ τῆς β δ, ἐπ' εὐθείας αὐτῇ προσκειμένης, λέγω, ὅτι τὸ, τε ἀπὸ τῆς ὅλης α δ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης β δ, τὰ συναμφότερα τοῦτα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς α γ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γ δ, τετραγώνου. Ἀπὸ γὰρ τοῦ γ, κέντρου ἀνεστάθω τῇ γ α, τῇ α'. καὶ γ ε, ἴση τῇ α γ, καὶ τῶν α ε, ε β, ἐπιζευγνυμένων, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου παράλληλος τῇ γ ε, καὶ ἴση ἡ δ ζ. ἐξαγομένη δὲ ἡ ε β, ἀπὸ τοῦ β, σημείου συμπιπτέτω τῇ δ ζ, καὶ αὐτῇ ἐξαγομένῃ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ δ'. πόρισμα τῆς ι ζ', τοῦ α'. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α ε γ, β ε γ, ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστι, παντὸς γε ὅλη ἡ ὑπὸ α ε β, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ τῷ λ δ'. τοῦ αὐτοῦ ὀρθή ἐστιν ἑτέρα καὶ ἡ ὑπὸ ε ζ η, ὅτι τὸ γ ζ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἐκ τῆς κατασκευῆς. αὖθις ἐπεὶ ἡ ε ζ, παράλληλός ἐστι τῇ γ δ, κατὰ τὸ λγ', τοῦ α'. δῆλον, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ η δ β, ὀρθή ἐστι κατὰ τὸ κθ', τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἐπεὶ καὶ ἡ ὑπὸ δ β η, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ β ε, κατὰ τὸ ι ε', τοῦ α'. καὶ ὅλη ὑπὸ γ β ε, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς κατὰ τὸ δ'. πόρισμα τῆς ι ζ'. τοῦ αὐτοῦ· παντὸς γε καὶ ἡ ὑπὸ δ β η, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δ η β, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε ἡ δ β, ἴση ἐστὶ τῇ δ η, κατὰ τὸ ε', τοῦ α'. δέδεικται δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, ὀρθή· ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ζ η, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ἡ ε ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ η, κατὰ τὸν ῥηθέντα ι'. τούτων δ' οὕτω προαποδεδειγμένων, ὑπισχνοῦμαι σωπᾶν. Ἐπεὶ τὸ α γ ε, ὀρθογώνιόν ἐστι, παντὸς γε τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν α γ, γ ε, τετραγώνοις· ἴση δὲ ἡ α γ, τῇ γ ε, τοῦ ἑνὸς ἄρα, ἤτοι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, διπλάσιόν

Eucl. Lib. 2. Fig. 8.



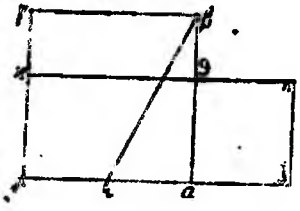
σιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α ε. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε η, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, ὅτι τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, ἴσαι γὰρ αἱ ε ζ, γ δ, ὡς δέδεικται· ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν α ε, ε η, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α η, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α η, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ η, τετράγωνα, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ η, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν α γ, γ δ, τετραγώνων, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δ η, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ β, διπλάσιά ἐστι τῶν αὐτῶν. Ε'ὰν ἄρα εὐθεῖα &c. τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθείσῃ εὐθείᾳ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ε'στω δὴ τεμεῖν τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ τοῦ ἑνὸς τῶν αὐτῆς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α β γ δ, τῆς δὲ α δ, δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ ε, ἐπιζεύχθω ἡ ε β, καὶ ἐξαχθείσῃ ἡ ε α, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ ζ, ὥστε τὴν ε ζ, ἴσην εἶναι τῇ β ε· ἀπὸ δὲ τῆς α ζ, ἀναγεγράφθω τὸ α η, τετράγωνον, παρεκβεβλήσθω δὲ ἡ η θ, ἐπὶ τὸ κ· καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ πρόσκειταί αὐτῇ ἡ α ζ, πᾶσαι γε κατὰ τὸ ς'. τὸ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν δ ζ, καὶ ζ α, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, τετραγώνου ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετραγώνῳ, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ε β, ἴσης πάλιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς ε β, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α β, α ε, τῷ τὸ μ ζ', τὰ ά. ἄρα τὸ ζ κ, ὀρθογ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, τετραγώνου, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν α β, α ε, τετραγώνοις. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, ὑγκαταλείπεται τὸ ζ κ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς α β, τετραγώνῳ, ὅπερ ἦν γ. ἀφαιρουμένου δ' ἔστι κοινοῦ τοῦ α κ, ὑγκαταλείπεται ἴσον τὸ ζ θ, τῷ θ γ. ἀλλὰ τὸ μὲν θ γ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης α β, ἴση γὰρ ἡ α β, τῇ β γ, καὶ τοῦ ἑτέρου θ β, τμήματος· τὸ δὲ ζ θ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ α θ, τμήματος τετράγωνον· ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθεῖα τέτμηται κατὰ τὸ προταχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

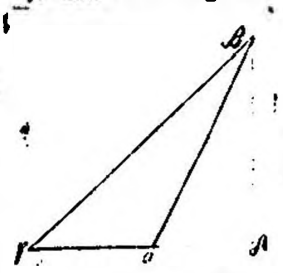
Euel. Lib. 2. Fig. 9.



Πρό-

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετραγώνου, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ καθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. Euel. Lib. 2. Fig. 10.



Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, ἀμβλυγώνιον ἔχον τὴν τὸ α. καὶ τῆς γα, ἐκβεβλήσθω ἡ σωιχεῖ ἀπὸ τοῦ α, πίπτουσα καθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βδ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ γὰρ τῷ δ'. τοῦ παρόντος, ἐπεὶ ἡ γδ, τέτμηται, ὡς ἔτυχε καὶ τὸ α, πωῖτως γε τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αδ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, λαμβανομένου ἔσονται τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, τετράγωνα, ἴσα τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αδ, δβ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν γδ, δβ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γβ, καὶ τῷ μζ, τὰ παρόντος, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ αὐτῷ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἄρα τριγώνοις καὶ τὰ ἑξῆς.

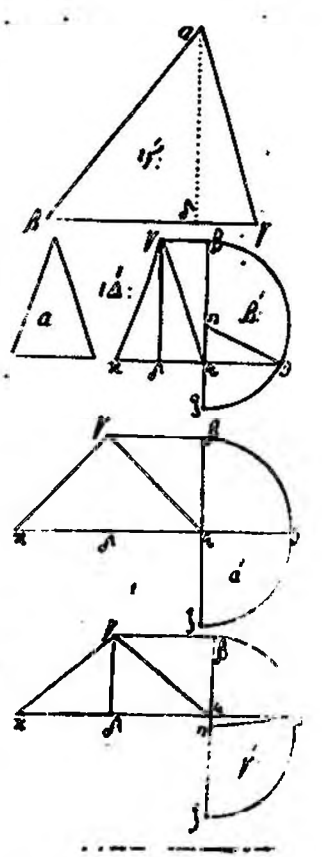
Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετραγώνου ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ καθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ. καὶ πεπτώτω καθετος ἐπὶ τῆς βγ, αὐτῇ πλευρὰς ἡ αδ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον, ὑποτεινούσης τὴν πρὸς τῷ β, ὀξεῖαν γωνίαν, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχουσῶν τὴν αὐτὴν γωνίαν τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπό τε τῆς βγ, καὶ βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τῆς γὰρ βγ, καὶ τὸ δ, ὡς ἔτυχε, τετμημένης, ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν γβ,

βδ, τετράγωνα ἴσα, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δγ, τετραγώνῳ καὶ τοῖς ζ'. τὰ παρόντα· κοινὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον εἰλήμμεθον, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βδ, δα, τετράγωνα ἴσα τῷτε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῆς ἀπὸ τῶν αδ, δγ, τετραγώνοις, καὶ τὸ β'. αἴτημα. ἀλλὰ τῆς μὲν ἀπὸ τῶν αδ, δβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῆς δὲ ἀπὸ τῶν αδ, δγ, τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τὸν μζ'. τὰ δ. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βα, ἴσα ἐστὶ τῷτε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γβ, βα, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὡσαύτως δὴ δείξομεν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἔλαττον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς βγ, γα, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῆς βγ, γδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἄρα τριγώνοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 2. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω δὴ συστήσασθαι τετράγωνον ἴσον τῷ α, δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Συνεστάθω διὰ τοῦ μέ. τοῦ α'. τῷ α, εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ βδ. εἰ οὖν ἡ βε, ἴση ἐστὶ τῇ εδ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν, τετράγωνον γὰρ ἔσται τὸ βδ, ὅπερ ἴσον γέγονε τῷ α. εἰ δὲ μὴ, ἔστω ἡ βε, τῆς εδ, μείζων. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. ὥστε τῷ εζ, ἴσην εἶναι τὴν εδ. τῆς δ' ὅλης βζ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ η, κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηβ, ἡ ηζ, γραφέντω ἡμικύκλιον τὸ βθζ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ δε, καὶ τὸ σημεῖον. ἔστω ἐπιζεύχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βζ, τέτμηται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, ἔστιν ἄρα τῷ τε ὑπὸ τῶν βε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς ηζ, τετραγώνῳ, ὅπερ τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. ἴσαι γὰρ αἱ ηζ, ηθ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηθ, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν θε, εη, τετραγώνοις ἄρα τῷ μζ'. τὰ δ. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βε, εζ, ὀρθογωνίου δηλ. τὸ βδ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θε, εη, τετραγώνοις. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου κοινοῦ ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται τὸ βδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς

εθ,

ιθ, πρ αγών. ἀλλὰ τὸ βδ, παραλ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ α, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ιθ, πρ ἀγ. ἴσόν ἐστι τῷ α. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεσθαι τὸ προσαχθὲν, κἂν ἡ δε, μείζων ἐν τῇ αβ, καὶ ἡ βζ, τμηθῇ δίχα ἐπὶ τῷ ε, ὡς ἐπὶ τῷ γ', καθορᾶται χήματος. τῇ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ἴσον πρ άγωνον σωιέστη.

Τέλος τῦ Δευτέρυ τῦ Στοιχείων τῦ Εὐκλείδυ.

Προοιμιακὴ περίληψις τῦ Τρίτυ Εὐκλειδείυ Στοιχείυ.

✣ Ἐπὶ τοῦ παρόντος Τρίτυ Βιβλίυ ὁ Στοιχειωτὴς τὰ πλεῖστα περὶ κύκλυ πραγματεύεται, τὰς ἀρκτικὰς αὐτῦ ἀποδεικνὺς ἰδιότητας, αὐτῆ τύτῳ μονάσας, οἷον ἐφαπτομένῃ ἐν τῇς ἐπιπέδοις χήματι. συμβάλλει δὲ μὴ πλείας τὰς γραμμὰς ἢ ἐντὸς τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς ἀγομένας. τὰ πάθη τύτων, καὶ τῦ κύκλων ἁπτομένων ἢ τεμνομένων ἀλλήλοις ἐκτίθησιν. καὶ ἐπὶ τύτοις τὰς γωνίας ἢ πρὸς τῇ κέντρῳ, ἢ πρὸς τῇ περιφερείᾳ κειμένας πρὸς ἀλλήλας παραβάλλει. καὶ τέλος τὰ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας Στοιχεῖα, ὅσα τῇ δυνάμει μάλιστα τῦ κύκλυ ἐπιβάλλονται, διὰ βραχέων παραδίδωσιν. Οὗπερ πάνυ λυσιτελείας παρικτικόν ἐστι τὸ Βιβλίον, τῦτο μόνον ἀρκεῖ πρὸς ἔνδειξιν, ὅτι περὶ κύκλυ, πηγῆς ὄντως θαυμασίων πραγμάτων ἐφ' ὅλῳ τῷ μαθήσιν, καὶ τῇ ῥηθέντων πραγματεύεται.

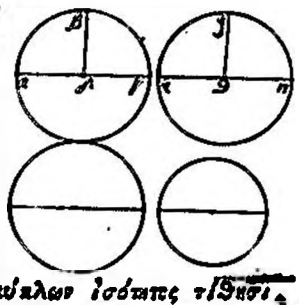
Τὰ χρησιμώτατα δὲ ταῖς ἐπιζήμαις θεωρήμασι καθέστηκε ταῦτα. τὸ ις'. ἀμέλει, τὸ κ'. κα'. κβ'. λα'. λβ'. λε'. καὶ λς'.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, οὗ αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσί.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς ἑξῆς τῶν δύο βιβλίοις Εὐκλείδης, ὁ τὰς κλεῖς τῆς Μαθηματικῆς ἀπάσης ἀμιθόδως παραδὺς, περὶ τῆς τριπλεύρου, πραπλεύρων χωμάτων, καὶ τῆς ἀρὸς ἄλλα τινῶν χρήσιμα· ἐνταῦθα ἤδη, ὡς περὶ τῆς ἐν κύκλῳ διαφορᾶς διαληψόμενος, ὅσα γε τῷ κύκλῳ ὑποθήκας, οἱονεὶ ὅρους καὶ προγνώσεις ἀμαρείας χάριν ἀφιέντες. Ἐπεὶ δὲ τὸν τῷ κύκλῳ ὁρισμὸν ἐν τῷ ἑξῆς ἐκδίδωσι βιβλίῳ, ἐπὶ τῷ παρόντος γε τὰς χρήσεις τῆς κύκλου, ἢ τῆς ἐν κύκλῳ διαθέσεως καὶ γωνιῶν, καὶ τῶν τῷ κύκλῳ ἔτι μερῶν ὁμοιοτρόπως διηρμενδύει. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ἰσότης πρώτη ἐστὶ τῶν χρήσεων, πύτου χάριν καὶ τίνες ἴσοι κύκλοι ἀφῶσιν ὀρίζεται. τῶν δὲ κύκλων τὰ, τῶ μήκες καὶ πλάτης ἴσον ἔχοντες, καὶ πάντων ἑκάτερον ἑκάτερον, καὶ τῇ διαμέτρῳ μόνῃ παρεισαόμενον, τὴν τῶν διαμέτρων ἰσότητα γνώρισμα τῆς τῶν κύκλων ἰσότητος τίθησι, λέγων, ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι, ἢ αἱ ἐκ τῶν κέντρων, πᾶσαι αἱ ἡμιδιάμετροι ἴσαι εἰσὶ, ὡς οἱ α β γ, ε ζ η, κύκλοι· ὧν εἴπ α γ, ε η, διάμετροι ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δ, καὶ θ, δηλονότι αἱ δ α, δ β, δ γ, καὶ θ ε, θ ζ, θ η, ὁμοίως ἴσαι εἰσίν· ὅτε ἀνάπαλιν, ὧν αἱ διάμετροι, ἢ ἡμιδιάμετροι ἴσαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσίν· οὗ δὲ μείζων ἡ διάμετρος ἢ ἡμιδιάμετρος, κἀκείνης μείζων. τίνες δὲ χάριν τῶν αὐτῶν ἂν ἐμνήθη; ἢ ὅτι τῶν ἐναντίων ἡ αὐτὴ ἐστιν ἐπιστήμη.



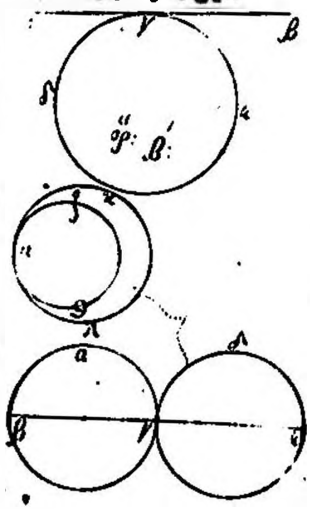
Euclid. Lib. 3. Fig. 1.

Β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

Τῆς χρήσεως δὲ δικαίως διωρισμένης, κατ' εἶδος δηλονότι, ὡς ἐν τοῖς σωματικοῖς ἢ ἀσωμάτοις· καὶ ποσὸν, ὡς ἐν τοῖς μιγάθεσι καὶ ἀριθμοῖς· κατὰ ποιὸν,

ποιὸν, ὡς ἐν ταῖς ποιότησι χρώμασί τε καὶ τοῖς ὁμοίοις. καὶ τὸ πρός τι, ὡς ἐν τοῖς διπλοῖς καὶ ἡμιολίοις. κατὰ τὸ πῦ, ὡς ἐν τοῖς κατὰ τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρως κειμένοις τόποις. κατὰ τὸ ποτὲ, ὡς ἐν τοῖς κατὰ τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρως γνομένοις χρόνοις. καὶ τὸ κεῖσθαι, ὡς ἐν τοῖς κοινωνοῦσι καὶ διαφέρουσι τῷ θέσιν. κατὰ τὸ ποιεῖν, ὡς ἐν τοῖς ἐνεργοῦσι. κατὰ τὸ πάσχειν, ὡς ἐν τοῖς πάσχουσι. καὶ κατὰ τὸ ἔχειν, ὡς ἐν τοῖς περικειμένοις τι καὶ περιτιθεμένοις. Ἐπεὶ κατ' ἄλλο ἄλλο, ἢ τὸ ποσὸν μόνον οἱ κύκλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, καὶ ἢ κατὰ τοῦτο μόνον ἐν αὐτοῖς διαφορὰ ἐπισκέψεως ἀξία, κατ' ἄλλον δέ τινα τῆς χρείας τρόπον ἂν ἀναγκαῖον γινώσκειν, εἴτε διαφέρουσιν οἱ κύκλοι, εἴτε καὶ μή. τάπου χάριν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κύκλων μόνον εἰπών, εὐθὺς εἰς τὰς χρείας μεταβαίνει, τὰς μεταξὺ εὐθειῶν καὶ κύκλων θεωρουμένας, καὶ μὴ ταύτα τὸ τοῦ κύκλου δεῖξαν τμῆμα, τῷ διαφορὰν, ἣν ἔχουσιν αἱ τῶν τμημάτων γωνίαι, καὶ αἱ ἐν τοῖς τμήμασι, διασαφεῖ. καὶ τάχα εἰκότως, τό, τε γὰρ τμῆμα καὶ αἱ γωνίαι ἐκ γραμμῶν ὁμοίων ἢ ἀνομοίων συνίστανται. Ἐπεὶ δ' αὐθις ἡ χρείσις μεταξὺ κύκλων καὶ εὐθειῶν κατὰ τὸ ποιεῖν καὶ ἔχειν, ἢ πάσχειν μόνον θεωρεῖται. καὶ γὰρ τὸν κύκλον ἔχειν τῷ εὐθεῖαν φαμεν ἐντὸς ἢ ἐκτὸς, καὶ τῷ εὐθεῖαν τέμνειν τὸν κύκλον, ἢ τάχα ἅπτεσθαι, τὸ δὲ τέμνειν ἀκριβέστερον τοῦ ἅπτεσθαι, διότι τοῦτο τὸ ἅπτεσθαι διὰ τοῦ μὴ τέμνειν διασαφεῖ. Νῦνα τοίνυν εὐθεῖά τις κύκλου τινὸς ἐφάπτηται, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ τέμνει τὸν κύκλον, πικαῦτα τοῦ κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται ἡ εὐθεῖα, ὡς ἡ αβ, τοῦ γδε, κύκλου ἁπτομένη κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβαλλομένη καὶ τὰ α β, ἡ τέμνει τὸν γδε, κύκλον.

Euclid. Lib. 3. Fig. 2.



Γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων ἡ τέμνουσιν ἀλλήλους.

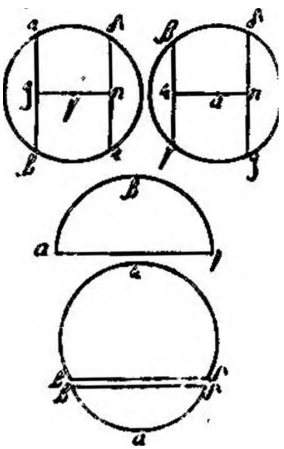
Ὥσπερ ἡ γραμμὴ διττήν πως κέκτηται πρὸς τὸν κύκλον σχέσιν, ἢ γὰρ ἅπτεται τούτου, ἢ τέμνει αὐτόν· οὕτω καὶ ὁ κύκλος πρὸς κύκλον διττὴν ἔχει τὴν σχέσιν, ἢ γὰρ ἀλλήλων ἅπτονται οἱ κύκλοι, ἢ τέμνουσιν ἀλλήλους. ὥσπερ δὲ πάλιν ἐν τῇ τῆς γραμμῆς πρὸς τὸν κύκλον σχέσει, τὸ μὴ τέμνειν τὴν γραμμὴν τὸν κύκλον γνώρισμα τοῦ ἅπτεσθαι αὐτοῦ ταύτην πεποίηκεν, ὅπου καὶ ἐνταῦθα διὰ τοῦ μὴ τέμνειν ἀλλήλους τοὺς κύκλους, ὡς γνωρισμοῦ, τὸ ἅπτεσθαι ἀλλήλων δεδήλωκεν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς συμβαίνειν ἐνδέχεται, ἢ γὰρ ἐντὸς κύκλος κύκλου ἅπτεται, ἢ γοῦν ἐκτός· ὡς ὁ αβγ, τοῦ δγε, ἐκτός· καὶ ὁ ζηθ, τοῦ κηλ, ἐντὸς, καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ὁ αὐτὸς ἔσται λόγος. ὅσοι μὲν οὖν τῶν κύ-

κύκλων ἐγγίζοντες ἀλλήλοις ἢ πέμπουσιν ἀλλήλους, ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ἢ ἁπλῆς μενούσης, ἢ διπλῆς.

Δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τῷ κέντρῳ εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι, μᾶλλον δ' ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἐμείζων κάθετος πίπτει.

Τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν αἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου διήκουσαι, αἱ δ' ἐκτὸς τούτου, διὸ καὶ ἀπέχειν τοῦ κέντρου λέγονται. ἀλλ' ἐκεῖναι μὲν πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὁπωσδηποτοῦν διὰ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι· αὗται δ' ὅτι μὲν ἴσαι, ἐπὶ δὲ ἄνισοι. καὶ πῶς, ἐκ τοῦ μὲν τοῦ αὐτοῦ φανερὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρῶτον ἀπόστασιν. Ἔστι δὲ μέσον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆ ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἀποστάσεως αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς εὐθείας ἀγόμεναι κάθετοι. ὅθεν δὲ ἴσαι αἱ τοιαῦται κάθετοι ἴσαι ὦσιν, ἴσον ἀφ' αἱ εὐθεῖαι, ἐφ' ἃς αἱ κάθετοι πίπτουσιν, ἀπέχειν τοῦ κέντρου λέγονται, ὡς αἱ $\alpha\beta$, $\delta\epsilon$, ἐφ' ἃς ἴσαι πεπτώκασι κάθετοι αἱ $\gamma\zeta$, $\gamma\eta$. ὅτε δὲ ἡ κάθετος μείζων, μᾶλλον ἀπέχειν λέγεται ἡ εὐθεῖα τοῦ κέντρου, ὥσπερ ἐπὶ τοὐναντίον. ἡ μὲν γὰρ $\beta\gamma$, μᾶλλον ἀπέχειν λέγεται τοῦ α, κέντρου, ἐφ' ἣν ἡ $\alpha\iota$, κάθετος πίπτει, ἐλάττων δὲ ἡ $\delta\zeta$, ἐφ' ἣν ἡ $\alpha\eta$, ὅτι ἡ $\alpha\iota$, μείζων ἐστὶ τῆς $\alpha\eta$.

Euclid. Lib. 3. Fig. 3.



Ε'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

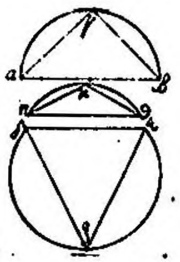
Ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κύκλος, ὡς πρόδηλον ἐκ τῶν δύο μιτέχων διαστάσεων, διαιρεῖσθαι δύναται εἰς μέρη ἴδια· ἡ δὲ τοῦ κύκλου διαίρεσις διχῶς ἐνδέχεται γενέσθαι, ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν περιφέρειαν, ἢ κατὰ τὸ ἐμβαδόν· καὶ κατὰ μὲν τὸν πρώτον, εἰς μείρας λέγεται διαιρεῖσθαι, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον εἰς μέρη· διάπερ τοῦτο ἐδέησεν αὐτοῦ καὶ τοῦ τοῦ κύκλου ὁρίσασθαι μέρος. Τμῆμα δὲ κύκλου λέγεται ἡ τὸ τυχὸν, ἀλλὰ τὸ ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιεχόμενον, ὡς τὸ $\beta\alpha\delta$, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῆς $\beta\delta$, εὐθείας, καὶ τῆς $\beta\alpha\delta$, περιφερείας. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ μὲν, διήρηται· τρία πάντως ἐστὶ τὰ τοῦ κύκλου τμήματα, ἡμικύκλιον, μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. Καὶ ἡμικύκλιον μέν ἐστι τὸ ἐπὶ τῆς περιφέρειας αὐτοῦ εὐθείας τὸ κέντρον ἔχον, ὡς τὸ $\alpha\beta\gamma$. μεῖζον δὲ τμῆμα τὸ ἐπὶς ἔλαττον περιφερείας, ὡς τὸ $\beta\alpha\delta$. καὶ ἔλαττον τὸ ἐπὶς αὐτοῦ τὸ κέντρον ἔχον, ὡς τὸ $\beta\alpha\delta$. περὶ ὧν ἐπιστήμων ὁρῶμεν, ἐν τῷ ιζ'. καὶ ιη'. ὅρῳ τοῦ α'.

ε'. Τμή-

ς'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπότε δ' Θείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Ὑπογράψας ἤδη τὸ τῶ κύκλου τμῆμα, καὶ ἐνὶ τὰ τρία τάπι εἴδη ἐμπεριλαβὼν ὄρῳ, βέλεται ἐπίπε τῶ παρόντος καὶ τῶ ἑξῆς δεῖξαι, καὶ πόσα τὰ εἴδη τῆς ἐπὶ τῶ τμήματος τῶ κύκλου περιεχομένης γωνίας. Δύο δὲ ταῦπα, ἡ μὲν γὰρ λέγεται τμήματος γωνία, ἡ δὲ ἐν τμήματι. Τίς μὲν οὖν ἡ τῶ τμήματος γωνία, ἐνταῦθα δείκνυσι, λέγων. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπότε δ' Θείας καὶ κύκλου περιφερείας. ὥστε ἡ τῶ τμήματος γωνία τῶ μικτῶ ἐστιν εἴδος. περιέχεται γὰρ ὑπότε δ' Θείας καὶ κύκλου περιφερείας, τοιαύτη δὲ ἡ πρὸς τῷ α, καὶ β. Ἐπεὶ δὲ ὁ κύκλος τυχὸν δύναται διαιρεῖσθαι, εἰς ἡμικύκλιον, εἰς μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. τρεῖς πάντως γε καὶ τὰς τῶν τμημάτων δυνάμεθα ἐννοεῖν τὰς γωνίας. καὶ τὴν μὲν ἡμικυκλίου γωνίαν καλεῖν χρεών. τὴν δὲ τῶ μείζονος τμήματος. καὶ τὴν λοιπὴν ἐλάττονος. Ἡμικυκλίου μὲν οὖν γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ α, ἡ πρὸς τῷ β, ἥτις ὑπό τε τῶ α γ β, ἡμικυκλίου περιέχεται, καὶ τῆς α β, διαμέτρου. μείζονος δὲ τμήματος ἡ πρὸς τῷ δ, ἡ ε, ἡ ὑπότε τῆς δ ε, περιεχομένη χορδῆς, καὶ τῆς δ ζ ε, περιφερείας μείζονος τῶ ἡμικυκλίου. τῶ δὲ ἐλάττονος τμήματος ἡ πρὸς τῷ η, ἡ θ, ὑπότε τῆς η θ, χορδῆς περιεχομένη καὶ τῆς η κ θ, περιφερείας ἐλάττονος ἡμικυκλίου.

Eucl. Lib. 3. Fig. 4.



Ζ'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ὑπὸ τῆς περιφερείας τῶ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτῶ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς δ' Θείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τῶ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν δ' Θεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν δ' Θειῶν.

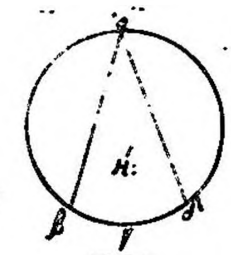
Διδειχὼς ἐν τῷ αὐτίρω τίς ἡ τῶ τμήματος γωνία, ἐπὶ τῶ παρόντος, καὶ τίς ἡ ἐν τμήματι, διασαφεῖ, γωνία. Ἔστι δὲ ἡ ἐν τμήματι γωνία τῶ ἁπλῶ εἴδος, ὑπὸ δ' Θειῶν μόνον περιεχομένη γραμμῶν, οἷα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α γ β, ἢ η κ θ, ἢ δ ζ ε. ἡ μὲν ὑπὸ τῶν α γ, γ β, δ' Θειῶν περιεχομένη, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν η κ, κ θ, ἤδη ὑπὸ τῶν δ ζ, ζ ε. Ἄγονται δὲ αἱ τὴν ἐν τμήματι γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ ἀπὸ τῶ τυχόντος ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶ τμήματος σημείου, ὡς αἱ α γ, γ β, ἀπὸ τῶ γ. περαπωῦται δὲ ταῖς πέρασι τῆς βάσεως τῶ αὐτῶ τμήματος, ὡς αἱ α γ, γ β, αἵγε ἀρχὴν μὲν ἔχουσι τὸ γ, τυχὸν σημεῖον τῆς α γ β, περιφερείας, πέρατα δὲ τὰ α, καὶ β, σημεῖα, πέρατα ὅπερ καὶ τῆς α β, βάσεως τῶ α γ β, τμήματος. ἀλλ' ἐπεὶ καὶταῦθα τρία δυνάμεθα ἐννοεῖν τὰ τῶ κύκλου τμήματα, ὡς εἴρηται ἐν τῷ ε'. ὄρῳ, ἔστις δήπωθεν εἰσι καὶ αἱ ἐν τμήματι γωνίαι, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, οἷα ἡ ὑπὸ α γ β. ἡ ἐν ἐλάττονι τμήματι, οἷα ἡ ὑπὸ η κ θ, καὶ ἡ ἐν μείζονι, οἷα ἡ ὑ-

πὸ

πρὸ δζ. ἡ μὲν ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς, καὶ ἡ ἐν μείζονι τμήματι, ἐλάττων, ὡς διεχθήσεται προτέρα λέ. τῶν παρόντων.

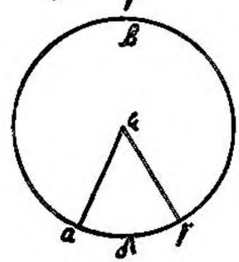
Η'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

Ἐπεὶ τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας παρὰ τὰς περιεχούσας αὐτὴν εὐθείας, καὶ βάσιν τὴν αὐτῆς θεωρῶν δέον ἦν τῷ μαθηματικῶν γάσομένῳ εὐσυμάτων, διά τοι τοῦτο ἐπὶ τῶν παρόντων διδάσκει, καὶ τίς ἡ τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας βάσις. Ἔστι δὲ βάσις τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας ἡ ἀπολαμβανομένη τῷ κύκλῳ περιφέρεια ὑπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν εὐθειῶν, οἷον ἐπὶ τοῦ α β δ, κύκλου, βάσις τῆς ὑπὸ δ α β, γωνίας ἐστὶν ἡ δ γ β, περιφέρεια, ἐφ' ἧς καὶ βεβηκέναι λέγεται ἡ αὐτὴ γωνία. διὰ τὸ τὰς α δ, α β, περιεχούσας αὐτὴν εὐθείας ἀπολαμβάνειν τὴν δ γ β, περιφέρειαν.



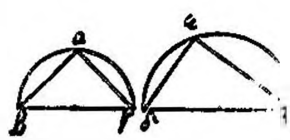
Euclid. Lib. 3. Fig. 5.

Θ'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς τῶν γωνίαν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.



Καὶ ὁ τομεὺς μέρος κύκλου ἐστίν, διπλασίονα δὲ τὸ τμῆμα τοῦ κύκλου· ὅτι τὸ μὲν τμῆμα ὑπὸ τῆς μιᾶς εὐθείας, καὶ περιφερείας κύκλου περιέχεται, ὁ δὲ τομεὺς περιέχεται ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, καὶ κύκλου περιφερείας, οἷον τὸ α δ γ ε, χῆμα. δεῖ δὲ ἀεὶ τὰς δύο τὰς τομέως εὐθείας ἐπὶ μεῖζον τοῦ κύκλου κεῖσθαι συμπίπτειν, περαιοῦσθαι δὲ ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Ἐπεδήπερ δύο ἄνισοι κύκλοι εἰς τμήματα ἄνισα μὲν, ὅμοια δὲ διαιρεθῆναι δύνανται, τίνα ἔστιν διδάσκει ἡμᾶς ἐπὶ τῶν παρόντων, καὶ ὅπως ἔχομεν διαγινώσκειν περὶ τινὰ τῶν τοῦ κύκλου τμημάτων ὅμοια, τίνα δ' ἀνόμοια. Ὅμοια τοίνυν τμήματα κύκλων ἐστὶν, ὅσα δέχεται γωνίας ἴσας, καὶ τὰ ἐν οἷς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, οἷα τὰ α β γ, ε δ ζ. εἴρηται δὲ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, οὐχὶ δὲ ἐν αἱ γωνίαι ἴσαι, ὅτι ἄλλο μέν ἐστι γωνία τμήματος, καὶ

ἄλλο

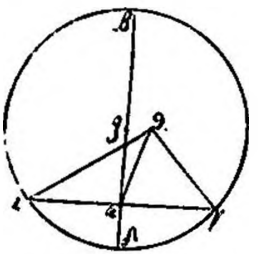
ἄλλο δὲ γωνία ἐν τμήματι, διὸ προσέθηκε τὸ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἀχθήτω δή τις ἡ α γ, διάμετρος, ὡς ἔτυχεν, ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς α γ, κατὰ τὸ ε, ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ε β, ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ τετμήσθω ἡ β ζ δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β α. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ β η τῇ η ζ, κοινὴ δὲ προσκείσθω ἡ η ε· αἱ ἄρα β η, η ε τοῖς ζ η, η ε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ β η ε γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζ η ε ἴση ἐστίν· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ β ε βάσει τῇ ε ζ ἴση ἐστίν. Ἡ δὲ β ε τῇ ε α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ε α ἄρα τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ α ε, ε ζ, ε β ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ γραφόμενος διὰ τῶν α, β, ζ σημείων, ἐπειδὴ ἡ ε β ἐπὶ τὸ ζ διάμετρος ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὸ ε κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου· ἐπεὶ εἰ μὴ, ἐπιζευγνυμένη τις ἡ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐλάττων ἢ μείζων ἔσται τῆς ε ζ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα τὸ ε κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου· οὐδὲ μὴν ἄλλο τι σημεῖον ἐκτὸς τῆς β ε· ἐπὶ γὰρ τῆς β ε τὸ κέντρον ἐστίν· ἐπὶ δὲ τῆς β ε οὐκ ἔστιν ἄλλο σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ε· ἐπὶ δὲ τῆς β ε τὸ ε· τὸ ε ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ α β γ δ, δοθέντος κύκλου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euel. Lib. 3. Fig. 6.

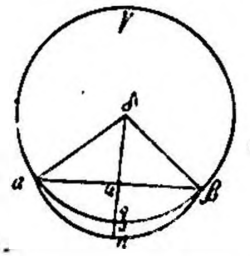


Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπ' αὐτῆς ἔσται τὸ κέντρον. Καὶ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄλλην τέμνουσιν, ἡ κοινὴ αὐτῇ τομὴ ἔσται τὸ κέντρον.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας λαφθῶσι δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἔστω τοῦ α γ β, κύκλου λαφθήτωσαν, ὡς ἔτυχε, τὰ α, καὶ β, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ α β, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς τοῦ κύκλου πίπτει. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ α η β, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ δ α, δ β. καὶ ἐπεὶ αἱ δ α, δ β, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸν ι. ὅρον τοῦ ά. παντὸς γὰρ τοῦ α δ β, τρίγωνον. ἀλλ' ἐπεὶ καὶ τοῦ ι ς'. τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ δ η α, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δ β η, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αὐτὴ δ η α, γωνία καὶ τῆς ὑπὸ δ α η, ὥστε καὶ τοῦ ι δ'. τοῦ ά. ἡ δ α,

ἡ δα, ἡ τῶν μείζονα γωνίαν ὑποτείνουσα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἴση δὲ τῇ δα, ἡ δζ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ἄρα καὶ ἡ δζ, μείζων ἐστὶ τῆς δη, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου ἡ αβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

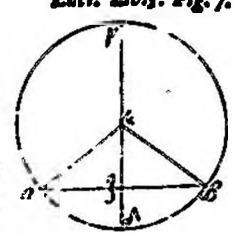
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ καθ' πλείονα σημεῖα, ἢ εἰς ἁπτόμενον τοῦ κύκλου εὐθεῖα πίπτει τὸν κύκλον, καὶ οὐκ ἅπτεται αὐτοῦ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθείαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἐν κύκλῳ τῷ αγβδ, εὐθεία ἡ γδ, διὰ τοῦ ε, κέντρου, μὴ διὰ τοῦ κέντρου τινὰ τὴν αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὴν πρώτην δίχα κατὰ τὸ ζ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. εἰλήφθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου αἱ αε, εβ, καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸν ιε. ὄροι τοῦ δ. κοινὴ δὲ ἡ εζ, πάντως γε αἱ δύο αε, εζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς βε, εζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αζ, βάσις τῇ βζ, βάσει ἴση, ἄρα καὶ ὅλον τὸ αεζ, τριγώνον ἴσόν ἐστι τῷ βεζ, τριγώνῳ κατὰ τὸν δ. τοῦ δ. καὶ ἑπομένως ἡ ὑπὸ εζα, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζβ. κατὰ τὸν ι. ἄρα ὄρθη τοῦ δ. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ εζα, εζβ, ὀρθή ἐστι, καὶ ἡ γδ, κάθετος ἐπὶ τὴν αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 7.



Τεμνέτω δὴ β'. ἡ γδ, τὴν αβ, πρὸς ὀρθάς. Λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ αἱ αε, εβ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν, ἔσονται πάντως ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ εαζ, εβζ, γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ εζα, εζβ, ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα τῶν αεζ, ζεβ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ εα, ἴση τῇ εβ, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσιν ἴσαι κατὰ τὸν δ. τοῦ δ. ὥστε ἡ αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ τὴν βάσιν δίχα τέμνουσα κάθετός ἐστιν ἐπ' αὐτῆς. καὶ πάλιν, καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίαν δίχα τέμνουσα ὑπὸ τῆς καθέτου.

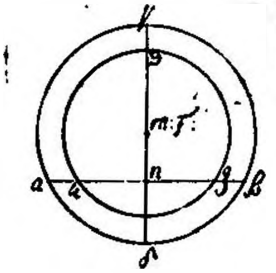
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β'. Ἔτι συνάγεται, ὅτι ἐν τοῖς ὁμοκέντροις κύκλοις τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμήματα τῆς τεμούσης αὐτοὺς εὐθείας ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἐπὶ γὰρ τῶν

αγβδ,

αγ βδ, καὶ ε Θζ, ὁμοκέντρων κύκλων, ἐπεὶ τῆς αβ, τεμνούσης τὰ α η, ηβ, μέρη ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τῶν ἀπείρων. ὡσαύτως καὶ τὰ ε η, ηζ, ἑαυτοῖς τὰ ἴσα ε η, ηζ, παρὰ τὰς ἴσων α η, ηβ, ἀφαιρεθῶσιν, ἐναπολειφθήσονται τὰ α ε, ζ β, τμήματα, τὰ μεταξὺ τῆς περιφερειῶν τῶν ὁμοκέντρων κύκλων ἴσα, καὶ τὸ γ'. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

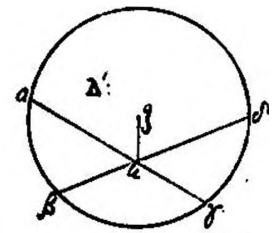
Euel. Lib. 3. Fig. 8.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ε'αν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὄσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

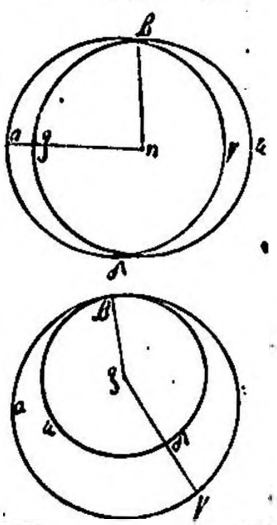
Ἐν κύκλῳ γὰρ τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, δβ, εὐθεῖαι καὶ τὸ ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὄσαι. Λέγω ταύτας μὴ τέμνειν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἡ μὲν βε, ἴση τῇ εδ, ἡ δὲ αε, τῇ εγ. καὶ εἰλήφθω διὰ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς ἡ ζε. κατὰ τῶν ἀπείρων ἄρα ἔσαι ὑπὸ ζεγ, γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ζεδ, ὀρθαὶ, καὶ ἑπομένως ἴσαι, τὸ ὅλον δηλονότι τῷ μέρει, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει. δεῖξαι.



Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ε'αν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγδ, καὶ βεδζ, τεμνέτωσαν ἀλλήλους καὶ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Λέγω τοίνυν μὴ εἶναι τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἑκατέρου τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ η. καὶ ἤχθωσαν αἱ βη, ηζ α, εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν αη, ζη, εὐθειῶν ἴση ἐστὶ τῇ βη, καὶ τὸν ε'. ὅρον τῶν ά. παύτως γε καὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ αη, τῇ ζη, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι, ὅπερ ἄτοπον. Ε'αν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ε'αν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, βδε, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς καὶ τὸ β. Λέγω μὴ εἶναι τὸ αὐτὸ ἀμφοῖν κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἑκατέρου τῶν κύκλων τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ ζ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βζ,

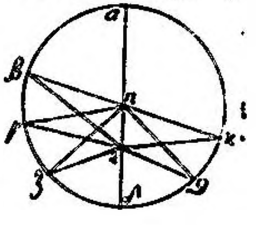
αἱ βζ, ζδγ· ἐπεὶ οὖν κῦ τὸν ε. ὅρον τῶ α. ἑκατέρα τῶν ζδ, κὴ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ βζ. παύσεται κῦ τὸ α. ἀξίωμα ἡ ζδ, ἴση ἐστὶ τῇ ζγ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τὸ αὐτὸ κεντρον ἀμφοῖν ἐστιν. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς κὴ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἔστω τοῦ αβγ κύκλου, τῆς αδ, λαμβάνεται τυχὸν σημεῖον τὸ ε, κὴ προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ ε, σημείου αἱ εβ, εγ, εζ, εὐθεῖαι. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν εα, ἡ διὰ τοῦ κ, κέντρου μεγίστη ἐστὶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ εδ, τῶν δ' ἄλλων ἡ μὲν εβ, μείζων τῆς εγ, ἡδὲ εγ, τῆς εζ. ἐπιζεύχθωσαν γὰρ τῶν βκ, γκ, ζκ, ἐπεὶ αἱ εκ, κβ, μείζονές εἰσι τῆς εβ, κῦ τὸν ε. τοῦ α. ταῖς δὲ εκ, κβ, ἴση ἐστὶν ἡ εα, ἡ γὰρ κα, ἴση ἐστὶ τῇ κβ, κῦ τὸν ε. ὅρον τοῦ α. κὴ κοινὴ ἡ κε, μείζων ἄρα ἐστὶ κὴ ἡ εα, τῆς εβ. Λοιπὴ ἄρα ἡ κβ, κὴ λοιπῆς τῆς εγ, μείζων ἐστί· τοῦ δὲ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται κὴ ἡ κγ, τῆς κβ, μείζων· ὥστε καὶ ἡ εα, τῆς εγ, μείζων ἐστί· πάλιν ἐπεὶ αἱ ζκ, κε, μείζονές εἰσι τῆς ζε, κῦ τὸν ε. ἴση ἐστὶν ἡ κα, τῇ κβ, μείζονες ἄρα εἰσὶν αἱ ζκ, κε, κῦ τῆς εβ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς κε, λοιπὴ ἡ ζκ, μείζων ἐστὶ τῆς εδ. Εἰ οὖν ἴση μὲν ἡ εα, μείζων δέδεικται τῆς εβ, αὖτη δὲ τῆς εγ, ἡ δὲ εγ, μείζων ἐστὶν ὁμοίως τῆς εζ, δέδεικται δὲ κὴ ἡ εζ, μείζων τῆς εδ, ἄρα ἡ μὲν εα, μεγίστη ἐστὶν, ἡδὲ εδ, ἐλαχίστη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 9.



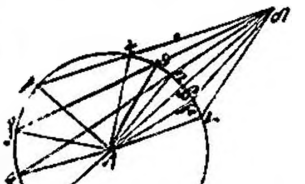
Λέγω δ' ὅτι κὴ ἐφ' ἑκάτερα τῆς εδ, δύο μόνας εὐθείας ἴσας προσπεσεῖν. γεγράφθω γὰρ ὑπὸ ζκδ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ δκϑ, κῦ τῷ κγ. τοῦ α. κὴ ἐπιζεύχθω ἡ κϑ. κὴ ἐπεὶ ἡ ζκ, ἴση ἐστὶ τῇ κϑ, ὡς ἐκ τοῦ κέντρου ἄμφω, κοινὴ δὲ ἡ κε, παύσεται αἱ δύο ζκ, κε, ταῖς ϑκ, κε, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ϑκ, κε, γίγονται δὲ κὴ γωνίαι ἡ ὑπὸ ζκε, ἴση τῇ ὑπὸ ϑκε, κὴ βάσις ἄρα ἡ ζε, βάσει τῇ εϑ, ἴση ἐστὶ κῦ τῷ δ'. τοῦ αὐτοῦ. ὅτι δὲ ἑδιμία ἄλλη εὐθεῖα δυνήσεται προσπεσεῖν ἴση τῇ εζ,

πλὴν τῆς ε Θ, δῆλον. προσπιπτέτω γὰρ, εἴγε δυνατὸν, ἡ ε κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κ κ. ἐπεὶ οὖν αἱ ζ κ, κ ε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς κ κ, κ ε, ἡ γὰρ ζ κ, ἴση ἐστὶ τῇ κ κ, καὶ τὴν ε ε, ὅρον τῶν δ. καὶ κοινὴ ἡ κ ε, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ζ ε, ἴση τῇ ε κ, καὶ τὰ ὑπὸ Θεισιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζ κ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ κ ε, καὶ τὰ ἡ. τῶν αὐτῶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ζ κ ε, ἴση γέγονε ἡ ὑπὸ Θ κ ε, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ Θ κ ε, τῇ ὑπὸ κ κ ε, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου λαφθῇ τι σημεῖον, ὃμὶ ἐστι καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ, ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἐγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦτο σημείου τε καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἐγγίον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὴν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐκτὸς γάρ τι τοῦ α β γ, κύκλου, λαφθήτω σημεῖον τὸ δ, ἀφ' οὗ διαχθήτωσαν εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, αἱ δ α, δ ε, δ ζ, δ γ, ὧν ἡ μὲν δ α, ἔστω διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ ἄλλαι, ὡς ἔτυχε. Λέγω δὴ ὅτι τῶν πρὸς τὴν α ε ζ γ, κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ α δ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ δ ε, μείζων τῆς δ ζ, καὶ ἡ δ ζ, μείζων τῆς δ γ. Ἀχθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, κέντρου αἱ λ γ, λ ζ, λ ε, καὶ ἐπεὶ αἱ ε λ, λ δ, μείζονές εἰσι τῆς ε δ, καὶ τὴν κ'. τοῦ α'. ταῖς δὴ ε λ, λ δ, ἴση ἐστὶν ἡ α δ, ἴση γὰρ ἡ α λ, τῇ ε λ, καὶ τὸν ὁρ'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, καὶ κοινὴ ἡ λ δ, παύτως γε καὶ ἡ α δ, μείζων ἐστὶ τῆς ε δ. αὖθις ἐπεὶ αἱ ε λ, λ δ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζ λ, λ δ, ἴση γὰρ ἡ ε λ, τῇ ζ λ, καὶ κοινὴ ἡ λ δ, ἡ δὲ ὑπὸ ε λ δ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ λ δ, δῆλον, ὅτι καὶ βάσις ἡ ε δ, μείζων ἐστὶ τῆς ζ δ, κατὰ τὴν κ δ'. τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζ δ, μείζων τῆς γ δ, ἐπεὶ οὖν ἡ α δ, μείζων δέδεικται τῆς ε δ, αὖτη δὲ τῆς ζ δ, ἡ δὲ ζ δ, τῆς γ δ, ἄρα ἡ μὲν α δ, μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν ἄλλων δὲ ἡ ἐγγίον ταύτης τῆς ἀπώτερον μείζων. ὅπερ ἐστὶ τὸ α.



Euclid. Lib. 3. Fig. 10.

Λέγω δ' ὅτι, ὅτι τῶν πρὸς τὴν β η θ κ, κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ δ β, ἡ μεταξὺ τοῦτο σημείου δ, καὶ τῆς διαμέτρου β α,

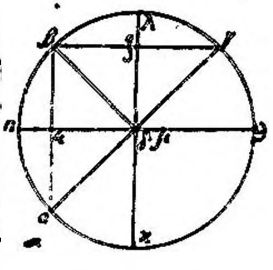
τῶν

τῇ δ' ἄλλων ἡ δπ, ἐλάττων τῆς δθ, ἡ ἡ δθ, τῆς δκ. Ἀχθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, κέντρου αἱ λπ, λθ, λκ, καὶ ἐπεὶ αἱ λπ, πδ, μείζονές εἰσι τῆς λδ, καὶ τῶν κ'. τοῦ α'. ἡ δὲ λπ, ἴση ἐστὶ τῇ λβ, τῇ τὸν ι έ. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ὑπολοιπὴ ἄρα ἡ πδ, μείζων τῆς βδ. Πάλιν ἐπεὶ ἐντὸς τοῦ λθδ, ἐγγράφηται ἐπὶ τῆς λδ, πλευρᾶς δύο εὐθεῖαι συνεστάθησαν αἱ λπ, πδ, παίπως γε τῶν καὶ τῶν α'. τοῦ αὐτοῦ, αἱ δύο αὗται συνεσταθεῖσαι εὐθεῖαι, ἐλάττονές εἰσι τῶν λθ, θδ, ἤτοι ἡ λπ, ἴση ἐστὶ τῇ λθ, τῶν ι έ. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἀφαιρεθεισῶν τῶν λπ, λθ, ὑπολοιπὴ ἡ πδ, ἐλάττων τῆς θδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θδ, ἐλάττων τῆς κδ, ὥστε ἐπεὶ ἡ βδ, ἐλάττων δέδεικται τῆς πδ, ἡ δὴ πδ, τῆς θδ, ἡ αὖ τῆς κδ· ἡ βδ, δίπαθεν ἐλαχίστη ἐστὶν, καὶ ἡ ἐγγιον παύτης τῆς ἀπώτερον μείζων, ὅπερ ἦν τὸ β'.

Λέγω γ'. ὅτι τῶν ἐφ' ἑκάτερα τῆς βδ, δύο μόναι εὐθεῖαι ἴσαι πέπτωτι. γινέσθω δὴ πρὸς τῇ ὑπὸ πλβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ βλμ, καὶ ἐπιζευχθῶ ἡ δμ, καὶ ἐπεὶ ἡ λπ, ἴση ἐστὶ τῇ λμ, κοινὴ δὲ ἡ λδ, παύτως γε αἱ δύο πλ, λδ, δυσὶ ταῖς μλ, λδ, ἴσαι εἰσι, γίγνεται δὴ καὶ πρὸς τῇ ὑπὸ πλβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ μλβ, ἄρα καὶ βάσις ἡ δβ, βάσει τῇ δμ, ἴση ἐστὶ τῷ καὶ τῷ δ'. τῶ α'. Ὅτι δὲ ἄλλη δυνατὸν ἐπίπεδον τινὰ ἀφεστάπτειν ἴσην τῇ δπ, πλείω τῆς δμ, δῆλον. Πεπτάτω γὰρ ἡ δν, εἰ δυνατόν· καὶ ἐπιζευχθῶ ἡ λν, καὶ ἐπεὶ ἡ δν, ἴση ἐστὶ τῇ δπ, παύτως γε ἴση ἐστὶ καὶ τῇ δμ, τῷ τὸ α. ἀξίωμα· ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, ἴση τῇ λν, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ δλ, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δμλ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δνλ, καὶ τῶν α'. τῶ α'. ἡ ἐντὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἄτοπον καὶ τῶν α'. τῶ αὐτῶ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς ἀπὸ δὲ τὸ σημείου πρὸς τὸν κύκλον καὶ τὰ ἐξῆς.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. *Eucl. Lib. 3. Fig. 11.*



Τοῦ αβγ, κύκλου ἐντὸς ληφθέω σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθήτωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ δα, δβ, δγ. Λέγω, ὅτι τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ τμηθήτωσαν δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ εδ, ζδ, περατούμεναι καὶ τὰ η θ, καὶ κλ, σημεῖα. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσι, καὶ κοινὴ ἡ εδ, δύο δὴ, αἱ αε, εδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς βε, εδ, ἕκατέρα δὴ καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ βδ, ἴση, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βεδ, καὶ τῶν δ'. τῶ α'. καθάπερ ἄρα ἡ εθ, ἐπὶ τῆς βα. Ἐπεὶ δ' αὖθις ἡ βα, τέτμηται ὑπὸ τῆς εθ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, παύτως γε τῶν καὶ τῶν γ'. τῶ παρόν-

τος

ως ἐπὶ τῆς ηΘ, ἐστὶ τὸ κέντρον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς κλ, ὁμοίως ἐστὶ τὸ κέντρον. ἀλλὰ τῆ ηΘ, κλ, κοινὴ τομή ἐστι τὸ δ, σημεῖον, τὸ δ, ἄρα σημεῖόν ἐστι τὸ κέντρον τῦ αβγ, κύκλυ. Ἐὰν ἄρα κύκλυ λιφθῆ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τῦ σημείυ πρὸς τὸν κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

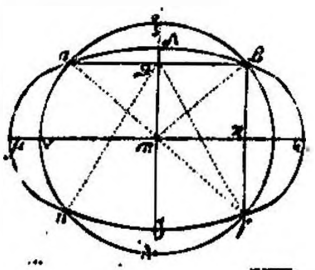
Ἄλλως. Ἐπὶ τὰ αὐτῦ χήματος τῆ αὐτῶν ὑποτεθειμένων, λέγω, ὅτι τὸ δ, σημεῖον, ἐστὶ τὸ κέντρον τῦ αβγ, κύκλυ· εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὸ μ· καὶ διήχθω διὰ τῶν δ, μ, ἡ ηΘ· καὶ ἐπεὶ ἡ Θη, διάμετρός ἐστι, καὶ ἐπ' αὐτῆς εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ δ, ἀφ' ἧ αἱ δΘ, δγ, δβ, πρὸς τῷ περιφέρειαν τῦ κύκλυ προσπίπτυσι, παύτως γε ἡ δΘ, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον μείζων ἐστὶ καὶ τῆ ζ'. τῦ παρόντος, ἡ δὲ γδ, μείζων ἐστὶ τῆς δβ, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ ἴση, ἄτοπον ἄρα. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ δι' ἄλλυ τινὸς σημεῖον κέντρον ἐστὶ παρὰ τὸ δ. τὸ δ, ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Κύκλος ἡ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τεμνέτω ὁ αβγ, κύκλος τὸν δεζ, κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, τὰ α, β, γ, η. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, ὧν δίχα τετμημένων κατὰ τὰ Θ, κ, διὰ τῆς ι. τῆ δ. ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τῶν Θ, κ, τῆ μὲν αβ, ἡ Θλ, τῆ δὲ βγ, ἡ κν, περαταύμεναι κατὰ τὰ ξ, ο. καὶ ἐπεὶ τὰς αβ, βγ, εὐθείας μὴ διὰ τῦ κέντρυ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέτμηκεν αἱ ξλ, ον, εὐθεῖαι, παύτως γε κατὰ τὸ γ'. τῦ παρόντος ἐφ' ἑκατέρας τῶν ξλ, ον, ἐστὶ τὸ τῦ αβγ, κύκλυ κέντρον· αἱ δὲ ξλ, ον, κατ' ὐδενὶ ἄλλῳ ξυμβάλλυσιν ἀλλήλαις, ἢ τὸ π, τὸ π, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῦ αβγ, κύκλυ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ αὐτὸ π, σημεῖον κέντρον εἶναι καὶ τῦ δεζ, ἄρα δύο κύκλων τεμνόντων ἀλλήλυς τὸ αὐτό ἐστι κέντρον, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τῶν ι'. τῦ παρόντος· ὁ τέμνει ἄρα κύκλος κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἢ καὶ ὅπως. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ αβγ, κύκλυ, καὶ ἔστω τὸ π, ἀφ' ἧ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τῇ περιφέρειαν τῦ αὐτῦ κύκλυ αἱ πα, πβ, πγ, ἴσαι ἔσονται καὶ τὸν ιέ. ὅρον τῦ δ. ἀλλ' ἐπεὶ ἐντὸς τῦ δεζ, κύκλυ εἴληπται τὸ αὐτὸ π, σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτῦ πρὸς τῇ τῦ δεζ, κύκλυ περιφέρειαν ἤχθησαν πλείονες, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ πα, πβ, πγ, τὸ π, ἄρα καὶ τῶν ἀνωτέρω κέντρον ἐστὶ καὶ τῦ δεζ, κύκλου. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτό ἐστι κέντρον, ὅπερ ἀδυνάτον καὶ τῷ ι', τῦ παρόντος. κύκλος ἄρα κύκλον ὐ τέμνει καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 3. Fig. 12.



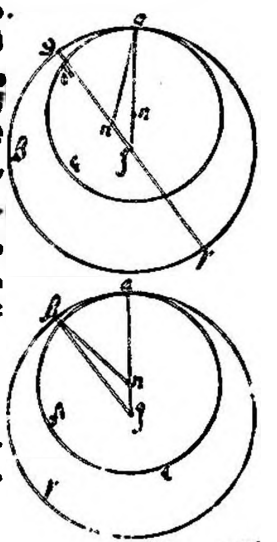
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Εὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῆς κύκλου.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ α β γ, α δ ε, ἁπτέσθωσαν ἐντὸς ἀλλήλων κατὰ τὸ α, τοῦ μὲν α β γ, ἔστω κέντρον τὸ ζ, τοῦ δὲ α δ ε, τὸ η. Λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ η, ζ, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὸ α, πεσεῖται ἐκβαλομένη. εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἐπί τινος ἄλλο συμείου, οἷον ἐπὶ τοῦ θ, ὡς ἡ ζ η θ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α η, α ζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ζ η, η α, τῶν α ζ, μείζονές εἰσι, καὶ τῶν κ'. τοῦ δ'. τῇ δὲ ζ α, ἴση ἐστὶν ἡ ζ θ, κατὰ τὸν ι ε', ὅρον, ἄρα καὶ αἱ ζ η, η α, μείζονές εἰσι καὶ τῆς ζ θ'. κοινὴ δὲ ἀφῃρήσθω τῆς ζ η, ἐγκαταλείπεται ἡ η α, μείζων τῆς η θ, τῇ δὲ η α, ἴση ἐστὶν ἡ η δ, τὸ γὰρ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ α δ ε, κύκλου καὶ τῶν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ ἡ η δ, μείζων ἐστὶ τῆς η θ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα οὐκ. Τοῦ ζ, ἔστιν κέντρον τοῦ α β γ, κύκλου, καὶ τοῦ η, τοῦ α δ ε, λέγω τῶν ἐπὶ τὰ ζ η, ἐπιζευγνυμένων εὐθείαν ἐπὶ τὸ α, πίπτειν. εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἐπὶ τὸ β, ὡς ἡ ζ η β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζ β, καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ α β γ, κύκλου, ἡ ζ α, ἴση ἐστὶ τῇ ζ η β, τῇ δὲ ζ α, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ζ β, ἄρα ἡ β ζ, ἴση τῇ ζ η β, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τὸν κ'. τοῦ α'. Ἔτι ἐπὶ τῶν ζ η β, οὐκ ἔστιν ἄλλην εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ συναφὲς, εὐθείαν εἶναι ὑποθώμεθα, καὶ ἡ β ζ, ἐπιζεύχθω, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ποιῶ μεῖζον ἄτοπον οὐκ ἄρα τὸ ι β, δέομαι. ἡ δύο εὐθεῖαι κοινὸν ἔξουσι τμῆμα αἱ ζ η β, ζ η α, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τὸ ι γ'. δέομαι. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 13.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δύο κύκλων ἀλλήλων ἁπτομένων ἐντὸς ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἑνὸς κέντρον ἀγομένη εὐθεῖα ἐκπίπτεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου.

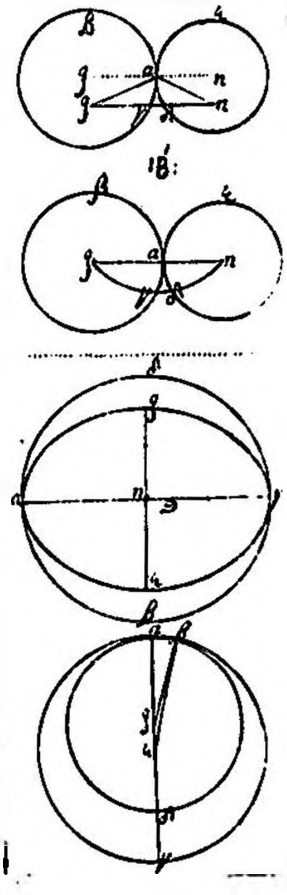
Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Εἰὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἁφῆς ἐλάσσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι ὁ α β γ, οὗ κέντρον τὸ ζ, καὶ α δ ε, οὗ κέντρον τὸ η, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ η, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα

θεῖα διὰ τῶ α, διειλλίσσεται. εἰ γὰρ δυνατὸν, διειλθέτω ὡς ἡ ζγδη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, ηα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τῶ αβγ, κύκλου, ἡ ζα, πάντως ἴση ἐστὶ τῇ ζγ. ὡσαύτως καὶ ἡ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, ὥστε αἱ ζα, αη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζγ, δη· κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς γδ, ὅλαι ἄρα αἱ ζγδη, μείζων τῶν ζα, αη, ὅπερ ἀδύνατον καὶ τῶ κ'. τῶ α'. ἡ καὶ ὕπω. Διειλθέτω, εἰ δυνατὸν, ἡ ἀπὸ τῶ η, ἐπὶ τὸ ζ, μὴ διὰ τῶ α, ἀλλὰ διὰ τῶν γ, καὶ δ, ὡς ἡ ζγδη, ἐπὶ τῶ β'. χήματος, ἥτις ἀθεῖα ὑποκείσθω. καὶ ἀπὸ τῶν ζ, η, κέντρων ἀχθήτωσαν αἱ ζα, αη. εἰ δὲν καὶ ἡ ζα η, ἀθεῖά ἐστιν, ἐπεὶ ἀθεῖα ὑπόκειται καὶ ἡ ζγδη, πάντως δύο ἀθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἄτοπον. εἰδὲ ἡ ζα η, οὐκ ἔστιν ἀθεῖα, τὸ ζα η, χῆμα τρίγωνον ἔσται, οὗ βάσις ἡ ζγδη, πλευραὶ δὲ αἱ ζα, αη, καὶ δεχθήσεται ὡς αὐτήρεφὴ ἡ ζγδη, βάσις, μείζων τῶν ζα, αη, πλευρῶν, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τὸ κ'. τῶ α. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα καὶ τὰ ἐξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 14.



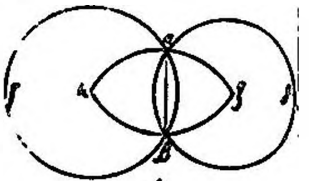
Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἕν, εἴτε ἐκτὸς εἴτε ἐντὸς ἐφάπτηται.

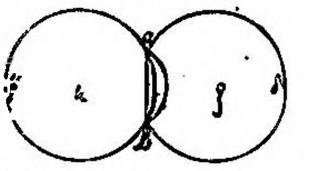
Κύκλος γὰρ ὁ αβγδ, ἡ κέντρον τὸ η, ἁπτέσθω, εἰ δυνατὸν, τῶ αεγζ, κύκλου, ἡ κέντρον τὸ θ, ἐντὸς καὶ πλείονα σημεῖα, ἢ εἰ, τὰ α, γ· καὶ διὰ τῶν ηθ, ἄρα διηρχομένη, ἐπὶ τὰς ἐναφὰς πέπτωκεν τῶν κύκλων, κατὰ τὸ κ'. τῶ παρόντος, ὡς ἡ αγ, καὶ ἐπεὶ τὸ η, κέντρον ἐστὶ τῶ αβγδ, κύκλου, πάντως καὶ ἡ ηα, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, ἡ δὲ ηγ, μείζων ἐστὶ τῆς θγ· ἄρα καὶ ἡ αη, μείζων ἐστὶ τῆς θγ, ἡ δὲ αθ, πολλῷ μείζων τῆς αὐτῆς θγ. Ἐπεὶ δ' αὖθις τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τῶ αεγζ, κύκλου, πάντως καὶ ἡ θα, ἴση ἐστὶ τῇ γθ. δέδεικται δὲ καὶ πολλῷ μείζων ταύτης, ὅπερ ἄτοπον. Εἰδέ τις εἴποι τὰ τῶν ἀφῶν σημεῖα ἐγγὺς ἀλλήλων εἶναι, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον· ἀπτέσθω ἔτως ὁ αβγ, τῶ αβδ, καὶ τὰ α, καὶ β· καὶ τῶ μὲν αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ε, τῶ δὲ αβδ, τὸ ζ· πάντως καὶ ἡ διὰ τῶν ε, ζ, διαβαίνουσα, ἐπὶ μίαν τῶν ἀφῶν, εἰμὶ καὶ ἐπὶ τῶν δύο, πεσεῖται, κατὰ τὸ κ'. τῦ παρόντος· πιπτέτω δὲ ἐπὶ τὸ α, ὡς ἡ αγ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, βε. ἄρα αἱ εζ, ζβ, μείζους εἰσὶ τῆς εβ,

κατὰ τὸν κ'. τῦ ά. ὅπνι τῆς α ε, ἴση γὰρ ἡ α ε, τῇ ε β. λοιπῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς ε ζ, ἐναπολειφθήσεται ἡ ζ β, μείζων τῆς ζ α, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ γὰρ ζ α, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β, ὅτι τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τῦ σβδ, κύκλυ.

Euclid. Lib. 3. Fig. 15.



Λ'πιθω ἔτι ὁ α β δ, κύκλος, οὗ κέντρον τὸ ζ, τῦ α β γ, ὁ κέντρον τὸ ε, ἐκτὸς κεῖται τῦ α, κὴ β. κὴ τὸν ε β'. ἄρα τὸ παρόντος ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἁφῆς διελεύσεται. Διελθέτω γοῦν διὰ μεσὸ τῦ α, ὡς ἐπὶ τῦ ά. χήματος, ἡ ε α ζ, διὰ δὲ τῦ β, ἡ ε β ζ, δύο ἄρα εὐθεῖαι ε α ζ, ε β ζ, χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, κὴ τὸ ι β'. ὅξιωμα, ἡ κὴ ὅπως. Ἐπεὶ ἐφ' ἑκατέρα τῶν κύκλων εἴληπται δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη ἐπ' αὐτὰ εὐθεῖα, ἡ ἐντὸς πεσεῖται ἑκατέρυ τῶν κύκλων, ὡς ἡ α β, ἐπὶ τῦ ά. χήματος, ἡ τῦ μὲν ἐντὸς, τῦ δὲ ἐκτὸς, ὡς ἐπὶ τῦ β'. χήματος. ἁπλᾶ καθ' ἑκάτερον ἀδύνατον. εἰ γὰρ ἐντὸς ἑκατέρυ τέμνουσιν οἱ κύκλοι ἀλλήλυς, κὴ οὐκ ἅπτονται. εἰδὶ τῦ μὲν ἐντὸς πῦ δὲ ἐκτὸς, ὡς μὲν ἀληθὲς, ὡς δὲ ψεῦδος ἔσται ἡ β'. τῦ παρόντος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐκτὸς κὴ πλείονα σημεῖα, ἢ δύ, κύκλος κύκλυ ἁφάπτεται. δίδεικται δὲ μηδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα κύκλυ οὐκ ἁφάπτεται κὴ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῦ κέντρυ, κὴ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῦ κέντρυ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἔστω τῷ α β δ γ, οὗ κέντρον τὸ ε, ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ α β, γ δ. Λέγω ταύτας ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τῦ ε, κέντρυ. Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐπ' αὐτῶν εὐθεῖαι ἀπὸ πῦ ε, αἱ ε ζ, ε η, κὴ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε γ. κατὰ τὸν γ'. ἄρα τὸ παρόντος αἱ α β, γ δ, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῶν ε ζ, ε η, ὥστε ἑκατέρα α β, διπλασία ἐστὶ τῆς α ζ, κὴ ἑκατέρα γ δ, τῆς γ η. ἀλλ' αἱ α β, γ δ, ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὸν ὑπόθεσιν, ἄρα κὴ αἱ α ζ, γ η, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ζ'. ὅξιωμα. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς α ζ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς α η, ἀλλὰ κὴ τὸ ἀπὸ τῆς α ε, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς γ ε. ἴση γὰρ ἡ α ε, τῇ ε γ, κατὰ τὸν ι δ'. ὅρον τῦ ά. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α ε, ἴσά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, κὴ τῶν μ ζ'. τῦ αὐτῦ. κὴ τῷ ἀπὸ τῆς ε γ, τὰ ἀπὸ τῶν γ η, η ε, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν γ η, η ε. ἀφαιρεμένων οὖν τῶν ἀπὸ τῶν α ζ, γ η, ἴσων, ἐγκαταλείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ζ ε, η ε, ὥστε

καὶ ἡ

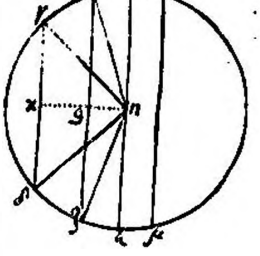
καὶ ἡ ζ ε. ἴση ἐστὶ τῇ η ε, ἀλλ' αἱ ζ ε, η ε, καθεπτί εἰσιν ἐπὶ τῶν α β, γ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου· αἱ α β, ἄρα γ δ, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ τὸν δ'. ὅρον τοῦ παρόντος. Ἀλλὰ δὴ ἀπεχέτωσαν αἱ α β, γ δ, ἴσον ἀπὸ τοῦ ε, κύκλου, λέγω πάλιν ἴσας εἶναι. τῇ αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, δειχθήσεται, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, δίχα τμηθεῖσα παρὰ τὴν ε ζ, ε η, καὶ τῶν γ'. τοῦ παρόντος· καὶ ἐπομένως τὸν μὲν α β, συναχθήσεται διπλάσιον εἶναι τοῦ α ζ, τῶν δὲ γ δ, τοῦ γ η. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α ε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γ ε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις τὰς α ε, γ ε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α η, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γ ε, τὰ ἀπὸ τῶν γ η, η ε. δειχθήσεται παλιν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν γ η, η ε. ἀφῃρημένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζ ε, η ε, ἴσων, ὑπολειφθήσεται τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, γ η, ἴσα, καὶ ἐπομένως αἱ α ζ, γ η, ὁμοίως ἴσαι. ὥστε καὶ αἱ πάντων διπλάσιαι, αἱ α β, γ δ, ἴσαι ἔσονται καὶ τὸ ς'. ἄξιωμα. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι ἀπθεῖαι ἴσον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγύτερον τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν.

Ἐν κύκλῳ γάρ τῷ α β γ δ, οὗ κέντρον τὸ η, ἔστω διάμετρος μὲν ἡ α ε, ἐγγύτερον δὲ τοῦτου ἡ β ζ, ἀπώτερον δὲ ἡ γ δ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ β ζ, μείζων τῆς γ δ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ η β, ἴση ἐστὶ τῇ η α, καὶ ἡ ζ η, τῇ η ε, καὶ τὸν ι έ, ὅρον τοῦ δ. παλιν γὰρ αἱ β η, η ζ, ἴσαι εἰσὶ τῇ α ε, αἱ δὲ β η, η ζ, μείζονές εἰσι τῆς β ζ, καὶ τῶν ι'. τοῦ δ. καὶ ἡ α ε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς β ζ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ β η, η ζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γ η, η δ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, καὶ δὲ ὑπὸ β η ζ, γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ η δ, καὶ βάσις ἄρα ἡ β ζ, μείζων ἐστὶ τῆς γ δ, βάσεως, καὶ τῶν κ δ'. τοῦ δ. ὁμοίως δὴ δείξομεν. κἂν ἄλλαι τινὲς ἀπθεῖαι ἀπώτερον ὦσι τοῦ κέντρου τῆς γ δ, ἐλάττονα εἶναι τῆς αὐτῆς γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 3. Fig. 16.

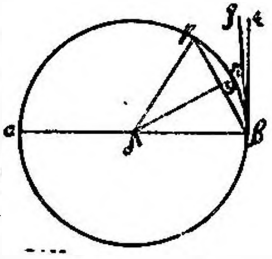


Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο μόναι ἴσαι συσταθήσονται ἀπθεῖαι, εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται αἱ ἀπώτερον τῆς ἐγγύτερον ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

Η τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. *Euct. Lib.3. Fig 17.*



Ἐπὶ τῆς αβ, ἔδω διαμέτρου τοῦ αγβ, κύκλου, οὐ κέντρον τὸ δ, κάθετος ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἀγομένη ἡ βε, λέγω, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ βγ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ, ἐπεὶ οὖν ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δβγ, γωνία, τῇ ὑπὸ δγβ, τουτέστι τῇ ϛ. τοῦ α. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δβγ, ὀρθή ἐστι καὶ τὸν ὑπόθεσιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δγβ. αἱ δύο ἄρα γωνίαι τοῦ δγβ, τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τῇ ιζ, τοῦ α. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας πίπτειν, ἐκτὸς ἄρα, ὡς ἡ βε. Λέγω ἔτι μεταξὺ τῆς βε, εὐθείας, καὶ βϑγ, περιφερείας μὴ δυνατὸν εὐθεῖαν ἑτέραν ἐμπίπτειν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐμπιπτέτω, ὡς ἡ βζ, καὶ ἐπ' αὐτὴν ἤχθω κάθετος ἡ δη, ἡ γὰρ δβ, οὐκ ἐπ' αὐτὴν, ἀλλ' ἐπὶ τῆς βε, κάθετος ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δηβ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ δβη, ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δβ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, τῇ ιϑ'. τοῦ α. τῇ δὲ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ δϑ, τῇ τοῦ ιϛ. ὅρου τοῦ α. καὶ ἡ δϑ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατὸν ἐμπεσεῖν. Λέγω δὴ καὶ γ'. ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τῆς αβ, διαμέτρου, καὶ τῆς βϑγ, κοίλης περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τῆς βε, εὐθείας, καὶ τῆς βϑγ, κυρτῆς περιφερείας, ἐλάττων ἐστίν. εἰ γὰρ εἴη ἄλλη τις γωνία μείζων μὲν τῆς τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλάττων δὲ τῆς λοιπῆς, ἐμπεσεῖται πάντως εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς βε, εὐθείας, καὶ βϑγ, περιφερείας εὐθεῖά τις ἄλλη, ὡς ἡ βζ, ὅπερ οὐκ ἐνδέχεται· ἀδύνατον εἶναι δέδεικται. πάσης ἄρα ὀξείας γωνίας μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλάσσων δὲ ἡ λοιπή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Η τῇ διαμέτρῳ ἄρα τοῦ κύκλου ὀρθὸς ὀρθὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

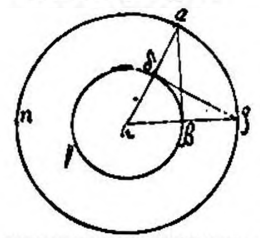
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τὸ πέρατος τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ἅπτεται τοῦ κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, ἐντὸς πεσεῖται, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ πάλιν, ἡ ἁπτομένη τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἐστι τῇ διαμέτρῳ.

Πρό-

Πρότασις ΙΖ'. Πρόβλημα.

Α'πὸ τῆ δοθέντος σημείου τῆ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

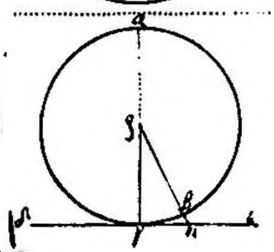
Α'πὸ τῆ δοθέντος ἤδη σημείου τῆ α, τοῦ δοθέντος βγδ, κύκλου ἐφαπτομένην γραμμὴν δεῖ ἀγαγεῖν. Εἰλήφθω τοίνυν τὸ ε, κέντρον τῆ βγδ, κύκλου καὶ τὴν ά. τῆ παρόντος· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αε, τέμνουσα τὸν βγδ, κύκλον κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, κύκλος γεγράφθω ὁ αζη, καὶ ἀπὸ τῆ δ. καθέτος ἀχθεῖσα ἡ δζ, ἐπὶ τῆς εδ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εβζ, καὶ ζδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶν ἑκατέρου τῶν κύκλων, παῦσις γὰ ἡ εα, ἴση ἐστὶ τῇ εζ, ἡ δὲ εδ, τῇ εβ. ὅλη αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζε, εδ, περιέχουσι δὲ καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν πρὸς τῷ ε, καὶ βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ δ'. τῆ ά. ἔσῃ τὸ αεβ, τρίγωνον, ἴσον τῷ δεζ, τριγώνῳ, καὶ αἱ ὑπὸ αβε, γωνίαι τῇ ὑπὸ ζδε, ἴσαι, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζδε, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβε. ἡ αβ, ἄρα καθέτος ἐστὶν ἐπὶ τῆς εβ, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, οὖσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἅπτεται ἄρα ἡ αβ, τοῦ βγδ, κύκλου· ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθεῖν.



Euclid. Lib. 3. Fig. 18.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἁπτομένην.



Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, ἁπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, κατὰ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἐπὶ τὸ γ, ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. Λέγω πρῶτον κάθετον εἶναι ἐπὶ τῆς δε. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ἡ ζη, κάθετος ἐπὶ τῆς δε. ὅτι ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ζηγ, ὀρθή ἐστι, πάντως γὰ ἡ ὑπὸ ζγη, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ κατὰ τὸ ιή. τοῦ ά. ἡ ζγ, μείζων ἐστὶ τῆς ζη, ἀλλ' ἡ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κατὰ τὸν ιέ, ὅρον, ἄρα καὶ ἡ ζβ, μείζων ἐστὶ τῆς ζη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄλλη τις ἔσται κάθετος ἐπὶ τῆς δε, ἢ ἡ ζγ. Ε'ὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

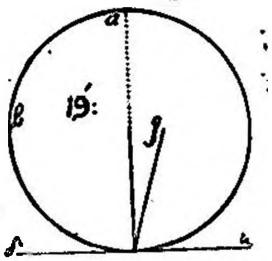
Ε'ὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου ἤδη τοῦ αβγ, ἁπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, κατὰ τὸ γ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς

ἐπὶ

ἐπὶ τῆς δε, ἤχθω ἡ γα. Λέγω ἐπὶ τῆς γα, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὸ ζ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζγ, καὶ ζγ, ἄρα καὶ τῶν αὐτῶν κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, ἔστι δὲ καὶ ἡ γα, ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς δε, καὶ τῶν καπασκδήν, ἄρα ἡ ὑπὸ ζγε, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὴ τῆς ἁφῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

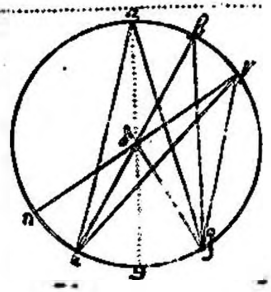
Eucl. Lib. 3. Fig. 19.



Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὰ αὐτὰ περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

Ἐν κύκλῳ τῷ αβγ, ἡ κέντρον τὸ δ, ἔστω γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ ἡ ὑπὸ εδζ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ εαζ, ἑκατέρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βεβηκυῖα βάσεως, τῆς εθζ, περιφερείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εαζ. ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ αδ, καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ θ, καὶ ἐπεὶ αἱ δα, δε, ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, παίσως γε ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δαε, δεα, γωνίαι καπὰ τὸ ε'. τοῦ α'. τοῖς δὲ ὑπὸ δαε, δεα, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδθ, καπὰ τὸ λβ'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δαε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ζδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, ὅλης τῇ ὑπὸ εαζ, διπλασίων ἐστίν.



Ἐστω δὴ πάλιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας πλαγίως κειμένη ἡ ὑπὸ εβζ. Λέγω καὶ πάλιν τὴν ὑπὸ εδζ, διπλασίαν εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ αἱ δβ, δζ, ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβζ, δζβ, γωνίαι καὶ τὴν ε'. τοῦ α'. τοῖς δὲ ὑπὸ δβζ, δζβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, καὶ τὴν λβ'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, τῆς μιᾶς αὐτῇ, ἤτοι τῆς ὑπὸ δβζ, διπλασίων ἐστίν.

Ἔστω καὶ γ'. πλαγιώτερον πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἡ ὑπὸ εγζ. ὅτι δὲ καὶ ταύτης διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, δῆλον. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ δγ, ἀχρειόσθω ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ δγζ, δζγ, ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὰ εἰρημένα, καὶ ταύτας ἴσον ἐστὶν ἡ ὑπὸ κδζ, ἑκατέρᾳ, παίσως γε τῇ μιᾷ, ἤτοι τῇ ὑπὸ δγζ, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ κδζ. ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ δγε, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ κδε, διὰ τὰ αὐτά. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ λοιπῆς τῆς ὑπὸ εγζ. Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ἴσαι

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα, ὅταν τῶν αὐτῶν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

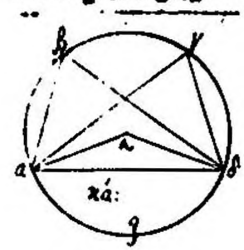
Β'. Ἔτι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου συνιστάμεναι γωνίαι ἐπὶ διπλασίων βαίνουσι περιφερειῶν, ἤ αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ ἴσαι ταῖς πρὸς τῇ περιφερείᾳ συνιστάμεναι.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδζ, ἔστωσαν γωνίαι ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ αβγδ, αἱ ὑπὸ αβδ, καὶ αγδ. Λέγω ταύτας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αγδ, τῶν αὐτῶν περιφέρειαν αζβ, βάσιν ἔχουσι, παύτως γε καὶ τὸ πόρισμα τῆς εἰσπέρω ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι καὶ τὰ ἑξῆς.

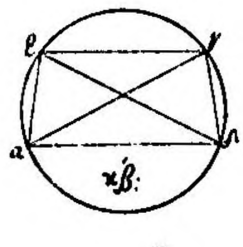
Eucl. Lib. 3. Fig. 22.

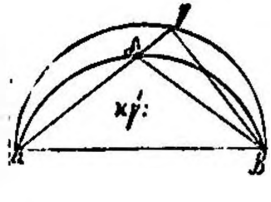


Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, ἔστω τετράπλευρον τὸ αβγδ. Λέγω ὅτι τῶν ἀπεναντίον γωνιῶν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαδ, τῇ ὑπὸ δβγ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς κ'. τοῦ παρόντος, τῶν αὐτῶν γὰρ γδ, περιφέρειαν βάσιν ἔχουσιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ὑπὸ δγα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δαγ, δγα, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ αβγ, καὶ ταῖς ὑπὸ δαγ, δγα, τῇ ὑπὸ αδγ, ἔσονται πάλιν αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ δαγ, αγδ, γδα, τρισὶ τοῖς αγδ, τριγώνου γωνίαις. ἀλλ' αἱ τρεῖς τῷ αγδ, τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ τῷ λβ'. τῷ α. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ τὰς ὑπὸ βαδ, δγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις ἄρα τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον καὶ τ'ξ.





Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συνασθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας συνιστάσθωσαν τὰ αγβ, αδβ, ὅμοια καὶ ἄνισα τμήματα κύκλων. καὶ τῆς αδγ, ἠγμένης, ἐπιζεύχθωσαν αἱ δβ, γβ.

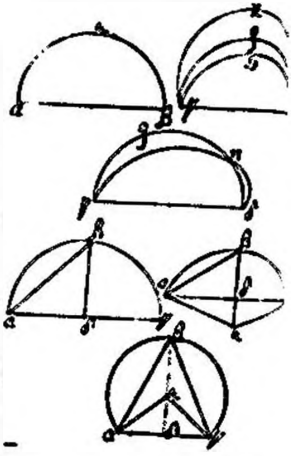
καὶ ἐπεὶ τὰ α δ β, α γ β, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, παύπως γε ἴσας γωνίας δέχονται, καὶ τὰν ί. ὅρον τῶ παρόντος. ἄρα ἡ ὑπὸ α δ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τῷ λ β'. τῶ δ. ὡκ ἄρα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας δύο τμήματα κύκλω ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσονται.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐπὶ ἴσων γὰρ εὐθειῶν τῶν α β, γ δ, συνεστάθωσαν ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ α ε β, γ ζ δ. Λέγω πάντα ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἐφαρμοζομένης τᾶς α β, ἐπὶ τᾶς γ δ, ἡ ἐκτὸς τῶ γ ζ δ, πεσεῖται τὸ α ε β, τμῆμα, ὡς τὸ γ κ δ, ἡ ἐντὸς πάντα, ὡς τὸ γ θ δ. καὶ ἔσται ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας δύο τμήματα ὅμοια καὶ ἄνισα, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τῷ δεκάτῳ. τὸ γὰρ μέρος μὲν πάντα ἐντὸς, μέρος δὲ ἐκτὸς πεσεῖται, ὡς τὸ γ κ δ, καὶ κύκλος κύκλον τμεῖ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὸν ί. τῶ παρόντος. Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα εὐθειῶν ὅμοια τμήματα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 21.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ πάντων δῆλον, ὅτι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσα τὰ καὶ ὅμοια τμήματα κύκλου ἀφαιροῦσιν, ὁποσαδηποτοῦν ἐναρμοζόμενα.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

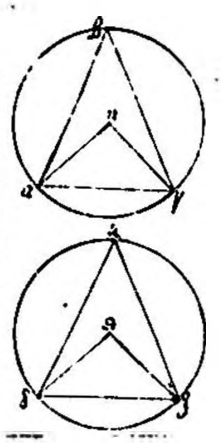
Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τῷ κύκλῳ, ὃπερ ἐστὶ τμῆμα.

Ἔστω δὲ κύκλου προσαναγράψαι, δοθέντος τοῦ α β γ, τμήματος. Ἐπιζεύχθω ἡ α γ, καὶ τμηθείσης δίχα τᾶς αὐτᾶς α γ, κατὰ τὸ δ, ἤχθω ἀπὸ δρθᾶς ἐπ' αὐτᾶς ἡ δ β, καὶ τῷ ί. τῶ δ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α β. ἡ σὺ ὑπὸ δ β α, γωνία ἢ μείζων ἐστὶ τᾶς ὑπὸ β α δ, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. Ἔστω δὴ δ. μείζων, καὶ γεγράθω πάντῃ ἴση ἡ ὑπὸ β α ι. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ β δ, συμπίπτουσα τῇ α ι, κατὰ τὸ ι. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ι γ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β ι, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α ι, ἴση πάντως ἐστὶ καὶ ἡ β ι, τῇ ι α, κατὰ τὸν ί. τῶ δ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ γ, κοινὴ δὲ ἡ δ ι, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ι, γωνία τῇ ὑπὸ γ δ ι, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ α ι, βάσει τῇ ι γ, ἴση ἐστὶ, κατὰ τὸν δ'. τῶ δ. ἴση δὲ τῇ α ι, ἐστὶ καὶ ἡ ι β, ἄρα καὶ ἡ ι γ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ι β. ὥστε αἱ τρεῖς ι α, ι β, ι γ, ἴσαι εἰσὶ. κέντρῳ ἄρα τῷ ι, διαστήματι δὲ τῷ α, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν β, καὶ γ, σημείων· καὶ δῆλον, ὅτι τὸ α β γ, ἔλαττον τμῆμά ἐστι κύκλου, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι τὸ κέντρον.

Ἔστω δὲ ἡ ὑπὸ δ β α, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ἄρα καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ β, ἐστι δὲ καὶ ἡ

καὶ ἡ δγ, ἴση τῇ αδ. αἱ ἄρα αδ, δβ, δγ, ἴσαι εἰσι, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν α, προσαναγεγράφθω ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ αβγ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅτι ἐπὶ τῆς αγ, ἐστὶ τὸ κέντρον.

Ἐστω δὴ τι ἡ ὑπὸ δβα, ἐλάττων τῆς ὑπὸ βαδ. γεγράφθω ἡ ὑπὸ βαε, ἴση τῇ ὑπὸ εβα, καὶ ἐπιζευχθω ἡ εγ. αἱ πλευραὶ αε, εβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας γωνίας ὑποτείνειν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αε, τῇ εγ, ἴση κατὰ τὸν δ'. τῶν α. αἱ τρεῖς ἄρα αε, εβ, εγ, ἴσαι εἰσι. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν εα, προσαναγεγράφθω ὁ κύκλος, καὶ τὸ αβγ, μεῖζον τμῆμα κύκλου ἐστὶ, διὰ τὸ ἐντὸς ἔχειν τὸ κέντρον. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Euc. Lib. 3. Fig. 22.



Πρότασις Κς'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις κύκλοις ἤδη τοῖς αβγ, δεζ, ἴσαι γωνίαι συνεστάθωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ, πρὸς δὲ περιφερείᾳ δὲ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ. λέγω, ὅτι αἱ αγ, δζ, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι ἴσοι εἰσιν, ἴσαι πάντως γ' εἰσὶ καὶ αἱ αη, ηγ, ταῖς δθ, θζ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ, γωνίαι, ἴσαι. καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ πρὸς τῇ β, καὶ ε, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τμήματα ὅμοιά ἐστι, κατὰ τὸν ι'. ὅρον τὰ παρόντος, εἰσὶ δὲ καὶ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν αγ, δζ, ἄρα καὶ ἴσα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κδ'. τῶν αὐτῶν. ἀλλὰ καὶ οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι ἴσοι εἰσι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφῄρηται τὰ αβγ, δεζ, τμήματα ἴσα, ἄρα καὶ τὰ αγ, δζ, τμήματα, ἴσά ἐστι, κατὰ τὸ ε'. ἀξίωμα. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴτε καὶ πρὸς τοῖς κέντροις.

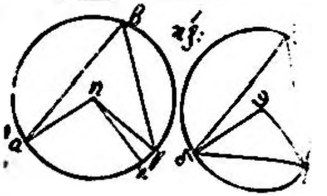
Πρότασις Κζ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις ἤδη κύκλοις τοῖς αβγ, δεζ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν αγ, δζ, βεβηκέτωσαν γωνίαι, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις, αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ. πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ. λέγω τὴν ὑπὸ αηγ, ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ

δϑζ, ἡ τῷ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ. ἐγγὰρ μὴ, ἔστω ἡ ὑπὸ αηγ, μείζων, ἢ γεγράφω ἴση τῇ ὑπὸ δϑζ, ἡ ὑπὸ αηκ. ἡ αχ, ἄρα περιφέρεια, τῇ τῷ ἀπὸ τῷ, ἴση ἐστὶ τῇ δζ, περιφερείᾳ. ἔστι δὲ τῇ δζ, ἴση ἡ αγ, ἄρα ἡ αχ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηγ, τῆς ὑπὸ δϑζ, διὰ τὰ αὐτά. οὐδὲ τῆς ὑπὸ δϑζ, ἡ ὑπὸ αηγ, ἐλάττων ἐδείχθη δὲ οὐδὲ τῆς ὑπὸ δϑζ, ἡ ὑπὸ δεζ. ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, δεζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι, ἢ τὰ ἑξῆς.

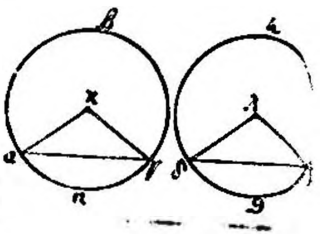
Euclid. Lib. 3. Fig. 23.



Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αγ, δζ, ἴσας περιτεμνέτωσαν μείζονας μὲν περιφερείας τὰς αβγ, δεζ, ἐλάττονας δὲ τὰς αηγ, δϑζ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ δεζ, ἡ δὲ αηγ, τῇ δϑζ. εἰλήφθωσαν γὰρ ἀμφοτέρων τῶν κέντρα, διὰ τὸ δ. τὸ παρόντος, καὶ ἔστωσαν τοῦτο τὸ κ, λ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ κα, κγ, λδ, λζ. καὶ ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἡ αγ, ὁμοίως ἴση τῇ δζ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ακγ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δλζ, τῇ τῷ ἀ. τὸ δ. εἰσὶ δὲ καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμφότεραι, ἄρα καὶ τῷ κς'. τὸ παρόντος, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἴσαι ἄρα αἱ αηγ, δϑζ, περιφέρειαι. ἀλλὰ καὶ αἱ κύκλοι εἰσὶν ἴσοι, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ αβγ, δεζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί, κατὰ τὸ ε'. ἀξίωμα. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις ΚΘ. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ τὰς ἴσας περιφερείας ὑποτείνουσιν ἴσαι εὐθεῖαι.

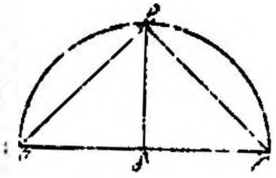
Ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς αὐτοῖς κύκλοις ἔστωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ αηγ, δϑζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, λέγω ταύτας ἴσας εἶναι. τοῦ γὰρ αὐτοῦ γὰρ κύκλου κατασκευασθέντος, ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ακγ, γωνία τῇ ὑπὸ δλζ, ἴση, καὶ τῷ κς'. τῷ παρόντος, πρὸς τοῖς κέντροις γὰρ ἀμφότεραι, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. ἄρα καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ δζ, τῷ δ'. τῷ ἀ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Λ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Τῷ δοθεῖσαν ἤδη αβγ, περιφέρειαν ἔστω τμηθῆναι δίχα. ἐπιζεύχθω γοῦν ἡ αγ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, διὰ τοῦ α. τοῦ δ. καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀνεστάσθω καθέτος ἡ δβ, καὶ τῶν ι δ. τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, δγ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴς λαμβανομένης τῆς δβ, πάντως γε αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γδ, δβ, ἕτι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ βγ, ἴση ἐστὶ, καὶ τῶν δ'. τοῦ δ. ἄρα καὶ τῶν κδ'. τοῦ παρόντος ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ βγ, περιφερείᾳ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 24.

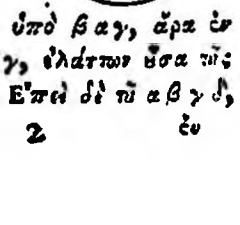


Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγ, ἔστω ἡμικύκλιον μὲν τὸ βαγ, μεῖζον δὲ τμῆμα, τὸ αβγ, καὶ ἔλαττον, τὸ αδγ. Ἔστω δὴ ἐν μὲν τῷ βαγ, ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐν δὲ τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὑπὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ ἐλάττονι, ἡ ὑπὸ αδγ, καὶ ἔτι τοῦ μὲν αβγ, μείζονος τμήματος γωνία ἔστω ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αβγ, περιφερείας καὶ αγ, εὐθείας, τοῦ δὲ αδγ, ἐλάττονος ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν ὑπὸ τῆς αβγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας ἐλάττων ὀρθῆς. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ αε, καὶ διήχθω ἡ βα, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ αἱ βε, εα, ἴσαι εἰσὶν, ἴση πάντως ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαε, καὶ τῶν ε. τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ γαε, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, διπλῆ καὶ ἡ ὑπὸ ζαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, καὶ τῶν λ β'. τοῦ α. ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, ζαγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα, καὶ τὸν ι. ὅρον τοῦ α. ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ α. Καὶ δὴ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, ἐλάττων πάντως γε ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἓν τὸ β'. Ἐπεὶ δὲ τοῦ αβγδ,

Eucl. Lib. 3. Fig. 25.



ἐν κύκλῳ παραλλήλων αἱ ὑπὸ α β γ, α δ γ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ κβ'. τῶν παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ α β γ, ἐλάττων ὀρθῆς δέδεικται, παίπως γε ἡ ὑπὸ α δ γ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἐστὶ τὸ γ'. Λύθεις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῆς β α, α γ, περιεχομένη γωνία δέδεικται ὀρθή· δῆλον, ὅτι ἡ ὑπό τῆς α β γ, περιφερείας καὶ α γ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἐστὶ τὸ δ'. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ὑπὸ ζ α γ, ὀρθή ἐστιν, παίπως γε ἡ ὑπό τῆς α δ γ, περιφερείας, καὶ α γ, εὐθείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ ε.

Δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὴν ὑπὸ β α γ, ὀρθήν. Ἐπεὶ γὰρ ἴση τῷ λβ'. τῶ ά. ἡμισεῖ ὑπὸ α ι β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ α ι, ἡδὲ ὑπὸ α ι γ, τῆς ὑπὸ β α ι. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ α ι β, α ι γ, διπλάσιαί εἰσι τῆς ὅλης ὑπὸ β α γ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ α ι β, α ι γ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ τῷ ιγ'. τῶ ά. ἡ ὑπὸ β α γ, ἄρα ὀρθή ἐστιν. Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἑτεροίας ἡ μία τῶν γωνιῶν τοῖς λοιποῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν. ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ἑξῆς ἐκείνης τοῖς δυσὶν ἴση ἐστί.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται τοῖς ἐν ταῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ α β γ, ἁπτέσθω τις εὐθεῖα, καὶ τὸ γ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἐπὶ τὸν κύκλον ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἡ γ β, ποιείτω γωνίας μὲν τῇ δ ι, τὰς ὑπὸ β γ ι, β γ δ. Λέγω, ὅτι ἡμισεῖ ὑπὸ β γ ι, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ β α γ, τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ β γ δ, τῇ ἐν τῷ β ζ γ, ὁμοίως ἐναλλὰξ τμήματι. Συνιστάσθω γὰρ ἐπὶ τῆς δ ι, καὶ τῷ γ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γ α, καὶ τῷ ι ά. τῶ ά. καὶ λεχθείσης ὡς ἔτυχε τοῦ ζ, συμπὶν, ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β ζ, ζ γ. καὶ ἐπεὶ ἡ δ ι, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καθῆπται συνισῦσα ἐπ' αὐτὴν ἡ α γ, παίπως γε καὶ τῷ ιθ'. τοῦ παρόντος ἐπὶ τῆς α γ, ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ α β ζ γ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἡδὲ ὑπὸ α β γ, γωνία ὀρθή, καὶ τῷ ἀνίσῳ. ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ α β γ, ἑτεροίας γωνίαι, αἱ ὑπὸ β α γ, β γ α, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ λβ'. τῶ ά. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ α γ ι, ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ β α γ, β γ α, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ σ γ ι, κοιναῖς δὲ ἀφῃρημέναις τῆς ὑπὸ β γ α, ἐγκαταλείπεται παίπως ἡ ὑπὸ β γ ι, ἴση τῇ ὑπὸ β α γ· ὅπερ ἦν τὸ ά. Λύθεις ἐπεὶ τοῦ α β ζ γ, παραλλήλου αἱ ὑπὸ β α γ, β ζ γ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ κβ'. τῶ παρόν-

Euclid. Lib. 3. Fig. 26.

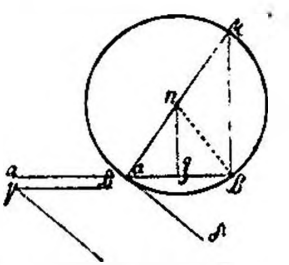
τος,

τος, εἰσὶ δὲ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ βγε, βγδ, καὶ τῷ ιγ'. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βγε· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, βζγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγε, βγδ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγε, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ βαγ, ὑπολέλειπται ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση τῇ ὑπὸ βζγ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν κύκλου ἄρα ἅπτηταί τις εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἐπὶ τῆς αβ, ἔδει δοθείσης εὐθείας ἔστω γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. Ἀλλ' ἐπεὶ τὰ εἴδη τῆς γωνιῶν τρία, ἡ γὰρ ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα. Ἔστω πρ. ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα, καὶ κείσθω πρὸς αὐτῇ γραμμῇ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς τῷ α σημείῳ τῷ γ, ἴση ἡ ὑπὸ βαδ, καὶ τῷ κγ'. τῇ πρ. καὶ τῇ αδ, ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αε, διὰ τοῦ πρ. τοῦ αὐτοῦ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ αβ, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἤχθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηβ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αζ. ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κοινὴ δὲ ἡ ζη, καὶ ἡ ὑπὸ αζη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζη, παντὸς γὰρ, καὶ τῷ δ'. τῇ πρ. καὶ ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ ηβ. ὥστε κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηα, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἔστω δὴ ὅπερ ὁ αβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ αε, διαμέτρῳ πρὸς τῷ α, αὐτοῦ ἄκρῳ, δῆλον, ὅτι ἐφάπτηται τοῦ κύκλου καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιγ'. ἀπὸ δὴ τοῦ ἀφῆς σ, διήχθω ἡ αβ, εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αδ, τῇ ὑπὸ βαδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, καὶ τῇ αὐσπίρῳ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῇ γ, δοθεῖσα, ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῇ γ, δοθείσῃ. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.



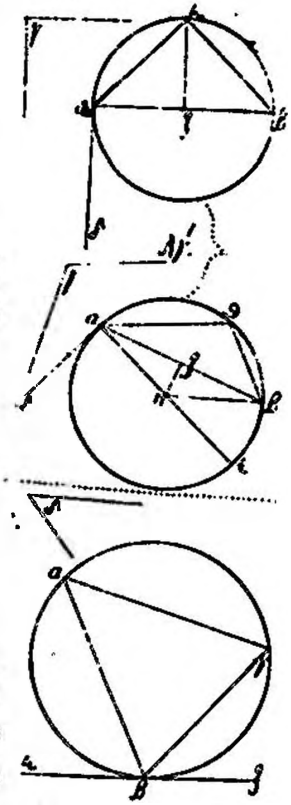
Eucl. Lib. 3. Fig. 27.

Ἔστω δὴ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ὀρθή. καὶ γεγράφθω πάλιν ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, καὶ τῷ κγ'. τῇ πρ. καὶ τῆς αβ, δίχα τετμήσθω καὶ τὸ ζ. κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γεγράφθω κύκλος ὁ αβε. τῆς δὴ ζε, κατήχθω ἀγομένης ἐπὶ τῆς αβ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ, ἅπτεται ἄρα πάντως τοῦ κύκλου, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιγ'. τῇ παρόντος. ὥστε ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, καὶ τῇ αὐσπίρῳ, ἡ καὶ τῇ λα'. τῇ παρόντος. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐπὶ τῆς αβ, γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ'.

Ἔστω

Ἐστω πλευραῖον μὲν ὀρθὴ τῇ γ, γωνίᾳ ἀμβλείᾳ, ἢ γενέσθω πάλιν ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, ὡς ἀναγραπτέον. τῶν δὲ καταγραφεισῶν γεωμετρικῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς δ. καταγραφῆς, ἐπεὶ ἡ αβ, δίχα τέτμηται, παίπες γε αἱ αζ, ζκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς βζ, ζκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αζκ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζκ, ἄρα καὶ βάσις ἡ ακ, βάσει τῇ βκ, ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, ὡς ὁ αβε. Εἰλήφθω δὲ τυχὸν σημεῖον τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αθ, θβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, πάθιός ἐστιν ἐπὶ τὰς αε, ἔπηται παίπες τὸ κύκλου, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιζ'. τοῦ παρόντος. καὶ δὲ τῷ αὐτῷ, ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ αθβ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ γ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αθβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αθβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. Lib. 3. Fig. 28.



Πρότασις ΛΔ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὲ ἀφαιρεῖν ἀπὸ τοῦ αβγ, κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. Ἀπὸ τοῦ ζ, τινὶ τυχόντι σημείῳ ἐφαπτέσθω ἡ ζη, τοῦ αβγ, κύκλου καὶ τῷ β, ἴση ἡ ζθ, διὰ τῆς ιζ'. τοῦ παρόντος, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, σημείῳ πρὸς τῷ ζ, διαστήματι δὲ ἴσῃ τῇ πρὸς τῷ δ, γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ζβγ, διὰ τῆς κγ'. τοῦ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βα, αγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζη, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἐπαφῆς τῆς ζ, διῆκται τις εὐθεῖα ἡ ζβ, ἡ ὑπὸ ηζβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζαβ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ηζβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ. καὶ ἡ ὑπὸ ζαβ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ. ἀπείληπται ἄρα ἀπὸ τοῦ αβγ, κύκλου τμῆμα τὸ αβγ, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ζαγ, ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

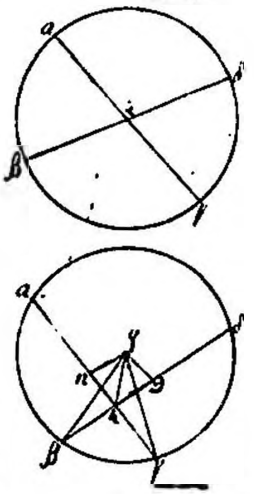
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν κύκλῳ γὰρ τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, βδ, κατὰ τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βε, εδ, ὀρθογωνίῳ.

εἰ μὲν

εἰ δὲν αἱ α γ, β δ, διὰ τῶ κέντρου διήρχοντο, ἐπεὶ δίχα ἑκατέρα τέμνεται, δῆλον τὸ ὑποκείμενον. εἰδὲ μὴ διὰ τῶ κέντρου εἰσὶν, ὡς ἐπὶ τῆ β'. διαγράμματος, διῃρήσθω τὸ τῆς κύκλου κέντρον, διὰ τῆς δ. τῆ παρόντος, ᾗ ἔστω ἡ ἐπὶ τὸ ζ. ἀπὸ δὴ τῆ ζ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν α γ, β δ, πιπτούσαι κάθετοι, αἱ ζ η, ζ θ, διὰ τῆς ι β'. τῆ δ. ᾗ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ζ β, ζ γ, ζ ι. ἑκατέρα γὰρ τῶν α γ, β δ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ζ η, ζ θ, κατὰ τὸ γ'. τῆ παρόντος. καὶ δὴ τῶν ε. τῆ β'. ἐπεὶ ἡ α γ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ι, τέτμηται, παντὸς γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν α ι, ι γ, ὀρθογωνίου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς η ι, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς η γ, τετραγώνῳ, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς η ζ, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν α ι, ι γ, ὀρθογ. μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ι η, η ζ, τετραγώνων ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν η γ, η ζ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ι η, η ζ, τετραγώνοις ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ζ ι. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γ η, η ζ, τὸ ἀπὸ τῆς ζ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α ι, ι γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ ι, τετραγώνου, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ζ γ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζ β. ἴσαι γὰρ αἱ ζ γ, ζ β. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ ι, ι β, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ ι, τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ζ β, τετραγώνῳ. ὥστε καὶ τὸ δ. ἀξίωμα, τὸ ὑπὸ τῶν α ι, ι γ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ ι, τετραγώνου, ἴσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν δ ι, ι β, ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ ι, τετραγώνου, κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ ι, τετραγώνου ἀφαιρουμένου, ὑπολείπεται τὸ ὑπὸ τῶν α ι, ι γ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δ ι, ι β, ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὸ ὑπὸ τῶν μιᾶς τμημάτων, ᾗ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 29.

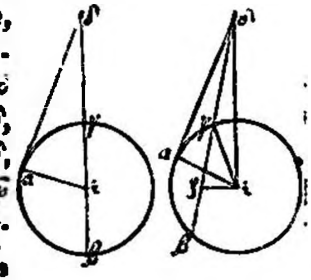


Πρότασις Λς'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ᾗ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης ᾗ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου ᾗ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου ἤδη τοῦ α β γ, ἑ κέντρον τὸ ι, λαφθήτω σημεῖον ἐκτὸς, τὸ δ. ἀφ' οὗ φερέσθωσαν τὸν κύκλον πιπτούσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ β, δ α, ἡ μὲν δ β, τεμνέτω, ἡ δὲ ἁπτομένη τοῦ κύκλου. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ τέμνουσα δυνατὸν ᾗ διὰ τοῦ κέντρου ᾗ μὴ, διήρχισθω, ὑποκείσθω πρῶτον διὰ τοῦ κέντρου· ἀπὸ δὴ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ α, ἐπιζεύχθω ἡ ι α, ἐφ' ἃς ὀρθή ἐστιν ἡ δ α, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ι ς'. ἐπεὶ οὖν ἡ β γ, δίχα

πέμνεται κῆ τὸ ε, κέντρον, προσπιπτέτω δὲ αὐτῇ ἡ γδ, παίπως γε κῆ τῶν ς'. τῶν ζ'. τὸ ὑπὸ τῆς βδ, δγ, ὀρθογ. μῆ τῷ ἀπὸ τῆς γε, πρᾶγώνω ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, πρᾶγώνῳ. ἐπεὶ ἡ γε, ἴση ἐστὶ τῇ εα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς βδ, δγ, ὀρθογώνιον μῆ τῷ ἀπὸ τῆς αε, πρᾶγ. ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δε, πρᾶγώνῳ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δε, πρᾶγώνῳ ἴσά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, πρᾶγωνα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογώνιον μῆ τῷ ἀπὸ τῆς αε, πρᾶγώνῳ ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, πρᾶγώνοις. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δγ, ὀρθογ. ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, πρᾶγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ___ *Eucl. Lib. 3. Fig. 30.*



Ἐὰν δὲ ἡ δβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, κὴ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ δβ, ἡ εζ. κὴ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αε, εγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ βγ, δίχα τέτμηται κῆ τὸ ζ, κῆ τῶν γ'. τῶν παρόντος, κὴ προσκεῖται αὐτῇ ἡ γδ, παίπως γε τὸ ὑπὸ τῶν ὅλης βδ, κὴ τῆς προσκειμένης γδ, ὀρθογώνιον μῆ τῷ ἀπὸ τῆς γζ, πρᾶγώνῳ ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δζ, πρᾶγώνῳ κῆ τῶν ς'. τῶν β'. κοινὸν προσκειμένω τῷ ἀπὸ τῆς εζ, πρᾶγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μῆ τῶν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, πρᾶγώνων ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε, πρᾶγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, πρᾶγώνοις ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τὸ ἀπὸ τῆς δε, κῆ τῶν μζ'. τῶν ά. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε, πρᾶγώνου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δε, πρᾶγώνῳ. τούτῳ δὲ ἴσά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, πρᾶγωνα κατὰ τῶν ῥηθεῖσαν μζ'. τῶν ά. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μῆ τῷ ἀπὸ τῆς αε, πρᾶγώνῳ ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, πρᾶγώνοις. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, πρᾶγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς ὄντος τοῦ κύκλου ἐκπίπτωσι δύο εὐθεῖαι ἁχθῶσιν, ἴσαι ἀπήλαις εἰσί. τὸ γὰρ ἀφ' ἑκατέρας πρᾶγωνον ἴσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῆς τεμνούσης κὴ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς κυρτῆς περιφερείας κὴ τοῦ σημείου, ὡς δέδεικται.

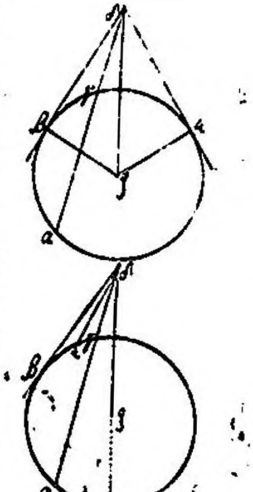
Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ἓν μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, κὴ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦτο σημείου κὴ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἅψεται τοῦ κύκλου.

Τοῦ αβγ, κύκλου εἰλήφθω σημεῖον ἐκτὸς τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀχθήτωσαν αἱ δγα, δβ,

δβ, ἡ μὲν δγ α, τέμνουσα, ἡ δὲ δβ, προσπίπτουσα τῷ κύκλῳ· ἔστω δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δγ, ὀρθογωνίου ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δβ, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἅπτεται τοῦ κύκλου. Ἀ̓χθήτω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, ληφθέντος σημείου καθ' ὁποτέρου μέρος ἀπτομένη τοῦ κύκλου ἡ δε, διὰ τοῦ ι ζ'. τοῦ παρόντος· καὶ διῃρήσθω τοῦ ζ, κέντρου καὶ τοῦ α. τοῦ παρόντος, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζ β, ζε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, καὶ τοῦ ι η. τοῦ αὐτοῦ, παράλληλος ἄρα ἡ ὑπὸ ζε δ, γωνίᾳ ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγ α, τέμνει τὸν κύκλον, ἄρα καὶ τοῦ αὐτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δγ, περιεχόμενον ὀρθογ. Ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δγ, ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ, ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δβ. ἀλλὰ καὶ ἡ ζε, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὡς ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἐξαγομένη, ἄρα αἱ δε, εζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δβ, βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δζ, κοινή, παντὸς ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζε δ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβ δ, καὶ τοῦ ἡ. τοῦ α. ἀλλ' ἡ ζβ, διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπ' αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ β δ, ἅπτεται ἄρα ἡ β δ, τοῦ κύκλου καὶ τὸ πόρισμα τῆς ι ς'. τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 3. Fig. 31.



Ἄλλως. Τῶν αὐτῶν γὰρ κειμένων, μὴ ἔστω ἀπτομένη, εἰ δυνατὸν, ἡ δβ, τοῦ αβγ, κύκλου, ἀλλ' ἑτέρα τις ἡ δε. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγ α, τέμνει τὸν κύκλον, παντὸς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α δ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν α δ, δγ, ἴσον ὑπετέθη καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. καὶ ἀπομένως ἡ δε, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τοῦ ἡ. τοῦ παρόντος. ἡ γὰρ δε, ὡς ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ κέντρου, ἐλάττων ἐστὶ τῆς δβ, τῆς ἀπώτερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ περὶ οἱασδήποτ' ἄλλης. οὐκ ἄρα ἄλλη τις εὐθεῖα ἅπτεται τοῦ κύκλου, πλὴ ἡ δβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Προοιμιακὴ περίληψις τῆ Τετάρτη τῆ τῶ Εὐκλείδου Στοιχείω.

✣ Τὸ καὶ χεῖρας Βιβλ. προβλημαπικὸν ὀνόμασε, διδάσκει τίνι μεθόδῳ ἐγγράπτέα τῇ κύκλῳ, ἡ περιγραπτέα τὰ πολύγωνα, καὶ πικτικὰ χήματα. Ἐκ τῶν μὲν παρέχθη ἡ μέθοδος τῆς καπασκευῆς, καὶ χρήσιμος τῶν καπασκευῶν τῶν ἡμιτόνων, ἀπομείων τε καὶ πμπεσῶν. Ὅθεν καὶ τῇ Τριγωνομετρίᾳ τὰ μάλιστα χρήσιμον. διὰ γὰρ τῆ ἐγγράφειν τῇ κύκλῳ καὶ περιγράφειν πολύγωνα, τὰ τῶν ὑποτεινουσῶν, ἀπομείων, πμπεσῶν τε, καὶ ἡμιτόνων Καιόπια καπασκευάζειν μανθάνομεν. ὧν τῇ δυνάμει τὰ μεγέθη τῶν οἰονδήποτε σωμάτων ἐχηματισμένων, καὶ ἐπιπέδων χημάτων δυνάμεθα εὑρεῖν, καὶ ἔτι ὡς πρὸς ἄλληλα λόγους. Διὰ τούτων τὰς τῶν Ἀστέρων φάσεις, ὀρθῶς γινώσκομεν, καθ' ἃς πλανῶνται, τῶ ἑξαγωνίῳ ἀμέλει, τετραγωνίῳ, καὶ ἑξαγωνίῳ, σωτῆρί τε καὶ παστελλίους. αἵτινες τῶν πολυγώνων ὅλως ἐν κύκλῳ ἐγγραπὴς ἐξήρτηνται. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ πολυθρύλλπος Τετραγωνισμὸς τῶ κύκλω. διὰ γὰρ τῆ τετραγωνισμῆ τῶ ἐμβαδῶ τῶν ἐγγραφομένων τῇ κύκλῳ καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, γινώσκεται τὸ τῶ κύκλω ἐμβαδόν. εἴ, τι τῶν κύκλων ὡς πρὸς ἄλληλους λόγοι, διπλάσιος, τριπλάσιος, καὶ οἱ ἑξῆς, ἐκ τῆ διπλασίου, τριπλασίου, καὶ τῶν ἑξῆς, τῶν ἐγγραφομένων, καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, ὡς πρὸς ἄλληλα λόγων, γινώσκονται. χρησιμεύει τῶτο λίαν τῇ ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ ὀχυρώματα Ἀρχιτεκτονικῇ, μιχανικῇ μάλιστα τοῖς ἐγγεγραμμένοις πολυγώνοις τῇ κύκλῳ.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

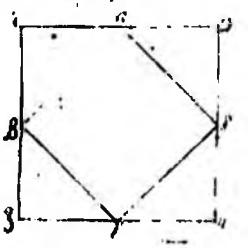
Ὅροι Πρῶτοι.

Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

Β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ γράφεται, ἅπτηται.

Ἐπεὶ τρόπος ἐπιστημονικῆς θεωρίας ἐστὶν ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχομένους ἐπὶ τὰ τελειότερα μεταβαίνειν, ἡ σωφρονεστέρα, πάντως δὲ καὶ ὁ Εὐκλ. διδάξας ἐπὶ τοῦ πρώτου Βιβλίου, τοῦ ἑξῆς λαχόντος πάλιν, περὶ τῶν εὐθειῶν τε καὶ γωνιῶν τῶν ἐν τοῖς κύκλοις καὶ τῶν κύκλων τμήμασιν, ἄρχεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ὁρμηθοῦσα περὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῶν εἴτε τοῖς εὐθυγράμμοις, καὶ τοῖς κύκλοις ἐγγραφομένων τε καὶ περιγραφομένων. διὸ καὶ τὰ προσήκοντα πρὸ τῆς Βιβλίῳ ἀποταμιεύσας, ὡς ὅρους τε καὶ ἀρχὰς τῶν ἄλλων προτίθησιν. ἄρχεται δὲ τῆς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῆς ἐν ἀλλήλοις, αὐτῶ τούτω ἴσως εἴπερ. τῶν ὁμοιοειδῶν γὰρ ἡ χρῆσις εὐληπτοτέρα τῆς τῶν ἀνομοιοειδῶν καθέστηκε. φησὶ γοῦν, τρίγωνον σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι μὲν λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, σχήματος· περιγράφεσθαι δὲ περὶ σχῆμα λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, σχήματος. οἷον τὸ μὲν α β γ δ, σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ ε ζ η θ, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἅπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ε ζ η θ. τὸ δὲ ε ζ η θ, περιγράφεσθαι λέγεται περὶ τὸ α β γ δ, σχῆμα, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ α β γ δ, σχήματος.

Eucl. Lib. 4. Fig. 1.

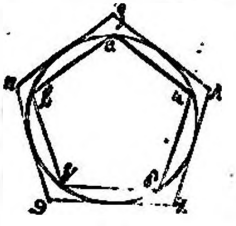


Γ'. Σχῆμα δὲ εὐθυγράμμου εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Δ'. Σχῆμα δὲ εὐθυγράμμου περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται.

Δηλώσας ἐν τοῖς αὐτέρω δυσὶν ὅροις, τίνα τὰ συστατικὰ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, ὧν τι εἰς κύκλα ἐγγραφομένων, ἢ ὧν περὶ κύκλα περιγραφομένων, ἅπτεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐν δυσὶν αὖθις ὅροις, ὧν συστατικῶν τῆς ἐγγραφῆς τι ἢ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τοῖς κύκλοις παραβαλλομένων. ἢ δέ ἐστι, Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον πλευρικαῖτα ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Περιγράφεσθαι δὲ πλευρικαῖτα, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος τῆς τοῦ κύκλου ἅπτηται περιφερείας. εἶον τὸ μὲν αβγδε, σχῆμα εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον λέγεται, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἅπτεται. τὸ δὲ ζηθκλ, περιγεγραμμένον, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται τοῦ κύκλου.

Euel. Lib. 4. Fig. 2.



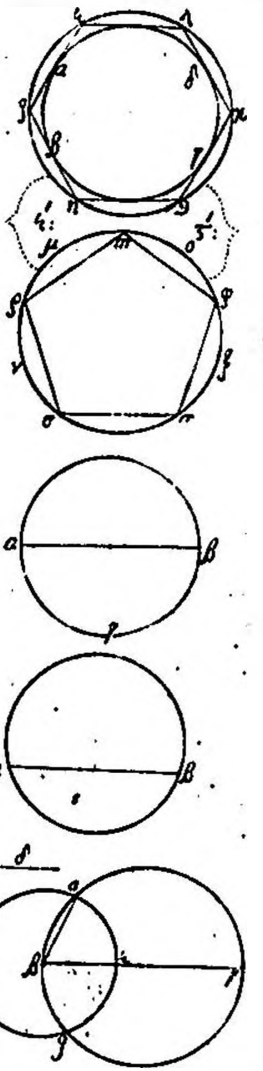
Ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

ς'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

Διδάξας ἐν τοῖς δυσὶ προτέροις ὅροις, πότε τῶν εὐθυγράμμων ἕκαστον σχημάτων εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ἢ πότε περὶ κύκλον περιγράφεσθαι· ἐπεὶ ἅμεσα ταῦτα δύναται πρὸς ὁ κύκλος πάθειν, βέλτιστα ἐν τοῖς δυσὶ τούτοις ὅροις διαρθροῦται, πρὸς πότε μὲν εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται, πότε δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι. δύο μὲν οὖν ἐστὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων θεωρούμενα, τῶν γωνιῶν, φημι, καὶ πλευρῶν, εἰδὸς δὲ ἐστὶ τοῦ κύκλου, ὡς ἁπλοῦστερον, τῆς αὐτοῦ δηλονότι περιφερείας· ἐν ἐκείνοις μὲν, ὧν αἱ γωνίαι τῷ κύκλῳ ἅπτοντο, ἐγγεγραμμένα ἐλέγετο, ὧν δὲ αἱ πλευραὶ, περιγεγραμμένα· ἐπὶ δὲ τοῦ κύκλου, ὅταν μὲν ἡ περιφέρεια αὐτοῦ τῶν πλευρῶν ἅπτηται τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα λέγεται, ὅτι δὲ ἡ περιφέρεια ἅπτηται τῶν γωνιῶν, πλευρικαῖτα ὁ κύκλος περιγεγραμμένος λέγεται περὶ τὸ σχῆμα. εἶον ὁ μὲν αβγδ, κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ εζηθκλ, σχῆμα, ὅτι ἡ τοῦτου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος ἅπτεται.

ται· ὁ δὲ μυξὸς κύκλος περιγράφεσθαι περὶ πρόσωπον χῆμα, ὅτι ἡ τάπη περὶ τὸ χῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς κύκλον, τοιοῦτος ὁ κύκλος περιγεγραμμένος ἐστὶ περὶ τὸ χῆμα· καὶ ἀνάπαλιν, ὅτι τὸ χῆμα περιγεγραμμένον ἐστὶ περὶ τὸν κύκλον, τοῦτ' ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐστὶν εἰς τὸ χῆμα.

Euclid. Lib. 4. Fig. 3.



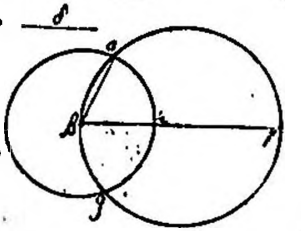
Ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἁρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

Ἐπεὶ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων καὶ θεωρημάτων τὰ πλείονα οὐ μόνον ἡ δεῖξις ἀναγκαία, ἀλλ' οὐχ ἧττον καὶ ἡ κατασκευή· ἐν δὲ τῷ κύκλῳ ἰσχυῶς ἐνδέχεται θεωρεῖσθαι τοιαῦτα. ἃ γὰρ ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἃ τέμνει αὐτὸν, ἃ ἐναρμόζεται εἰς τὸν κύκλον· καὶ ἃ μὲν ἅπτεται εἰς κατασκευὴν τῶν περὶ κύκλον περιγραφομένων σχημάτων συμβάλλει, περὶ ἃς ἐν τῷ προτέρῳ ὑπομνήματι βιβλίῳ· ἃ δὲ ἐνηρμοσμένα εἰς κατασκευὴν τῶν ἐγγραφομένων εἰς κύκλον ἀναγκαία, ἃς ἐν οἷσπερ τῶν προτέρων βιβλίων, ὡς μὴ χρειώδης τύπῳ, μνήμῃ ἐποιησάμην· τοῦτο οὖν ἐστὶ τὸ παρόντος, ὡς ἀναγκαίας οὔσης τῆς πάντως γνώσεως, ὁρμωμένη περὶ αὐτῆς. Ἐναρμόζεσθαι πολλὰ εὐθεῖα εἰς κύκλον, φησὶ, λέγεται, ὅταν τὰ τῆς ἐνηρμοσμένης πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου, ὡς ἡ αβ, ἧς τὰ α, καὶ β, πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας. τοῦ αβγ, κύκλου ἐστίν. ὥστε ἐπεὶ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἁπλῶς τάπη γράφεται, πάντως γε δύο ἢ τῆς ἐνηρμοσμένης εἰς κύκλον εὐθείας τὰ εἴδη, ἥτε διάμετρος ἢ ἡ χορδή. τίς δὲ ὁ τρόπος τοῦ ἁπλοῦ εὐθείαν, εἰς ἕκαστον κύκλον ἐναρμόζεσθαι, ἐξῆς ἐρεῖ.

Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἁρμόσαι.

Ἔστω δὴ ἐναρμόσαι εἰς κύκλον τὸν αβγ, εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ δ. Ἤχθω ἡ βγ, διάμετρος τοῦ κύκλου· καὶ ἔστω ἡ βγ, τῇ δ, γέγονε τὸ προσαχθέν· εἰ δὲ μείζων, ἀφῃρήσθω ἴση τῇ δ, ἡ βε,



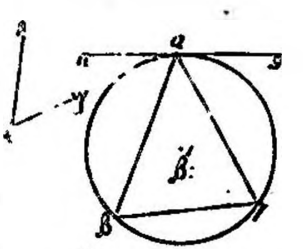
ἡ βε, καὶ τῷ γ'. τῷ δ'. καὶ κείσθω μεὶ τῇ β, διαστήματι δὴ τῇ βε, κύκλος γεγράφθω ὁ αεζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βα. Ἐπεὶ οὖν τὸ β, κέντρον ἐστὶ τῶ αεζ, κύκλου, παντὸς γὰρ ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ βε, ἀλλ' ἡ βε, ἴση εἴληπται τῇ δ, καὶ ἡ αβ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δ. Εἰς τὸν αβγ, ἄρα κύκλον ἐναρμόσται ἡ βα, ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Β'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι ῥιγωμῳ ἰσογωμίου ῥίγωμον ἐγγράψαι.

Εἰς τὸν αβγ, ἄδα κύκλον ἔστω ἐγγράψαι ῥίγωνον ἰσογώνιον τῷ δοθέντι δεζ. ἤχθω ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ τὸ α, ἡ ηθ. καὶ γεγράθω τῇ μεὶ πρὸς τῇ ζ, γωνία τῇ δεζ, ῥιγώνι ἴση, ἡ ὑπὸ ηαβ, καὶ τῷ ηγ'. τῷ δ'. τῇ δὴ πρὸς τῇ ε, ἡ ὑπὸ θαγ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ηθ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον ἦκται τέμνουσα ἡ αγ, ἄρα ἡ ὑπὸ θαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, τῇ ἐν τῇ ἐναλλὰξ τμήματι, καὶ τῷ λβ'. τῷ γ'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ θαγ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῇ ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῇ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηαβ, καὶ ἐπομένως τῇ πρὸς τῷ ζ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἔσαι τῇ πρὸς τῷ δ. τὸ αβγ, ἄρα ῥίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

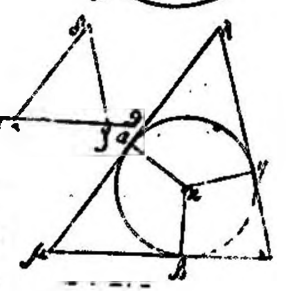
Eucl. Lib. 4. Fig. 4.



Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι ῥιγωμῳ ἰσογώνιον ῥίγωμον περιγράψαι.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄδα αβγ, κύκλον ἔστω περιγράψαι ῥίγωνον ἰσογώνιον τῷ δεζ. Ἐκβεβλήσθω ἡ εζ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη καὶ τὰ η, θ, σημεῖα. καὶ εἰλήφθω τὸ κ, κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ τῷ δ. τῷ γ'. καὶ τῇ μεὶ ὑπὸ δεκ, γωνίᾳ, ἴση γεγράθω ἡ ὑπὸ βκα. τῇ δὴ ὑπὸ δζθ, ἡ ὑπὸ βκγ, καὶ τῷ κγ'. τῷ δ'. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, σημείων ἀχθήσονται ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου, καὶ τῷ ιζ'. τῷ γ'. αἱ λμ, μν, νλ, ἅπτουσαι ὀρθαί εἰσι, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε'. τῷ αὐτῷ, ὥστε ἑκάστη τῶν ὑπὸ καμ, κβμ, κγν, ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέτταρες γωνίαι τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσι, διὰ τὸ εἰς δύο διαιρεῖσθαι ῥίγωνα, καὶ τὰς ῥεῖς τῶν ῥιγώνων γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, κατὰ τῷ λβ'. τῷ δ'. ἄρα καὶ αι τῶν καβμ, τετραπλεύρου αἱ τέτταρες γωνίαι τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ καμ, κβμ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ἑκατέρα γὰρ ὀρθὴ,



ὡς

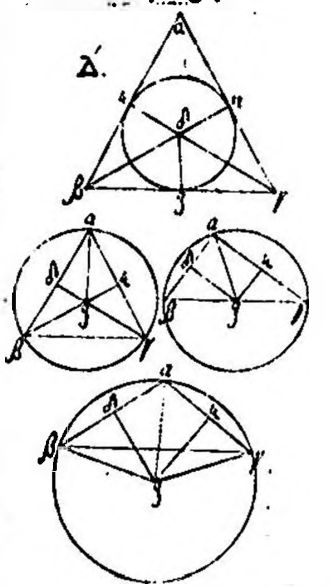
ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ὑπὸ αεβ, αμβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ τὸ ιγ'. τὰ δ'. ἄρα αἱ ὑπὸ αεβ, αμβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δεη, δεζ. γέγονε δὲ ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεη, ἐγκαταλείπεται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αμβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεζ. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ βνγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δζε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αλγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. τὸ λμν, ἄρα ἰσόγωνόν ἐστι τῷ δεζ. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Δ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον. Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν δίχα, ταῖς βδ, γδ, εὐθείαις, συμβαλλούσαις ἀλλήλαις κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τὰς αβ, βγ, γα, αἱ δε, δζ, δη. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ εβδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, δίκαι γάρ· ἡ ὑπὸ εβζ, πέπμται· ἡ δὲ ὑπὸ βεδ, τῇ ὑπὸ βζδ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· ἄρα καὶ δε, δζβ, τριγώνων δύο γωνίαι δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ βδ, ὑποτείνουσα ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴ, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τὰς δεβ, τριγώνου, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς τὰς δζβ, τῷ τὸ ις'. τὰ δ'. ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δη, ἴση τῇ δζ. ὥστε αἱ δε, δζ, δη, ἴσαι εἰσί. καὶ πέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενος τις κύκλος

Euclid. Lib. 4. Fig. 5.



ἀπτήσεται καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ η, καὶ ἄψεται τῶν αβ, βγ, γα, πλευρῶν τὰ αβγ, τριγώνου, διὰ τὸ καθέτους εἶναι ἐπὶ τῶν ε, δ, δζ, δη, ἀπὸ τὰ πέρατα τῆς ις'. τοῦ γ'. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Πρότασις Ε'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον. Τετμήσθω ὅτι αβ, καὶ αγ, πλευρὰ τὰ τριγώνου δίχα κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, ἀφ' ὧν ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν αβ, αγ, αἱ δζ, εζ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ζβ, ζγ, ζα. Ἐπεὶ δὲ τῶν δζ, εζ, συμβαλλουσῶν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ, τριχῶς ἐνδέχεται συμβαίνειν τοῦ τόπου συνθρομένου, ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ἔσται τὸ ζ, ὡς ἐπὶ τῆς δ'. καταγραφῆς τοῦ σχήματος, ἢ ἐπὶ τῆς βγ, ὡς ἐπὶ τῆς β'. ἢ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς γ'. ἐφ' ἑκάστης δὲ τῶν καταγραφῶν τριῶν ἡ αὐτὴ ἔστι δεῖξις. φέρε δὴ

ἐπὶ

ἐπὶ τὸ δ. μόνον τοῦτο ἀποδεῖξαι ποιήσωμεν. Αἱ μὲν οὖν δ α, δ β, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἑκατέρᾳ ἡ δ ζ. ἄρα καὶ βάσις ἡ β ζ, βάσει τῇ ζ α, ἴση ἐστὶ καὶ τοῦτο τῷ δ. τῶν δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γ ζ, ἴση τῇ α ζ. ὥστε αἱ τρεῖς ζ α, ζ β, ζ γ, ἴσαι εἰσὶ. καὶ ὁ κύκλος μὲν ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζ α, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται περὶ τὸ α β γ, τρίγωνον, καθὼς τὸν ε. ὅρον τῶν παρόντος. Ὁμοίως δὴ διεξιόντες καὶ ἐπὶ τῆς β'. καὶ γ'. καταγραφῆς τὸ ζ, κέντρον εἶναι τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

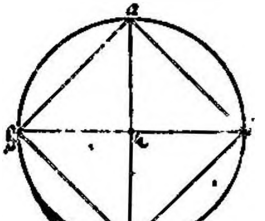
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὅταν τοῦ δύο τῶν τριγώνου πλευρῶν δίχα τμητομένων, αἱ ἐπ' αὐτῇ ἀγόμεναι καθέτοι ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπίπτωσιν, ἡ ὑπὸ τῆς ἀτμήτου ὑποτεινομένη γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ * πάλιν, ἐν μείζονι γὰρ ἐστὶ τμήματι. ὅταν δὲ ἐπὶ τῆς ἀτμήτου, ὀρθὴ, καὶ * πάλιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ὅταν δὲ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, μείζων ὀρθῆς, ἐν ἐλάττονι γὰρ ἐστὶ τμήματι κύκλου.

Πρότασις ς'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι τετράγ. εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον, ἡ κορυφὴ τὸ ε. Ἤχθωσαν δὴ αἱ α γ, β δ, τοῦ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τετμήσθωσαν. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, β γ, γ δ, δ α. καὶ τὸ α β γ δ, ἐγγεγραμμένον σχῆμα εἰς τὸν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ β ε, ε δ, ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἡμιδιάμετροι, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ε α. ἄρα καὶ βάσις ἡ α β, βάσει τῇ α δ. ἴση ἐστὶ καὶ τοῦτο τῷ δ. τῶν δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν β α, ἴση ἐστὶ τῇ α δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα μὲν α β, ἴση τῇ β γ, ἑκατέρα δὲ α δ, τῇ δ γ. ὥστε τὸ α β γ δ, τετράπλευρον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. ἐπεὶ δὲ ἡ ὀρθογώνιον, καὶ τοῦτο τῷ λ δ. τῶν γ'. ἑκάστη γὰρ τῶν αὐτῷ γωνιῶν ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶν, ἄρα τετράγωνον ἐστίν. ὅπερ καὶ ἔδει.

Eucl. Lib. 4. Fig. 6.



Πρότασις Ζ'. Πρόβλημα.

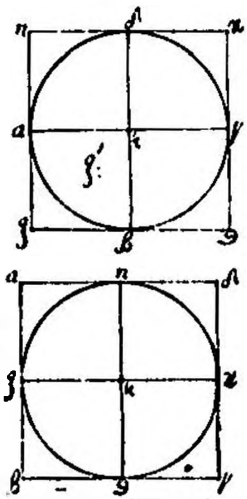
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω περιγράψαι τετράγωνον περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον. Ἤχθωσαν δὴ αἱ α γ, β δ, διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τετμήσθωσαν, καὶ διὰ τῶν α β γ δ, σημείων ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ζ η, ζ θ, θ κ, κ ε. καὶ τὸ ζ θ κ η, τετράπλευρον, τὸ περὶ τὸν α β γ δ, περιγραφὲν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ τὸ πέρασμα τῆς ις'. τῶν γ'. ὅτι ζ η, καὶ θ κ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς α γ, διαμέτρου. ὥστε αἱ ὑπὸ ζ α γ, θ γ α, γωνίαι, ὀρθαί εἰσι, καὶ ἐπεὶ παράλ-

παρά-

παράλληλοί εἰσι καὶ τῷ κθ. τῷ α. Διὰ τὰ αὐτὰ πίνυω καὶ αἱ ζϑ, θκ, παράλληλοί εἰσι. τὸ ζϑ κθ, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἀλλὰ ταῖς μὲν ζη, ϑκ, ἴσατι καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βδ, ταῖς δὲ ζϑ, θκ, ἡ αγ, καὶ τῷ ῥηθείσῃ κθ. τῷ α. αἱ δὲ βδ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς διαμέτροι, ἄρα καὶ ζη, ζϑ, ϑκ, κη, ἴσαι εἰσιν, καὶ τὸ ζϑ κθ, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δ' ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ζαγ, ϑγα, ὀρθαί εἰσι, καὶ τὸ ζγ, παράλληλόγραμμον, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αζϑ, γϑζ, ἀπεναντίον ὀρθαί εἰσι κατὰ τῷ λδ'. τῷ α. καὶ δὲ τῷ αὐτῷ ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ ζκη, ϑκη, ὀρθαί εἰσιν, ἄρα τὸ ζϑ κθ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ὡς δέδεικται, τετράγωνον ἄρα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. Lib. 4. Fig. 7.



Πρότασις Η'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγδ, τετράγωνον. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ αβ, αδ, δίχα κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα. καὶ διὰ μὲν τοῦ ζ, ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἡ βγ, ἡ ζκ, διὰ δὲ τοῦ η, ὁμοίως ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἡ δγ, ἡ ηϑ, τέμνουσα τὴν ζκ, κατὰ τὸ θ. λέγω πίνυω ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θζ, γραφόμενος κύκλος διέρχεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων η, κ, ϑ. Τὰ γὰρ αη, κβ, αϑ, ϑδ, παραλληλόγραμμά ἐστι, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι, καὶ τῷ λδ'. τοῦ α. ὥστι αἱ ζκ, αδ, ἴσαι εἰσιν, ἁπομένου δὲ καὶ ἀμίσειαι αὐτῶν· ἡ αη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ζθ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡμισεῖα αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ηθ. ἡ δὲ κδ, τῇ θκ. καὶ ἡ ζβ, τῇ θϑ. ἐπεὶ δὲ αἱ αη, ηδ, καὶ αζ, ζβ, ἴσαί εἰσι, καὶ τῷ κατασκευῇ, παύπως γε καὶ αἱ ηθ, ζθ, ϑθ, κθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, ϑ, σημείων, ἁπτόμενος τῶν αδ, αβ, βγ, γδ, εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς η, ζ, ϑ, κ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ γ'. εἰς τὸ δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἐξῆς.

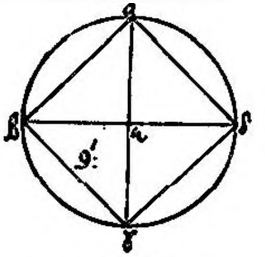
Πρότασις Θ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ, τῶν τετραγώνου διάμετροι, τεμνόμεναι ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, καὶ τὸ ε, κέντρον ἔστω τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ γβ, ἴση, παύπως γε, καὶ τῷ η. τοῦ α. ἡ ὑπὸ δαγ, γω-

νία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῇ α, γωνία τῇ τριγώνου δίχα τέτμηται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς ταῖς β, γ, δ, σημείοις γωνίαι δίχα τέμνονται. ἔστι δὲ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ β· καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ⟨α β, ἡμίσειά ἐστι τῶν πρὸς τῷ α. ἡ δὲ ὑπὸ ⟨β α, τῶν πρὸς τῷ β. ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ⟨α, ἴση ἐστὶ τῇ ⟨β, καὶ πάλιν ἑ. τῶν δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ⟨β, τῇ ⟨γ, καὶ ἡ ⟨γ, τῇ ⟨δ, καὶ ἡ ⟨δ, τῇ ⟨α, ὥστε αἱ ⟨α, ⟨β, ⟨γ, ⟨δ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα ὁ κύκλῳ μὲν τῷ ⟨, διαστήματι δὲ τῇ ⟨α, περιγραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, σημείων· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 8.

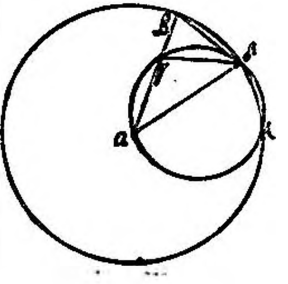


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ διάμετροι δίχα τέμνονται.

Πρότασις Ι. Πρόβλημα.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.



Κείσθω δύο εὐθεῖαι αἱ αβ· καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, διὰ τὸ ἐὰν τῶν β. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ὅλης αβ, καὶ βγ, ἐλάττονος τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, μείζονος τμήματος τριγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κύκλος ὁ βδε, καὶ ἐνηρμόσθω, κατὰ τὸ δ. τῷ παρόντι, εἰς τὸν βδε, κύκλον εὐθείᾳ ἴση τῇ αγ, ἡ βδ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, καὶ ἔστω τὸ περιεχθέν. Περὶ γὰρ τὸ αγδ, τρίγωνον περιγεγράφθω ὁ αγδε, κύκλος, κατὰ τὸ ε. τῶν παρόντι. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἡμιδιάμετρος ἄρα τὸ αβδ, πολυγωνίου ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἐστὶν. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, πρὸς τῇ βάσει αὐτῶν γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ, πρὸς τῇ περιφερείᾳ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τριγώνῳ, κατὰ τὸ κατασκευάζω, εἴληπται δὴ ἡ βδ, ἴση τῇ αγ, πάντως τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τριγώνῳ. ὥστε κατὰ τὸ λζ. τῶν γ'. ἡ βδ, ἅπτεται τοῦ αγδ, κύκλου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς, δεδ. τῶν δ, σημείου ἦκται ἡ δγ, τέμνουσα τὸν κύκλον· πάντως ἡ ὑπὸ βδγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῇ ἐναλλάξ τοῦ τμήματος γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ γαδ, κατὰ τὸ λβ'. τῶν γ'. κοινῇ δὲ προσκείσθω τῇ ὑπὸ γδα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γδα, γαδ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ γδα, γαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἐκτὸς ὑπὸ βγδ, κατὰ τὸ λβ'. τῶν δ. ἄρα καὶ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγδ, τῇ δὲ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶν, ὡς δέδεικται, καὶ ὑπὸ αβδ, κατὰ τὸ δ.

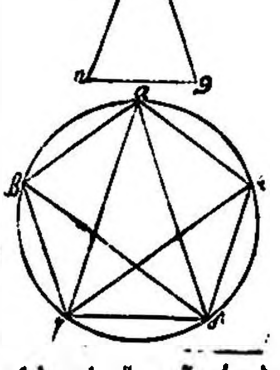
τῶ δ. ἄρα ἡ ὑπὸ β γ δ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α β δ, ὥστε καὶ ἡ δ β, ἴση ἐστὶ τῇ δ γ, καὶ τῶν ρυθείσων ε. ἀλλὰ τῇ δ β, ἴση ἐστὶν ἡ γ α, ἄρα καὶ ἡ γ δ, ἴση ἐστὶ τῇ γ α, καὶ ἑπομένως αἱ ὑπὸ γ δ α, γ α δ, γωνίαι ἴσαι εἰσι, καὶ αἱ δύο ἄρα τῆς μιᾶς ὑπὸ γ α δ, διπλάσιαι. ταῖς δὲ ὑπὸ γ δ α, γ α δ, ἴση ἐστὶ καὶ ὑπὸ β δ α, καὶ ἡ παύτη ἴση ἡ ὑπὸ δ β α, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, α δ β, ἀρὸς τῇ βάσει τῶ ζ ι γ. γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α δ. γέγραπται ἄρα τὸ α β δ, ἰσοσκελὲς ζ ί. γωνον, διπλασίονα ἔχον ἑκατέρα τῶν ἀρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῆς λοιπῆς. ὅπερ καὶ τὸ ἐζῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι εἰς τὸν α β γ δ ε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κείσθω, καὶ τῶν αὐτῶν, τὸ ζ η θ, ζ ί. γωνον ἰσοσκελὲς, ἔχον ἑκατέρα τῶν ἀρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. *Eucl. Lib. 4. Fig. 9.*

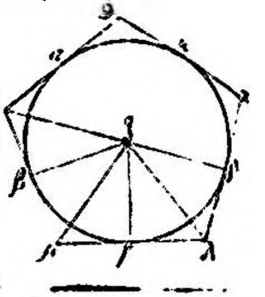
καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, καὶ τὸν β'. τῶ παρόντος, εἰς τὸν α β γ δ ε, κύκλον τὸ α γ δ. ὥστε ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α γ δ, α δ γ, διπλασίονα εἶναι τῆς ὑπὸ γ α δ. καὶ τμηθείσα δίχα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α γ δ, α δ γ, διὰ τῶν γ ε, δ β. καὶ ἐπιζευχθείσαι αἱ γ β, β α, α ε, ε δ, καὶ τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσαι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α γ δ, α δ γ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ α δ, καὶ δίχα τέτμηται, αἱ γινομέναι ἄρα πέντε γωνίαι, γ α δ, α γ ε, ε γ δ, α δ β, β δ γ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸ κ ς'. τῶ γ'. ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, αἱ ἄρα α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὸ κ θ'. τῶ γ'. τὸ ἄρα α β γ δ ε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ α β, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, κοινῆ προσκειμένης τῆς β γ δ, πάσα γε ὅλη ἡ α β γ δ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ β γ δ ε. καὶ τὸ κ ς'. ἄρα τῶ γ'. καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, αἱ ὑπὸ α ε δ, β α ε, ἴσαι εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ α β γ, β γ δ, γ δ ε, ἴση ἐστὶν, ἑκατέρα τῶν ὑπὸ β α ε, α ε δ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β γ δ ε. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. ἄρα εἰς τὸν α β γ δ ε, κύκλον ἐγγέγραπται πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον περιπάγωμον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Φέρι δὴ περὶ τὸν αβγδε, κύκλον περιπάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψωμεν. Νενοήθωσαν ἐπὶ τῆς τῶ κύκλω περιφερείας τὰ τῶ ἐγγεγραμμένω σημεῖα τὰ αβγδε, ὥστε τὰς αβ, βγ, γδ, δε, εα, ἴσας εἶναι. καὶ εἰλήφθω διὰ τῶν α. τὸ γ'. τὸ ζ, κέντρον τῶ κύκλω. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, σημείων ἀχθήτωσαν ἀπώμεναι τῶ κύκλου αἱ ηθ, θκ, κλ, λμ, μη, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζη, ζβ, ζμ, ζγ, ζλ, ζδ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μλ, ἅπτεται τῶ κύκλω, καὶ ἀπὸ τῶ κέντρου ἐπὶ τὰς ἁφὰς πρόσπιπτε ἡ ζγ, παίπας γε αἱ πρὸς τῇ γ, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ τὸ πόρισμα, τῆς ε'. τῶ γ'. ὀσαύτως καὶ αἱ πρὸς τῇ β, καὶ δ, ὀρθαί εἰσιν. ἀμίλεπτι, καὶ τλω μζ'. τῶ δ. τὸ ἀπὸ τῆς ζμ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ζγ, γμ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, βμ, ὥστε, καὶ τὸ δ. ὀξίωμα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ζγ, γμ, ἴσά ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, βμ. ἀλλ' ἡ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ἄρα καὶ ἡ γμ, ἴση ἐστὶ τῇ βμ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζγ, ἴση τῇ ζβ, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ ζμ. καὶ τλω ἡ. ἄρα τῶ δ. καὶ ὅλον τὸ ζβμ, τρίγωνον, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ζγμ, τριγώνῳ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ βζμ, γωνία τῇ ὑπὸ γζμ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ζμβ, τῇ ὑπὸ ζμγ· καὶ ὑπομείως ἡ μὲν ὑπὸ βζγ, τῆς ὑπὸ γζμ, διπλῆ ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ βμγ, τῆς ὑπὸ γμζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γζδ, διπλῆ τῆς ὑπὸ γζλ, ἡ δὲ ὑπὸ γλδ, τῆς ὑπὸ γλζ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γζδ, καὶ τλω κ ζ'. τῶ γ'. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς βγ, γδ, περιφερείας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γζμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γζλ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζγμ, τῇ ὑπὸ ζγλ, ὁμοίως ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς δέδεικται, ἄρα τὰ ζγμ, ζγλ, τρίγωνα ἴσχει τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας, καὶ τλω ζγ, τλω πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴ, ὥστε καὶ τλω λοιπὴ γωνίαν τῇ λοιπῇ, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξουσι, καὶ τλω κ ε'. τῶ δ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζμγ, τῇ ὑπὸ ζλγ, καὶ διπλῆ ἡ μγ, διπλῆ τῇ γλ, ὁμοίως ἴση, ἡ δὲ ὅλη μλ. διπλασία τῆς μγ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ηβ, διπλασία τῆς βμ, ἀλλ' ἡ βμ, ἴση ἐστὶ τῇ μγ, ἄρα καὶ ἡ ηβ, ἴση ἐστὶ τῇ μλ, καὶ τὸ ε'. ὀξίωμα. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ ἑκάστη τῶν ηθ, θκ, κλ, ἴση ἑκατέρα τῶν ηβ, μλ. ἄρα τὸ ηθκλμ, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ζμγ, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ ζλγ, καὶ τῆς μὲν ζμγ, διπλασία ἐστὶν ἡ ὑπὸ βμγ, ἥπερ ἡ ὑπὸ ηλ, τῆς δὲ ὑπὸ ζλγ, ἡ ὑπὸ κλμ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηλ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κλμ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς η, θ, κ, γωνιῶν ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς



Euclı. Lib. 4. Fig. 10.

τοῖς

τῆς μ, καὶ λ. τὸ ἄρα π θ κ λ μ, ἰσογώνιόν ἐστι, δίδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

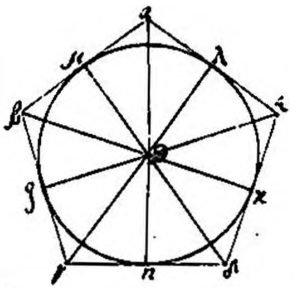
Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις καὶ ἰσοπλεύροις πενταγώνοις τῶν πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, καὶ ἐπ' αὐτῶν καθέτων ἀγομένων, αἱ ἀπὸ τῆς συμβολῆς τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, δίχα τὰς γωνίας τέμνουσι.

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, κύκλον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον ἐγγράψωμεν. Τετμήσθωσαν αἱ β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τῶν β γ, γ δ, καθέτοι ἀχθεῖσαι, αἱ ζ θ, η θ, προσπίπτωσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ, σημείου, ἐπὶ τὰς συμβολὰς τῶν ζ θ, η θ, καθέτων, ἤχθω ἐπὶ τινὰ τῶν πρὸς τῇ γ, γωνίαν, ἡ θ γ. Καὶ δὴ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, ἡ ὑπὸ β γ δ, γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς θ γ, ὥστε ἡ ὑπὸ θ γ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θ γ η. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θ ζ γ, τῇ ὑπὸ θ η γ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα θ ζ γ, θ η γ, ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ θ ζ γ, ζ γ θ, ἴσας δυσὶ ταῖς ὑπὸ θ η γ, η γ θ, ἔχουσι δ' ἔτι καὶ τὴν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰν, τὴν ζ γ, ἴσην τῇ γ η, ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσι, καὶ τὴν κ ς'. τῇ δ. ὥστε ἡ θ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ θ η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη, τῶν θ κ, θ λ, θ μ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν θ ζ, θ η, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, λ, μ, σημείων, ἁπτόμενος καὶ παντὸς τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, πλευρῶν τῷ πενταγώνου, διὰ τὸ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὰς α β, β γ, γ δ, δ ε, ταῖς διὰ τοῦ κέντρου ἐπ' ἄκρας, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ γ'. Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 4. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

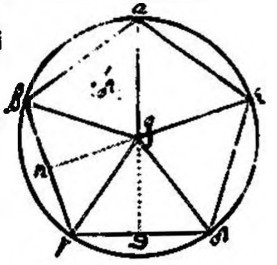
Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἔστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον περιγράψωμεν. Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν η, θ, σημείων καθέτοι ἀχθεῖσαι ἐπ' αὐτῶν αἱ ζ η, ζ θ, συμβάλλουσαι

ἀλλή-

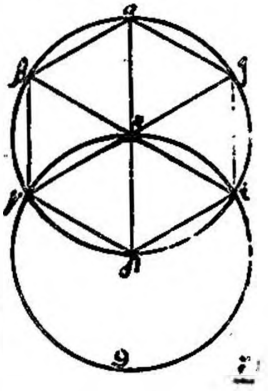
ἀλλήλαις καὶ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, τῷ ἐφεξῆς τοῦ πενταγώνου γωνίαν ἀχθήτωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. καὶ τὸ πέρασμα ἄρα τῶν ι β'. τοῦ παρόντος, αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζι, δίχα τέμνουσι τὰς τοῦ πενταγώνου γωνίας. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ηβ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β. καὶ τῆς μὲν πρὸς τῷ α, ἥμισεια ἡ ὑπὸ ζαβ, τῆς δὲ πρὸς τῷ β, ἡ ὑπὸ ζβα, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβα, καὶ τὸ ζ'. δ. ξίωμα. καὶ ἑπομένως ἡ ζα, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, καὶ τοῖς ε'. τοῦ α'. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ζγ, ζδ, ζι, ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ζα, ζβ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, ι, σημείων. Τοῦ αβγδ ἄρα κύκλου ἡ περιφέρεια ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ αβγδε, πενταγώνου, καὶ ἑπομένως περιγέγραπται περὶ αὐτὸ καὶ τὸν ς'. ὁρον τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει ποῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 12.



Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγδεζ, κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαμεν. Ἤχθω τοῦ κύκλου ἡ αδ, διάμετρος, καὶ εἰλήφθω τὸ η, κέντρον· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ γηθ. καὶ ἐπιζεύχθεισαι αἱ γη, εη, ἐξαχθήτωσαν καὶ τοῖς β, καὶ ζ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, καὶ τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ γηθ, κύκλου, παίπως γὰρ ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ δε. ἔστι δὲ καὶ τὸ η, κέντρον τοῦ αβγδεζ, ἄρα καὶ ἡ ηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. κοινὴ δὲ προσκείσθω ἡ ηδ, αἱ δύο παίπως γε γη, ηδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς εη, ηδ, δῆλα δὴ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστὶν, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γηδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηδ, καὶ τοῖς ε'. τοῦ α'. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ εηζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δηε, ὥστε αἱ ἓξ γωνίαι αἱ ὑπὸ γηδ, δηε, εηζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ τέσσαρες κατὰ κορυφὴν, αἱ ὑπὸ γηβ, βηα, αηζ. αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ αηβ, βηγ, γηδ, δηε, εηζ, ζηα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. καὶ ἑπομένως αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, περιφέρειαι ἐφ' ὧν αἱ ῥηθεῖσαι βεβήκασι γωνίαι, ἴσαι ὁμοίως εἰσὶ, καὶ τοῖς κε'. τοῦ γ'. κατὰ δὲ τοῖς κδ'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, εὐθεῖαι ἴσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον. ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ γδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ αζε δ, ὅλη ἄρα ἡ βαζεδ,

ἡ βαζ τῇ δ, ἴση ἐστὶ τῇ γδζ α, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς βαζ δ, βέβηκεν ἡ ὑπὸ βγδ, γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς γδζ α, ἡ ὑπὸ γβα, ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβα, καὶ τῷ κζ'. τοῦ γ'. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῇ πρὸς τοῖς α, ζ, ε, δ, γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῇ πρὸς τοῖς β, γ. ὥστε τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἑξάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι ἡ τῷ ἑξαγώνῳ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

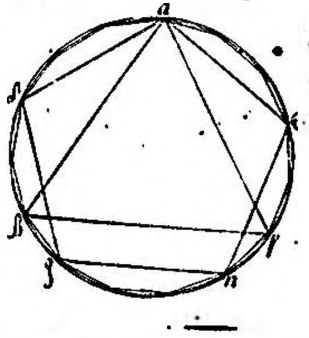
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατὸν εἰς οἱονδήποτε κύκλον ἑξάγωνον ἐγγράφειν. εἰδέναι δηλονότι τὸν περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι, ἀχθέντων διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, σημείων ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου, ὅπερ δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, καὶ ἔστω τὸ ζητούμενον. δυνατὸν δ' ἐστί, καὶ τὸ περὶ τὸν πενταγώνου εἰρημένα, εἰς τὸν δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφειν, ἢ περὶ τὸν δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον περιγράφειν.

Πρότασις Ις'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγ, κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψωμεν. Ἐγγεγράφθω δ. τὸ αβγ, ἰσόπλευρον τρίγωνον. ἔπειτα τὸ αδζ πε, πεντάγωνον. καὶ ἐπιζεύχθωσαι αἱ βζ, πγ. λέγω πάλιν ἑκατέραν τῶν βζ, γπ, πλευρὰν εἶναι τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου. εἰς μὲν γὰρ τὸν αδβ, περιφέρειαν τρίτον ὄντα ὅλης τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, πέντε πλευραὶ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου ἁρμοσθῆναι δυνατόν. εἰς δὲ τὸν αδ, πέμπτον ὄντα μέρος, τρεῖς ἁρμοσθήσονται, εἰς τὸν λοιπὸν ἄρα δβ, δύο. διὰ δὴ εἰς τὸν δβζ, τρεῖς ἁρμόσουσι, εἰς πέμπτον τοῦ κύκλου δὴ αὐτὸν ὄντα, ἄρα εἰς τὸν βζ, μία τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰ ἁρμοσθήσεται, ὡσαύτως δὴ καὶ εἰς τὸν γπ. ἐὰν ἄρα κατὰ τὰ ἐφεξῆς διαιρέσεις ἴσας τῇ βζ, ἢ γπ, εἰς τὸν κύκλον ἐναρμόσωμεν, ἐγγραφήσεται πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. Lib. 4. Fig. 13.



Τέλος τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Πρόσ-

Προοίμιον τῦ Πέμπτυ τῦ τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείων.

Τὶς ὁ τῦ Βιβλίυ ὅρισις, ὁ σκοπὸς, τὸ χρήσιμόν τε καὶ πῖξις.

Τὸ Πέμπτον τετὶ Βιβλίον, ὡς καὶ τὸ πρὸ αὐτῦ, στοιχεῖον Εὐκλ. ἐπιγράφεται. σὺ δ' τινὶς ὅρισιν αὐτὸν εἶναι, Εὐδοξόν τινα τὸ Πλάτωνος διδάσκαλον. τοῦ δ' χάριν τὸ τῦ Εὐδόξυ ὄνομα ἀπολιπὸν, τὸ τῦ Εὐκλείδυ ἐκλαμβάνετο; ἢ ὅτι ἐκεῖνο μὲν ἦ ὅρισις, τετὸ δ' ἦ πῖξις τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων. καὶ παρ' Εὐδόξυ τὰς ἀρχμὰς λαβὼν Εὐκλείδης ὡμηθοδίτερον ἐκεῖνα κατέρρωσέ τε αὐτὰ καὶ ἐρρύθμισεν. δίδυ γὰρ σοφῷ ἀρχμὼ καὶ σοφώτερος ἔτυ.

Σκοπὸς δ' τῦ ὅλυ Βιβλίυ περὶ Ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Ἔστι δ' Ἀναλογία σύγκρισις, ἥτις χρίσις, λόγων τινῶν καθ' ὁμοιότητα, ἐν ἕξισιν ὅροις πλάκιστον διαφερμένη. Λόγος δ' δύο μεγεθῶν, ἢ ἀριθμῶν ἐστι σύγκρισις, λέγεται δ' ὁ Λόγος καὶ χρίσις. ὅταν δὲ, φέρ' εἰπεῖν, δύο μεγέθη ἢ ἀριθμοὶ πρὸς ἄλλους συγκρίνωνται, τὰ μεγέθη μὲν ἢ εἰ ἀριθμοὶ, ὅροι καλῦνται, ἢ δ' τῶν σύγκρισις Λόγος, ἥτις σχέσις, ὡς εἴρηται. ὅταν δ' ὁ Λόγος ἦτις πρὸς ἕτερον ὅμοιον συγκρίνηται, ὡς ὁ τῦ γ, καὶ ς, πρὸς τὸν τῦ ς, καὶ ιβ, ἢ σύγκρισις αὕτη Ἀναλογία ἔκλησι. Διχῶς δὲ ἢ Ἀναλογία γενέσθαι δύναται. ἢ μὲν γὰρ Συνεχὴς, ἢ δὲ Διηζευγμένη. καὶ Συνεχὴς μὲν Ἀναλογία ἐστὶν, ἢ τὺς ὅρυς καθ' ὅλω σύγκρισιν συνεχῆς ἔχυσα, ὡς ἢ τῦ β, δ, η, ις. καὶ λοιπῶν. Διηζευγμένη δὲ ἢ τὰς ὅρυς καθ' ὅλω σύγκρισιν αὐτὰ δύο λαμβάνυσα, ὡς ἢ τῦ β, δ, ς, ιβ. Εἴδη δὲ τῦ Λόγυ πλέω. ἓξ μὲν ἁπλᾶ, τὰ δύο δὲ συνθετα. καὶ ἁπλᾶ μὲν τό Πολλαπλάσιον, τὸ Ἐπιμόριον, καὶ τὸ Ἐπιμερὲς. καὶ Πολλαπλάσιον μὲν λέγεται μέγεθος μεγέθυς τὸ μεῖζον τῦ ἐλάσσονος, ὅταν ὑπερέχει τὸ ἔλασσον ἅπαξ, ἢ δὶς, ἢ τρὶς, ἢ πλειοτάκις. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, ὡς ὁ δ, τῦ β, καὶ ὁ θ, τῦ γ. Ἐπιμόριον δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περέχει τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ, καὶ σὺ αὐτῦ ἔτι ὁποιουδήποτε μέρος, ὡς ὁ δ, τῦ γ, καὶ ὁ ε, τῦ δ. Ἐπιμερὲς δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς, περέχει τὸν ἐλάττονα ἅπαξ, καί τινα αὐτῦ μέρη, ὡς ὁ ε, τῦ γ, καὶ ὁ ζ, τῦ δ, καὶ οἱ ὅμοιοι. καὶ ταῦτα μὲν τὰ ἁπλᾶ. Συνθετα δὲ τό Πολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ Πολλαπλασιεπιμερές. καὶ Πολλαπλασιεπιμόριον μὲν, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περέχει τὸν ἐλάττονα πλειοτάκις, καί τι μέρος αὐτῦ, ὡς ὁ ζ, τῦ γ, καὶ ὁ θ, τῦ δ, καὶ λοιποί. Πολλαπλασιεπιμερὲς δὲ, ὅταν ὁμοίως περέχει τὸν ἐλάττονα πλειοτάκις, καί τινα αὐτῦ μέρη, ὡς ὁ ι, τῦ γ, ὁ ια, τῦ δ, καὶ λοιποί.

Τοιαύτας μὲν ὖν τὰς προσηγορίας τὰ μείζω μεγέθη, ἢ οἱ μείζονες ἀριθμοὶ ἔλαχον. Τὰ ἐλάττονα δὲ μεγέθη, ἢ οἱ ἀριθμοὶ μῆ τῦς, ὑπὸ, προφέρονται,

περί-

πεύτε καὶ αὐτῷ ὄντων τῶν εἰδῶν, τὸ μὲν γὰρ Ὑποπολλαπλάσιον, τὸ δὲ Ὑπεπιμόριον, τὸ δὲ Ὑπεπιμερὴς, τὸ δὲ Ὑποπολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ ἔχατον Ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς λέγεται. Ἀρχικαὶ δὲ Ἀναλογίαι τρεῖς, Γεωμετρικὴ, Ἀριθμητικὴ, καὶ Ἁρμονική.

Ἐπεὶ δὲ περὶ τὸ Βιβλίον περὶ Ἀναλογιῶν διαλαμβάνει, χρησιμεύει πάντως ἡ μόνον τῇ Γεωμετρίᾳ, ἀλλὰ καὶ Ἀριθμητικῇ τε καὶ Μουσικῇ, καὶ ταῖς τούτων ὑποβεβηκυίαις Ἐπιστήμαις. ἁπλῶς δ' εἰπεῖν πάσῃ Μαθηματικῇ Ἐπιστήμῃ ἀναγκαίᾳ πως ὑπάρχει.

Τάξιν δὲ καὶ ἁρμόν, ὃν καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ πρεῖ. προπαγμένων γὰρ τῶν Ὅρων ἕπονται αἱ Προτάσεις. ἀλλά γε καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων διδασκαλικὸν ἔχει τὸν τρόπον. ἀπὸ γὰρ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχόμενον, ἐπὶ τὰ καθολικώτερα μεταβαίνει. Ὅροι δέ εἰσι τούτου οἱ πᾶσι εἴκοσι. Προτάσεις δὲ πεύτε πρὸς ταῖς εἴκοσιν. ἀλλ' ἵνα μὴ περιττολογεῖν δόξωμεν, φέρε δὴ τῶν τῶν Ὅρων Ἑρμηνείας ἀψώμεθα.

Α' ΠΟΣΗΜΕΙΩΣΗΣ.

* Σημείωσαι, ὅτι ἐπὶ τῶν ἀναπήρων στιλίδος, ἀμίλει 104: σίχῳ ις': εἴθα φησὶν, ὡς ὁ τοῦ γ, καὶ ς, πρὸς τὸν τοῦ ς, καὶ ιβ, λεπτὸν ὕπως, αὐτὶ τῶν σημασίας τοῦ, ὡς ὁ τοῦ 3, καὶ 6, πρὸς τὸν τοῦ 6, καὶ 12. ὡσαύτως καὶ σίχῳ ιθ': ὡς ἡ τοῦ 2, 4, 8, 16. Ὁμοίως καὶ τοὺς ἑξῆς τοὺς δὲ ἀριθμοὺς, τοὺς Ἀναλογίας παρεσῶπας ἐπὶ τῶν αὐτῶν στιλίδος.

Ποδηγήσει ὑμᾶς ἡ Ἀποσημείωσις αὕτη ἐπὶ τὸ διαγινώσκειν τοὺς τοιούς δὲ ἀριθμοὺς, παπαχῶ τῶν ἑπομένων Βιβλίων, καὶ Πραγματειῶν. ἐν οἷς σωιχῶς ὁ Συγγραφεὺς ἐχρήσατο τοῖς τοιούτοις Ἑλληνικοῖς Ἀριθμοῖς καὶ τῷ ῥηθείσαν σημασίαν, καὶ μάλιστα εἴθα ὧ αὐτῷ λόγος γένηται περὶ Ἀναλογιῶν.

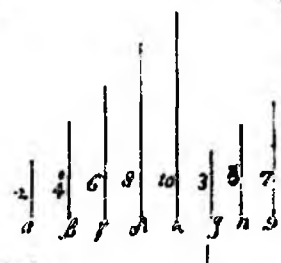
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μείζονα.

Ἐπειδὴ περὶ Ἀναλογιῶν ὁ τῷ βιβλίῳ σκοπός, ὡς προείρηται, ἔδει πρώτως ἐπὶ τῷ ὅρων ἢ τὸν τῆς Ἀναλογίας ἀποδοῦναι ὁρισμόν. Ἐκ Λόγων δὴ τῶν Ἀναλογίας συγκειμένης, δεῖ πρῶτον τὸν Λόγον ὁρίσασθαι· τῷ Λόγῳ δὲ ἐν Μεγέθεσι θεωρουμένῳ, περὶ τῆς τῶν Μεγεθῶν προσηγορίας οἰκειότερον διαλαβεῖν. διὸ δὴ ἡ Εὐκλείδης ἐπὶ τῷ α΄ ὅρῳ τὸ Μέρος ὑπογράφει λέγων, Μέρος ἐστὶ Μέγεθος Μεγέθους ἢ τὰ ἑξῆς: τῶν γὰρ Μεγεθῶν, ὅσα λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχουσι, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ἤ μέρος, ἢ μέρη ἐστί· ἢ μέρος μὲν ἐπὶ τῷ Πολλαπλασίῳ, μέρη δὲ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν. τὸ γὰρ Πολλαπλάσιον μόνον μέγεθος ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος ὁλοκλήρως καταμετρᾶται. οἷον τὸ α, μέγεθος, μέρος μὲν λέγεται τοῦ βγδ, ὅτι καθ' ἕνα ἕκαστον τύπον κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τοῦ δὲ ζηθ, οὐκ ἔστι μέρος, ἀλλὰ μέρη τύπων τινὲς αὐτὸ ἀποκαλοῦσιν. οὐδὲ γὰρ αὐτοῦ κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. διὸ χρεὼν μόνον τὸ λόγον μέρους ἔχοντας Μεγέθους ἐμπίπτειν, ὁμοίως δὲ καὶ τοὺς λόγον ἔχοντας μερῶν· ἅ ὅτι τῷ Πολλαπλασίῳ μόνῳ ἔμπλεκε τὸν ὁρισμὸν ἀπεδεῦχθαι, ὡς ἁπλουστέρου, καὶ ταῖς ἀποδείξεσι χρησιμωτέρου, οὐχὶ δὲ καὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν.

Euclid. Lib. 5. Fig. 1.



Β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τοῦ μείζονος τὸ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τῶν Μεγεθῶν, ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, εἰ μὲν τὸ ἔλασσον καταμετρῇ τὸ μεῖζον, καταμετρεῖται πάντως καὶ τὸ μεῖζον ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος, καὶ τὸ μὲν ἔλασσον μέρος καλεῖται, ὡς ἤδη εἴρηται, τὸ μεῖζον δὲ πολλαπλάσιον· ὡς ἐπὶ τῶν παρόντος ὁριζόμενος ἀπεφάνατο. οἷον τῶν αβ, Μεγεθῶν, τὸ μὲν β, Μέρος, τὸ α, δὲ

δὲ Πολλαπλάσιον λέγεται· τὸ μὲν γὰρ καταμετρεῖ, τὸ δὲ καταμετρεῖται ὑπὸ τοῦ γ, ἀριθμός. Ἐὰν δὲ ὦσι πλείονα μεγέθη, ἃ ἅπαντα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, μείζονα δὲ τῷ μεγέθει, ἕκαστον δὲ τῶν μειζόνων ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἰδίου μέρους, τὰ μείζονα μεγέθη ἰσάκις πολλαπλάσια λέγονται· οἷον ἐπεὶ τὸ α β γ, ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ δ ε ζ, ἰσάκις Πολλαπλάσια λέγονται.

Γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Τῶν Μεγεθῶν τὸ μὲν κατὰ μῆκος μόνον θεωρεῖται, ὡς γραμμὴ, ἥτις καὶ ὑφ' ἓν διαστὰν λέγεται, τὸ δὲ κατὰ μῆκος, καὶ πλάτος, ὡς ἐπιφάνεια, ἥτις καὶ δίχῃ διαστὰν λέγεται, καὶ ἄλλα κατὰ μῆκος, πλάτος τε, καὶ βάθος, ὡς τὰ σώματα, ἃ καὶ ἔριχῃ διαστὰ λέγεται. Τὸ αὐτὸ δὲ γένος Μεγέθη εἰσὶν, ὅσα ἢ κατὰ τὸ ὑφ' ἓν διαστὸν θεωρεῖται, ἢ κατὰ τὸ δίχῃ διαστὸν, ἢ κατὰ τὸ τριχῇ. Πηλικότης δὲ λέγεται ἡ τῶν μεγεθῶν ποσότης, ἥτις καὶ σωματικὴς ποσότης προσαγορεύεται, ἐξ ἀντιδιαστολῆς τῆς τῶν ἀριθμῶν ποσότητος, ἥτις καὶ διωρισμένη παρὰ τοῖς πάλαι φιλοσόφοις λέγεται Ποσότης. Ὥστε δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι τῆς μὲν γραμμῆς πηλικότης, τὸ μῆκος μόνον λέγεται, ἐπιφανείας δὲ τὸ μῆκος ἅμα καὶ πλάτος, καὶ τῶ σώματος τὸ μῆκος πλάτος τε, καὶ βάθος. Ὅταν οὖν συγκείνται γραμμὴ ἐπὶ γραμμήν, ἢ ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ, ἢ σῶμα σώματι· τὰ μὲν συγκεισόμενα, Ὁμογενῆ μεγέθη λέγεται, ἡ δὲ τούτων σύγκρισις, Σχέσις καὶ πηλικότης. αὕτη δὲ ἡ Σχέσις, Λόγος μεγεθῶν προσαγορεύεται. Ἐπεὶ δὲ ἡ σύγκρισις τῶν μεγεθῶν πολυειδής ἐστι, καὶ τὰ διάφορα τῷ Λόγῳ εἴδη· ἐν μὲν γὰρ τοῖς πολλαπλασίοις, πολλαπλασιότης, ἢ ὑποπολλαπλασιότης δυνάσθαι λέγεσθαι. ἐν δὲ τοῖς ἐπιμορίοις, ὑπεροχὴ, ἢ ἔλλειψις καθ' ὁποῖόν τι μέρος. καὶ ἐν τοῖς ἐπιμεριστοῖς, ὑπεροχὴ, ἢ ἔλλειψις καὶ πλείονα μέρη, πάντως χρὴ τὸ ποιὸν, προσίθησιν, ὥστε πληροῦσθαι τὸν ὁρισμὸν τοῦ Λόγου τὸν τρόπον τοῦτον. Λόγος ἐστὶν ἡ ποιὰ τῶν μεγεθῶν σχέσις καὶ πηλικότης. Παρατηρητέον δὲ τὰ Μεγέθη ὁμογενῆ εἶναι. ἐν μὲν γὰρ τοῖς ἄλλου γένους μεγέθεσιν, οὐκ σύγκρισις ἀκριβὴς γινέσθαι δυνάται· πῶς γὰρ γραμμὴ, ἐπιφάνεια, καὶ σῶμα ἀλλήλοις συγκριθῶσιν, ὅπου γε τὸ μὲν ὑφ' ἓν διαστὸν, τὸ δὲ δίχῃ, καὶ τὸ ἄλλο τριχῇ διαστόν ἐστι; ὅτε μὲν ἡ ὑποτεθεῖσα αὐτοῖς γενομένη σύγκρισις Λόγος οὐκ ἂν καθῆναι δυνάμενος.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς Λόγου λαβεῖν. ὥσπερ γὰρ ὁ τῶν μεγεθῶν Λόγος, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλά ἐστι ποιὰ σχέσις, οὕτω καὶ τῶν ἀριθμῶν, Λόγος ἐστὶν, ἡ κατὰ ποσότητα πρὸς ἄλληλας ποιὰ σχέσις.

Δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

Ἀποδὺς ἐν τῷ ἀνωτέρω ὅρῳ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἐν Μεγέθεσι Λόγων, βούλεται ἐπὶ τῶ παρόντος δηλῶσαι, καὶ τίνα τὰ λόγον ἔχοντα Μεγέθη. ὥσπερ οὖν λόγος ἐστὶ τῶν ὁμογενῶν Μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητα σχέσις ἀλλήλα ποιά χίσις, οὕτω καὶ Μεγέθη λόγον ἔχει λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. τίνα δὲ ταῦτα; ἢ τὰ ὁμογενῆ. γραμμὴ γὰρ γραμμῆς διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ὑπερέχειν, ὡσαύτως καὶ ἐπιφάνεια ἐπιφανείας, καὶ σῶμα σώματος. ὥστε γραμμὴ καὶ ἐπιφάνεια, ἢ ἐπιφάνεια καὶ σῶμα, ἢ σῶμα καὶ γραμμὴ λόγον ἔχειν οὐδύανται· οὔτε γὰρ ἡ γραμμὴ ἐπιφανείας, ἢ σώματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ ὑπερέχειν δύναται, οὔτε ἡ ἐπιφάνεια γραμμῆς, καὶ σώματος, οὔτε μὴν τὸ σῶμα γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας. τὰ ὁμογενῆ ἄρα μόνα λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα λέγεται.

Ε'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῷ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, λαμβανόμενα καταλλήλα.

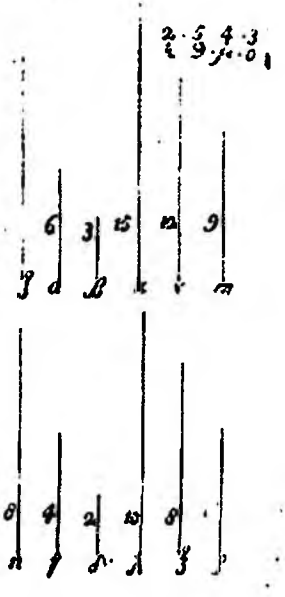
Δηλώσας ἐν τῷ ἀνωτέρω τίνα τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, βούλεται ἐπὶ τῶ παρόντος διασαφῆσαι, καὶ τίνα τῶν Μεγεθῶν ἐν τῇ αὐτῇ εἶναι λόγῳ λέγεται. ὥσπερ δὲ ὁ λόγος ἐν δύο μεγέθεσι θεωρεῖται, οὕτω καὶ ἡ τῶν λόγων Ὁμοιότης ἐν δυσὶ τοιούτοις λόγοις ἀφίσταται, ἡ γὰρ Ὁμοιότης χίσις ἐστὶν, ἡ δὲ χίσις ἀναφορά τινος πρὸς ἕτερον. δύο δὲ λόγοι ἐν πλείοσι περιέχονται μεγέθεσι· διὸ καὶ ἕτερα, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. εἰδὲ καὶ ἐν τρισὶ μεγέθεσι δύο λόγοι εἰσὶν περιληφθῆναι δυνατόν τε καὶ ὅπως ὡς πλείονα ἐνεστῶσιν, δεῖ γὰρ τὸ δεύτερον λαμβάνειν· οἷον ἐν τοῖς α β γ, μεγέθεσι δύο λόγοι θεωρεῖται, ὡς γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ β, πρὸς τὸ γ. ἴδιον δὲ τὸ β, δεῖς λαμβανόμενον· ὥστε τὰ α β γ, ἐπιτεταγμένα μὲν τρία ἐστὶ μεγέθη, δυνάμει δὲ πλείονα. Οὗτοι δὲ ἐν πλείοσι μεγέθεσι, τῶ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον παραβαλλομένου, καὶ τῶ τρίτου πρὸς τὸ πλεῖστον, ἡ αὐτὴ χίσις εὑρεθῇ, τοῦτο τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ πλεῖστον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται. Ἵνα δὲ τῶν εἰρημένων ἔχωμεν διαφόρειν· ἐπεὶ τὸν ἐν μεγέθεσι λόγον ὧδε ἀεὶ γινώσκομεν, ὥσπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, διὰ τὸ διαφὴς εἶναι ἀπείρους μέρες τὸ ἔλαττον τῶ μείζονός ἐστι μεγέθους, τοῦτο οὖν δεῖ ἑκάστου τῶν πολλαπλασίων

Euclid. Lib. 5. Fig. 2.

πολλαπλασίων

σάρων μιγνθῶν πολλαπλάσιόν τι λαμβάνειν, ὥστε τὸ τῦ πρώτυ ἡμι ξίτυ ἴσακις εἶναι πολλαπλάσια, ὥσπερ ἡ τὸ τῦ δευτέρυ ἡ τετάρτυ. εἶτα παραβάλλειν τὸ τῦ πρώτυ ἴσακις πολλαπλάσιον τῷ τῦ δευτέρυ, ἡ τὸ τῦ ξίτυ τῷ τῦ τετάρτυ, κἂν μὲν ἅμα τὸ τῦ πρώτυ ἴσακις πολλαπλάσιον τῦ ἴσακις πολλαπλασίυ τῦ δευτέρυ, ἡμι τὸ τῦ ξίτυ ἴσακις πολλαπλάσιον τῦ ἴσακις πολλαπλασίυ τῦ τετάρτυ ὑπλείπωσιν, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερίχωσι, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται, ἡμι τὸ ξίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οἷον ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἡμι τὰ μὲν α, ἡ γ, πρώτων δηλ: ἡ ξίτον πολλαπλασιαθέντα ἐπὶ τὸν ε, ἀριθμὸν, ἡ ἔστωσαν τῶν ἴσακις πολλαπλάσια τὰ ζ, η. τὰ δὲ β, δ, δευτέρου ἡ τετάρτου ἐπὶ τὸν θ, ἡ ἔστωσαν τῶν ἴσακις πολλαπλάσια τὰ κ λ. Αὖθις πολλαπλασιαθέντα τὰ αὐτὰ β, δ, ἐπὶ τὸν μ, ἡ ἔστωσαν τῶν ἕτερα ἴσακις πολλαπλάσια τὰ ν, ξ. ἡ τηλικαῦτον πολλαπλασιαθέντα τὰ αὐτὰ ἐπὶ τὸν ο, ἡμι ἔστωσαν τῶν αὐτῶν ἡμι ἕτερα ἴσακις πολλαπλάσια τὰ π, ρ. εἶτα παραβληθέντα χωρὶς τὰ ζ η, τοῖς κ λ, ν ξ, π ρ. ἡ ἐπεὶ ἐν τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασμῷ τό τε ζ, τὸ κ, ἡμι τὸ η, τὸ λ, ἅμα ὑπλείπουσιν, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἅμα ἴσά ἐστι τό τε ζ, τῷ ν, ἡμι τὸ η, τῷ ξ, ἡ ἐν τῷ ξίτῳ πολλαπλασιασμῷ τό τε ζ, τὸ π, ἡμι τὸ η, τὸ ρ, ἅμα ὑπερίχουσιν, ἔστι πάντως ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ὡς τὸ πρῶτον α, πρὸς τὸ δεύτερον β. οὕτω τὸ γ, ξίτον πρὸς τέταρτον τὸ δ.

Eucl. Lib. 5. Fig. 3.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ὥστε δυνάμεθα ἐκ τύτυ συναγαγεῖν ἡ ἀνάπαλιν, ὅτι ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, ἡμι ξίτον πρὸς τέταρτον, ἡ τὸ ἴσακις πολλαπλάσια τῷ πρώτῳ ἡ ξίτυ, τῶν ἴσακις πολλαπλασίων τὸ μὲν δευτέρυ ἡμι τετάρτυ καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρυ, ἢ ἅμα ὑπλείπει, ἢ ἅμα ὑπερίχει, ἢ ἅμα ἴσα ἐστὶ ληφθέντα καταλλήλα.

ς'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογα καλείσθω.

Διδάξας τὸν τρόπον, καθ' ὃν τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη διορίσειαν ἔχομεν, ἡμι πῶς δεῖ ταῦτα καλεῖν ἤδη καλδίει. τὰ γὰν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα Ἀνάλογα καλεῖν ἐθέλει. ὥστε ἐπὶ τῦ ἀνωτέρω παραδείγματος τὰ α β, γ δ, Ἀνάλογά εἰσι, τὸν αὐτὸν γὰρ ταῦτα ἔχει λόγον.

ζ'. Ὅταν

Ζ'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλασίου μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ' πρὸς τὸ δ'.

Καθάπερ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη διὰ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων γινώσκομεν, οὕτω γε διὰ τῶν αὐτῶν, καὶ τῶν μὴ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μεγεθῶν τὸ μείζονα λόγον ἔχον δηλοῦσθαι ἔχομεν. Εἰλήφθωσαν δὴ πάντα μεγέθη τὰ αβ, γδ. καὶ εἰλήφθωσαν, ὡς καὶ ἀφότερον, τοῦ τε τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ε, καὶ ζ. καὶ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὰ η, θ. καὶ παραβεβλήθωσαν τὰ ε, καὶ ζ, τοῖς η, καὶ θ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, ὑπερέχει τοῦ η, καὶ τὸ ζ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ θ, διὰ τοῦτο τὸν τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Γίνεται δ' ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν μείζονα λόγον ἐχόντων μεγεθῶν ἐνίοτε εὑρίσκεται τό, τε τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον ὑπερέχον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου, τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, ἀλλ' οὐκ ἰσάκις. ἐὰν δὲ καὶ ἐφ' ἑτέρων ἀριθμῶν πολλαπλασιασθῶσι, καὶ τοῦτο γένηται δίς καὶ ἅπαξ, οὐ πάντως ἀεὶ ὑπερίξει τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου· ἀλλ' ἔσται τὸ τοῦ πρώτου ἴσον ἢ καὶ τοῦ δευτέρου, τὸ τοῦ τρίτου, ἔλαττον ἔσται τοῦ τετάρτου, ὅταν δὲ τὸ τοῦ τρίτου ἴσον ἢ καὶ τοῦ τετάρτου, τὸ τοῦ πρώτου μεῖζον ἔσται τοῦ δευτέρου. διὸ δὴ ἵνα τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεγέθος εὑρίσκῃ, ἐπί τε μειζόνας ἀριθμοὺς καὶ ἐλάττονας δεῖ τὰ μεγέθη πολλαπλασιάζεσθαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 4.

Η'. Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

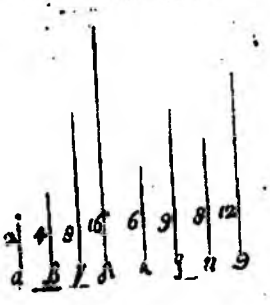
Ὁρίσας αὐτοῖς τὸν ἐν τοῖς μεγέθεσι λόγον, καὶ τίνα μὲν τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, τίνα δὲ τὰ ἐν τῇ αὐτῇ ὄντα λόγῳ διδάσκει, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα καλεῖται, διδάξας μέλλει τὸ σ'. ἔρευ, ἐπὶ τοῦ παρόντος καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας συνάγει ὁρισμόν· καί φησιν, Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. ὥσπερ γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη Ἀνάλογα καλεῖσθαι προεστάμεθα, οὕτω καὶ Ἀναλογίαν τινὰ τῶν λόγων ὁμοιότητα καλεῖν ἐθέλει. ὅταν δὲ ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν, ὡς ἐν τοῖς αβγ, ἢ δεζ, ὁ αὐτὸς λόγος εὑρίσκηται· τὰ μὲν μεγέθη ἐκεῖνα, ὡς εἴρηται, Ἀνάλογα καλεῖται· ἡ δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁμοιότης Ἀναλογία. ὥστε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι πλείοσι ἐν πλείοσι μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς λόγος οὐ θεωρεῖται, ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς, ἑτέρος τις εὑρίσκεται, ἐν δὲ τοῖς, ἄλλος· ὅτε τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἀνάλογα καλεῖσθαι δύναται, ὅτι μίαν ἡ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων σύγκρισις

Ἀνα-

Ἀναλογία, ἀλλ' ὡς ὕπερ εἰπεῖν, Ἐνιρολογίατις, ἢ τὰ μιγέθη ἐκεῖνα Ἐνιρόλογα. ὡς ἐπὶ τῦ ὑποδείγματος τῦ ζ': ὅρα δῆλον καθίσαται.

Ἰσέον δὲ, ὅτι τῆς Ἀναλογίας εἰς δύο διαιρυμένης εἴδη, ἡ μὲν Συνεχὴς, ἡ δὲ Διεζδγμένη, ἡ ἢ Διηχὴς λέγεται. ἢ Συνεχὴς μὲν, λοίπα ὁ αὐτὸς λόγος ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μιγέθεσι ἢ συνέχεια θεωρεῖται, ὡς ἐν τοῖς αβγδ, ὡς γὰρ ἔχει τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕπερ ἢ τὸ β, πρὸς τὸ γ, ἢ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. διὸ ἢ τὰ τοιαῦτα μιγέθη, Ἀνάλογα Συνεχῆ καλεῖθαται. Διεζδγμένα δὲ, ὁπλοῖα ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μιγέθεσιν ὁ αὐτὸς μὲν λόγος θεωρεῖται, ὁμοῦ δὲ ἢ συνέχεια, ὡς ἐν τοῖς εζ, ηθ. ὡς γὰρ ἔχει τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὧδε ἔστι φανερὸν ἢ τὸ ζ, πρὸς τὸ η, ἀλλάγο ὕπερ ἔχει ἢ τὸ η, πρὸς τὸ θ. δῆθεν τὰ τοιαῦτα Ἀνάλογα Διεζδγμένα καλεῖθαται.

Euclid. Lib. 5. Fig. 5.



Θ': Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

Ἐπεὶ ἡ Ἀναλογία λόγων ἐστὶν ὁμοιότης, ἢ τὰ διαστήματα. ἡ δὲ τῦ λόγων ὁμοιότης ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μιγέθεσι πέφυκε γίνεθαι, δῆλόν γε ὅτι ἐν δυσὶ μόνοις μιγέθεσι δύο λόγους θεωρεῖθαι, διαγραῖον παντὸς εἰδέναι ἢ μίχρι πάσων συναθροιζομένη μιγεθῶν ἡ Ἀναλογία δύναται σαίζεθαι. διὸ δὴ τῦτο διασαφῆσαι ἐμῖν βυλόμενος Εὐκλείδης ἐπ' ἐλάτιστον τῦ ζητῶν ὅρων, φησὶ, μὴ καταλέγειν. Ὅρους δὲ τὰ μιγέθη, ἐν οἷς ἡ Ἀναλογία, καλεῖ. δείζεται γάρ πως ἐν αὐτοῖς ἡ Ἀναλογία. Ἵνα δὲ ὁ λόγος πληρέστερος γένηται, ἰσέον, ὅτι ἡ μὲν Συνεχὴς Ἀναλογία, περὶ ἧς ἢ Εὐκλ: τὸν λόγον ποιεῖται, ἐν τρισὶν, ὡς εἴρηται, ἐλαχίστοις ὅροις ἐστὶν, ἡ δὲ Διεζδγμένη ἐν τέτρασιν.

Ι': Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

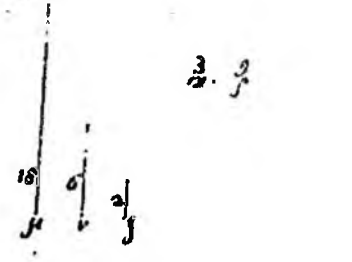
ΙΑ': Ὅταν δὲ τέτταρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, ἢ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλέον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

Εἰναὶ τοῖς κατὰ συνέχειαν λόγον ἔχυσι μιγέθεσιν, ἕκαστον τῦ μιγεθῶν τῦ πλησίον παραβάλλεται, καθ' ὃ ἢ ἡ συνεχὴς Ἀναλογία συνίσταται. δύναται ἕμπης ἢ πρὸς τὰ ἀπώτερον παραβληθῆναι. Ἐπεὶ δ' ὅσῳ μᾶλλον ἀπώτερόν ἐστι, πρὸς ὃ ἡ παραβολὴ, τῦ παραβαλλομένου, τοσῦτῳ ἢ τὸ παραβαλλόμενον μείζονα πρὸς ἐκεῖνο ἔχει τὸν λόγον. διὰ τῦτο ἢ Εὐκλείδης σαφῆ τῦ πρὸς τὰ ἀπώτερον λόγων ὑπαρχὴν δηλῶσαι βυλόμενος, δυσὶν ἐχρήσατο παραδείγμασιν, ἑπτὰ, ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον ἢ τὸ ἑξῆς. Ἵνα δὲ τῦτο δῆ-

τῶ δὲλον γίνηται, ἔσωσαν ἐπὶ παραδείγματος ἕξα μεὶ μιγέθη λόγα σωηχῆ τὰ α β γ, τέταρα δὲ τὰ δ ε ζ η. τὸ δὲ α, ἁρὸς τὸ γ, παραβαλλόμενον δὶπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁρὸς τὸ β. τὸ δὲ δ, ἁρὸς τὸ η, παραβαλλόμενον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁρὸς τὸ ε. σαφὲς δὲ τὸ λεγόμενον. μιπτὰ γὰρ τῶ α, καὶ γ, δύο λόγοι θεωρεῖται, ὅ, τε τῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ ὁ τῦ β, ἁρὸς τὸ γ. διὸ καὶ ὁ τῦ α, ἁρὸς τὸ γ, λόγος, δὶπλασίων λέγεται τῦ λόγυ τῦ αὐτῦ α, ἁρὸς τὸ β. μιπτὰ δὲ τῶ δ, καὶ η, ἕξεις λέγοντες εἰσί. διὸ καὶ ὁ τῦ δ, ἁρὸς τὸ η, λόγος, ἕξαπλασίων λέγεται τῦ λόγυ τῦ αὐτῦ δ, ἁρὸς τὸ ε. Ἐὰν δὲ τὰ μεγέθη ποσὰ ὦσι, τὸ ἁρῶτον ἁρὸς τὸ πέμπτον πεντεπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁρὸς τὸ δεύτερον. διὸ ἓξ, τὸ ἁρῶτον ἁρὸς τὸ ἕκτον πεντεπλασίονα, ἤπερ ἁρὸς τὸ δεύτερον. καὶ ἐπὶ τῶ ἑξῆς ἐσαύτως, ἀεὶ ἓξ ἀριθμῶν τῶ μεγεθῶν, αὔξεται καὶ ὁ λόγος τῶ ἄκρων.

Euel. Lib. 5. Fig. 6.

Εἰς σαφεστέραν δὲ καταλῆψιν τῶ εἰρημένων, ἰσέον, ὅτι ὁ τῦ ἁρῶτα μεγέθυς λόγος ἁρὸς τὸ ἔσχατον, σύγκειται ἐκ τῶν πολλαπλότητος τῶ μεταξὺ μεγεθῶν. οἷον ἡ πολλαπλότης τῦ α, ἁρὸς τὸ β, καὶ τῦ β, ἁρὸς τὸ γ, ἐστὶν ὁ θ. τῦ δὲ θ, ἁρὸς ἑαυτὸν ἅπαξ πολλαπλασιαζομένυ, γίνεται ὁ κ, ὅγδοι α, ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ α, ἁρὸς τὸ γ, ἔχει. Ἐπεὶ δὲ καὶ τῶ δ ε ζ η, ἃ τῶ συγκεῖται ἁρὸς ἄλλα πολλαπλότης ἐστὶν ὁ αὐτὸς θ, τῦ δὲ θ, δὶς ἁρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένυ, γίνεται ὁ λ, τὰ γὰρ δύο δὶς λαμβανόμενα τέταρα ποιῦσι, τὰ τέταρα δ' αὖθις δὶς λαμβανόμενα ὀκτὰ, ὁ λ, πάντως ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ δ, ἁρὸς τὸ η, ἔχει. καὶ ταῦτα δὲ ἐπὶ πλέον τὸ τῦ λόγυ ἐν ταῖς πλείοσι δὶπλασίοσιν, τριπλασίοσιν, τετραπλασίοσιν, καὶ πάσαις τοιαῦταις ἐπὶ τὸ πολλαπλασίοσιν αὐτῦ αὔξεσιν. εἰ γὰρ ἐνοείσῃ τις τὸν τῦ ἁρώτυ ἁρὸς τὸ ἕβδομον λόγον, δὶπλασίονα εἶναι καὶ πολλότητα, δύναται. Ἔστωσαν γὰρ ἕπτα μεγέθη συνεχῆ ἀνάλογα καὶ τὸν τριπλασίονα λόγον τὰ μ ν ξ, ὧν πολλότης ἐστὶν ὁ π. τὰ δὲ ἁρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένυ ἅπαξ, γενέσθω ὁ ρ. τὸ μ, ἄρα ἁρὸς τὸ ξ, ἔχει τὸν ρ, λόγον, ὃν ἔχει τὸ μ, ἐνταπλασίονα τῦ ξ, ἐπεὶ δὲ ὁ μ, τῦ ν, ἐστὶ δὶπλασίος ἐστὶ, ἴση ὁ τῦ μ, λόγος ἁρὸς τὸ ξ, δὶπλασίονα ἂν καὶ πολλότητα τῦ λόγυ τῦ αὐτῦ μ, ἁρὸς τὸ ν, ἔδει πάντως τὸ μ, τῦ ξ, ἑξαπλάσιον εἶναι, δὶς γὰρ ὁ ἕξα λαμβανόμενος τὸν ἓξ ποιεῖ, ἀλλὰ τοῦτο ἓν ἐστιν, ἐνταπλάσιον γάρ, ὡς εἴρηται, ἐξέστηκε τὸ μ, τῦ ξ. δῖον ἄρα τὸ δὶπλάσιον τῦ λόγυ τῶν ἄκρων, ἢ ἕξαπλάσιον, ἢ ἄλλως πως πολλαπλάσιον μὴ κατὰ πολλότητα ἐνοεῖν, ἀλλὰ καθ' ἓν δύο, ἢ τριῶν σύγκειται λόγων, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, μὴ κατὰ δὶπλασίασιν, ἢ ἕξαπλασίασιν τῆς προθέσεως τῆς τῦ λόγυ πολλαπλότητος,



Euel. Lib. 5. Fig. 7.

πος, ἀλλά γε καὶ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς πολλαπλασιάσεως τῆς αὐτῆς πηλικότητος.

ΙΒ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

Ἐπεὶ εἰς λόγον ἀρχῆς οὐκ ἦν τὰ Ὁμόλογα λαμβάνεται, ἢ τὰ ἀνάλογα, διάτι τοῦτο ἐπὶ τῶν παρόντων διδάσκει, καὶ τίνα χρὴ Ὁμόλογα καλεῖν, λέγων, Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα καὶ τὰ ἑξῆς. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο σαφέστερον γένηται, ἀναγκαῖον εἰδέναι τίνα τῶν μεγεθῶν ἡγούμενα, καὶ τίνα ἑπόμενα λέγεται. τῶν γὰρ ἀγνουμένων, οὐδὲ τὰ Ὁμόλογα γνωσθήσεται. τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων λόγῳ μεγεθῶν, τὰ μὲν προλαμβανόμενα, ἢ γοῦν ἀφαιρούμενα, ὁποῖα ἂν ὦσιν, Ἡγούμενα λέγεται, τὰ δὲ προσλαμβανόμενα, ἢ πρὸς ἃ ἢ ἀφορᾷ, Ἑπόμενα καλεῖται. οἷον ἔστωσαν πάντα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. τὰ γοῦν α γ, καθ' ὑπεροχὴν ὧν β δ, καθ' ὃ τι ἐλλείπουσιν, Ἡγούμενα καλεῖται, ὡς προτεπόμενα ἅμα καὶ προλαμβανόμενα. τὰ δὲ β, καὶ δ, Ἑπόμενα, ὡς ὑποτεπόμενα. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ α β, τοῖς γ δ. ἐὰν μὲν τὰ δύο δμοῦ α β, τοῖς δυσὶ γ δ, παραβάλλωνται, ἀνάλογα καλεῖται, καθὰ τὸν ε'· τῶν παρόντων ὅρον, ὡς ἀναλογίαν τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχοντα. ἐὰν δὲ τὸ α, χωρὶς τοῦ γ, παραβάλληται, καὶ τὸ β, τοῦ δ, Ὁμόλογα καλεῖται. ὃν γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ, λόγον ἔχει. καὶ ἀνάπαλιν, ὃν λόγον ἔχει τὸ β, πρὸς τὸ α, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ γ. ἐὰν δὲ συνεχὴς ᾖ ἀναλογία ᾖ, ὡς ἐπὶ τῶν ἑξῆς. ἐπεὶ τὸ ζ, δὶς λαμβάνεται, ὡς γὰρ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ αὐτὸ ζ, πρὸς τὸ η, τὸ ζ, ἑπόμενόν ἐστι, καὶ ἡγούμενον, ἑπόμενον μὲν πρὸς τὸ ε, ἡγούμενον δὲ πρὸς τὸ η. ὥστε τὰ μὲν ε ζ, ὡς ἡγούμενα, τὰ δὲ ζ η, ὡς ἑπόμενα, Ὁμόλογά ἐστι.

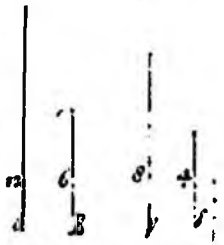
Euclid. Lib. 5. Fig. 8.

ΙΓ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

Διδάσκει μίαν τῶνδε, τίς ἡ τῶν μεγεθῶν, καὶ τίνα μεγέθη λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχειν δύναται, τίνα δὲ ἐν τῇ αὐτῇ εἶσι λόγῳ, καὶ πῶς τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον καλεῖται, τίνα τε τὰ ἡγούμενα, καὶ τίνα τὰ ἑπόμενα, καὶ ἄλλα, ὅσα εἰς ἀκρίβειαν τῆς ἀναλογίας συντείνουσι γνῶσιν, ἄρχεται ἐντεῦθεν διακρῦναι, καὶ πόσα τὰ τοῦ λόγου εἴδη. Ὁ Λόγος μὲν οὖν τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν, ἢ κατὰ πηλικότητα δήλον: πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, ὡς γένος λαμβάνεται. εἴδη δὲ τούτου ἓξ, τὸ Ἐναλλὰξ, τὸ Ἀνάπαλιν, ἢ Συνθέσις, ἢ Διαίρεσις, ἢ Ἀναστροφὴ, καὶ

τὸ Δ ἴσα. τινὲς δὲ τὰ ἐξ αὐτῶν τῶ λόγω εἴδη, καὶ ἐπιχειρήματα καλεῖν γεωμετρικὰ εἰώθασιν, ὡς χρησιμεύοντα εἰς δεῖξιν τῆ γεωμετρικῶν προβλημάτων. Εὐθεῖα δὲ λόγος τότε λέγεται, ὅταν ἡ σύγκρισις τῶ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τῶ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον γίνηται, οἷον πεπάρων ὄντων μεγεθῶν ἐν τῆ αὐτῆ λόγω, καὶ αβ γδ, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α, ἡγούμενον πρὸς τὸ β, ἑπόμενον, οὕτω τὸ γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ δ, ἑπόμενον· ἐὰν εἴπωμεν ὡς τὸ α, ἡγούμενον πρὸς τὸ γ, ἡγούμενον, οὕτως ἔχει καὶ τὸ β, ἑπόμενον πρὸς τὸ δ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὗτος Εὐθεῖα λέγεται· ἀλλάττεται γὰρ ἡ τῆ ὅρων θέσις. ὅτι δὲ πέπερα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται ἐν τῆ ιϛ′: τῶ παρόντος προτάσει.

Eucl. Lib. 5. Fig. 9.



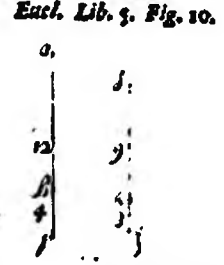
ΙΔ′: Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τῶ ἑπομένου, ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον.

Ἐπὶ τῶ αὐτῶ ὑποδείγματος καὶ τοῦτο τὸ θεώρημα τῶ λόγω εἴδος ἀναπτύσσεται· ἐπεί γάρ ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς δ, καὶ τοῦτων αὐτῶν πρὸς ἄλλα ἀναφορὰν, ἐὰν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ δ, πρὸς τὸ γ, τὸ β, πρὸς τὸ α, Ἀνάπαλιν λόγος λέγεται· ἀναποδίζει γάρ πως ἡ ἀναλογία. ὅτι δὲ πέπερα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσονται, δηλωθήσεται ἐν τῆ πορίσματι τῆς δ′: τῶ παρόντος.

ΙΕ′: Σωὺθεσις λόγω ἐστὶ λῆψις τῶ ἡγουμένου μετὰ τῶ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

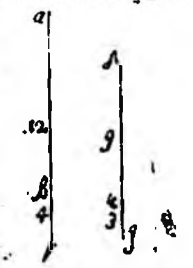
Τρίτον τινὶ τῶ λόγω εἶδος, ὃ εἰς ἀνάπτυξιν ἔσωσαν ἐν τῆ αὐτῆ λόγω πέπερα μεγέθη τὰ αβ, βγ, καὶ δε, εζ· καὶ ἐπεί, κατὰ τοῦτο ὑπόθεσιν, ἔστιν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βγ, οὕτω τὸ δε, πρὸς τὸ εζ· ἐὰν οὖν συνάπτοντες τὸ αβ, τῆ βγ, καὶ τὸ δε, τῆ εζ, ἐπωμεν, ὡς τὸ ὅλον αγ, ἡγούμενον δηλαδὴ καὶ ἑπόμενον ὡς εἶ, πρὸς τὸ βγ, ἑπόμενον, οὕτω καὶ ὅλον τὸ δζ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον ὡς εἶ, πρὸς τὸ εζ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὗτος Σωὺθεσις λέγεται, συντίθενται γὰρ ἀλλήλοις τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ πέπερα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ συνθέσει ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται προτάσει ιή: τῶ παρόντος.

Eucl. Lib. 5. Fig. 10.



Ις': Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἡ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος, καὶ τὸ πάρτον τοῦτ' ἐπὶ τοῦ λόγου εἶδος ἀναπτύσσεται. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, ἔστι παύτως τοῦ μεὶ α γ, ἡ- Eucl. Lib. 5. Fig. 11.
γουμένου ὑπεροχὴ, ἡ ὑπερέχει τοῦ β γ, ἑπομένου, τὸ α β, μέγεθος· τοῦ δὲ δ ζ, ἡγουμένου, ἔστιν ὁμοίως ὑπεροχὴ, ἡ ὑπερέχει τοῦ ε ζ, ἑπομένου, τὸ δ ε, μέγεθος. ἐαν οὖν διαιρουῦτις εἴπωμεν, ὡς τὸ α β, ὑπεροχὴ, πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ε, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὗτος Διαίρισις λέγεται· διαιρεῖται γὰρ τὸ μεγέθη. ὅτι δὲ παραπλησίως μεγέθη ἐν συνθέσει ἀνάλογον ὄντα, καὶ διαιρέσει ἀνάλογον ἔσονται, ἀποδείξομεν προπόσει ιζ'.



ΙΖ': Ἀντιστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἡ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος, ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον· ἐαν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ α β, ὑπεροχὴν, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ δ ε, ὑπεροχὴν, ἡ λῆψις αὕτη, Ἀντιστροφὴ λόγου λέγεται· ἀντιστρέφει γάρ πως τὸ ἡγούμενον πρὸς ἑαυτό. ὅτι δὲ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἀντιστροφὴ ἀνάλογον ἔσονται, δείξομεν ἐν τῷ πορίσματι τῆς ιθ': τοῦ παρόντος.

ΙΗ': Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, ἐν ἑνὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. καὶ ἄλλως. λῆψις τῆς ἄκρων κατ' ὑπεξαίρεσιν τῆς μέσων.

Ἴνα δὲ ᾖ τὸ ἔσχατον τοῦτ' εἶδος, τὸ Δι' ἴσου, φημὶ, διὰ παραδείγματος, ὡς ἐν τοῖς πρὸ αὐτοῦ ἀναπτυχθῇ, ἔστωσαν πλείω, ἢ δύο μεγέθη τὰ α β γ, ἕτερα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, σὺν δύο λαμβανόμενα, ἐν ἑνὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. τοῦτον οὖν ὄντων τῶν μεγεθῶν, ἐαν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ γ, ἔσχατον, οὕτω τὸ δ, πρῶτον πρὸς τὸ ζ, ἔσχατον, ὑπεξαιρουῦτις τὰ μέσα, ἡ λῆψις αὕτη, Δι' ἴσου λόγος λέγεται. διὰ τοῦτο δέ ἐστι,

Eucl. Lib. 5. Fig. 12.

καὶ πλείονα ἐστὶ τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ πλείονα μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σοὶ δύο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἀπάλογον ἔσονται, δεικθήσεται προπόσει κβ'. τῦ παρόντος.

Τίνα τὰ ἴδια ἑκάστου εἴδους τῦ ἐν μεγέθεσι λόγου.

Ὥσπερ ἐπειδὴ γνῶσίς ἐστι τῶν ὁρισμῶν ἑκάστου οἰδείαι, ὅπως καὶ τὰ ἑκάστου ἴδια καὶ πάθη ἐφικτὴν ἀκριβῆ διδασκαλίαν καθέξειν. Μαθόντες δὲ καὶ ἡμεῖς τὸν ὁρισμὸν ἑκάστου Εἴδους τῦ ἐν τοῖς μεγέθεσι Λόγου, φέρε δὴ καὶ τὰ πάθη τούτων καὶ ἴδια διὰ βραχέων ἐκθηλώσωμεν. Τῦ μὲν δὴ α': Εἴδους, δηλ: τῦ Ἐναλλὰξ λόγου, ἴδιον, τὸ τὰ πέσαρα μεγέθη, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον τῦ αὐτῦ γένους εἶναι. εἰγὰρ ἐστὶν ὡσι γένος, δὸς εἰπεῖν, τὰ δύο μὲν γραμμαὶ, τὰ δὲ λοιπὰ δύο, ἐπιφάνειαι, καὶ ἔ, ὡς γραμμὴ πρὸς γραμμὴν, οὕτως ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν, ἐναλλὰξ μέσοι δὲ ἔσαι, ὡς γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν, οὕτω γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν. γραμμὴ γὰρ καὶ ἐπιφάνεια ἐπρεγενῆ εἰσι, πῶ δὲ ἐπρεγενῶν λόγος δὲ ἔστι, πῶ τὸν γ': Ὅρον.

Τῦ δὲ δὶς πέρα, τοῦτ' ἔστι τῦ Ἀνάπαλιν λόγου, τὸ τὰ πέσαρα μεγέθη καὶ ὁμογενῆ εἶναι, καὶ ἐπρεγενῆ, καὶ γὰρ τὰ μὲν δύο αβ, οὗτοι, γραμμαὶ ὦσι, τὰ δὲ δύο γ δ, δὶς πέρα ἐπιφάνειαι, ἢ ὅ, τι ἂν ἄλλο μέγεθος. ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ α, γραμμὴ πρὸς γραμμὴν τὴν β. οὕτως ἡ γ, ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν τὴν δ, ἢ ὅ, τι ἂν ἄλλο μέγεθος πρὸς ὅ, τι ἂν ἄλλο, ὑγιῶς πάντως συναχθήσεται καὶ Ἀνάπαλιν, ὡς ἡ β, γραμμὴ, ἡ ἑπομένη πρότερον λόγον ἔχουσα, πρὸς γραμμὴν τὴν α, αὖτὶ ἡγουμένης πρότερον λαμβανομένην, οὕτως ἡ δ, ἐπιφάνεια, ἢ ὡς ἑπόμενον πρότερον λαμβανομένη, πρὸς τὴν γ, ἐπιφάνειαν, τὴν ὡς ἡγούμενον πρότερον λαμβανομένην.

Τῦ δὲ τρίτου δὲ, τῦ καὶ Συνθέσιν δηλον: λόγου ἴδιον, τὸ καὶ τὰ πέσαρα μεγέθη ὁμογενῆ τε εἶναι καὶ ἐπρεγενῆ, ὅπερ καὶ τῦ δὶς πέρα, καὶ τὸ τὴν σύγκρισιν καὶ ἄλλως πως δέχεσθαι. ὅτι μὲν γὰρ καὶ ἐν τοῖς ἐπρεγενέσιν ὁ Eucl. Lib. 5. Fig. 13.

κατὰ Σύνθεσιν εὑρίσκεται Λόγος, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ σύνθεσις ἐν τοῖς πρώτοις δύο μεγέθεσι, καὶ ἐν τοῖς δὶς πέρασις χωρὶς γίγνεται, μὴδ' ἔχει τινὰ σύγκρισιν, διὰ τῆς συνθέσεως, τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς τὰ δὶς πέρα, ἀλλ' ὥσπερ πρὸ τῆς συνθέσεως πρὸς ἄλληλα χωρὶς παρέβαλλοντο, οὕτω πρῶτα καὶ δὶς πέρα μεγέθη, ὅπως καὶ μὴ τὴν συνθέσιν ἰδίαν κωλύσει, τὰ μὲν πρότερα ἑνὸς εἶναι γένους, φέρ' εἰπεῖν, γραμμὰς, τὰ δὲ δὶς πέρα ἑτέρου, δὸς εἰπεῖν ἐπιφανείας. ὅτι δὲ καὶ ἄλλως πως τὴν σύγκρισιν δέχεται, μὴ χαλεπὸν συναγαγεῖν. ἢ γὰρ δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἡγούμενον. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α β, ἡγούμενον πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ε, ἡγούμενον πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, οὐδὲν κωλύει εἰπεῖν,

καὶ

καὶ ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον, ὡς ἓν, πρὸς τὸ α β, ἡγούμενον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον πρὸς τὸ δ ε, ἡγούμενον. ἢ δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου, οἷον ὡς τὸ β γ, ἑπόμενον τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ α γ, ἡγούμενον ἅμα καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν, οὕτω τὸ ε ζ, ἑπόμενον τῶν δευτέρων ὅρων πρὸς τὸ δ ζ, ἡγούμενον ὁμοῦ καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν. ἢ πλαγιαίως ἔξεστι λαβεῖν τὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου. οἷον ὡς τὸ α β, ἡγούμενον τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ α γ, ἡγούμενον ὁμοῦ καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν, οὕτω τὸ δ ε, ἡγούμενον τῶν δευτέρων ὅρων πρὸς τὸ δ ζ, ἐξ ἡγουμένου καὶ ἑπομένου τῶν αὐτῶν συγκείμενον.

Τοῦ δὲ πάρτου, δηλον: τοῦ κατὰ Διαίρεσιν λόγου, καὶ τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου γένους ἅμφω τὰς συζυγίας εἶναι, δι' ὧν ἀσυπέρω ἔφημεν λόγους. καὶ τὸ τῶν συγκειμένων καὶ ἄλλως πως δύνασθαι, ὅπερ καὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ. Ἔστω γὰρ ἐπὶ τοῦ ἀσυμπέρω παραδείγμ: συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ α β γ, δ ε ζ, τοιοῦτον ὡς τὸ α γ, πρὸς τὸ α β, τὸ δ ζ, πρὸς τὸ δ ε. καὶ ἐναλλὰξ, διαιρόντι, ὡς τὸ β γ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ α β, ἑπόμενον, οὕτω τὸ ε ζ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ δ ε, ἑπόμενον. δυνάμεθα εἰπεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ α β, ἑπόμενον πρὸς τὸ β γ, ὑπεροχὴν, οὕτω τὸ δ ε, ἑπόμενον πρὸς τὸ ε ζ, ὑπεροχήν. ὅπερ δὲ ἔφημεν γίγνεσθαι, ἵνα τὸ ἡγούμενον ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου, τοῦτο γενέσθαι δυνατὸν, καὶ ὅτι τὸ ἑπόμενον ὑπερέχει τοῦ ἡγουμένου. ὥσπερ γὰρ ἐν ἐκείνοις, πρῶτον μὲν ἐλαμβάνετο ἡ τοῦ ἡγουμένου ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἑπόμενον, καὶ δι' τῶν δευτέρων ἀναλογίαν, τὸ ἑπόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, οὕτω καὶ νῦν ἔστιν, πρῶτον μὲν ἔξεστι λαβεῖν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ, τὸ ἡγούμενον πρὸς τὴν ὑπεροχήν.

Τοῦ δὲ πέμπτου, τοῦ κατ' Ἀντιστροφὴν δηλον: λόγου, ὁμοίως τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου γένους εἶναι ἅμφω τὰς συζυγίας τῶν μεγεθῶν. ἐπὰν δὲ τὸ ἑπόμενον ὑπερέχῃ τοῦ ἡγουμένου, δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἑπόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἢ ὑπερέχει τοῦ ἡγουμένου, ὥστε εἶναι τὴν τοιαύτην ἀντιστροφὴν, λῆψιν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἢ ὑπερέχει τοῦ ἡγουμένου.

Τοῦ ἕκτου δὲ καὶ πολλαχῶς, δηλον: τοῦ Δι' ἴσου λόγου, τὰ πρότερα καὶ ὕστερα μεγέθη τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου εἶναι γένους. ἐπεὶ δὲ ὁ δι' ἴσου λόγος, λῆψίς ἐστι τῶν ἄκρων κατ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων, ὥσπερ λαμβάνομεν τὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, οὕτω δυνατὸν λαβεῖν καὶ τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τὸν Ἀνάπαλιν λόγον.

ΙΘ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ἡ μὲν, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ἡ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

Κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν ταῖς πρώταις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν ταῖς δευτέραις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν ταῖς πρώταις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν ταῖς δευτέραις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἄλλο τι.

Ὥσπερ ἐν τοῖς ἀνωτέρω πρότερον τὸν λόγον τῆς Ἀναλογίας, ὡς μέρος ὅλου, οὕτω κατανοῆσαι προέτεινε τὰ τοῦ λόγου εἴδη τῶν τῆς Ἀναλογίας εἰδῶν. δύο δή τὰ τῆς Ἀναλογίας εἴδη, ἡ Τεταγμένη δηλ. Ἀναλογία καὶ ἡ Τεταραγμένη. ἔστι δὴ Τεταγμένη μὲν, ὅταν ἡ πρώτη, ἢν τὰ α: μιγέντα πρὸς ἄλλα ἔχει, τὸν αὐτὸν ταὐτῷ καὶ τὰ β': φυλάττωσι. Τεταραγμένη δή, ὅταν τὸν ἐν ταῖς πρώταις μιγέντοιν πρώτην, τὰ β': μεταλλάττει. Ἔστωσαν γὰρ πάντα α β γ, δ ε ζ, καὶ η θ ι, κ λ μ, ἀλλὰ μὲν οὖν ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ἡ Ἀναλογία αὕτη Τεταγμένη ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ι, καὶ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ κ, τὸ λ, πρὸς τὸ μ, ἡ Ἀναλογία αὕτη Τεταραγμένη ἐστίν. ἴδιον δὲ ἀμφοῖν τούτοιν πρότερα, καὶ ὕστερα μιγέντα, καὶ ὁμώνυμα εἶναι, καὶ ἑπόμενα. εἰ γὰρ τὰ πρῶτα γραμμαὶ, φαίη εἰπεῖν, ὅσαι, τὰ δὲ δεύτερα ἐπιφάνειαι, οὐδὲν κωλύσει τὸν ἀναλογίαν γενέσθαι. ἔτι δὲ καὶ τὸν Δι' ἴσου λόγον ἐκεῖνα δέχεται. ἔστι δὲ τοῦθ' οὕτως ἔχει, δειχθήσεται προτάσει κβ': καὶ γ': καὶ ἄλλαις. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων διασαφήσεως ἅλις καὶ ταῦτα. ἑπόμενον δ' ἐστὶν ἄρασθαι καὶ τῆς τῶν προτάσεων θεωρίας.

Ἔστωσαν ἄδην ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, τὰ α, β, γ, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τοσοῦτον ὡς τὸ α, πρὸς τὸ δ, τὸ β, πρὸς τὸ ε, τὸ γ, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ δ, οὕτω τὰ α, β, γ, πρὸς

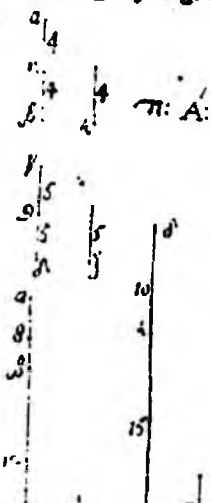
Eucl. Lib. 5. Fig. 14.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τοῦ μεγεθοῦς ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τοῦ πάντων.

πρὸς τὸ ι, ζ. ἐπεὶ γὰρ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α β, τοῦ ι, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ γ δ, τοῦ ζ. διῃρημένου τοῦ μὲν α β, εἰς τὰ ἴσα τῷ ι, καὶ τὸ κ. τοῦ δὲ γ δ, εἰς τὰ ἴσα τῷ ζ, καὶ τὸ Θ, παύσεται γὰ τὸ πλῆθος τοῦ α κ, κ β, ἴσον ἐστὶ τῷ πλήθει τοῦ γ Θ, Θ δ. ἀλλὰ τὸ μὲν α κ, ἴσον γέγονε τῷ ι, τὸ δὲ γ Θ, τῷ ζ, ἄρα ἰσάκις ἐστὶν καὶ σωαμφότερα τὰ α κ, γ Θ, σωαμφοτέροις τοῖς ι, ζ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι καὶ τὰ κ β, Θ δ, ἰσάκις ἐστὶ τοῖς αὐτοῖς ι, ζ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ α β, ἴσα τῷ ι, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τοῖς α β, γ δ, ἴσα τοῖς ι, ζ. καὶ ἐπομένως ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α β, τοῦ ι, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὰ α β, γ δ, τῷ ι, ζ. ὡς τὸ α β, ἄρα πρὸς τὸ ι, οὕτω καὶ τὰ α β, γ δ, πρὸς τὰ ι, ζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 5. Fig. 15.



Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ α β, δευτέρου τοῦ γ, καὶ τρίτον τὸ δ ε, τετάρτου τοῦ Θ, ἰσάκις ἔστωσαν πολλαπλάσια, ἔστι δὴ καὶ πέμπτον τὸ β ζ, δευτέρου τοῦ γ, καὶ ἕκτον τὸ ε ζ, τετάρτου τοῦ Θ. λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δηλονότι τὸ α ζ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τοῦ γ, δευτέρου, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον, ὅπερ τὸ δ ζ, τοῦ Θ, τετάρτου. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α β, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ γ, καὶ τὸ δ ε, τοῦ Θ, παύσεται γὰ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ α β, ἴσα τῷ γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ δ ε, ἴσα τῷ Θ. ὡσαύτως καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ β ζ, ἴσα τῷ γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ε ζ, ἴσα τῷ Θ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ α ζ, ἴσα τῷ γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν ὅλῳ τῷ δ ζ, ἴσα τῷ Θ. ὁσαπλάσιον ἄρα, τὸ α ζ, τοῦ γ, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ δ ζ, τοῦ Θ. ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, καὶ τὰ ἑξῆς.

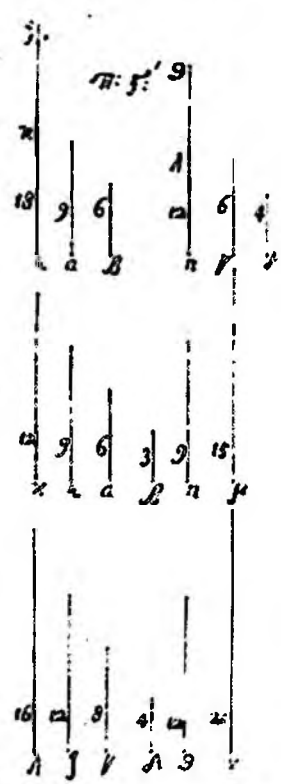
Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τοῦ λημφθέντος ἑκατέρου ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ α, δευτέρου τοῦ β, καὶ τρίτον τὸ γ, τετάρτου τοῦ δ, ἰσάκις ἔστω πολ.

πολλαπλάσιον. ληφθήσεται δὴ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν μὲν α, τὸ ε ζ, τῶν δὲ γ, τὸ η θ. Λέγω, ὅτι καὶ εἰ δὶ ἴσου, τὸ μὲν ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ β, τὸ δὲ η θ, τοῦ δ. Ἐπεὶ γὰρ τῶν μὲν α, ἰσάκις εἴληπται πολλαπλάσιον τὸ ε ζ, τοῦ δὲ γ, τὸ η θ, καίπερ διαιρεθέντες τὰ μὲν ε ζ, εἰς τὰ ἴσα τῷ α, τὰ ε κ, κ ζ, τὰ δὲ η θ, εἰς τὰ ἴσα τῷ γ, τὰ η λ, λ θ, ἰσός ἐστιν ὁ ἀριθμὸς τῷ ε κ, κ ζ, τῷ ἀριθμῷ τῷ η λ, λ θ. ἀλλὰ τὸ μὲν ε κ, ἴσον ἐστὶ τῷ α, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ δὲ η λ, τῷ γ. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν α, τοῦ β, τὸ δὲ γ, τοῦ δ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, ἄρα καὶ τὸ ε κ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τοῦ β, καὶ τὸ η λ, τοῦ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ κ ζ, τοῦ β, καὶ τὸ λ θ, τοῦ δ. Ἔστω δὴ πρώτου τὸ ε κ, δευτέρου τοῦ β, ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ η λ, τετάρτου τοῦ δ. πέμπτον δὲ τὸ κ ζ, καὶ ἕκτον τὸ λ θ, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν β, καὶ δ. καὶ συνῃρήσθω ἄρα πρώτου καὶ πέμπτου τὸ ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ β, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ η θ, τετάρτου τοῦ δ, καὶ τοῖς αὐτοῖς. Ἐὰν ἄρα πρώτου δευτέρου καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 5. Fig. 12.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τὸν τε πρῶτον καὶ τρίτον, πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τὸν δεύτερον καὶ τέταρτον κατὰ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα καταλλήλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. Εἰλήφθωσαν δὴ τῶν μὲν α, γ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ε, ζ, τῶν δὲ β, δ, τὰ η θ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ν, οὕτως ἐστὶ τὸ ζ, πρὸς τὸ θ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν ε ζ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ, τῶν δὲ η θ, τὰ μ ν, καὶ ἐπεὶ τὰ ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α γ, εἴληπται δὲ τῶν ε ζ, πρώτου δὸς εἶπεῖν καὶ τρίτου, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ, καίπερ γε καὶ τὸ κ, τοῦ α, δευτέρου ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τὸ λ, τοῦ γ, τετάρτου, καὶ τοῖς αὐτοῖς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ β. καὶ τὸ ν, τοῦ δ. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρῶτον, καὶ τοῖς δ: ὑπόκειται, πρὸς τὸ β, δεύτερον, οὕτως καὶ τὸ γ, τρίτον πρὸς τὸ δ, τέταρτον, καὶ τῶν μὲν α γ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ κ λ, τῶν δὲ β δ, τὰ μ ν, εἰ ἄρα τὸ κ, ὑπερέχει τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ

παύτως ἡ τὸ λ, τῷ ρ, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον, καὶ τὸ πόρισμα τῷ ε· ὅρα. ἐλλιπεῖται δὲ τὰ μὲν κ λ, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ε ζ, τὰ δὲ μ ν, τῶν η Θ· ἄρα, καὶ τὸν αὐτὸν ὅρον, ὡς τὸ ε, τρίτον τρὸς τὸ η, δεύτερον, οὕτω ἡ τὸ ζ, τέταρτον τρὸς τὸ Θ, πάρτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ὅτι δὲ ἡ αὐάπαλιν ὡς τὸ κ, τρὸς τὸ ε, τὸ Θ, τρὸς τὸ ζ, φανερόν· ὥσπερ γὰρ, εἰ τὸ κ, ὑπερέχει τῷ μ, ὑπερέχει ἡ τὸ λ, τῷ ν, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον, ἐλλιπές· οὕτως ἔσται ἐλλιπὲς εἰπεῖν καὶ αὐάπαλιν· εἰ δηλονότι τὸ μ, ὑπερέχει τῷ κ, ὑπερέχει ἡ τὸ ν, τῷ λ, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, ἡ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος ἤδη τὸ α β, μεγέθους τοῦ γ δ, ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ α ε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν ε β, τοῦ λοιποῦ ζ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὅπερ ὅλον τὸ α β, ὅλου τοῦ γ δ. ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ ε β, τοῦ γ η. *Euc. Lib. 5. Fig. 17.*

καὶ ἐπεὶ τρώτου ἄρα τοῦ παράντος, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ α β, τοῦ η ζ. ἀλλὰ καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιον ὑπόκειται καὶ τὸ α β, τοῦ γ δ· ἄρα τὸ α β, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν η ζ, γ δ· ὥστε τὸ η ζ, γ δ, ἰσάκις ἐστί· κοινοῦ δὲ τοῦ γ ζ, ἀφαιρεθέντος, ὑπολείπεται τὸ γ η, ἴσον τῇ ζ δ· ἀλλὰ τοῦ γ η, ἰσάκις πολλαπλάσιον γέγονε τὸ ε β, ὅπερ τὸ α ε, τοῦ γ ζ· ἄρα τὸ αὐτὸ ε β, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ζ δ, ὅπερ τὸ α ε, τοῦ γ ζ. ὑπόκειτο δὲ τὸ α ε, τοῦ γ ζ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ α β, ὅλον, τοῦ γ δ, ὅλου· ἄρα καὶ τὸ ε β, τοῦ ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστιν, ὅπερ τὸ ὅλον α β, τοῦ ὅλου γ δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

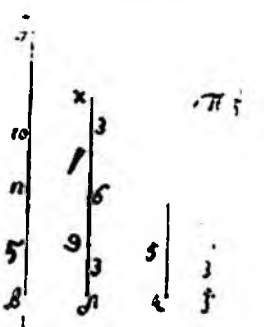
Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο ἤδη μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἰσάκις ἔστωσαν πολλαπλάσια τῶν ε, ζ· καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ α η, γ Θ, ἰσάκις ἔστωσαν καὶ αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν ε, ζ. Λέγω,

ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α β, θ δ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ε, ζ, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. Ἔστω δὴ τὸ α β, ἴσον τῷ ε. δείκνυμι, ὅτι καὶ τὸ θ δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζ. γεγράφω γὰρ τῷ ζ, ἴσον τὸ γ κ. καὶ ἐπεὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α υ, τοῦ ε, ποσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ γ θ, τοῦ ζ. ἴσον δὲ τὸ α β, τῷ ε, καὶ τὸ γ κ, τῷ ζ, ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ α β, ὅλου τοῦ ε, ποσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ κ θ, ὅλον τοῦ ζ. ὁσαπλάσιον δέ ἐστι τὸ α β, τοῦ ε, ποσαπλάσιον ὑπόκειται καὶ τὸ γ δ, τοῦ ζ. ἑκάτερον ἄρα τῶν κ θ, γ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ ζ. καὶ ἐπομένως τὸ κ θ, ἴσόν ἐστι τῷ γ δ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρημένου τοῦ γ θ, ἐγκαταλείπεται τὸ κ γ, ἴσον τῷ θ δ. τὸ δὲ κ γ, ἴσον γέγονε τῷ ζ, ἄρα καὶ τὸ θ δ, ἴσόν ἐστι τῷ αὐτῷ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ α β, τοῦ ε, ποσαπλάσιον ἔσται καὶ τὸ θ δ, τοῦ ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 5. Fig. 18.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστωσαν δὴ ἴσα μεγέθη τὰ α β. καὶ ἄλλο, ὁ ἔτυχε τὸ γ. Λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν α β, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν α β, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ δ ε, τοῦ δὲ γ, ἄλλο, ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὰ α β, ἰσά ἐστι, καὶ τὰ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια τὰ δ ε, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ, πολλαπλάσιον τοῦ γ. εἰ ἄρα τὸ δ, ὑπερέχει τοῦ ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ ε, τοῦ αὐτοῦ ζ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε, καὶ τὸν ε: ὅρων, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, ἔχει καὶ τὸ β, πρὸς τὸ αὐτὸ γ. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. εἰ γὰρ τὸ ζ, ὑπερέχει τοῦ δ, ὑπερέξει καὶ τοῦ ε, κἂν, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτό, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μεῖζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μεῖζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

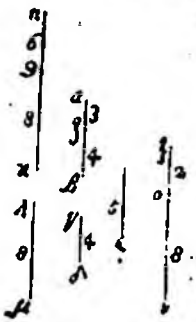
Ἔστωσαν δὴ ἄνισα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἄλλο δὲ, ὁ ἔτυχε τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ μεῖζον α β, πρὸς τὸ ε, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον γ δ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε. Ἀφῃρήσθω γὰρ παρὰ τὸ α β, μεῖζονος τὸ ζ β, ἴσον τῷ γ δ, ἐλάττονι.

καὶ ἐπεὶ

ἡ ἐπεὶ τὸ α β, ε, ὁμογενῆ εἰσι, πολλαπλασιαζόμενον τὸν ὑπερέχον ὅρον τὸ παρόντος, τὸ ἔλαττον τὸν α ζ, ζ β, δυνατὸν πολλαπλασιαζόμενον τὸν ε, ὑπερέχειν. Ἔστω πρῶτον τὸ α ζ, ἔλαττον τοῦ ζ β. καὶ πολλαπλασιαθὲν ἀρχὴς οὗ τὸ γενόμενον, μεῖζον γενέσθω τοῦ ε, καὶ ἔστω τὸ η Θ. ὁσαπλάσιον δὲ τὸ η Θ, τοῦ α ζ, τοσαυταπλάσιον γενέσθω καὶ τὸ Θ κ, τοῦ ζ β, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. πολλαπλασιαθὲν δὲ καὶ τὸ ε, ἀρχὴς ἃ γενέσθω τὸ ν ξ, πρώτως ὑπερέχον τοῦ λ μ, (λέγεται δὲ τὸ ν ξ, πρώτως ὑπερέχειν τοῦ λ μ, ὅταν μὴ ὑπερέχῃ τοῦ αὐτοῦ λ μ, μείζονι τοῦ ε, αὕτη τὸ ο ξ, μὴ εἶναι μεῖζον τοῦ ε.) εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ν ξ, τὸ ν ο, ἴσον τῷ λ μ. Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ η Θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ Θ κ, τοῦ ζ β. ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ η Θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ η κ, τοῦ α β, καὶ τῶν ἀ: τοῦ παρόντος. ὁσαπλάσιον δὲ ἐστὶ τὸ η Θ, τοῦ α ζ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ, ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ η κ, τοῦ α β, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ Θ κ, τοῦ ζ β, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ, τὸ δὲ ζ β, ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ, παντὸς γὰρ τὸ Θ κ, ἴσον ἐστὶ τῷ λ μ· ἀλλὰ τὸ λ μ, ἴσον ἐστὶ τῷ ν ο, ἄρα καὶ τὸ Θ κ, ἴσον ἐστὶ τῷ ν ο. γέγονε δὲ τοῦ μὲν η Θ, μεῖζον τοῦ ε, τὸ δὲ ξ ο, οὐκ ἔστι μεῖζον τοῦ αὐτοῦ ε. προσειλήφθω ἄρα τοῖς Θ κ, ο ν, ἴσοις μεγέθεσι τῷ η Θ, ξ ο, τὸ η κ, ἐφ᾽ ᾧ τὸ η Θ, μεῖζον προσέθηται, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ, ἐφ᾽ ᾧ τὸ ξ ο, ἔλαττον προσέθηται· τὸ δὲ λ μ, οὐ μόνον οὐκ ὑπερέχει τοῦ ν ξ. ἀλλὰ δὲ καὶ ἔλαττον αὐτοῦ ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν η κ, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστι τοῦ α β, τὸ δὲ λ μ, τοῦ γ δ, καὶ τὸ ν ξ, πολλαπλάσιον τοῦ ε· τὸ α β, ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ ε, ἤπερ τὸ γ δ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε, καὶ τὸν ζ: ὅρον τοῦ παρόντος.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ γ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ α β. τῷ αὐτῷ γὰρ κατασκευασθέντων δειχθήσεται, κατὰ τὰ αὐτὰ, τὸ ξ ν, πολλαπλάσιον ὂν τοῦ ε, ὑπερέχειν τοῦ λ μ, καὶ μὴ ὑπερέχειν τοῦ η κ, ὧν τὸ μὲν λ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ γ δ. τὸ δὲ η κ, τοῦ α β.

Εἰδὴ τὸ ζ β, ἔλαττον ᾖ τοῦ α ζ. Ἐπεὶ τοῦ αὐτοῦ γενέσθω ἐστὶ τὸ ζ β, ε, πολλαπλασιαθὲν τὸ ζ β, χωρὶς, ἀρχὴς ἃ γενέσθω μεῖζον τοῦ ε, καὶ ἔστω τοῦτο, φέρε εἰπεῖν, τὸ Θ κ. ὁσαπλάσιον δὲ τοῦ γενέσθω τὸ Θ κ, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ η Θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. καὶ εἰλήφθω τὸ ν ξ, πολλαπλάσιον τοῦ ε, καὶ πρώτως ὑπερέχον τοῦ λ μ· καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ, δειχθήσεται τὸ μὲν η κ, ὑπερέχον τοῦ ξ ν· τὸ δὲ λ μ, μὴ ὑπερέχον τοῦ αὐτοῦ ξ ν, καὶ ὑπομειόνως τὸ α β, μείζονα λόγον ἔχειν πρὸς τὸ ε, ἤπερ τὸ γ δ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



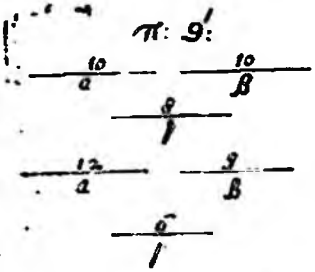
Euclid. Lib. 5. Fig. 19.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτωσαν τὰ α, β, τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ γ, μέγεθος, καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, β, ὁμοίως τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ α τῷ β ἐστὶν ἴσα. εἰ γὰρ μή, ἔσται τὸ ἓν μεῖζον· καὶ ᾧ τὸ α τῷ β, ἄνισα τὰ α, β, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὅπερ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β· ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ἴσα ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 5. Fig. 20.



Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Τῷ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἐλάττων ἐστίν.

Τῶν α, β, ἄνισα μεγεθῶν, τὸ μεὶν α, ἐχέτω μείζονα λόγον πρὸς τὸ γ, τὸ δὲ β, ἐλάττονα. Λέγω τὸ α, μεῖζον εἶναι τοῦ β. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴσον ἔσται τὸ α, τῷ β, ἢ ἔλαττον. ὅτι δὲ οὐδέτερον, δῆλον. εἰ γὰρ ἴσον ἦν τὸ α, τῷ β, τὸν αὐτὸν ἂν εἶχε λόγον ἑκάτερον τῶν α, β, πρὸς τὸ γ, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. οὐκ ἔστι δὲ ἔλαττον, ἐλάττονα λόγον εἶχε τὸ α, πρὸς τὸ γ, ἤπερ τὸ β, πρὸς τὸ αὐτὸ γ, ἔχει δὲ μείζονα, κατὰ τὰ ὑποδιδόμενα, ἄρα τὸ α, μεῖζόν ἐστι τοῦ β. Ἐχέτω δὲ πάλιν τὸ γ, μείζονα λόγον πρὸς τὸ β, ἤπερ πρὸς τὸ α. Λέγω πάλιν ὅτι τὸ β, ἔλασσόν ἐστι τοῦ α. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴσον ἔσται τὸ β, τῷ α, ἢ ἔλαττον. ὅτι δὲ οὐδέτερον δῆλον καὶ οὕτω. εἰ μεὶν γὰρ ἴσον, τὸν αὐτὸν ἂν εἶχε λόγον τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, β, καὶ τὰνάπαλιν· εἰ δὲ μεῖζον ἦν τὸ β, τοῦ α, τὸ γ, πρὸς τὸ α, μείζονα λόγον εἶχε, ἤπερ πρὸς τὸ β, κατὰ τὰ ἐν τῷ παράντες. ἔχει δὲ μείζονα μεὶν λόγον πρὸς τὸ β, ἐλάττονα δὲ πρὸς τὸ γ· τὸ β, ἄρα ἐλάττόν ἐστι τοῦ α. ὅπερ ἦν τὸ ὑποκείμενον.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστω δὴ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μεὶν α, γ, ε, ἁπλασίονες ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, Θ, κ. τῶν δὲ β, δ, ζ, ἑτερασίονες ἄλλα, ἃ ἔτυχε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ γ, πρὸς τὸ δ, παῖτες γε, κατὰ τὸν ὁ-

ὅρον

ὅρον τῶ παρόντος, εἰ τὸ τῶ α, ἑφάπτε ἰσάκις πολλαπλάσιον, δηλον: τὸ ν, ὑπερίχῃ τῶ λ, ὅπερ ἐστι τοῦ β, δι᾽ὑπερ ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὑπερίξει ἢ τὸ τῶ γ: δηλ: τὸ Θ, τῶ μ, ὅπερ ἐστι τοῦ δ: ἰσάκις πολλαπλ: κᾆν ἴσον, ἴσον. κᾆν ἔλασσον, ἔλασσον. Διὰ τὰ αὐτὰ ἐὰν τὸ Θ, ὑπερίχῃ τοῦ μ, ὑπερίξει ἢ τὸ ξ, τῶ ν, κᾆν ἴσον, ἴσον, κᾆν ἔλασσον, ἔλασσον. Α᾽λλ᾽ εἰ τὸ Θ, ὑπερίχῃ τῶ μ, ὑπερίξει, ὡς δέδεικται, ἢ τὸ ν, τοῦ λ, κᾆν ἴσον, ἴσον, ἢ τὰ ἑξῆς. ἄρα ἐὰν τὸ ν, ὑπερίχῃ τοῦ λ, ὑπερίχει ἢ τὸ ξ, τῶ ν, κᾆν ἴσον, ἴσον, κᾆν ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ ν, ἢ ξ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῆ α, ι, ἢ τὰ λ, ν, τῆ β, ζ. ἄρα ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ ι, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

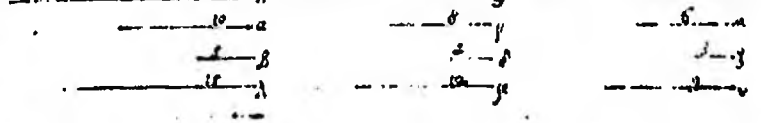
Eucl. Lib. 5. Fig. 21.

Πρότασις ΙΒ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἐστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ α, β, γ, δ, ε, ζ, μεγέθη ἀνάλογον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ, ἢ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἢ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὰ α, γ, ε, πρὸς τὰ β, δ, ζ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, Θ, κ. τῶν δὲ β, δ, ζ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ λ, μ, ν. ἢ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ γ, πρὸς τὸ δ, ἢ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ: ἄρα κᾆ τὸν ἑ: ὅρον, εἰ τὸ ν, ὑπερίχῃ τῶ λ, ὑπερίξει ἢ τὸ Θ, τῶ μ, ἢ τὸ κ, τῶ ν, κᾆν ἴσον ἴσον, κᾆν ἔλασσον ἔλασσον. ὥστε εἰ ὑπερίχῃ τὸ η, τῶ λ, ὑπερίξουσι ἢ τὰ η Θ κ, ὁμοῦ τῆ λ μ ν, ὁμοῦ, κᾆν ἴσον, ἴσα. κᾆν ἔλασσον, ἐλάσσονα. ἀλλὰ τὰ η, ἢ λ, πολλαπλάσιά ἐστι τῆ α β, ἑφάπτε δηλον: ἢ δέδεικται, τὰ δὲ η, Θ, κ, ἢ λ, μ, ν, τῶν α γ ε, ἢ β δ ζ, ἑξῆς δηλ: ἢ πέφηνε, ἄρα κᾆ τιὼ ά: τῶ παρόντος, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕτι ἢ τὰ α γ ε, πρὸς τὰ β δ ζ, κᾆ τὸν ἑ: ὅρον. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, ἢ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 22.



Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ε'αν πρώτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Ε'στω ἥδη ὡς πρῶτον τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, οὕτω τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. τὸ δὲ τρίτον γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ, μείζονα ἐχέτω λόγον, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἡγουμένων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ. τῶν δὲ ἑπομένων ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ β, δεύτερον, οὕτως ἐστὶ τὸ γ, τρίτον πρὸς τὸ δ, τέταρτον· καὶ τῶν μὲν α, γ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ. τῶν δὲ β, δ, τὰ λ, μ. πάντως ἐστὶ καὶ τὸ η, ὑπερέχῃ τοῦ θ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ, τοῦ μ, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων. Ε'πεὶ δὲ πάλιν τὸ γ, πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. τῶν δὲ γ δ, ἰσάκις εἴληπται πολλαπλάσια τὰ θ μ. τῶν δὲ ε ζ, τὰ κ ν. εἰ ἄρα τὸ θ, ὑπερέχει τοῦ μ, τὸ η, οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν, καὶ τὸν ζ'. ἔστιν, ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ θ, τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ η, τοῦ λ, ὡς δέδεικται· ἄρα εἰ ὑπερέχει καὶ τὸ η, τοῦ λ, τὸ η, οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν. κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα ζ'. ἔσται, τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ ὑποχιθέν.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ε'αν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον. καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

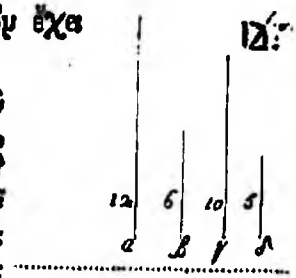
Πρῶτον ἥδε τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. τὸ δὲ α, τοῦ γ, μεῖζον ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ β, τοῦ δ, μεῖζον ἔσται. Ε'πεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστιν, ἴσον δέ, ὃ ἔτυχε τὸ β. πάντως ἐστὶ καὶ τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β, καὶ τοῦτο φανερόν. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὑπόκειται τὸ γ, πρὸς τὸ δ, ἄρα καὶ

αὐ-

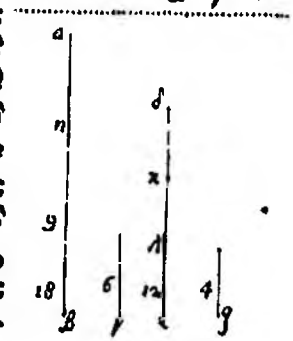
αὐτὸ γ, πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι, καὶ τῶν ι: τῶ παρ: ἄ- Eucl. Lib. 5. Fig. 24.
ρα τὸ δ, ἔλαττόν ἐστι τῶ β, καὶ ἀνάπαλιν τὸ β, μεῖζον τῶ δ. Ὁ-
μοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ
τὸ β, τῷ δ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς
δεύτερον, καὶ τὸ ἕξῆς.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Τὰ μέρη τῶις ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὴν αὐτὴν ἔχει λόγον, ληφθέντα καταλλήλα.

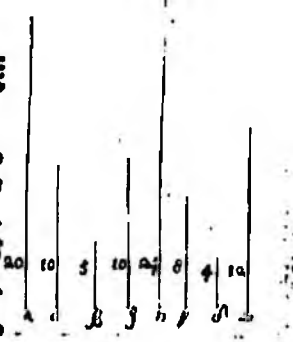


Ἐστωσαν ἤδη ἰσάκις πολλαπλάσια τὸ αβ, τῶ γ, καὶ τὸ δε, τῶ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ, τὸ αβ, πρὸς τὸ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ αβ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τῶ γ, καὶ τὸ δε, τῶ ζ, διῃρημένου ἄρα τῶ αβ, εἰς τὰ ἴσα τῷ γ, τὰ αη, ηθ, θβ. καὶ τῶ δε, εἰς τὰ ἴσα τῷ ζ, τὰ δκ, κλ, λε, ἴσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῷ αη, ηθ, θβ, τῷ πλήθει τῷ δκ, κλ, λε. ἀλλὰ τὰ αη, ηθ, θβ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ὅσπερ καὶ τὰ δκ, κλ, λε, ἄρα ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, οὕτως ἐστὶ τὸ ηθ, πρὸς τὸ κλ, καὶ τὸ θβ, πρὸς τὸ λε. καὶ ἔστιν ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, οὕτω τὰ αη, ηθ, θβ, πρὸς τὰ δκ, κλ, λε, διὰ τὸν πρώτην τῶ παρόντος. τὸ δὲ αη, ἴσόν ἐστι τῷ γ, καὶ τὸ δκ, τῷ ζ. ἄρα καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ, οὕτω τὰ αη, ηθ, θβ, ἤτοι τὸ αβ, πρὸς τὰ δκ, κλ, λε, δηλ: τὸ δε. τὰ μέρη ἄρα τῶις ὡσαύτως πολλαπλασίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.



Ἐστωσαν ἤδη τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, γδ, ἀνάλογον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ β, πρὸς τὸ δ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν αβ, γδ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ εζ, ηθ, τῶν δὲ γ δ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ κ λ. καὶ ἐπεὶ τὰ εζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν αβ, ἄρα καὶ τῶν ἀνωτέρω, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως ἐστὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡ-

σαύ-

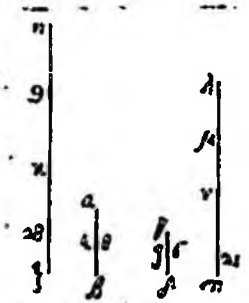
σαύτως δὴ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, τὸ ν, πρὸς τὸ Θ, ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ἐστὶ δὲ τὸ γ, πρὸς τὸ δ· ἄρα καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, τὸ ν, πρὸς τὸ Θ, καὶ τῶν ε ζ· τῶν πάντων ὡσαύτως. ὥστε καὶ τῶν ε δ': τῶν αὐτῶν, εἰ τὸ ε, πρῶτον ὑπερέχει τῷ ν, τελευτῷ, ὑπερέχει καὶ τὸ ζ, δεύτερον τῷ Θ, πέμπτῳ, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ ε, καὶ ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τοῦ α β, καὶ τὰ ν Θ, τοῦ γ δ· ἄρα καὶ τὸν ε: ὅρον τῶν παρ: ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, οὕτως ἐστὶ τὸ β, πρὸς τὸ δ. ὅπερ ὡδὶ τὸ ὑποκείμενον.

Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐκκείσθω γὰρ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ α β, β ε, γ δ, δ ζ, τουτέστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β ε, τὸ γ δ, πρὸς τὸ δ ζ. λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογόν ἐστιν, ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτω τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ν Θ, Θ κ, λ μ, μ ν, τῶν δὲ ε β, ζ δ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ κ ξ, ν π. ἐπεὶ οὖν τὸ ν Θ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ α ε, καὶ τὸ Θ κ, τοῦ ε β· παντὸς γε, καὶ τοῦ παρ: ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τὸ ν Θ, τοῦ α ε, καὶ τὸ ν κ, τοῦ α β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ ζ, καὶ τὸ λ ν, τοῦ γ δ· τὸ δὲ ν Θ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ α ε, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ ζ, ἄρα καὶ τὸ ν κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ α β, καὶ τὸ λ ν, τοῦ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ τὸ Θ κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ ε β, καὶ τὸ μ ν, τοῦ ζ δ, ἀλλὰ καὶ τὸ κ ξ, τοῦ ε β, καὶ τὸ ν π, τοῦ ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ συντεθέντα ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ Θ ξ, τοῦ ε β, καὶ τὸ μ π, τοῦ ζ δ· ἀλλ' ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β ε, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ γ δ, πρὸς τὸ δ ζ, καὶ δι' α β, γ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ ν κ, λ ν, καὶ καὶ ε β, ζ δ, τὰ Θ ξ, μ π, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ν κ, τοῦ Θ ξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ ν, τοῦ μ π, καὶ τὸν ε: ὅρον, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. ὑπερέχέτω δὴ τὸ ν κ, τοῦ Θ ξ. κοινοῦ δὴ ἀφαιρημένου τοῦ Θ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν Θ, τοῦ κ ξ, ἀλλὰ δὴ εἰ ὑπερέχει τὸ ν κ, τοῦ Θ ξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ ν, τοῦ μ π, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ μ ν, ὑπερέχει καὶ τὸ λ μ, μεῖζον τοῦ ε π. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ᾖ τὸ ν Θ, τῷ κ ξ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ λ μ, τῷ ν π, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. ἀλλὰ τὰ ν Θ, λ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α ε, γ ζ, τὰ δὲ κ ξ, ν π, τῶν ε β, ζ δ· ἄρα καὶ τὸν ε: ὅρον, ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτως ἐστὶ τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 5. Fig. 25.



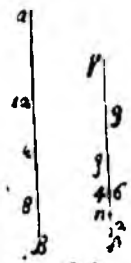
Πρό-

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συνθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Εἰ γὰρ ἔστιν ὡς τὸ α ε πρὸς τὸ ε β, οὕτως τὸ γ ζ πρὸς τὸ ζ δ· λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς τὸ δ ζ. εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β ε, οὕτως τὸ γ δ ἤτοι πρὸς ἔλασσον τοῦ δ ζ, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρὸς ἔλασσον τὸ η δ· καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη τὰ α β, β ε, γ δ, η δ, ἀνάλογόν ἐστι, πάντως καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογόν ἐστι, καὶ τῶν ἡγουμένων, ἄρα ὡς τὸ α ε πρὸς τὸ ε β, οὕτως ἐστὶ τὸ γ η πρὸς τὸ η δ, ὡς δὲ τὸ α ε πρὸς τὸ ε β, οὕτως καὶ τὸ γ ζ πρὸς τὸ ζ δ· ἄρα καὶ τὸ γ η πρὸς τὸ η δ, τὸ γ ζ πρὸς τὸ ζ δ· ἀλλὰ τὸ γ η πρείττων μείζων ἐστὶ τοῦ γ ζ, πρείττων ἄρα καὶ τὸ η δ ἀνάλογον μείζων ἐστὶ τοῦ ζ δ, πρείττων ἄρα καὶ τῶν ἐλασσόνων· ὅπερ ἄτοπον· ἄρα οὐκ ἔσται ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς ἔλασσον τοῦ δ ζ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· ἄρα ὡς τὸ α β πρὸς τὸ β ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς αὐτὸ τὸ δ ζ.

Euclid. Lib. 5. Fig. 25.

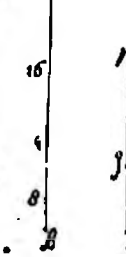


Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ α β πρὸς ὅλον τὸ γ δ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ α ε πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ γ ζ· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ε β πρὸς λοιπὸν τὸ ζ δ ἐστὶν, ὡς ὅλον τὸ α β πρὸς ὅλον τὸ γ δ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α β πρὸς τὸ γ δ, οὕτως τὸ α ε πρὸς τὸ γ ζ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ α β πρὸς τὸ α ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς τὸ γ ζ· καὶ τῶν ἡγουμένων· ὡς τὸ α β πρὸς τὸ α ε, οὕτως τὸ γ δ πρὸς τὸ γ ζ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ε β πρὸς λοιπὸν τὸ ζ δ ἐστὶν, ὡς ὅλον τὸ α β πρὸς ὅλον τὸ γ δ.

Euclid. Lib. 5. Fig. 27.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀντιστρέφοντι ἀνάλογον ἔσται· διηρημένων γὰρ τῶν α β, α ε, γ δ, γ ζ, ἀνάλογον, ὅτι εἶναι ὡς τὸ

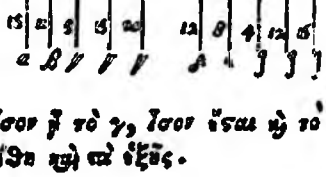
τὸ αβ, πρὸς τὸ αε, τὸ γδ, πρὸς τὸ γζ. ἔσται παίτως, καὶ τῶν ιε': τῶν παρόντων δὲ ἐναλλάξ, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, τὸ αε, πρὸς τὸ γζ, τουτέστιν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν· καὶ διὰ τῶν παρόντων, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζδ. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ εβ, τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τῶν ὑπεροχῶν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἑπόμενον. τοῦτο δὶ, Ἀνταπόδοσις λόγου ἐστὶ, καὶ τὸν ιζ': ὅρον τῶν παρόντων. Ἴσον δὲ, ὅτι μὲν ἀεί ἐστιν ὁ αὐτὸς λόγος τοῦ ἡγουμένου πρὸς τῶν ὑπεροχῶν, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, καὶ γὰρ ὁ τοῦ ἡγουμένου λόγος πρὸς τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιος ἢ, ὁ τοῦ αὐτοῦ ἡγουμένου πρὸς τῶν ὑπεροχῶν δυνατὸν εἶναι ἐπέρα εἴδει, ἐπιμερίζειν φησὶν εἶναι, ἃ ἐπιμερῆ.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ῥητὰ μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνὰ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὰ πρῶτα τῶν ῥητῶν μείζονα ᾖ, καὶ τὰ τέταρτα τῶν ἕκτων μείζονα ἔσται, καὶ ἴσα, ἴσα. καὶ ἐλάσσονα, ἐλάσσονα.

Ἐστωσαν ἤδη ῥητὰ μεγέθη τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, συνὰ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἔστω δὲ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ, μεῖζόν ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστι, παντὸς γὰρ τοῦ αὐτοῦ μείζονος ἔχει τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β. ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ ζ, πρὸς τὸ ε, ἀνάπαλιν, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ': ἔστι ἄρα, καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ ε, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ζ, πρὸς αὐτὸ τὸ ε. τὸ δ, ἄρα, τοῦ ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἐὰν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ δ, τῷ ζ. καὶ ἐλάσσον ἐλάσσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ ῥητὰ μεγέθη καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 28.



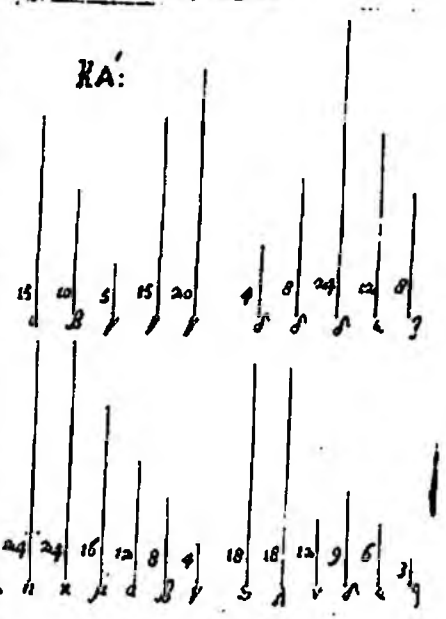
Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ῥητὰ μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, συνὰ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὰ πρῶτα τῶν ῥητῶν μείζονα ᾖ, καὶ τὰ τέταρτα τῶν ἕκτων μείζονα ἔσται. καὶ ἴσα, ἴσα. καὶ ἐλάσσονα, ἐλάσσονα.

Ἐστωσαν ἤδη μεγέθη ῥητὰ τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, συνὰ δύο καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ λαμβανόμενα. ἔστω δὲ παραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία,

γία,

γία, τοῦτ' ἐστιν ὡς μεσὸ τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. ἔστω δ' ἔτι καὶ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ, μεῖζον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστι, παντὸς γὰ τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἕστι καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ γ, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ δ, ἀναπαλιν, καὶ τὸ πόρισμα τοῦς δ': ἄρα τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ δ, καὶ τὸν ε: τοῦ παρόντος, τὸ ζ, ἄρα ἐλαττόν ἐστι τοῦ δ, καὶ τοσὸ ε: τοῦ αὐτοῦ, ὥστε τὸ δ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν τὸ α, ἴσον ᾖ τοῦ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ δ, τοῦ ζ. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστωσαν ὅσα μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τοῦτ' ἔστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α δ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ β ε, τὰ κ λ, καὶ τῶν γ ζ, τὰ μ ν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἔστι καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν α δ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ β ε, τὰ κ λ· παντὸς γὰ κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα καὶ τὸν ε: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ η, πρὸς τὸ κ, τὸ θ, πρὸς τὸ λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ κ, πρὸς τὸ μ, τὸ λ, πρὸς τὸ ν. ὥστε τὰ η κ μ, θ λ ν, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἄρα καὶ τὸν κ': τοῦ αὐτοῦ ἐὰν δι' ἴσου τὸ η, τοῦ μ, μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ θ, τοῦ ν, μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. τὰ δὲ η θ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τοῦ α δ, καὶ τὰ μ ν, τοῦ γ ζ. ἄρα, καὶ τὸν ε: ὅρον τὰ παρ: ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ γ, δεύτερον, οὕτω τὸ δ, τρίτον πρὸς τὸ ζ, τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ε'αν ᾖ ῥητὰ μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σοὺ δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ ἐν ἴσῳ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ε'στωσαν δύο ῥητὰ μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, σοὺ δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ε'στω δὲ ἡ αὐτῶν ἀναλογία τεταραγμένη, δηλ: ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, οὕτως τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. ἀλλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α β δ, ἰσάκις, πολλαπλάσια τὰ η θ κ, τῶν δὲ γ ε ζ, τὰ λ μ ν. καὶ ἐπεὶ τῶν μὲν α β, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ ε ζ, τὰ μ ν, ταύτως γε καὶ τοῦ ι ε: τὰ παρόντα, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ η, πρὸς τὸ θ. καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ὑπόκειται καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ· ἄρα, καὶ τοῦ ι α: τὰ αὐτὰ, καὶ ὡς τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. Πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, ταύτως γε καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ δ, τὸ γ, πρὸς τὸ ε, καὶ τοῦ ι ς': τὰ παρόντα. ἀλλὰ τῶν β δ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ θ κ, καὶ τῶν γ ε, τὰ λ μ, ἄρα καὶ τοῦ ι α: ὡς τὸ β, πρὸς τὸ δ, τὸ θ, πρὸς τὸ κ, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ε, τὸ λ, πρὸς τὸ μ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ δ, δέδεικται εἶναι καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ ε. ἄρα καὶ τοῦ ι α: τὰ αὐτὰ, καὶ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ κ, τὸ λ, πρὸς τὸ μ, οὕτως καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ λ, τὸ κ, πρὸς τὸ μ. ὡς δὲ τὸ κ, πρὸς τὸ θ, δέδεικται καὶ τὸ μ, πρὸς τὸ ν, ἄρα ἴσα μεγέθη τὰ κ θ λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ κ μ ν, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σοὺ δύο λαμβανόμενα, ἔστι δὲ ἡ αὐτῶν ἀναλογία παραγμένη· καὶ τοῦ κ α: ἄρα τὸ παρόντες, εἰ τὸ κ, ὑπερέχει τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ κ, τοῦ ν, καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον· ἄλλα τὸ μὲν κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α δ, τὸ δὲ λ ν, τῶν γ ζ. ἄρα, καὶ τοῦ ι: ὅρον τὸ αὐτὸ, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

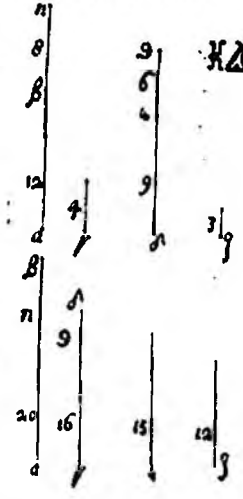
Euclid. Lib. 5. Fig. 30.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ἔστω γὰρ πρῶτον τὸ αβ, πρὸς δεύτερον τὸ γ, ὡς τὸ δε, τρίτον πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Ἔστω ἔτι καὶ πέμπτον τὸ βη, πρὸς δεύτερον τὸ γ, ὡς τὸ εϑ, ἕκτον πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, ἤτοι τὸ αη, πρὸς δεύτερον τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ δϑ, πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ βη, πρὸς τὸ γ, τὸ εϑ, πρὸς τὸ ζ. παπῶς γὰρ καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ βη, τὸ ζ, πρὸς τὸ εϑ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ'· τῶν παρόντων. ὡς δὲ τὸ αβ, πρὸς τὸ γ, ἐστι καὶ τὸ δε, πρὸς τὸ ζ. ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βη, τὸ δε, πρὸς τὸ εϑ, καὶ τοῦ ιβ': τῶν αὐτῶν. ὥστε καὶ συντεθέντα, ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ βη, οὕτως ἐστὶ τὸ δϑ, πρὸς τὸ εϑ, καπὶ τοῦ ιη': ἀλλ' ὡς τὸ βη, πρὸς τὸ γ, ἐστι καὶ τὸ εϑ, πρὸς τὸ ζ, ἄρα καὶ δι' ἴσου, καὶ τοῦ ιβ': ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ γ, τὸ δϑ, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 31.



Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν λοιπῶν δύο, μείζονα ἐστί.

Τέσσαρα ἤδη μεγέθη τὰ αβ, γ δ, ε, ζ, ἔστωσαν ἀνάλογον, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. καὶ ἔστω μέγιστον μὲν ἔστω τὸ αβ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ζ. Λέγω ὅτι αβ, ζ, μείζονα εἶναι τῶν γ δ, ε. γενέσθω γὰρ ἴσον τῷ ε, τὸ αη, τῷ ζ, τὸ γϑ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, καὶ τοῖς ε, ζ, ἴσα ἄλλα τὰ αη, γϑ, παπῶς γὰρ καὶ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γ δ, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ αη, πρὸς τὸ γϑ· καὶ ἐπομένως, καὶ τοῦ ιβ': τῶν παρόντων, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γ δ, τὸ νβ, πρὸς τὸ ϑ δ. τὸ δὲ αβ, μείζον ἐστὶ τοῦ γ δ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ηβ, τοῦ ϑ δ. ἀλλὰ τὸ μὲν αη, ἴσον ἐστὶ τῷ ε, τὸ δὲ γϑ, τῷ ζ. ἄρα τὰ αη, ζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς γϑ, ε. ἐὰν δὲ ἴσοις ἄνισα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, προστεθέντα ἄρα τοῖς μὲν αη, ζ, τοῦ ηβ, δὲ τοῖς γϑ, ε, τοῦ ϑ δ. δῆλον, ὅτι τὰ αβ, ζ, μείζονά ἐστι τῶν γ δ, ε. Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ

ΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

ΠΑραβαλὼν Εὐκλ: ἐν τῇ ἀρχῇ αὐτοῦ βιβλίῳ, πέμπτῳ ὄντι τῇ τάξει, ἀφὸς ἄλλα τὰ μεγέθη, καὶ τὰς ἐν αὐτοῖς χρήσεις τῶν ἐν ἀναλογίας ἀναπτύξας, καθ' ὅσον εἰς Στοιχείων λόγον, καὶ τὰ ἐν ἑκείνῳ συμβαίνουσι προβλήματα καὶ θεωρήματα, ἐπὶ τῶν παρόντος Ἔτους τὰ διάφορα τῶν χημάτων εἴδη ἀφὸς ἑαυτὰ νῦν παραβάλλει, ἐκ τῆς τῶν χημάτων χρήσεως τὸν λόγον συνάγων, ὃν αἱ αὐτῶν πλάγραὶ ἀφὸς ἄλλήλας ἔχουσι παραβαλλόμεναι, καὶ ἀναπαλιν: τοῦτο φυσικώτερον ἅμα καὶ διδασκαλικώτερον ἡγησάμενος τῶν ὅρων τάξιν. τῶν Ὅρους τῶν ἐν αὐτῇ προτάττει Προτάσεων. ἀπλούστερον γὰρ οἱ ὅροι, καὶ δι' αὐτῶν ῥᾷον μανθάνει ὁ διδασκόμενος. Τέτταρσι μέν ἐστι πεπ. Προτάσεις δὲ τεσσαράκοντα πρὸς ταῖς τρισίν.

Ὅρος Πρῶτος.

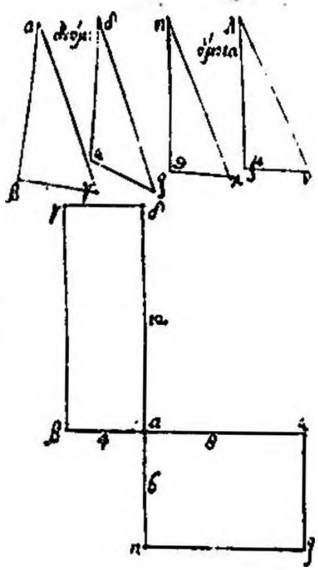
Ὅμοια χήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν ἴσας, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Καθάπερ δὲ τῶν Ποσῶν δύο αἱ γενικώτατα διαιρέσεις, ὡς ἐν τοῖς περὶ τὸ Θεωρητικὸν μέρος τῆς Ἀριθμητικῆς εἴρηται, Ἴσότης δηλ: καὶ Ἀνισότης, οὕτω δὴ καὶ τῶν γε Ποιότητος δύο εἰσὶν αἱ γενικώτατα διαφοραὶ, Ὁμοιότης καὶ Ἀνομοιότης. καὶ ὥσπερ ἐκείνων ἡ μὲν, σύμμετρον, ἡ Ἴσότης φημὶ, καὶ μοναειδὲς ἐν ἀδιαιρέτῳ συλλαμβάνει, ἡ δὲ, ἀσύμμετρός τε καὶ πολυειδὴς, ὡς εἰς πολλὰ καὶ ποικίλα τμηματὰ εἶδη. οὕτω καὶ τάνταν, ἡ Ὁμοιότης μὲν ἀσυμμέτρατέ ἐστι καὶ μοναειδὴς, ἡ δ' ἐναντία ταύτῃ ἀσύμμετρός τε καὶ πολυειδὴς. δίο δὲ καὶ Εὐκλ: τίνα τὰ Ὅμοια μόνον ἐπὶ τῶν παρόντος παραδίδωσι χήματα. τάνταν γὰρ ἔξεστι καὶ ποιοῦ τινα ἀποδοῦναι λόγον, ἡ γεωμ ὑπεγράφην. Τὸ μὲν οὖν, Σχήματα, γένους χώραν ἀναπληροῖ, τὰ δὲ λοιπὰ, διαφορῶν. καὶ τὸ μὲν, Εὐθύγραμμα, εἰς διαφορὰν τῶν Λογικῶν καὶ Ῥητικῶν εἴληπται χημάτων, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῶν στερεῶν. τὸ δὲ τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰ λοιπὰ, εἰς ἀντιδιαστολὴν τῶν ἀγωνίων χημάτων, οἷον, ἑπταγώνου, ἐννεαγώνου, καὶ τῶν ὁμοίων. ὅσα τέτταρα τῶν γωνιωδῶν εὐθυγράμμων χημάτων τὰς γωνίας ἴσας ἔχει, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἐκεῖνα Ὅμοιά εἰσί τε καὶ λέγονται.

εἴρηται

ἔρηται δὴ πῶς μίαν γωνίαν, ἵνα μή τις νομίσῃ πάσας ὁμοίας ταῖς τοῦ ἑνὸς σχήματος γωνίας πάσαις ἴσας ταῖς τοῦ ἑτέρου παραβάλλειν. ὅτι γὰρ αἱ πασῶν εὐθυγράμμων σχημάτων αἱ γωνίαι, ἴσαι εἰσὶ ταῖς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, αἱ τοῦ τριπλεύρου, φημὶ εἶναι, ταῖς τοῦ τριπλεύρου, καὶ αἱ τοῦ τετραπλεύρου ταῖς τοῦ τετραπλεύρου, καὶ αἱ ἄλλου τινὸς εἴδους τῶν πολυγώνων ταῖς τοῦ αὐτοῦ. Τὸ δὲ πῶς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πρασιτέον, ὅτι γε ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ταῖς τοῦ ἑνὸς πάσαις πλευραῖς πρὸς ἀλλήλας παραβαλλομέναις, οἱ αὐτοὶ ἐνυπάρχουσι λόγοι, οἵπερ καὶ ταῖς τοῦ ἑτέρου, ὡς ἐν τῷ δ': τοῦ παρόντος προτάσει δεδιχθήσεται. ἐπὶ δὲ τῶν ἀνομοίων δύο μέν τισιν ἔστιν εἰπεῖν τῶν τοῦ ἑνὸς σχήματος πλευρῶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον δυσὶ ταῖς τοῦ ἑτέρου, ὅλαις δὲ καὶ τὰς λοιπάς. τῶν γὰρ αβγδε ζ, ἀνομοίων σχημάτων αἱ αβ, βγ, καὶ δε, εζ, ἀνάλογόν εἰσι, διπλῆ γάρ ἐστι αβ, τῆς βγ, καὶ ἡ δε, τῆς εζ, ὅλαι δὲ καὶ αἱ λοιπαί.

Euclid. Lib. 6. Fig. 1.



Β': Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Ὑπογράψας ἐν τῷ δευτέρῳ τὸ Ὅμοια τοῖς εὐθυγράμμοις σχήμασιν, ἐπεὶ καί τισι τῶν ἀνομοίων εὐθυγράμμων ταί πως οἱ αὐτοὶ λόγοι, βουλόμενος ἐν ταύτῃ κοινῇ περιλαβεῖν ὀνόματι, Ἀντιπεπονθότα τὰ τοιαῦτα καλεῖ σχήματα, ἐκ τῆς ἀντιπαθείας τῶν τῶν πλευρῶν τῶν αὐτῶν σχημάτων σχέσεως, τὴν παρωνυμίαν ἐραστιζόμενος. Ἔστι δὲ Ἀντιπάθεια τῆς τῶν πλευρῶν τῶν σχημάτων σχέσεως, ὅτε τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου αὖτε ἡγουμένου εἰλημμένης, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ, ἐν ᾗ πρὸς ἀλλήλας αὐτῶν παραβολῇ, αὖτε ἑπομένου λαμβάνεται. ὡς δῆλον ἐπὶ τῶν αβγδ, αεζη, σχημάτων γίνεται. ὡς γὰρ ἡ βα, πρὸς τὴν αε, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηα, πρὸς τὴν αδ, ἴδιά δὲ, ἐπὶ μὲν τοῦ αγ, σχήματος τῆς βα, πλευρᾶς, πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου αε, πλευρὰν αὖτε ἡγουμένην λαμβάνεται, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ πλευρά, ἥτις ἡ αδ, πρὸς τὴν αη, πλευρὰν τοῦ αζ, σχήματος παραβαλλομένη, ὡς ἑπόμενον λαμβάνεται. Ἐπὶ δὲ τοῦ αζ, εἰλημμένης τῆς ηα, αὐτοῦ πλευρᾶς πρὸς τὴν αδ, τοῦ ἑτέρου σχήματος πλευρὰν αὖτε ἡγουμένην, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ πλευρὰ αε, ὡς ἑπόμενον πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου σχήματος πλευρὰν αβ, λαμβάνεται. καὶ τοῦτό ἐστιν, ὅπερ Εὐκλείδης φησὶν, ὅταν ὁμοίως ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενόν τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν. ὡσανεὶ ἔλεγεν, Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά

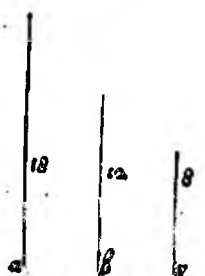
τὰ ἴσα, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν χωμάτων, ἡμιὺ τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν ἀφὸς τὴν τῆ ἑτέρα, ὡς ἡγούμενον λαμβάνηται, πρὸς, ὡς ἑπόμενον.

Ἐπισκέψασθαι μέντοι ἄξιον, ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων χωμάτων, ὥσπερ καὶ τῶν τριγώνων, μὴ μόνον ὁμοιότης, ἀλλὰ καὶ ἀνομοιότης καταγορεύεσθαι δύναται, ὡς ὑπὸ τὴν πάντων τῶν Ποιοτήτων ὑπαγομένων εἶδος, ἀλλ' ἔτι καὶ ἰσότης, καὶ ἀνισότης, ὡς διασαφῶν. Οὐκοῦν οὐδὲ Εὐκλείδης ἐν τῇ δ: ὅρῳ τὰ Ὅμοια, ἐν τῇ β': οὐδὲ τὰ Ἴσα περιέλαβε. τὰ γὰρ Ἀνισοπλατῆ χώματα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς διὰ τῆς τετάρτης κδ': τοῦ παρόντος.

Γ': Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

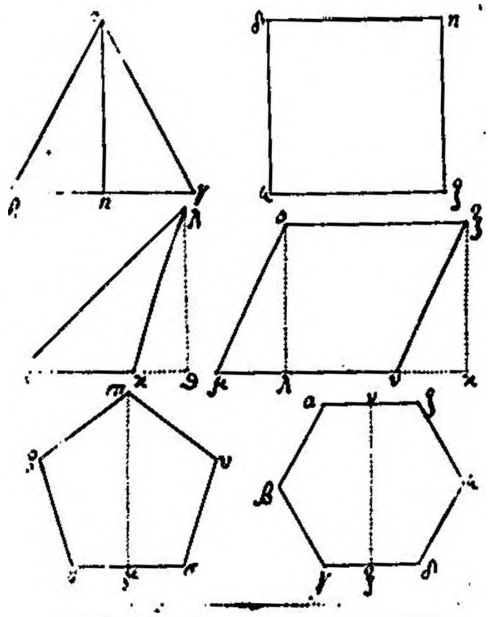
Ἐπεὶ ἀρχέσις μιᾶς δύο διωρισμένων ὅρων ἀδιαίρετις μὲν τῇ ὑποκειμένῳ ἐστὶ, διαιρετὰ δὲ τῷ λόγῳ, παρὰ τῶν ὅρων λαμβάνουσα καὶ τὰς διαφοράς, (ἡ μὲν γὰρ μιᾶς τοῦ παρόντος καὶ ὑπὸ χάσις, μία ἔσα, παρόντος μὲν παρὰ τοῦ παρόντος λέγεται, ὑπάτης δὲ παρὰ τοῦ ὑπὸ,) διὰ τοῦτο καὶ ὁ λόγος, ὡς ποιά τις χάσις καὶ τῶν ἐννέα: εἰς ὃν τῇ ὑποκειμένῳ, διαιρεῖται τῷ λόγῳ εἰς εἴδη διάφορα· ὥσπερ δὲ ἐπὶ τοῦ ἀναπάλιν ὅρου, παρὰ μὲν τοῦ ἡγουμένου, ἡγούμενος ἐλέγετο καὶ ὁ λόγος, ἑπόμενος δὲ παρὰ τοῦ ἑπομένου, οὕτω καὶνταῦθα, παρὰ μὲν τῶν ἄκρων ὅρων λαμβανόμενος ὁ λόγος, ἄκρος λέγεται, παρὰ δὲ τοῦ μέσου μέσος. οἷον κείσθωσαν ὅροι τρεῖς οἱ α β γ, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες, ἤ μὴ· ὁ μὲν σὺν τοῦ α, πρὸς τὸν β, λόγος, καὶ ἀνάπαλιν ὁ τοῦ β, πρὸς τὸν α, τοῦ γ, παραμένων· ἢ ὁ τοῦ α, πρὸς τὸν γ, τοῦ β, παρεμμένων· ἢ πλάγιος, ὁ τοῦ α, καὶ γ, πρὸς τὸν β, ἄκρος λέγεται, ἢ ὡς μιᾶς τῶν ἄκρων διωρισμένος, ἢ ὡς ἀπὸ τῶν ἄκρων παραλαβανόμενος. ὁ δὲ τοῦ β, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, γ, μέσος, ὡς τοῦ μέσου ἐπὶ τὰ ἄκρα διαιρουμένου. παρονομάζεται δὲ ἡ χάσις, ἀφ' ἧ καὶ παραλαμβάνεται ὅρου. καὶ γὰρ ἡ παρόντος ἀπὸ τοῦ παρόντος τοῦτο παρωνύμως, καὶ παρονομασίαν ἔλαχεν. ὅταν σὺν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ οὕτως, ὡς ὁν ἔχει λόγον ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἔχειν καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμῆσθαι λέγεται. ἡ ὅλη γὰρ καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἄκρων χώραν ἀναπληροῦσι, μέσον δὲ τὸ μεῖζον. ὁ τοίνυν τῆς ὅλης λόγος πρὸς τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἄκρος λέγεται, καὶ τὸ εἰρημένον, ὁ δὲ τοῦ μείζονος πρὸ τὸ ἔλαττον, μέσος. τίς δὲ ὁ τρόπος τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, διδάσκομεν ἐν τῇ λ': τοῦ παρόντος.

Eucl. Lib. 6. Fig. 2.



Δ΄. Υ΄ψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Τριῶν δοθέντων τῷ διαστάσεων, μήκους δηλ. πλάτους, καὶ βάθους, ὃ καὶ ὕψος λέγεται, τὰ μὲν στερεὰ τῷ σχημάτων καὶ τῶν ἴσων τούτων δύο μόνας κυκλήσεται, μήκος φημὶ καὶ πλάτος. τῷ τὴν δὲ μένει δίδοται πως καὶ τοῖς ἐπιπέδοις ὕψος. ἐπεὶ καὶ βάσεις αὐτῶν, καὶ κορυφὰς ὀνομάζομεν. τὸ μὲν γὰρ αβγ, τριγώνου, ἡ μὲν βγ, πλευρὰ, βάσις λέγεται, ἡ δὲ πρὸς τὸ α, γωνία, κορυφὴ. τὸ δὲ δεζη, παραπλεύρου, ἐπεὶ ἡ εζ, πλευρὰ βάσις καλεῖται, ἡ δη, παντὸς γε, κορυφὴ λέγεται. ἐπεὶ δὲ καὶ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, τὰ μὲν ὀρθιά ἐστι τὴν θέσιν, ὡς τὸ αβγ, δεζη. τὰ δὲ πλάγια, ὡς τὸ θκλ, μνξο. ὅθεν ἐκεῖνα μὲν ὀρθὰ, ταῦτα δὲ πλάγια λέγεται. ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς παντὸς σχήματος κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως, ἡ καθετος αὕτη ὕψος τοῦ σχήματος λέγεται. Ε΄στι δὲ τῷ μὲν τριγώνων ὀρθὰ, τὰ τε ἰσόπλευρα καὶ ἰσοσκελῆ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀρθογώνια. τῷ δὲ παραπλεύρων, ὅσα ἑκατέρα τῶν πλευρῶν, τῶν καὶ τὰ πλάγια αὐτῶν μέρη πρὸς ὀρθὰς κειμένην ἐπὶ τῆς βάσεως ἔχουσι, ταύτην δ' ἐστὶν εἰπεῖν, τὰ ὀρθογώνια. τῶν δὲ πολυπλεύρων, ὅσα κανονικὰ, τὰ ἰσόπλευρά φημι καὶ ἰσογώνια. τούτων δὲ τὰ μὲν περιττόπλευρα τὴν ἀπεναντίον τῆς βάσεως αὐτῶν γωνίαν κορυφὴν ἔχουσι, τὰ δὲ ἀρτιόπλευρα τὴν ἀπεναντίον τῆς αὐτῶν βάσεως πλευρὰν. οἷον τὰ μὲν πρστυ, κορυφὴ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ π. ἐπεὶ ἡ στ, βάσις τῷ αὐτῷ ἐστι, τὰ δὲ αβγδεζ, κορυφὴ ἡ αζ, πλευρά. ἐπεὶ ἡ γδ, ἀντὶ βάσεως λαμβάνεται. ὅταν οὖν ἀπὸ τῆς κορυφῆς γωνίας, ἡ πλευρὰς ἐπὶ τῆς βάσεως τὸ σχήματος καθετος ἀχθῇ, ὡς αἱ πμ, νξ, ἐπὶ τῶν πρστυ, αβγδεζ, σχημάτων, ἡ καθετος αὕτη ὕψος τὸ σχήματος λέγεται. τὰ μὲν αβγ, τριγώνου ὕψος ἐστὶν ἡ αη. τὰ δὲ δεζη, ἑκατέρα τῶν δε, ηζ. τὰ δὲ θκλ, ἡ λθ. τὰ δὲ μνξο, ἥτις ξκ, καὶ ολ. τὰ δὲ πρστυ, ἡ πμ. καὶ τὰ αβγδεζ, ἡ νξ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.



Γενέσθω δ' ὅτι ἐπὶ παντὸς μὲν χήματος ὀρθοῦ ἢ κάθετος ἀεὶ εἰς τὰς πίπτουσα, ἐπὶ δὲ τῶν πλαγίων ἐκτὸς, ἐκβαλλομένης τῆς αὐτῶν βάσεως πρὸς τὸ σημεῖον. τῶ μὲν γὰρ αβγ, ὀρθὸν ὄντος, ἐκτὸς ἡ αχ, κάθετος πίπτουσα, τῷ δὲ κλμ, πλαγίαν ὄντος, ἐκτὸς, ὡς ἡ λθ, τῆς θχ, βάσεως ἐπὶ τὸ θ, ἐκβαλλομένης.

Α' ΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

*Σημείωσαι, ὅτι πάσης αἱ παραλαμβανόμεναι ἐπὶ τῆ ἑξομένῃ πέμπτῃ ὅρῳ χαρακτῆρες τῶν Ἀλφαβήτου, ὡς παρέστησαι τῶν ἐν αὐτῇ Ἀναλογιῶν, ἀναλαμβάνονται πρὸ σημασίας ἀριθμῶν, πρὸ τῶν Ἀποσημείωσιν, τῶν ἐν τῇ πλευρᾷ τῶν ὀρθογωνίων τῆ ὀρθογωνίᾳ πέμπτῃ Βιβλίῳ. καθ' ὧν καί τινες ἐναυθοὶ παρασημειοῦνται τοῖς κοινοῖς Ἰνδικοῖς Ἀριθμοῖς, χάριν πληρεστέρας γνώσεως.

Ε': Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.

Ὁ λόγος χέσις ἐστὶν, ὡς εἴρηται, ἐν δυσὶν ὅροις διωρισμένη· καὶ μὲν οἱ ὅροι ἐκτεταμένοι εἰσὶ, τὸ πρὸς πηλικότητα ἐν τῇ τῶν ὑπογραφῇ αὐτοῦ διαφορᾶς ἀντιλαμβάνεται. εἰ δὲ γ' ἀριθμοὶ, τὸ πρὸς πυκνότητα· ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται· διὸ καὶ Εὐκλείδης ἐν τῷ γ': τῶ πρώτῳ βιβλίῳ ὅρῳ ὑπογράφων τὸν λόγον, φησὶ, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ χέσις. ὅταν δὲ πλείονες ὅροι εἶσιν ἐφεξῆς κείμενοι, δὸς εἰπεῖν ἕξεις, ἢ τέσσαρις, ἢ καὶ πλείους, ὁ τῶ α: ὅρου πρὸς τὸν β': λόγος, καὶ τῶ β': πρὸς τὸν γ': καὶ τῶ γ': πρὸς τὸν δ': καὶ ἑκάστου τῶν ἄλλων πρὸς τὸν ἐφεξῆς, ἁπλοῦς λέγεται. παρ' ἕνα δὲ, ἢ καὶ πλείω τῶν ὅρων παραβαλλομένων, ὁ λόγος πεπλεγμένος συνίθεται λέγεται· τοιοῦτος δ' ἐστὶν ὁ τῶ α: ὅρου λόγος πρὸς τὸν γ': ἢ δ': ἢ ἄλλον τινὰ τῶν ἐφεξῆς. σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν μεταξὺ λόγων. εἶεν κείσθωσαν μεγέθη τρία τὰ α, β, γ, ἑξῆς ὄντα ἀνάλογα ἐν λόγῳ διπλασίονι. ὁ τοίνυν λόγος τῶ α, πρὸς μὲν τὸ β, ἁπλοῦς λέγεται· ὁ πρὸς δὲ τὸ γ, συνίθετος, ὅτι σύγκειται ἐκ τῶ λόγου τῶ τε α, πρὸς τὸ β, καὶ τῶ β, πρὸς τὸ γ. διὸ δὴ καὶ Εὐκλείδης ὑπογράφων τῶν βουλόμενος, φησὶ, Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα. Ἵνα δὲ τῶν σαφέστερον γένηται, ῥᾴδιον ἡμῖν, τίνες αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, καὶ ὅπως ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιάζεσθαι δύνανται.

Λόγων τοίνυν πηλικότητες εἰσὶν, αἱ παρωνυμούσης ἀριθμοὶ, ἀφ' ὧν οἱ λόγοι παρονομάζονται. Ἐπεὶ δὲ τὰ τῶ Λόγου εἴδη πολλά τέ εἰσι, καὶ διάφορα, ὡς ἐν τῷ β': τῆς Ἀριθμητικῆς μέρει τῷ βουλομένῳ ἕξεσιν ἰδεῖν· διὰτοι τοῦτο καὶ ἕκαστον Λόγου εἶδος ἰδίῳ τινὶ παρονομάζεται ἀριθμῷ. ὁμοῦ γὰρ τῶ διπλασίου λόγου τὸν β (2) μόνον ἔχει παρωνυμοῦντα αὐτὸν, ὁ δὲ τῶ τριπλασίου τὸν γ (3)

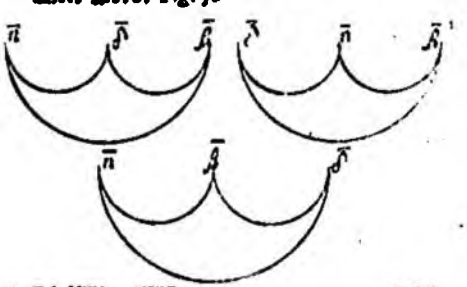
Eucl. Lib. 6. Fig. 6.

ὁ δὲ

ὁ δὴ τῷ πρώτῳ πλασίῳ τὸν δ (4). καὶ τῶν ἄλλων τῷ πολλαπλασίῳ εἰδῶν ἕκαστον ἀφ' ἑνός τινος τῷ ἀναλογούντος αὐτῇ παρανομάζεται ἀριθμῷ. τῶν δ' ἄλλων εἰδῶν ἕκαστον ἀπὸ μὲν ἀριθμοῦ ὁλοκλήρου, καὶ μέρους τινὸς πλείους δέχεται τὴν παρονομασίαν. ὁ μὲν γὰρ τῷ ἡμιολίῳ λόγος ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ ἡμίσεως παρανομάζεται, ὁ δὲ τῷ ἐπιτρίτου ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ γ': μέρους, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῷ ἐπιμορίῳ εἰδῶν ἀναλόγως. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῷ ἐπιμερεῖ, πολλαπλασιεπιμορίου, καὶ πολλαπλασιεπιμερῆ.

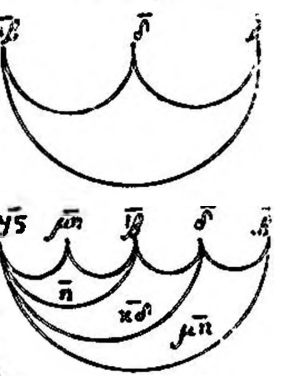
Ἔστι δὲ Λόγος, ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται, πολλαπλάσιος μὲν, ὅτι ὁμείζων ὅρος ἔχει ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάττονα πλειονάκις, ἢ ἅπαξ. ὡς ὁ τῶ δ (4) πρὸς τὸν β (2) καὶ ὁ τῶ θ (9) πρὸς τὸν γ (3) καὶ οἱ ἄλλοι. ἐπιμόριος δὲ, ὅτι ὁμείζων περιέχει τὸν ἐλάττονα ἐν ἑαυτῷ ἅπαξ, καὶ ἔστι μέρος αὐτῷ, δύσιον δηλονότι τρίτον, πάρτιον, ἢ ἄλλο τι πηλίκον, ὡς ὁ γ (3) τὸν β (2) καὶ ὁ δ (4) τὸν γ (3) καὶ οἱ ὅμοιοι. ἐπιμερὴς δὲ, ὅτι ὁμείζων ἅπαξ τὸν ἐλάττω ἐν ἑαυτῷ ἔχει καὶ μέρη ἔτι τὰ αὐτὰ τινα, ὡς ὁ τῶ ε (5) πρὸς τὸν γ (3) καὶ τὸ ζ (7) πρὸς τὸν δ (4). πολλαπλασιεπιμόριος δὲ, ὅτι ὁ μείζων ὅρος ἔχει ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάττω πλειονάκις, ἢ ἅπαξ, καί τι μέρος αὐτῷ πηλίκον, ὡς ὁ τῶ θ (9) πρὸς τὸν β (2) τὸ ζ, (7) πρὸς τὸν γ, (3). πολλαπλασιεπιμερὴς δὲ, ἐπειδὰν ὁμείζων ὅρος πλειονάκις, ἢ ἅπαξ ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάττω ἔχῃ, καὶ μέρη αὐτῷ τινα, ὡς ὁ τῶ ια, (11) πρὸς τὸν δ, (4) περὶ οὗ πλατύτερον ἐν τῷ ῥηθέντι διηρμήνευται βιβλίῳ τῆς Ἀριθμητικῆς. ὅθεν δὴ ὁ μὲν β, (2) πολλάκοις λέγεται τῷ διπλασίῳ, ὁ δὲ γ, (3) τῷ τριπλασίου. ὁ δὲ δ, (4) τῷ τετραπλασίῳ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁ ἀναλόγως. ἡ δὲ μονὰς μὴ τῷ ἡμισίως πηλικόκις λέγεται τῷ ἡμιολίῳ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος ἔχει ἐν ἑαυτῷ ὅλον τὸν ἐλάττονα, καὶ ἥμισυ αὐτοῦ μέρος, ὡς εἴρηται. μὴ δὲ τῷ ἑνὸς τρίτου ἡ μονὰς, πηλικόκις λέγεται τῷ ἐπιτρίτου. μὴ δὲ τῶν δύο τρίτων, τῷ ἐπιδιμερῆ, ὥσπερ καὶ μὴ τριῶν τρίτων, τῷ ἐπιτριμερῆ. ὁ β, (2) δὲ πάλιν μὴ ἡμίσιως μὲν, πηλικόκις λέγεται τῷ διπλασιημισίως, οἷος ὁ τὸ ε, (5) πρὸς τὸν β, (2) μὴ δὲ δύο τρίτων τῷ διπλασιεπιδιμερῆ, οἷος ὁ τῷ η, (8) πρὸς τὸν γ, (3). καὶ τοσαῦτα μὲν ἐκ παρέργου εἰς ἀνάπτυξιν τῶν, τίνες εἰσὶν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες. Πολλαπλασιάζονται δὲ αὐτὰ φ' ἑαυτὰ, καὶ τῶν ὅρων πάλιν. τριχῶς γὰρ οἱ ὅροι ποικίλλεσθαι δύνανται. ἢ γὰρ ἀπείκτως κεῖνται, ἢ ὁ μείζων ἴσος μέσος, ἢ γοῦν ὁ ἐλάττων, ὡς ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὁρᾶς τῶνδε διαγραμμάτων. καὶ μὲν δὴ εἰ ὅροι ἀπείκτως ὦσι, λάβοι τὴς ἀριθμοὺς, ἀφ' ὧν οἱ ὅροι τῶν λόγων

Eucl. Lib. 6. Fig. 5.



παρεσταλζονται, ὁ τῶ ἀ: δηλον: ὅρου πρὸς τὸν μέσον, καὶ ὁ τῶ μέσου πρὸς τὸν γ: καὶ πολλαπλασίασον τινὰς ἐφ' ἑαυτὰς, καὶ ὁ γενόμενος παραστήσει σοι τὸν λόγον, ὃν ὁ ἀ: ὅρος πρὸς τὸν γ: ἔχει. οἷον κείσθωσαν ἐφεξῆς. ὁμοίως ὁ ν, δ, καὶ β, ὡς ἐπὶ τῶ ἀ: διαγράμματος. καὶ ἐπεὶ ὁ ν, τῶ δ, διπλάσιός ἐστιν, τὰ δὲ διπλασίων πολλαπλάσιος ὁ β, ὡς ἤδη εἴρηται· εἰλήφθω ὁ β, ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ δ, τῶ β, ἐμοίως διπλάσιός ἐστιν, εἰλήφθω αὖθις ὁ αὐτὸς β, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ γενέσθω παύτως ὁ δ, ὅς τις πολλαπλάσιός ἐστὶ τοῦ λόγου, ὃν ὁ ν, ἔχει πρὸς τὸν β· δῆλον ἄρα ὅτι ὁ ν, πέμπτου πλάσιός ἐστι τοῦ β. κείσθωσαν ἔτι ὁ ι β, δ, καὶ β· καὶ ἐπεὶ ὁ ι β, ἕκτου πλάσιός ἐστι τοῦ δ, ὁ δὲ δ, τοῦ β, διπλάσιος· εἰλήφθω αὖτε τοῦ ἕκτου πλασίου μὲν ὁ γ, αὖτε δὲ τοῦ διπλασίου ὁ β, καὶ πολλαπλασιαθήτωσαν ἐφ' ἑαυτὰς, καὶ ὁ γενόμενος ς, παραστατικὸς ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ ι β, πρὸς τὸν β· ἔστι ὁ ι β, τοῦ β, ἑξαπλάσιός ἐστι. τοῦτ' αὐτὸ γενέσθω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, πεντάπλασίου φημὶ, τετραπλασίου, τριπλασίου καὶ λειπῶν. ἐὰν δὲ πλείονες ὦσιν εἰ ὅροι τῶν ἕξῆς, εὑρεθήτω ἀ: ὁ τοῦ ἀ: λόγος πρὸς τὸν γ: ἐφ' ὃν πολλαπλασιαθήτω ὁ παραστατικὸς τὰς πολλαπλασιάσας τοῦ λόγου, ὃν ὁ γ: ἔχει πρὸς τὸν δ: καὶ αὖθαλιν, καὶ ὁ γενόμενος παραστατικὸς ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ ἀ: ὅρος πρὸς τὸν τέταρτον. Εἰδέναι ζητεῖται ὁ λόγος, ὃν ὁ ἀ: τῶν ὅρων ἔχει πρὸς τὸν ε: εἰλήφθω ὁ πολλαπλασιάσας τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ δ': πρὸς τὸν ε: καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸν ἤδη γενόμενον διὰ τοῦ πρώτου πολλαπλασιασμοῦ, ἃ καὶ αὖθαλιν. οἷον ἕστωσαν ἐπάνω κείμενοι ὁ η ς, μ ν, ι β, δ, καὶ β· ἐπεὶ τοίνυν ὁ τῶ η ς, πρὸς τὸν μ ν, λόγος διπλάσιός ἐστιν, ὁ δὲ τοῦ μ ν, πρὸς τὸν ι β, πέμπτου πλάσιος, ὁ τοῦ η ς, πρὸς τὸν ι β, δεκαπλάσιος ἔσται, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα· ἐὰν ὁ β, ἐπὶ τὸν δ, πολλαπλασιαθῇ, ἃ καὶ αὖθαλιν ὁ δ, ἐπὶ τὸν β, καὶ ἔσται τέτα πολλαπλάσιος ὁ ν· ἔστι ὁ η ς, τοῦ ι β, δεκαπλάσιός ἐστιν· ἐὰν δὲ ζητηθῇ ὁ τοῦ η ς, λόγος πρὸς τὸν δ, ἐπεὶ ὁ ι β, ἕκτου πλάσιός ἐστι τοῦ δ, εἰλήφθω ὁ γ, ὃ τοῦ αὐτοῦ λόγου δηλον: πολλαπλασιαθήτω ἐπ' αὐτὸν ὁ ν, ὅς ἐστι πολλαπλάσιος τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ η ς, πρὸς τὸν ι β, καὶ ὁ γενόμενος κ δ, πολλαπλάσιος ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ η ς, πρὸς τὸν δ. Εἰδέναι πάλιν ζητεῖται ὁ τοῦ η ς, λόγος πρὸς τὸν β, πέμπτου ὄντα τῇ τάξει· ἐπεὶ ὁ δ, διπλάσιός ἐστι τοῦ β, εἰλήφθω ὁ τέτε πολλαπλάσιος, δηλον: ὁ β, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπ' αὐτὸν ὁ κ δ, ὅς ἐστι πολλαπλάσιος τοῦ λόγου, ὃν ὁ η ς, πρὸς τὸν δ, ἔχει, καὶ ὁ γενόμενος μ ν, πολλαπλάσιος ἔσται τοῦ λόγου, ὃν ὁ η ς, ἀ: ἔχει πρὸς τὸν β, ε:

Eucl. Lib. 6. Fig. 6.

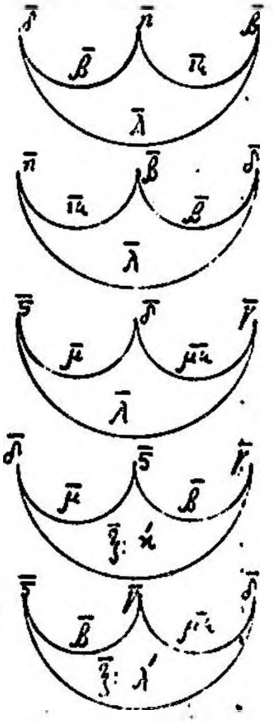


ὥστε

ὥστε ὁ γ, τεταραπλασιός ἐστι τοῦ β. τοῦτον τὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ὁ τοῦ α: ὅρα λόγος πρὸς τὸν ς΄: ζ΄: ι΄: καὶ λοιποὺς ἐν τῇ ἀπείρῳ τῆς ὅρων τάξει.

Ὅταν δὲ οἱ ὅροι μὴ ἀπείρως ὦσι κείμενοι, εἰλήφθω ὁ μείζων μέσος ἢ, ὡς ὁ ν, τοῦ δ, καὶ β. εἰλήφθω αὐτοῦ τοῦ μείζονος λόγου, ὃν ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα τῆς ὅρων ἔχει, τοῦ ἀπαλλαγὴν τῆς * μονάδος μέρος, δηλ: ὁ ια, ὥσπερ γὰρ ὁ ν, τετραπλάσιός ἐστι τοῦ β, οὕτω καὶ ὁ ξ, τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ια, αὐτοῦ δὲ τοῦ ἐλάττονος, ὃν ὁ μέσος ἔχει πρὸς τὸν μείζονα τῆς ὅρων, ἤτοι τοῦ δ, εἰλήφθω ἡ αὐτοῦ πολλαπλασιάσας, ὁ β. ἐπεὶ καὶ ὁ ν, τοῦ δ, διπλάσιός ἐστι. καὶ πολλαπλασιαθήτω ὁ ια, ἐπὶ τὸν β, καὶ ἐπεὶ ὁ γενόμενος λ, ἥμισύς ἐστι τῆς μονάδος δηλ: τοῦ ξ, φανερὸν, ὅτι καὶ ὁ β, τοῦ δ, ἥμισύς ἐστιν, ὁ δὲ δ, τοῦ β, διπλάσιος.

Euclid. Lib. 6. Fig. 7.



Τοῦτ' αὐτὸ γινέσθω, κἂν ὁ ἐλάχιστος τῆς ὅρων ᾖ μέσος. ἔστω γὰρ ὁ β, μέσος τοῦ ν, καὶ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ν, τοῦ β, τετραπλάσιός ἐστιν, εἰλήφθω τὸ δ΄: τοῦ ξ, δηλ: ὁ ια: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τοῦ β, διπλάσιός ἐστι, λάβε τὸν τούτου πολλαπλάσιον, ἤτοι τὸν β, καὶ πολλαπλασίασον ἐπ' αὐτὸν τὸν ια, καὶ ὁ γενόμενος λ, πολλαπλάσιός ἐστι τοῦ ν, πρὸς τὸν δ. ὥστε ὁ ν, διπλάσιός ἐστι τοῦ δ,

Εἰδὲ ἐν λόγῳ ἐπιμοίρου τύχωσιν ὄντες οἱ ὅροι, ξητικῶς δείκνυται καὶ ὑπὸ ποικιλίαν, ὡς καὶ οἱ τοῦ πολλαπλασίου. Ἔστωσαν δὴ α: ἀπείρως κείμενοι, ὡς ὁ ς, δ, καὶ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ς, τοῦ δ, ἡμιόλιός ἐστιν, ὁ δὲ δ, τοῦ γ, ἐπίτριτος, εἰλήφθω ὁ μ, καὶ μ ι, ὁ γὰρ ξ, τοῦ μὲν μ, ἡμιόλιός ἐστιν, ἐπίτριτος δὲ τοῦ μ ι. καὶ πολλαπλασιαθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γενόμενος ἐξ αὐτῶν φω, μεμιλθήτω ἐπὶ τὸν ξ. καὶ ἐπεὶ παράκειται πηλίκον ὁ λ, τοῦ δὲ λ, διπλάσιός ἐστιν ὁ ξ, δῆλον, ὅτι ὁ ς, τοῦ γ, διπλάσιός ἐστιν.

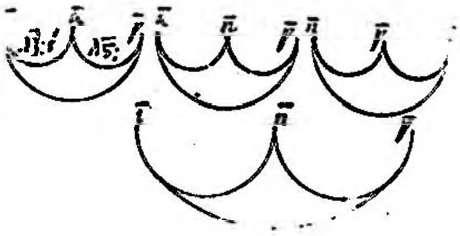
Ἔστω δὴ ὁ μέσος μείζων τῆς ἄκρων, ὡς ὁ ς, τοῦ δ, καὶ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ς, τοῦ μὲν δ, ἡμιόλιός ἐστι, τοῦ δὲ γ, διπλάσιος. εἰλήφθω αὐτοῦ μὲν τοῦ ἡμιολίου ὁ μ, αὐτοῦ δὲ τοῦ διπλασίου ὁ β, καὶ πολλαπλασιαθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γινόμενος π, μεμιλθήτω ἐπὶ τὸν ξ. ἐπεὶ δὲ παράκειται πηλίκον μονὰς μὴ ἐξικνουμένη, φανερὸν, ὅτι ὁ δ, πεμέχει ἐν ἑαυτῷ ὅλον τὸν γ, ἅπαξ, καὶ ἐν αὐτοῦ γ΄: μέρος.

Ἔστω δ' ἔτι ὁ μέσος ἐλάττων ἑκατέρου τῶν ἄκρων, ὡς ὁ γ, τοῦ ς, καὶ δ. καὶ ἐπεὶ τοῦ γ, ὁ μὲν ς, διπλάσιός ἐστιν, ὁ δὲ δ, ἐπίτριτος, εἰλήφθω αὐτοῦ μὲν τοῦ διπλασίου ὁ β, αὐτοῦ δὲ τοῦ ἐπιτρίτου ὁ μ, ὅτι καὶ ὁ ξ, τοῦ μ, ἐπίτριτός ἐστι.. τοῦ δὲ

* Γίνεται τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι εἰς τὸν ἐξήκοντα.

τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προπεριλαμβάνεται, καὶ εὑρεθήσονται ὁ ς, τοῦ δ, ἡμόλιος, παρέχεται γὰρ διὰ τὴς πρώτης πυκνὸν ὁ μονὰς μὴ ἔχουσῶν λ.

Τὰ αὐτὰ γινέσθω καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιμεροῦς. Διὰ δὲ τὸ σαφέστερον, κείσθωσαν καὶ ἐπὶ τούτοις εἰς ὑπόδειγμα οἱ κ, ι, γ, ἀπὸτων κείμενοι. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν κ, τοῦ ι, ἐπιξιμερές ἐστιν, ὁ δὲ ι, τοῦ γ, ἐπιδιμερὴς, ἐλήφθω αὐτῶν μὲν τοῦ ἐπιξιμεροῦς ὁ λζ μὴ ἡμίσιος, αὐτῶν δὲ τοῦ ἐπιδιμεροῦς ὁ λς, ὁ γὰρ ξ, τοῦ μὲν λζ μὴ ἡμίσιος * ἐπιξιμερές ἐστι, τοῦ δὲ λς, ἐπιδιμερές. εἶτα πολλαπλασιαθέτω ὁ λζ μὴ ἡμίσιος ἐπὶ τὸν λς, καὶ ὁ γενόμενος, ἔστι τὰ ἑπτακόσια ὀρὸς τὰς χιλίους, μεμιθήσονται ἐπὶ τὸν ξ, καὶ ἔξεις πυκνὸν τὸν με· ἐπεὶ δὲ ταῦτα * διάφορά εἰσι, μεμιθήσθω μ ι, ἐπὶ τὸν β, καὶ δώσει σοι πυκνὸν τὸν κβ μὴ ἡμίσιος, ὃ ὁ ἐξήκοντα διπλασιεπιμερές ἐστιν. ἔχει γὰρ ἐν ἑαυτῷ τοῦτον δίς, καὶ δύο αὐτοῦ μέρη εἰς ἴσα διῃρημένα.



Euclid. Lib. 6. Fig. 8.

Τούτων δὴ τῶν ὅρων εὑρίσκεται ὁ Λόγος, ὁ ἐκ Λόγων συγκείμενος, καὶ ὁ μέσος ὅρος μείζων ἐστὶ τοῦ ἄκρου, ἢ γοῦν ἐλάττων. (✣) Δυνάμεθα δὲ ταχέως εἰδέναι τοὺς τῶν Λόγων πυκνότητας, ἐὰν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν μείζονα διαιροῦντες ὅρον, τοσαῦτα λαμβάνωμεν, ὅσαι αἱ τοῦ ἐλάττονος, ὀρὸς ὃν ὁ μείζων ἀφαίρεται ὅρος, εἰσὶν αἱ μονάδες, ὡς ἐπὶ τοῦ συνήγγυς δεῖλον καθέσθαι ὑποδείγματος. ζητοῦντες γὰρ τὸν λόγον τοῦ κ, ὀρὸς τὸν ι, διαιροῦμεν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν κ, καὶ ἐπεὶ παρέχεται ὄγδοον αὐτὸ μέρος ὁ ζ μὴ ἡμίσιος, πολλαπλασιάζομεν τὸν ζ μὴ ἡμίσιος ἐπὶ τὸν ι, καὶ τὸν γενόμενον λζ μὴ ἡμίσιος λαμβάνομεν αὖτε πυκνότητα τοῦ λόγου, ὃν ὁ κ, ὀρὸς τὸν ι, ἔχει. ὥσπερ γὰρ ὁ κ, τοῦ ι, ἐπιξιμερές ἐστιν, οὕτω καὶ ὁ ξ, τὸ λζ μὴ ἡμίσιος, ἐπιξιμερὲς ἐστι. ζητοῦντες δ' αὖθις τὸν πυκνότητα τοῦ ι, ὀρὸς τὸν γ, διαιροῦμεν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν ι, καὶ παρέχεται ἡμῖν πυκνὸν ὁ ιβ. εἶτα ξαπλασιάζομεν τὸν ιβ, καὶ τὸν γενόμενον λς, λαμβάνομεν αὖτε πυκνότητα τοῦ λόγου, ὃν ὁ ι, ἔχει ὀρὸς τὸν γ· ὥσπερ γὰρ ὁ ι, τοῦ γ, ἐπιδιμερές ἐστιν, οὕτω καὶ ὁ ξ, τοῦ λς, ἐπιδιμερὲς ὁμοίως ἐστί. Τὰ δὲ λοιπὰ ποιοῦμεν, ὡς προπεριλαμβάνεται. καλῶς ἄρα εἴρηται, ὅτι Λόγος ἐκ Λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πυκνότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθεῖσαι ποιῶσί τινα.

* Ὅρα καταπίρω, ἔνθα τὸ παρὸν σημεῖον (✣) καὶ εὑρήσεις τὸν ἀδιαντοχὶν τοῦτο, καθ' ὃν, ξόπω ὁ ἐξήκοντα τοῦ λζ μὴ ἡμίσιος, ἔστιν Ἐπίξιος.

* Ἐννοησον ἑκάστω μονάδα τοῦ λζ, εἰς δύο διῃρημένω, ἵνα τὸν αὐτὸν ἄδυς γένωνται μὴ τὸ προσόντος ἡμίσιος, ὅπερ τὸ παντὶ γίνεσθαι ἑβδομήκοντα καὶ πέντε ἡμίσεα, ἄντικα πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν λς, ποιεῖ ταῦτα, 2700.

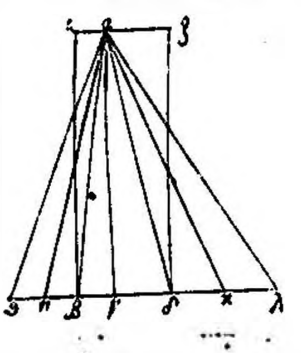
Πρό-

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Τὰ ῥίγωμα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν δὴ ῥίγωνα μὲν τὰ α β γ, α γ δ· παραλληλόγραμμα δὲ τὰ γ ε, γ ζ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ β γ, βάσις πρὸς τὴν γ δ, ἔστι τὸ, τε α β γ, ῥίγωνον πρὸς τὸ α γ δ, καὶ τὸ γ ε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γ ζ. Ἐκβεβλήθω γὰρ ἡ β δ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη καὶ τῷ σιωχεῖ. καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν β γ, ἴσα τὰ β ν, ν θ, διαστήματα, τῇ δὲ γ δ, τὰ δ κ, κ λ, ὅσαι ἰσοπληθεῖ εἶναι τὰ τῆς γ λ, μέρη τοῖς μέρεσι τῆς γ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ν, α θ, α κ, α λ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ, α ν β, α θ ν, ῥίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, δῆλον, ὅτι ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, κατὰ τὰ λε: τὰ δ: ὁμοίως δὴ, κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὰ α γ δ, α δ κ, α κ λ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅσα- πλασίων μέν ἐστιν ἡ θ γ, βάσις τῆς β γ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ α θ γ, ῥίγωνον τοῦ α β γ, ῥιγώνου. ὁσαπλασίων δὲ ἡ γ λ, βάσις τῆς γ δ, βά- σεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ α γ λ, ῥίγωνον τοῦ α γ δ, ῥιγώνου. καὶ ὑποµείους, ἔστιν ἡ θ γ, βάσις µείζων ἐστὶ τῆς γ λ, βάσεως, µεῖζον ἔσται καὶ τὸ α θ γ, ῥίγωνον τοῦ α γ λ, ῥιγώνου, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐπεὶ οὖν παντὸς µεγεθοῦς τοῦ β γ, γ δ, βάσεων, καὶ α β γ, α γ δ, ῥιγώνων εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ µὲν β γ, α β γ, δ: δῆλον: καὶ γ': τὰ θ γ, α θ γ· τοῦ δὲ γ δ, α γ δ, β': δῆλ: καὶ δ': τὰ γ λ, α γ λ, πάντως γε, καὶ τὸν ε: ὅρον τοῦ ε: ὡς ἡ β γ, δ: πρὸς τὴν γ δ, β': ἔστι καὶ τὸ α β γ, γ': πρὸς τὸ α γ δ. δ': ἀλλὰ τοῦ µὲν α β γ, διπλάσιόν ἐστι τὸ γ ε, τοῦ δὲ α γ δ, τὸ γ ζ, ἄρα καὶ τὴν τὸ ε: τοῦ αὐτοῦ, ὡς τὸ α β γ, ῥίγωνον πρὸς τὸ α γ δ, οὕτω καὶ τὸ γ ε, παραλληλόγραμµον πρὸς τὸ γ ζ. ὡς δὲ τὸ α β γ, πρὸς τὸ α γ δ, ἔστι καὶ ἡ β γ, βάσις πρὸς τὴν γ δ, βάσιν. ἄρα, καὶ τὴν ε: τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ β γ, βάσις πρὸς τὴν γ δ, ἔστι καὶ τὸ γ ε, παραλληλόγραµµον πρὸς τὸ γ ζ. Τὰ ῥίγωνα ἄρα καὶ τὰ παραλληλόγραµµα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 6. Fig. 9.



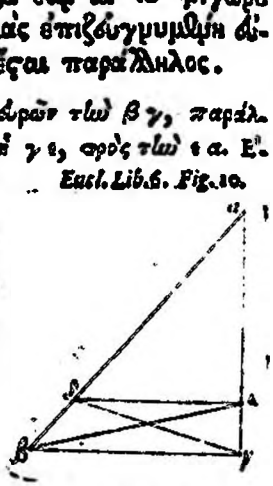
Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ῥιγώνοις ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀ- γοµένη, ὡς ἔτυχε, εὐθεῖα, ἀναλόγως τέµνει τὸ ῥίγωνον τῇ αὐτῇ βάσει.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν ῥιγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ ῥιγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ ῥιγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν τοῦ ῥιγώνου πλευρὰν ἔσται παράλληλος.

Τεῤῥώνου δὴ τοῦ αβγ, ἤχθω παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τὴν βγ, παράλληλος ἡ δε. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ γε, πρὸς τὴν εα. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, γδ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δε, τῇ βγ, τρίγωνα ἐστὶ τὰ βδγ, εδγ, τὰς αὐτὰς ἔχοντα βάσεις τὰς δγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, δε, πάντες κατὰ τὴν λζ· τὰ δὲ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. τὸ ἄρα βδγ τρίγωνον τῷ εδγ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ βδγ, πρὸς τὸ αδε, τρίγωνον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ βδγ, πρὸς τὸ αδε, οὕτως τὸ εδγ, πρὸς τὸ αδε. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ βδγ, πρὸς τὸ αδε, οὕτως ἐστὶν ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, διὰ τὸ τὰ αὐτοῦ ὕψους ὄντα τὰ βδγ, αδε, τρίγωνα πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς τὰς βάσεις· ὡς δὲ τὸ εδγ, πρὸς τὸ αδε, οὕτως ἐστὶν ἡ γε, πρὸς τὴν εα, διὰ τὸ τὰ αὐτοῦ πάλιν ὕψους ὄντα τὰ εδγ, αδε, τρίγωνα πρὸς ἄλληλα εἶναι ὡς τὰς βάσεις· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ γε, πρὸς τὴν εα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Euclid. Lib. 6. Fig. 10.

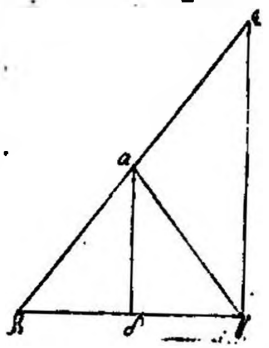
Ἔστω δὴ ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ γε, πρὸς τὴν εα, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δε. Λέγω, ὅτι ἡ δε, παράλληλός ἐστι τῇ βγ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως τὸ βδγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αδε· ὡς δὲ ἡ γε, πρὸς τὴν εα, οὕτως τὸ εδγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αδε. ἀλλ' ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ὑπόκειται καὶ ἡ γε, πρὸς τὴν εα· ἄρα, καὶ τὸ βδγ τρίγωνον τῷ εδγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ εἰσὶ τρίγωνα τὰ βδγ, εδγ, τρίγωνα τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν τὴν δγ· τὰ δὲ ἴσα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ δε, τῇ βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τοῖς αὐτοῖς ἕξει λόγου ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τοῖς αὐτοῖς ἔχῃ λόγου ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἔστω δὴ ῥιγώνου τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω τῶν ὑπὸ βαγ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς αδ, εὐθείας, καὶ τὴν δ'. τὰ δὲ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἔστι καὶ

ςι ἡ ὑ β α, τρὸς τὴν α γ, ἦχθω γὰρ ἀπὸ τῦ γ, παράλληλος τῇ α δ, ἡ γ ε, ἡ συμπιπτέτω τῇ γ ε, ἡ β α, ἐκβαλλομένη κῇ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς α δ, ε γ, πέπτωκε εὐθεῖα ἡ α γ, καὶ β ε, παίτως γε καὶ τὴν Eucl. Lib. 6. Fig. 11.



κ δ΄: τῶν ἀ: ἡ μὲν ὑπὸ α γ ε, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γ α δ, ἐναλλάξ, ἡ δὲ ὑπὸ β α δ, ἐκτὸς τῇ ὑπὸ α ε γ, ἐντός. ἀλλ' αἱ ὑπὸ γ α δ, β α δ, ἴσαί εἰσι καὶ τοῖς ὑποκειμένοις, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ α γ ε, α ε γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ καὶ τοῖς ἑ: τῶν αὐτῶν, ἡ α γ, ἴση ἐςὶ τῇ α ε. ἀλλὰ καὶ τοῖς β΄: τῶν παρόντος, ὡς ἡ β δ, τρὸς τὴν δ γ, ἕτως καὶ ἡ β α τρὸς τὴν α ε, τῇ δὲ α ε, δέδεικται ἴση α γ. ἄρα ὡς ἡ β δ, τρὸς τὴν δ γ, ἕτως καὶ ἡ α β, τρὸς τὴν α γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ Πρῶτον.

Ἔςω δ' ἔτι ὡς ἡ β δ, τρὸς τὴν δ γ, ἡ β α, τρὸς τὴν α γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α δ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς α δ. εἰ γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ γ ε, ἦχθη παράλληλος τῇ α δ, πάντως καὶ τῇ τοῖς β΄: τῶν παρόντος, ὡς ἡ β δ, τρὸς τὴν δ γ, ἔχει ἡ β α, τρὸς τὴν α ε. ὑπέκειτο δὲ καὶ ὡς ἡ β δ, τρὸς τὴν δ γ, ἡ β α, τρὸς τὴν α γ, ἄρα καὶ ἡ β α, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τρὸς ἑκατέραν τῶν α ε, α γ. καὶ καὶ τοῖς δ΄: τῶν ἑ: αἱ α ε, α γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ α γ ε, α ε γ, ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ τοῖς ἑ: τῶν πρώτου. ἀλλὰ δὴ καὶ τοῖς κ δ΄: τῶν αὐτῶν ἡμὲν ὑπὸ α ε γ, ἐντὸς ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ β α δ, ἐκτὸς, ἡ δὲ ὑπὸ α γ ε τῇ ὑπὸ γ α δ, ἐναλλάξ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β α δ, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ γ α δ, καὶ ὑπομιμνήσκω ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς α δ, τέτμηται, ὅπερ ἦν τὸ διόπρον.

Π Ο΄ Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ πάνυ δῆλον, ὅτι ἐν ταῖς ἰσοσκελέσι τριγώνοις μιᾶς τῶν ἴσων αὐτῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐκτὸς γωνίας παράλληλος τῇ βάσει εὐθεῖα ἀχθῇ, δίχα ἡ αὐτὴ τμηθήσεται γωνία, τῶν γὰρ α γ ε, ἰσοσκελοῦς τριγ: τῆς α ε, ἐκβληθείσης πλευρᾶς, ἐπεὶ ἡ α δ, παράλληλός ἐςι τῇ γ ε, βάσει, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ β α γ, ἐκτὸς γωνία δίχα τέτμηται, ὡς ἤδη δέδεικται.

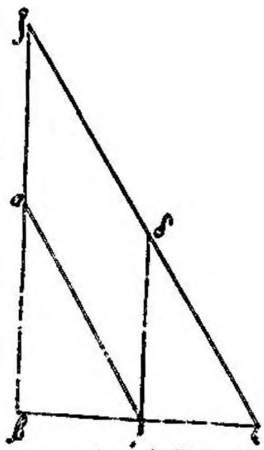
Πρότασις Δ΄: Θεώρημα.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀμοιλογοί εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔςωσαν δὴ τρίγωνα ἰσογώνια τὰ α β γ, δ γ ε, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ

α β γ, γωνίαν τῇ ὑπὸ δ γ ε, τὴν δὲ ὑπὸ β γ α, τῇ πρὸς τῇ ε, τὴν μὲν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν τετραγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας. Κείσθω γὰρ ἡ β γ, ἐπ' εὐθείας τῇ γ ε. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ α β γ, β γ α, ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν, καὶ τῇ ὑπὸ ε ζ: ἴση δὲ ἡ ὑπὸ δ γ ε, τῇ ὑπὸ β γ α, ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῇ ε· παύσασθω τῇ μὲν αἱ ὑπὸ α β γ, β ε δ, γωνίαι ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν, καὶ αἱ β α, ε δ, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ ζ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ πρὸς τῇ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δ γ ε, παύσασθω κατὰ τὴν ε ἡ: ἴση αὐτῇ, αἱ β ζ, γ δ, παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β γ α, τῇ πρὸς τῇ ε, ἴση, ἄρα καὶ τῇ αὐτῇ παράλληλοί εἰσι, καὶ αἱ γ α, ε ζ. ὥστε τὸ α γ δ ζ, παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ καὶ τῇ δ': ἴση αὐτῇ, ἡμεῖν α ζ, ἴση ἐστὶ τῇ γ δ, καὶ δὲ ζ δ, τῇ α γ· καὶ καὶ τῇ β': ὥστε παρόντος, ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α ζ, ἔστι καὶ ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ε, ἴση δὲ ἡ α ζ, τῇ γ δ, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ γ, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ε, ἔστι καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ε. πάλιν ἐπεὶ ἡ γ δ, παράλληλός ἐστι τῇ ζ β, ἔστι παύσασθω καὶ τὴν αὐτὴν, καὶ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ε, ἡ ζ δ, πρὸς τὴν δ ε, ἴση δὲ ἡ ζ δ, τῇ α γ, ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ε, ἡ α γ, πρὸς τὴν δ ε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ α, ἡ γ ε, πρὸς τὴν ε δ. δέδεικται δὲ, ὅτι καὶ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτως ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ε, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ ε, καὶ τὴν α β': ὥστε ἰσογωνίων ἄρα τριγώνων ἀνάλογον, καὶ τὰ ἑξῆς.

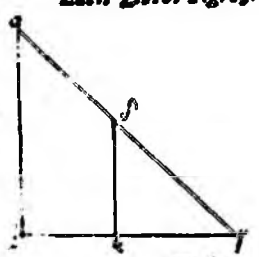
Euct. Lib. 6. Fig. 12.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συνάγειν, ὅτι ἐὰν τετράγωνα παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, τὸν αὐτὸν αὐτὰ ἕξει λόγον πρὸς ἃ ἂν παραλλήλους ἀχθεῖα, ὃν καὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν τῆ τετραγώνου πλευρῶν ἔχει πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς. τῆ γὰρ α β γ, τετραγώνου παρὰ τὴν α β, πλευρὰν ἀχθεῖσα παράλληλος ἡ δ ε, καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ, δ ε γ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ τὴν ε ἡ: τῆ δὲ παύσασθω καὶ τὴν παράσταν, ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε γ, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἡ β γ, πρὸς τὴν ε γ. καὶ πάλιν ὡς ἡ δ ε, πρὸς τὴν α β, ἡ γ ε, πρὸς τὴν γ β.

Euct. Lib. 6. Fig. 13.



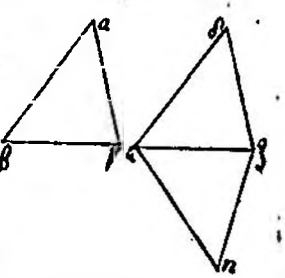
Πρό-

Πρότασις Ε΄. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀναλόγους ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον· καὶ ἔστω ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, ὡς δὲ ἡ γα, πρὸς τὴν αβ, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε. Λέγω, ὅτι τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά ἐστι, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, τὴν μὲν πρὸς τῷ β, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ δζε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ εζ, εὐθείᾳ ἡ μὲν ὑπὸ ζεη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ ἔσται παντὸς καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ πρὸς τῷ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α, ἴση· ὥστε καὶ τὸν ἀνωτέρω τὸ αβγ, τῷ εζη, τρίγωνον ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ εη, πρὸς τὴν εζ, ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὑπεκείθη καὶ ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ἄρα καὶ ἡ δε, εη, τὴν αὐτὴν ἔχουσι λόγον πρὸς τὴν εζ, καὶ τὴν εδ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρᾳ τῇ αὐτῇ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δζ, τῇ ηζ, ἴση, κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς εζ, δειχθήσεται παντὸς καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση τῇ ὑπὸ ηεζ, καὶ τὴν ηδ· καὶ ὅλον τὸ δεζ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ ηεζ, τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς, ἡ μὲν ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ εζη, ἡ δὲ πρὸς τῷ δ, τῇ πρὸς τῷ η, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ δ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 6. Fig. 14.



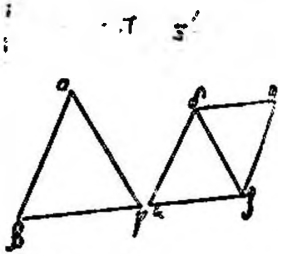
Πρότασις ς΄. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴσην, καὶ περὶ τὰς βα, αγ, πλευρὰς ἀνάλογον ταῖς εδ, δζ. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ δζ, εὐθείᾳ, πρὸς μὲν τῷ δ, σημείῳ ἡ ὑπὸ ζδη, γωνία ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ βαγ, εδζ, πρὸς δὲ τῷ ζ, ἡ ὑπὸ δζη, τῇ ὑπὸ αγβ, καὶ τὴν κ γ΄· τὰ ἄ· καὶ

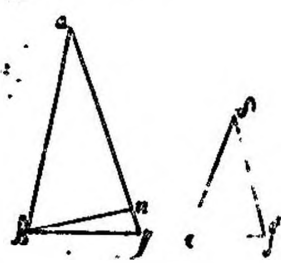
καὶ ἴσαι πάντως καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ηδζ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βγα, ἴση. Ἰσογώνια ἄρα τὰ δηζ, αγβ, τρίγωνα, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν, τὰς περὶ τὰς δ', τουτέστι τὰς παρὰ τὰς, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἡ ηδ, πρὸς τὴν δζ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ὑπόκειται καὶ ἡ ηδ, πρὸς τὴν δζ, ἄρα, καὶ τὴν θ': τουτέστι αἱ ηδ, ηδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· κοινὴς δὲ λαμβανομένης τῆς δζ, ἔστι καὶ βάσις ἡ ηζ, βάσει τῇ ζη, ἴση, καὶ ὅλον τὸ ηδζ, τριγώνῳ ὅλῳ τῷ ηδζ, τριγώνῳ ἴσον, καὶ γωνία ἡ μὲν ὑπὸ δηζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ δζη, τῇ ὑπὸ δζη, καὶ τὴν δ': τουτέστι ἡ μὲν ὑπὸ δζη, ἴση γίγνεται τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ η ἴση δείκνυται τῇ πρὸς τῷ β, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δζη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ β. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγ, τριγώνῳ τῷ δηζ, τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ, καὶ τὰς ἑξῆς.

Euct. Lib. 6. Fig. 13.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, περὶ δὲ λοιπὰς ἑκατέραν ἅμα ἅπαι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.



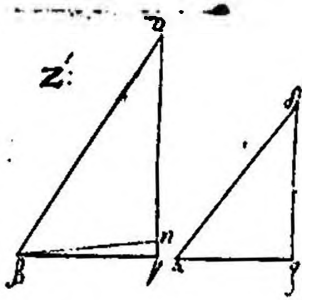
Ἐχέτωσαν δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δηζ, τρίγωνα γωνίαν μὲν τὴν πρὸς τῷ α, γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ δ, ἴσην, πλευρὰς δὲ τὰς αβ, βγ, ἀνάλογον τοῖς δη, ηζ, καὶ ἔστω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, ζ, γωνιῶν ἐλάττων ὀρθῆς. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δηζ, καὶ ἴσην ἔχει τὴν πρὸς τῷ β, ἴσην τῇ πρὸς τῷ η, εἰ γὰρ μή, ἡ μία πάντως αὐτῶν ἔσται μείζων, ἔστω δὴ αὕτη ἡ πρὸς τῷ β. καὶ συνεστάθω ἡ ὑπὸ αβκ, ἴση τῇ πρὸς τῷ η, ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ακβ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβκ, τριγώνῳ τῷ δηζ. ὥστε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ δη πρὸς τὴν ηζ, τουτέστι τὴν δ': ἀλλ' ὡς ἡ δη, πρὸς τὴν ηζ, ὑπόκειται καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ αβ, ἄρα τὴν αὐτὴν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν βκ, βγ, καὶ τῇ τὴν θ': τουτέστι ε': αἱ βκ, βγ, ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ βκγ, καὶ τὴν ε': τουτέστι δ': ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, ὑπόκειται ἐλάττων ὀρθῆς, ἄρα ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ βκγ, ἡ δὲ ὑπὸ βκα, μείζων ὀρθῆς, τῇ δὲ ὑπὸ βκα ἴση δείκνυται ἡ πρὸς τῷ ζ, ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, μείζων ὀρθῆς, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων,

ἅπε-

ἄπορον ἄρα. ὥστε ἡ ὑπὸ α β γ, μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ ι, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ἴση, καὶ τὼ ὑπόθεσιν, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστὶ, καὶ ἐπομένως τὸ α β γ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, καὶ ζ, μὴ ἐλάττων ὀρθῆς. ὅτι δὲ καὶ οὕτω τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ, δῆλον. τῷ γὰρ αὐτῷ κατασκευασθέντων, ὁμοίως δειχθήσεται ἡ μὲν ὑπὸ β η α, γωνία, ἴση τῇ πρὸς τῷ ζ, αἱ δὲ β η, β γ, ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ β η γ, ἴση ἔσται τῇ πρὸς τῷ γ. ἀλλ' ἡ πρὸς τῷ γ, μὴ ἐλάττων ὑπόκειται ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β η γ, μὴ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. τὸ β γ η, ἄρα τρίγωνον αἱ δύο γωνίαι μὴ ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἄπορον, καὶ τῷ ι ζ'. τὸ ἀδ. οὐκ ἄρα ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ α β γ, τῇ πρὸς τῷ ε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β γ, τρίγωνον τῷ δ ε ζ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 6. Fig. 16.



Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω δὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ α β γ. ἀπὸ δὴ τῆς ὑπὸ β α γ, ὀρθῆς αὐτῇ γωνίας κείσθω κάθετος ἐπὶ τὴν β γ, βάσιν ἡ α δ. λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν α β δ, α δ γ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ τε α β γ, ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ τῷ α β γ, α β δ, τριγώνων αἱ ὑπὸ β α γ, β δ α, γωνίαι, ἴσαί εἰσιν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ β, πάντως καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ β α δ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ α β γ, α β δ, τρίγωνα. καὶ κοινὸν δ': τὸ παρόντος, ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ β, πρὸς τὴν β α, ἡ β α, πρὸς τὴν β δ. ὡς δὲ ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, ἡ β δ, πρὸς τὴν δ α. τὰ ἄρα α β γ, α β δ, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι, καὶ τὸν α': ὅπερ τὸ παρόντος. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ α δ γ, ὅμοιον τῷ α β γ. ἔχουσι γὰρ ἴσας τὰς ὑπὸ β α γ, α δ γ, γωνίας, καὶ κοινὴν τὴν πρὸς τῷ γ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δ α γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ β, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ α β γ, α δ γ, καὶ τὴν δηθεῖσαν δ': ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ἐπομένως ὅμοιόν ἐστι καὶ τὸ α δ γ, τῷ α β γ. ἑκάτερον ἄρα τῶν α β δ, α δ γ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ ὅλῳ

α β γ.

αβγ. ὅτι δὲ καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά εἰσι τὰ αὐτὰ δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βδα, γωνία τῇ αβδ, τριγώνου ἐστὶ ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ὑπὸ γδα, τῇ αδγ, τριγώνου, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, λείπεται δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῇ β, ἴση τῇ ὑπὸ δαγ, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ, τῇ πρὸς τῇ γ. πάντως γε τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αδγ, τριγώνῳ, καὶ κοινὴν τινὰ ὑποτείνουσαι δ': ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ αὐτὴ δα, πρὸς τὴν δγ, ὡς δὲ ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γα, καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἡ γα, πρὸς τὴν αδ. τὰ ἄρα αβδ, αδγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, δέδεικται δὲ ὅμοια ἑκάτερον τῷ ὅλῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α':

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν πίπτουσα κάθετος, μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β':

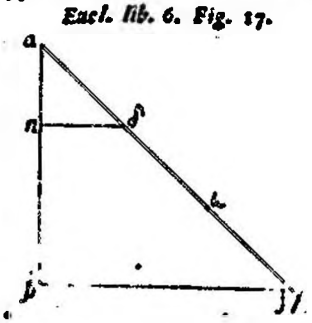
Ἔτι τῆς τε βάσεως καὶ ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἐστὶν ἀνάλογον. ἡ μὲν γὰρ αβ, μέση δέδεικται ἀνάλογον τῆς βγ, βάσεως καὶ βδ, τμήματος. ἡ δὲ αγ, τῆς βγ, βάσεως καὶ γδ, τμήματος.

Πρότασις Θ': Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω δὴ ἀφελεῖν τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας μέρος, δὸς εἰπεῖν, τρίτον. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αγ, εὐθεῖα, γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αβ, τὴν τυχοῦσαν. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς αγ, τὸ τυχὸν μέρος αδ, καὶ κείσθω ἴσον γινέσθω τὸ, τε δε, καὶ ε ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ. ἀπὸ δὴ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ βζ, ἡ δη, καὶ τὸ αη, μέρος γ': ἔστι τῆς αβ. ἐπεὶ γὰρ τὴν βζ: τὸ παρόντος, ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν αζ, ἔστι καὶ ἡ αη, πρὸς τὴν αβ. ἀλλ' ἡ αδ, τρίτον μέρος εἴληπται τῆς αζ, ἄρα καὶ ἡ αη, γ': μέρος ἐστὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν:

Εucl. lib. 6. Fig. 17.



Πρότασις Ι': Πρόβλημα.

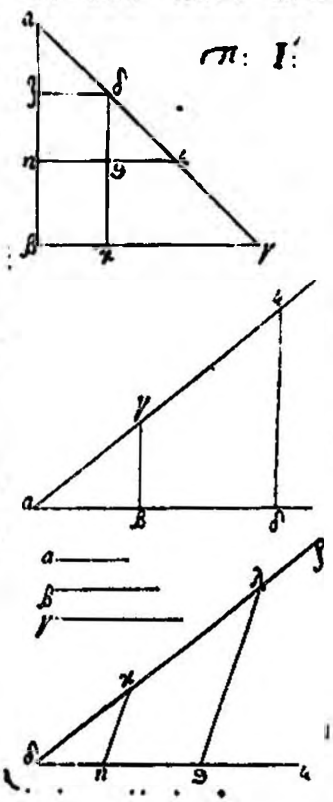
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τμηθῆναι.

Ἔστω δὴ τμηθῆναι τὴν αβ, ἄτμητον εὐθεῖαν ὁμοίως τῇ αγ, τετμημένῃ καὶ τὰ δ' ἐπὶ τὰ ε, σημεῖα. Κείσθωσαν οὕτω αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε γωνίαν

ποιεῖν

ποιεῖν πρὸς τῇ α, τῷ τυχόσαν. ἐπιζεύχθείσης δὴ τῆς βγ, διήχθωσαν ἀπὸ τῶν ε, ᾗ δ, σημεῖα παράλληλοι τῇ αὐτῇ βγ, αἱ δζ, εη. ἀπὸ δὴ τοῦ δ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ δκ, τέμνουσα τὸν εη, κατὰ τὸ θ, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμά εἰσι τὰ ζθ, θβ, παραλληλόγραμμα, ἴσον ἐστὶ τῷ ζη, ἡ δὲ θκ, τῇ ηβ. ἀλλὰ τετράπλευρον τὸ δκγ, παράλληλος ἐστὶ καὶ ἡ εθ, τῇ κγ, πλευρᾷ, ἄρα, καὶ τὴν β΄: τὸ παρόντος, ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὸν θδ, οὕτως ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. Ἐπεὶ δὴ καὶ τετράπλευρον τὸ αηε, παρὰ τὴν ηε, πλευρὰν ἐστὶ παράλληλος ἡ δζ, παντὶ γε, καὶ τὴν αὐτὴν, ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν δα, ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα, διὰ τὸ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. ἄρα καὶ ἡ αβ, ὁμοίως τέτμηται τῇ αγ, καὶ τὸ προσαχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. Lib. 6. Fig. 18.



Πρότασις ΙΑ΄: Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστω δὴ εὑρεῖν τρίτην ἀνάλογον τῇ αβ, αγ, εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ δοθεῖσαι αβ, αγ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τὴν τυχοῦσαν ποιεῖν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ α. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γβ, ἐκβαλλομένων δὴ τῶν αβ, αγ, καὶ τοῦ συνηχὲς, ἔστω ἡ βδ, ἴση τῇ αγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ δε, καὶ ἡ γε, ἔστω ἡ ζητουμένη. καὶ γὰρ τὴν β΄: τὸ παρόντος ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γε, ἀλλ' ἡ βδ, εἴληπται ἴση τῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γε. ἡ γε, ἄρα τρίτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, αγ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΒ΄: Πρόβλημα.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ζητεῖται δὴ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ τυχοῦσαι δε, δζ, εὐθεῖαι τυχοῦσαν ποιοῦσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ δ, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δη, τῇ δὲ β, ἡ ηθ, καὶ τῇ γ, ἡ δκ. καὶ τῇ ηκ, ἐπιζεύχθείσῃ, παράλληλος ἤχθω ἀπὸ τοῦ θ, ἡ θλ. καὶ ἡ κλ, ἔσται ἡ ζητουμένη. καὶ γὰρ τὴν β΄: τὸ παρόντος, ὡς ἡ δη, πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ δκ, πρὸς τὴν

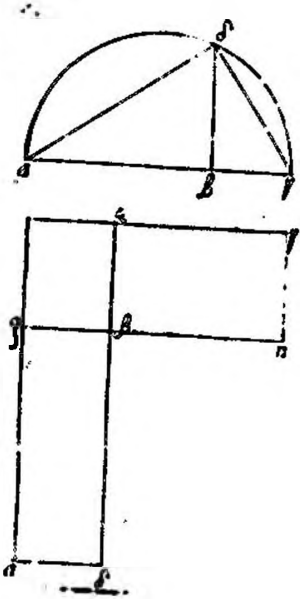
κλ, ἀλλ' ἡ μὲν δκ, εἰλήφται ἴση τῇ α, ἡ δὲ κθ, τῇ β, ἡ δὲ κλ, τῇ γ. ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ γ, πρὸς τὴν κλ. ἡ δὲ κλ, ἄρα πάρτα ἐστὶν ἀνάλογον τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Δυὸ δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν δὴ αἱ αβ, βγ, εὐθεῖαι, καὶ ζητεῖται ἡ μέση ἀνάλογον. Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ αβ, βγ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι, καὶ γεγράφθω περὶ τὴν διάμετρον τὴν αγ, ἡμικύκλιον τὸ αδγ· καὶ ἀπὸ τοῦ β, διῃρήσθω κάθετος ἡ βδ, καὶ αἰ δα, δγ ἐπεζεύχθωσαν. Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ αἱ αδ, δγ· καὶ ἐπεὶ τὸ αδγ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι, καὶ τὰς λα': ἀπὸ δὲ τῆς πρὸς τῇ δ, αὐτῇ ὀρθὰς γωνίας πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τὴν αγ, βάσιν ἡ δβ. ἄρα, καὶ τὸ α': πόρισμα τῆς η': τὸ παρόντος ἡ βδ, μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῶν αβ, βγ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Euclid. Lib. 6. Fig. 29.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μίᾳ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστωσαν ἴσα τὰ αβ, βγ, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ἴσας τὰς πρὸς τῇ β, γωνίας. Λέγω δὴ, ὅτι αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι· καὶ ἔστιν ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βε. Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ δβ, τῇ βε, καὶ ἔστω παίπερ ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ εβ, βζ, καὶ τὸν ι': τῶν α': καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ ιζ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν τὰ αβ, βγ, ἴσα ἐστὶ, καὶ τῇ ὑποθέσει, πάντως καὶ τὸν ζ: τῶν ε': τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ ιζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ ζι, τὸ ει, πρὸς τὸ αὐτὸ ζι. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ, πρὸς τὸ ζι, ἔστι καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, καὶ τὸν δ': τῶν παρόντος. ὡς δὲ τὸ ει, πρὸς τὸ ζι, ἡ εβ, πρὸς τὴν ζβ, ἄρα καὶ ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βε. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν αβ, βγ, παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βε. Λέγω, ὅτι τὸ αβ, βγ, πα-

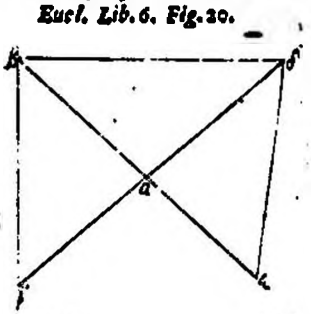
παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστί. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ἀναγραφὴν ὡς μὲν ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἔστιν ἡ αὐτὴ τὸ η ε, πρὸς τὸ εζ, ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, τὸ δζ, πρὸς τὸ εζ. ἀλλ' ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ὑπεκείθη καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, ἄρα τὰ αβ, βγ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ εζ, καὶ κεῖται τὸν Θ΄: τὰ ε΄: ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. τῶν ἴσων τε ἄρα, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων αἱ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ΄: Θεώρημα.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν βριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐστωσαν δὴ ἴσα βρίγωνα τὰ αβγ, αδε, ἔχοντα τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ δαε. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν βριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστιν ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ὡς ἡ εα, πρὸς τὴν αβ. Κείσθω γὰρ ἡ γα, ἐπ' εὐθείας τῇ αδ, καὶ ἔστω παύτως, καὶ τὴν ιέ: τὸ ά: καὶ ἡ βα, ἐπ' εὐθείας τῇ αε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βδ.

Euel. Lib. 6. Fig. 20.



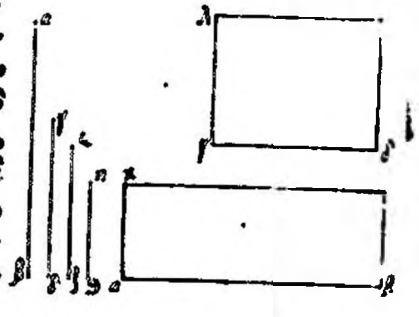
καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, αδε, βρίγωνα ἴσα ἐστί, παύτως γὰρ, καὶ τὴν ζ΄: τὸ ε΄: ὡς τὸ αβγ, βρίγωνον πρὸς τὸ βαδ, οὕτω καὶ τὸ αδε, πρὸς τὸ αὐτὸ βαδ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβγ, πρὸς τὸ βαδ, ἔχει, καὶ ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ὡς δὲ τὸ αδε, πρὸς τὸ αὐτὸ βαδ, ἔχει καὶ ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, καὶ τὴν ά: τὰ παρόντες, ἄρα, καὶ τὴν ιά: τοῦ ε΄: ὡς ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ά: Ἀλλὰ δὴ ἔστω καὶ ὡς ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἡ εα, πρὸς τὴν αβ. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, βρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδε. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἔστι καὶ ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, καὶ ὡς μὲν ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἔστι καὶ τὸ αβγ, βρίγωνον πρὸς τὸ βαδ, ὡς δὲ ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, τὸ αδε, πρὸς αὐτὸ τὸ βαδ, καὶ τὴν ά: τὰ παρόντες, παύτως γὰρ τὰ αβγ, αδε, βρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ βαδ, καὶ τὴν ιά: τὰ ε΄: καὶ κατὰ τὴν Θ΄: τὰ αὐτὰ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. Τῶν ἴσων τε ἄρα καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν βριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ, εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Συνεστάθω γὰρ ἐπὶ τῶν α β, γ δ, κάθετοι αἱ α κ, γ λ, καὶ ἔστω ἡ μὲν α κ, ἴση τῇ η θ, ἡ δὲ γ λ, τῇ ε ζ, καὶ συμπεπληρώθω τὰ β κ, δ λ, παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ τὴν ὑποτείνουσαν, καὶ τῇ μὲν ε ζ, ἴση εἴληπται ἡ γ λ, τῇ δὲ η θ, ἡ α κ, παίσης γὰρ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔστι καὶ ἡ γ λ, πρὸς τὴν α κ, τῶν ἄρα β κ, δ λ, ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ· εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια, ἄρα καὶ τὴν ἀντίπουν τὸ β κ, δ λ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἀλλὰ τὸ μὲν β κ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, ἄκρων, ἴση γὰρ ἡ α κ, τῇ η θ, τὸ δὲ δ λ, τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, μέσων, ἴση γὰρ ἡ γ λ, τῇ ε ζ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἦν τὸ α'.

Euclid. Lib. 6. Fig. 21.



Ἐστω δ' ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Λέγω, ὅτι αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ μὲν β κ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ α κ, τῇ η θ, τὸ δὲ δ λ, τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, ἴση γὰρ ἡ γ λ, τῇ ε ζ· παίσης γὰρ τὰ β κ, δ λ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἀλλὰ δὲ καὶ ἰσογώνια, ἄρα καὶ τὴν ἀντίπουν, ἀντιπεπόνθασιν αὐτῶν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἡ γ λ, τουτέστιν ἡ ε ζ, πρὸς τὴν α κ, τουτέστι τὴν η θ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

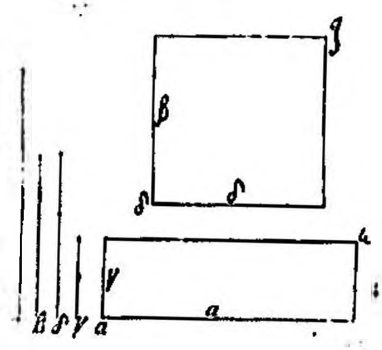
Πρό-

Πρότασις ΙΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ῥᾶες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῆς ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. Καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ ῥᾶες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν αἱ α, β, γ, εὐθεῖαι ἀνάλογον, ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. εἰλήφθω γὰρ ἡ δ, ἴση τῇ β, ᾗ ἔστωσαν πάλιν αἱ α, β, δ, γ, ἀνάλογον. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. ἀλλὰ τὴν β, ἴσην ἔθηκε τῇ δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ δ, πρὸς τὴν γ. εἰ δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α γ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν α γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι αἱ α, β, γ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. Λαβεῖσαι γὰρ τῆς δ, ἴσης τῇ β, συναμφοτέραν ἀπὸ μὲν τῶν α γ, τὸ α ε, παραλληλόγραμμον, ἀπὸ δὲ τῶν β δ, τὸ δ ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ α ε, ἴσόν ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῷ ἀπὸ τῆς β, τετραγώνῳ, τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ δ, τῇ β, ἄρα τὸ α ε, ἴσόν ἐστι τῷ δ ζ. εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια τὰ α ε, δ ζ. ἄρα αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἀντιπεπόνθασιν, καὶ τὴν ὡς ἄρα ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ δ, πρὸς τὴν γ. ἀλλ' ἡ δ, ἴση ἐστὶ τῇ β, ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ β, πρὸς τὴν γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

Euclid. Lib. 6. Fig. 22.



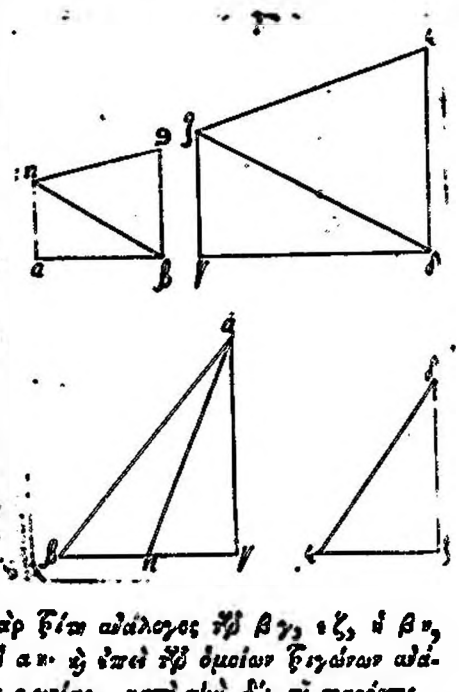
Πρότασις ΙΗ΄: Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἀναγράψαι ἀπὸ τῆς α β, δοθείσης εὐθείας, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθυγράμμῳ τῷ δοθέντι γ ε, εὐθυγράμμῳ. Ἐπιζεύχθω δὴ ἡ ζ δ. καὶ συνεστάθωσαν ἐπὶ μὲν τῆς α β, εὐθείας, καὶ τῶν πρὸς αὐτῇ σημείων α, καὶ β, ἡ μὲν ὑπὸ α β η, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γ δ ζ, ἡ δὲ ὑπὸ β α η, τῇ ὑπὸ δ γ ζ. πρὸς δὲ τῇ η β, εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς η, καὶ β, ἡ μὲν ὑπὸ η β θ, γωνία συνεστάθω ἴση τῇ ὑπὸ ζ δ ε. Λέγω, ὅτι τὸ α θ, ὁμοιόν ἐστι τῷ γ ε. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ α β η, γωνία, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ γ δ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς

πρὸς τὴν γ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α κ β, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ ζ δ. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ α β κ, τριγώνῳ τῷ γ δ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β κ, ἡ ζ γ, πρὸς τὴν κ α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ κ β Θ, τριγώνῳ, ἰσογώνιον τῷ ζ δ ε, καὶ ἔσται ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β κ, ἡ ζ ε, πρὸς τὴν κ Θ, καὶ ἔτι ἡ ε δ, πρὸς τὴν Θ β. ἀλλ' ὡς ἡ δ ζ, πρὸς τὴν β κ, ἐδείχθη καὶ ἡ ζ γ, πρὸς τὴν κ α, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β, ἄρα καὶ τὴν ι ά: τοῦτ' ἔστιν ὡς ἡ ζ γ, πρὸς τὴν κ α, οὕτως ἡ ζ ε, πρὸς τὴν κ Θ, καὶ ἡ ε δ, πρὸς τὴν Θ β, καὶ ἔτι ἡ γ δ, πρὸς τὴν α β. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ α κ β, γωνία ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ γ ζ δ, ἡ δὲ ὑπὸ β κ Θ, τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ α κ Θ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ γ ζ ε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ α β Θ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ δ ε. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῇ α, ἴση τῇ πρὸς τῇ γ, ἡ δὲ πρὸς τῇ Θ, τῇ πρὸς τῷ ε. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ α Θ, τῷ γ ε. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, παράπερ καὶ τὸν δ: ὅμοιον τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐστιν. Λ'πὸ τῶν δοθεισῶν ἄρα εὐθειῶν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 6. Fig. 23.



Πρόπασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς.

Ἔστωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, ἴσην μὲν ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὰς δὲ β γ, ε ζ, ὑποτεινούσας ὁμολόγους. Λέγω, ὅτι τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ δ ε ζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ β γ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ε ζ, ὁμόλογον πλευράν. Εὑρήσθω γὰρ τρίτη ἀνάλογον τῇ β γ, ε ζ, ἡ β κ, τῇ τὴν ι ά: τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α κ. καὶ ἐπεὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καθὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, παράπερ καὶ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτως καὶ ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ. ὥστε καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. ὡς δὲ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, γίγονται καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β κ, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, ἔστι καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν β κ, ὥστε τῶν α β κ, δ ε ζ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἄρα τῶν ι ά: τοῦ παρόντος, τὰ α β κ, δ ε ζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἀλλ' ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β κ, ἔστι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον πρὸς τὸ α β κ, τῶν ι ά: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν β κ, ἔχει καὶ τὸ α β γ, τρίγ: πρὸς τὸ

δ ε ζ,

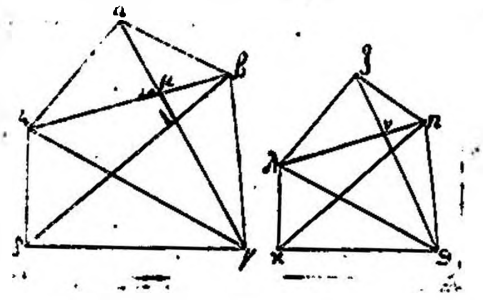
δε ζ, ἡ δὲ βγ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὴν βη, ἥπερ πρὸς τὴν εζ, καὶ τὴν ιε· ὅρον τῶν ε: ἄρα καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ ἡ βγ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν εζ, ὁμόλογον. Τὰ ὅμοια ἄρα τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ΄. Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα ταῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ αβγδε, ζηθκλ, ἴσας ὁμολόγους πλευρὰς ἐχοντα τὰς αβ, ζη. Λέγω δὴ, ὅτι τὰ αβγδε, ζηθκλ, ὅμοια πολύγωνα εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, εγ, ηλ, λθ. καὶ ἐπεὶ τὰ αβγδε, ζηθκλ, πολύγωνα, ὅμοιά εἰσι, καὶ τὴν μὲν: ὅρον τῶν παρόντων, ἴσχυσι καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζλ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ηζλ, διὰ τὴν καὶ πολυγώνων ὁμοιότητα, ἄρα τὸ αβε, ζηλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ αβε, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζηλ. ἀλλὰ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζηθ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ εβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ληθ, ἴση ἐστίν. Λύθεις ἐπεὶ τὰ αβε, ζηλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, παάπως γε, καὶ τὴν δ΄: τῶν παρόντων, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, ἕτως καὶ ἡ λη, πρὸς τὴν ηζ. ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ηζ, πρὸς τὴν ηθ, δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ λη, πρὸς τὴν ηθ. δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εβγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ληθ, ὅμοια ἄρα τὰ εβγ, ληθ, τρίγωνα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ εγδ, λθκ. ὥστε τὰ αβγδε, ζηθκλ, πολύγωνα εἰς ἴσα διήρηται τρίγωνα, καὶ ἰσοπλήθη. ὅτι δὲ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, δῆλον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, ζθ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἐστὶν ἡ ζη, πρὸς τὴν ηθ, διὰ τὴν ἤδη χρημάτων ὁμοιότητα, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ ζηθ. ἄρα τὸ αβγ, ζηθ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε καὶ ἰσογώνια. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαμ, τῇ ὑπὸ ηζν, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζην, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζνη, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αμβ, τρίγωνον τῷ ζνη.

Euel. lib. 6. Fig. 24.



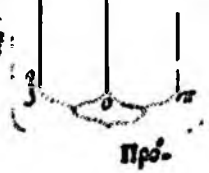
ζνκ. ὅστι καὶ ὅμοια. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, οὕτως τὸν μβ, ἡ ζκ, πρὸς τὸν νκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ βμ, πρὸς τὸν μγ, ἡ κν, οὕτως πρὸς τὸν νθ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αμ, πρὸς τὸν μγ, ἡ ζν, πρὸς τὸν νθ. ἀλλ' ὡς ἡ αμ, οὕτως τὸν μγ, ἔχει τὸ, τε αμβ, τρίγ: οὕτως τὸ βμγ, καὶ τὸ αμε, πρὸς τὸ εμγ, ἄρα καὶ τὸν εδ: τὰ δ: ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, οὕτω τὸ αμε, πρὸς τὸ εμγ. καὶ κατὰ τὸν εβ': τὰ αὐτὰ, ὡς τὸ αμβ, ἡγούμενον πρὸς τὸ βμγ, ἑπόμενον, οὕτω πᾶσα τὸ ἡγούμενα, ἥπτι τὸ βαε, τρίγωνον πρὸς πᾶσαν τὸ ἑπόμενα τὸ βεγ, δηλ: τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ὡς τὸ ζνκ, πρὸς τὸ κνθ, τὸ κζλ, πρὸς τὸ λκθ. ἀλλ' ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, δέδεικται καὶ τὸ ζνκ, πρὸς τὸ κνθ, ἄρα, κατὰ τὸν ῥηθέντα εδ: ὡς τὸ βαε, πρὸς τὸ εβγ, οὕτω καὶ τὸ κζλ, πρὸς τὸ λκθ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ αβε, πρὸς τὸ ζκλ, οὕτω τὸ εβγ, πρὸς τὸ λκθ. Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῶσι καὶ αἱ γε, θλ, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὡς τὸ εβγ, πρὸς τὸ εγδ, τὸ λκθ, πρὸς τὸ λθκ. καὶ ἐναλλὰξ, τρία ἄρα μεγέθη τὰ εαβ, βεγ, γδε, τρίγωνα ἀνάλογόν εἰσι τρισὶ μεγέθεσι τοῖς λζκ, κλθ, θκλ, τριγώνοις, ὅστι κατὰ τὸν εβ': τὰ δ: ὡς οὖν τὸ ἡγούμενον τὸ εαβ, πρὸς τὸ ἑπόμενον τὸ λζκ, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, τὸ αβγδε, πολύγωνον, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, τὸ ζκθκλ, δηλ: πολύγωνον. ἄρα καὶ αβγδε, ζκθκλ, πολύγωνα διήρηται εἰς ὅμοια τρίγωνα, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζκθκλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ περ ἡ αβ, ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ζκ, ὁμόλογον. ἐπεὶ γὰρ τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζκθκλ, πολύγωνον δέδεικται ἔχειν, ὡς τὸ αβε, τρίγωνον πρὸς τὸ ζκλ, τρίγωνον, τὸ δὲ αβε, τρίγ: πρὸς τὸ ζκλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ ἡ αβ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζκ, ὁμόλογον πλευρὰν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, τὸ ἄρα αβγδε, πολύγων: πρὸς τὸ ζκθκλ, πολύγωνον ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ ἡ αβ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζκ, ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ὅμοια ἄρα πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ ὅμοια πεντάπλευρα χωρία ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς δέδεικται καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε ἐκ τούτων ἔχομεν συναγαγεῖν καθόλου, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Β': Ἐπεὶ δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ληφθῶσιν, ὡς αἱ ξο π, ἡ ξ, πρώτη πρὸς τὴν π, τρίτην ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ πρὸς τὴν ο, δηλαδή. δῆλον, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπὸ τῆς α: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον εὐθύγραμμον, ἔχει ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ':

Euclid. Lib. 6. Fig. 25.



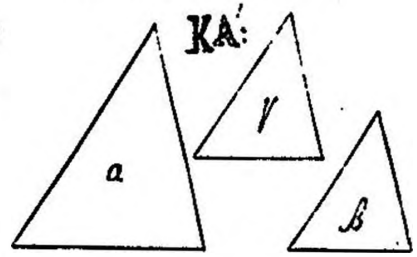
Πρό-

Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω δὶς ἑκάτερον τῶν α, καὶ β, εὐθυγράμμων ὅμοιον τῷ γ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ α, τῷ β, εὐθύγρ: καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, ὅμοιόν ἐστι τῷ γ· δῆλον, ὅτι καὶ ἰσογώνιον, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὴν δ΄: ᾗ παράπτης. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ β, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ γ, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἔχει ἀνάλογον, ὥστε, καὶ τὴν ι δ: ᾗ πέμπτη, ἰσογώνιά εἰσι καὶ ἀλλήλοις, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. καὶ τὴν δ: ἄρα ὅμοιόν ᾗ παράπτης, τὸ α β, εὐθύγραμμα, ὅμοιά εἰσι.

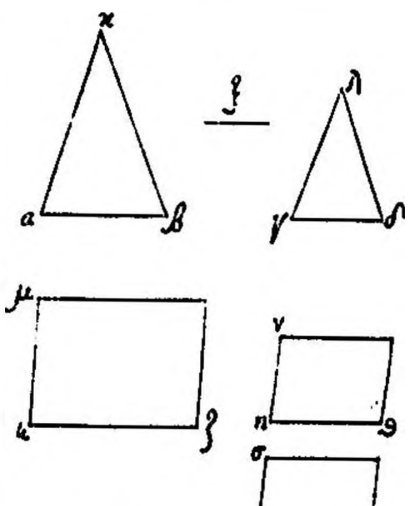
Euclid. Lib. 6. Fig. 26.



Πρότασις ΚΒ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναγεγράφθωσαν εὐθύγραμμα ὅμοιά πε καὶ ὁμοίως κείμενα, ἀπὸ μὲν τῶν α β, γ δ, τὰ κ α β, λ γ δ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, η θ, τὰ μ ζ, ν θ. Λέγω, ὅτι τὰ κ α β, λ γ δ, ἀνάλογόν ἐστι τοῖς μ ζ, ν θ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, οὕτω τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ. εὐρίθθω γὰρ τῶν μὲν α β, γ δ, τρίτη ἀνάλογος ἡ ξ. τῶν δὲ ε ζ, η θ, ἡ ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς δὲ ἡ γ δ, πρὸς τὴν ξ, ἡ η θ, πρὸς τὴν ο, καὶ τῶν κατασκευήν, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ξ. οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ο, καὶ τὴν κ β΄: ᾗ ι΄: ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α β, δ΄: πρὸς τὴν ξ, γ΄. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, δ΄: τὸ κ α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, β΄: τὸ λ γ δ.



ὡς δὲ

ὡς δὲ ἡ ε ζ, ὁμοίως ἀ: πρὸς τὴν ο, γ': ἔστω καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, ἀ: τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ν θ, β': τὸ ν θ. ἄρα καὶ τὴν ι ά: τῷ αὐτῷ, καὶ ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ γ λ δ, ἔστω τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ. ὅπερ ἦν τὸ ά:

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κ α β, λ γ δ, ἀπάλογον τοῖς μ ζ, ν θ. Λέγω, ὅτι καὶ α β, γ δ, εὐθεῖαι ἀπάλογόν εἰσι ταῖς ε ζ, ν θ. Γεγράφω γὰρ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἡ ε ζ, πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν π ρ, καὶ τὴν ι β': τῷ παρόντι. καὶ ἀναγεγράφθω ὁποτέρᾳ τῶν μ ζ, ν θ, ἀπὸ τῆς π ρ, τὸ σ ρ, ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. καὶ ἐπεὶ αἱ α β, γ δ, ἀπάλογόν εἰσι ταῖς ε ζ, π ρ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α β, γ δ, ἀναγέγραπται εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ κ α β, λ γ δ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, π ρ, τὰ μ ζ, σ ρ, ἄρα καὶ τὰ ἄδη εἰρημένα, ἔσται ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, τὸ μ ζ, πρὸς τὸ σ ρ. ἀλλ' ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, ὑπέκειτο καὶ τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ, τὸ μ ζ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ ν θ, καὶ σ ρ. ὥστι καὶ τὸν θ': τῷ ι: τὸ ν θ, ἴσον ἐστὶ τῷ σ ρ, ἔστι δὲ καὶ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, ἄρα καὶ ἡ π θ, ὁμόλογος πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ π ρ, ὁμολόγῳ πλευρᾷ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, γέγονεν ἡ ε ζ, πρὸς τὴν π ρ, παύτως γε ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν π θ. ὅπερ ἦν τὸ β': Εἰ ἄρα πίναρις εὐθεῖαι ἀπάλογόν ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ὅτι δὲ ἡ π θ, ἴση ἐστὶ τῇ π ρ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ν θ, σ ρ, ἴσα τε καὶ ὁμοιά εἰσι, καὶ ὁμοίως ἔστι κείμενα, πάντως γε, καὶ τὸν ά: τῷ παρόντι ἔρον, ὡς ἡ θ π, πρὸς τὴν π ν, ἡ ρ π, πρὸς τὴν π σ. Λέγω δ' ὅτι καὶ ἡ π ρ, ἴση ἐστὶ τῇ π θ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ π ρ, μείζων τῆς π θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ π ρ, πρὸς τὴν π σ, ἡ θ π, πρὸς τὴν π ν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ ρ π, πρὸς τὴν π θ, ἡ π σ, πρὸς τὴν π ν. μείζων δὲ ἡ ρ π, τῆς π θ, μείζων ἄρα καὶ ἡ π σ, τῆς π ν. τὸ σ ρ, ἄρα μείζων τοῦ ν θ, ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶ ἡ π ρ, τῆς π θ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, ἴση ἄρα.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῷ ἴσων τε καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ἴσαι εἰσί.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

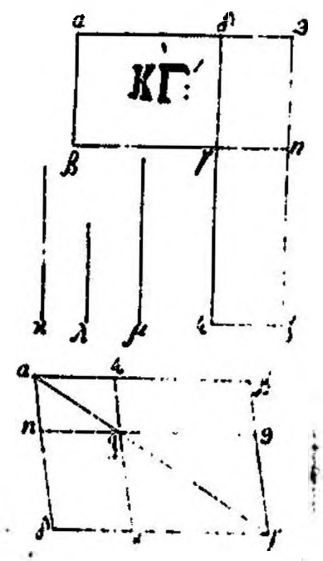
Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ α γ, γ ζ, ἰσογώνια παραλληλόγραμμα γωνίαν τὴν ὑπὸ β γ δ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ε γ η, ἴσην. Λέγω, ὅτι τὸ α γ, πρὸς τὸ γ ζ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἔκ τε τῶν πλευρῶν, τὸν ἔχει τε τῶν τῶν β γ, λόγου πρὸς τὸν γ η, καὶ τῶν τῶν ε γ, πρὸς τὸν γ δ. Κείσθω γὰρ ἡ β γ, ἐπ' εὐθείας τῇ γ η, καὶ ἔσται πάντως γε καὶ τὸν ε: τῷ ά: ἐπ' εὐθείας δὲ ἡ γ δ, τῇ γ ι, καὶ ἀποπεπληρώθω τὸ γ θ, παραλλη-

λόγραμμον. εἰπὼ εἰλήφθω τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ κ, καὶ γεγράφθω ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ η,

γ η, ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ὡς δὲ ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ι, ἡ λ, πρὸς τὴν μ, καὶ τὴν ι β΄: τοῦ παράντος. ἡ κ, ἄρα πρὸς τὴν μ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν τῶν α γ, γ ζ, παραλληλογράμμων, καὶ τὸν ε: ὅρον τοῦ παράντος. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ η, ἐστὶ τὸ α γ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γ Θ. ὡς δὲ ἡ β γ, πρὸς τὴν γ η, γέγονε καὶ ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ἄρα ὡς ἡ κ, πρὸς τὴν λ, τὸ α γ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ γ Θ. αὖθις ἐπεὶ ὡς ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ ι, ἔστι καὶ τὸ γ Θ, πρὸς τὸ γ ζ, καὶ τὸν ε: τοῦ αὐτοῦ. ὡς δὲ ἡ δ γ, πρὸς τὸν γ ι, γέγονε καὶ ἡ λ, πρὸς τὴν μ, ἄρα καὶ ὡς ἡ λ, πρὸς τὴν μ, οὕτω τὸ γ Θ, πρὸς τὸ γ ζ. Εἰσὶν ἄρα μιγέντι τὰ α γ, γ Θ, γ ζ, ἴσοι μιγέντοις ταῖς κ, λ, μ, ἐν τῇ αὐτῇ ἐκείνοις λόγῳ συνὶ δύο λαμβανόμενα, ὥστι καὶ δι' ἴσου, ὡς τὸ α γ, πρὸς τὸ γ ζ, ἡ κ, πρὸς τὴν μ, καὶ τὸν κ β΄: τοῦ ε: διπλασίων ἡ κ, πρὸς τὴν μ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ α γ, πρὸς τὸ γ ζ, ἔχει λόγον ὁμοίως τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἰσογώνια ἄρα παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. lib. 6. Fig. 27.



Πρότασις ΚΔ΄: Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω δὲ περὶ τὴν διάμετρον α γ, τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου, παραλληλόγραμμα τὰ α ε ζ η, ζ Θ γ κ. Λέγω ταῦτα, ὁμοια εἶναι τῷ τε ὅλῳ α γ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ε ζ, παράλληλός ἐστι τῇ β γ, παντὶ γε, κατὰ τὴν κ Θ΄: τοῦ α: ἡ μὲν ὑπὸ α ε ζ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α β γ, ἡ δὲ ὑπὸ ε ζ α, τῇ ὑπὸ β γ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ε α ζ, κοινή, ἄρα τὸ α ε ζ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ α β γ, τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὴν δ΄: τοῦ παράντος. ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ α ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, ὡς δὲ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ α, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ α, καὶ ὡς ἡ ζ α, πρὸς τὴν α ε, ἡ γ α, πρὸς τὴν α β. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὸ α ζ η, ἰσογώνιον τῷ α γ δ. ὥστε ὡς ἡ α ζ, πρὸς τὴν ζ η, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ δ. ὡς δὲ ἡ ζ η, πρὸς τὴν η α, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ α, καὶ ὡς ἡ α η, πρὸς τὴν α ζ, ἡ δ α, πρὸς τὴν α γ. Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ α, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ α, ὡς δὲ ἡ α ζ, πρὸς τὴν ζ η, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ δ, καὶ δι' ἴσου ἄρα, καὶ τὸν κ β΄: τοῦ ε: ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ η, ἡ β γ, πρὸς τὴν γ δ. Πάλιν ἐπεὶ δέδεικται ὡς μὲν ἡ η α, πρὸς τὴν α ζ, ἡ δ α, πρὸς τὴν α γ, ὡς δὲ ἡ ζ α, πρὸς τὴν α ε, ἡ γ α, πρὸς τὴν α β, καὶ δι' ἴσου ἄρα, καὶ τὸν

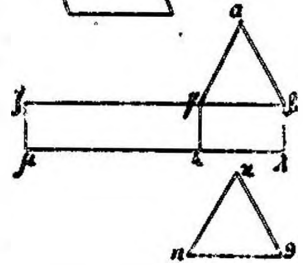
ρμθείσαι κβ΄: ὡς ἡ κα, πρὸς τὴν αι, ἡ δα, πρὸς τὴν αβ. δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ αι, πρὸς τὴν ιζ, ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς δὲ ἡ ζκ, πρὸς τὴν κα, ἡ γδ, πρὸς τὴν δα, ἄρα καὶ ἡβγ κ, αβγδ, παραλληλογράμμων ἀδάλογόν εἰσιν αἱ πλάγραι, ὅτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι, δῆλον. δέδεικται γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ αιζ, ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ ακζ, τῇ ὑπὸ αδγ. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ιαζ, δέδεικται ἴση τῇ ὑπὸ βγα, ἡ δὲ ὑπὸ αζκ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ιζκ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βγδ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ικα, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστίν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αιζκ, παραλληλόγρ: τῷ αβγδ. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλάγρας ἀδάλογον, ὡς ἄδη δέδεικται. ἄρα, καὶ τὸν α΄: ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ αὐτὸ τὸ αιζκ, παραλλ: τῷ αβγδ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ζθγκ, ὅμοιον τῷ αὐτῷ αβγδ. ὥστε, καπὶ τὸν κα΄: τὸ παρόντος, τὸ αζ, ζγ, ὅμοιόν ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ τῷ ὅλῳ αγ, ἑκάτερον ὅμοιον, Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕ΄: Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συνίστασθαι.

Ἔστωσαν δοθέντα εὐθύγραμμα τὰ, τα αβγ, καὶ δ· καὶ ζητεῖται συνεστάναι εὐθύγραμμον ὅμοιον μὲν τῷ αβγ, ἴσον δὲ τῷ δ. Παραβεβλήσθω δὴ παρὰ μὲν τὴν βγ, εὐθεῖαν, καὶ τὴν μδ΄: καὶ μέ: τῷ α΄: παραλλ. λόγραμμον τὸ βε, ἴσον τῷ αβγ, δοθέντι· παρὰ δὲ τὴν γε, τὸ εζ, ἴσον τῷ δ, ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ εγζ, ἴσην τῇ ὑπὸ γβλ, καὶ ἔστω πάντως ἐπ' εὐθείας ἡ βγ, τῇ γζ, καὶ τὴν ιδ΄: τῷ αὐτῷ. εἴπερ εὑρεθήσεται μέση ἀνάλογον τῶν βγ, γζ, ἡ κθ, διὰ τῆς ιγ΄: τῷ παρόντος· καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς κθ, εὐθύγραμμον τὸ κθλ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγ, διὰ τῆς ιε΄. τῷ αὐτῷ, καὶ τῶν ἔστω τὸ ζπ μέσον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, κθ, γζ, ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, πάντως γε, καὶ τὸ πρόσθεμα τῆς α΄. τῷ παρόντος, ἔστιν ὡς ἡ βγ, οὕτως πρὸς τὴν γζ, τοῦτο, τὸ ἀπὸ τῆς δ. αβγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β΄. κθλ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν γζ, ἔστι καὶ τὸ βε, πρὸς τὸ εζ, καὶ τὸν δ. τῷ αὐτῷ, ἄρα, καὶ τὸν ιδ΄. τῷ ι΄. ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ εζ, τὸ αβγ, πρὸς τὸ κθλ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ αβγ, τὸ εζ, πρὸς τὸ κθλ, ἴσον δὲ τὸ βε, τῷ αβγ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ εζ, τῷ κθλ. ἀλλὰ τὸ εζ, ἴσον γέγονε τῷ δ. ἄρα καὶ τὸ κθλ, ἴσόν ἐστι τῷ δ. γέγονε δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ὅμοιον τῷ αβγ, τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον συνέστα τὸ αὐτό.

Euclid. Lib. 6. Fig. 28.

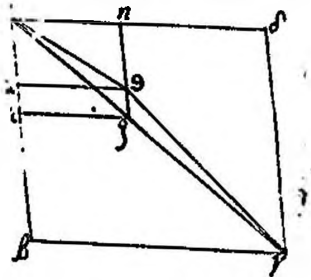


Πρό-

Πρότασις Κς'. Θεώρημα.

Ε'αν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ, ὁμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κειμένον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀφῃρήθω γὰρ ἀπὸ τοῦ αβγδ παραλληλογράμμου ὅμοιον παραλληλόγραμμον τὸ αεζη, καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγδ, ἔχον καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν ὑπὸ βαδ. Λέγω, ὅτι τὸ αεζη, παραλληλόγραμμον περὶ τὴν αὐτὴν αζ γ, διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ αβγδ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω αὐτῷ διάμετρος ἡ αθγ· καὶ διὰ τοῦ θ, διήχθω παράλληλος ὁποτέρα τῶν αδ, βγ, ἡ θκ.



Eucl. Lib. 6. Fig. 29.

καὶ ἐπεὶ τὸ ηκ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν, τὴν αθγ, ἐστὶ τῷ ὅλῳ αβγδ, παὶπως γέ, κατὰ τὴν κδ· τοῦ παραύτης, ὁμοιόν ἐστι τὸ ηκ, τῷ βδ. ὥστι καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὴν δ: ὅρον τοῦ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἡ ηα, πρὸς τὴν αη, ἀλλ' ὡς ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἔστι καὶ ἡ ηα, πρὸς τὴν αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν εη, βδ, ἄρα καὶ τὴν εδ: τοῦ δ: ἡ ηα, πρὸς ἑκατέραν τῶν αη, αε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ καὶ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ αε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ αθγ, διάμετρός ἐστι τοῦ αγ, ἀλλ' ἡ αζγ, τοῦτο αβγδ, καὶ αεζη, διάμετρός ἐστιν. Ε'αν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

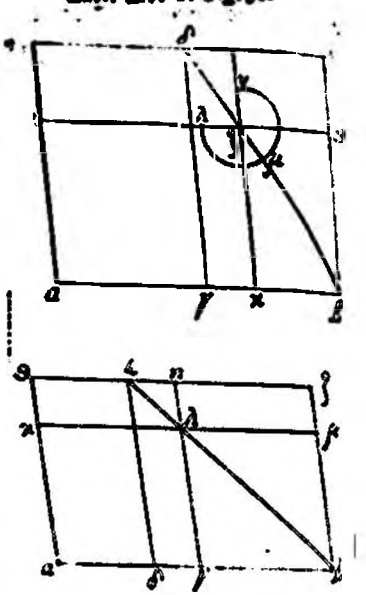
Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Παντῶν τῶν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ε'στω δὴ εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ· εἶτα παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αβ, τῷ αδ, αζ, παραλληλόγραμμα, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις τοῖς γε, κθ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας γβ, ὅπερ τῷ γε. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ, παραλληλόγραμμον, δηλ: τὸ αδ, μεῖζόν ἐστι τοῦ αζ. καὶ γὰρ τῶν ὑποθέσιν τὸ κθ, ὅμοιόν ἐστι τῷ γε, ὥστι, καὶ τῶν αὐτῶν, τὸ κθ, γε, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. ἤχθω πάλιν διάμετρος αὐτῶν ἡ δβ, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ χῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζε, κατὰ τὴν μ·γ': τοῦ δ: κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ κθ. ὅλον ἄρα τὸ γθ,

ἴσον ὅλῳ τῷ κε. ἀλλὰ τὸ γϑ, ἰσόπλευρόν ἐστι τῷ γκ, καὶ τῷ λς· καὶ αὐτῷ, ἄρα καὶ τὸ κε, ἰσόπλευρόν ἐστι τῷ γκ. κοινὸν δὲ λαμβανομένου τοῦ γζ, ὅλον τὸ αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ λμν, γνώμονι· καὶ δὲ λμν, γνώμονος μεῖζόν ἐστι τὸ γε, ὅλον, ἄρα τὸ γε, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ αζ. ἀλλὰ τῷ γε, ἴσόπλευρόν ἐστι τὸ αδ, καὶ τῷ ῥηθείσῃ λς· καὶ δ: τὸ αδ, ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ αζ.

Euclid. Lib. 6. Fig. 30.



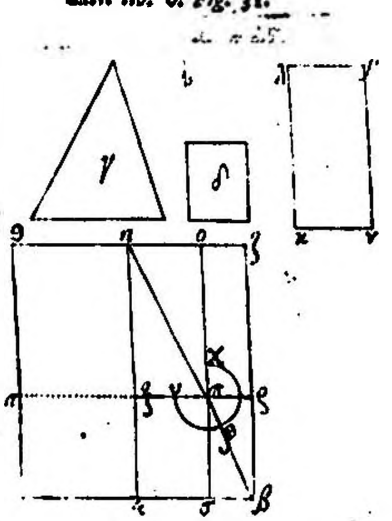
Παραβεβλήϑωσαν δὲ πάλιν παρὰ τὴν αβ, τετμημένην δίχα, κατὰ τὸ γ, τὰ αλ, αι, παραλληλόγραμμα, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος τῆς ἡμισείας αδ, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις, τοῖς γμ, δζ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ. Λέγω δὴ, τὸ αλ, μεῖζον εἶναι τοῦ αι. κεῖ γὰρ τῷ κδ·: τοῦ παράπλευρα, ἐπεὶ τὸ γμ, δζ, ὁμοιά ἐστι, περὶ τὴν αὐτὴν πλευρὰς εἰσὶ διάμετρον. Ἔστω δὴ διάμετρος αὐτῶν ἡ οβ, καὶ καταγεγράφϑω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζλ, ἴσόπλευρόν ἐστι τῷ λϑ, καὶ τῷ λς·: τοῦ δ: τὸ δὲ λζ, ἴσόπλευρόν ἐστι τῷ δλ, κατὰ τὸν μγ·: τοῦ αὐτοῦ, παύτως γε καὶ τὸ δλ, ἴσόπλευρόν ἐστι τῷ λϑ. ἀλλὰ τὸ λϑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε, ἄρα καὶ τὸ δλ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε. κοινὸν δὲ ἐλλημμένου τοῦ δκ, ὅλον ἄρα τὸ αλ, ὅλου τοῦ αε, μεῖζόν ἐστι. παύτων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐϑεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗ'. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοϑεῖσαν εὐϑεῖαν τῷ δοϑέντι εὐϑυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλείπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοϑέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐϑύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίως ὄντως τοῦτο ἐλλείμματος, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, παραλληλογράμμου.

Δοϑείσα εὐϑεῖα μὲν ἡ αβ, εὐϑύγραμμον δὲ τὸ γ, παραλληλόγραμμον δὲ τὸ δ. καὶ ἐπιτετάχϑω παραβληϑῆναι παρὰ τὴν αβ, εὐϑεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δ. τὸ δὲ γ, ἔστω μὴ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τῶν παραβληϑησομένῳ.

σομένω παραλληλογράμμω, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς ἡμισείας. Τμηθήτω δὴ, καὶ τὴν ι: τῶ δὲ: ἡ αβ, δίχα καὶ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τῆς αε, ἀναγεγράφθω ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τῶ δοθέντι δ, παραλληλογρ: τὸ αη, παραλληλόγρ: διὰ τῆς ιή: τῶ παρόντος, καὶ ἀναπεπληρώθω τὸ χῆμα. εἰ οὖν τὸ τὸ αη, ἴσον ἐστὶ τῶ δοθέντι γ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. ἐλλείπει γὰρ τῶ εζ, παραλληλογράμμ: ὁμοίω ὄντι τῶ δ, δοθέντι. Εἰ δὲ μὴ ἴσον, ἔσται πάντως μεῖζον. ἢ γὰρ ἔλαττον, καὶ τοῖς ὑπόθεσιν. ἀλλὰ δὴ τὸ αη, ἴσον ἐστὶ τῶ εζ, καὶ τὸν λς: τῶ δὲ: ἄρα τὸ εζ, μεῖζόν ἐστι τῶ γ. Συναχθήσεται δὴ, καὶ τοῖς ιε: τῶ παρόντος, τὸ λιν μ, παραλληλόγραμμον ἴσον μὲν τῶ ὑπεροχῆ, ἣ ὑπερέχει τὸ εζ, τῶ γ, ὁμοίον δὲ τῶ δοθέντι δ. καὶ ἔσται πάντως ὅμοιον καὶ τῶ εζ, κατὰ τὸν κδ: τοῦ παρόντος. ἔστω δὴ ὁμόλογος, ἡ μὲν λν, τῆ νι, ἡ δὲ λμ, τῆ νζ. καὶ ἐπεὶ τὸ εζ, ἴσόν ἐστι συναμφοτέροις τοῖς γ, κμ, πάντως γε τὸ εζ, μεῖζόν ἐστι τῶ κμ, ὥστε καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶ πλευραὶ, μείζονές εἰσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶ κμ. εἰλήφθω δὴ ἡ μὲν νξ, ἴση τῆ λν, ἡ δὲ νο, τῆ λμ, καὶ τοῖς γ: τῶ δὲ: καὶ συμπεπληρώθω τὸ ξο, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸν λδ: τῶ αὐτῶ. καὶ ἔσται ἴσον τῶ κμ, καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ κμ, ὅμοιόν ἐστι τῶ εζ, ἄρα καὶ τὸ ξο, ὅμοιόν ἐστι τῶ αὐτῶ εζ, καὶ τοῖς κδ: τῶ παρόντος, καὶ περὶ τοὺς αὐτοὺς πάντως διάμετρον, καὶ τοῖς κς: τῶ αὐτῶ. Ἐστω δὴ διάμετρος αὐτῶν ἡ πβ. καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ ἔσται τὸ σρ, ὅμοιον τῶ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῶ ξο. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν εζ, ἴσόν ἐστι τοῖς γ, κμ, τῶ δὲ κμ, ἴσόν ἐστι τὸ ξο, ἄρα ὁ υφχ, γνώμων ἴσός ἐστι τῶ γ. Λοιπὸς ἐπεὶ τὸ ορ, ἴσόν ἐστι τῶ επ, καὶ τοῖς μγ: τῶ δὲ: κοινὸ λαμβανομένω τῶ σρ, ἔσται ὅλον τὸ οβ, ἴσον ὅλῳ τῶ ερ. ἀλλὰ τὸ ερ, ἴσόν ἐστι τῶ αξ, καὶ τοῖς λς: τῶ αὐτῶ, ἄρα καὶ τὸ οβ, ἴσόν ἐστι τῶ αξ. κοινὸ δὲ αὐτοῦ λαμβανομένω τῶ επ, ἔσται ὅλον τὸ απ, ἴσον τῶ υφχ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ υφχ, γνώμων, ἴσος δέδεικται τῶ γ, ἄρα καὶ τὸ απ, ἴσόν ἐστι τῶ γ, ἐλλείπει δὲ τῶ σρ, ὁμοίω ὄντι τῶ δ. παρὰ τοῖς δοθεῖσαν ἄρα δεδεῖται, καὶ τὰ ἑξῆς.



Euclid. lib. 6. Fig. 31.

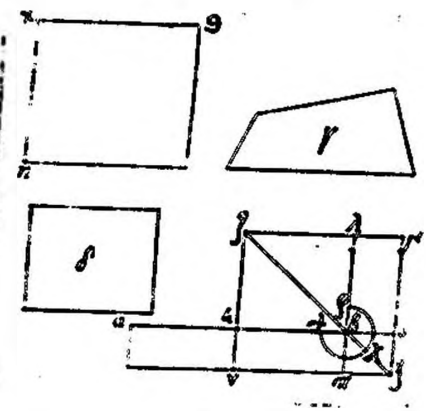
Πρό-

Πρότασις ΚΘ'. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω παραβαλεῖν παρὰ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Τετμήθω δὴ ἡ δοθεῖσα αβ, εὐθεῖα δίχα τῷ τὸ, διὰ τῆς ε: καὶ διαγεγράφθω ἐπὶ τῆς εβ, διὰ τῆς εὐ: καὶ παράκειται παραλληλόγραμμον τὸ ελ, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δ. εἰ-

Eucl. Lib. 6. Fig. 32.



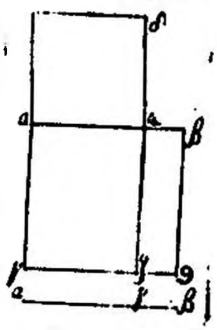
τα συναμφοτέρῳ μὲν τῷ ελ, γ, ἴσον, τῷ δὲ δ, ὅμοιον, συνεστάθω παραλληλόγραμμον τὸ ηθ, ὅπερ παύτῳ ὁμοιόν ἐστι καὶ τῷ ελ. ἔστω δὴ ὁμόλογος ἡ μὲν ηθ, τῇ ζλ, ἡ δὲ ηκ, τῇ ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ ηθ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ελ, μεῖζον δὲ πεποιθέναι καὶ ἡ μὲν ηθ, τῆς ζλ, ἡ δὲ ηκ, τῆς ζε. ἐμπεριβεβλήσθωσαν τοίνυν κατὰ τὸ συνεχὲς αἱ ζλ, ζε. καὶ ἔστω ἡ μὲν ζλμ, ἴση τῇ ηθ, ἡ δὲ ζεν τῇ ηκ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ μν, καὶ ἔστιν παύτῳ ἴσον τῷ ηθ. ἀλλὰ τῷ ηθ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ελ, ἄρα καὶ τὸ μν, ὅμοιόν ἐστι τῷ ελ. ἔστι τὰ ελ, μν, περὶ τὴν αὐτὴν εἶσι διάμετρον, κατὰ τὴν κς: ἤχθω δὴ διάμετρος αὐτῶν ἡ ζξ. καὶ ἐπεὶ τὸ ηθ, ἴσόν ἐστι τοῖς ελ, γ, παύτῳ γε καὶ τὸ μν, ἴσόν ἐστι τοῖς ελ, γ. κοινὸν δὲ ἀφῃρήσθω τὸ ελ, λοιπὸν ἄρα ὁ φχψ γνώμων, ἴσος τῷ γ. Λύθεις ἐπεὶ τὸ μβ, ἴσόν ἐστι τῷ βν, κατὰ τὴν μγ: κοινὸν προσκείσθω τὸ αν, ὅλον ἄρα τὸ αν, ἴσον τῷ βν, κατὰ τὴν λς: τῷ αὐτῷ, ἄρα τὸ αν, ἴσόν ἐστι τῷ μβ, κατὰ τὸ δ: ἀλλὰ τὸ μβ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ: ἀξιώματι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ον, ὅλον ἄρα τὸ αξ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ φχψ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ φχψ, γνώμων, ἴσός ἐστι τῷ γ. ἄρα καὶ τὸ αξ, ἴσόν ἐστι τῷ γ. ἔστι δὲ τὸ πο, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ελ, κατὰ τὴν κδ: τῷ παράκειται. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα αβ, εὐθεῖαν παραβέβληται παραλληλόγραμμον τὸ αξ, ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον τῷ πο, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Πρό-

Πρότασις Λ΄: Πρόβλημα.

Τῶν δοθέσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ε΄στω δὴ τμεῖν τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἀναγεγράφθω μὲν οὖν ἀπὸ τῆς α β, τὸ βγ, καὶ τῷ μς΄: τὸ δὲ: ᾗ παραβεβλήθω παρὰ τὴν αγ, παραλληλόγραμον τὸ γδ, ἴσον τῷ βγ, τὸ αγώνῳ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ αδ, ὁμοίῳ δὲ τῷ αὐτῷ βγ, τὸ αγ: καὶ τὴν ανπίρω, ᾗ ἔσται παῦτος καὶ τὸ αδ, τὸ αγώνιον. ᾗ ἐπεὶ τὸ γδ, ἰσόν ἐστι τῷ γβ, κοινῷ ἀφῃρήσθω τὸ αζ, ἐναπολείπεται τὸ αδ, ἴσον τῷ ηθ. ἔστι δὲ τῷ αὐτῷ ᾗ ἰσογώνιον. ἄρα, καὶ τὸ ηδ΄: τὸ παρόντος, ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ τῶν αδ, ηθ. ὥστε ὡς ἡ ζη, πρὸς τὴν ηδ, οὕτως ἡ αη, πρὸς τὴν ηβ, ἀλλ' ἡ μὲν ζη, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, καὶ τῷ λδ΄: τὸ δ΄: ἥτις τῇ αβ, ἡ δὲ ηδ, τῇ αη, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὸ αη, οὕτως ἡ αη, πρὸς τὴν ηβ. μεῖζων δὲ ἡ αβ, τῆς αη, μείζων ἄρα καὶ ἡ αη, τῆς ηβ. ὅπερ δέ ἐστιν, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ἄκρον, καὶ μέσον λέγεται τετμῆθαι λόγον, καὶ τὸν γ΄: ὅρον τῶ παρόντος. ἡ αβ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον τέτμηται λόγον, καὶ τὸ προσαχθέν.



Euclid. lib. 6. Fig. 33.

Ἄλλως. Τετμήσθω ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ τὸ γ, ὥστι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ, καὶ τῷ ιδ΄: τὸ β΄: καὶ ἔσονται παῦτος αἱ αβ, αγ, γβ, ἐξῆς ἀνάλογον. τετμήσθω ὡς ἡ ὅλη αβ, πρὸς τὸ αγ, μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ὥστι καὶ ὅπου μέσον, καὶ ἄκρον τέτμηται λόγον.

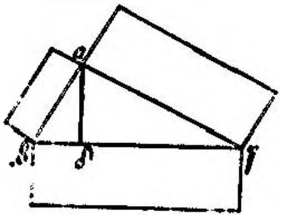
Πρότασις ΛΑ΄: Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῶν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ε΄στω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Η΄χθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τὴν βγ, ἡ αδ. καὶ παῦτος γε καὶ τῷ ιη: τὰ παρόντος τὰ αβδ, αγδ, τρίγωνα, ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν α΄: ὅρον τῶ παρόντος,

τος, ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γα, πρὸς τὴν γδ. ὅστε καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς κ': τῶν παρόντος, ὡς ἡ γβ, α: πρὸς τὴν βδ, γ': ὅπου τὸ ἀπὸ τῆς γβ, α: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, β': ὡς δὲ ἡ βγ, πρώτη πρὸς τὴν γδ, γ': ὅπου τὸ ἀπὸ τῆς βγ, α: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, β': ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὰς βδ, δγ, ὅπου τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλ' ἡ βγ, ἴση ἐστὶ ταῖς βδ, δγ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Euclid. Lib. 6. Fig. 34.



Λέγω. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίοσι, λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ τὸ δ': πόρισμα τῆς κ': τῶν παρόντος, παντὸς γε τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, εἶδος, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐν διπλασίοσι λόγῳ ἐστὶ τῶν τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, πενταγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πενταγ: ἐν διπλασίοσι λόγῳ ἐστὶ τῶν τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ, καὶ τὸ αὐτὸ πόρισμα, ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, πενταγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πενταγ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, πενταγ. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πενταγ. οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ὅμοιόν καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ὥστι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, πενταγ. πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, πενταγώνα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, πενταγώνου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, πενταγώνοις, καὶ τῷ μζ': τὸ δ': ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄρα τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ, καὶ τοῖς ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒ': Θεώρημα.

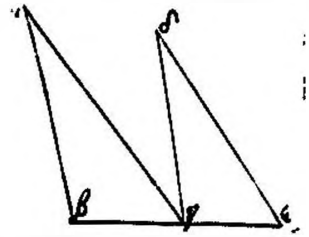
Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Τρίγωνα ἔστω τὰ αβγ, δγε, ἔχοντα τὰς βα, αγ, καὶ γδ, δε, πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον, ὡς τὴν βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὴν γδ, πρὸς τὴν δε. Συν-

πεσά-

πθήσεται καὶ μίαν γωνίαν, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους εἶναι, τὴν μὲν βα, τῇ γδ, τὴν δὲ α γ, τῇ δε. Λέγω, ὅτι αἱ λοιπαὶ αὐτῶν πλευραὶ βγ, γε, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δγ, πέπτωκε ἡ αγ, παύτως γε, καὶ τὴν κδ: τῶν δ: ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐναλλάξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τῷ αβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, τῇ δγε, καὶ τὸ δ: εὐθείωμα εἰσὶ δὲ καὶ αἱ βα, αγ, δύσὶ λοιπαῖς γδ, δε, ἄρα καὶ τὴν ς': τῷ παράντες, τὰ αβγ, δγε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δγε. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ὡς δέδεικται, ἄρα κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ βγα, παύτως γε αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγα, αγδ, δγε, δύσὶ δὲ αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, τρισὶ τῷ τριγώνου γωνίαις δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ τῷ λβ': τῷ δ: ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βγα, αγε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ καὶ τῷ ι γ': τῷ αὐτῷ αἱ βγ, γε, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συνιστῇ καὶ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 6. Fig. 35.

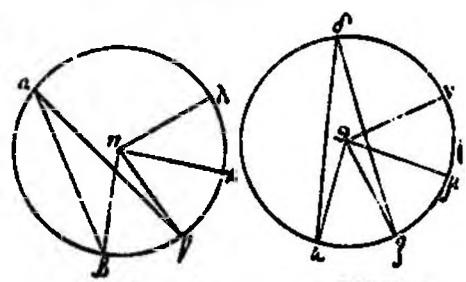


Πρότασις ΛΓ΄. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βαίνουσιν, ἐάν τε πρὸς ταῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ αἱ τομεῖς, ἄν τε πρὸς ταῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἐν τοῖς αβγ, δεζ, ἴσοις κύκλοις ἴσαι γωνίαι πρὸς μὲν τοῖς η, θ, κέντροις αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἥτε ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ. εἰλήφθωσαν γὰρ περιφέρειαι ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι τῇ μὲν βγ, αἱ γκ, κλ, τῇ δὲ εζ, αἱ ζμ, μν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, ηλ, θμ, θν. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν γκ, ηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ βγ, αἱ δὲ ζμ, μν, τῇ εζ, παύτως γε καὶ γωνίαι αἱ μὲν ὑπὸ γηκ, κηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ὑπὸ βηγ, αἱ δὲ ὑπὸ ζθμ, μθν, τῇ ὑπὸ εθζ. ὥστε ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ βλ, περιφέρεια τῆς βγ, περιφερείας ὁσαπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία τῆς

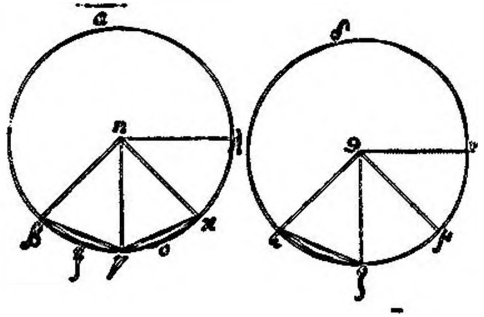
Euel. Lib. 6. Fig. 36.



ὑπὸ βαγ. διπλασίων δὲ ἡ αν περιφέρεια τῆς αζ, πολλαπλασίων καὶ ἡ ὑπὸ αθν, γωνία, τῆς ὑπὸ αθζ. ὥστε εἰ ἡ βλ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ αν, πολλαπλασίων καὶ ἡ ὑπὸ βαλ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αθν, διὰ τὰ τῶν κύκλων ἰσάκις πολλαπλάσια, καθ' ὁσονοῦν ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ γωνία τῆς γωνίας, καὶ ἴσων, ἴσων. πάλιν ἄρα μιγθέντων τῶν βγ, αζ, περιφερειῶν, καὶ τῶν ὑπὸ βαγ, αθζ, γωνιῶν, ἐπεὶ εἴληπται τῶν μὲν βγ, αζ, ἰσάκις πολλαπλάσια αἱ βλ, αν, περιφέρεια, τῶν δὲ ὑπὸ βαγ, αθζ, αἱ ὑπὸ βαλ, αθν, γωνίαι, ἄρα, καθ' ὃν ὅ: ὅρον τὸ δ: ὡς ἡ βγ, οὕτως τὸν αζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία οὕτως τὸν ὑπὸ αθζ, διπλασίων δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, καθ' ὃν κ: τῶν γ': ἡ δὲ ὑπὸ αθζ, τῆς ὑπὸ αδζ. ἄρα καὶ ὡς ἡ βγ, οὕτως τὸν αζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βαγ, οὕτως τὸν ὑπὸ αδζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ πρῶτον.

Λέγω δ' ὅτι καὶ ὁ αβγ, τομεὺς πρὸς τὸν θαζ, τομέα ἔχει, ὃν ἡ βγ, περιφέρεια, πρὸς ὃν ἡ ζ, περιφέρειαν. ἐλήφθωσαν γὰρ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς βγ, γκ, περιφερειῶν αἱ ξ, ο. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ, γκ, βξ, ξγ, γο, οκ. καὶ ἐπεὶ αἱ βκ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γκ, κκ, καθ' ὃν ε: ὅρον τὸ δ: ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ γκ, ἴσον, καὶ τὰ κθ': τῶν γ': πάλιν γκ, καθ' ὃν δ: τῶν δ: τὸ βαγ, τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ αθζ, τριγ: Διὰ δὴ ἐπεὶ ἡ βγ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ γκ, δῆλον, ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ βλγ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ γβλκ, ὥστε καὶ τὸν κζ': τῶν γ': καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βξγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γοκ. ἄρα τὰ βγξ, γκο, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, καθ' ὃν ε': ὅρον τῶν γ': καὶ δὴ τὰ κζ': τῶν αὐτῶν καὶ ἴσα. ἀλλὰ καὶ τὰ βαγ, γκ, τρίγωνα ἴσά ἐστιν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἴσός ἐστι καὶ ὁ αβγ, τομεὺς τῷ αγκ, τομεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ακλ, ἴσός ἐστιν ἑκατέρῳ τῶν αβγ, αγκ. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς αβγ, αγκ ακλ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ θαζ, θζμ, θμν, τομεῖς, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ τα βγ, γκ, κλ, καὶ ζ, ζμ, μν, περιφέρειαι, ἄρα ἑξαπλασίων ἐστὶν ακλ, τῆς βγ, πενταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ αβλ, τομεὺς τοῦ αβγ, ἑξαπλασίων δὲ ἡ αν, περιφέρεια τῆς ζ, πενταπλασίων καὶ ο θαν, τομεὺς τοῦ θαζ, τομέως. ὥστε εἰ καὶ ἡ βλ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ αν, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ αβλ, τομεὺς τῷ θαν, τομεῖ, καὶ μείζων ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων καὶ ὁ τομεὺς τοῦ τομέως, καὶ ἐλάσσων, ἐλάσσων.

Εucl. lib. 6. Fig. 37.



πσ.

πανδρων ἄρα μιγνθῶν τῆ̣ β γ, α ζ, περιφερειῶν, τῆ̣ η β γ, θ ε ζ, τμεῖων, ὅπερ ἔδειπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆ̣ μὲ̀ β γ, α ζ, περιφερειῶν αἱ β λ, α ν, περιφέρειαι, τῆ̣ δὲ̀ η β γ, θ ε ζ, τμεῖων οἱ η β λ, θ ε ν, τμεῖς, ἄρα καπὲ̀ τὸν ε΄ ὅρον τὸ ε΄ ὡς ἡ̣ β γ, περιφέρεια πρὸς τὴν α ζ, οὕτως ὁ η β γ, τμεὺς πρὸ̀ τὸν θ ε ζ, τμεῖα. ὅπερ ἦν τὸ β΄. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐαὐτε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐαὐτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὧσι βεβηκυῖαι. ὅτι δὲ̀ καὶ οἱ τομεῖς, ἔτι πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο΄ Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέ̀ α, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Τέλος τῦ Ε΄κτε τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ

ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

Τουτ'ἔστι μονάς ἐστι τὸ ἀμιγὲς καὶ ἁπλοῦν, καθ' ὃ καὶ πᾶν ὅλον, ὡς ἀδιαίρετον ἐνοούμενον, εἶναι λέγεται· καὶ ἀπὸ, ὃ μέρος μὲν ἑνὸς γίνεσθαι δύναται, αὐτὸ δὲ οὐκ ἐκ μερῶν ἂν συνίστανται, ὡς ἐπὶ τοῦ Γεωμετρικῶν, παραδείγματος χάριν μίξαν, μονὰς λέγεται ὁ δάκτυλος, ὅτι ὁ δάκτυλος μίξαν μὲν τοῦ Ποδὸς, τοῦ Βήματος, τοῦ Σταδίου, καὶ τῶν λοιπῶν Γεωμετρικῶν μίξεων γίνεται. οὐκ ἔστιν δὲ ἄλλό τι μίξαν ὑπονοῆσαι. καὶ μέμνησο δὲ ὅτου, καὶ ὁ Πῆς, εἰς λέγεται, καὶ τὸ Βῆμα εἶναι, καὶ πᾶν ἕτερον. ἀλλά γε καὶ ὅπως ἂν μονὰς ἀκριβῶς ἡ παρίστανται. ὁ μὲν γὰρ Πῆς δύναται διαιρεθῆναι ἐπ' ἄπειρον, καὶ οὐθέποτε ὑποπίπτει, ἡ δὲ μονὰς ἀδιαίρετος ὅλως, καὶ τῇ μόνῃ καταλήπτη, ὡς καὶ τὸ σημεῖον, ἀρχὴ γὰρ ἀμφω παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ὑπονοῆται.

Β'. Ἀριθμός ἐστι, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Τυπίσω Ἀριθμός ἐστιν ἡ πολλῶν μονάδων συνθεσις. ὡς ὁ a, β, γ, καὶ οἱ λοιποὶ ἀριθμοί. ὅτι δὲ πᾶν συνάγεται, ὅπερ ὁ 2 πλῆθος μονάδων ἡ παραμεῖνει, (τὸ γὰρ πλῆθος ἀπὸ τοῦ 3 ἄρχεται) κυρίως ἀριθμὸς ἡ λέγεται. ὅτι τε ἀδύ τῇ χρεάσθαι διὰ τοῦ 2 παρίσταται, ἄρα ἀριθμὸς κυρίως δὲ ὀνομάζεσθαι δίον, ἀλλὰ καταχρηστικῶς.

3	4	5
α	β	γ

Γ΄: Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

Ὡς ὁ δ, μέρος ἐστὶ τῶν ε, ζ, η, ἢ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, ὅσους καταμετρεῖ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μὲν ε, κατὰ τὰς ἐν τῷ θ, μονάδας μετρεῖ, ὁ θ, λέγεται τοῦ ε, μέρος ὁμώνυμον τῷ δ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν ζ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ κ, καὶ τὸν η, κατὰ τὰς ἐν τῷ λ, λέγεται ὁ κ, μέρος τοῦ ζ, καὶ ὁ λ, τοῦ η, ὁμώνυμον τῷ δ. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως. ἑκάστῳ τοίνυν ἀριθμῷ μέρει ὄντι ἕπεται, ὁμώνυμος λέγεται αὐτῷ ὁ τοσαύτας μονάδας ἔχων, ὁσάκις ὅπερ τὸν, ἢ μέρος ἐστὶ, μετρεῖ.

3	6	9	12
δ	ε	ζ	η
	2	3	4
	θ	κ	λ

Δ΄: Μέρη δὲ, ὅταν οὐ καταμετρῇ.

Τοσοῦτον ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν πολλαπλασιαζόμενος, ἢ ἐλλείπει, ἢ ὑπερέχει τοῦ μείζονος, ἀλλ' ποτε δὲ ἀποπληροῖ ὡς ὁ α, τοὺς β, γ, καὶ λοιπούς.

4	6	10
α	β	γ

Ε΄: Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ὡς ὁ δ, τοῦ ε, ὁ ζ, τοῦ η, καὶ ὅσοι ἄλλοι ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος λέγε, ἢ ξεῖς, ἢ πεντάκις, ἢ πλειονάκις καταμετροῦνται.

6	3	12	4
δ	ε	ζ	η

ς΄: Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν ὁ θ, ι, κ, λ, καὶ ὅσοι ἄλλοι δίχα διαιρεῖσθαι δύνανται.

4	6	8	10
θ	ι	κ	λ

Ζ΄: Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου.

Τοιοῦτοί εἰσιν, ὁ μ, ν, ξ, ο, καὶ ὅσοι δίχα διαιρεθῆναι οὐ δύνανται. ὧν ὁ μὲν μ, τοῦ θ, ὁ δὲ ν, τοῦ ι, ὁ δὲ ξ, τοῦ κ, καὶ ὁ ο, τοῦ λ, μονάδι ὑπερέχει.

5	7	9	11
μ	ν	ξ	ο

Η΄: Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατ' ἄρτιον ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν ὁ π, ρ, σ, ὧν ὁ μὲν π, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τοῦ υ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τοῦ φ, καὶ πάντες κατὰ τὸν χ. εἰσὶ δὲ πάντες ἄρτιοι, ὑφ' ὧν μετροῦνται, καθ' ὃν μετροῦνται.

8	16	32
π	ρ	σ
4	8	16
τ	υ	φ
	2	
	χ	

Θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ α, β, γ, ὧν ἕκαστος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ δ, ὅς ἐστιν ἄρτιος, καὶ ὁ μὲν α, μετρεῖται, κατὰ τὸν ε, ὁ δὲ β, κατὰ τὸν ζ, ἢ ὁ γ, κατὰ τὸν ι. οἵτινες πάντες εἰσὶ πρῶτοι.

12	20	28	
α	β	γ	
4	3	5	7
δ	ε	ζ	ι

Ι': Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμός, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ θ, ι, κε, ὧν ἕκαστος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ λ, πρώτου ὄντος ἀριθμοῦ. καὶ ὁ μὲν θ, κατὰ τὸν μ, ὁ δὲ ι, κατὰ τὸν ν, ὁ δὲ κε, κατὰ τὸν ξ, οἵτινές εἰσι πάντες πρῶτοι.

9	15	21	
θ	ε	κα	
3	3	5	7
λ	μ	ν	ξ

ΙΑ': Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσι πάντες οἱ πρῶτοι, ὡς ὁ ο, π, ρ, σ, καὶ τ. καὶ ὅσοι ἑξῆς ἀριθμοὶ μήκυνθῶσι διείποντες ἀπὸ μονάδι, ὡς ἐπὶ.

3	5	7	11	13
ο	π	ρ	σ	τ

ΙΒ': Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ φ, χ, καὶ ψ, ω, καὶ ὅσοι κοινὸν μέτρον οὐκ ἔχουσιν, ἢ τὴν μονάδα.

4	5	8	9
φ	χ	ψ	ω

ΙΓ': Σύνθετός ἐστιν ἀριθμός, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί, καὶ πάντα τὰ τῶν ἀρτίων εἴδη, ὅλως· οἱ ἀρτιάκις ἄρτιοι, οἱ ἀρτιάκις περισσοί, καὶ οἱ περισσάκις ἄρτιοι, ἔτι δὲ καὶ οἱ περισσάκις περισσοί. ὡς οἱ α, β, γ, δ,

8	10	12	9
α	β	γ	δ

ΙΔ': Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ δ, ε, ζ, η, ὧν οἱ μὲν δ, ε, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν θ, καὶ κ, οἱ δὲ ε, ζ, η, τὸν λ, μ, καὶ ζ,

4	8	6	12	
δ	ε	ζ	η	
2	4	2	3	6
θ	κ	λ	μ	ζ

ΙΕ΄: Ἀριθμὸς ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ μοναδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, ἡ γέννησίς τις.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τὸν λέγεται πολλαπλασιάζειν τὸν ρ, ὅτι ὁ ρ, τοσαυτάκις λαμβανόμενος, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῇ π, μοναδες ποιῇ τὸν σ. ἔστι εἶναι, ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν ρ, ὁ π, πολλαπλασιάζων πρὸς τὸν τ, μονάδα.

1	3	4	12
τ	π	ρ	σ

Ις΄: Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τὸν ρ, πολλαπλασιάσας τὸν σ, ποιείτω, ὁ σ, ἄρα ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ὁ π, καὶ ρ,

3	4	12
π	ρ	σ

ΙΖ΄: Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: οἱ α, β, γ, πολλαπλασιασάντωσαν ἀλλήλους. καὶ ὁ μὲν β, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δὲ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, ὁ ε, ἄρα στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ τοῦ ε, οἱ α, β, γ.

3	4	5	20	60	
α	β	γ	δ	ε	

ΙΗ΄: Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ ζ, ν, θ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἑκάστου γὰρ τῶν ζ, ν, θ, αἱ πλευραὶ πᾶσαι ἴσαι, καὶ ἕκαστος ὑπὸ δύο ἀριθμῶν ἴσων περιέχεται. ὁ γὰρ ζ, ὑπὸ τῶν ι, κ, περιέχεται. ὁ δὲ ν, ὑπὸ τῶν λ μ, καὶ ὁ θ, ὑπὸ τῶν ν ξ, ὥστε ἀρκεῖ μόνον τὸν ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθῆναι, καὶ γενήσεται ὁ τετράγωνος.

9	16	25				
ζ	ν	θ				
3	3	4	4	5	5	
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	

ΙΘ': Κύβος δὲ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, σ, καὶ οἱ ὅμοιοι. Ἕκαστος γὰρ τῶν π, ρ, σ, ὑπὸ ἴσων ἐστὶν ἀριθμῶν περιέχεται. ὁ μὲν γὰρ π, ὑπὸ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τῶν δ, ε, ζ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τῶν η, θ, ι, περιέχεται.

27	64	125	
π	ρ	σ	
9	16	25	
333	444	555	
αβγ	δεζ	ηθι	

Κ': Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ α' τοῦ β' καὶ ὁ γ' τοῦ δ' ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσι.

Παραδ: χάρ: ὅταν ᾖ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, οἱ κ λ, μ ν, ἀριθμοὶ, εἰσὶν ἀνάλογον. ὅτι ὑσαπλάσιός ἐστιν ὁ κ, τοῦ λ, τοσαυταπλάσιος ὁ μ, τοῦ ν· καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ λ, τοῦ κ, τοῦτο αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὁ ν, τοῦ μ, ὡσαύτως καὶ οἱ ξ, π, ρ, ἀνάλογόν εἰσιν. ὅτι δὲ μέρη ἐστὶν ὁ π, τοῦ ξ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ρ, τοῦ π,

4	2	6	3
κ	λ	μ	ν
9	6	4	
ξ	π	ρ	

ΚΑ': Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

Παραδ: χάρ: τῶν μὲν ἐπιπέδων ὅμοιοι ἀριθμοί εἰσιν, οἱ α, β, ὅτι τοῦ μὲν α, πλευραί εἰσιν, οἱ γ, δ. τοῦ δὲ β, οἱ ε, ζ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. τῶν δὲ στερεῶν ὅμοιοί εἰσιν, οἱ κ, θ. ὅτι τοῦ μὲν κ, πλευραί εἰσιν, οἱ ι, κ, λ, τοῦ δὲ θ, οἱ μ, ν, ξ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ.

8	32	24	48	
α	β	γ	δ	ε
	48		162	
	κ		θ	
2	4	6	36	9
ι	κ	λ	μ	ν

ΚΒ': Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ταῖς αὐτῶ μέρεσιν ἴσος ὤν.

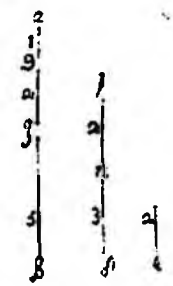
Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, ὅτι τοῦ μὲν π, μέρη εἰσὶν, οἱ σ, τ, καὶ α, μονάς, ἅπερ συναπτόμενα συμπληροῦσι τὸν π· τοῦ δὲ ρ, μέρη εἰσὶν, οἱ β, γ, δ, ε, καὶ ἡ ζ, μονάς, ἃ συναπτομένων ἀποπληροῦται ὁ ρ, ἀριθμός.

6	28	3	2	1
π	ρ	σ	τ	α
14	7	4	2	1
β	γ	δ	ε	ζ

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ε'αν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ὑπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

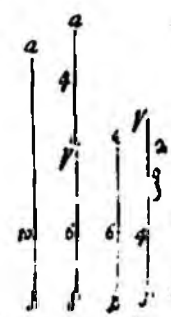
Δύο ἄδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἐκκειμένων, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ ἐλάσσονος γ δ, παρὰ τὸ μείζονος α β, ὁ λειπόμενος α ζ, μὴ καταμετρείτω τὸν πρὸ αὐτοῦ ζ β, τοῦ δι' α ζ, παρὰ τὸ γ δ, ἀφαιρεμένου, ὁ λειπόμενος γ η, μὴ καταμετρείτω τὸν η δ. τοῦ δι' γ η, παρὰ τὸ α ζ, ἀφαιρουμένου, λειφθήτω ἡ α θ, μονάς. Λέγω πάλιν τοὺς α β, γ δ, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, καὶ τῶν α θ, μονάδα μόνων τινὰς μετρεῖν, εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω τις ὁ ε. *Euclid. Lib. 7. Fig. 1.*



Ἐπεὶ οὖν ὁ ε, τὸν γ δ, μετρεῖ, μιζήσει πάντως καὶ τὸν β ζ, τὸν ἴσον τῷ γ δ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α β, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν α ζ, ἔστι δὲ καὶ τὸν δ η, τὸν ἴσον τῷ α ζ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γ δ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν γ η, ἔστι δὲ καὶ τὸν θ ζ, ἴσον τῷ γ η, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α ζ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν α θ, μονάδα, καὶ ἔστιν ἀριθμὸς ὁ ε, ὅπερ ἄτοπον. Οἱ α β, γ δ, ἄρα ἀριθμοὶ μόνῃ τῇ α θ, μονάδι μετροῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β΄: Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.



Δύο ἄδη ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τῶν α β, γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. εἰ μὲν οὖν ὁ ἔλαττων γ δ, μετρεῖ τὸν μείζονα α β, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ γ δ, ἄρα τῶν α β, γ δ, μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον ἔσται. ἄδηλος γὰρ μείζων τοῦ δ γ, αὐτὸν μετρήσει. εἰ δὲ μὴ μετρεῖ ὁ γ δ, τὸν α β, ἀφαιρεθέντος ὁ γ δ, παρὰ τοῦ α β, καὶ ὑπολειφθήτω ὁ α ε. τοῦ δι' α ε, παρὰ τοῦ γ δ, ἀφαιρουμένου, ὑπολειφθήτω ὁ γ ζ, ὁ δὲ γ ζ, τὸν α ε, μιζήτω. Λέγω τὸν γ ζ, κοινὸν μέτρον εἶναι τῶν α β, γ δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ γ ζ, μιζεῖ τὸν α ε, μιζήσει πάντως καὶ τὸν δ ζ, τὸν ἴσον τῷ α ε, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν. μετρεῖ ἄρα καὶ ὅλον τὸν γ δ, ἔστι δὲ καὶ τὸν ε β, τὸν ἴσον τῷ γ δ, μιζεῖ δὲ καὶ τὸν α ε, μιζήσει ἄρα καὶ ὅλον τὸν α β. ἐπεὶ δὲ μετρεῖ καὶ τὸν γ δ, ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις ἀριθμὸς τοὺς α β, γ δ, μείζων τὸν γ ζ, καὶ ἔστω ὁ η. ἐπεὶ οὖν ὁ η, μετρεῖ τὸν γ δ, μιζεῖ ἄρα καὶ τὸν ε β, μιζεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α β, μετρήσει ἄρα

καὶ τὸν δζ, τὸν ἴσον τῷ α ε, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γ δ, μιγνύσθω πάντες ἐξ ὧν γζ, ὁ μεῖζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γζ, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α β, γ δ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

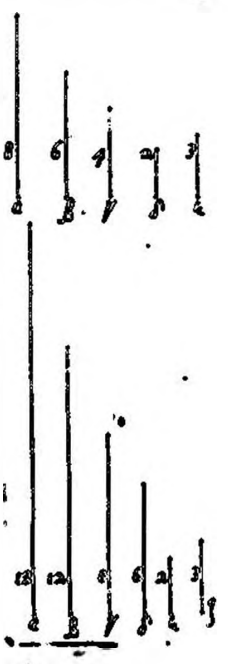
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρεῖ.

Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Euclid. Lib. 7. Fig. 2.



Τριῶν δοθέντων ἀριθμῶν τῶν α β γ, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους δοθέντων, ὅπως αὐ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, εὑρήσθω πρῶτον διὰ τῆς αὐτῆς, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, ἔστω ὁ δ. εἰ οὖν ὁ δ, τὸν γ, μετρεῖ, ὁ δ, ἔσται τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον, εἰ γὰρ μὴ, ἔστω μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α β γ, ὁ ε, μείζων τοῦ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ε, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, ἐστὶ δὲ τὸ πόσιμα τῆς αὐτῆς, τοῦτο δ' ἐστὶν ὁ δ, ἄρα ὁ ε, μετρήσει τὸν δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον.

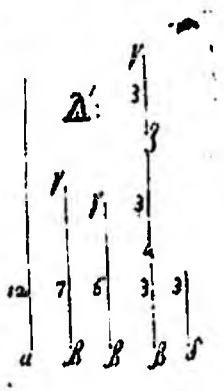
Εἰ δὲ ὁ δ, τὸν γ, οὐ μετρεῖ, διειλήσθωσαν πρῶτον τοὺς γ δ, μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μετρῶν αὐτοὺς ἀριθμὸς, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, ἐστὶ δὲ τὸ πόσιμα τῆς αὐτῆς, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ἄρα οἱ γ δ, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εὑρήσθω τοίνυν τῶν γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω ὁ ε, ὁ ε, τοίνυν μετρῶν τὸν δ, τὸ μέγιστον δηλ: κοινὸν μέτρον τῶν α β, μετρήσει πάντας καὶ τοὺς α β, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τις μείζων, μετρῶν τοὺς α, β, γ, ὁ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ ζ, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. ὅπερ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ΄. Θεώρημα.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Τῶν δύο ἄδη ἀριθμῶν α, β γ, λέγω τὸν β γ, ἐλάσσονα ἢ μέρος εἶναι ἢ μέρη τοῦ μείζονος α. Τῶν γὰρ ὑποτεθεμένων τῷ αὐτῷ ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, ἐπεὶ πᾶν ἑαυτὸν μονὰς τὸν γ β, μετρεῖ τὸν α. ὁ γ β, ἄρα μέρη ἐστὶ τοῦ α. Δεύτερον δὴ μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὑποτεθεμένων, εἰ μὲν ὁ γ δ, τὸν α, μετρεῖ, μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ α, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, τοῦ μεγίστου τῶν κοινοῦ μέτρου ἀριθμοῦ ὄντος, τῶν α, ἔστω ὁ δ. ἐπεὶ οὖν ὁ δ, τὸν γ β, μετρεῖ, τοῦ τε β ε, ε ζ, ζ γ, μέρη, πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ γ β, τοῦ δ. Λοιπὸς ἐπεὶ ὁ αὐτὸς δ, μετρεῖ καὶ τὸν α, καὶ ἕκαστον ἄρα μέρος τοῦ β γ, τουτέστιν ἕκαστον τῶν β ε, ε ζ, ζ γ, τὸν α, μετρήσει. ἄρα ὁ γ β, μέρη ἐστὶ τοῦ α, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

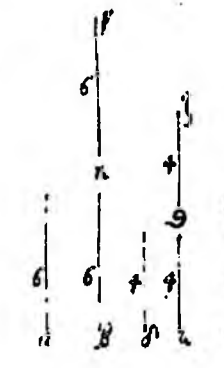
Euel. lib. 7. Fig. 1.



Πρότασις Ε΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθὸς ἀριθμῷ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρῳ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

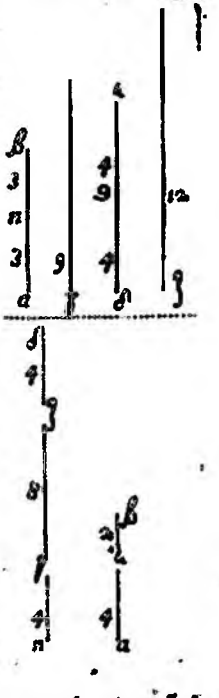
Τοῦ α ἄδη ἀριθμοῦ μέρος ἔστω τὸ γ β, ὅπερ ὁ δ, τοῦ ζ ε. Λέγω καὶ συναμφοτέρους τοὺς α, δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι συναμφοτέρων τῶν γ β, ε ζ, ὅπερ ὁ α, τοῦ γ β. Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ δ, τοῦ ε ζ, ὅσα ἄρα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ γ β, ἴσα καὶ τῷ α, τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ ἐν τῷ ε ζ, ἴσα τῷ δ. συναμφοτέρων δὴ τῶν μερῶν τοῦ γ β, τοῖς μέρεσι τοῦ ε ζ, τοσαῦτα μέρη συνάπτα ἔσονται ἐν τοῖς γ δ, ε ζ, ἴσα τοῖς α, δ, ὁμοῦ, ὅσα μέρη ἁπλᾶ ἐστιν ἐν τῷ γ β, ἴσα τῷ α. ἄρα ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ γ δ, τοῦ α, τοσαυταπλάσιοι ἔσονται καὶ οἱ γ β, ε ζ, τῶν α δ, καὶ ἑπομένως, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, καὶ συναμφότερος οἱ α δ, συναμφοτέρων τῶν γ β, ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρη ᾖ, ὃν ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστω, ἅπερ ἐστὶν ὁ εδ, τοῦ ζ. Λέγω καὶ συναμφότερος ὁ αβ, εδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται συναμφοτέρου τοῦ γζ, τὰ αὐτὰ ἅπερ ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ. Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ ἐστι καὶ ὁ εδ, τοῦ ζ, διαιρεθέντος γὰρ τοῦ αβ, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη, καὶ τοῦ εδ, εἰς τὰ τοῦ ζ, ὅσα μέρη τοῦ γ, ἐστὶν ἐν τῷ αβ. τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ τοῦ ζ, ἐν τῷ εδ. Ἔστω πάλιν ἐν μὲν τῷ αβ, μέρη τοῦ γ, τὰ αη, ηβ, ἐν δὲ τῷ εδ, μέρη τοῦ ζ, τὰ εθ, θδ. Ἐπεὶ οὖν ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἐστι καὶ ὁ εθ, τοῦ ζ, ἔσονται διὰ τὰς αὐτάρκη, καὶ οἱ αη, εθ, ἅμα τῶν γζ, ἅμα τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ αη, τοῦ γ. ὡσαύτως, καὶ οἱ ηβ, θδ, ἅμα τῶν γζ, ἅμα τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ ηβ, τοῦ γ. ὅτι δὲ μέρη εἰσὶν οἱ αη, ηβ, τούτεστιν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται καὶ οἱ αβ, εδ, τῶν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, ἔστω μέρος, ὅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς αε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, τοῦ λοιποῦ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ καὶ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. Γεγονέσθω ὁ εβ, τοῦ γη, τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ, διὰ τὰς ὑπ' ἄρα τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ ζη, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ ἐστι καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ, ἄρα ὁ αβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν ζη, καὶ πρὸς τὸν γδ. καὶ διὰ τὰς ὑπ': τοῦ δὲ ζη, καὶ γδ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. καὶ τοῦ δ' ἀφαιρουμένου τοῦ γζ, ἐγκαταλειφθήσονται καὶ οἱ γη, ζδ, ἴσοι. Ἐπεὶ δὲ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ ἐστι καὶ ὁ εβ, τοῦ γη. ἄρα ὁ εβ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται καὶ τοῦ δζ, ὅπερ ὁ αε, τοῦ γζ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, ἔστι καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ, ἄρα καὶ ὁ εβ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ τοῦ δζ, ὅπερ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, μέρη ἔστω, ἅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς αε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, τοῦ λοιποῦ ζδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος αβ, τοῦ ὅλου γδ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁποσοσοῦν ἴσος τῷ αβ, ὁ ηθ, ὃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ηθ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ· διαιρεθέντος δὴ τοῦ μὲν ηθ, εἰς τὰ τοῦ γδ, μέρη, τὰ ηκ, κθ, τοῦ δὲ αε, εἰς τὰ τοῦ γζ, τὰ αλ, λε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ εκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ αλ, τοῦ γζ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ κθ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ λε, τοῦ γζ, μείζων δὲ ὁ γδ, τοῦ γζ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ηκ, τοῦ αλ, καὶ ὁ κθ, τοῦ λε. ἀφαιρεθέντος δὴ τοῦ μὲν ημ, ἴσου τῷ αλ, τοῦ δὲ κν, ἴσου τῷ λε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ ημ, τοῦ γζ, καὶ ἑπομένως καὶ τὸν ἀναπαλιν, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ κθ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ μκ, τοῦ ζδ· ἀσαύτως καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ κθ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ νθ, τοῦ ζδ. καὶ συντιθέντι ἄρα οἱ μκ, νθ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται τοῦ ζδ, ἅπερ οἱ ηκ, κθ, ὅλῳ, τῷ ηθ, τοῦ γδ. ἐπεὶ δὲ οἱ ημ, κν, ἴσοι εἰσὶ τοῖς αλ, λε, καὶ ὁ ηθ, τῷ αβ, ἄρα καὶ τὸ γ': ἀξίωμα καὶ οἱ μκ, νθ, ὅλῳ ἴσοι εἰσὶ τῷ εβ, καὶ ἑπομένως ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ εβ, τοῦ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α' τοῦ γ': τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β' τοῦ δ'.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, ἀριθμοῦ τοῦ βγ, ἔστω ὁποσοσδήποτε μέρος, καὶ ὁ δ, τοῦ εζ, τὸ αὐτό, ὅπερ ὁ α, τοῦ βγ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α, τοῦ δ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ μέρος ἢ μέρη καὶ ὁ βγ, τοῦ εζ. καὶ γὰρ τῷ ὑποδιπλασιασθέντι, ὅσοι ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ α, εἰσὶν ἐν τῷ βγ, τοσοῦτοι ἴσοι τῷ δ, εἰσὶν ἐν τῷ εζ. Διαιρεθέντων δὴ τοῦ μὲν βγ, εἰς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς τῷ α, τοὺς βη, ηγ, τοῦ δὲ εζ, εἰς τοὺς ἴσους τῷ δ, τοὺς εθ, θζ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ βη, τοῦ εθ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ηγ, τοῦ θζ, καὶ κατὰ

τὸν ε: τῷ παρόντι, ὁ μέρος ἐστὶν ἡ βη, (τοιοῦτον ὁ α, ἴσοι γὰρ) τῷ ιθ. (τοιοῦσι τῷ δ,) τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ βγ, τῷ ιζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος τὸ αὐτὸ μέρος ὦσιν, ἑκάτερος ἑκατέρου, ὅπερ ἑνὸς τινὸς ἀριθμὸς ἑνὸς τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ πάντες ὁμοῦ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πάντων τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν ἴσων ὄντων τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ ῥηθεὶς τοῦ ῥηθέντος.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος τοῦ αὐτοῦ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὰ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρη ἔσται, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, τὰ μέρος.

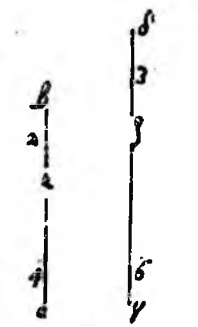
Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γ, ἕτω μέρη ἀποτελείτωσαν. καὶ ἕτερος ὁ δε, ἑτέρου τοῦ ζ, τὸ αὐτό, ἃ ὁ αβ, τοῦ γ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ δε, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. καὶ γὰρ τοσοῦτοι εἰσὶν ἐν τῷ αβ, τοῦ γ, ὅσα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ δε, τοῦ ζ. διῃρήσθω γὰρ, τοῦ μὲν αβ, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη τὰ αη, ηβ, τοῦ δὲ ε δ, εἰς τὰ τοῦ ζ, τὰ δθ, θε. ὁ πλῆθος μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ δθ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τοῦτο ἀναπάλιν, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ δθ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ηβ, τοῦ θε, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αὐτὸς γ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τοῦτο πολλαπλασίων τοῦ ἀναπάλιν, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ γ, τοῦ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αβ, τοῦ δε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 7. Fig. 6.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ὡς γὰρ ὅλος ὁ αβ, πρὸς ὅλον τὸν γδ, ἕτω ὡς ὁ αε, ἀφαιρεθεὶς πρὸς τὸν γζ, ἀφαιρεθέντα. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, πρὸς τὸν λοιπὸν ζδ, ἔσται ὡς ὅλος ὁ αβ, πρὸς ὅλον τὸν γδ. καὶ γὰρ τὸν ε: τῷ παρ: ὁ μέρος ἐστὶν ἡ μέρη ὁ αβ, τῷ χδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αε, τῷ γζ, καὶ διὰ τοῦτο ζ: τὸ αὐτὸ, καὶ ὁ εβ, τῷ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ μέρη, ὅπερ μέρος ἐστὶν ἡ μέρη ὁ αβ, τοῦ γδ.



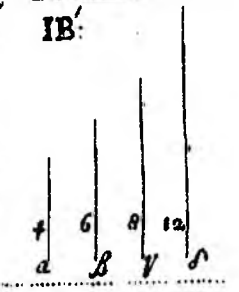
Πρό-

Πρότασις ΙΒ΄: Θεώρημα.

Ε'ὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Τῶν ἔδη α β, γ δ, ἀριθμῶν ἀνάλογον ὄντων, ἔστω ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως εἰσὶν οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. καὶ μετὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ γ, ἐστὶ τοῦ δ. καὶ δι' τοῦ ὁ: τῶν παράντες, καὶ συναμφότεροι οἱ α γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἰσὶ τῶν β δ, ὅπερ ὁ α, τοῦ β. καὶ ἑπομένως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euct. Lib. 7. Fig. 7.



Πρότασις ΙΓ΄: Θεώρημα.

Ε'ὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Τεσσάρων ἔδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἀνάλογον ὄντων, ὅπως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ δ, καὶ ἀπ' τοῦ δ': τῶν παράντες, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ β, τοῦ δ. καὶ ἑπομένως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΔ΄: Θεώρημα.

Ε'ὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἀριθμῶν ἔδη τῶν α, β, γ, καὶ δ, ε, ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντων, καὶ σὺν δύο λαμβανομένων, ἔστω ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. διὰ γὰρ τὸ ἀναπάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔσται καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν ε. Λοιπὸν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἔσται διὰ τὸ αὐτὸ, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν ε,

ἀλ

ἰσάκις ἄρα ἐστὶν ὁ α, τοῦ δ, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

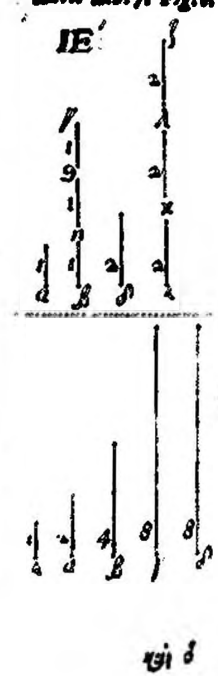
Ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τῷ πλήθει οἱ ἴσοι λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ συνθέντες ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. εἰ γὰρ μή, οὐκ οἱ ἴσοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μερῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μερῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ β': τὸν δ':

Μονὰς γὰρ ἡ α, μετρείτω τὸν βγ, καὶ ὁ δ, ἀριθμὸς τὸν εζ, ἰσάκις. Λέγω, ὅτι μετρήσει ἰσάκις καὶ ἡ α, μονὰς τὸν δ, καὶ ὁ βγ, τὸν εζ. καθ' μὲν γὰρ τοὺς ὁπόσοις εἰσὶν, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ βγ, ἴσαι τῷ α, τοσοῦτοι ἀριθμοὶ εἰσιν ἐν τῷ εζ, ἴσοι τῷ δ. Διαιρείσθω οὖτος ὁ μὲν βγ, εἰς τὰς ἴσας μονάδας τῷ α, οὔσας τὰς βη, ηϑ, ϑγ, ὁ δὲ εζ, εἰς τοὺς τῷ δ, ἴσους ἀριθμούς, τοὺς εκ, κλ, λζ, ἔσται ἄρα κατὰ τοῦτο ϑ': ὡς ἡ βη, μονὰς πρὸς τὸν εκ, οὕτως ἡ ηϑ, πρὸς τὸν κλ, καὶ ἡ ϑγ, πρὸς τὸν λζ, καθ' δὲ τοῦτο ι': ἀναπάλιν, ἔσται ὡς ἡ βη, μονὰς, πρὸς τὸν εκ, ἀριθμὸν, οὕτως ὅλος ὁ βγ, πρὸς ὅλον τὸν εζ, ἡ δὲ βη, μονὰς ἴσα ἐστὶ τῷ α, καὶ ὁ εκ, ἀριθμὸς ἴσος τῷ δ. ἄρα καὶ ὡς ἡ α, μονὰς πρὸς τὸν δ, γ': ἀριθμὸν, οὕτως ἐστὶν ὁ βγ, β': πρὸς τὸν εζ, δ': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 7. Fig. 8.



Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Τῶν δύο γὰρ ἀριθμῶν α, β, τοῦ μὲν α, τὸν β, πολλαπλασιάσαντες, γενέσθω ὁ γ, τοῦ δὲ β, τὸν α, πολλαπλασιάσαντες γενέσθω ὁ δ. Λέγω δὴ τὸν γ, τῷ δ, ἴσους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ α, μονάδας, διὰ τοῦτο ἐστὶν ἄρα. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ι, μονὰς τὸν α, κατὰ τὰς ἐν τῇ αὐτῇ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ ι, μονὰς μετρεῖ τὸν α, καὶ ὁ β, τὸν γ, καὶ διὰ τοῦτο ἀναπάλιν, ἰσάκις ἡ μονὰς ἐστὶ μετρεῖ τὸν β,

καὶ ὁ

καὶ ὁ α, τὸν γ· διηρθήσεται ἰσάκις ἔστι μέρος ἢ ε, μονὰς τὸν β, καὶ ὁ α, τὸν δ. ἄρα ὁ αὐτὸς α, ἰσάκις μέρος ἐστὶ τοῦ τε γ, καὶ δ. καὶ ἐναλλὰξ οἱ γ, δ, ἴσοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α΄: Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ μὲν πολλαπλασιάζων μέρος ἐστὶ τοῦ γενομένου κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ μονάδας, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος τοῦ αὐτοῦ, κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

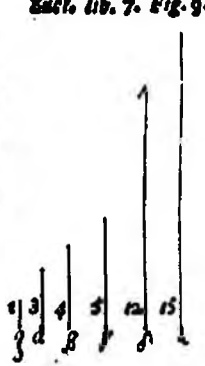
Β΄: Ἔτι δὲ ἐπεὶ ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα, ὁ πολλαπλασιαζόμενος πρὸς τὸν γενόμενον. ὥστε ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσῃ, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οὕτως ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν γενόμενον.

Πρότασις ΙΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμοὶ δύο ἀριθμὸν πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμοὶ ἤδη ὁ α, τὸν β γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ ε, ποιείτω. Λέγω δὴ, ὅτι ἔστὶν, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε. διὰ τοῦτο β΄: ποιήσματος τῆς αὐτῆς ἔσται ὡς ἡ ζ, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν δ. διὰ τοῦτο ἐπεὶ ὁ α, αὖθις τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, πεποίηκεν. ἔσται διὰ τοῦτο, ὡς ἡ ζ, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ γ, πρὸς τὸν ε. καὶ διὰ τοῦτο ι α΄: τοῦ ε΄: ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, πρὸς τὸν ε. ἄρα διὰ τοῦτο ι γ΄: τοῦ παρόντος, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

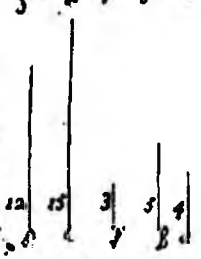
Euclid. lib. 7. Fig. 9.



Πρότασις ΙΗ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς δ, ε, ποιείτωσαν. Λέγω, ὅτι ἔστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, καὶ ὁ γ, ἄρα διὰ τοῦτο ις΄: τοῦ παρόντος, τὸν α, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, ποιεῖ. πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὸν β, τὸν ε, ποιεῖ. ἄρα διὰ τοῦτο ὡσαύτως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

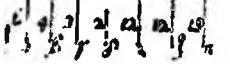


Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἀ. καὶ δ'. γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν β'. καὶ γ'. γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τῶν ἀ. καὶ δ'. γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τῶν β'. καὶ γ'. οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τέσσαρις γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, δ, ἔστωσαν ἀνάλογον ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. καὶ ὁ μὲν α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, τὸν γ, πολλαπλασ. τὸν ζ, ποιείτω. Λέγω δὴ ὡς ε ζ, ἴσους εἶναι. πολλαπλασιασάτω ἔτι ὁ α, τὸν γ, καὶ τὸν η, ποιείτω. διήνυται. Ἐπεὶ ὁ α, τὸν δ γ, πολλαπλασιάσας τὸν η ε, πεποίηκε. ἴσον ἄρα διὰ τῶν ε ζ: τὸ παρόντος, ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς β. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ε. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τὸν η, ζ, πεποιήκασιν. ἴσον ἄρα διὰ τῶν αὐτῶν, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐδείχθη καὶ ὁ η, πρὸς τὸν ε. ἄρα οἱ ε ζ, πρὸς τὸν αὐτὸν η, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ ἑπομένως διὰ τῶν θ'. καὶ ε'. οἱ ε ζ, ἴσοι εἰσὶν, ὅπερ ἔστι τὸ δ. Λέγω δὴ ὅτι, ἐπεὶ ὁ ε, ἐπὶ τὸν α. καὶ δ'. γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ β'. καὶ γ'. δηλον· τῷ ζ, ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. τῷ γὰρ αὐτῷ καταναλωθέντων, ἐπεὶ ὁ α, τὸν γ, δ, πολλαπλασιάσας τὸν η ε, πεποίηκε. ἄρα διὰ τῶν ε ζ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἔσται ὁ η, πρὸς τὸν ε, τουτέστι τὸν ζ. (ἴσοι γὰρ εἰσὶ ε, ζ.) Αὖθις ἐπεὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τὸν η, ζ, πεποιήκασιν. ἄρα διὰ τῶν αὐτῶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ η, πρὸς τὸν ζ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔσται. ὅπερ ἔδει τὸ β'. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 7. Fig. 10.



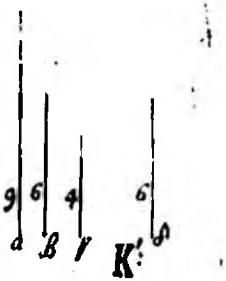
Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ῥᾴ ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσος ἔσται τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ ῥᾴ ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τρεῖς γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἀνάλογον ἔστωσαν, δηλ: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Λέγω, ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β. Τὸν γὰρ δ, ἴσον τῷ β, γενομένου, ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν γ, καὶ διὰ τῶν ἀναπάλιν, ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν β δ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν β δ,

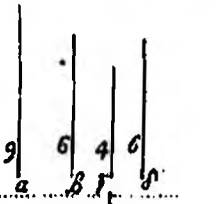
βδ, ἴσός ἐστι τῇ ἀπὸ τοῦ β, μόνου. ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ β, ὅπερ ἐστὶ τὸ δ: Euct. Lib. 7. Fig. 11.

Ε΄στω δὴ ἔστι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος τῇ ἀπὸ τοῦ β. Λέγω, ὅτι ἔσαι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Τοῦ γὰρ δ, αὐθις ἴσου τῇ β, ὑποκειμένου, ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσός ἐστι τῇ ὑπὸ τῶν β δ. ἔσαι διὰ τοῦτο ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἔστι δὲ ὁ δ, ἴσος τῇ β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἔσαι ὁ β, πρὸς τὸν γ, καὶ ἔστι τὰ β': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὡς τε ὁ μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.



Ε΄στωσαν ἤδη ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ γ δ, ε ζ. ἔστω δὲ καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ. Λέγω, ὅτι ὁ γ δ, μετρήσει τὸν α, καὶ ὁ ε ζ, τὸν β, ἰσάκις, τοσοῦτον ἑκάτερος ἑκατέρου μέρος ἐστὶ καὶ ὁ μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν ἔστωσαν μέρη, ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ γ δ, τοῦ α, τὰ αὐτὰ ἔστι καὶ ὁ ε ζ, τοῦ β, καὶ τὸν ὑπάρξαν. διαιρεθέντων δὴ τὸ μὲν γ δ, εἰς τὰ τοῦ α, μέρη, τὰ γ η, η δ, τὸ δὲ ε ζ, εἰς τὰ τοῦ β, τὰ ε θ, θ ζ, ἔσονται ἴσα τὰ γ η, η δ, τοῖς ε θ, θ ζ, τῷ πλήθει. καὶ ἑπομένως ἔσαι ὡς ὁ γ η, πρὸς τὸν ε θ, οὕτως ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ, ἄρα οἱ γ δ, ε ζ, ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς γ η, ε θ, ἐλάττοσιν ὄντων, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μέρη, ἀλλ' ἑκάτερος μέρος ἐστὶν ἑκάτερος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ὦσι ῥητοὶ ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι καθ' ἓν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται λόγῳ.

Τετραγώνων δὴ ἀριθμῶν τῶν α, β, γ, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος τῶν δ ε ζ, ἔστω ἡ ἀναλογία παραγμένη, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ὁ α, πρὸς

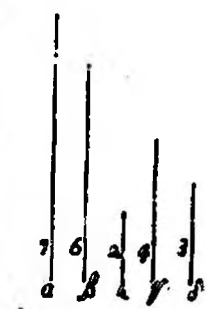
πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β ι ζ, εἰσὶν ἀνάλογον· ἡ ὑπὸ τῆς α ζ, ἴσος ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῆς β ι, καὶ τὸν ιθ: διὰ τὰς αὐτὰς ἔτι καὶ ὁ ὑπὸ τῆς γ δ, ἴσος ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῆς β ι, ἄρα ὁ ὑπὸ τῆς α ζ, ἴσος ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῆς γ δ, καὶ τὸν κ: ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὰς προειρημένας προπάσεως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 7. Fig. 12.

Πρότασις ΚΓ′: Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

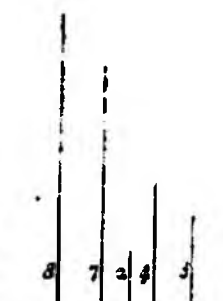
Ἀριθμοὶ ἔστωσαν οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι οἱ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰ γὰρ μὴ, ἔσονταί τινες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς α β· ἔστωσαν εἶναι οἱ γ δ· καὶ ἐπεὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, διὰ τὰς κε: ἄρα ὁ γ, τὸν α, καὶ ὁ δ, τὸν β, ἰσάκις μετρήσει, μετρήσωσαν κατὰ τὰς ἐν τῷ ι, μοναδας αἱ γ δ, τὰς α β· καὶ ὁ ι, ἄρα τὰς α β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ γ, καὶ δ, μοναδας. ἄρα οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κείνον μέτρον ἔχουσι τὸν ι, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα οἱ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΔ′: Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Οἱ α β, ἄρα ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὄντες, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινες αὐτοὺς ἀριθμοὶ, τῷ ἴσῳ ὄντες ὁ γ· καὶ ὁσάκις μὲν ὁ αὐτὸς γ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μοναδες ἔστωσαν ἐν τῷ δ, ὁσάκις δὲ τὸν β, τοσαῦται ἔστωσαν ἐν τῷ ι· ὁ γ, ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν α β, ποιείτω· διὰ τὰς ιζ: ἄρα καὶ παρόντες, ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ι, ἄρα οἱ δ ι, ἐλάχιστοι τῶν α β, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς, ὅπερ ἄτοπον. οἱ ἐλάχιστοι ἄρα ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

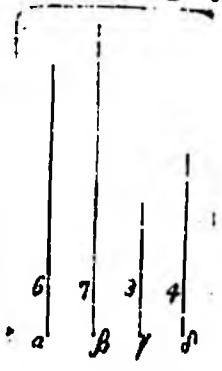


Πρό-

Πρότασις ΚΕ΄: Θεώρημα.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὴν ἴσην αὐτοῖς μετροῦν ἀριθμὸς πρὸς τὴν λοιπὴν πρῶτος ἔσται.

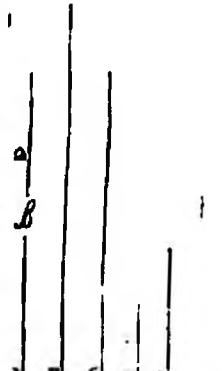
Euel. lib. 7. Fig. 13.



Τῶν αβ, γδ ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ γδ τὸν α, μηδέν ὢν πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔσται. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτὸς ἀριθμός, καὶ ἔστω ὢν ὁ δ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ δ, τὸν γδ μετρεῖ, ὁ δὲ γδ τὸν α, ὁ δ ἄρα καὶ τὸν α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν β, ἄρα οἱ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ ἀριθμόν. ὅπερ ἄτοπον. Εὰν ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κς΄: Θεώρημα.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

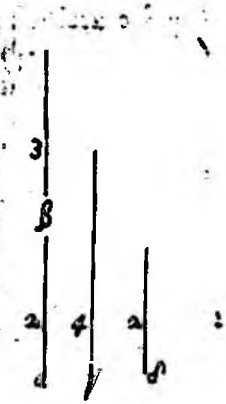


Ἀριθμοὶ γάρ οἱ αβ, πρὸς τὸν γ, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ γινόμενος δι' ἐξ αὐτῶν δ. Τὸν δ, λέγω πρῶτον εἶναι, πρὸς τὸν γ. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις ἀριθμὸς αὐτὸς, καὶ ἔστω ὢν ὁ ε. ὁ ε, ἄρα τὸν γ μηδέν ὢν πρὸς τὸν α, πρῶτός ἐστι διὰ τοῦ ἀνωτέρω, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἐν τῷ ζ, ἔστωσαν. ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν δ μηδέν ὢν τὰς ἐν τῷ ε μονάδας. καὶ διὰ τὸ πορίσματος τοῦ ε΄: ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα καὶ τὸν εθ΄: τῶν παρόντων, ἔσται ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν ζ, οἱ δὲ ε, καὶ α, πρῶτοί εἰσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς προδέδεικται. ἄρα διὰ τοῦ κδ: ὁ ε, τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν ζ, ὁ δὲ ε, καὶ τὸν γ, μετρεῖ, καὶ τὰ ὑπόθεσιν. οἱ βγ, ἄρα πρῶτοι ὄντες πρὸς ἀλλήλους, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν ε, ἀριθμόν. ὅπερ ἄτοπον. ὁ δ, ἄρα πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα. *Euclid. Lib. 7. Fig. 14.*

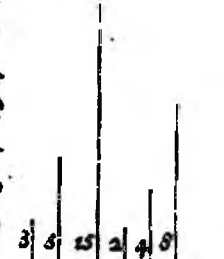
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.



Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α, β, πρῶτον πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ ἐκ τοῦ α, γινόμενος ἀριθμὸς, ποιείτω τὸν γ, πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔστω. Ἔστω γὰρ ἴσος τῷ α, ὁ δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὁ δ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν αὐτὸν β. καὶ διὰ τοῦτο ἀνάπαλιν, ὁ ὑπὸ τῶν α δ, γινόμενος ἀριθμὸς, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν β, ὁ δὲ γ, ὁ ἐκ τοῦ α, γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α δ, γινομένῳ, τῷ τὸν αὐτὸν ὅρον. ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, πρῶτός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσι, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.



Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρὸς ἑκάτερον τῶν γ, δ, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ἐκ μὲν τοῦ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, γινέσθω, ἐκ δὲ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ. Λέγω ὅτι ε ζ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρὸς ἑκάτερον τῶν γ δ, πρῶτοί εἰσιν, ἄρα διὰ τοῦτο καὶ ὁ γινόμενος ὑπὸ τῶν α β, πρῶτός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν γ δ. Αἴθις ἐπεὶ οἱ γ δ, πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ε, διὰ τοῦτο καὶ ὁ ὑπὸ τῶν γ δ, γινόμενος, τουτέστιν ὁ ζ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν ε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

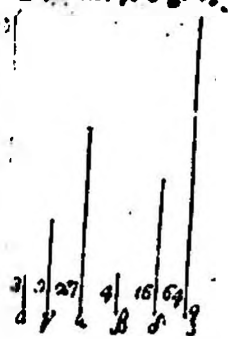
Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιή τινα, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ οὗτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν α, πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος τὸν γ, ποιείτω. πρὸς δὲ τὸν γ, τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, πρὸς ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιαζόμενος τὸν δ, ποιείτω, πρὸς δὲ τὸν δ, τὸν

δ, τὸν ζ. Λέγω τὰς γ δ, ιζ, πρώτας πρὸς ἀλλήλας εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τῶν α, γίγονται ὁ γ, ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, διὰ τὰς κζ': πρῶτός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ οἱ γ β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τῶν β, γίγονται ὁ δ, διὰ τὰς αὐτὰς ἄρα κζ': καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πρῶτός ἐστιν, ὅπερ ἐστὶ τὸ α: εἶτα ἐπεὶ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ δ, ἐκ τῶν β, γίγονται, ὁ δ, πρὸς τὸν α, πρῶτός ἐστιν, ὥστε ἀμφότεροι οἱ α, γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν β δ, πρῶτοί εἰσι, καὶ διὰ τὰς κη': ὁ ὑπὸ τῶν α γ, γινόμενος, τετράγωνος ἐστὶν ὁ ι, πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν β δ, τετράγωνον τὸν ζ, πρῶτός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

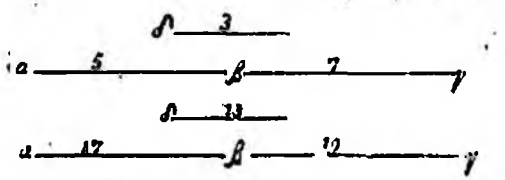
Euclid. lib. 7. Fig. 15.



Πρότασις Λ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρός ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται, καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Euclid. Lib. 7. Fig. 16.



Δύο ἥδη ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν τὸ πρῶτον. Λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος αὐτῶν δηλ: ὁ α γ, πρὸς τὸν α β, πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω ὅτις ὁ δ, εἰ δὲ ὁ δ, τὸν α γ, καὶ α β, μετρεῖ, μετρεῖ παντως γε καὶ τὸν β γ, μετρεῖ καὶ τὸν α β, οἱ α β, ἄρα β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α β, ἄρα, α γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν δεύτερον οἱ α γ, α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω καὶ τοὺς α β, β γ, πρώτους εἶναι. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω ὁ δ: ἄρα ὁ δ, τοὺς α β, β γ, μετρῶν, μετρήσει παντως καὶ τὸν α γ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν α β, οἱ α γ, ἄρα α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α β, ἄρα β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστι.

Πρῶτος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, τὸν β, μὴ μετρείτω. Λέγω τὴν α β, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, μιγνύσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω ὑπὸ γ' ὁ γ, τοίνυν ἀριθμὸς ὢν ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α. ὁ γὰρ μετρεῖ τὸν β, ὁ α, ὁ δὲ γ, μετρεῖ. ὅπερ οὖν ὁ γ, τὸν β α, μετρεῖ, ὁ α, ἄρα πρῶτος ὢν ὑπ' ἀριθμοῦ μιγνύεται, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α, β, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 19.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τὸν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

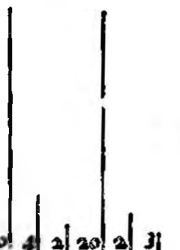
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, τὸν γ, ποιείτωσαν. μιγνύτω δὲ τὸν γ, ἀριθμὸν ὁ δ, πρῶτος. Λέγω, ὅτι ὁ δ, καὶ ἕνα τῶν α β, μιγνύσει, μὴ μετρείτω τοίνυν ὁ δ, τὸν α, μετρήσει πάντως τὸν β. ὁσάκις γὰρ ὁ δ, τὸν γ, μετρεῖ, τοσοῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, οἱ δ, ε, ἄρα ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες, τὸν γ, ποιοῦσιν, ἀλλὰ καὶ οἱ α, β, πολλαπλασιασθέντες ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν γ, ποιοῦσι· καὶ τὸν ε Θ': ἄρα, ἔστιν ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ε, οἱ δὲ α, δ, εἰσὶ πρῶτοι, ἄρα καὶ τὸν κδ: ὁ δ, τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν ε. διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ δ, τὸν β, ὑπὸ μετρεῖ, τὸν α, μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 18.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς, ὑπό τινος πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

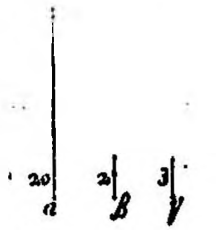
Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ἔστω ὁ α. Λέγω, ὅτι ὑπό τινος πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· μετρείτω γὰρ αὐτὸν ὁ β, εἰ μὲν οὖν ὁ β, πρῶτός ἐστιν, εἴη ἂν τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ, μετρείτω τὸν β, ὁ γ, ὅς ἢ τὸν α, μιγνύσει. εἰ δὲ αὖθις ὁ γ, πρῶτός ἐστι, ἢ τὸν α, σύνθετον μιγνύει, δέδεικται τὸ



προ

προπθσ. εἰδὴ μὲ, μιξείπω ἡμὶ τὸν γ, ἔπερος, ὃς μιξήσει ἡ τὸν α. ἡμὶ πάπυ ἐφ' ἑξῆς γινομένυ, ἀριθήσεται τις δ: ἀριθμὸς τὸν α, μιξῶν. εἰ γὰρ μὲ, μιξήσουσι τὸν α, ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὅπερ ἐν ἀριθμοῖς ἀδυάτον, ὡρισμένοι γὰρ. ἡμὶ ἄλλως.

Euel. Lib. 7. Fig. 19.



Εὑρηθήτω τῶ α, σωνθήτυ ἀριθμῶ ἡ ἐλάχιστος τῶν μιξόντων αὐτὸν, ἡ ἔτω ὁ β. Λέγω τὸν β, πρῶτον εἶναι, εἰ γὰρ μὲ, μιξήσεται τις αὐτὸν ἀριθμὸς, ἡ ἔτω ὕπος ὁ γ. ὁ γ, ἄρα ἐπεὶ τὸν β, μιξεῖ, μιξεῖ πάντως ἡ τὸν α, ἡ ἔστι ἐλάττων τῶ β, ὁ δὴ β, ἔστὶν, ὁ ἐλάχιστος τῶν τὸν α, μιξόντων, ὅπερ ἄτοπον, ἄρα ὁ β, πρῶτός ἔστι.

Πρότασις ΛΔ΄: Θεώρημα.

Ἅπας ἀριθμὸς ὅτι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτυ τινὸς ἀριθμῶ μιξόται.

Ὁ γὰρ α, ἀριθμὸς, εἰ μὲν πρῶτός ἔστι, δῆλον τὸ ζητύμενον. εἰδὴ σώνθετος, διὰ τῆς ἀνωτέρω μιξήσεως αὐτὸν ἀριθμός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΕ΄: Πρόβλημα.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνῶν εὑρεῖν τὰς ἐλαχίστας τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμῶν δὴ τῶν α β γ, δοθέντων, τὰς ἐλαχίστας τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς δεῖ εὑρεῖν. Εὑρηθήτω διὰ τῆς γ΄: τὸ μέγιστον κοινὸν μιξὸν τῶν α β γ, ἡ ἔτω ὁ δ. ἡ ὁσάκις ὁ δ, ἕκαστον τῶν α β γ, μιξεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τοῖς ε, ζ, η. ἕκαστος τοίνυν τῶν ε ζ η, μετρεῖ ἕκαστον τῶν α β γ, κτ τὰς ἐν τῇ δ, μονάδας. ἄρα ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶν οἱ ε ζ η, τοῖς α β γ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ ἐλάχιστοι, εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ τοῖς α β γ, οἱ θ κ λ, ἐλάσσονες τῶν ε ζ η. ἡ ἐπεὶ ἕκαστος τῶν θ κ λ, ἕκαστον τῶν α β γ, ἰσάκις μιξεῖ, ἰσάκις ὁ θ, τὸν α, μιξεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῇ μ, ὁ μ, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε. ἐπεὶ δὴ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε. ἄρα κτ τοὶ ε δ΄: ἔσαι ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν δ. ἀλλ' ὁ ε, μείζων ἐστὶ τῶ θ, ἡ ὁ μ, ἄρα μείζων τῶ δ. μιξεῖ δὴ ὁ μ, τὸς α β γ, ἄρα ὁ μ, μίγιστόν ἐστι κοινὸν μιξὸν τῶν α β γ, ὑπόκειται δὴ ὁ δ, τὸ μέγιστον αὐτῶν

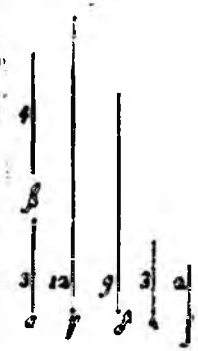
Euel. lib. 7. Fig. 20.

τῶν κοινὸν μέτρον, ὁ μ, ἄρα ἴσος τῷ δ. ἔστι δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ζ, η, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Λς'. Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μεροῦσιν ἀριθμόν.

Δύο δὴ ἀριθμῶν δοθέντων τῶν α, β, ὃν ἐλάχιστον μεροῦσιν ἀριθμόν, δεῖ εὑρεῖν. Οἱ δὴ α, β, ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Ἔστωσαν πρότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· πολλαπλασιάσαντες τέτταρα οἱ α, β, ἀλλήλους τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ποιείτωσαν τὸν γ, καὶ ἑκάτερος τῶν α, β, μετρεῖ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ μὴ, μετρείτωσαν οἱ α, β, ἐλάττονα τοῦ γ, τὸν δ· καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁσάκις δὲ ὁ β, τὸν αὐτὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, τὸν δὲ δ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ε, ὁ ε, ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τοῦ β, ὅτι καὶ ὁ δ, ἐλάττων ὑπάρχει τοῦ γ. ὁσαύτις καὶ ὁ ζ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ α. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς β, ε, πολλαπλασιάσας τοὺς γ, δ, πεποίηκε, ἴσαι διὰ τοῦτο εἰσὶν αἱ ε, ζ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν ε. ὁσαύτις, ἐπεὶ ὁ β, τοὺς α, ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς γ, δ, πεποίηκε. ἴσαι διὰ τοῦτο αὖ εἰσὶν αἱ ε, ζ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἦν καὶ ὁ β, πρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν ζ, καὶ διὰ τοῦτο ἐναλλάξ: ὡς ὁ β, πρὸς τὸν α, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἄρα αἱ β, α, πρῶται ὄντες ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς ε, ζ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τοῦτο ἐν τοῖς γ': ὁ γ, ἄρα ἐλάχιστός ἐστι, καὶ μετρεῖται ὑπὸ τῶν α, β. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ α, β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· καὶ εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ζ, η· ἄρα καὶ τοῦτο ιθ': ὁ ὑπὸ τῶν α, η, καὶ ὁ ζ, β, ἴσος ἐστίν, ἔστω ὅτις ὁ γ· οἱ α, β, ἄρα καὶ τοῦτο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· μετρεῖ δὲ τὸν γ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ μὴ, μετρείτωσαν οἱ α, β, ἐλάττονα τοῦ γ, τὸν δ· καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η, ὁσάκις δὲ τὸν αὐτὸν δ, ὁ β, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ θ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, τοὺς η, η, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκε. ἴσαι ἄρα διὰ τοῦτο εἰσὶν αἱ ε, ζ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν η, ὁ δὴ γ, μεί-

μείζων ἐστὶ τῶ δ, ἡγοῦ ὁ ι, ἄρα μείζων ἐστὶ τῶ κ. Λύθις ἐπεὶ ὁ β, τὸν ζ, θ, πολλαπλασιὸν τὸν γ, δ, πεποίηκε, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα ε ζ΄: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἕτως ἔστω ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ἡ ἐπομένως ὁ θ, ἐλάττων τῶ ζ. ὡς δὴ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἡ ι, πρὸς τὸν κ, ἄρα καὶ ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν κ, ὁ ζ, πρὸς τὸν θ. ἡ διὰ τῆς ιγ΄: ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν ζ, ὁ κ, πρὸς τὸν θ. ἄρα οἱ ι ζ, ἐλάχιστοι ὄντες τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, τὸν αὐτὸν λόγον ἴσχυσι τοῖς κ θ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα ὁ γ, ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν α, β, μετρεῖται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τὸν αὐτὸν μετρήσει.

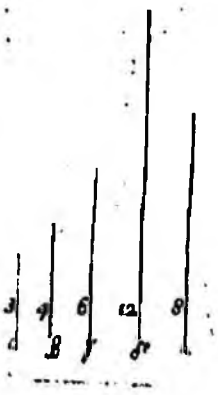
Οἱ α β, ἥδε δεινὰ μετρείτωσαν τὸν οἱονδήποτε δεινὰ μόνα γ δ, ἐλάχιστον δὲ τὸν ε. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ε, τὸν γ δ, μετρήσει, εἰ γὰρ μὴ, μετρείτω ὁ ε, ἐκ τῶν γ δ, τὸν δ ζ, καὶ λειπέτω ἑαυτῶ ἐλάττονα τὸν γ ζ. Ἐπεὶ οὖν οἱ α, β, τὸν ε, μετροῦσι, καὶ ὁ ε, τὸν δ ζ, οἱ α, β, ἄρα τὸν δ ζ, μετροῦσι, μετροῦσι δὲ ἔτι καὶ τὸν γ δ, μετήσουσι καὶ τὸν γ ζ, ἐλάττονα ὄντα τῶ ε. ὅπερ ἄτοπον, ὁ ε, ἄρα τὸν γ δ, μετρεῖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. lib. 7. Fig. 29.

Πρότασις ΛΗ΄: Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸν ἐλάχιστον μετροῦντα ἀριθμὸν εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἥδε τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α β γ, δεῖ δὴ τὸν ἐλάχιστον μετροῦντα ἀριθμὸν εὑρεῖν. Εἰλήφθω διὰ τῆς λς΄: ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς παρὰ τῶν α β, καὶ ἔστω ὁ δ. τὸν δ, ἄρα ἤτοι μετρεῖ ὁ γ, ἢ οὔ. μετρείτω πρότερον, οἱ α, β, γ, ἄρα μετροῦσι τὸν δ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρεῖσθαι οἱ α, β, γ, ἐλάττονα τοῦ δ, ἀριθμὸν τὸν ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ α, β, μετροῦσι τὸν ε, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τοσοῦτον δ δ, μετρήσει καὶ τὸν αὐτὸν ε, καὶ τὸ ὅλον τὸν δ, μείζων ἐστὶ τοῦ ε, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα ὁ δ, οὐκ ἔστιν ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α, β, γ, μετρούμενος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Μὴ μετρείτω δὴ ὁ γ, τὸν δ. καὶ εἰλήφθω διὰ τῆς λς΄: ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ ε. Ἐπεὶ πάλιν οἱ α, β, τὸν δ, μετροῦσι,

ἡ δ, τὸν ε, μετρεῖ καὶ τὸν αὐτόν. οἱ α β, ἄρα μετροῦσι καὶ τὸν ε, μετρεῖ δὲ αὐτὸν καὶ ὁ γ, οἱ α, β, γ, ἄρα τὸν ε, μετροῦσι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρήσουσι οἱ α β γ, ἐλάττονα τοῦ ε, ἀριθμὸν τὸν ζ. Ἐπεὶ Eucl. Lib. 7. Fig. 23.
οὖν οἱ α β, τὸν ζ, μετροῦσι, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἄρα ἐλάχιστος μετρούμενος, ποιεῖ δ δ, τὸν αὐτὸν ζ, μετρήσει, καὶ τὸν ἔλασσον. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, τὸν αὐτὸν ζ, μετρεῖ, μετρήσει πάντας τὸν ζ, καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος, ποιεῖ δ ε, ὁμοίζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδυνατον. ὁ ε, ἄρα ἐλάχιστος ὢν, ὑπὸ τῶν α β γ, μετρεῖται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

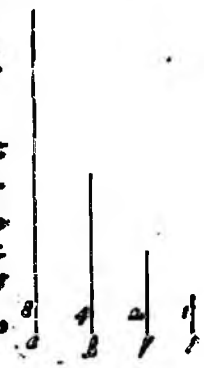
Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος, ὁμώνυμον μέρος ἕξει τοῦ μετροῦντος.

Ὁ α, ἕδυο ἀριθμὸς ὑπὸ τοῦ β, ἀριθμοῦ μετρείσθω τοῖς ἐν τῷ γ, μονάσι. Λέγω τὸν γ, μέρος εἶναι τοῦ α, ὁμώνυμον τῷ β. ὁσάκις γὰρ ὁ β, τὸν α, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρεῖ καὶ ἡ δ, μονὰς τὸν γ, κατὰ τὸ β': πόσημα τοῖς ε ς': ἄρα ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ κατὰ τοὺς ε γ': ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς μέρος ἐστὶν ἡ δ, μονὰς τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἔσται, καὶ ὁ γ, τοῦ α. ἀλλ' ἡ δ, μονὰς, ὁμώνυμον μέρος ἐστὶ τοῦ β, καὶ ὁ γ, ἄρα τοῦ α, ὁμώνυμον μέρος ἐστὶ τοῦ β, καὶ τὸν γ': ὅπερ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ᾖ τινος, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς γάρ τις ὁ α, μέρος ἔστω τινῶν ἐχέτω τὸν β, ὁμώνυμος δὲ ἀριθμὸς τῷ β, ἔστω ὁ γ. Λέγω δὴ τὸν γ, μετρεῖν τὸν α. Ἐπεὶ γὰρ ὁ β, μέρος ἐστὶ τοῦ α, καὶ ὁ γ, ὁμώνυμος τῷ β, ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ β, τοῦ α, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ἡ δ, μονὰς τοῦ γ. ἔσται δὲ ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ κατὰ τοὺς ε γ': ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν α, ὁ γ, ἄρα μετρεῖ τὸν α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



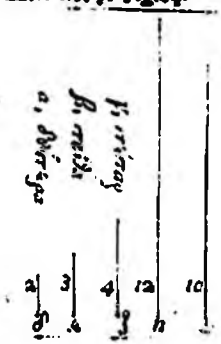
Πρό-

Πρότασις ΜΑ΄. Πρόβλημα.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλαχίστος ὢν, ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

Eucl. lib. 7. Ifig. 34.

Ἐκείσθω ἤδη δοθέντα μέρη τὰ α β γ, ᾧ πάντες ὁμώνυμοι ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ δ ε ζ. Εἰρήσθω δὴ τῶν λδ. ὁ ἐλάχιστος μεμετρημένος ὑπὸ τῶν δ ε ζ, ᾧ ἔστω ὁ η, ὁ δὲ ἄρα μεμετρημένος ὑπὸ τῶν δ ε ζ, οἵ εἰσιν ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ α β γ, ἔχει πάντως τὰ δοθέντα μέρη. Λέγω δὴ, ὅτι ᾧ ἐλάχιστος, ἐστὶν ὁ μι. ἔστι γὰρ τις ἐλάττων τοῦ η, ἔχων τὰ δοθέντα α β γ, μέρη, τῷ ἔστω ὁ θ. Ἐπεὶ οὖν ὁ θ, τὰ α β γ, μέρη ἔχει, τοῖς δὲ α β γ, ὁμώνυμοι ἐλάχιστοί εἰσιν οἱ δ ε ζ. ἄρα ὁ θ, ὑπὸ τῶν δ ε ζ, μεμετρήσεται, ἐλάσσων δὲ τοῦ η, ὅπερ ἄτοπον, ὁ η, ἄρα ἐστὶν ἐλάχιστος, ἔχων τὰ δοθέντα μέρη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Τέλος τῆς Ἑβδόμης τῆς τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
ΤΟΥ ΟΓΔΟΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Euclid. Lib. 8. Fig. 1.

Ἀριθμοὶ γὰρ οἱ α β γ δ, ἴσων ὄντων ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α δ, ἴσων ὄντων πρώτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω ὅτι οἱ α β γ δ, ἐλαχίστοι εἰσὶ τῶν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν οἱ ε ζ η θ, ἐλάσσονες ὄντες τῶν α β γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ αὐτοῖς. καὶ διὰ τὰ ε δ. ἄρα τὸ ζ. ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ἐναλλὰξ. διὰ τὰ α δ. τὸ αὐτό, μετρήσει ὁ α, τὸν ε, ὡς ὁ δ, τὸν θ, οἱ μείζονες τοὺς ἐλάσσονας, ὅπερ ἄτοπον. Εἰσὶν ἄρα δύσιν ὁσοιδηποτοῦν, ἐν τοῖς ἑξῆς.

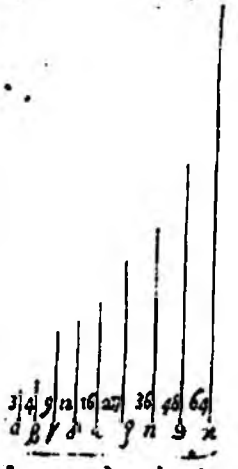
Πρότασις Β'. Πρόβλημα.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἐπιταχθέντας, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω δὴ δοθεὶς λόγος ὁ ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τῶν α, πρὸς τὸν β, καὶ δεῖ δὴ εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἀριθμοὺς, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ. Ἐπιτάχθωσαν δὴ πρῶτον τρεῖς. καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, τὸν δὲ β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ὁσαυτωσοῦν, καὶ ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς α β, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκε, καὶ τὸν ε ζ. τῷ ζ. ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α β, τὸν β, πολλαπλασιάσαντες τοὺς δε, πεποιήκασιν, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸν ε η. τῷ ζ. ὡς δὲ,

ὁ α,

ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τὸν ε d: τῷ ὁ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε, αἱ τρεῖς ἄρα ἀριθμοὶ γ δ ε, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τῶ α, λόγῳ πρὸς τὸν β. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. οἱ γὰρ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, καὶ ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες τοὺς γ ε, πεποιήκασιν, ἄρα καὶ τὸν ε Θ': τῷ ζ': οἱ γ ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Εἰσὶ δὲ τέσσαρες ἐπιπεδωθῶσι, πολλαπλασιάσας ὁ α, τοὺς γ δ ε, ποιείτω τοὺς ζ η Θ, ὁ δὲ β, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς γ δ, πολλαπλασιάσας τοὺς ζ η, πεποίηκεν, καὶ τὸν ε ζ': ἄρα τῶ ζ': ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ α, τοὺς δ ε, πολλαπλασιάσας τὸν η Θ, πεποίηκεν, ἔστι διὰ τῆς αὐτῆς, ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐστὶ καὶ ὁ η, πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, δέδεικται καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν Θ· ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ α β, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τὸν Θ η, πεποιήκασιν. ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ Θ, πρὸς τὸν η, καὶ τὸν ε ι': τῷ ζ': οἱ ζ, η, Θ η, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τῶ α, πρὸς τὸν β, λόγῳ. ὅτι δὲ καὶ πρῶτοι, δείκνυται, διὰ τῆς κΘ': τῷ ζ': οἱ γὰρ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τοὺς γ ε, πρώτους πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες, τοὺς ζ η, πεποιήκασιν. Ἐὰν δὲ πέντε ἐπιπεδωθῶσι, πολλαπλασιαθέντων οἱ μεριθέντες τέσσαρες ἐπὶ τὸν α, ὁ δὲ πέμπτος καὶ ἐπὶ τὸν β, καὶ ὅσοι ἑξῆς ἐφ' ἑκάτερον τοῦ ἐχάτου ἐφ' ἑκάτερον πολλαπλασιαζόμενοι ἔσται τὸ ἐπιπεδωθέν.



Euclid. Lib. 8. Fig. 2.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δεδομένοι ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῷ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς εἰσιν, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι εἰσιν. ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

Β': Ἔτι ἐὰν ἀριθμὸς ὁποσοσδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται, καθ' ὃν, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ πολλαπλασιασθέντες, λόγον.

Γ'. Ἔτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῷ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς. πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν χωρίς, καὶ ἔτι ἄλλους, ποιήσασι ἑαυτοῖς ἐλαχίστους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ.

Πρό-

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι δὲ τῶν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ πρῶτοι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ὅσοιδηποτοῦν πρῶτοι ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντες αὐτοῖς οἱ α β, τὸν δὲ α δ· ἄρα τὸν ζ· οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἔστωσαν β· τρεῖς ἐν τῷ τοῦ α, λόγῳ πρὸς τὸν β, οἱ α γ δ. Λέγω ὅτι ἄρχοι αὐτῶν γε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες, καὶ τὸν ἀνάπαλιν, τοὺς γε, πεποιήκασιν, οἱ γε, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ τῷ τὸν α δ· τῷ ζ· ἔστωσαν δὲ τῇ ταύταις ὡς οἱ ζ η θ κ. ἐπεὶ οὖν τῷ τὸν ἀνάπαλιν οἱ α β, τοὺς γε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ζ κ, πεποιήκασιν, οἱ ζ κ, τῷ τὸν α δ· πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Τῷ αὐτῷ λόγῳ δύνανται, ἂν πόσοι ὦσιν, ἢ καὶ πλείονες, τοὺς ἄκρους αὐτῶν πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ἀεὶ γὰρ οἱ πρειημένων ἄκροι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῷ ἄκρων τῷ πρειημένων ἐπὶ τοὺς δύο πρώτους γίνονται.

Euclid. Lib. 8. Fig. 3.

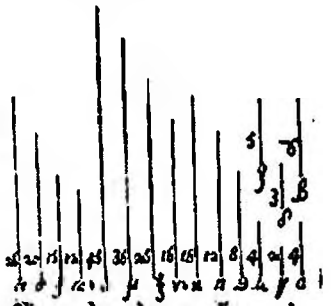
Πρότασις Δ'. Πρόβλημα. Γ'

Λόγου δοθέντος ὁποσουοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐν τῷ τοῦ δοθέντι λόγοις.

Ἔστωσαν ὅσοιδηποτοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς λόγοι οἱ τοῦ α, πρὸς τὸν β, οἱ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ οἱ τοῦ ε, πρὸς τὸν ζ. Εὑρεθήτω δὲ καὶ τῶν λ ς· τοῦ ζ· οἱ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστοι μετροῦμενοι ἀριθμοί, καὶ ἔστω οἱ η. καὶ ὁσάκις μὲν οἱ β, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ οἱ α, τὸν θ, ὁσάκις δὲ οἱ γ, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ οἱ δ, τὸν κ· τὸν δὲ η, ἄνισι μετρεῖ οἱ ε, αὐτὸν μετρείτω πρόπαν· καὶ ὁσάκις οἱ ε, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ οἱ ζ, τὸν λ. Λέγω τοὺς θ η κ λ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἴσάκις μετροῦσι τοὺς θ η, καὶ τὸν ε ι· ἄρα τοῦ ε· ἔστιν ἄρα οἱ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ θ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς οἱ γ, πρὸς τὸν δ, οἱ η, πρὸς τὸν κ, καὶ ὡς οἱ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως πρὸς τὸν λ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῷ θ η κ λ, οἱ ν ξ μ ο. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς οἱ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ ν, πρὸς ξ, εἰ δὲ α β, ἐλάχιστοι εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν

καὶ τῶ ζ΄: ὁ μὲν α, τὸν ν, μετρεῖ, ὁ δὲ β, τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ γ, τὸν ξ, μετρεῖ, ἐπεὶ ὑποτέθειται ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. καὶ τὸν λ΄: ἄρα τῶ ζ΄: καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, μετρούμενος, δηλονότι ὁ η, μετρήσει τὸν ξ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ Θ π κ λ, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι.

Eucl. libr. 8. Fig. 4.



Μὰ μετρείτω δὴ ὁ ε, τὸν κ. ελλήφθω διὰ τῆς λ ς΄: τῶ ζ΄: ὁ ὑπὸ τῶν ε κ, ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ κ, τὸν αὐτὸν μ, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ἑκάτερος τῶν Θ π, ἑκάτερον τῶν ν ξ, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν μ, μετρεῖ, μετρείτω καὶ ὁ ζ, τὸν ο, οἱ Θ π, τοὺς ν ξ, μετρῶσιν ἰσάκις, ἔστιν ὡς ὁ Θ, πρὸς τὸν π, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ Θ, πρὸς τὸν π, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔστι καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. Λύθις ἐπεὶ ὁ ε, τὸν μ, καὶ ὁ ζ, τὸν ο, ἰσάκις μετρεῖ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ μ, πρὸς τὸν ο, οἱ ν ξ μ ο, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ, ἔσωσαν ἑξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν ν ξ μ ο, οἱ π ρ σ τ. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν β, ὁ π, πρὸς τὸν ρ, οἱ δὲ σ β, ἐλάχιστοί εἰσιν, ἄρα τῶν ῥηθεῖσαν καὶ ὁ β, τὸν ρ, μετρεῖ, διὰ τὰς αὐτὰς δὴ καὶ ὁ γ, τὸν ρ, μετρεῖ· καὶ ὑπομένως καὶ τὸν λ ζ΄: τῶ ζ΄: μετρεῖ τὸν ρ, καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος, τουτέστιν ὁ η. ἔστι δὲ ὡς ὁ ν, πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ ρ, πρὸς τὸν σ, καὶ καὶ τὸν ι γ΄: τῶ ζ΄: καὶ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ρ, ὁ κ, πρὸς τὸν σ, ὁ δὲ η, τὸν ρ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ κ, τὸν σ, μετρεῖ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν σ, οἱ ε κ, ἄρα τὸν σ, μετροῦσι. καὶ ὑπομένως διὰ τὰς λ ζ΄: τῶ ζ΄: καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν ε κ, μετρούμενος, μετρεῖ τὸν σ, ὅπερ δ' ἐστὶν ὁ μ, ὁ μ, ἄρα μετρεῖ τὸν σ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ ν ξ μ ο, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

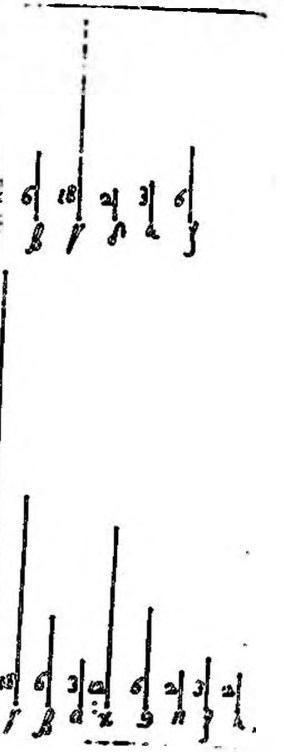
Λῆμμα εἰς ἀπόδειξιν τῆς ὑπομένης ε΄ προτάσεως.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἅπτε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἅπτε ἐν διαφόροις, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἔσχατον, λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Ἔστωσαν ἤδη τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἐν λόγοις ἀπομείοις. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν γ, λόγον ἔχειν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων, τουτέστι τὸ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸ β, πρὸς τὸν γ. Ἔστω γὰρ τῶ μὲν α, πρὸς τὸν β, λόγω πολλαπλασιόπις ὁ δ, τῶ δὲ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε· καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλα-

πλασιάσας τὸν ζ, ποιείτω· καὶ τὸν ε· ἄρα ὅρον τὸ ς· ὁ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῆς λόγων, τῆς ἐν τοῖς α β γ. Ἐπεὶ δὴ ὁ δ, τὸν μὲν α, πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, (πολλαπλασιάσας γὰρ ὁ δ, τοῦ α, ἁπλοῦς τὸν β,) τὸν δὲ ε, τὸν ζ, ἄρα καὶ τὸν ἐκ τῶν ι ζ: τοῦ ζ: ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ζ, καὶ καὶ τὸν ι θ: τὸ αὐτὸ, ὁ ἐκ τῶν α, καὶ ζ, γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἐστὶ καὶ ἑκατέρῳ τῶν ε, καὶ β, γινομένῳ. ἐπεὶ δὲ ὁ ἐκ τῶν ε, καὶ β, ἐστὶν ὁ γ, (πολλαπλασιάσας γὰρ ὁ ε, τὸν β, πρὸς τὸν γ,) ἄρα ὁ ἐκ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ καὶ τῷ γ, μιᾷ ἄρα τῶν α, καὶ γ, πολλαπλασιάσας ἐστὶν ὁ ζ, ὁ δὲ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν τοῖς α β γ, λόγων, ὁ α, ἄρα πρὸς τὸν γ, ἔσχε λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Euel. lib. 8. Fig. 5.



Ἔστωσαν δύο πλευραὶ αἱ α β γ δ, ὧν πολλαπλασιάσας τὸν λόγων ἔστωσαν αἱ ι ζ η, καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας, τὸν θ, ποιείτω, ὁ δὲ η, τὸν θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν δ, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν τοῖς α β γ δ, ὅστις ἐστὶν ὁ κ, καὶ τὸν ε: ὅρον τὸ ς: τὸ γὰρ β, παρεμπεσέτω, ἔσονται ἑξῆς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α γ δ, ἐν λόγοις ταὐτοῖς, πλευρὰς δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων οἱ ι θ, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁ κ, καὶ τοῦ ἐνιαυτῷ ἀποδείξει, ὁ α, πρὸς τὸν δ, ἔχει τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῶν ἐν τοῖς α β γ δ, λόγων. ὡσαύτως δειχθήσεται, κἂν πλείονες ὑποτεθῶσι, τὸ β: καὶ γ: παρεμπεσέτω· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὡσαύτως.

Πρότασις Ε: Θεώρημα.

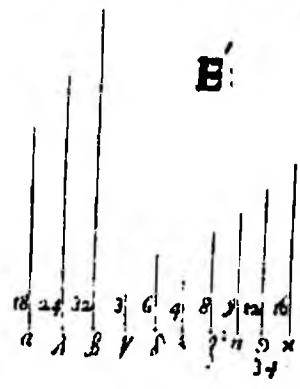
Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλευραὶ δὲ τοῦ μὲν α, οἱ γ δ, τοῦ δὲ β, οἱ ε ζ. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν β, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν. εἰσὶν εἷς ὁ τοῦ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ τοῦ δ, πρὸς τὸν ζ. Γεγόνθω δὲ ὁ λ, ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ε, ἐπὶ τὸν δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ δ, τὸν γ ε, πολλαπλασιάσας τὸν α λ, πεποίηκε. ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν λ, καὶ τὸν ι ζ: τοῦ ζ: Διὰ τὰ αὐτὰ, ἐπεὶ ὁ ε, τὸν δ ζ, πολλαπλασιάσας τὸν λ β, πεποίηκε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ λ, πρὸς τὸν

β, οἱ

β, οἱ α λ β, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν ταῖς τῶν πλευρῶν λόγοις, τουτέστι τοῦ γ, πρὸς τὸν ι, καὶ τὸ δ, πρὸς τὸν ζ· καὶ ἔτι τὸ ἀνάπαλιν λῆμμα, ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν ταῖς α λ β, λόγων, ὅτι δέ ἐστιν, οἱ τῶν πλευρῶν λόγοι, ὁ τοῦ α, λόγος ἄρα ἐστὶ πρὸς τὸν β, συγκεῖται ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν. Οἱ ὑπεπίπεδοι ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. lib. 8. Fig. 6.



Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Οἱ α, β, γ, δ, ι, ἀριθμοὶ ἔστωσαν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ ὁ α, τὸν β, μὴ μετρείτω. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, οὐ μετρεῖ, οὐδεὶς τῶν α β γ δ ι, τὸν ἑξῆς μετρήσει, ἐν γὰρ αὐτῇ γάρ εἰσι λόγῳ. ὅτι δὲ οὐδεὶς τῶν οὐδένα μετρεῖ, δείκνυμι, παρ: χαρ: ὅτι ὁ α, οὐδὲ τὸν γ, μετρεῖ. Εἰλήφθωσαν οὖν διὰ τὰς λέ: τῶ ζ': οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, καὶ ἔστωσαν οἱ ζ η θ. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, οὐ μετρεῖ, οὐδὲ ὁ ζ, τὸν η, (ἐν γὰρ αὐτῇ γὰρ λόγῳ εἰσὶ) ὥστε ὁ ζ, μονὰς οὐκ ἔστιν, οὐ γὰρ μονὰς πάντας μετρεῖ. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶ, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ τοῖς ζ η θ, ἄρα καὶ τοῦ ι δ': τῶ ζ': καὶ δὲ ἴσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ, τουτέστιν ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ζ, τὸν θ, οὐ μετρεῖ, καὶ τοῦ κ δ': τῶ ζ': οὐδὲ ὁ α, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ. ὁσαυτως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδ' ἄλλος τις ἄλλον τινὰ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἔστωσαν οὖν ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ, ὁ δὲ α, τὸν δ, μετρείτω. Λέγω, ὅτι καὶ τὸν β, μετρεῖ. εἰ γὰρ μὴ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, οὐδ' ἄλλος τις οὐδένα μετρήσει, καὶ τοῦ αὐτοῦ, ἀλλὰ μὴν τοῦ ἀδυνάτου, ὑπεπίπεδοι γὰρ ὁ α, τὸν δ, μετρεῖν, ἄρα ὁ α, καὶ τὸν β, μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεσοῦνται.

Μεταξὺ τῶν α β, δύο ἀριθμῶν πεπτώκασιν οἱ γ δ, κατὰ τὸ ἀνάλογον· ἔστω ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ ε πρὸς τὸν ζ. Λέγω δὴ μεταξὺ τῶν ε ζ, τοσοῦτοι ἀριθμοὶ ἐμπεσοῦνται, ὅσοι καὶ τοὺς α β, πεπτώκασιν. εἰ μὲν οὖν οἱ α γ δ β, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἴσοι ἔσονται τοῖς ε η θ κ λ ζ· εἰ δὲ μή, ἔστωσαν ἴσοι αὐτοῖς οἱ ε μ ν ζ· καὶ ἐπεὶ οἱ α γ δ β, τοῖς ε μ ν ζ, ἴσοι εἰσὶ καὶ πλήθει, καὶ ἔστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ν· καὶ ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ ε πρὸς τὸν ν, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε τῷ ν· ἔστι δὲ καὶ ὁ ε τῷ ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν τῷ ζ· καὶ ἐπεὶ ἐλάχιστοί εἰσιν οἱ ε μ ν ζ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, καὶ ἴσοι εἰσὶ τοῖς ε η θ κ λ ζ, οἱ ε μ ν ζ ἄρα τοῖς ε η θ κ λ ζ εἰσὶν ἴσοι, καὶ ἔστιν ὁ ε τῷ ε, καὶ ὁ ν τῷ λ, καὶ ὁ ζ τῷ ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε τῷ η, καὶ ὁ ν τῷ κ, καὶ ὁ ζ τῷ θ· καὶ ὁ ε τῷ η, καὶ ὁ ν τῷ κ, καὶ ὁ ζ τῷ θ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε τῷ η, καὶ ὁ ν τῷ κ, καὶ ὁ ζ τῷ θ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε τῷ η, καὶ ὁ ν τῷ κ, καὶ ὁ ζ τῷ θ· καὶ

ταξὺ τῇ αβ, πίπτουσιν. Ε'στω γὰρ ἡ ε, μονὰς· ἡ ἀρα μὲν διὰ τῆς λέ: τῆ ζ': ἀριθήσουσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αγ δβ, ἡ ἕξουσιν ὕπατοι οἱ ζη. δεύτερον δὴ, ξῆς διὰ τῆς β': τὰ παρόντος, ὡς οἱ θκλ. ἡ ὅπως ἐφεξῆς, μίσους δ' ἴσοι τῇ ἀριθμῷ γεύονται τοῖς αγ δβ, ἡ ἕξουσιν ὕπατοι οἱ μνξο. Ε'πεὶ δὲ οἱ αγ δβ, ἐλάχιστοί εἰσι τῇ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς τῇ τῶν αγ': τὰ ζ': πάντες δὲ ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶν οἱ μνξο, ἄρα ἕκαστος τῇ μνξο, ἴσός ἐστιν ἑκάστῳ τῇ αγ δβ, οἱ μο, ἄρα ἴσοί εἰσι τοῖς αβ. Ε'πεὶ δὲ ὁ ζ, τῇ τῶν β': τὸν παρόντος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν θ, πεποίηκε, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν μ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα κατὰ τῶν ι ζ': τὰ ζ': ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ὕπατος ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἔστι δὲ διὰ τῆ β': πορίσμ: τῆς ις': τὰ αὐτὰ ζ': καὶ ἡ ε, μονὰς πρὸς τὸν ζ, ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ἄρα μιᾶς ἐστὶ μονάδος, ἡ τὰ μ, ἀριθμὰ, ποσάκις ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον πεπτώκασιν, ὅσοι μιᾶς ἐστὶ τῇ αβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι ποσάκις πίπτουσι καὶ μιᾶς τῆς ε, μονάδος καὶ ο. οἱ δὲ μ, καὶ ο, ἴσοί εἰσι τοῖς αβ. Ε'αὰ ἄρα δύο ἀριθμοὶ, ἡ τὰ ἐξῆς.

Euclid. lib. 8. Fig. 8.

Πρότασις Ι': Θεώρημα:

Ε'αὰ δύο ἀριθμῶν ἑ μονάδος μεταξὺ πίπτῃ τὰ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι ἑκατέρῳ αὐτῶν ἡ μονάδος ἐξῆς μεταξὺ πίπτῃ τὰ συνεχὲς, ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, ποσάκις καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ πίπτῃ τὰ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ε'στωσαν ὅδε δύο ἀριθμοὶ οἱ αβ, καὶ μιᾶς μὲν τῶν α, ἡ μονάδος γ, πεπτώκασαν ἐξῆς ἀνάλογον οἱ δε, μιᾶς δὲ τῶν β, ἡ γ, μονάδος, οἱ ζη. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ μιᾶς τῇ αβ, ποσάκις πίπτουσι, ὅσοι μιᾶς ἑκατέρᾳ τῇ αβ, ἡ μονάδος πεπτώκασιν. ὁ δὴ, πάντων τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν θ, ποιείτω, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν κ, ποιείτω. ἔστι ὁ ζ, τὸν αὐτὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. δείκνυται, ὡς μιᾶς τῇ αβ, ἐμπεσόντας ἀριθμὸς, ποσάκις τὸς κλ, ἐξῆς ἀνάλογον εἶναι τοῖς αβ. Ε'πεὶ δὲ ἔστιν ὡς ἡ γ, μονὰς πρὸς τὸν δ, ὕπατος ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ δ, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιά-

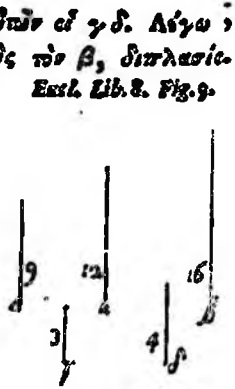
σιάσας τὸν ε, ποιείτω, καὶ τὸ βʹ· πόρισμα τῶν εʹ· τῶ ζʹ. διὰ τὰ αὐτὰ ὅτι, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ γ, μονὰς πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, ποιείτω. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα δείκνυται, ὅτι καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, τὸν δὲ ε, ἑαυτοῦ πολλαπλασ: τὸν β, ποιείτω. ἐπεὶ δὲ ὁ δ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὰς ε Θ, ποιείτω. ἔστι ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν Θ, καὶ τῶν εʹ ζʹ: τῶ ζʹ: διὰ τὰς αὐτὰς ἔστι, ἐπεὶ καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὰς Θ κ, ποιείτω. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ Θ, πρὸς τὸν κ, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, καὶ καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν Θ, ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν Θ, οὕτως ἐστὶν ὁ Θ, πρὸς τὸν κ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ δ, τὰς ε Θ, πολλαπλασιάσας τὰς α κ, ποιείτω, ἔστιν ἄρα διὰ τὰς ῥηθείσας εʹ ζʹ: ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν κ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν Θ, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν κ. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ δ ζ, τὸν Θ, πολλαπλασιάσαντες τὰς κ λ, ποιείτωσαν ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ κ, πρὸς τὸν λ, καὶ τῶν εʹ: τῶ ζʹ: ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν κ, οὕτως ἐστὶν ὁ κ, πρὸς τὸν λ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ὁ ζ, τὰς Θ κ, πολλαπλασιάσας τὰς λ β, ποιείτω. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ, πρὸς τὸν κ, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ Θ, πρὸς τὸν κ, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, οὕτως καὶ ὁ λ, πρὸς τὸν β, οἱ α, κ, λ, β, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑʹ: Θεώρημα.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ὃς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ γ δ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ὁ δὲ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν α, ποιείτω, ὡς πλευρὰ τὸ α, τὸν δὲ δ, ἑαυτοῦ πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ τὸν εʹ ζʹ: τῶ ζʹ: ἐπεὶ δ' αὖθις οἱ γ δ, τὸν δ, πολλαπλασιάσαντες τὰς ε β, ποιείτωσαν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς

Eucl. Lib. 8. Fig. 9.



τὸν ε.

τὸν ε, ὕπως ὁ ε, πρὸς τὸν β. ὁ ε, ἄρα μέσος ἀνάλογός ἐστι τῶν αβ· ἐπεὶ δὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ὅπερ ὁ α, πρὸς τὸν ε, καὶ τὸν ιϑ': ὅρον τῶ ε: ὡς δὶ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἕτως καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ὅπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

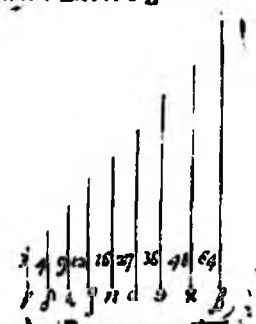
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ πρῶτος τετράγωνος πρὸς τὸν μέσον ἀνάλογον, καὶ ὁ μέσος ἀνάλογος πρὸς τὸν β': τετράγωνον.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογοί εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Μεταξὺ δὴ δύο κύβων αβ, δύο λέγω ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς ἐμπίπτειν. Ἔστω πλευρὰ τοῦ μὲν α, ὁ γ, τοῦ δὶ β, ὁ δ· καὶ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, τὸν δὶ δ, ὡσαύτως πολλαπλ: τὸν ζ, ποιείτω. καὶ ὁ δ, ἔστω ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Αὖθις ἑκάτερος τῶν γ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς ϑ κ, ποιείτωσαν. ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τοὺς ε ζ, πεποίηκε. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν ε ζ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Διὰ τᾶς αὐτᾶς δείκνυται, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὕπως ὁ α, πρὸς τὸν ϑ, τοὺς γὰρ ε ζ, ὁ γ, πολλαπλασιάσας τοὺς α ϑ, πεποίηκε. ὡς δὶ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕπως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν ϑ. Αὖθις ἐπεὶ οἱ γ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ϑ κ, πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕπως ὁ ϑ, πρὸς τὸν κ, καὶ τὸν ιε: τοῦ ζ': ὡς δὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐδείκνυτο καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ϑ. καὶ τὸν ι α': ἄρα τοῦ ε: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ϑ, ὕπως ὁ ϑ, πρὸς τὸν κ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ δ, τοὺς ζ η, πολλαπλασιάσας τοὺς κ β, πεποίηκε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὅ κ, πρὸς τὸν β, ὡς δὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γὰρ δ, τὸν γ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τοὺς ζ η, πεποίηκε. ἄρα καὶ ι α': τοῦ ε: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕπως ὁ κ, πρὸς τὸν β. ἐδείχθησαν δὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἶναι καὶ οἱ α ϑ κ, ἄρα μεταξὺ τῶν δύο κύβων αβ, δύο ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ εἰσιν, ὅπερ ὡς τὸ δ: Ἐπεὶ δὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν ϑ, καὶ τὸν ι α': ἔρον τοῦ ε: ὡς δὶ ὁ α, πρὸς τὸν ϑ, ἕτως καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πλευρὰ



Eucl. Lib. 8. Fig. 10.

πρὸς

πρὸς πλάγιαν, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

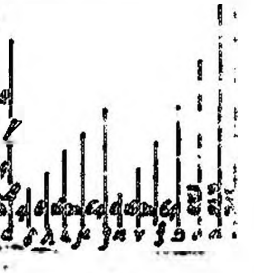
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι μεταξὺ δύο κύβων δύο, μέσων ἀνάλογων πίπτουσι, οἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται. καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Τῶν δὴ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμῶν πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν, ποιείτω τοὺς δ ε ζ, πολλαπλασιάσαντος δὲ τοῦ β τοὺς δ ε ζ, ποιείτωσαν τοὺς η θ κ. λέγω τοὺς α δ ε ζ, καὶ τοὺς η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν α β γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τοὺς, δ ε ζ, πεποίηκεν. εἰ δὲ δ ε ζ,



Euclid. Lib. 8. Fig. 11.

πετράγωνοί εἰσι, καὶ μεταξὺ τῶν τε δ ε, καὶ ε ζ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστι καὶ τὸν ε ἀ: τὰ παρόντα, ἔστωσαν δὴ αὐτῶν εἰ λ μ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ λ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν μ, ὁ μ, πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ δὲ εἰ δ λ ε, πρὸς ἄλληλους λόγον ἔχουσιν, ὃν ἔχει ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸ πέρασμα τῆς ι ά, τὰ παρόντα, καὶ εἰ ε μ ζ, ὃν ἔχει ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ τὰ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὰ β, πρὸς τὸν γ, ὁ αὐτὸς ἐστὶν [illegible] ρα εἰ δ λ ε, ε μ ζ, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσί, καὶ ἴσαι τὸ πλῆθος. ὥστι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, τουτέστιν ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, καὶ τὸν ι δ': τοῦ ζ': διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἰ η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται. ἐπεὶ κύβοι εἰσὶ, καὶ μεταξὺ αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τὸν ἀνωτέρω, ἔχοντες τὸν λόγον τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ πέρασμα τῆς ἀνωτέρω.

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν αὐτὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Τετράγωνος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, μετρείτω τὸν β, τετράγωνον. λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ α, δυλ: ὁ γ, μετρήσει τὸν πλευρὰν τοῦ β, δυλ: τὸν δ, καὶ γὰρ τὸν

τῷ ε δ: τὸ παρόντος, εἰς μέσος ἀδιάλογός ἐστι μιπεξὺ τῆς α, β. ἔστω ὕπος ὁ ε, οἱ α ε β, ἄρα καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μιβεῖ, μιβήσει πάντως καὶ τὸν ε, καὶ τῷ ζ': τὸ παρόντος. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὕπως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, ἄρα τὸν δ, μιβεῖ. ἐπεὶ καὶ ὁ α, τὸν ε, μιβεῖ. μιβήπω δὲ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α, τὸν β, μιβεῖ. ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ε δ: οἱ α ε β, ἑξῆς ἀδιάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μιβεῖ, μιβεῖ ἄρα καὶ ὁ α, τὸν ε, καὶ τῷ ζ': τὸ παρόντος, μιβεῖ ὅτι καὶ τὸν β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 8. Fig. 12.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβου ἀριθμοῦ μερῆ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μερήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μερῆ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μερήσει.

Ὁ α, κύβος ἀριθμὸς, ἡ πλευρὰ ὁ γ, μιβάτω τὸν β, κύβον ἀριθμὸν, ἡ πλευρὰ ὁ δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, τὸν δ, μιβεῖ. εἰλήφθωσαν καὶ τῷ ε β': τῶ παρόντος οἱ δύο μέσοι ἀδιάλογον ὅπιπς ἀριθμοὶ μιπεξὺ τῆς α β, καὶ ἔστωσαν ὕπι οἱ ε ζ. δῆλον δὴ καὶ τὸ πόρισμα: τῆς αὐτῆς ε β': ὅτι οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀδιάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, πρὸς τὸν δ. Ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μιβεῖ, μιβήσει πάντως καὶ τὸν ε, καὶ τῷ ζ': τῶ παρόντος, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὕπως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ α, τὸν ε, μιβεῖ, μιβήσει πάντως καὶ ὁ γ, τὸν δ. ὅπερ ἐστὶ τὸ πρῶτον. Μιβείτω δὲ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω καὶ τὸν α, μιβεῖν τὸν β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀδιάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τῷ γ, πρὸς τὸν δ, λόγῳ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕπως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μιβεῖ, μιβήσει πάντως καὶ ὁ α, τὸν ε, μιβῶν δὲ ὁ α, τὸν ε, μιβήσει ἔτι καὶ τὸν β, καὶ τῷ ζ': τῶ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μερῆ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μερήσει. καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μερῆ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μερήσει.

Δείκνυται παντὶ δῆλον ὡς, εἰ γὰρ τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον μὴ μιβῶντος, ὑποπεσῆ δὲ καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μιβεῖν, συμβήσεται διὰ τῆς ε δ': τῶ παρόν-

τος, καὶ τὸν πρὸς ἄγωνον ἀριθμὸν μίξαι, τὸν πρὸς ἄγωνον ἀριθμὸν, ὃν δεῖ ἐμβαλεῖν καὶ πλευρὰν, εἰ τῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου μὴ μιχθείσης, δῶμεν τὸν πρὸς ἄγωνον μίξαι τὸν πρὸς ἄγωνον, συμβήσεται διὰ τὰς αὐτὰς, καὶ τοῦ πλευρὰ μίξαι τὸν πλευρὰν, οὗ δεῖ ἐμβαλεῖν. ὅπερ ἐδείχθαι.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

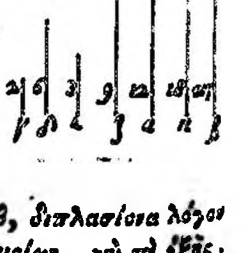
Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβου ἀριθμοῦ μὴ μέρος ᾖ, οὐδὲ καὶ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μέρος ἔσται. κἂν ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μὴ μέρος ᾖ, οὐδ' ὁ κύβος τοῦ κύβου μέρος ἔσται.

Καὶ ταῦτα, ὡς μὲν τὸ αὐτόπτον, δείκνυται διὰ τοῦ ε'· ἵνα δὲ χάριν τοῦ λόγου τοῦ τοῦτο δεικνύωμεν, ἵνα μὴ ταυτολογεῖν δόξωμεν.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, οἱ μέσοι ἀνάλογοι εἰσὶν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ καὶ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τοῦ ὁμολόγου πλευράν.

Σ'τωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ αβ, γδ, καὶ τοῦ μὲν α, πλευρὰ οἱ γδ, ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ εζ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν αβ, εἰς μέσους ἀνάλογόν εἰσιν. ὁ δὲ τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν τῶν ηδ: ὅρον τοῦ ζ: ἐστὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα τῶν ηδ τοῦ ε γ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δὲ δ, τὸν γ ε, πολλαπλασιάσας τὸν αη, πεποίηκε, ἄρα τῶν τοῦ ε ζ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα καὶ τοῦ ε δ: τοῦ ε: καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ ε, τὸν δ ζ, πολλαπλασιάσας τὸν αβ, πεποίηκε, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ ε δ: ἄρα μεταξὺ τῶν αβ, εἰς μέσους ἀνάλογόν εἰσιν ὁ η. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, δηλ: ὁ γ, πρὸς τὸν ὁμόλογον, δηλ: τὸν ε, ἡ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. καὶ γὰρ τῶν ε: ὅρον τοῦ ε: ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Δύο ἄρα ὁμοίων, καὶ τὰ ἑξῆς.



Euclid. lib. 8. Fig. 11.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο ὁμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν μέσων ἀνάλογον ἔξουσι τοὺς εἴδεσιν ἀνάλογον, καὶ τῷ λόγῳ τῷ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων στερεῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ στερεὸς τρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Εὐτ. Lib. 8. Fig. 14.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ αβ, γδ τῶν μὲν α, πλευραὶ οἱ γδε, ἀριθμοὶ, τῶν δὲ β, οἱ ζηθ. Λέγω δὴ, ὅτι μεταξὺ τῶν αβ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ὁ γ, γὰρ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω, ὁ δὲ ζ, τὸν η, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν οἱ αβ, ὅμοιοί εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν κδ: ὅρον τῶν ζ': ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ η, πρὸς τὸν θ, καὶ ἑπομένως διὰ τοῦ αὐτοῦ, οἱ κλ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ καθ' ἑνὸς ἄρα, εἰς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ ὑπὲρ ὁ μ, οὗ οἱ εθ, πολλαπλασιάσαντες τὸν ν ξ, ποιείτωσαν. οἱ κμλ, ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ τοῦ δ, πρὸς τὸν η. καὶ τὸ πόρισμα τῶν ἀνωτέρω. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ἐναλλὰξ καὶ τῶν ιγ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν η, ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὁ μ, πρὸς τὸν λ. ἄρα οἱ κμλ, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ε, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν ὑπὸ τῶν γδ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν, ὑπὸ δὲ τῶν γδ, ὁ κ, γέγονεν, ὁ ε, ἄρα τὸν κ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. Ἐπεὶ οὖν καὶ τὸν μ, πολλαπλασιάσας τὸν ν, πεποίηκεν, ἄρα ἔστιν ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, τουτέστι τῶν ιζ': τῶν ζ': ὡς δὲ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ἄρα καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν. καὶ διὰ τοῦτο τῶν αὐτῶν, ἐπεὶ οἱ εθ, τὸν μ, πολλαπλασιάσαντες τὸν ν ξ, ποιήκασιν. ἄρα ἔστιν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ ε,

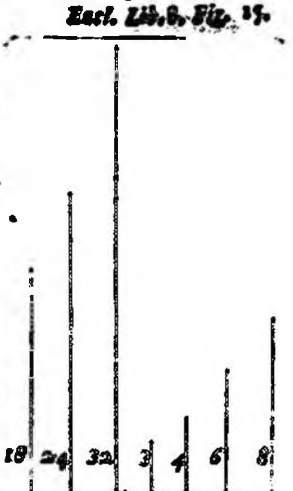
τὸν Θ, δίδυπται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ ε, πρὸς τὸν ξ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Θ, τὸν μ λ, πολλαπλασιάσας τὸν ξ β, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ὁ ξ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ἔστι καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν ξ, ἄρα καὶ α ε ξ β, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει ἣν πλασίονα λόγον, ἥπερ πρὸς τὸν ε, τοῦτ' ἔστι τὸν ιε: ὅρον τῶ ε: ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ ι, πρὸς τὸν Θ. ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, ἣν πλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ ι, πρὸς τὸν Θ. Δύο ἄρα εἰσὶν ἐν τοῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἰς μέσους ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Ἀριθμῶν γὰρ τῶν α β, εἰς μέσους ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ὁ γ, λέγω ὅτι οἱ α β, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἰσιν. Εὑρήσθωσαν γὰρ τῶν λι: τῶ ζ: οἱ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς α γ β, καὶ ἔστωσαν οἱ δ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς ε, ὁ α, πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν β, οἱ δὲ δ ε, ἄρα καὶ τοὺ κ ε: τῶ ζ: ἰσάκις μετροῦσι τὸν α γ, ἰσάκις δὲ ὁ δ, τὸν α, μετρεῖ, ταυτὸν μοναδὶς ἔστωσα ἐν τῷ ζ, ἔστι ὁ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ, οἱ δ ζ, ἄρα πλευραί εἰσι τῶ α, καὶ οἱ ε ζ, τῶ γ. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν ἐπεὶ οἱ δ ε, ἰσάκις μετροῦσι τὸν γ β, ἰσάκις μετρεῖ ὁ ε, τὸν β, ταυτὸν μοναδὶς ἔστωσαν ἐν τῷ κ, ὁ ε, ἄρα τὸν κ, πολλαπλασιάζων τὸν β, ποιεῖ, ἔστι οἱ ε κ, πλευραί εἰσι τῶ β, ἐδείχθησαν δὲ καὶ οἱ δ ζ, τῶ α, οἱ α β, ἄρα ἐπίπεδοί εἰσι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ ζ κ, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τὸν γ β, πεποιήκασιν, ἄρα καὶ τοὺ ε ι: τῶ ζ: ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν κ, ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν κ. καὶ ἐναλλάξ, καὶ τοὺ ε γ: τῶν ζ: ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ ε, πρὸς τὸν κ, καὶ τὸν κ α: ὅρων ἄρα τῶν αὐτῶν ζ: οἱ α β, εἰσὶν ὅμοιοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 15.



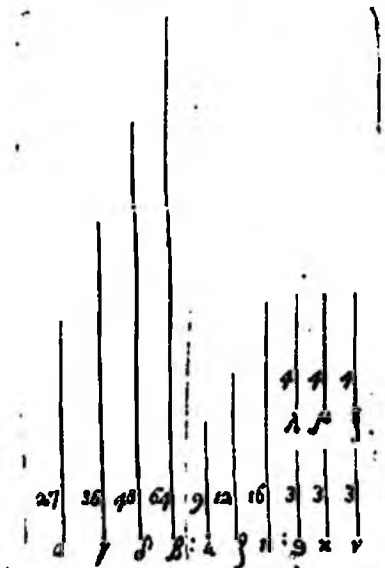
Πρό-

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Λέγω τὸν α β, ὁμοίους στερεὸν εἶναι. εἰλήφθωσαν γὰρ διὰ τῆς λέ: τῶν ζ' ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, οἱ ε ζ η, ὥστε διὰ τῆς ἀναπέρω οἱ ε ζ η, ὁμοίοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν δὴ τῶν μὲν ε, πλευραὶ αἱ θ κ, τῶν δὲ η, αἱ λ μ. ἐπεὶ δὲ οἱ α γ δ, ἢ ε ζ η, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἄρα ἢ δὲ ἴσον ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, ἤτοι τὸν ε δ': τῶν ζ': οἱ δὲ ε η, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ ἤτοι τὸν κ δ': τῶν αὐτῶν, ἢ διὰ τῆς κ γ': τῶν ζ': ἐλάχιστοι, ἄρα αἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς α δ, ἤτοι τὸν κ ά: τῶν ζ': ἰσάκις δὲ ὁ ε, τὸν α, μετρεῖ, πεσσῶται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῇ ν, ὁ ν, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὁ δὲ ε, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν θ κ, ὁ ν, ἄρα τὸν ἐκ τῶν θ κ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὥστε τὸ α, πλευραί εἰσιν αἱ θ κ ν, ὁ α, ἄρα στερεόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν, ἐπεὶ αἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς γ β, ὁσάκις ὁ η, τὸν β, μετρεῖ, πεσσῶται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῇ ξ. ὥστε ὁ ξ, τὸν η, πολλαπλασιάζων τὸν β, ποιεῖ. ὁ δὲ η, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν λ μ, ἄρα αἱ λ μ ξ, εἰσὶ πλευραὶ τοῦ β, ἢ ὁ β, τοίνυν στερεός ἐστι. Λέγω δὴ, ὅτι αἱ α β, ἢ ὁμοιοί εἰσιν. ἐπεὶ ἓν ὁ ε, μετρεῖ τὸν μὲν α, ἢ τοὺς ἐν τῇ ν, μονάδας, τὸν δὲ γ, ἢ τοὺς ἐν τῇ ξ, οἱ ν ξ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς α γ, ποιοῦσιν. ὥστε ὡς ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν γ, ἤτοι τὸν ε ά: τῶν ζ'. πάλιν ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶ ἢ ὁ θ, πρὸς τὸν λ, ἢ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ε ά. τῶν παρόντων. ἄρα οἱ θ κ ν, πλευραὶ τοῦ α, ἀνάλογοί εἰσι τοῖς λ μ ξ, πλευραῖς τοῦ β, οἱ α β, ἄρα ἤτοι τὸν κ ά. ὅροι τῶν ζ'. ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 16.



Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ῥηταὶ ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος, τετράγωνος ἔσται.

Ἐπὶ τῆς κ'. προτάσεως τῆ παρούσῃ, ἐπεὶ οἱ α γ β, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α β, ἀριθμοὶ, ὅμοιοι ἐδείχθησαν εἶναι, εἰ δὲ ὁ α, τετράγωνος ὑποπέσῃ, καὶ ὁ β, πάντως τετράγωνος ἔσται. εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

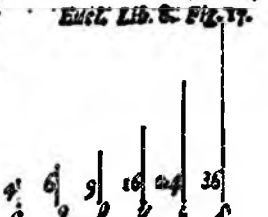
Ἐπὶ τῆς κά. δείκνυται, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι δηλ. οἱ γ δ, τῶν α β, ὁμοίως εἶναι, εἰ δὲ ὁ α, κύβος ὑποπέσῃ, καὶ ὁ β, ὡσαύτως κύβος ἔσται. τοὐναντίον δὲ οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, ἐχέτω λόγον πρὸς τὸν β, ὃν ὁ γ, τετράγωνος πρὸς τὸν δ, τετράγωνον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, τετράγωνος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ γ δ, τετράγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι, καὶ κατὰ τὸν ιά. τῆ παρούσῃ, μεταξὺ αὐτῶν εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, καθάπερ ὁ ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐστὶ καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, ὥσπερ ὁ ζ, ὥστε οἱ α ζ β, ἀνάλογόν εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστι, κατὰ τὸν κ'. τῆ παρούσῃ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 8. Fig. 17.



Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

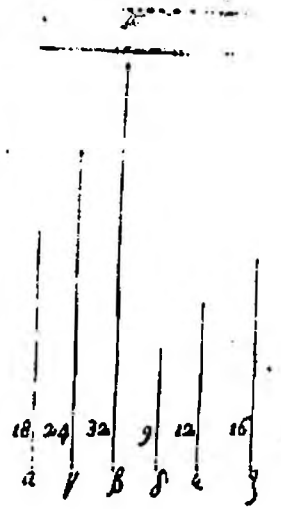
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κυβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Οἱ α, δύο ἀριθμοὶ ἐχέτω πρὸς τὸν β, ἀριθμὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ γ, κύβος, πρὸς τὸν δ, κύβον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι, οἱ γ δ, γὰρ κύβοι ἀριθμοὶ ὅμοιοι, στερεοί εἰσι, καὶ μεταξὺ αὐτῶν

δύο

δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τῶν ι Θ': τῶ παρόντος, ὥσπερ οἱ ι ζ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν β, μπαξὺ ἄρα καὶ τῆ α β, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς οἱ ι Θ, ἄρα οἱ α ια Θ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, καὶ τῶν κ γ': τῶ παρόντος, κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. lib. 8. Fig. 28.



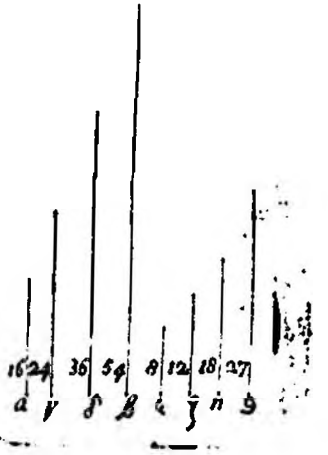
Πρότασις Κς': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Τὼς α, β, ὅδε ὁμοίους δειθμὼς, λέγω, λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους, ὃν τῆ̃ράγωνος δειθμὸς πρὸς τῆ̃ράγωνον δειθμὸν, μπαξὺ γὰρ τῆ̃ α β, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν δειθμὸς, καὶ τῶν ι ε': τῶ παρόντος, ἔστω ὕπος ὁ γ. καὶ διπλασίασαν διὰ τῆς λ ε': τῶ ζ': οἱ ἐλάχιστοι δειθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς α γ β, καὶ ἔσωσαν ὕποι οἱ δ ο ζ, οἱ δ ζ, ἄρα καὶ τὸ δ: πόρισμα τῆς β': τῶ παρόντος, εἰσὶ τῆ̃ράγωνοι, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶν ι ζ': τῶ ζ': ἄρα οἱ α β, λόγον ἔχουσιν, ὃν τῆ̃ράγωνος δειθμὸς, πρὸς τῆ̃ράγωνον δειθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Κζ': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.



Τὼς α β, ὅδε ὁμοίους στερεοὺς λέγω, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ γὰρ τῶν ι Θ': τῶ παρόντος μπαξὺ αὐτῆ̃ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν δειθμοὶ, ὡς οἱ γ δ. διὰ δὲ τῆς λ ε': τῶ ζ': διπλασίασαν τῆ̃ ἐλαχίστων δειθμῶν τῆ̃ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, (οἵτινες ἔσωσαν οἱ ι ζ η Θ,) οἱ ι Θ, κύβοι εἰσὶ καὶ τὸ δ: πόρισμα τῆς β': τῶ παρόντος. ὡς δὲ ὁ ι, πρὸς τὸν Θ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶν ι β': τῶ ζ': ἄρα οἱ α β, λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος δειθμὸς, πρὸς κύβον δειθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τῆ̃ Ο'γδόου τῆ̃ Εὐκλείδου Στοιχείων.

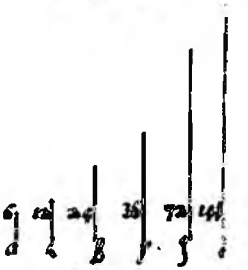
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΕΝΝΑΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ὁ Μετὰ ἐπιπέδου ἄδυ ἀριθμοῦ εἰ α β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν, ὃν λέγω τετράγωνον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, ὁ γ, τίνων τετράγωνός ἐστι καὶ τῶν ἐπ': ὅρων τῶν ζ: καὶ ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ δ, ποιείτωσαν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ τινῶν ἐζ: τῶν ζ': ἐπεὶ δὲ εἰ α β, ὅμοιοί εἰσι, καὶ τινῶν ἐπ': ἄρα τῶν ἐ': εἰς μίσους ἀναλογὰς πέσων ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν γ δ, εἰς μίσους ἀναλογός ἐστιν. ἔστω δὲ ὁ ζ, εἰ γ ζ δ, ἄρα ἐξῆς ἀναλογόν εἰσιν. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνος ἔσται. καὶ τινῶν α β': τῶν ἐ': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 1.



Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τετράγωνον· ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν.

Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παραδείγματος εἰ α β, ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν τετράγωνον ἀριθμόν. Λέγω τοὺς α, β, ὁμοίους εἶναι ἐπιπέδους· ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, καὶ τῶν ἐπ': ὅρων τῶν ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ αὐτὸς α, καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ἄρα κατὰ τινῶν ἐζ': τῶν ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ.

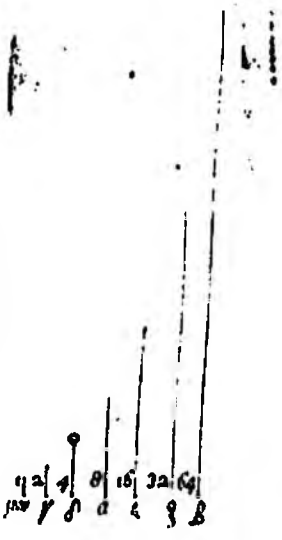
τὸν δ. ἐπεὶ δὲ οἱ γ, καὶ δ, πρῶτοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι. καὶ τῷ ιή: τὸ ή: εἰς μέσος ἀνάλογος τῶν ἐστὶν, ὥσπερ ὁ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μιπλεῖ ἄρ α β, εἰς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ἔστω δὴ ὁ ε. καὶ τῷ κ': ἄρα τὸ ή: οἱ αβ, ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἄδς ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω. Λέγω ὅτι τὸν β, κύβον ἐστίν. Ἔστω γὰρ ὁ γ, τῷ α, πλήθει, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. δῆλον τοίνυν ὡς ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, καὶ τὸ β': ἄρα πόρισμα τῶν ι δ': τῶν ζ': ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ αὐτὸς γ, πρὸς τὸν δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε, διὰ τοῦτο ἄρα πορίσματος, ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν α, ὡς δὲ ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, οὕτως δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τῷ ι α': τῶν ε': ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν α, μιπλεῖ ἄρα μονάδος καὶ α, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, ἄρα κατὰ τὸ προῤῥηθὲν πόρισμα, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν β, μιπλεῖ δὲ μονάδος καὶ α, δύο ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, ἄρα καὶ μιπλεῖ τῶν α, καὶ β, δύο ἐμπεσοῦνται ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐμπεπτώκασι δὲ οἱ ε ζ. ἐπεὶ δὲ ὁ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, κύβος ἐστὶ, καὶ τὸν κ γ': τῶν ε': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 2.



Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἄδς ἀριθμὸς ὁ α, κύβον ἀριθμὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, κύβος ἐστίν. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δ, ἄρα κύβος ἐστὶ, καὶ τῷ ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας, τὸν δ γ, πεποίηκε. ἔστιν

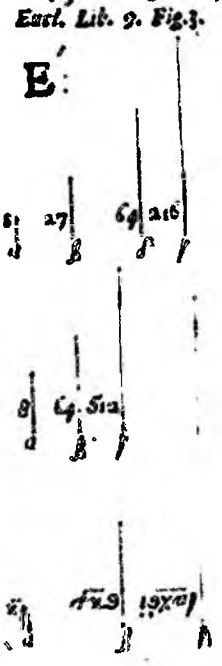
ἄρα καὶ τὸ ιζ: τῷ ζ: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, καὶ διὰ τὰ αβ, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ τὸ ιθ: τῷ η: ἄρα καὶ μιᾷξὺ καὶ δγ, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. εἰ δγ, ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσι καὶ τὸν κδ: τῷ η: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ γ, κύβος ὅμοιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ε'αν ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Ε'πεὶ γὰρ ὁ α, κύβος ἀριθμὸς τὸν β, ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ, κύβον πεποίηκε. λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε. ὁ α, κύβος ἐστὶ καὶ τὸν γ: τῷ παρόντι. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, κύβος ἐστὶν, ἄρα εἰ δγ, ὅμοιοι στερεοί εἰσι. καὶ καὶ τὸν ιθ: τῷ ι. δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν αὐτοῖς. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἕτοι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸν ιζ: τῷ ζ: (ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δγ, πεποίηκε.) ἄρα καὶ μιᾷξὺ καὶ αβ, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, ἄρα κύβος ἔσται, καὶ τὸν κγ: τῷ η: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 3.



Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ε'αν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

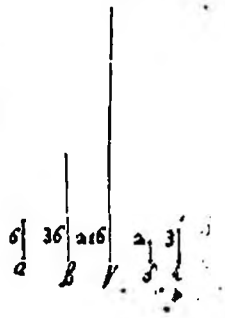
Α'ριθμὸς γὰρ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, κύβον πεποίηκε. λέγω δὴ καὶ τὸν α, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκε. ἐπεὶ πάλιν ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκε, τὸν δὲ β, αὐτοῦτον πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκε, ὁ γ, πάντως κύβος ἐστὶ, καὶ τὸν ιθ: ὅρον τῷ ζ: ἔστι δὲ καὶ ὁ β, κύβος, ὅμοιοι ἄρα εἰσὶ στερεοὶ οἱ βγ, καὶ δύο αὐτοῖς μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τὸν ιθ: τῷ η: ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἕτοι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸν ιζ: τῷ ζ: ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν β, πολλαπλασ: τὸν β, γ, πεποίηκε, ἄρα καὶ διὰ αβ, δύο μέσοι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, ὁ δὲ β, κύβος, ἄρα καὶ ὁ α, αὐτοῦτον κύβος ἐστὶ, καὶ τὸν κγ: τῷ η: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν σωίθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τρίγωνος ἔσται.

Σωίθετος γὰρ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω, ὃν λέγω τριγωνον εἶναι. ὁ γὰρ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω· ἐπεὶ ὁ α, σωίθετός ἐστιν, ἄρα ὑπό τινος ἀριθμοῦ μιγνύεται, κατὰ τὸν ι γ΄: ὅρον τῶ ζ΄: μιγνύσθω ὑπὸ τῶ δ, καὶ ἐστάκως ὁ δ, τὸν αὐτὸν α, μιγνύει, τοσαῦται μοναδες ἔσονται ἐν τῷ ε, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλ: τὸν α, ποιείτω. ἐπεὶ δι' ἴσου ὁ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω, ὁ γ, ἄρα ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν, τῷ δ ε β, ἀλλήλοις πολλαπλασιαθέντων, γίγονε· κατὰ τὸν ι ζ΄: τρίγωνος ἄρα ὅρον τῶ ζ΄: τριγώνος ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 4.

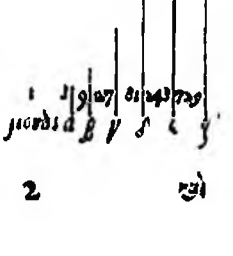


Πρότασις Η΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσωοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἅμα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες

Λ΄ριθμῶν γὰρ τῶν α β γ δ ε ζ, ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων· Λέγω τὸν μὲν β, τρίτον ἀπὸ μονάδος τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας τοὺς ἅμα διαλείποντας, ὥσπερ οἱ δ, ζ. τὸν δὲ γ, κύβον, καὶ πάντας τοὺς δύο διαλείποντας, ὥσπερ ὁ ζ, καὶ οἱ ὅμοιοι, τὸν ζ΄: δὲ ζ, κύβον ἅμα καὶ τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας ἔτι τοὺς πέντε διαλείποντας. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιεῖ, καὶ τὸ β΄: πόρισμα τῶν ι ε΄: τῶ ζ΄: ὁ β, ἄρα τετράγωνός ἐστιν, οἱ δὲ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστι, καὶ τὸν α β΄: τῶ η΄: διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ ζ, τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἑξῆς ἕνα διαλείποντες. Λύσις ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡμονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ, κατὰ τὸ εἰρημένον πόρισμα, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιοῦντα, ὁ δὲ β, τετράγωνος δέδεικται, καὶ πλευρὰ αὐτῶ ὁ α, ὁ γ, ἄρα κύβος ἐστίν· ἐπεὶ δὲ οἱ γ δ ε ζ, ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ γ, κύβος ἐστίν, ἄρα καὶ τὸν κ γ΄: τῶ η΄: καὶ ὁ ζ, κύβος ἐστίν· ἐδείχθη δὲ

Euclid. Lib. 9. Fig. 5.



καὶ τετράγωνος. καί ἐστιν ἑβδομος ἀπὸ μονάδος, ὁ ζ, ἄρα κύβος ἅμα καὶ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δεἰξομεν καὶ τοὺς ἑξῆς δύο διαλείποντας, κύβους ὄντας πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἔδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, ὧν ὁ α, μονὰς, τετράγωνος. Λέγω καὶ τοὺς λοιποὺς τετραγώνους εἶναι. ὅτι μὲν οὖν ὁ β, καὶ πάντες οἱ ἑνὶ διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι, δέδεικται διὰ τῶν ἀναπάλιν. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, τετράγωνος, καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, καὶ τοῦ α β: τὸ ἀπὸ τοῦ ἀναπάλιν διὰ τῶν αὐτῶν, ἐπεὶ οἱ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνος, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστιν, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. Ἔστω δὴ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τοὺς ἑξῆς πάντας κύβους εἶναι. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, καὶ τὸ β': πέμπτος ἀπὸ τοῦ ε': τὸ ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, πάντως ὡσαύτως κύβος ἐστὶ, καὶ τὸν γ': τὸ παρόντες. ὅτι δὲ καὶ ὁ γ, καὶ πάντες οἱ δύο διαλείποντες κύβοι εἰσὶ, δέδεικται διὰ τοῦ ἀναπάλιν, ἄρα οἱ α β γ, ἑξῆς ἀριθμοὶ, κύβοι εἰσὶν. ὧν προαποδεδειγμένων, εὑρεθήσεται τοῦ ἀποδείξεως ἐπὶ τοῦ ἑξῆς ἀρχόμεθα. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ δ, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος, καὶ ὁ δ, πάντες κύβος ἐστὶ καὶ τὸν α γ': τὸ ὅ: ὁμοίως δεἰξομεν καὶ τὸν ε, κύβον εἶναι, ἀπὸ τοῦ β, ἀρχόμενοι, οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 6.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τοῦτο ἅμα διαλειπόντων πάντων, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τοῦτο δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἔδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, καὶ ὁ μὲν τὸν

μὲν

μονάδα α, μὴ ἔστω πρῶτος. Λέγω ὅτι ἄλλον πρώτων εἶναι, χωρὶς τῶν τριῶν, ᾧ τὸ ἑξῆς· εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὁ γ, πρῶτος, ἔστι δὴ ᾧ ὁ β, πρῶτ: καὶ τὸν ν: τῶν παρόντων, οἱ β γ, ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ οἱ α β, ἄρα ὅμοιοι εἰσιν, ὁ δὲ β, πρῶτος ἐστιν, ἄρα ᾧ ὁ α, πρῶτος, ὅπερ ἄτοπον. ὑπε- *Eucl. Lib. 9. Fig. 7.*

τάθω γὰρ μὴ πρῶτος, ἔσθ' ὁ γ, ἄρα πρῶτός ἐστιν. Λύθις ἐπεὶ μιᾷ τῶν γ ε, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ δ, οἱ γ ε, ἄρα ὅμοιοί εἰσι, καὶ τὸν κ: τῶ ν: ὁ δὲ γ, οὐκ ἔστι πρῶτος, ἄρα ἔσθ' ὁ ε, πρῶτός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Μὴ ἔστω δὴ ἀδὴ κύβος ὁ α. Λέγω μὴ δὴ ἄλλον τινὰ κύβον εἶναι, χωρὶς τῶ πρώτου ἀπὸ μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὁ β, κύβος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὁ α, ἑαυτὸν πολλα-

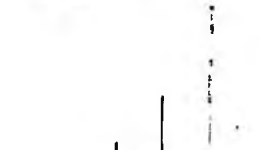
πλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς ι ς': τῶ ζ': ὁ δὲ β, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ α, καὶ τὸν ς': τῶ παρόντος, κύβος ἐστὶν, ὅπερ οὐχ ὑπετίθη- ται, ἄρα ἔσθ' ὁ β, κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ μιᾷ τῶν α δ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ β γ, ἄρα καὶ τὸν κ δ: τῶ ν: οἱ α δ, ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ α, μὴ κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ δ, μὴ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ε΄στωσαν ἀδὴ ἀπὸ μονάδος τῆς α, ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ β γ δ ε. Λέγω τὸν ἐλάττονα β, μετρεῖν τὸν μείζονα αὐτῶν γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς *Eucl. lib. 9. Fig. 8.*

ἡ α, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἄρα ἰσάκις ἡ α, μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν γ, ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ καὶ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, καὶ ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ καὶ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸν γ, τὸν δ, μετρεῖν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ γ, τὸν δ. ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ καὶ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἄρα



καὶ ὁ γ, τὸν δ, μετρεῖ καὶ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. οὗτω καὶ ἐπὶ τῆς ἑξῆς. ὥστε πάντες οἱ μετὰ τὸν β, ἀριθμὸν, μετροῦσιν ἕκαστος τὸν μεθ' ἑαυτὸν καὶ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. ὁ β, ἄρα τῶν μετρουμένων πάντων ἀριθμῶν ἐλάττυ-

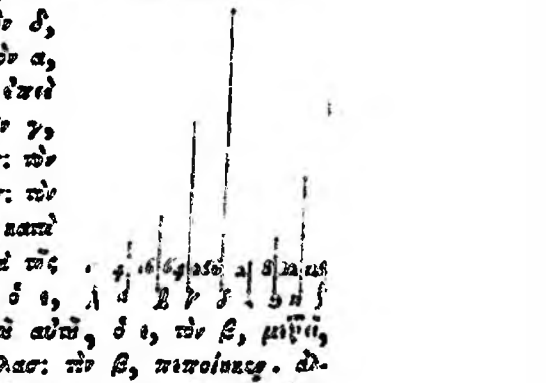
μον

μεν μέρος ἐστὶ τοῦ μιζόσι καὶ τὸν γ': ὅρον τὸ ζ': καὶ δι' ἴσου, ὁ β, ἀριθμὸς πάντας τοὺς μιθ' ἑαυτὸν μιζεῖ, καὶ τὸν ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων ἡ ἑξῆς πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τοῦ αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἥδη ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος οἱ α β γ δ, καὶ ὁ ἑπέχων ε, ἀριθμὸς μετρείσθω ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, πάρ: χάρ: τοῦ ι. Λέγω δὴ καὶ τὸν παρὰ τὸν λ, μονάδα α, ὑπὸ τοῦ μιζεῖσθαι. εἰ γὰρ μή, οἱ α ι, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ τὸν ι β': ὅρον τὸ ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ ι, τὸν δ, μετρεῖ, μιζείτω αὐτὸν κατὰ τὸν ζ, ὥστε ὁ ι, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιεῖν. ἐπεὶ δὲ κατὰ ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, καὶ τὸν ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν, ὡς διὰ τοῦτο ἀναστρέφων δέδειχεν. ὁμώνυμος δὲ τῷ β, ἐστὶν ὁ γ, καὶ τὸν αὐτὸν. ἄρα καὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, ποιοῦντα. καὶ τὸν ι δ': ἄρα τὸ ζ: ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. κατὰ δὲ τὸν κε: ἐπεὶ οἱ α ι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, μιζεῖ ὁ ι, τὸν γ, μετρεῖτω δὲ κατὰ τὸν η, ὥστε ὁ ι, τὸν η, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιεῖτω. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν αὐτὸν γ, ποιείτω, (μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν γ, κατὰ τὸν β, ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμὸν, ὡς δέδεικται διὰ τοῦτο ἀναστρέφων.) ἄρα κατὰ τὸν ι δ': τὸ ζ: ἔστιν ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν η, κατὰ δὲ τὸν κε: τὸ αὐτὸ, ὁ ι, τὸν β, μιζεῖ, μετρείτω δὲ κατὰ τὸν θ, ὥστε ὁ ι, τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, ποιοῦντα. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλ: β, ποιοῦντα, κατὰ τὸ β': πόρισμ: τοῦ ι δ': τὸ ζ: ἄρα κατὰ τὸν κ: τὸ αὐτὸ ζ': ἔστιν ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ δὲ τὸν κε: τὸ αὐτὸ, μιζεῖ ὁ ι, τὸν α, καὶ ὁ α, τὸν β, οἱ δὲ α ι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, οἱ δὲ πρῶτοι μετροῦσι μόνῳ μιζοῦσιν, ἄπαξ ἄρα μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ι, τὸν α, οἱ ι α, ἄρα ὑπὸ ἑνὸς πρώτου πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ σύνθετοι. κατὰ τὸν λγ': ἄρα τὸ ζ: ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ μιζοῦσιν, ἐπεὶ δὲ ὁ ι, πρώτος ἐστι, καὶ παρ' ὑδετερὸς μετρεῖται, οὐ ἑαυτῷ, ἄρα ὁ ι, τοὺς ι α, μιζεῖ, μιζεῖ δὲ ὁ ι, καὶ τὸν δ, ὑφ' ἁπάντων ἄρα ἀριθμῶν ὁ ἑξῆς ὁ, μετρεῖται, ὑπ' αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὸν λ, μονάδα α, μιζηθήσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ οὕτω.

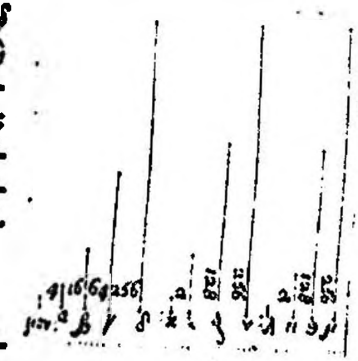


Euclid. lib. 9. Fig. 2.

Μιζείτω δὲ τὸν δ, ἀριθμὸν πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ι, κατὰ τὸν ζ. Λέγω, ὅτι μιζεῖ

μιᾷ ἔτι ὁ ε, ἢ τὸν α· εἰ γὰρ μή, ἔσται ὁ α, συνθετὸς ὢν, μετρήσει αὐτόν τις ἀ: ἀριθμὸς, κατὰ τὸν λγ': ᾧ ζ: καὶ ἔσω ὅπερ ὁ η· μιᾷ δὲ ὁ η, τὸν α, μετρήσει πάντως καὶ τὸν δ, τὸν μιᾷ μετρούμενον ὑπὸ τῶ α, κατὰ τὸν ι ἀ: τῶ παρόντος. μιᾷ δὲ ὁ η, τὸν δ, κατὰ τὸν θ, ἀριθμόν· ὥστε ὁ η, τὸν θ, πολλαπλασιάζων, τὸν μ, ἴσον ἄρα τῇ δ, ποιεῖ, ἕξαι ἄρα ὡς ἡμονὰς λ, πρὸς τὸν η, ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἔσται δὲ καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν ν, ποιοῦν, ἴσον τῇ δ, ἕξαι διὰ τῶ αὐτῶ πορίσ: τῶ ις': τῶ ζ': ὡς ἡ μονὰς κ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν ν, ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν ν, οὕτως ἡ λ, μονὰς πρὸς τὸν μ, ἄρα εἰσὶ πάσαρις ἀριθμοὶ, οἱ ϊ κ ε ζ ν, ἢ ὅλοι αὐτῶν ἴσοι τῷ πλήθος, οἱ λ η θ μ, δὶ ἴσου λαμβανόμενοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ· διὰ τὸ πορίσματος γοῦν τῆς ι δ': τῶ ζ': ἢ συνθ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν ε, οὕτως ἡ λ, μονὰς πρὸς τὸν η, ὅσας ἄρα μονάδας περιέχει ὁ ε, πάσας ἢ ὁ η, ἴσος ἄρα ὁ ε, τῇ η, ὁ δὲ η, τὸν α, μετρεῖ, μετρεῖ πάντως καὶ ὁ ε, τὸν αὐτὸν α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 9. Fig. 10.

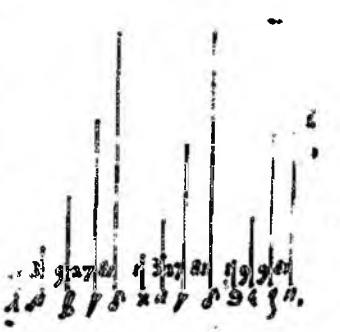


Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀναλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μήτε ὑπ' ἄλλου μετρηθήσεται, πλὴν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀναλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ὅθεν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ, οἱ α β γ δ, ὧν ὁ α, πρῶτος· λέγω τὸν δ, ὅστις ἔχει ὑπ' ἄλλου ἀριθμοῦ μετρεῖσθαι, μὴ τῶν α β γ· εἰ γὰρ μὴ, μετρείσθω ὑπὸ τῆ ε, κατὰ τὸν ζ. δείκνυται ἀ: τὸν μὲν ε, μὴ ἀ: εἶναι, ᾗ ὑπὸ μόνου τῆ α, μετρεῖσθαι· τὸν δὲ ζ, μήτε πρῶτον, μήτε τινὰ τῶν α β γ· εἰ γὰρ ὁ ε, πρῶτός ἐστι, μετρήσει πάντως κατὰ τὸν ἀνωτέρω τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· ἄρα συνθετος, ᾗ ὑπὸ μόνου τῆ α, πρώτου μετρηθήσεται· εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρηθήσεται, πάντως ὑπ' ἐκείνου ᾗ ὁ δ, ὅτι δὲ ᾗ ὁ α, πρῶτος ὢν, ὅπερ ἄτοπον· ὡσαύτως ἡμὶ ὁ ζ, συνθετός ἐστι. Λέγω δὲ, ὅτι ὁ ζ, οὐδέτις τῶν α β γ, ἐστίν· εἰ γὰρ ὁ ζ, εἷς τῶν α β γ, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ἀλλὰ διὰ τῆς ι ἀ: τῶ παρόντος, δέδεικται, ὅτι ἐν τῇ ταύτῃ ἀναλογίᾳ ὁ ἐλάσσων μετρεῖ τὸν μείζονα, κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς· ἄρα ὁ ζ, ἢ ἔστι τις τῶν α β γ· ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὸν ζ, ὁ ε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν δ, ποιοῦν· ἀλλὰ μὴ ὁ α, τὸν γ, πολ-

πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκε, ἄρα κατὰ τὸν ιθ': τῶ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν γ, * ὁ δὲ α, τὸν ε, μέτρει, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν γ. μετρείτω δὲ ὁ ζ, τὸν γ, κατὰ τὸν η, ὁ δὲ η, διαχθέσεται (ὡς καὶ οἱ ε ζ,) μέτρ πρῶτος εἶναι, μέτρτις πρὸ α β, καὶ ὑπὸ μέτρ τῶ α, πρώτου μετρεῖσθαι. ἐπεὶ οὖν ὁ ζ, μετρεῖ τὸν γ, κατὰ τὸν η, ὁ ζ, ἄρα τὸν η, πολλαπλ. τὸν γ, πεποίηκε. ἔστιν ἄρα κατὰ τὸν ιθ': τῶ εἰρημένου βιβλίου, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν β, ὁ δὲ α, τὸν ζ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ η, τὸν β. μετρείτω δὲ αὐτὸν κατὰ τὸν θ. ὡς ἀναπαλιν δὲ δείξομεν, ὅτι ὁ θ, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α, ἐπεὶ δὲ ὁ η, τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὸν θ, ὁ η, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ε, ἑαυτὸν πολλαπλασ. κατὰ τὸ β'. πόρισμα τῆς ιθ'. τῶ ζ'. τὸν β, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὸν κ'. τῶ ζ'. ἔστιν ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν η, μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν η, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ θ, τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. ὁ δ, ἄρα ὑπ' ἄλλου τινὸς ἢ μετρεῖται, πάρις τῶν α β γ, ἢ πᾶσα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ ὧδε. *Eucl. Lib. 9. Fig. 11.*



Μετρείτω δὲ παρὰ τὰς α β γ, ἀριθμὰς ὁ ε, τὸν δ, ἀριθμὸν, κατὰ τὸν ζ. λέγω τὸν ε, μὴ πρῶτον εἶναι, εἰ γὰρ ἔστι μετρῶν τὸν δ, μετρήσει καὶ τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. συνθέτως ἄρα ἐστὶν ὁ ε, * μετρεῖται δὲ ὑπὸ μέτρ τῶ α, πρώτου ἀριθμῶ. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρηθήσ, μετρηθήσεται καὶ ὁ δ, ὑπ' ἐκείνου, καὶ ἑπομένως ἢ ὁ α, κατὰ τὸν ιβ'. τῶ παρόντος, πρώτως ὢν, ὅπερ ἄτοπον. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, ἀεὶ ἔστιν ὁ αὐτὸς, μέτρ πρὸ α γ, μετρεῖται δὲ παρὰ τὸ α, μίζων ἄρα ἐστὶ τῶ α. Ἐπεὶ δ' αὖθις ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὸν ζ, τὸν ζ, ἄρα πολλαπλασιάζων ὁ ε, τὸν δ, ποιήσει, ποιείτω γοῦν τὸν η, ἴσον τῷ δ. κατὰ τὸ β'. πόρισμα, ἄρα τῆς ιθ': τῶ ζ'. ἔστιν ὡς ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὅπερ τὸν δ· διὰ τὸ αὐτὸ ἔστι, ἐπεὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας, κατὰ τὸν ιδ. τὸ παρόντος, τὸν δ, πεποίηκεν. ἔστι παλιν ὡς ἡ η, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ δὲ ὁ η, ἴσος ἐστὶ τῷ δ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ η, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν η, κατὰ τὸ πόρισμα ἄρα τῆς ιδ'. τῶ ζ'. οἱ η α γ δ, καὶ θ ε ζ η, ἀριθμοὶ σωὶ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσονται, ἄρα ὡς ἡ η, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ὅσας ἄρα μόναδας ὁ α, περιέχει, τοσαύτας καὶ ὁ η, οἱ α ε, ἄρα ἴσοι, δίδοται δὲ ὁ ε, καὶ μίζων τῶ α, ἄτοπον ἄρα. ἢ μετρεῖται ἄρα ὁ δ, ὑπ' ἄλλου τινὸς, πάρις τῶν α β γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

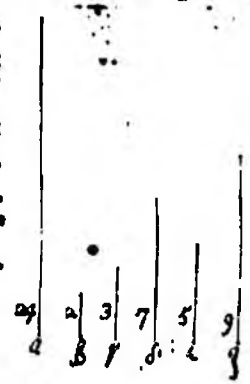
Πρό-

Πρότασις ΙΔ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ε΄στω ἥδη ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν β γ δ, πρώτων, ὁ α, ὃν οὐπ' οὐδενὸς ἄλλου λέγω, παρεξ τῶν β γ δ, μετρεῖσθαι. Μετρείσθω γὰρ εἰ δυνατὸν, ὑπὸ τοῦ ε, πρώτου, μὴ ὄντος τοῦ αὐτοῦ οὐδενὶ, τῶν β γ δ. ὁσάκις ὁ ε, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ, ὁ ε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασι τοῦ α, ποιήσει, ὁ δὲ α, μετρεῖται ὑπὸ τῶν β γ δ, πρώτων, ἄρα καὶ τινὰ τῶν λ β΄: τοῦ ζ΄: εἰ β γ δ, καὶ ἑξῆς τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσουσι, τὸν δὲ ε, οὐ μετρήσουσι, πρῶτος γὰρ, ἄρα τὸν ζ, μετρήσουσιν οἱ β γ δ, ἐλάττονα ὄντα τοῦ α, ὅπερ ἄτοπον. ὁ γὰρ α, ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενός ἐστιν, ἄρα ὁ α, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

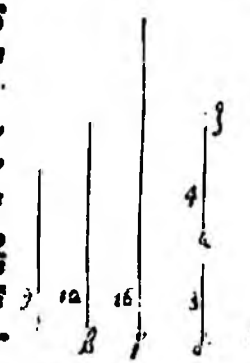
Euclid. lib. 9. Fig. 12.



Πρότασις ΙΕ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ῥᾶς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποσοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ε΄στωσαν ἥδη ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ α β γ. Λέγω, ὅτι δύο τινῶν ὁποσωνοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσι, δεικνύσθω οἱ μὲν α β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ β γ, πρὸς τὸν α, καὶ οἱ α γ, πρὸς τὸν β. Εἰλήφθωσαν γὰρ διὰ τῶν λ ε: τοῦ ζ΄: καὶ β΄: τοῦ η: δύο ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, οἱ δ ε, ε ζ. ἐπεὶ ὁ δ ε, ἑαυτὸν πολλαπλασι τὸν α, πεποίηκε. ὁ δὲ ε ζ, τὸν γ, καὶ ὁ δ ε, τὸν ε ζ, πολλαπλασι τὸν β, πεποίηκε, κατὰ τὸ γ΄: πόρισμα τῶν β΄: τοῦ η: οἱ ἄρα δ ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἄρα καὶ τινὰ λ΄: τοῦ ζ΄: καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν, ἄρα ὁ δ ζ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν ε ζ, ἔστι δὲ καὶ ὁ δ ε, πρὸς τὸν ε ζ, πρῶτος. ἄρα δύο ἀριθμοὶ οἱ δ ζ, δ ε, πρὸς τὸν ε ζ, πρῶτοί εἰσι. κατὰ τινὰ κ ς΄: ἄρα τοῦ ζ΄: καὶ ὁ ἐκ τῶν δ ζ, δ ε, πρὸς τὸν ε ζ, πρῶτός ἐστι, καὶ ἐπομένως ὁ ἐκ τῶν δ ζ, δ ε, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ε ζ, πρῶτός ἐστι κατὰ τινὰ κ ζ΄: τοῦ ζ΄: ὁ δὲ ἐκ τῶν δ ζ, δ ε, ὁ ἀπὸ τοῦ δ ε, μετὰ τοῦ ἐκ τῶν δ ε, ε ζ. (τὸ αὐτὸ γὰρ γίγνεται πολλαπλασιαθῆναι τὸν δ ε, πρὸς ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ τὸν ε ζ, πρὸς τὸν δ ε, εἶτα συναφθῆναι, ἢ συναφθῆναι πρῶτον τὸν δ ε, τῷ ε ζ, εἶτα τὸ συμπεσόμενον πρὸς τὸν δ ε, πολλαπλασιαθῆναι) ἄρα ὁ



ἐκ τῶν δε, μὴ τῶν ἐκ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῶν εζ, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ ἀπὸ τῶν δε, ἐστὶν ὁ α, ἢ ὁ ἐκ τῶν δε, εζ, ὁ β, ὁ δὲ ἀπὸ τῶν εζ, ὁ γ, οἱ α β, ἄρα ὁμῶν πρὸς τὸν γ, πρῶτοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται, καὶ τὼ β γ, πρῶτοι ὄντες, πρὸς τὸν α. λείπεται δὴ δεῖξαι καὶ τὼ α γ, πρὸς τὸν β, πρώτους εἶναι.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἐστωσαν δύο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους δεκτοὶ, οἱ α β. Λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς ἄλλον τινά. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς τὸν γ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἄρα οἱ τὸν α δ: τῶν ζ: μετρεῖ ὁ α, τὸν β, οἱ εἰσὶ πρῶτοι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δύο δεκτοὶ, οὐ τὰ ἑξῆς.

Euclid. lib. 9. Fig. 13.

Πρότασις Ιζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Τῶν δοθέντων α β γ δ, δεκτῶν ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων, ἔστωσαν οἱ ἄκροι αὐτῶν α δ, πρῶτοι. Λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς ἄλλον τινά, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸν ε. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ τὸν ιγ: ἄρα τῶν ζ: ἔστιν ἢ ἐναλλὰξ, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ α δ, πρῶτοί εἰσι, καὶ τινὶ αὐτῶν ὁ α, μετρεῖ τὸν β, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ, καὶ ὁ β, πρὸς τὸν γ, μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ β, τὸν γ. καὶ ἑπομένως μετρεῖ καὶ ὁ α, τὸν γ. ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ ἀνάλογον εἶναι, μετρεῖ ὁ γ, τὸν δ, τὸν δὲ γ, μετρεῖ ὁ α, μετρεῖ ἄρα ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ α, οἱ α δ, ἄρα πρῶτοι ὄντες ὑπὸ τῶν α, μετροῦνται. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΗ΄: Πρόβλημα.

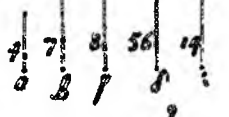
Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτῶν τὸν πέμπτον ἀνάλογον προσλαβεῖν.

Τῶν α β, ἄδε δεόντων δοθέντων, δέον ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν αὐτῶν τὸν πέμπτον ἀνάλογον προσλαβεῖν. εἰ μὲν δὴ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τῷ τοῦ ἐς': οὐ παρόντος, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸν πέμπτον ἀνάλογον δεόντος. εἰδὲ μὴ, πολλαπλασιάσας ὁ β, ἑαυτὸν τὸν γ, ποιείτω, ὁ α, ἄρα ἤτοι μετρεῖ τὸν γ, ἢ οὔ. μετρείτω δὴ πρῶτον κατὰ τὸν δ. ἔστι ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν γ, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τοῦτο ἐστὶν οὐς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ δ, ἄρα μετρεῖ τὸν α: οὗ ζ': ἔστι

πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ δὲ οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ α β γ, καὶ γ δ ε, σωὶ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἄρα καὶ τῶν α β γ δ: τῶν ζ' καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως δι' α γ, πρῶτοι εἰσιν. ἄρα καὶ τῶν κα: τῶν ζ': ὁ α, μετρεῖ τὸν γ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, οἱ α γ, ἄρα πρῶτοι ὄντες, ὑπὸ τοῦ α, ἀριθμοῦ μετροῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ γὰρ δὴ ἔστωσαν οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α γ, μὴ πρῶτοι, καὶ πολλαπλασιάσας ὁ β, τὸν γ, τὸν δ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι οἱ μὲν α, τὸν δ, μετρεῖ, δυνατὸν ἐστὶ πάντως ἀνάλογον αὐτοὺς εὑρεθῆναι. μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ὥστε ὁ α, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ β, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ἔστιν ἄρα κατὰ τὰ αὐτὰ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ ε, ἄρα πάντως ἐστὶν ἀνάλογον. εἰ δὲ ὁ α, τὸν δ, τὸ μετρεῖ, δεδύνηται πάντως ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὸ ε. ἐπεὶ δὲ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἄρα καὶ τὰ ἐφεξῆς πρὸς τὰ ἐφεξῆς ὡσαύτως ἔσται. ὁ ὑπὸ τῶν α ε, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β γ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν β γ, ἐστὶν ὁ δ, ὁ α, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ὥστε ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, καὶ τὸν ε, διὰ δὲ καὶ ὁ μετρεῖ, ὅπερ ἔπεσεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦτο δυνατὸν ἔσται, ὅταν τεθῶσιν οἱ α β γ, μὴ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ τῶν α γ, μὴ πρῶτοι, ὅτι εἰ μὲν ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, δυνατὸν πάντως ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰδὲ μὴ, δεδύνηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euc. Lib. 9. Fig. 14.



Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Προτεθέντων γὰρ πρώτων ἀριθμῶν τῶν α β γ. Λέγω, ὅτι τῶν α β γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. Εἰλήφθω γὰρ διὰ τῶν λε: τῶν ζ': ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α β γ, μετρούμενος, καὶ ἔστω ὑπὸ ὁ δ ε, προκείσθω δὴ τῷ δ ε, καὶ μονὰς ὁ δ ζ, ὁ δὴ ε ζ, ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ συνθετός, εἰ μὲν δὴ πρῶτος, ἄρα εὕρηται οἱ α β γ, καὶ ε ζ, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείους τῶν α β γ, προτεθέντων. εἰ δὲ ὁ ε ζ, συνθετός ἐστι, μετρεῖται πού τις ὑπὸ τινος πρώτου ἀριθμοῦ, καὶ τῶν λδ: τῶν ζ': μετρείσθω δὲ ὑπὸ τοῦ η, λέγω δὴ τὸν η, μηδενὶ τῶν α β γ, τὸν αὐτὸν εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἐπεὶ οἱ α β γ, μετροῦσι τὸν ε δ, ἄρα καὶ ὁ α, μετρεῖ τὸν ε δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ε ζ, ἄρα μετρεῖ καὶ τὸν δ ζ, μονάδα, ἀριθμὸς ὢν ὁ η, ὅπερ ἄτοπον.

πάσον. ὃς ἔστιν ἄρα ὁ η, ὁ αὐτὸς τοῖς τῶν α β γ, καὶ ἑπομένως εὑρίσκεται οἱ α β γ η, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείονες τῶν προτεθέντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συντιθέσθωσαν δύο ἄρτιοι ἀριθμοὶ, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω τὸν α ε, ἄρτιον εἶναι. ἕκαστος γὰρ τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ἥμισυ μέρος ἔχει κατὰ τὸν σ΄: ὅρον τὸ ζ΄: ἄρα καὶ ὁ α ε, ἀριθμὸς ἥμισυ μέρος ἔχει, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον, ἄρτιός ἐστι.

Πρότασις ΚΒ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὅλος ἄρτιος ἔσται.

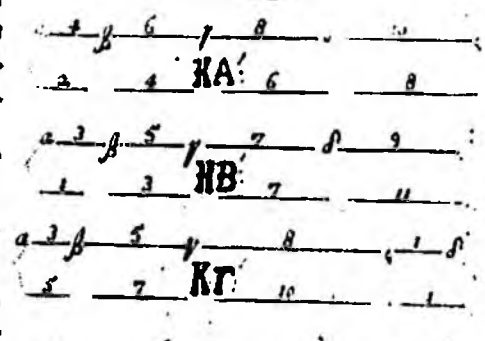
Συγκείσθωσαν δύο περισσοὶ ἀριθμοὶ, ὧν τὸ πλῆθος ἄρτιον, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω, ὅτι ὁ α ε, συνθετός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ ἀφ' ἑκάστου τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν μονὰς ἀφαιρεθῇ, οἱ πάντες ἄρτιοι ὑπολειφθήσονται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων ἄρτιον. ἄρα ὁ α ε, ὑπ' ἀρτίων ἀριθμῶν σύγκειται, καὶ κατὰ τὸν δεύτερον, ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται.

Συγκείσθωσαν δύο περισσοὶ ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, γ δ, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α δ, περισσός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τοῦ γ δ, μονὰς ἀφῃρήσθω, ὑπολειπέσθω ὁ γ ε, ἄρτιος, ἔστι δὲ καὶ ὁ α γ, καὶ τὸν ἀνωτέρω ἄρτιος, ὅλος ἄρα ὁ α ε, ἄρτιός ἐστι κατὰ τὸν β δ΄: τοῦ παρόντος, προσειλήφθω δὲ τοῦ ε δ, μονάδος, γεγόνεται ὁ α δ, περισσός. ὅπερ καὶ τὸ ξ΄.

Euclid. Lib. 9. Fig. 16.



Πρότασις ΚΔ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ τοῦ α β, ἄρτιου ἀριθμοῦ, ἀφῃρήσθω ὁ γ β, ἄρτιος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α γ, ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ β, ἄρτιός ἐστιν, ἔχει πάντως ἥμισυ, ἔχει δὲ ἥμισυ καὶ ὁ α β, ὡς ἄρτιος, ἄρα καὶ ὁ α γ, ἔχει ἥμισυ, τὸ γὰρ τοῦ γ β, μὴ τοῦ ἡμίσεως τοῦ α γ, ἥμισύ ἐστι τοῦ α β, ὅλος ἄρα ὁ α γ, ἄρτιός ἐστι, κατὰ τὸν σ΄: ὅρον τοῦ ζ΄: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

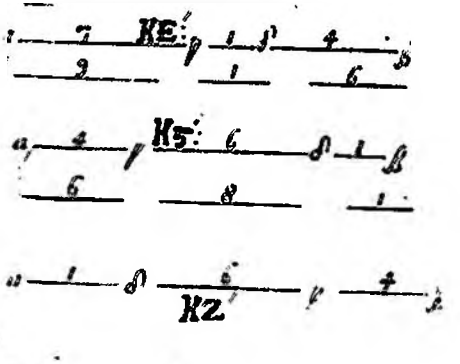
Πρό-

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ ἀρτίου γὰρ ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφῃρήσθω ὁ γβ, περισσός. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ αγ, περισσός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τοῦ γβ, μονάδος τῆς γδ, ἀφῃρημένης, ἔχεται λείπεται, ὁ δβ, ἄρτιος, καὶ πολλαπλασιάσας τὸν αδ, ἀρτιάσει. ἀφῃρημένης δὲ τῆς γδ, μονάδος ἀπὸ τοῦ αδ, ἀρτίου, ἐγκαταλείπεται ὁ αγ, περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 9. Fig. 17.



Πρότασις ΚΣ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ περισσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφῃρήσθω ὁ γβ, περισσός. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ αγ, περισσός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ, περισσός ἐστιν, ἀφῃρημένης τῆς αδ, μονάδος, ἐγκαταλείπεται ὁ δβ, ἄρτιος ἀριθμός. Αὖθις ἐπεὶ πάλιν τοῦ δβ, ἀρτίου, ἀφῄρηται ὁ γβ, ἄρτιος, καὶ τὸ λοιπὸν ἄρα τὸ παρὸν, καὶ ὁ δγ, ἄρτιός ἐστι, πολλαπλασιάσας δὲ τὴν αδ, μονάδα, ὁ αγ, ἀριθμὸς, περισσὸς γίνεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, τὸν β, ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν γ. Λέγω, ὅτι ὁ γ, ἀρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκε, ὁ γ, ἄρα ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, ὁ δὲ β, ἄρτιός ἐστι, καὶ ὁ ὑπὸ ἀρτίων συγκείμενος, ἀσαύτως ἄρτιός ἐστι, καὶ τὸ λοιπὸν ἄρα ὁ γ, ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 18.

Πρό-

Πρότασις ΚΘ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσας τινὰ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, περισσοῦ τοῦ β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι ὁ γ, περισσός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκε. ὁ γ, ἄρα ἐκ ποσάκις ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ α β, ἀριθμοὶ περισσοί εἰσιν, ἄρα ὁ γ, σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν, ὁ δὲ τοιοῦτος περισσοδάκις, καὶ τὸν α γ΄: τῷ παρόντος, ἄρα ὁ γ, ἀριθμὸς περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 9. Fig. 19.

ΚΘ΄.

3 7 5 49 15
a δ β ζ γ

Πρότασις Λ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, τὸν ἄρτιον β, ἀριθμὸν μετρείτω. Λέγω, ὅτι ὁ α, καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ β, μετρήσει. μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν β, κατὰ τὸν γ, ὁ δὲ γ, ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται περισσός. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὸν γ, ὁ α, ἄρα τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν. ὁ β, ἄρα σύγκειται ἐκ ποσάκις ἀριθμῶν ἴσων τῷ γ, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ α γ, περισσοί εἰσιν. ἄρα σύγκειται ὁ β, ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. ὥστε κατὰ τὸν α γ΄: τῷ παρόντος, ὁ β, περισσός ἐστιν, διπλάσιος. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν. μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3 5 6 20 18
a δ β ζ γ

Πρότασις ΛΑ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

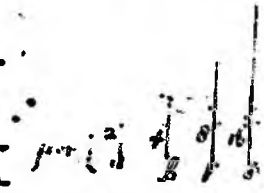
Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, πρός τινα ἀριθμὸν τὸν β, πρῶτος ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ β, τουτέστι τὸν γ, πρῶτός ἐστιν ὁ α. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω δὴ τοὺς α γ, ὁ δὲ. ἐπεὶ οὖν ὁ α, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ πρῶτος ὑπ' οὐδενὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται, ἢ ἑαυ-

5 8 16 4
d ε ζ γ

τῶ. ὁ δ, ἄρα ὁ αὐτὸς ἐστι τῷ α, ὥστι ὁ γ, σύνθετος ὑπὸ ἀριθμοῦ δεσθμῶ τῶ δ, μιγῆναι, ἄρα καὶ τὸν ἀποτέρω, καὶ ὁ τῶ γ, ἥμισυς, δηλ: ὁ β, ὑπὸ τῶ δ, μιγῆναι, ὁ δὲ δ, μιγεὶς καὶ τὸν α, οἱ α β, ἄρα εἰσὶ σύνθετοι. ὅπερ ἔπρεπε, ὑποτεθέντων γὰρ ἀριθμῶν. Ε'αὐ ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς. *Euclid. lib. 9. Fig. 20.*

Πρότασις ΛΒ': Θεώρημα.

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνος.



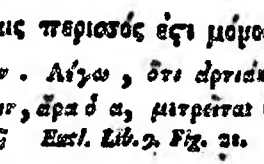
Ἀπὸ δυάδος γὰρ τῆς α, διπλασιαζόμενοι ἐκκείσθωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ β γ δ. Λέγω, ὅτι οἱ β γ δ, ἀριθμοὶ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνοι. ὅτι μὲν οὖν οἱ β γ δ, ἄρτιοί εἰσι, δῆλον. δίχα γὰρ διαιρεῖται ἕκαστος αὐτῶν, ὡς ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων. ὅτι δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιοι, δειχθήσεται. Εἰλήφθω μονὰς ἡ ι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ι, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ ἐστὶ τὸ β': πόσιμα τῆς ι ς': τῶ ζ': ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε. ὥστι ὁ β, μιγεὶς ὑπὸ τῶ α, ἀρτίω καὶ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, τουτέστι καὶ τὸν ἄρτιον ἀριθμὸν, ὁ δὲ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ καὶ ἄρτιον μιγέντος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, ἄρα ὁ β, ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ β, διπλασιασθεὶς τὸν γ, πεποίηκε, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκε. ὥστι ὁ γ, μιγνῦται ὑπὸ τῶ α, καὶ τὸν β, οἱ δὲ α β, ἄρτιοί εἰσι. μιγνῦται ἄρα ὁ γ, ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ καὶ ἄρτιον, καὶ ἔστιν ἀρτιάκις ἄρτιος, καὶ τὸν ἡ: ἕξων τῶ ζ': ὅντως καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς συλλογιστέον. ὅτι δὲ καὶ μόνοι δῆλον. εἰ γὰρ ἀφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ, τῶ μὲ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένου, διπλασιασθῶσιν, οἱ τὸν μίχθεν μονάδες διαιρήσουσι διχθήσονται, ἄρα οὐκ ἀρτιάκις ἄρτιοι ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 21.

Πρότασις ΛΓ': Θεώρημα.

Ε'αὐ ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσὸν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, τὸν ἥμισυν αὐτῶ ἐχέτω περισσόν. Λέγω, ὅτι ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ τῶ α, ἥμισυς περισσός ἐστιν, ἄρα ὁ α, μιγνῦται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ καὶ περισσόν. καὶ ἐστὶ τὸν δ': ὅρον τῶ ζ': ἀρτιάκις περισσός ἐστι. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος ὑποτεθῇ, ἄρα ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μιγήσεται καπὶ ἄρτιον. ὥστι καὶ ὁ ἥμισυς αὐτῶ, ἄρτιος ἔσται, καὶ δίχα διαιρεθήσεται, καὶ τὸν ς': τῶ ζ: ὁ δὲ τῶ α, ἥμισυς περισσὸς ὑπῆρξε, ἄρα περισσὸς ὢν δίχα διαιρεθήσεται, ὅπερ ἄτοπον. ἑαὐ ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.



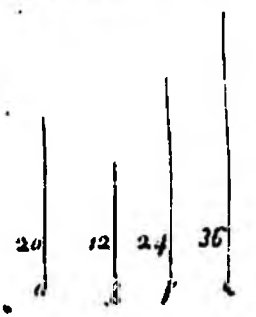
Πρό-

Πρότασις ΛΔ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ἄρτιος ἀριθμὸς, μήτε τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένῳ ᾖ, μήτε τῷ ἡμίσυι ἔχῃ περισσὸν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ε΄στω ὧδε τοιοῦτος ὁ α. Λέγω, ὅτι ὁ α, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις ἄρτιος, δῆλον, ἐπεὶ τὸν ν: ὅρον τῶ ζ΄: ὁ γὰρ τοῦτο ἥμισυς ἴσα ἐστὶ περισσοῖς, ὥστε ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μιβεῖται καὶ ἄρτιον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. εἰ γὰρ τὸν α, δίχα διέλωμεν, καὶ τοῦτον τὸν ἥμισυν δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν πάντως ἐπί τινα περισσὸν ἀριθμὸν μιβοῦντα τὸν α, καὶ ἄρτιον. εἰ γὰρ μὴ, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ α, τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, τοῦτο δ' ἄτοπον ὑπάρχειται. ὁ α, ἄρα καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν ὁμοίως δὴ δείξουσιν οὕτε βγ ε, τοιοῦτοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 22.

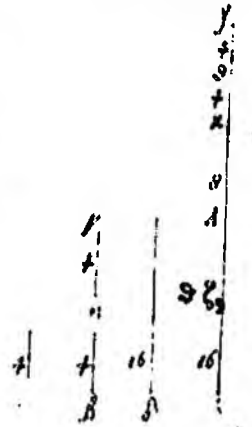


Πρότασις ΛΕ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ὦσιν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσος τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ αὐτοῦ ἅπαντας.

Ἀριθμοὶ ὧδε ὁποσοιδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἔστωσαν οἱ α, βγ, δ, εζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπό τε τοῦ βγ, δευτέρου καὶ ἀπὸ τοῦ εζ, ἐσχάτου, ἴσος τῷ α, ἑκατέρος τῷ γη, ζϑ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βη, ὑπεροχὴ πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ εϑ, πρὸς τοὺς α, βγ, δ. Κείσθω γὰρ τῷ μὲν βγ, ἴσος ὁ ζκ, τῷ δὲ δ, ὁ ζλ· ἐπεὶ οὖν ὁ ζκ, ἴσός ἐστι τῷ βγ, ἀφῃρέθησαν δὲ ἀπὸ τούτων ἴσοι οἱ ζϑ, γη, ἄρα καὶ τὸ γ': λοιπὸν ὁ κϑ, ἴσος ἐστὶ τῷ βη. ἐπεὶ δὲ οἱ προκείμενοι ἀριθμοὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εζ, πρὸς τὸν λζ, οὕτως ὁ λζ, πρὸς τὸν κζ, καὶ ὁ κζ, πρὸς τὸν ϑζ. καὶ τὸν ιζ': ἄρα τοῦ ε: ἔσται καὶ διαιρέσει, ὡς ὁ ελ, πρὸς τὸν λζ, οὕτως ὁ κλ, πρὸς τὸν κζ, καὶ ὁ κϑ, πρὸς τὸν ϑζ. καὶ καὶ τὸν ιβ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἔσονται ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κϑ, πρὸς τὸν ϑζ, οὕτως οἱ ελ, λκ, κϑ, πρὸς τοὺς λζ, κζ, ϑζ, οἱ δὲ ελ, λκ, κϑ, ἢ τοῦ εζ, εἰσὶν ὑπεροχὴ, καὶ οἱ λζ, κζ,

Euclid. lib. 9. Fig. 23.



ΘΖ, ἴσαι τοῖς Δ, Βγ, Α, ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΘ, τῷ Βε, διὸ ΘΖ, τῇ Α, ἄρα ὡς ὁ Βε, πρὸς τὸν Α, οὕτως ἐστὶν ὁ ΕΘ, πρὸς τὰς Δ, Βγ, Α, ἅπαντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λς'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσωνοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα. ὁ γενόμενος, τέλειος ἔσται.

Ἐκκείσθωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ Α, Βγ, Δ, ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς συντεθεὶς ἔστω ὁ Ε, πρῶτος. ὁ δὲ Ε, ἐπὶ τὸν Δ, ἔχατον πολλαπλασιασθεὶς τὸν Ζ, ποιείτω. Λέγω τὸν πάλιν εἶναι. ἔστι γὰρ εἶσιν οἱ Α, Βγ, Δ, ἀπὸ τοῦ Ε, ἐνδιπλασίονι λόγῳ οἱ Ε, ΑΘ, Λ, μ· ὧν τὸν ΑΘ· ἄρα τὸ Ζ· καὶ Δ' ἴσου ἔσαι ὡς ὁ Α, πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε, πρὸς τὸν Μ, καὶ ὧν τὸν ΑΘ· τὸ αὐτὸ, ὁ ὑπὸ τῶν ΔΕ, γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Αμ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ἐστὶν ὁ Ζ, ἄρα καὶ ὁ Α, τὸν μ, πολλαπλ: τὸν Ζ, ποιοῦντα. ὁ μ, ἄρα μετρεῖ τὸν Ζ, καὶ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α, μονάδας. ὁ δὲ Α, ἐστὶ δυάς, ὁ Ζ, ἄρα διπλάσιός ἐστι τοῦ μ, ἴσοι δὲ καὶ οἱ μ, λ, ΑΘ, Ε, ἀλλήλων διπλασιοὶ, ἄρα οἱ Ε, ΑΘ, λ, μ, Ζ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφαιρείσθω δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΘ, καὶ Ζ, ἑκάτερα τῷ Θ Ε, ζξ, ἴσοι τῷ Ε· διὰ τὰς ἀναπάλιν, ἄρα ὡς ὁ Α, ὑπερέχει τοῦ δὶς πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ξ Α, ὑπερέχει τοῦ ἐφάπαξ πρὸς ἅπαντας τοὺς Ε, ΑΘ, λ, μ, ὁ δὲ Α, τὸν Δ, ἴσος ἐστὶ τῷ Ε, ἄρα καὶ ὁ ξ Α, ἴσος ἐστὶ τοῖς Ε, ΑΘ, λ, μ, ἔστι δὲ ὁ ζξ, ἴσος τῷ Ε, καὶ ὁ Ε, τοῖς Α, Βγ, Δ, ὧν μονάδι, ὅλος ἄρα ὁ Ζ Α, ἴσος ἐστὶ τοῖς μ, λ, ΑΘ, Ε, Δ, γ, Β, Α, ὧν μονάδι, ὧν μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω δὲ, ὅτι ὁ Ζ Α, ὑπ' ἄλλου τινὸς οὐ μετρεθήσεται, παρὲξ τῶν προειρημένων καὶ τῶν μονάδος· εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω τὸν Ζ Α, ὁ Ο, μηδενὶ τῶν εἰρημένων ὁ αὐτὸς ὤν, καὶ τὰς ἐν τῷ Π, μονάδας, ὁ Ο, ἄρα τὸν Π, πολλαπλασιάσας τὸν Ζ, ποιείτω. ἀλλὰ καὶ ὁ Δ, τὸν Ε, πολλαπλ: τὸν αὐτὸν Ζ, ποιείτω. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε, πρὸς τὸν Π, ὁ Ο, πρὸς τὸν Δ, καὶ τὸν ΑΘ· τὸ Ζ· ἐπεὶ δὲ οἱ Α, Βγ, Δ, ἀπὸ μονάδος εἰσὶν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ ὁ μετὰ τὸν μονάδα Α, πρῶτος, ἄρα καὶ τὸν ΑΓ· τὸ παράπαν, ὁ Δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου με-

Eucl. Lib. 9. Fig. 24.

μιτρηθήσεται πάρις τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ο, ἥτις ἐστὶν ὁ αὐτὸς ὑδρεὶ τῇ α β γ, ἡ δὲ ὁ ο, ἄρα τὸν δ, μιτρήσει, ὡς δὲ ὁ ο, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἐστὶν ὁ ι, πρὸς τὸν π, ὑδρὶ ὁ ι, ἄρα τὸν π, μιτρήσει, ἡ δὲ ι, ἐστὶ πρώτης, ἄρα οἱ ι π, πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν λ δ: τῶ ζ': πρὸ ὀπομένως ἐλάχιστοι πρὸς τὸν κ δ': τῶ αὐτῶ. ἔστι δὲ ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν π, ὁ ο, πρὸς τὸν δ, ἄρα πρὸς τὸν κ δ: τῶ αὐτῶ ζ': ὁσάκις ὁ ι, τὸν ο, μιτρεῖ, τοσάκις καὶ ὁ π, τὸν δ, ὁ δὲ δ, ὑπ' ὑδρεὸς ἄλλα μιτρεῖται πάρις τῇ α β γ, ὁ π, ἄρα ὁ αὐτός ἐστιν ἐνὶ τῇ α β γ· ἔστω δὴ τῇ β, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ β γ δ, τοσοῦτοι ἐλλιφθώσαν ἀπὸ τῶ ι, οἱ ι, κ Θ, λ, εἰσὶ δὲ οἱ β γ δ, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ τοῖς ι, κ Θ, λ, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ ι, πρὸς τὸν λ, καὶ τὸν ι δ': τῶ ζ': ὁ ἐκ τῶν β λ, ἄρα ἴσός ἐστι τῇ ἐκ τῶν δ ι, ὁ δὲ ἐκ τῶν δ ι, ἴσός ἐστι τῇ ἐκ τῶν π ο, ἄρα καὶ ὁ ἐκ τῶν β λ, ἴσός ἐστι τῇ ἐκ τῶν π ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ π, πρὸς τὸν β, ὁ λ, πρὸς τὸν ο· ὁ δὲ π, ὁ αὐτός ἐστι τῇ β, καὶ ὁ λ, ἄρα τῇ ο, ὁ αὐτός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον. ὑδρεὶ γὰρ τῇ α, β, γ, δ, ι, κ Θ, λ μ, ὁ ο, ὑπόκειται, ἄρα ὁ ζ, ὑπ' ὑδρεὸς ἄλλα μιτρεῖται, πάρις τῇ α, β, γ, δ, ι, κ Θ, λ, μ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τῶ ἐνάτου τῶν τῶ Εὐκλείδη Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΤΟΥ; ΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΟΥ ΕΝΚΑΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς ἀρίστοις βιβλίοις περί τε τῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἀρχικιδῶν σχημάτων, καὶ περὶ ἀσυμμέτρων. καὶ τὰς ἀνάλογον ἐκάστῳ ὅρους ἐμεθόδως ἔστι τῶν ἀριστίνων διάνοιαν, ἐκ ἄντων δὲ καὶ ἑρμηνείας πρόσκε. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὰ ἑξῆς ἐθέλων κρίνοθα, ὡς ἀναγκαῖον, ἀρὸ τῶ ἅψασθαι τῆ ἀριστίνων, τῆ ὅρων ἴδιά αὐτῆ ἄρχονται. καὶ ἀριστον μὲν τί Στερεὸν ἀποδίδωσιν, ὡς περὶ τῆ ἐν τῷ χαράττειν τὸν λόγον ποιήμενος. Ἐπεὶ δὲ ἐν ἑκάστῳ τῆ βιβλίων, ὁ περὶ εἰδὸς μόνον ἔδος τῆ χαράττων, ἀλλὰ περὶ πολλῶν ὁ σκέψις ἦσαι. τὸν γε χάριν ἀρὸ πάντων τῆ βιβλίων τὰς πᾶσιν ἀνάκαιτας ὅρους ἐπιχειρήμιζεν. εἶναι δὲ χάριν τὸ στερεὸν πῶ ὀρίζεται, ὁ μὲν δὴ τὸ σῶμα, καίπι πᾶ στερεὸν, σῶμα καθόλε ὄντα; ἢ ὅτι τὰ σώματος καθολικωτέρας λαμβάνομεν, ὁ κατ' ἐρίσας, οὐ μόνον τὰ στερεὰ, ἀλλὰ καὶ τὰ ῥευστὰ, καὶ αὖτε τὰ ὑγρὰ καλύμενα σώματα, ὧν τὰ μὲν καθ' αὑτὰ ἀκινήτα ὅλως φαίνται χαράττων, τὰ δὲ ἀέρος φύσεως τῶν ὑπὸ σκληρῶν πίεσιν, τῆ λόγῳ περιλύειν δόξειεν. Ἐπεὶ δὲ σκοπὸς αὐτῆ περὶ τῶν ἀκινήτων καθ' αὑτὰ τῶν οἰανδήποτε χαράττων διαλαβεῖν, τὸν εἶναι, ὁ σῶμα, ἀλλὰ τί στερεὸν ἐρίσατο. ἔχει τοίνυν τὸ στερεὸν μῆκος ἔχον, ἵνα μὴ ἀμοιρές ὑπολειφθῇ. ἀφορίζεται δὲ καὶ τὸ πλάτος, ὅπως ἂν τῶν γραμμῶν ἐξάρῃ. τὸ δὲ βάθος, ἵνα καὶ τῶν ἐπιφανειῶν διάφορον ἀποδείξῃ, μῆκος ὂν ἔστι τὸ ἐπὶ τὰ ἔμπροσθεν, ἢ ὄπισθεν προχωρῶν, πλάτος δὲ τὸ ἐπὶ τὰ δεξιὰ, ἢ ἀριστερὰ ἐκτεινόμενον, καὶ βάθος τὸ ἀπὸ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον, ὕπινες ἐναντίον τὸ ὕψος ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω διεξόμενον.

Β′: Στερεοῦ δὲ πέρατα, ἐπιφάνεια.

Ὥσπερ ἐπιφανείας πέρατα γραμμαὶ λέγονται, ἃ μὲν δὴ σημεῖον. ὅπου γὰρ στιγμὴ ἐπιφάνεια, ἢ δὲ γραμμαὶ, πολλῷ δ' ἂν μᾶλλον σημεῖα. καθάπερ γὰρ σημεῖα ῥυείσης γραμμὴν ἀποπλεῖσθαι ἔφημεν, γραμμῆς δὲ ῥυείσης ἐπιφάνειαν, ὅπου τι εἰπεῖν ἂν ἀπειὸς, ἢ ἐπιφανείας κινηθείσης, σῶμα ἀποπλεῖσθαι. δεῖ δὲ τὴν κίνησιν μὴ ἀφ' εἰδὸς ἢ πρὸς εἶδος μέρος γίγνεσθαι ἐνοεῖν. ἀλλ' ἐξ οἱασδήποτε πρὸς οἱονδήποτε γενομένην, τὸ αὐτὸ ἀποπλεῖσθαι.

Γ′: Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἂν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Οὐ μόνον εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν ὀρθὴ λέγεται, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐπίπεδον, ἡνίκα τὸ ἴσον τῶν γωνιῶν παραχθὲν πρῇ. ὥσπερ ἂν τῆς πρὸς εὐθεῖαν ὀρθῆς γνώρισμα τὸ τὰς ἐκατέρωθεν γωνίας ἴσας ποιεῖν. ὅπου καὶ τῆς πρὸς ἐπίπεδον, τὸ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας τοῦτο πρεῖν. εἴρηται δὲ τὸ πρὸς πάσας, ἵνα ἐξ οἱασδήποτε μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἐξαγόμεναι εὐθεῖαι εἰς εὐ σημεῖον συμπίπτωσι. τὸ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ἐγκλινομένης ἐν ἐπιπέδῳ εὐθείας δυνατὸν πλείους εὐθείας ἀχθῆναι πρὸς ὀρθὰς, μὴ ὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Δ′: Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

Ἔστι πάντως γε ἢ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν, ὥσπερ καὶ γραμμὴ πρὸς γραμμήν. Ἐπεὶ καὶ ὑπὸ ἐπιπέδων γωνία στερεὰ περιέχεσθαι λέγεται. ὅπου δὲ γωνία ἀποπλεῖται, ἐκεῖ καὶ ὀρθότης ἐστὶ, καὶ ἔγκλισις· γνώρισμα δὲ τὸ ὀρθοῦ ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον, ἡ τῶν γραμμῶν ὀρθότης. ἐὰν γὰρ ἐν τῷ ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων γραμμαὶ ἀγόμεναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς, ὀρθαὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἐπίπεδον ὦσι, καὶ τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν λέγεται.

Ε′: Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδόν κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεζώσης.

Ἔπεται τῆς ὀρθότητος ἡ κλίσις ἑκατέρα. διαβαίνουσα δὲ τοὺς δυσὶν ἀνωτέρω ὅροις, ὅτι γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἑτέραν γραμμὴν, καὶ ἐπίπεδον ὀρθὰ λέγονται,

ται, ἐν τῷ παράντι περὶ ἐγκλινομένης γραμμῆς τὸν λόγον ποιεῖται. τίνος δὲ χάριν ἡ τῶν ἐγκλινομένων γραμμῶν ὀρίζεται, ἀλλὰ τῶν κλίσιν αὐτῶν δηλῶσαι σπεύδει; ἢ ὅτι τῶν ἑναντίων αἱ αὐταί εἰσιν ἐπιζητήσεις. καὶ διώρισται γὰρ ὁ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, καὶ τῶν ἐγκλινομένων ἑπηγῶνται. ἡ δὲ κλίσις δόσεώς ἐστι, καὶ ἡ αὐτὴ γραμμὴ πρὸς τὴν αὐτὴν ἐπίπεδον μᾶλλον, ἢ ἧττον ἐγκλίνειν λέγεται. διὸ καὶ τίς ἡ κλίσις ὁρίζεται. Ἔστι δὲ κλίσις γραμμῆς πρὸς ἐπίπεδον, γωνίαις περιεχομένη ὑπό τε τῆς ἁφῆς, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης. δεῖ δὲ τῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἁφῆς, μὴ ὡς ἔτυχε εἶναι. ἀλλ' ἐφ' ἃ μέρη ἡ ἀπὸ τοῦ μιποῦ πέρατος τῆς ἁφῆς κάθετος πίπτει, ἐκβάλλεται, καὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γινόμενον σημεῖον τῆς καθέτου καὶ τῆς ἁφῆς, ἐπιζευγνύειν.

ς'. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένης, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Καταῦθα εὐ περὶ τὴν ἐγκλινομένην ἐπιπέδου διαλαμβάνει. ἀλλά γε τίς ἡ τῶν κλίσις διασαφεῖ, καὶ τοῦτο δι' ὃν ἔφαμεν λόγον ἐν τῷ ἀνωτέρω ὅρῳ ποιεῖται. Ἔστι τοίνυν κλίσις τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου πρὸς ἕτερον ἐπίπεδον, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ὑσῶν, καὶ πρὸς ὀρθὰς κειμένων τῇ κοινῇ τομῇ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ. καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη γωνία, κλίσεως γωνία. ὥστε ὁ ὁρισάμενος, καὶ μαθὼν τὴν τοιαύτην γωνίαν πόσων μοιρῶν ἐστιν, οἶδε πάντως τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου.

ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῆς κλίσεως γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

Οἱονεὶ, φησὶν, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ἐγκλίνεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἐὰν αἱ τῶν κλίσεων ἑκατέρα τῶν ἐπιπέδων γωνίαι ἁρμοσθεῖσαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, τὰ ἐγκλινόμενα ἐπίπεδα ὁμοίως κεκλίσθαι λέγονται. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα ἡ τοιαύτη γωνία παραλαγικὴ τῆς κλίσεώς ἐστι. καὶ ὡς ἔφθη εἰπεῖν, αὕτη ἡ κλίσις, ἐὰν αἱ γωνίαι τὸ ἴσον ταῖς πρὸς ἀλλήλας, καὶ αἱ κλίσεις ἀναλόγως τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι, τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὥσπερ παράλληλοί γραμμαί εἰσιν, αἱ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ μὲ συμπίπτουσαι· οὕτω καὶ παράλληλα ἐπίπεδά, φησιν, εἶναι, ὅσα παραλλήλως κείμενα, κἂν ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐκβάλλεσθαι ἐννοηθῶσι, μηδέποτε συμπίπτειν, ἄπτωτα καλεῖ.

Θ': Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος.

Εἰς δήλωσιν τῶν ζητουμένων ἡμῖν φαῦλον, τίνα τῶν ἐπιπέδων ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ τῶν ἐπιπέδων τὰ μὲν ὡρισμένα ἐστὶν, ὅσα ὑπὸ γραμμῶν, ἢ γραμμῆς περιέχεται, ἃ καὶ σχήματα καλεῖ· τὰ δὲ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενα, καὶ ἀόριστα. ὅσα δὲ ἀόριστα ἔστι ἰσότητα δέχεται, ἔστι μὲν ὁμοιότητα, ἀδύνατον γὰρ παραβάλλεσθαι, ἔστι τι κοινὸν ἔχοντα, πλὴν τῆς ἀπειρίας· ἆρα τὰ ὡρισμένα μόνα λεχθῆναι δυνατὸν ὅμοια. τίνα δὲ ταῦτα διὰ τοῦ ά: ὅρου τῶν ς': τῶν ἐπιπέδων βιβλίων διδάσκαλος Εὐκλείδης· ὅσα τοίνυν τῶν σχημάτων ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεται, ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ δυνατὸν καὶ Πρίσμα, καὶ Κύβος, καὶ ἕκαστον τῶν στερεῶν σχημάτων, τῶν μὲν σφαιρικῶν ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεσθαι, καὶ ὅμοια λεχθῆναι ἐκ ἔξεστι, διὰ τὸ ἑτεροειδῆ εἶναι, πάντως χρεὼν καὶ τῶν ἴσων τὸ πλῆθος ὑποτίθεσθαι. εὐδήλως ἀπορήσεις, τίνος γε χάριν τὰ σχήματα, ἅπερ τῇ ποσότητι ἀφώρισται, τῶν ὁμοιότητα ἐπιδέχεται, ἔστις παρεπόμενόν ἐστι τῆς ποιότητος; καὶ τὸν Ἀριστοτέλην ῥητέον, ὅτι τὸ σχῆμα ὑπάρχον εἶδος τῆς ποιότητος ἀποπληροῖ.

Ι': Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει.

Εἴρηται, ὅτι τῶν στερεῶν σχημάτων, ὅσα ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τῷ πλείθει περιέχονται, ὅμοιά ἐστιν. ἀλλ' οὐδὲ καὶ τῷ μεγέθει ἴσα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα ὑφ' ὧν περιέχονται, στερεὰ ἐκεῖνα σχήματα, καὶ ἴσα, καὶ ὅμοιά ἐστιν.

ΙΑ': Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἢ καὶ ὕτω, στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

Τὰ τῶν γωνιῶν εἴδη δύο, ὥσπερ καὶ τῶν σχημάτων, ἐπίπεδον καὶ στερεόν· καὶ αἱ μὲν τῶ ἐπιπέδου εἴδους γωνίαι ὑπὸ δύο μόνων γραμμῶν περιέχονται, αἱ δὲ τῶ στερεῦ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο. δεείσως δὲ εἴρηται ὑπὸ πλειόνων, ὅτι στερεὰ γωνία ἐν μὲν ταῖς τρίγωνον ἐχούσαις βάσιν πυραμίσιν ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται, ἐν δὲ ταῖς τετράγωνον ὑπὸ τεσσάρων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως· αὐξανομένων τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, αὔξονται καὶ αἱ περιέχουσαι τὴν πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος γωνίαν. εἴρηται δὲ τὰς γραμμὰς μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ εἶναι· ὁπηνίκα γὰρ πλείονες εὐθεῖαι ἁπτονται ἀλλήλων ἅπτονται, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ὦσιν, οὐ στερεὰν γωνίαν ἀποπλοῦσιν, ἀλλὰ πλείους ἐπιπέδους.

ΙΒ': Π.

ΙΒ΄: Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

Τούτοις ἄρχεται περὶ τῶν εἰδῶν τῶν στερῶν χωμάτων διαλαμβάνειν, ὧν πρῶτόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τῶν ἐπιπέδων, ὁρῶντι καὶ ἁπλούστερόν ἐστιν ἡ Πυραμίς. δύναται γὰρ αὕτη ὑπὸ ἐλαχίστου ὑπὸ πασῶν μόνον ἐπιπέδων περιέχεσθαι, μηδὲ τῶν λοιπῶν εἰδῶν τῶν στερῶν χωμάτων τοῦτο δυναμένων. ἔστι δ' αὕτη ἡ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα. τὸ δὲ πυραμίς ἐστι χῶμα στερεὸν, εἴρηται εἰς διαφορὰν τῶν ἐπιπέδων χωμάτων. ἐπιπέδοις δὲ περιεχόμενον, ἵνα μὴ σφαιρικὸν νομισθῇ, ἢ τι τοιοῦτον διοίσει. τὸ δὲ ἀφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ τὰ λοιπὰ, εἰς διαφορὰν τῶν λοιπῶν στερῶν χωμάτων, ἐπιπέδοις περιεχομένων.

ΙΓ΄: Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ, παραλληλόγραμμα.

Διαφέρει τῶν στερῶν χωμάτων τὸ σφαῖρα τὸ πρίσμα ἔχειν. τῶν γὰρ μόνον μιᾷ τῶν πυραμίδα ὑπὸ πλείω τοῦ πλήθους ἐπιπέδων δύναται περιέχεσθαι, τῶν δύο τῶν ἀπεναντίον τετραπλευρῶν, ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τῶν δὲ λοιπῶν ἕξ, παραλληλογράμμων.

ΙΔ΄: Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα.

Εἰκότως οὖν ἐν ταύτῃ τῇ ἀρχῇ περὶ τῶν λοιπῶν χωμάτων διαλαμβάνων ἐκ τῶν ὅρων ἐποιήσατο τὸν λόγον ἑκάστου αὐτῶν, περὶ δὲ τῆς Σφαίρας ἐν τῇ κατασκευῇ; πρὸς ὃν ἀπαντητέον, ὅτι τὰ μὲν λοιπὰ τῶν χωμάτων ὑπὸ πλειόνων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δύναται διὰ τὸ ἀριθμὸν, ὑφ' ὧν περιέχεται ἐπιφανειῶν, ὡς συστατικὰς διαφορὰς λαμβανομένου τοῦ χώματος, γένους ὄντος, παρίστασθαι, ἡ δὲ γε σφαῖρα ὑπὸ μιᾶς μόνης περιεχομένη, ὥσπερ καὶ ὁ κύκλος ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, διὰ τοῦτο ἐν τῇ κατασκευῇ δείκνυται. Ἔστι δὲ Σφαῖρα χῶμα στερεὸν ὑπὸ κυρτῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον. γίνεται δὲ πανταχῇ τῆς διαμένοντος τοῦ ἡμικυκλίου μενούσης, περιενεχθέντος τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

ΙΕ΄: Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον γράφεται.

Ις΄: Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ΙΖ΄: Διά-

ΙΖ΄: Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΙΗ΄: Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶ μὲν μένουσα εὐθεῖα ἴση μὲν τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος. ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ΙΘ΄: Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡ μένουσα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον γράφεται.

Κ΄: Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος.

ΚΑ΄: Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ΚΒ΄: Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον γράφεται.

ΚΓ΄: Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῶν ἀπεναντίον περαινομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

ΚΔ΄: Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

ΚΕ΄: Κύβος, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

ΚϚ΄: Ὀκτάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΚΖ΄: Δωδεκάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

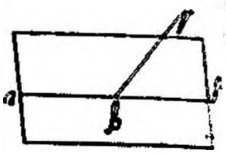
ΚΗ΄: Εἰκοσάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέρει οὐκ ἔστιν ὁμοίως κείμενον τῇ ὑποκειμένῃ ἐπιπέδῳ· μέρος δέ τι ὁμοίως κείμενον τῇ μετεώρῳ.

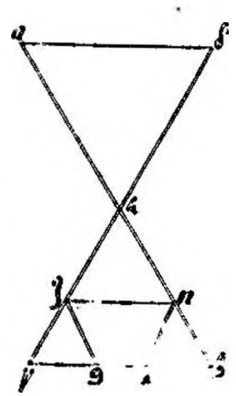
Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῆς αγ εὐθείας μέρος μὲν τὸ αβ, ὁμοίως κείμενον τῇ ὑποκειμένῃ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ τὸ βγ, ὁμοίως κείμενον τῇ μετεώρῳ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ τῆς αβ ἐπὶ τὸ δ, ἔστω δὲ ἡ αδ, συνεχὴς εὐθεῖα, ὑποκείσθω δὲ καὶ ἡ αγ εὐθεῖα εἶναι. δύο ἄρα εὐθεῖαι αγ, αδ κοινὸν τμῆμα τὸ αβ ἔχουσιν, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τὸ ιγ'. ἀδύνατον. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. XI. Fig. 7



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

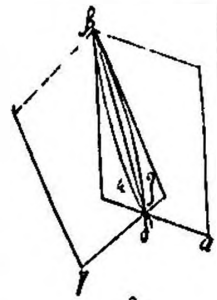


Δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λέγω ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἤτοι αβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐστὶ ἐπιπέδῳ, καὶ δι' γδ, ἐν μετεώρῳ, ἢ τέμνουσιν ἀλλήλας. εἰ δὲ ἔστι αβ, καὶ τὸ τῆς γδ, μέρος τὸ γε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ οὐκ ἔστιν ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ εδ, ἐν μετεώρῳ, ἔσται εὐθείας τῆς γδ, μέρος μὲν ἐν τῷ μετεώρῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἄτοπον, κατὰ τὸν ἀναπόδεικτον. Λέγω ἔτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν τῷ αὐτῷ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν αβ, γδ τυχόντα σημεῖα τὰ ζ, η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, γβ, ζθ, ηε. εἰ οὖν τοῦ αγβ τριγώνου μέρος μὲν τὸ γζθ, ἢ βηε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ, ἔσται ἑκατέρα τῶν γη, γβ, εὐθειῶν μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ. ὅπερ ἄτοπον. ὁμοίως δὴ τὸ ηζε, μέρος τοῦ ηγβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἐστί, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ. ἔσται δὴ ἑκατέρα τῶν ηγ, ηβ, μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Γ΄. Θεώρημα.

Ε΄αν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ δίχα τέμνει.

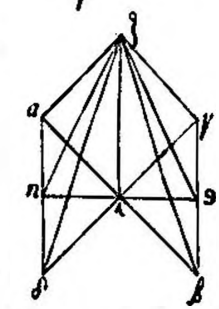
Euclid. Libr 11. *Fig.* 2.



Τῶν γὰρ αβ, βγ, ἐπιπέδων τεμνόντων ἄλληλα, λέγω τὴν βδ, βάσιν κοινὴν τομὴν, δίχα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ ἐπιζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ β, ἐν μὲν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ δίχα ἡ δ ϛ β, ἐν δὲ τῷ γβ, ἡ δ ζ β, αἱ τέμνουν β ϛ δ, βζ δ, δίχα τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσι, τὰ β δ, καὶ χωρίον περιέξουσι, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ι β΄: ἀξίωμα. οὐκοῦν διχθήσεται, ἡ δὲ ἄλλης δίχα ἐπὶ τῆς β δ, ἐπιζεύχθω. Ε΄αν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ΄. Θεώρημα.

Ε΄αν δίχα δύο δίχα τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπιζευχθῇ, ἡ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.



Δύο γὰρ δίχα δίχα ταῖς αβ, γδ, τεμνούσαις ἄλλας κατὰ τὸ ϛ, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τὴν ϛ, δίχα δὲ ἡ ϛ ζ. Λέγω, ὅτι ἡ ϛ ζ, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστι. τῶν γὰρ ϛ α, ϛ δ, ϛ γ, ϛ β, ἴσων γινομένων, ἐπιζευχθωσαν αἱ α δ, γ β, δίχα ἄρα, καὶ διὰ τὸ ι, διὶχθωσιν δίχα, ἃς ἔτυχεν, ἡ θ ν. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, σημεῖα ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζ α, ζ ν, ζ δ, ζ γ, ζ θ. ζ β. ἐπεὶ οὖν αἱ δύο α ϛ, ϛ δ, δίχα εἰσὶ δυσὶ ταῖς γ ϛ, ϛ β, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ϛ δ, τῇ ἀπὸ γ ϛ β, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσις τῇ γ β, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸν δ΄: τοῦ δ: τῆς ἐπιπέδων. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ϛ α ν, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ϛ β θ. πάλιν ἐπεὶ τῇ ϛ α ν, β ϛ θ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ α ϛ ν, ϛ α ν, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ θ ϛ β, ϛ β θ, καὶ ἔστι ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις δίχα ἡ α ϛ, τῇ ϛ β, ἴση, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσιν ἴσαι, καὶ τὸν κ΄: τοῦ δ: ἴση ἄρα ἡ μὲν α ν, τῇ β θ, ἡ δὲ ν ϛ, τῇ ϛ θ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ϛ, ϛ β, ἴσαί εἰσι, κοινὴ δὲ ἡ ζ ϛ, καὶ αἱ ὑπὸ ζ ϛ α, ζ ϛ β, γωνίαι ὀρθαί τε ἴσαι (ὀρθαὶ γὰρ) ἄρα καὶ ἡ ζ α, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ διχθήσεται, ὅτι, καὶ ζ γ, ζ δ, ἴσαι εἰσιν. Λοιπὸν ἐπεὶ ἡ ζ α, ἴση δέδεικται τῇ ζ β, ἡ δὲ α δ, τῇ β γ, καὶ ἡ ζ γ, τῇ ζ δ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζ α δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ β γ, καὶ τὸν η: τοῦ δ: ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ α ν, ἴση τῇ β θ, δύο δὴ αἱ ζ α, α ν, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ζ β, β θ, ἕτι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ α ν, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζ β θ, καὶ ἡ ζ ν, ἄρα βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ζ θ. καὶ ἐπεὶ πάλιν δέδεικται ἡ ν ϛ, ἴση τῇ ϛ θ, ἡ δὲ ϛ ζ, κοινὴ, καὶ ἡ ζ ν, ἴση τῇ ζ θ, ἄρα καὶ ἡ ὑ-

πρὸς ζ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζ ε θ, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα τῶν ζ ε η, ζ ε θ,) ἑαυτὴν διχθήσεται ἡ ζ ε, ὀρθὴ οὖσα, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ τὸν γ': ὅρον τῶν παρόντων ἡ ζ ε, εὐθεῖα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τοῦτο δέ ἐστι τὸ διὰ τῶν α β, γ δ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπιζαθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

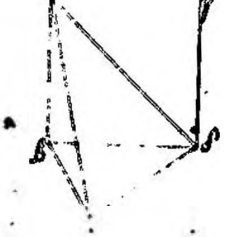
Τρισὶν γὰρ εὐθείαις ταῖς β γ, β δ, β ε, ἁπτομέναις ἀλλήλων κατὰ τὸ β, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἡ α β, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ β, σημείου. Λέγω ὅτι αἱ β γ, β δ, β ε, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστωσαν αἱ μὲν β δ, β ε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ· ἡ δὲ β γ, ἐν τῷ μετεώρῳ· καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν α β, β γ, ἐπίπεδον, ὅπερ ποιεῖ τὸ ὑποκείμενον κοινὴν τομὴν ποιείσω. ποιείτω τὴν β ζ, αἱ ἄρα β ε, β δ, β ζ, εὐθεῖαι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ἁπτόμεναι ἀλλήλων κατὰ τὸ β. ἐπεὶ οὖν ἡ α β, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν β ε, β δ, ὀρθὴ πάντως ἔσται καὶ τῷ διὰ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδῳ, οὔσῃ τῷ ὑποκειμένῳ, καὶ τῷ μετεώρῳ, καὶ ἔστι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὸν γ': ὅρον τῶν παρόντων. ἐν δὲ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ β ζ, καὶ ἅπτονται τῆς α β, ἄρα ἡ α β, πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς τὴν β ζ, ἔστι δὲ πρὸς ὀρθὰς καὶ πρὸς τὴν β γ, ἡ ὑπὸ α β γ, ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α β ζ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 11. Fig. 3.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Εὐθεῖαι γὰρ αἱ α β, γ δ, πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι καὶ παράλληλοί εἰσι. Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ ἐζεύχθω τὸ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπίπεδον, ὅπερ ποιεῖ τὸ ὑποκείμενον κοινὴν τομὴν ποιείσω εὐθεῖαν τὴν β δ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ἔστι καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἅπτονται δὲ ἑκατέρας τῶν α β δ, γ β δ, ὅσα ἐν τῷ

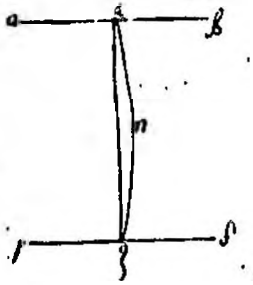


ὑπο-

ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. ὅταν δὲ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. αἱ α β, γ δ ἄρα παράλληλοί εἰσι, καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἡ α γ τῇ β δ ἴση.

ΑΛΛΩΣ ΚΑΤ' ΕΝΣΤΑΣΙΝ.

Τῶν δὲ α β, γ δ, εὐθειῶν συμβαλλουσῶν κατὰ τὰ β δ, σημεῖα, ἐπιζευχθῶ ἡ β δ, καὶ ἐπὶ τῆς β δ, πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἤχθω ἡ δ ε, καὶ γινομένης τῆς δ ε, ἴσης τῇ α β, ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ε, α ε, α δ. ἐπεὶ οὖν ἡ α β, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐστι καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν β δ, β ε, εὐθειῶν, καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ὡσαύτως καὶ ἡ γ δ, πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ ε. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ δ ε, ἴση ἐστὶ τῇ α β, κοινὴ δὲ ἡ β δ, καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία τῇ ὑπὸ β δ ε, ἴση, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσει τῇ β ε, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸν δ': τοῦ δ: τῶν ἐπιπέδων. Αὖθις ἐπεὶ ἡμὲν α β, ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, ἡ δὲ β ε, τῇ α δ, καὶ βάσις ἡ α ε, κοινὴ, αἱ ἄρα ὑπὸ α β ε, ε δ α, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α β ε, ὀρθὴ ὑπόκειται, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ἄρα ὀρθή ἐστιν. ἡ δ ε, ἄρα πρὸς τὸν δ α, ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ γ, ἡ ε δ, ἄρα τρισὶ ταῖς δ β, δ α, δ γ, ὀρθή ἐστι, καὶ τὸν δυσὶν, αὗται αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ ἡ α β, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ αἱ δ β, δ α, καὶ τῶν β': τοῦ παρόντος. αἱ α β, β δ, δ γ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, ὀρθὴ, αἱ α β, γ δ, ἄρα παράλληλοί εἰσι, καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἡ α γ τῇ β δ ἴση. ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς. *Euclid. Lib. 11. Fig. 4.*



Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

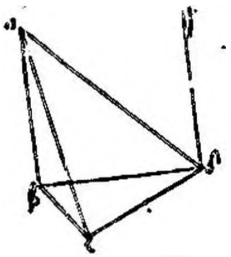
Ἐπὶ δύο γὰρ εὐθειῶν παραλλήλων τῶν α β, γ δ, ληφθέντων τυχόντα σημεῖα τὰ ε, ζ. λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν ε, ζ, εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ε η ζ· καὶ διήχθω τὰ διὰ τῆς ε η ζ, ἐπίπεδον, ὅπερ μὴ τὰ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπιπέδου κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω δὴ τὴν ε ζ, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ ἡ ε η ζ, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδυνατον, καὶ τὸ ε β': ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐαν ὦσι δύο εὐθεῖαι παραλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ εὐθειῶν παραλλήλων τῶν α β, γ δ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν α β, πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω ὅτι καὶ λοιπὴ γ δ, ὀρθὴ ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ αὐτῶν α β, γ δ, εὐθεῖαι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἐν τοῖς β, καὶ δ, σημείοις. Ἐπεζεύχθω ἡ β δ, καὶ συμπληρούσθω τὸ χωρίον, καὶ τοῖς καταγράφοις τὰς ς'. αἱ παρόντες. αἱ ἄρα γε εὐθεῖαι α β, β δ, γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, ἔστι τοῦ αὐτοῦ. ὄχθω τῇ β δ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ δ ε· καὶ κείσθω τῇ α β, ἴση ἡ δ ε· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ε, α ε, α δ· καὶ ἐπεὶ ἡ α β, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ α β, καὶ ἔστι τοῦ α ε· τῇ δὲ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, α β ε, γωνιῶν· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς α β, γ δ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ β δ, αἱ ἄρα ὑπὸ α β δ, γ δ β, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ α β δ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ δ β, ἡ γ δ, ἄρα πρὸς τοῦ β δ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν ἡ α β, τῇ δ ε, κοινὴ δὲ ἡ β δ, δύο δὴ αἱ α β, β δ, δυσὶ ταῖς ε δ, δ β, ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α β δ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ε δ β, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσει τῇ β ε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α β, τῇ δ ε, ἡ δὲ β ε, τῇ α δ, δύο δὴ αἱ α β, β ε, δυσὶ ταῖς ε δ, δ α, ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ α ε, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β ε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ε δ α, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ α β ε, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε δ α, καὶ ἡ ε δ, ἄρα πρὸς τοῦ α δ, ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τοῦ β δ, ὀρθὴ, ἡ δ ε, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν β δ, δ α, ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι. καὶ τῶν γ'. ὅροι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν α δ, δ β, ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ε δ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν β δ, δ α, ἐπιπέδῳ, ἐστὶν ἡ δ γ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν β δ, δ α, ἐπιπέδῳ εἰσὶ καὶ αἱ α β, β δ, ἐν ᾧ δὲ ἡ α β, β δ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ δ γ, ἡ ε δ, ἄρα τῇ δ γ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ γ δ, τῇ δ ε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ γ δ, καὶ τῇ β δ, ἄρα δύο εὐθείαις τεμούσαις ἀλλήλας ταῖς δ ε, δ β, ἀπὸ τοῦ κοινοῦ τοῦ δ, τομῆς, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε. ὥστε καὶ γ δ, καὶ τῷ διὰ τῶν δ ε, δ β, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ διὰ τῶν δ ε, δ β, ἐπίπεδον, τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν, καὶ γ δ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Euclid. Lib. 11. Fig. 8.

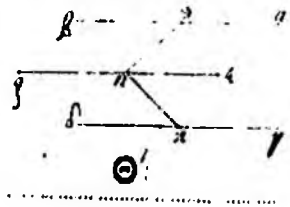
Πρό-

Πρότασις Θ΄: Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, παράλληλος τῇ ε ζ, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ α β, τῇ γ δ. Ἐπιζευχθω γὰρ ἐπὶ τὰς ε ζ, σημεῖον τυχὸν τὸ η, καὶ κατ' αὐτὸ τῇ ε ζ, ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ε ζ, α β, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ θ η, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ζ ε, γ δ, τῇ ε ζ, πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ η κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, πρὸς ἑκατέραν τῶν η θ, η κ, ὀρθή ἐστιν, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν η θ, η κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἔστιν ἡ ε ζ, τῇ α β, παράλληλος, καὶ ἡ α β, ἄρα τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ τὸν αὐτὸν, ἑκατέρα ἄρα τῶν α β, γ δ, τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ὦσι καὶ τὸν ε΄: παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ α β, τῇ γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

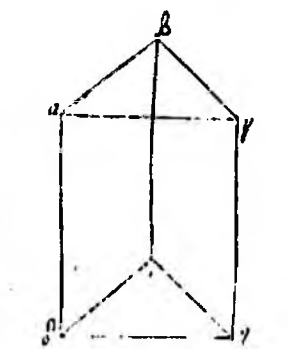
Eucl. Lib. xi. Fig. 6.



Πρότασις Ι΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ α β, β γ, παρὰ δύο εὐθείας τὰς δ ε, ε ζ, ἁπτομένας ἀλλήλων οὔσας, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε ζ. Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ β α, β γ, ε δ, ε ζ, ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α δ, γ ζ, β ε, α γ, δ ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ β α, τῇ ε δ, ἴση ἐστὶ, καὶ παράλληλος, καὶ ἡ α δ, ἄρα τῇ β ε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γ ζ, τῇ β ε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἑκατέρα ἄρα τῶν α δ, γ ζ, τῇ β ε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ α δ, τῇ γ ζ, καὶ ἴση, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ α γ, δ ζ, καὶ ἡ α γ, ἄρα τῇ δ ζ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς δ ε, ε ζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ α γ, βάσει τῇ δ ζ, ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



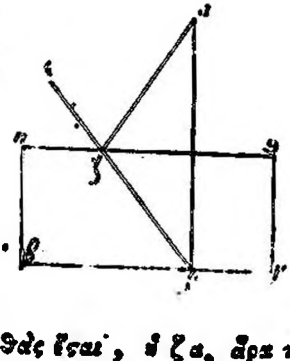
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ βγ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὴν βγ, κάθετος ἡ αδ· εἰ μὲν οὖν ἡ αδ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπαχθέν· εἰ δὲ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου τῇ βγ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὴν δε, κάθετος ἡ αζ, καὶ διὰ τοῦ ζ, σημείου, τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ· καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἑκατέρᾳ τῶν δα, δε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ βγ, ἄρα καὶ τὸ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἔστιν αὐτῷ παράλληλος ἡ ηθ· ἑνὶ δὲ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δι' μίας αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, τῷ ἄρα διὰ τῶν ε, ζ, ε, ζ, ηθ· καὶ ἡ ηθ, ἄρα τῷ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ε, δ, δα, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ· ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ αζ, ἔστι ἐν τῷ διὰ τῶν ε, δ, δα, ἐπιπέδῳ, ἡ ηθ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ζα, ὥστε καὶ ἡ ζα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ηθ, ἔστι δὲ καὶ ἡ αζ, τῇ πρὸς τὴν δε, ὀρθή· ἡ αζ, ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ηθ, δε, ὀρθή ἐστι, καὶ τὴν ε: ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπιζεύξῃ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἡ ζα, ἄρα τῷ διὰ τῶν ε δ, ηθ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ε δ, ηθ, ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον, ἡ αζ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euel. Lib. 11. Fig. 7.



Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

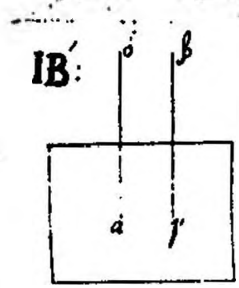
Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀφαιρῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ α. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀφαιρῆσαι. Νενοήσθω τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ ὑποκείμε-

νείμε-

κείμενον ἐπίπεδον καθήκως ὄχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τοῦ α, σημείου τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, αἱ αδ, γβ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αδ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 8.



Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀχθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ α, δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ, πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν αβ, αγ, ἐπίπεδον, τεμοῦσι δὲ τὸ ποιήσει διὰ τοῦ α, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν δα, αἱ ἄρα αβ, αγ, δα, εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ δα, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ἄρα ὑπὸ γαδ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ γαδ, τῇ ὑπὸ βαδ, καί εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

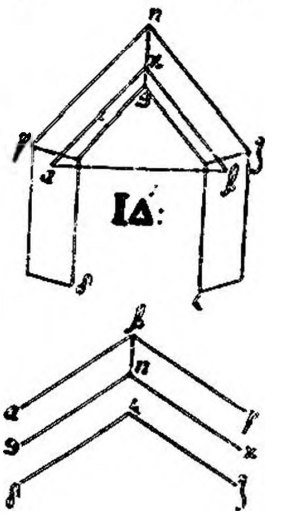
Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἔστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, πρὸς ἑκάτερον τῶν γδ, εζ, ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· συμπιπτέτωσαν. ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν, ποιείτωσαν τὴν ηθ· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ηθ, τυχὸν σημεῖον τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, βκ· καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν βκ, ἄρα εὐθεῖαν, οὖσαν ἐν τῷ εζ, ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, ἡ ἄρα ὑπὸ αβκ,

α β κ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ β α κ, ὀρθή ἐστι, ἑκατέρα δὴ τῶν α β κ, αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ α β κ, β α κ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον. αἱ ἄρα τὰ γ δ, ε ζ, ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται, παράλληλα ἄρα οὐκ ἐστὶ τὰ γ δ, ε ζ, ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. XI. Fig. 9.



Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων κατὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ οὖσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, παράλληλοί εἰσι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ α β, β γ, πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς δ ε, ε ζ, ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν α β, β γ, δ ε, ε ζ, ἐπίπεδα, οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἐπιπέδου κάθετος ἡ β κ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ κ, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ κ, τῇ μὲν ε δ, παράλληλος ἤχθω ἡ κ θ, τῇ δὲ ε ζ, ἡ κ ι. καὶ ἐπεὶ ἡ β κ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιεῖται γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν κ θ, κ ι, ἄρα ἑκατέρα τῶν κ θ, κ ι, ἐν τῷ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ β κ ι, β κ θ, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ β α, τῇ κ θ, αἱ ἄρα ὑπὸ κ β α, β κ θ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ β κ θ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ κ β α, ἡ κ β, ἄρα τῇ β α, πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ β κ, καὶ τῇ β γ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ β κ, δυσὶ εὐθείαις ταῖς β α, β γ, τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἥφθαται, ἡ β κ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν β α, β γ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ β κ, καὶ τῷ διὰ τῶν κ θ, κ ι, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν κ θ, κ ι, ἐπίπεδον ἐστὶ τὸ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἡ β κ, ἄρα τῷ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ β κ, καὶ τῷ διὰ τῶν α β, β γ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν δ ε, ε ζ, ἐπιπέδῳ ὀρθή. ἡ β κ, ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν α β, β γ, δ ε, ε ζ, ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι, καὶ κοινὸν παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν α β, β γ, ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν δ ε, ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

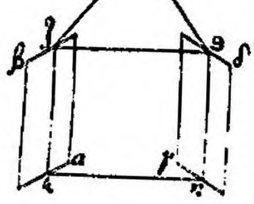
Πρό-

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέτμηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ α β, γ δ, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ε ζ η θ, τετμήσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ε ζ, η θ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ε ζ, τῇ η θ, εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ε ζ, η θ, ἤτοι ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ε, η. Ἐκβεβλήσθω πρότερον, ὡς ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ κ, ἐν τῷ α β, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ε ζ κ, σημεῖα ἐν τῷ α β, ἐπιπέδῳ ἐστίν, καὶ δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ε ζ κ, εὐθείας σημείων, ἐστὶ τὸ κ, τὸ κ, ἄρα ἐν τῷ α β, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ κ, καὶ ἐν τῷ γ δ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, τὰ α β, γ δ, ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. εἰ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι, οὐκ ἄρα αἱ ε ζ, η θ, εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ε ζ, η θ, εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ε, η, μέρη συμπεσοῦνται ἐκβαλλόμεναι. αἱ δὲ ἐπὶ τὰ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ζ, τῇ η θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

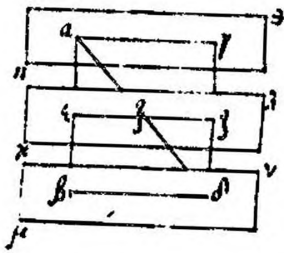
Euclid. Lib. 11. Fig. 10.



Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ α β, γ δ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κ θ, κ λ, μ ν, τετμήσθωσαν κατὰ τὰ α, ε, β, δ, ζ, γ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ α ε, εὐθεῖα πρὸς τὴν ε β, οὕτως ἡ γ ζ, πρὸς τὴν ζ δ. ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ α γ, β δ, α δ, καὶ συμβαλέτω ἡ α δ, τῷ κ λ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ε ξ, ξ ζ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ κ λ, μ ν, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ε β δ ζ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ε ζ, β δ, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὸν ἀντικείμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ α γ, ζ ξ, παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἑνὶ τῶν α β δ, παρὰ μίαν τῶν αὐτῶν πλευρὰν ἦκται ἡ ε ξ, παράλληλος, ἀνάλογον ἄρα κατὰ τὸν β': τῶν δ': τέμνει τὰς αὐτῶν πλευράς: ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, οὕτως ἡ α ξ, πρὸς τὴν ξ δ. καὶ αὖθις κατὰ τὸν αὐτὸν ὡσαύτως τῶν



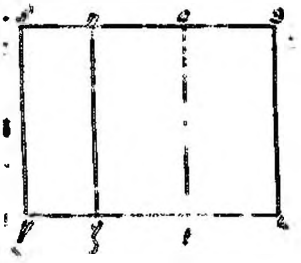
α δ γ, ξηγάνται αἱ πλάγιαι εἰσιν αἱ πλευραὶ, (παρὰ μίαν γὰρ τῶν αὐτῶν πλευρῶν ἔσται ἡ ξ ζ, παραλλήλες) ἄρα ὡς ἡ α ξ, πρὸς τὴν ξ δ, οὕτως ἡ γ ζ, πρὸς τὴν ζ δ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ α ξ, πρὸς τὴν ξ δ, οὕτως ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, οὕτως ἡ γ ζ, πρὸς τὴν ζ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ παράλληλοι τοῦ διʼ αὐτῶν ἐπιπέδου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρτις ἡ α β, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πᾶσα τοῦ διὰ τῶν α β, ἐπιπέδου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. Ἐκβεβλήθω γὰρ διὰ τῶν α β, ἐπίπεδον τὸ δ ε, καὶ ἔστω τῶν κοινῶν τομῶν τῶν τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἡ γ ε. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ε γ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, τῇ γ ε, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ δ ε, ἐπιπέδῳ ἡ ζ η. καὶ ἐπεὶ ἡ α β, πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ α β, ὥστι καὶ πρὸς τὴν γ ε, ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ α β ζ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ η ζ β, ὀρθή, παράλληλος ἄρα ἡ α β, τῇ ζ η, ἡ δὲ α β, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ζ η, ἄρα τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ κοινὸν τὸ δ'. ὅρον, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν τῷ ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ γ ε, πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ζ η, ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, τὸ ἄρα δ ε, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πᾶσα τὸ διὰ τῶν α β, ἐπίπεδα ὀρθὰ συγχωρούντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. xi. Fig. 21.



Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

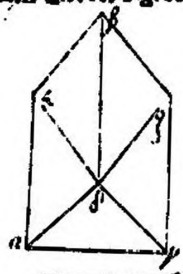
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἀλλήλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ α β, β γ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ β δ. Λέγω, ὅτι ἡ β δ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς ἐστι. μὴ γάρ, ἀλλ' ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐν μὲν τῷ α β, ἐπιπέδῳ, τῇ α δ,

εὐθείᾳ

εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ δε, ἐν δὲ τῷ βγ, ἐπιπέδῳ, τῇ γδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ αδ, πρὸς ὀρθὰς ἐστῇ αβ, ἐπιπέδῳ ἔσται ἡ δε, ἡ δε, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ δζ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ δ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἀδύνατον, τῷ πρὸ τούτου γ': οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσεται, πλὴν τῆς δβ, κοινῆς τομῆς τῷ αβ, βγ, ἐπιπέδων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. xi. Fig. xi.

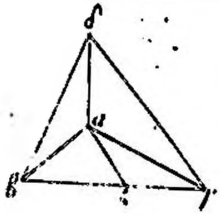


Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν τρισὶ γωνίαι ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχωνται, δύο ὁποιωσοῦν τῶν λοιπῶν μείζονες εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, περιεχέσθω. Λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνιῶν δύο ὁποιωσοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν, ὅτι δύο ὁποιωσοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ βαγ. καὶ συνεστάθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ α, τῇ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ βαε. καὶ κείσθω τῇ αδ, ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ ε, σημείου διαχθεῖσα ἡ βεγ, τεμνέτω τὰς αβ, αγ, εὐθείας κατὰ τὰ β, γ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βδ, δγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αβ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, ἴσαι δυσὶ ταῖς αε, αβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, ἴση. βάσις ἄρα ἡ δβ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, δγ, τῆς βγ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ δβ, τῇ βε, ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ δγ, λοιπῆς τῆς εγ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ δγ, βάσεως τῆς εγ, μείζων ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εαγ, μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δαβ, τῇ ἀπὸ βαε, ἴση, αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ, δαγ, τῆς ὑπὸ βαγ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ συὸ δύο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. xi. Fig. xii.



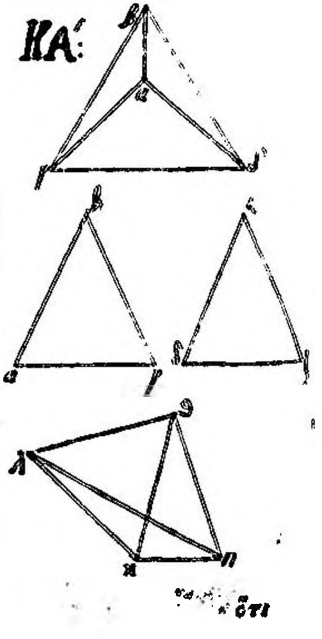
Πρό-

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἅπασα τριγωνικὴ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω τριγωνικὴ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ. Λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, παντὸς ὀρθοῦ ἐλάσσονές εἰσιν. Εἰλήφθω γὰρ ὑφ' ἑκάστης τῶν αβ, αγ, αδ, τυχόντα σημεῖα τὰ β, γ, δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ. γδ, δβ, καὶ ἐπεὶ τριτὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ γβα, αβδ, γβδ, δύο ἑπομένων τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβδ, τῆς ὑπὸ γβδ, μείζονές εἰσι, καὶ τὰ ἀνάπαλιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ αἱ μὲν ὑπὸ βγα, αγδ, τῆς ὑπὸ βγδ, μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ γδα, αδβ, τῆς ὑπὸ γδβ, μείζονές εἰσιν, ἐξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, βγα, αγδ, αδγ, αδβ, ἴσων τρισὶ ὑπὸ γβδ, βγδ, γδβ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ἴσαι, αἱ ὑπὸ γβδ, βγδ, γδβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ ἓξ ἄρα, αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, βγα, αγδ, αδγ, αδβ, δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· καὶ ἐπεὶ διάφορον τῷ αβγ, αγδ, αδβ, τριγώνου αἱ ἴσαι γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν, αἱ ἄρα τρισὶ τριγώνων ἴσαι γωνίαι, αἱ ὑπὸ γβα, αγβ, βαγ, αγδ, δαγ, γδα, αδβ, δβα, βαδ, ἓξ ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν· ὧν αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, αγδ, γδα, αδβ, δβα, ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, ἴσαι γωνίαι, περιέχουσι τὸν τριπλῆν γωνίαν παντὸς ὀρθοῦ ἐλάσσονες εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 11. Fig. 24.



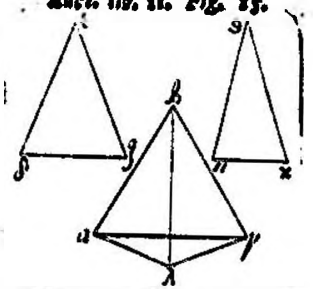
Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι παντῇ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατὸν ἐστὶν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, παντὶ μεταλαμβανόμεναι, αἱ αβγ, δεζ, τῆς ὑπὸ ηθκ, αἱ δὲ ὑπὸ δεζ, ηθκ, τῆς ὑπὸ αβγ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ηθκ, αβγ, τῆς ὑπὸ δεζ· καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, εὐθεῖαι· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. Λέγω, ὅτι

ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῆς ἴσων ταῖς α γ, δ ζ, ν κ, τρίγωνον συστήσασθαι ; συνίστω, ὅτι τῆ α γ, δ ζ, ν κ, δύο ὁποιωνοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι παντὶ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ α β γ, δ ι ζ, ν θ κ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερὸν, ὅτι τῆ τῆ α γ, δ ζ, ν κ, ἴσων γινομένων, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῆς ἴσων α γ, δ ζ, ν κ, τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δ' οὔ · ἔστωσαν ἄνισοι · καὶ συνιστάσθω πρὸς τῆ θ κ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, τῇ ὑπὸ α β γ, γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ κ θ λ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν α β, β γ, δ ε, ι ζ, ν θ, θ κ, ἴση ἡ θ λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κ λ, κ λ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς κ θ, θ λ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κ θ λ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ α γ, βάσει τῇ κ λ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ α β γ, ν θ κ, τῶν ὑπὸ δ ι ζ, μείζονές εἰσι, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ α β γ, τῇ ὑπὸ κ θ λ, ἡ ἄρα ὑπὸ κ θ λ, τῶν ὑπὸ δ ι ζ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ αἱ ν θ, θ λ, δύσι ταῖς δ ι, ι ζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ν θ λ, γωνίας τῆς πρὸς τῷ ι, μείζων, βάσις ἄρα ἡ ν λ, βάσεως τῆς δ ζ, μείζων ἐστὶν, ἀλλ' αἱ ν κ, κ λ, τῶν ν λ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ ν κ, κ λ, τῶν δ ζ, μείζονές εἰσιν, ἡ δὲ κ λ, ἴση τῇ α γ, αἱ α γ, ν κ, ἄρα τῶν λοιπῶν δ ζ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν α γ, δ ζ, τῶν ν κ, μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ ν κ, δ ζ, τῶν α γ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῆς ἴσων ταῖς α γ, δ ζ, ν κ, τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖςγωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ α β γ, δ ι ζ, ν θ κ, ὧν αἱ δύο τῶν λοιπῶν μείζονες ἔστωσαν παντὶ μεταλαμβανόμεναι · περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, δ ι, ι ζ, ν θ, θ κ· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ α γ, δ ζ, ν κ. Λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι τρίγωνον συστήσασθαι ἐκ τῆς ἴσων ταῖς α γ, δ ζ, ν κ, τουτέστι πάλιν, ὅτι αἱ δύο τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι παντὸς μεταλαμβανόμεναι. εἰλήφθω γὰρ πάλιν αἱ πρὸς τοῖς β, ι, θ, σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν · ἔσονται δὴ καὶ αἱ α γ, δ ζ, ν κ, ἴσαι, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῶν λοιπῶν μείζονες. εἰ δ' οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς β, ι, θ, σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ β, ἑκατέρας τῆς πρὸς τοῖς ι, θ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ α γ, εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν δ ζ, ν κ· καὶ φανερὸν, ὅτι αἱ α γ, μιᾷ ἑκατέρας τῶν δ ζ, ν κ, τῶν λοιπῶν μείζων ἐστί. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ δ ζ, ν κ, τῶν α γ, μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ α β, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, τῇ ὑπὸ ν θ κ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ α β λ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν α β, β γ, δ ι, ι ζ, ν θ, θ κ, ἴση ἡ β λ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β λ, δυσὶ ταῖς ν θ, θ κ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ α λ, βάσει τῇ ν κ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς ι, θ, σημείοις γωνίαι τῶν ὑπὸ α β γ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ν θ κ, τῇ ὑπὸ α β λ, ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ι, γωνία



γωνίας τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστί· ἐπεὶ δύο αἱ λβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστὶ, βάσις ἄρα ἡ δζ, βάσεως τῆς λγ, μείζων ἐστὶν, ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ηκ, τῇ αλ, αἱ ἄρα δζ, ηκ, τῶν αλ, λγ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ μὴν αἱ αλ, λγ, τῆς αγ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ δζ, ηκ, μείζονές εἰσι τῆς αγ· τῶν αγ, δζ, ηκ, ἄρα ἄθικτων αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ'. Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν εὐθυγράμμων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, τρεισὶ γωνίαις συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

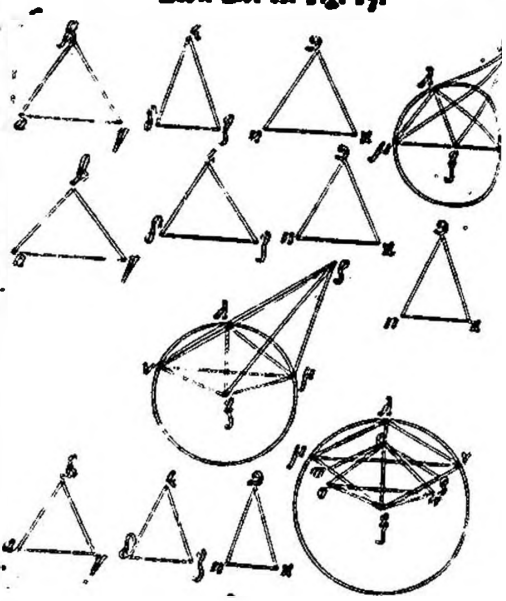
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι εὐθύγραμμοι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες. δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, τρίγωνον συστήσασθαι. Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι· συνεστάθω τὸ λμν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν αγ, τῇ λμ, τὴν δὲ δζ, τῇ μν, καὶ ἔτι τὴν ηκ, τῇ λν. καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ λμν, τρίγωνον, ὁ λμν, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, ἔστω δὲ ὅπως ἐντὸς τοῦ λμν, τρίγωνος· ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός. Ἔστω πρότερον ἐντὸς, ᾗ ἔστω τὸ ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ· ἀλλ' ἡ μὲν αβ, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ λξ, ἄρα τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ λξ, τῇ ξμ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς λξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ λμ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ λξμ, ἐστὶν ἴση· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῇ ὑπὸ μξν, ἴση ἐστὶν· καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ νξλ, τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ. πέντε ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 16.

δι ζ, ιθ κ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὑπόκεινται δὲ καὶ πασῶν ὀρθῶν ἐλάττονες, ὅπερ ἀδύνατον, ἡ ἄρα ὑπὸ α β, τῇ λ ξ, ἐστὶν ἴση. Λέγω, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ α β, τῆς λ ξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν α β, ἴση ἡ ξ ο, τῇ δὲ β γ, ἡ ξ π, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ο π· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν αἱ α β, τῇ β γ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξ ο, τῇ ξ π. ὥστε καὶ ἡ ο λ, λοιπὴ, λοιπῇ τῇ π μ, ἐστὶν ἴση, παραλληλος ἄρα ἡ λ μ, τῇ ο π, καὶ ἰσογώνιον τὸ λ ξ μ, τῷ ο π ξ. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν δ: τῶν ε: ὡς ἡ λ ξ, πρὸς τὴν λ μ, οὕτως ἡ ξ ο, πρὸς τὴν ο π, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ λ ξ, πρὸς τὴν ο ξ, οὕτως ἡ λ μ, πρὸς τὴν ο π, μείζων δὲ ἡ ξ λ, τῆς ξ ο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λ μ, τῆς ο π, ἀλλ' ἡ λ μ, κεῖται τῇ α γ, ἴση, καὶ ἡ α γ, ἄρα τῆς ο π, μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς ξ ο, ξ π, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ α γ, βάσεως τῆς ο π, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, γωνίας τῆς ὑπὸ ο ξ π, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δ ι ζ, τῆς ὑπὸ μ ξ ν, μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ιθ κ, τῆς ὑπὸ ν ξ λ· αἱ ἄρα ἓξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ α β γ, δ ι ζ, ιθ κ, ἓξῶν τῶν ὑπὸ λ ξ μ, μ ξ ν, ν ξ λ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ α β γ, δ ι ζ, ιθ κ, πασῶν ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται, πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ λ ξ μ, μ ξ ν, ν ξ λ, πασῶν ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἀλλὰ μὴν ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα ὑπὸ α β, ἐλάσσων τῆς λ ξ, ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ' ἴση, ἄρα μείζων. Ἀνιτέθω δὴ πρὸς τῇ α β: τῇ παρ: ἀπὸ τοῦ ξ, σημείου, πρὸς τὸν λ μ ν, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξ ρ, καὶ φ μείζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς λ ξ, ἐκείνῳ ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ξ ρ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ρ λ, ρ μ, ρ ν· καὶ ἐπεὶ ἡ ξ ρ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ λ μ ν, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ τὴν γ': ὄρθη ἄρα καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν λ ξ, μ ξ, ν ξ, ὀρθή ἐστιν ἡ ρ ξ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λ ξ, τῇ ξ μ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξ ρ, βάσις ἄρα ἡ λ ρ, βάσει τῇ ρ μ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ρ ν, ἑκατέρᾳ τῶν ρ λ, ρ μ, ἴση ἐστὶν, αἱ ἓξῆς ἄρα αἱ ρ λ, ρ μ, ρ ν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ ἐπεὶ φ μείζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ ἀπὸ τῆς λ ξ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ξ ρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς α β, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν λ ξ, ξ ρ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν λ ξ, ξ ρ, ἴσόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρ λ, διὰ τὰς ἑκατέρας, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ λ ξ ρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς α β, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ρ λ, ἴση ἄρα ἡ α β, τῇ ρ λ. ἀλλὰ τῇ μὲν α β, ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν β γ, δ ι, ι ζ, ιθ κ, τῇ δὲ ρ λ, ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ρ μ, ρ ν, ἑκάστη ἄρα τῶν α β, β γ, δ ι, ι ζ, ιθ κ, ἑκάστῃ τῶν ρ λ, ρ μ, ρ ν, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ δύο αἱ ρ λ, ρ μ, δυσὶ ταῖς α β, β γ, ἴσαι εἰσὶ. καὶ βάσις ἡ λ μ, βάσει τῇ α γ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λ ρ μ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ α β γ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ μ ρ ν, γωνία τῇ ὑπὸ δ ι ζ, ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ λ ρ ν, τῇ ὑπὸ ιθ κ. ἓξ ἓξῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ λ ρ μ, μ ρ ν, λ ρ ν, αἱ ἴσαι εἰσὶ ἴσαις ἑξῆς ἐκτεθείσαις, ταῖς ὑπὸ α β γ, δ ι ζ, ιθ κ, στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ ρ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν λ ρ μ, μ ρ ν, λ ρ ν, γωνιῶν. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κεκλεισμένον ὑπὸ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν τῆς μ ν, καὶ

ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξλ. Λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, τρισὶν αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς ξμ, ξλ, ταύτας τῇ μν, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ μν, ἴση ἐστίν, καὶ αἱ δε, εζ, ἄρα τῇ δζ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ αβ, ἴση τῇ λξ, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μείζων. ἡ ἄρα αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ, καὶ ἐπὶ ὁμοίως, ἐὰν μείζον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον ᾖ πρὸς ὀρθὰς τῇ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρξ, συναφθήσεται τὸ προβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κοῖλον τοῦ κύκλου ἐπὶ τῆς λμ ν, ξηράνω, καὶ ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω δὴ καὶ πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων, ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς μξ, ξλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ μλ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μξλ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ νθκ, τῇ ὑπὸ λξκ, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ

Euc. Lib. xi. Fig. 23.



μξκ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, νθκ, ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ὑπὸ αβγ, νθκ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ὑπὸ μξκ, ἄρα τῆς ὑπὸ δεζ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς μξ, ξκ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ μκ, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ μξκ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἴση ἡ αβ, τῇ λξ. Ἐξῆς δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, μείζων ἄρα. καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου πάλιν ἀναστήσωμεν τὸ ξρ, καὶ ἴσον αὐτῷ ὑποθώμεθα, ᾧ μείζον δυνάσεται τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, συναφθήσεται τὸ προβλημα. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδ' ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ, ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ, ἴση ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο, τῇ ξπ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ολ, λοιπῇ τῇ πμ, ἐστὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ μλ, τῇ πο, καὶ ἰσογώνιον τὸ λμξ, τριγ: τῷ πξο, τριγ: ἐστιν ἄρα ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο, πρὸς τὴν οπ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν ξο, οὕτως ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, μείζων δὲ ἡ λξ, τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς οπ. ἀλλ' ἡ λμ, τῇ αγ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ

αγ,

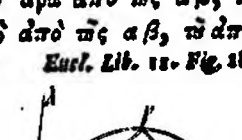
αγ, ἄρα τῆς οπ, μείζων. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, δύο δυσὶ ταῖς οξ, ξπ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς οπ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ξρ, ἴσην ἑκατέρᾳ τῇ ξο, ξπ, ὑποτείνουσαν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ορ, δείξομεν, ὅτι ἡ ὑπὸ πθκ, γωνία τῆς ὑπὸ οξρ, μείζων ἐστί. Συνεστάσθω δὴ πρὸς τῇ λξ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ ξ, τῇ μὲν ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ λξσ, τῇ δὲ ὑπὸ πθκ, ἡ ὑπὸ λξτ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ξσ, ξτ, τῇ οξ, ἴση. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ οσ, οτ, στ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς οξ, ξσ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ οξσ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, τῇ σλ, βάσει τῇ οσ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λν, τῇ οτ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ μλ, λν, εἰσὶν ἴσαι δυσὶ ταῖς οσ, οτ, καὶ γωνία ὑπὸ μλν, γωνίας τῆς ὑπὸ στο, μείζων, βάσις ἄρα ἡ μν, βάσεως τῆς στ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μν, τῇ δζ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ δζ, ἄρα τῆς στ, μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς σξ, ξτ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσεως τῆς στ, μείζων, ἄρα γωνία ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ σξτ, μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ σξτ, ταῖς ὑπὸ αβγ, πθκ, ἡ ἄρα ὑπὸ δεζ, τῇ ὑπὸ αβγ, πθκ, μείζων ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΗ΄ ΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ῥόμβου τὸ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἑκάτερον ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, δείξομεν ὧπως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ αβ, λξ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ αβ. καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ εἰς τὸ αβγ, ἐναρμόσθω τῇ λξ, εὐθείᾳ ἴση ἡ αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ αβγ, γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν αὕτη, καὶ τῶν λα: τῷ γ': τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ λξ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βγ. Ἐὰν οὖν τῷ βγ, ἴσον τῇ ξρ, ὑποτείνουσαν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ξρ, ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 18.

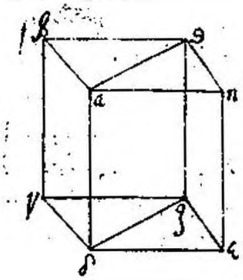


Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα ἴσα τε, καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Στερεὸν γὰρ τὸ γδηϑ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ἐμπεριεχέσθω, τῶν αγ, ηζ, εϑ, δζ, ζβ, αε. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα, ἴσά τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βη, γε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὸν ις'· τοῦ παυόντος, παράλληλος ἄρα ἡ αβ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βζ, αε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὸν αὐτόν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ, τῇ βγ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ, παράλληλος, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν δζ, ζη, βζ, αε, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αϑ, δζ· καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν, ἡ μὲν αβ, τῇ δγ, ἡ δὲ βϑ, τῇ γζ, δύο δὴ αἱ αβ, βϑ, ἅπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας τὰς δγ, γζ, ἅπτομένας ἀλλήλων παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὸν ιέ· τοῦ παρ· ἐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβϑ, γωνία τῇ ὑπὸ δγζ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βϑ, δυσὶ ταῖς δγ, γζ, ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβϑ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγζ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αϑ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβϑ, τρίγωνον τῷ δγζ, τριγ: ἴσον ἐστὶ, καὶ ἐστι τοῦ μὲν αβϑ, τριγ: διπλάσιον τὸ βη, παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ δγζ, τὸ γε, παραλληλόγ: ἴσον ἄρα τὸ βη, παραλληλόγ: τῷ γε, παραλληλογ: ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ αγ, τῷ ηζ, ἴσόν ἐστι, καὶ τὸ αε, τῷ βζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 19.



Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

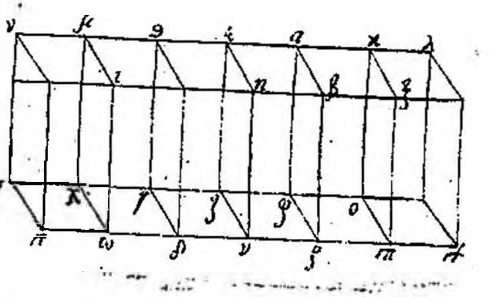
Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὁμοίως τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ αβγδ, ἐπιπέδῳ τῷ υε, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ρα, δϑ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αεζφ, βάσις πρὸς τὴν εϑγζ, βάσιν, οὕτω τὸ αβζυ, στερεὸν πρὸς τὸ εηγδ, στερεόν. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αε, εϑ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν εϑ, ἴσαι, ὁσαιδηποτοῦν αἱ ϑμ, μν, τῇ δὲ αε, ἴσαι, αἱ ακ, κλ· καὶ

συμ-

συμπεπληρώθωσαν τὰ λο, κφ, ϑχ, μσ, παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ λπ, κρ, δμ, μτ, στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαί εἰσιν αἱ λκ, κα, αε, διάμετροι παραλληλογράμμων, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν λο, κφ, αζ, παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις. τὸ δὲ λξ, κβ, αη, ἀλλήλοις. καί ἐστι τὸ λψ, κπ, αρ, ἀλλήλοις, ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ εγ, ϑχ, μσ, παραλληλόγ: ἰσάκις ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ϑη, ϑι, ιν, ἰσάκις εἰσὶν ἀλλήλοις. καί ἐστι τὰ δϑ, μω, ντ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῆς λπ, κρ, αυ, στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἰσάκις ἐστίν, ἀλλὰ καὶ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα. τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ λπ, κρ, αυ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ εδ, δμ, μτ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ὁσαπλασίων ἄρα ἡ λζ, βάσις τῆς αζ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ αυ, στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νζ, βάσις τῆς ζϑ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ νυ, στερεὸν τοῦ ϑυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ λζ, βάσις τῇ νζ, βάσει, ἴσον καὶ τὸ λυ, στερεὸν, τῷ νυ, στερεῷ. καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ νυ, στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων, τῆς αζ, ζϑ, δύο δὲ στερεῶν τῶν αυ, υϑ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν αζ, βάσεως, καὶ τοῦ αυ, στερεοῦ, ἥτε λζ, βάσις, καὶ τὸ λυ, στερεὸν. τῆς δὲ ϑζ, βάσεως, καὶ τοῦ ϑυ, στερεοῦ, ἥτε νζ, βάσις, καὶ τὸ νυ, στερεὸν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, βάσις τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν, τοῦ νυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση, ἴσον. καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ, βάσις πρὸς τὴν ζϑ, βάσιν, οὕτω τὸ αυ, στερεὸν, πρὸς τὸ υϑ, στερεὸν καὶ τὸν, ε: ὅρον τοῦ ε: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. xi. Fig. 20.



Πρότασις Κς': Πρόβλημα.

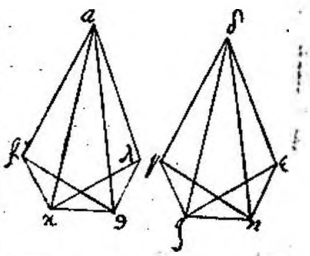
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν ἐπιπέδων. Δεῖ δὴ πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς δζ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ διὰ τῶν εδ, δγ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ ζη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη. καὶ

συνε-

συνισάσθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ μὲν ὑπὸ εδγ, γωνίᾳ ἴσην ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ δὲ ὑπὸ εδη, ἴσην ἡ ὑπὸ βακ. καὶ κείσθω τῇ δη, ἴση ἡ ακ, καὶ ἀνεσάσθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ διὰ τοῦ βαλ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ κθ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ηζ, ἡ κθ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θα. Λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ α, στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν βαλ, βαθ, θαλ, γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν.

Euclid. Lib. xi. Fig. xi.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, κβ, ζε, ηε· καὶ ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ηζε, ηζδ, γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκβ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ αἱ κα, αβ, δυσὶ ταῖς ηδ, δε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βκ, βάσει τῇ εη, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ζη, ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ βθ, τῇ ζε. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ακ, κθ, δυσὶ ταῖς δη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ αθ, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ θβ, βάσει τῇ ζε, ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ θαλ, τῇ ὑπὸ ζδγ, ἴση ἐστίν. ἐπειδὴ περ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς αλ, δγ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς κλ, θλ, ηγ, ζγ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βαλ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ εδγ, ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εδη, ὑπάκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ καλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηδγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ κα, αλ, δυσὶ ταῖς ηδ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ κλ, βάσει τῇ ηγ, ἴση ἐστίν. ἴση δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ηζ, ἐστί. δύο δὴ αἱ λκ, κθ, δυσὶ ταῖς γη, ηζ, εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, αλ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θαλ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδγ, ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ ὑπὸ εδγ, ἴση. πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ στερεᾷ γωνίᾳ συνέσταται.

Πρό-

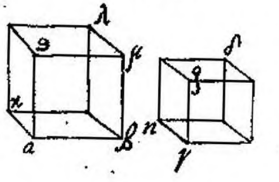
Πρότασις ΚΖ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ δγ. Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς αβ, τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ δγ, ὁμοίοντι καὶ ὁμοίως κειμένου, καὶ τὰ ἑξῆς. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ γ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν βαϑ, ϑακ, καβ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ βαϑ, γωνίαν τῇ ὑπὸ εγζ, τὴν δὲ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εγη, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ καϑ, τῇ ὑπὸ εγζ. καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ εγ, πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ακ, ὡς δὲ ἡ ηγ, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ ακ, πρὸς τὴν αϑ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αϑ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βϑ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ αλ, στερεόν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ακ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ εγη, βακ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ ηε, παραλληλόγραμμον τῷ κβ, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κϑ, παραλληλόγραμμον τῷ ηζ, παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. καὶ ἔτι τὸ ζε, τῷ ϑβ, τοῖα ἄρα παραλληλόγρ: τὰ γδ, στερεὰ τοῖσι παραλληλογράμ: τὰ αλ, στερεὰ ὅμοιά εἰσιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τοῖα τοῖσι πρὸς ἀπεναντίον ἴσά τε ἐστι καὶ ὅμοια, ὅλον ἄρα τὸ γδ, στερεὸν ὅλῳ τῷ αλ, στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς αβ, καὶ τὰ ἑξῆς.

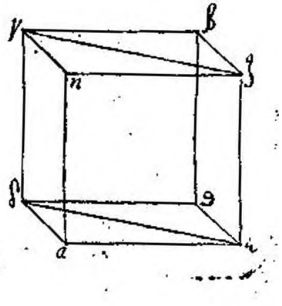
Eucl. Lib. 11. Fig. 22.

ΚΖ'.



Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ αβ, ἐπιπέδῳ τῷ γδεζ, τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, τὰς γζ, δε. Λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ αβ, στερεὸν ὑπὸ τοῦ γδεζ, ἐπιπέδου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν γηζ, τρίγωνον τῷ γβζ, τριγώνῳ. τὸ δὲ αδε, τῷ δεϑ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γα, παραλληλόγρ: τῷ βε, ἴσον, ἀπεναντίον γὰρ, τὸ δὲ ηε, τῷ γϑ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο

μὲν

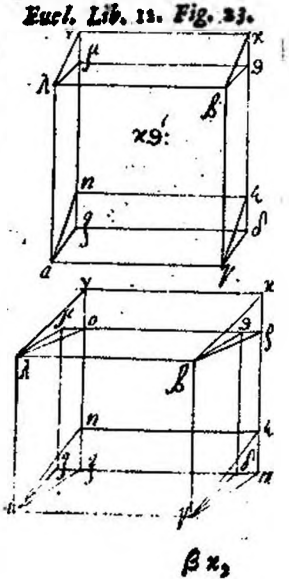
μὲν τριγώνων τῷ γηζ, αδε, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῷ ηε, αγ, γε, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῷ γζβ, δεϑ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων γϑ, βε, γε, ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ πλήϑει, καὶ τῷ μεγέϑει. ὥστε ὅλον τὸ αβ, στερεὸν διχᾶ τέτμηται, ὑπὸ τοῦ γδεζ, ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσὶν εὐθείας, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς αβ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γμ, γν, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ αζ, αη, λμ, λν, γδ, γε, βϑ, βκ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἔστωσαν τῆς ζν, δκ. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γμ, στερεὸν τῷ γν, στερεῷ. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν γϑ, γε, ἴση ἐστὶν ἡ γβ, ἑκατέρᾳ τῶν δϑ, εκ, ὥστε καὶ ἡ δϑ, τῇ εκ, ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσϑω ἡ εϑ, λοιπὴ ἄρα ἡ δε, λοιπῇ τῇ ϑκ, ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ τὸ δεγ, τρίγωνον τῷ ϑκβ, τριγώνῳ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ δη, παραλληλόγραμμον τῷ ϑν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αζη, τρίγωνον τῷ λμν, τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γζ, παραλληλόγραμμον τῷ βμ, παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ γη, τῷ βν, ἀπεναντίον γὰρ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν αζη, δεγ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν αδ, δη, ηγ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν λμν, ϑβκ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν βμ, νϑ, βν, κοινὸν προσκείσϑω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ αβ, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ηεϑμ, ὅλον ἄρα τὸ γμ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ γν, στερεῷ παραλληλεπιπ: ἴσον ἐστί. τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 11. Fig. 33.


μ
ν
λ
β
κϑ
η
δ
α
γ
ο
ε
ϑ
ι
ρ
π
ϛ
ξ
ζ
ω
χ
ψ
ρ
ϑ
ι
ν
ϛ
ξ
ω
χ
ψ
ρ
π

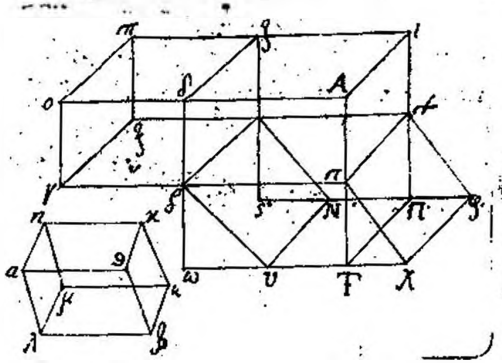
βκ, μὴ ἔσωσαν ἐπὶ τῆ αὐτῆ δ᾽Θειῶν. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ γμ, στερεὸν τῷ γν, στερεῷ. Ἐκβεβλήθωσαν γὰρ αἱ νκ, δϑ, καὶ ἔτι αἱ ηε, ζμ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ ο, ρ, π, ξ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αξ, λο, γπ, βρ, ἴσον δή ἐστι τὸ γμ, στερεὸν, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ζδϑμ, τῷ γο, στερεῷ, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ζπρο, ἐπίπεδα γὰρ πρὸς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς αγβλ, καὶ αὐτῆ αἱ ὑφεστῶσαι αἱ αζ, αξ, λμ, λο, γδ, γπ, βϑ, βρ, ἐπὶ τῆ αὐτῆ εἰσιν δ᾽Θειῶν τῆ ζπ, μρ, κατὰ τὰ αὐτέρω, ἀλλὰ τὸ γο, στερεὸν, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ξπρο, κατὰ τὰ αὐτὰ, ἴσόν ἐστι τῷ γν, στερεῷ, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κεμν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς αγβλ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ αη, αξ, γε, γπ, λν, λο, βκ, βρ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν δ᾽Θειῶν, ὧν κπ, νξ, ὥστε καὶ τὸ γμ, στερεὸν ἴσόν ἐστι τῷ γν, στερεῷ. Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ κατὰ ἐξῆς.

Πρότασις ΛΑ′. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

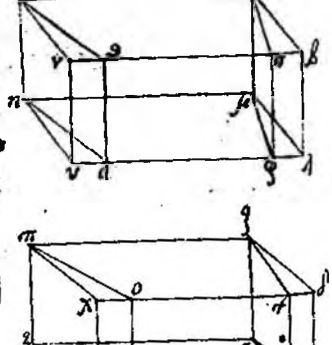
Ἐστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ, γδ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αε, γζ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ αε, στερεὸν τῷ γζ, στερεῷ. Ἐστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ϑκ, βε, αη, λμ, οπ, δζ, γξ, ρσ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς αβ, γδ, βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ αλβ, τῆ ὑπὸ γρδ, ἄνισος. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽εὐθείας τῆ γρ, εὐθεῖα ἡ ρτ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῆ ρτ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῆ σημείῳ τῷ ρ, τῇ ὑπὸ αλβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τρυ, καὶ κείσθω τῆ μὲν αλ, ἴση ἡ ρτ, τῆ δὲ λβ, ἴση ἡ ρυ, καὶ πρὸς τῷ υ, σημείῳ τῆ ρτ, παράλληλος ἀνεστάσθω ἡ υχ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ρχ, βάσις, καὶ τὸ φυ, στερεὸν, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ρτ, ρυ, δυσὶ ταῖς αλ, λβ, ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ρχ, παραλληλόγραμ: τῷ ϑλ, παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αλ, τῇ ρτ, ἡ δὲ λμ, τῇ ρσ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ρφ, παραλληλόγραμ: τῷ αμ, παραλληλογράμ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ λε, τῷ συ, ἴσόν τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Ἴσα ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ αε, στερεὰ βάσιν παραλληλογράμ: τὸ φυ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 24.



στερεοῦ ἴσά ἐστι, καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν ἓξ εἰσὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια, καὶ ὅλον ἄρα τὸ αι, στερεὸν παραλληλεπίπεδόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ψυ, παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. διήχθωσαν αἱ δρ, χυ, καὶ συμπεπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ω, καὶ διὰ τοῦ τ, τῇ δω, παράλληλος ἡ τΤ, καὶ ἐκβεβλήσθωσα ἡ Τ τ, καὶ ο δ, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Α. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ωψ, ρι, στερεά, ἴσον δή ἐστι τὸ ψω, στερεὸν, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ρψ, παραλληλόγραμμον· ἀπεναντίον δὲ τὸ ωΠ, τῷ ψυ, στερεῷ, ἧς βάσις ἐστὶ τὸ ρψ, παραλληλόγραμμον· ἀπεναντίον δὲ τὸ υφ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρψ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῷ αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ρω, ρυ, Ττ, τχ, σς, σΝ, ψΠ, ψφ, ἐπὶ τῷ αὐτῷ εἰσι διθείων τῷ ωχ, ςφ, ἀλλὰ τὸ ψυ, στερεὸν τῷ αι, ἴσόν ἐστι, καὶ τὸ ψω, ἄρα στερεὸν τῷ αι, στερεῷ, ἴσόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσόν ἐστι τὸ ρυχτ, παραλληλόγραμμον τῷ ωτ, παραλληλογράμμῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρτ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ρτ, ωχ, ἀλλὰ τὸ ρυχτ, τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ αβ. καὶ τὸ ωτ, ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον. ἄλλο δέ τὸ δτ, ἐστιν ἄρα ὡς ἡ γδ, βάσις πρὸς τὴν δτ, οὕτως ἡ ωτ, πρὸς τὴν δτ, καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γι, ἐπιπέδῳ τῷ ρζ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ὡς ἡ γδ, βάσις πρὸς τὴν δτ, βάσιν, οὕτως τὸ γζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ωι, ἐπιπέδῳ τῷ ρψ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ωτ, βάσις πρὸς τὴν δτ, βάσιν, οὕτω τὸ ωψ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν, ἀλλ' ὡς ἡ γδ, βάσις πρὸς τὴν δτ, οὕτως ἡ ωτ, πρὸς τὴν τδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ γζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν, οὕτω τὸ ωψ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν, ἑκάτερον ἄρα τῶν γζ, ψω, στερεῶν πρὸς τὸ ρι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ γζ, στερεὸν τῷ ωψ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ ωψ, τῷ αι, ἐδείχθη ἴσον, καὶ τὸ αι, ἄρα ἴσόν ἐστι τῷ γζ. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι, αἱ αη, θκ, βι, λμ, γξ, οπ, δζ, ρσ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς αβ, γδ, βάσεσιν. Λέγω δὴ πάλιν, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ αι, στερεὸν τῷ γζ, στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ε, η, μ, π, ζ, ξ, σ, σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον αἱ κν, ετ, ηυ, μφ, πχ, ζψ, ξω, σι, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ ν, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ι, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ντ, υφ, νυ, τφ, χψ, χω, ωι, ψι. ἴσον δή ἐστι τὸ κφ, στερεὸν τῷ πι, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν κμ, πσ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν, ἀλλὰ τὸ μὲν κφ, τῷ αι, στερεῷ ἴσόν ἐστι, τὸ δὲ πι, τῷ γζ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐ-

Eucl. Lib. 11. Fig. 25.



φεστῶ-

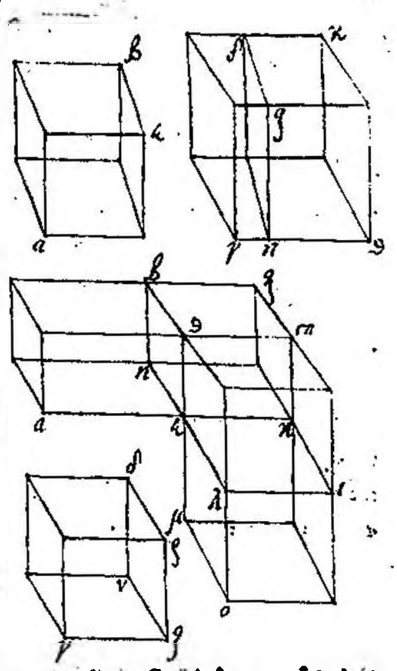
φιεχθῶσαι ἐπ' εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείων, καὶ τὸ α ε, ἄρα στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὰ ἄρα ὑπὸ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α β, γ δ. Λέγω, ὅτι ταῦτα ἔχουσιν ὡς αἱ βάσεις (ἐστὶν, πρὸς ἄλληλα) ὡς ἡ α ε, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτως τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ γ δ, στερεόν. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ζ η, τῇ α ε, ἴσον τὸ ζ θ, παραλληλόγρ: καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ζ θ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ γ δ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ η κ, ἴσον δή ἐστι τὸ α β, στερεὸν τῷ η κ, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν α ε, ζ θ, καὶ ὑπὸ τὰ αὐτὰ ὕψος, καὶ τῶν ἀναπόρων. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γ κ, ἐπιπέδῳ τῷ δ η, τέμνεται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὴν γ ε: τὴν παρόντος, οὕτως ἡ θ ζ, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτω τὸ θ δ, στερεὸν, πρὸς τὸ δ γ, στερεόν, ἴση δὲ ἡ μὲν ζ θ, βάσις τῇ α ε, βάσει, τῷ δὲ η κ, στερεὸν τῷ α β, στερεῷ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ α ε, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτω τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ γ δ, στερεόν, τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα. καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 26.



Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α β, γ δ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ α ε, τῇ γ ζ. Λέγω, ὅτι τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ δ, στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α ε, πρὸς τὴν γ ζ. Ἐκβεβλήθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς α ε, η ε, θ ε, αἱ ε κ, ε λ, ε μ. καὶ κείσθω τῇ μὲν γ ζ, ἴση ἡ ε ν, τῇ δὲ ζ ν, ἴση ἡ ε λ, καὶ ἔτι τῇ ζ ρ, ἴση ἡ ε μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ κ λ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ κ ο, στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ε κ, ε λ, δυσὶ ταῖς γ ζ, ζ ν, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κ ε λ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γ ζ ν, ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ α ε η, τῇ ὑπὸ γ ζ ν, ἐστὶν ἴση, διὰ τὸ ὁμοιότητα τῶν α β, γ δ, στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ

ἐστὶ ὅμοιον τὸ κλ, παραλληλόγραμμον τῷ γε, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μεν κμ, παραλληλόγραμμον τῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ γρ, παραλληλογράμμῳ: καὶ ἔτι τὸ οε, τῷ δζ, ἴσον ἄρα παραλληλόγραμμον: τὸ κε, στερεῷ, ἴσοι παραλληλογράμμοις τῷ γδ, στερεῷ ἐστὶν ἴσα καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μεν ἴσα ἴσοις πᾶσι ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια: ὅλον ἄρα τὸ κε, στερεὸν ὅλῳ τῷ γδ, στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ηκ, παραλληλόγραμμον: καὶ ἐπεὶ βάσεων μεν τῶν ηκ, κλ, παραλληλογράμμων, ὑψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ αβ, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ηξ, λπ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ὁμοιότης τῆς αβ, γδ, στερεᾶς, ἔστιν ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ εη, πρὸς τὴν ζτ, καὶ ἡ εϑ, πρὸς τὴν ζρ, ἴση δὲ ἡ μεν ζγ, τῇ εκ, ἡ δὲ ζν, τῇ ελ, ἡ δὲ ζρ, τῇ εμ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ ηε, πρὸς τὴν ελ, καὶ ἡ ϑε, πρὸς τὴν εμ. ἀλλ' ὡς μεν ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, οὕτω τὸ αη, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ηκ, παραλληλόγρ: καὶ τὴν αὐ: τὰ ς': ὡς δὲ ἡ ηε, πρὸς τὴν ελ, οὕτω τὸ ηκ, πρὸς τὸ κλ, ὡς δὲ ἡ ϑε, πρὸς τὴν εμ, οὕτω τὸ πε, πρὸς τὸ κμ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αη, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ηκ, οὕτω τὸ ηκ, πρὸς τὸ κλ, καὶ πε, πρὸς τὸ κμ. ἀλλ' ὡς μεν τὸ αη, πρὸς τὸ ηκ, οὕτω τὸ αβ, στερεὸν, πρὸς τὸ εζ, στερεόν, ὡς δὲ τὸ ηκ, πρὸς τὸ κλ, οὕτω τὸ ξε, στερεὸν πρὸς τὸ πλ, στερεόν, ὡς δὲ τὸ πε, πρὸς τὸ κμ, οὕτω τὸ πλ, στερεὸν πρὸς τὸ κο, στερεόν, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ εξ, οὕτω τὸ ξε, πρὸς τὸ πλ, καὶ τὸ πλ, πρὸς τὸ κο. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ τὰ συνεχὲς ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δ': διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β': καὶ τὸν ι ά: ὅταν τὰ ε: καὶ τὸ αβ, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ κο, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ εξ. ἀλλ' ὡς μεν τὸ αβ, πρὸς τὸ εξ, οὕτω καὶ τὸ αη, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ ηκ, καὶ ἡ αε, εὐθεῖα πρὸς τὴν εκ, ὥστε καὶ τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ κο, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, ἴσον δὲ τὸ μεν κο, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ, ἡ δὲ εκ, εὐθεῖα τῇ γζ, καὶ τὸ αβ, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ γδ, στερ: διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτῷ πλευρὰ ἡ αε, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

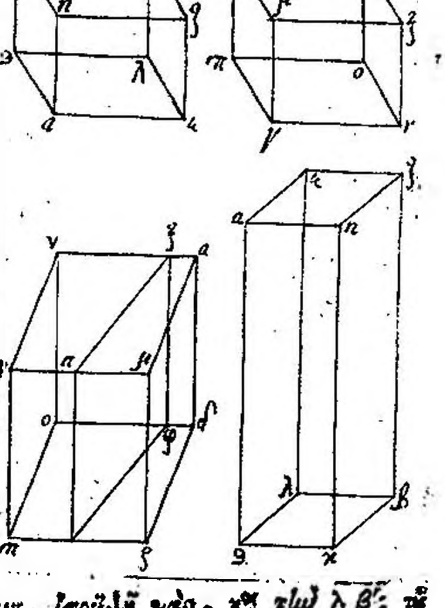
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν. ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδὴ περ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

Προτασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αβ, γδ. Λέγω, ὅτι τῶν αβ, γδ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εϑ βάσις πρὸς τὴν ικ βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεὸν ὕψος. Ἔστω γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ αν, ιζ, λβ, ϑκ, γμ, νξ, οδ, πρ, πρὸς ὀρθὰς τοῖς βάσεσιν αὐτῶν. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν ικ βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αν. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ εϑ, βάσις τῇ ικ, βάσει, ἔστι καὶ τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερ: ἴσον καὶ ἡ γμ, τῇ αν, ἴση· εἰ γὰρ τῶν εϑ, ικ, βάσεων ἴσων ὄντων, μὴ εἴη τὸ αν, γμ, ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερεὸν ἴσον ἔσται. ὑπόκειται δὲ ἴσον, οὐκ ἄρα ἄνισον, τὸ γμ, ὕψος τῷ αν, ὕψει, ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν ικ βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αν, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Μὴ ἔστω δὲ ἴση ἡ εϑ, βάσις τῇ ικ, βάσει, ἀλλὰ μείζων· ἔστι δὲ καὶ τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ ἴσον, μείζων ἄρα καὶ ἡ γμ, τῆς αν. εἰ γὰρ μή, οὐδ' ἄρα πάλιν τὸ αβ, γδ, στερεά, ἴσα ἔσται, ὑπόκειται δὲ ἴσα· κείσθω ἴση τῇ αν, ἡ γτ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ντ, ὕψους δὲ τοῦ γτ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ φγ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ· ἄλλο δέ τι τὸ φγ, τὸ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεόν, οὕτω τὸ γδ, στερεὸν πρὸς τὸ αὐτὸ γφ, στερεόν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεόν, οὕτως ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν ντ, βάσιν, ἰσοϋψῆ γάρ, τῷ τὴν λβ: τὰ γὰρ ἀπὸ τῶν αβ, γφ, στερεά, ὡς δὲ τὸ γδ, στερ: πρὸς τὸ γφ, στερ: οὕτως ἡ μπ, βάσις πρὸς τὴν πτ, βάσιν, τῷ ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, ὡς ἄρα ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν ντ, βάσιν, οὕτως ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, ἴση δὲ ἡ γτ, τῇ αν, καὶ ὡς

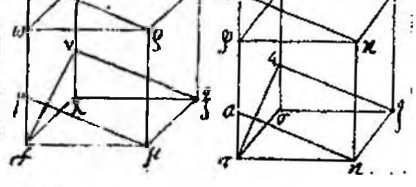
Euclid. Lib. XI. Fig. 47.



ὡς ἄρα ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ μ γ, πρὸς τὴν α η. τῶν α β, ἄρα γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῶν α β, γ δ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γ δ, στερεῦ ὕψος πρὸς τὸ τῦ α β, λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ α β, στερ: τῷ γ δ, στερεῷ. Ἐστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ε Θ, βάσις τῇ ν π, βάσει, ἔστιν ὡς ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γ δ, στερεῦ ὕψος πρὸς τὸ τῦ α β, στερ: ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τῦ γ δ, ὕψος τῷ τῦ α β, στερ: ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἴσον ἄρα τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ε Θ, βάσις τῇ ν π, ἴση, ἀλλὰ μείζων, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ τῦ γ δ, στερεῦ ὕψος τῦ α β, στερεῦ ὕψος, τουτέστιν ἡ μ γ, τῆς α η, κείσθω τῇ α η, ἴση πάλιν ἡ γ τ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ γ φ, στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν α η, ἴση δὲ ἡ α η, τῇ γ τ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως ἡ γ μ, πρὸς τὴν γ τ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτως τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, στερεόν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ α β, γ φ, στερεά, ὡς δὲ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ τ, οὕτως ἥτε μ π, βάσις πρὸς τὴν π τ, βάσιν, καὶ τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, καὶ ὡς ἄρα τὸ α β, στερ: πρὸς τὸ γ φ, οὕτω τὸ γ δ, στερεὸν πρὸς τὸ γ φ, ἑκάτερον ἄρα τῶν α β, γ δ, πρὸς τὸ γ φ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ α η, στερ: τῷ γ δ, στερ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι ζ ε, β λ, η α, κ Θ, ξ ν, δ ο, μ γ, ρ π, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν ζ, η, β, κ, ξ, μ, δ, ρ, σημείων, ἐπὶ τὰ τῶν ε Θ, ν π, βάσεων, ἐπίπεδα καθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ς, ω, σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ζ φ, ξ ω, στερεά. Λέγω, ὅτι καὶ ὅπως ἴσων ὄντων τῶν α β, γ δ, στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ε Θ, βάσις πρὸς τὴν ν π, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γ δ, στερεῦ ὕψος πρὸς τὸ τῦ α β, ἐπεὶ γὰρ ἴσόν ἐστι τὸ α β, στερεὸν τῷ γ δ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν α β, τῷ β τ, ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ζ κ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. τὸ δὲ γ δ, στερεὸν τῷ δ ψ, ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξ ρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ β τ, ἄρα στερεὸν τῷ δ ψ, στερεῷ ἴσόν ἐστι; τῶν δ' ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν,

Eucl. Lib. 11. Fig. 28.



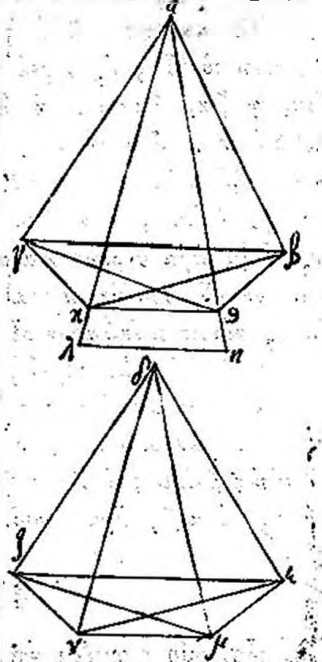
αὐτῶν, αὐτιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, (ἴση δὲ ἡ μὲν ζκ, βάσις τῇ εϑ, βάσει, ἡ δὲ ξρ, βάσις τῇ νπ,) οὕτω τὸ τῦ δφ, στερεὸν ὕψος, πρὸς τὸ τῦ βτ, ὕψος, τὸ δ' αὐτὸ ὕψη ἐστὶν τῇ δφ, βτ, στερεῶν, ᾗ τῇ αβ, δγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῦ αβ, στερεοῦ· τῇ αβ, γδ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων αὐτιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῇ αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων αὐτιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τῇ δὲ ἑτέρῳ ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν οὕτω τὸ τῦ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῦ αβ, στερεοῦ. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβ, στερεὸν τῇ γδ, στερεῷ. τῇ γὰρ αὐτῇ καταγεγράφθω, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῦ αβ, στερεοῦ, ἴση δὲ ἡ μὲν εϑ, βάσις τῇ ζκ, βάσει, ἡ δὲ νπ, τῇ ξρ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῦ αβ, στερεόν· τὸ δ' αὐτὸ ὕψη ἐστὶ τῇ αβ, γδ, στερεῶν, ᾗ τῇ βτ, δφ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ δφ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῦ βτ, στερεοῦ ὕψος, τῶν βτ, δφ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων αὐτιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, αὐτιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, ἴσον ἄρα τὸ βτ, στερεὸν τῇ δφ, στερεῷ, ἀλλὰ τῇ μὲν βτ, τὸ αβ, ἐστὶν ἴσον. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ζκ, ᾗ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεξῆσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῇ αὐτῶν ἀϑείων, τὸ δὲ δφ, στερεὸν τῇ γδ, στερεῷ ἴσον ἐστίν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξρ, ᾗ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς ϑείαις, τὸ αβ, ἄρα στερεὸν τῇ γδ, στερεῷ ἐστιν ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῆς κορυφῆς αὐτῆς μετέωροι ἀϑεῖαι ἐπιζαϑῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῆς ἐξ ἀρχῆς ἀϑειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῆς μετεώρου λαφϑῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' οἷς εἰσὶ αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, καϑέτοι ἀχϑῶσιν, ἀπὸ δὲ τῆς γενομένης σημείου ὑπὸ τῶν καϑέτων ἐφ' οἷς ἐπίπεδος ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχϑῶσιν ἀϑεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῆς μετεώρου.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ἀϑύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. ἀπὸ δὲ τῶν α, δ, σημείων μετέωροι ἀϑεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ αη, δμ, ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς ἀϑειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ μδε, τῇ ὑπὸ ηαβ, τὴν δὲ ὑπὸ μδζ, τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ εἰλήφϑωσαν ἐπὶ τῶν αη, δμ, τυχόντα σημεῖα τὰ η, μ, καὶ ἤχϑωσαν ἀπὸ τῶν η, μ, σημείων, ἐπὶ τὰ διὰ τῶν βαγ, εδζ,

ἐπίπεδα καθέτοι, αἱ ηλ, μν. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηαλ γωνία τῇ ὑπὸ μδν γωνίᾳ. Κείσθω τῇ δμ ἴση ἡ αϑ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ ϑ, τῇ ηλ παράλληλος, ἡ κϑ, ἡ δὲ ηλ, καθέτος ἐστὶν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ϑκ ἄρα καθέτος ἐστὶν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ν, σημείων ἐπὶ τὰς αβ, αγ, δζ, δε, εὐθείας καθέτοι αἱ κβ, κγ, νζ, νε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ϑγ, γβ, μζ, ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ϑα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ϑκ, κα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κγ, γα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ϑκ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ϑκ, κγ, γα, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ϑκ, κγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ϑγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ϑα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ϑγ, γα, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ϑγα, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ δζμ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγϑ, γωνία τῇ ὑπὸ δζμ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ϑαγ, τῇ ὑπὸ μδζ, ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ μδζ, ϑγα, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν αϑ, τῇ δμ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἴση ἄρα ἡ αγ, τῇ δζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ϑβ, με, καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς αϑ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ακ, κϑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βκ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βκ, κϑ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αϑ, ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν βκ, κϑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βϑ. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ϑκβ, γωνία. διὰ τὸ καὶ τὴν ϑκ, κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αϑ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βϑ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβϑ, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὑπὸ δεμ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαϑ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδμ, ὑπόκειται γὰρ, καὶ ἔστιν ἡ αϑ, τῇ δμ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ, τῇ δε. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ αβ, τῇ δε, δύο δὴ αἱ αγ, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδε, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ, γωνία τῇ ὑπὸ δζε, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αγκ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ δζν, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βγκ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εζν, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ γβκ, γωνία τῇ ὑπὸ ζεν, ἴση. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ γβκ, ζεν, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας



Eucl. Lib. 11. Fig. 29.

ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν βγ, τῇ εζ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν, ἴση ἄρα ἡ γκ, τῇ ζν, ἔστι δὲ καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, ἴση, δύο δὴ αἱ αγ, γκ, δυσὶ ταῖς δζ, ζν, ἴσαι εἰσί, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ακ, βάσει τῇ δν, ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αϑ, τῇ δμ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αϑ, τῷ ἀπὸ τῆς δμ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αϑ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ακ, κϑ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ακϑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δμ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ δνμ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ακ, κϑ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δν. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κϑ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς νμ, ἴση ἄρα ἡ ϑκ, τῇ νμ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ϑα, ακ, δυσὶ ταῖς μδ, δν, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ϑκ, βάσει τῇ νμ, ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ϑακ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μδν, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

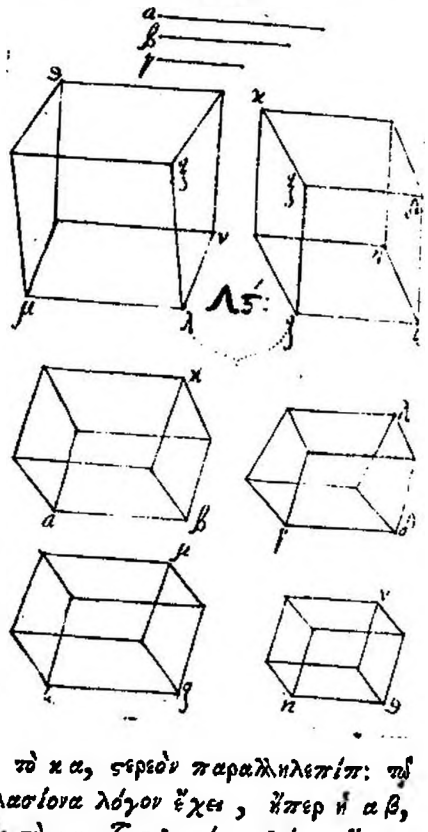
Πρότασις Λς'. Θεώρημα.

Ἐὰν ῥᾶς εὐθεῖα ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπ' αὐτῆς στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν ῥᾶς εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ α, β, γ, ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῶν αβγ, στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ ε, περιεχομένη ὑπὸ ῥᾳδίων γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ δεη, ηεζ, ζεδ, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἑκάστη τῶν δε, ηε, εζ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ εκ, στερεὸν παραλληλεπ: τῇ δὲ α, κείσθω ἴση ἡ λμ, καὶ συνεστάσθω πρὸς τῇ λμ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ λ, τῇ πρὸς τῷ ε, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν νλξ, ξλμ, μλν, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἡ λξ, τῇ δὲ γ, ἴση ἡ λν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ, ἴση δὲ ἡ μὲν α, τῇ λμ, ἡ δὲ β, ἑκάστη τῶν λξ, εζ, εη, εδ, ἡ δὲ γ, τῇ λν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν λν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ μλν, δεζ, αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν. ἴσον ἄρα τὸ μν, παραλληλόγραμμον τῷ δζ, παραλληλογράμμῳ· καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι, εἰσὶν ἴσαι, αἱ ὑπὸ δεζ, νλμ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ λξ, εη, ἴσαι τε ἀλλήλαις, καὶ ἴσας γωνίας

περιέχουσαι μὴ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν ηξ, σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν νλ μ, δ ε ζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε τὰ λϑ, εκ, στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. καὶ καὶ τλω λά· ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἴσον ἄρα τὸ ϑλ, στερεὸν τῷ εκ, στερεῷ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ϑλ, τὸ ἐκ τῶν α, β, γ, στερεὸν, τὸ δὲ εκ, τὸ ἀπὸ τῆς β, στερεὸν, τὸ ἄρα ἐκ τῶν α, β, γ, στερεὸν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλαθίῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπ: ἴσον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 30.



Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ αβ, γδ, εζ, ηϑ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηϑ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν αβ, γδ, εζ, ηϑ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ κα, λγ, με, νη. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ κα, πρὸς τὸ λγ, οὕτως τὸ με, πρὸς τὸ νη. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ τὸ κα, στερεὸν παραλληλεπ: τῷ λγ, ὅμοιον, τὸ κα, ἄρα πρὸς τὸ λγ, ἐφιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ με, πρὸς τὸ νη, ἐφιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν ηϑ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηϑ, ὡς ἄρα τὸ κα, πρὸς τὸ λγ, οὕτω τὸ με, πρὸς τὸ νη. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ κα, στερεὸν πρὸς τὸ λγ, στερεὸν, οὕτω τὸ με, στερεὸν πρὸς τὸ νη, στερεόν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ, εὐθεῖα πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηϑ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ κα, πρὸς τὸ λγ, ἐφιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἔχει δὲ καὶ τὸ με, πρὸς τὸ νη, ἐφιπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν ηϑ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ κα, πρὸς τὸ λγ, οὕτω τὸ με, πρὸς τὸ νη, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηϑ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

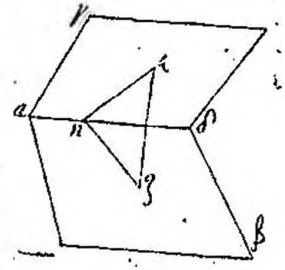
Πρό-

Πρότασις ΛΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τὴν λοιπὴν πεσεῖται τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ γδ, ἐπιπέδῳ τῷ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ αδ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς γδ, ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ ε. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τὴν δα, πεσεῖται. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ εζ, καὶ συμβαλλέτω τῷ αβ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν δα, τῷ αβ, ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ζη, ἥτις καὶ τῷ γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εη. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζη, τῷ γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ εη, οὖσα ἐν τῷ γδ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ὑπὸ ζηε, γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῷ αβ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ ἄρα ὑπὸ εζη, ὀρθή ἐστι. Τριγώνου δὴ τοῦ εζη, αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον καὶ τὸν ιζ'. τοῦ α'. βιβ. ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς δα, ἐπὶ τὴν δα, ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν σὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων, ἡ ἀγομένη κάθετος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 11. Fig. 31.



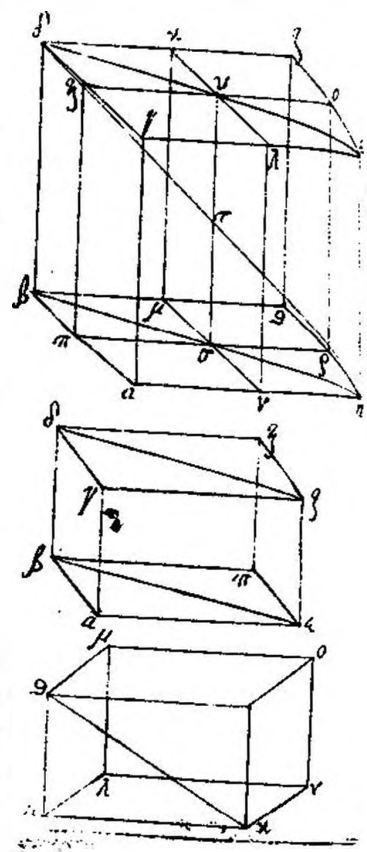
Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ αζ, τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν γζ, αθ, αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ κ, λ, μ, ν, ξ, π, ο, ρ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ κν, ξρ, κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ υσ, τοῦ δὲ αβ, στερεοῦ παραλληλεπιπ. διαγώνιος ἡ δη. Λέγω, ὅτι αἱ υσ, δη, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν υτ, τῇ τσ, ἴση ἐστὶν,

ἡ δὲ δτ, τῇ τη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ δυ, υε, βσ, σκ, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δξ, τῇ οε, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ δξυ, υοε, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δξ, τῇ εο, ἡ δὲ ξυ, τῇ υο, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ δυ, βάσει τῇ υε, ἴση ἐστί. τὸ δὲ δξυ, τρίγωνον τῷ υοε, τριγώνῳ ἴσόν ἐστι. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ξυδ, γωνία τῇ ὑπὸ ουε. διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ δυε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βσκ, εὐθεῖά ἐστι, καὶ ἴση ἡ βσ, τῇ σκ, καὶ ἐπεὶ ἡ γα, τῇ δβ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἀλλ' ἡ γα, καὶ τῇ εκ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ δε, κβ, παράλληλος ἄρα ἡ δε, τῇ κβ, καὶ εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ δ, υ, κ, σ, καὶ ἐπεζεύχθησαν αἱ δκ, υσ, καὶ κατὰ τὸν ζ': τὰ παρόντα, ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ δκ, υσ, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δε, τῇ βκ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδτ, γωνία τῇ ὑπὸ βκτ, ἐναλλὰξ γάρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δτυ, τῇ ὑπὸ κτσ, ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ δτυ, κτσ, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν δυ, τῇ κσ, ἡμίσειαι γὰρ εἰσι τῶν δε, κβ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν δτ, τῇ τκ, ἡ δὲ υτ, τῇ στ. Ἐὰν ἄρα στερεὸν παραλληλεπ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 32.



Πρότασις Μ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα.

Ἐστω πρίσματα ἰσοῦψῆ τὰ αβγδεζ, ηθκλμν, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ αζ, παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ, τὸ ηθκ, τρίγωνον. διπλάσιον ἔστω τὸ αζ, παραλληλ: τοῦ ηθκ, τριγώνου. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ αβγδεζ, πρίσμα τῷ ηθκλμν, πρίσματι. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ αξ, κο, στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, παραλληλόγρ: τοῦ ηθκ, τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ θκ, παραλληλόγρ: διπλάσιον τοῦ ηθκ, τριγ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αζ, παραλληλόγραμ: τῷ

θκ,

ϑ κ, παραλληλογρ: τὸ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ τὸν λά: ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. ἴσον ἄρα τὸ α ξ, στερεὸν πρ̃ι η ο, στερεῷ, ᾧ ἐστι τὸ α ξ, στερεὸν ἥμισυ τὸ α β γ δ ε ζ, πρίσμα, τὸ δὲ η ο, στερεὸν ἥμισυ τὸ η ϑ κ λ μ ν, πρίσμα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ α β γ δ ε ζ, πρίσμα πρ̃ι η ϑ κ λ μ ν, πρίσματι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Ἑνδεκάτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

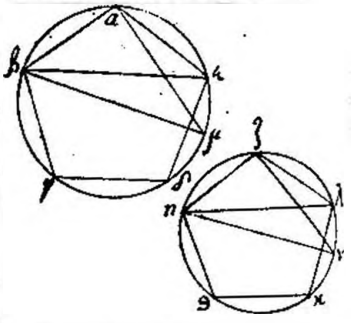
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ε''σωσαν κύκλοι οἱ αβγδε, ζηθκλ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ αβγδε, ζηθκλ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ βμ, ην. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βμ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, τετράγωνον, οὕτω τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγωνον.

Euclid. Lib. 12. Fig. 1.



Ε'πιζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, αμ, ηλ, ζν, καὶ ἐπεὶ καὶ τὸν α'. τῶν ς'. ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγδε, πολύγ. πρὸς ζηθκλ, πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ βαε, γωνία τῇ ὑπὸ ηζλ, καὶ κατὰ τὸν ς'. τῶν αὐτῶν, ἐστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ ζη, πρὸς τὴν λζ, δύο δὴ τριγώνα ἐστὶ τὰ βαε, ηζλ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ ηζλ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβε, τρίγωνον, πρὸς ζηλ, τρίγ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεβ, γωνία τῇ ὑπὸ ζλη, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ αμβ, ἴση ἐστὶ καὶ τὴν κ. τῶ γ'. (ἐπὶ τῆς αὐτῆς γὰρ περιφερείας βεβήκασιν), ἡ δὲ ὑπὸ ζλη, τῇ ὑπὸ ζνη, καὶ ἡ ὑπὸ αμβ, ἄρα τῇ ὑπὸ ζνη, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βαμ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ηζν, καὶ τῶ λ. τῶ αὐτῶ, ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αμβ, τρίγωνον: πρὸς ζην, τρίγ: καὶ κατὰ τὸν δ'. τῶ ς'. ἀνάλογον, ἄρα ὡς ἡ βμ, πρὸς τὴν ην, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ηζ, ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς βμ, πρὸς τὴν ην, λόγος διπλασίων ἐστὶν ὁ τῶ ἀπὸ τῆς βμ, περιέχουσα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, τετράγων: καὶ τῶ ι'. τῶ ε'. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὴν ηζ, διπλασίων ἐστὶν, ὃ τῶ αβγδε, πολύγ: πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγων: καὶ τῶ κ'.

τῶ

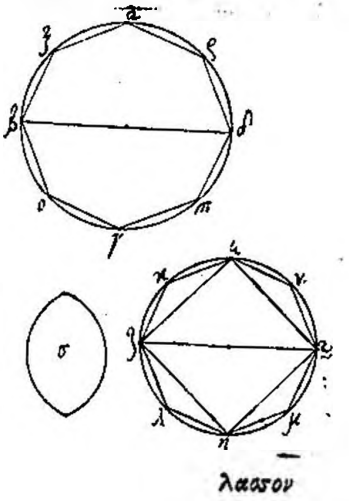
τῷ αὐτῷ, καὶ κύ τινι ἀ: τῷ ε: ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βμ, τετράγων: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, ὕπω τὸ αβγδε, πολύγ: πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ βδ, ζθ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλ: ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ εζηθ, κύκλου χωρίον, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον τετράγωνον τὸ εζηθ, τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγ: ἢ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ εζηθ, κύκλου. ἐπεὶδήπερ ἐὰν διὰ τῶν εζηθ, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ εζηθ, τετράγ: τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος, ὥστε τὸ εζηθ, ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ εζηθ, κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ εζ, ζη, ηθ, θε, περιφέρειαι καὶ τὰ κ, λ, μ, ν, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, κζ, ζλ, λη, ημ, μθ, θν, νε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν εκζ, ζηλ, ημθ, καὶ θνε, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ κατὰ τὰ α: τοῦ α: ἀναπληρώσωμεν τὸ ἐπὶ τῆς εζ, ζη, ηθ, θε, διπλεύρου παραλληλόγραμμον, ἕκαστον τῶν εκζ, ζλη, ημθ, θνε, τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου· ἀλλὰ τὸ καθ' αὑτὸ τμῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου. ὥστε ἕκαστον τῶν εκζ, ζλη, ημθ, θνε, τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύοντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ εζηθ, κύκλος τοῦ σ, χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῇ α: θεωρήματι τοῦ δεκάτου, ὅτι δύο ἀνίσων μεγεθῶν ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἀφαιρεθῇ, ἢ τοῦ ἡμίσου, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον, ἢ τοῦ ἡμίσου, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔ-

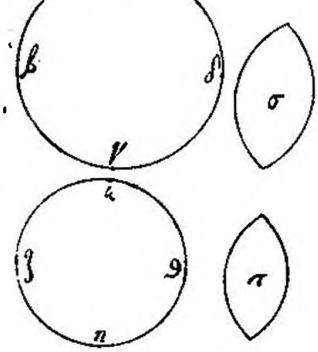
Eucl. Lib. 12. Fig. 2.



λασσον

λασσον τῆ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῆς εκ, κζ, ζλ, λη, ημ, μθ, θν, νε, τμήματα τῆς εζηθ, κύκλε, ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ εζηθ, κύκλος τῆ σ, χωρίε, λοιπὸν ἄρα τὸ εκζλημθν, πολύγων: μεῖζόν ἐστι τῆ σ, χωρίε. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν αβγδ, κύκλον πολύγωνον τῷ εκζλημθν, πολυγώνῳ, ὅμοιον πολύγωνον τὸ αξβογπδρ, καὶ τὴν ἀνωτέρω, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πεντάγωνον: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πεντάγωνον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολυγ: καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πεντάγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα καὶ τὴν ἐς': τῆ ἑ: ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτω τὸ σ, χωρίον, πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: μεῖζων δὲ ὁ αβγδ, κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγ: μεῖζον ἄρα καὶ τὸ σ, χωρίον τοῦ εκζλημθν, πολυγ: ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, περ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, περ: οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθ, κύκλε χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλε χωρίον. Λέγω ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ, κύκλε χωρίον. εἰ γὰρ δυνατόν ἔστω πρὸς τὸ σ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πεντ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτω τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλε χωρίον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πεντάγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόντι τοῦ σβγε, κύκλε χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πεντ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλ: πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ, κύκλε χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ὡς πρὸς ἔλασσόν τι. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πεντ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον. Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 12. Fig. 3.



ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ σ, χωρίε μεῖζόνος ὄντος τοῦ εζηθ, κύκλε, ἔστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλασσόντι τοῦ αβγδ, κύκλε χωρίον. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλ: οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον. Λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ τ, χω-

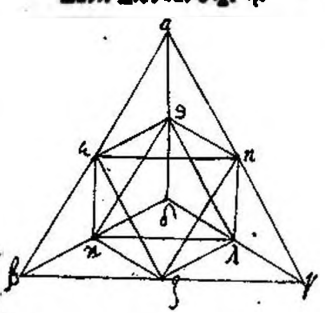
χωρίον τῶ α β γ δ, κύκλω, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν α β γ δ, κύκλον, οὕτως ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, καὶ τῶν ε ς': τῶ ε': ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον· οὕτως ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον, μεῖζον δὲ τὸ σ, τῶ ε ζ η θ, κύκλου, μεῖζων ἄρα καὶ ὁ α β γ δ, κύκλος τῶ τ, χωρίω. ὥστε ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν α β γ δ, κύκλον, οὕτως ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τῶ α β γ δ, κύκλου χωρίον.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Πᾶσα πυραμὶς τριγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμὶς μὲν, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἡ α β γ δ, πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας, καὶ τῇ ἐξῆς. Τετμήθωσαν γὰρ αἱ α β, β γ, γ α, α δ, δ β, δ γ, δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε θ, ε η, η θ, θ κ, κ λ, λ θ, ε κ, κ ζ, ζ η, ζ λ, λ η, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α ε, τῇ ε β, ἡ δὲ α θ, τῇ θ δ, καὶ τῶν β': ἄρα τῶ ς': παράλληλός ἐστιν ἡ ε θ, τῇ β δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θ κ, τῇ α β, παράλληλός ἐστιν, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ θ ε β κ, καὶ κατὰ τὴν λ δ': ἄρα τῶ δ': ἴση ἐστὶν ἡ θ κ, τῇ ε β, ἀλλ' ἡ ε β, τῇ α ε, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ α ε, ἄρα τῇ θ κ, ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ α θ, τῇ θ δ, ἴση. δύο δὴ αἱ α ε, α θ, δυσὶ ταῖς κ θ, θ δ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ τὰ δ': τῶ δ': καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε θ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ θ κ δ, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ ε θ, βάσει τῇ κ δ, ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ α ε θ, τρίγ: τῷ θ κ δ, τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ α θ η, τρίγ: τῷ θ λ δ, τριγ: ἴσόν τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων πιεὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τυπέσιν αἱ ε θ, θ η, περὶ τὰς κ δ, δ λ, εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ε θ η, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κ δ λ, γωνίᾳ· καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ε θ, θ η, δυσὶ ταῖς κ δ, δ λ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ε θ η, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κ δ λ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὴν ἡ: ἄρα τῶ ἡ': τῷ ἐπιπέδων, καὶ βάσις τῶ ε θ η, τριγ: ἡ ε η, βάσει τῶ κ δ λ, ἴση: τῷ κ λ, ἴση, καὶ ὅλον τὸ ἴσόγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσόν τε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ α ε η, τρίγ: τῷ θ κ λ, τριγ: ἴσόν τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, ἴσγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θ κ λ, ἴσγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': τῶ ς': ἐπεὶ ἴσγώνιον τὸ

Eucl. Lib. 12. Fig. 4.



α δ β, παρὰ μίαν τὴν α δ πλευρὰν τὴν α β, ἔκται ἡ ϑ κ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ α δ β, τρίγωνον τῷ δ ϑ κ, τριγώνῳ: τῷ δ ϑ κ, τριγώνῳ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα τὸ α δ β, τρίγωνον τῷ δ ϑ κ, τριγώνῳ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν δ β γ, τρίγωνον τῷ δ κ λ, τριγώνῳ: ὅμοιόν ἐστι καὶ τὸ δὲ α δ γ, τῷ δ ϑ λ, τριγώνῳ: καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ α β, α γ, καὶ τέμνουσί: τὰ ἀ: τῷ ϛφ: περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς κ ϑ, ϑ λ, εἰσὶν, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ κ ϑ λ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ κ ϑ, πρὸς τὴν ϑ λ, ὅμοιον ἄρα τὸ α β γ, τρίγωνον τῷ ϑ κ λ, τριγώνῳ: καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α β γ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ϑ κ λ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἀλλ' αὕτη ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α ε η, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ϑ, σημεῖον. ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α β γ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α ε η, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ϑ, σημεῖον. ἑκατέρα ἄρα τῶν α ε η ϑ, ϑ κ λ δ, πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ α β γ δ, πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ β ζ, τῇ ζ γ, διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν β γ, τῆς ἀ: τὸ δὲ ε β ζ η, παραλληλόγραμμον τοῦ η ζ γ, τριγ: καὶ τῆς μὲν β γ, τῆς παρειλθέντος, ἄρα διπλάσιόν ἐστι τὸ περιεχόμενον πρίσμα ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν β κ ζ, ε ϑ η, τριγώνων δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ε β ζ η, ε β κ ϑ, η ϑ κ ζ, τοῦ περιεχομένου πρίσματι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν η ζ γ, ϑ κ λ, τριγώνων δὲ παραλληλογράμμων τῶν κ ζ γ λ, λ γ η ϑ, ϑ κ ζ η. καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν περισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ε β η ζ, παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ϑ κ, εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ η ζ γ, τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ κ λ ϑ, τρίγωνον, μείζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ α ε η, ϑ κ λ, τριγ: κορυφαὶ δὲ τὰ ϑ, δ, σημεῖα. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ε ζ, ε κ, εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ϑ κ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ζ β, τρίγωνον: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ε β ζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ ϑ, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων, καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ϑ κ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ ϑ, σημ: ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ε β ζ η, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ϑ κ, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ η ζ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ϑ κ λ, τρίγ: ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ ϑ, σημ: ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ϑ κ λ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα, μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ α ε η, ϑ κ λ, τρίγ: κορυφαὶ δὲ τὰ ϑ, δ, σημ: ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

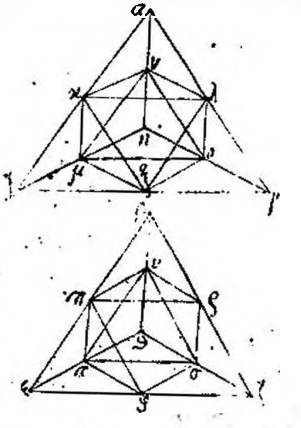
Πρό-

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γεγομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον μεμοιται διῃρημένην, καὶ τοῦτο ἀεὶ γέμηται, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς αβγ, δεζ, κορυφὰς δὲ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ τὰ ἑξῆς, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

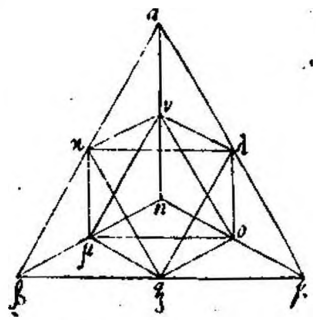
Eucl. Lib. 12. Fig. 5.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βξ, τῇ ξγ, ἡ δὲ αλ, τῇ λγ, παραλληλος ἄρα ἡ ξλ, τῇ αβ, καὶ τῶν β', τῶν ς': καὶ ὅμοιον τὸ αβγ, τριγωνον τῷ λξγ, τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ πρίσμα τῆς δ': τῶν αὐτῶν, καὶ τὸ δεζ, τριγωνον, ὁμοιόν ἐστι τῷ ρφζ, τριγώνῳ, καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν βγ, τῆς γξ, ἡ δὲ εζ, τῆς ζφ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γξ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ζφ, καὶ τῶν ι β': τῶν αὐτῶν, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς βγ, γξ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ αβγ, λξγ, ἀπὸ δὲ τῆς εζ, ζφ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ δεζ, ρφζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβγ, τριγωνον πρὸς τὸ λξγ, τριγωνον, οὕτω τὸ δεζ, πρὸς ρφζ, τρίγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ αβγ, πρὸς τὸ δεζ, οὕτω τὸ λξγ, πρὸς τὸ ρφζ, τρίγ: ἀλλ' ὡς τὸ λξγ, τρίγ: πρὸς τὸ ρφζ, οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ λξγ, τριγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, ὡς ἐφεξῆς δειχθήσεται, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ, τριγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ, τριγωνον πρὸς τὸ δεζ, τρίγ: οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ, τριγων: ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ. καὶ ἐπεὶ, καὶ τῶν ἀνωτέρω, τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι δύο πρίσματα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ κλξβ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ μο, εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ, τρίγωνον ἀπεναντίον

δὲ τὸ ομν, ὕπω τὸ ωρίσμα, ἡ βάσις μὲν τὸ επρφ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ στ, εὐθεῖα, πρὸς τὸ ωρίσμα, ἡ βάσις μὲν τὸ ρφζ, ξίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, σωπεσέτα ἄρα, ὡς τὸ κβξλμο, λξγμνο, πείσματα πρὸς τὸ λξγμνο, πεῖσμα, ὕπω τὸ πεφρστ, ρφζστυ, πείσματα πρὸς τὸ ρφζστυ, πεῖσμα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ κβξλμο, λξγομν, πρὸς τὸ πεφρστ, ρφζστυ, πείσματα, ὕπω τὸ λξγμνο, πεῖσμα πρὸς τὸ ρφζστυ, πεῖσμα. ὡς δὲ τὸ λξγμνο, πεῖσμα, πρὸς τὸ ρφζστυ, πεῖσμα, ὕπως ἐδείχθη ἡ λξγ, βάσις πρὸς τλὴ ρφζ, βάσιν, καὶ ἡ αβγ, βάσις πρὸς τλὴ δεζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα τὸ αθγ, ξίγ: πρὸς τὸ δεζ, ξίγ: ὕπω τὸ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι δύο πείσματα πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι δύο πείσματα. ὁμοίως δὴ καὶ ταῖς γενομέναις πυραμίδας διελοῦμεν, τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον τὰς ομνη, στυθ, ἔσαι ὡς ἡ ομν, βάσις πρὸς τλὴ στυ, βάσιν, ὕπω τὸ ἐν τῇ ομνη, πυραμίδι δύο πείσματα πρὸς τὸ ἐν τῇ στυθ, πυραμίδι δύο πείσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ομν, βάσις πρὸς τλὴ στυ, βάσιν, ὕπως ἡ αβγ, βάσις πρὸς τλὴ δεζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγ, βάσις πρὸς τλὴ δεζ, βάσιν, ὕπω καὶ τὸ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι δύο πείσματα, πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι δύο πείσματα, καὶ τὸ ἐν τῇ ομνη, δύο πείσματα, πρὸς τὸ ἐν τῇ στυθ, πυραμίδι δύο πείσματα, καὶ πάσαρα πρὸς πάσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πεισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς ακλθ, κηδπρυ, πυραμίδων, καὶ παντως ἁπλῶς τῶν ἰσοπλευρων.

Euclid. Lib. 12. Fig. 6.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ λξγ, ξίγ: πρὸς τὸ ρφζ, ξίγ: ὕπω τὸ πείσμα, ἡ βάσις μὲν τὸ λξγ, ξίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πείσμα, ἡ βάσις μὲν τὸ ρφζ, ξίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, ὕπω δεικτέον. Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθω ἀπὸ τῆς η, θ, κάθετοι ἐπὶ τὰ αβγ, δεζ, ξίγ: ἐπίπεδα, ἴσαι δηλ: (διὰ τὸ ἰσοῦψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας) τυγχάνουσαι. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ηγ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν αβγ, ομν, τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους, καὶ τὴν ιζ: τῷ παρελθόντος, τμηθήσονται, καὶ τέτμηται ἡ ηγ, δίχα ὑπὸ τοῦ ομν, ἐπιπέδου καὶ τὸ ο, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ αβγ, ἐπίπεδον, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ομν, ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ θ, κάθετος ἐπὶ τὸ δεζ, ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ στυ, ἐπιπέδου, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν η, θ, κάθετοι ἐπὶ τὰ αβγ, δεζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ομν, στυ, ξίγ: ἐπὶ τὰ αβγ, δεζ, κάθετοι, ἰσοῦψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πείσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ λξγ, ρφζ, ξίγων: ἀπεναντίον δὲ τὰ ομν, στυ, ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν ωρημέ-

νων

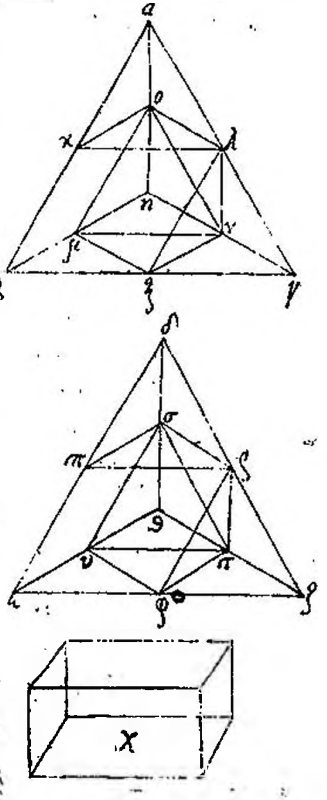
νων πεσμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοῦψῆ τυγχάνοντα, καὶ τὴν λβ′: τὰ αὐτὰ, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ τὸ ἥμισυ ἄρα ἔσται, ὡς ἡ λξγ, βάσις πρὸς τὴν ρφζ, βάσιν, ὥπως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ η, Θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ὥπως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζΘ, πυραμίδα. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ὥπως, ὥστε ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ὥπως ἡ αβγη, πυραμὶς, ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δεζΘ, πυραμίδος στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ χ. καὶ διῃρήσθω ἡ δεζΘ, πυραμὶς, καὶ τὴν γ′: τὰ παρόντος εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά πῃ ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γιγνόμεναι πυραμίδες διῃρήσθωσαν ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως ἃ λειφθῶσί τινες πυραμίδες, ἀπὸ τῆς δεζΘ, πυραμίδος, αἳ εἰσὶν ἐλάσσονες τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ἡ δεζΘ, πυραμὶς τὸ χ, στερεόν. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν, λόγου χάριν, αἱ δπρσ, στυΘ, λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ δεζΘ, πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ στερεοῦ χ. διῃρήσθω καὶ ἡ αβγη, ὁμοίως καὶ ἰσοπλευρῶς τῇ δεζΘ, πυραμίδι: ἔστιν ἄρα καὶ τὴν αὐτὴν, ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζΘ, πυραμίδι, ἀλλ' ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, στερεόν, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, στερεόν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζΘ, πυραμίδι πρίσματα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζΘ, πυραμίδι πρίσματα, μείζων δὲ ἡ αβγη, πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων, μεῖ-

Eucl. Lib. 12. Fig. 7.



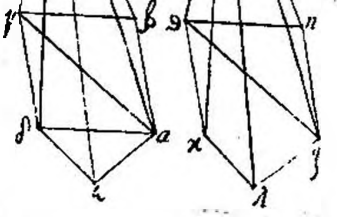
μεῖζον ἄρα ἢ τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὸ δεζθ, πυραμίδι ὁρισμένων, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι οὐδ' ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος στερεόν. Λέγω δὴ, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν· εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ χ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβχη, πυραμίδα, ὡς δὲ τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὡς ἐμπροσθεν ἐν τῇ β'. τῶν παρόντων ἐδείχθη, καὶ ὡς ἄρα ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως ἡ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς πυραμίδος· ἀλλ' ἐδείχθη οὐδὲ πρὸς ἔλαττον, ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἐχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, πολυγώνους ἐχουσαι βάσεις τὰς αβγδε, ζηθκλ. κορυφὰς δὲ τὰ μ, ν, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. Διῃρήσθω γὰρ ἡ αβγδε, βάσις εἰς τὰ αβγ, αγδ, αδε, τρίγωνα, ἡ δὲ ζηθκλ, εἰς τὰ ζηθ, ζθκ, ζκλ, τρίγωνα· καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοῦψεῖς ταῖς, αἷς ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, τρίγωνον οὕτως ἡ αβγμ, πυραμὶς, καὶ τὴν ἀνωτέρω, πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, καὶ συμπεπλεκότα, ὡς τὸ αβγδ, τραπέζιον πρὸς τὸ αγδ, τρίγωνον οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, καὶ τὴν ἐπ' αὐτῶν ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ αγδ, τρίγωνον πρὸς τὸ αδε, τρίγωνον οὕτως ἡ αγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ διὶ ἴσου ἄρα καὶ τὴν κβ' τῇ αὐτῇ, ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ συμπεπλεκότα πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε.

Euclid. Lib. 12. Fig. 8.



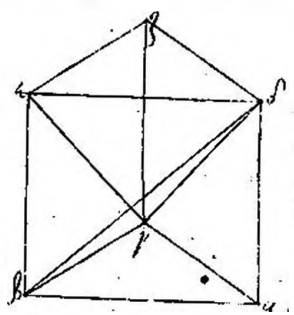
αδε, ὕπως ἡ αβγδε μ, πυραμὶς πρὸς τὴν α δε μ, πυραμίδα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ζηθκλ, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, ὕπω καὶ ἡ ζηθκλν, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμίδα, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὡς ἡ αδε, βάσις τῆς αδε μ, πυραμίδος πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν τῆς ζκλν, πυραμίδος, ὕπως ἡ πυραμὶς πρὸς τὴν πυραμίδα. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, ὕπως ἡ αβγδε μ, πυρ: πρὸς τὴν αδε μ, πυρ: ὡς δὲ ἡ αδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, ὕπως ἡ αδε μ, πυρ: πρὸς τὴν ζκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, ὕπως ἡ αβγδε μ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμ: ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ζκλ, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, ὕπως ἦν καὶ ἡ ζκλν, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, ὕπως ἡ αβγδε μ, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Παντὸς πρίσματος τριγώνους ἔχοντος βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δεζ. Λέγω, ὅτι τὸ αβγδεζ, πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, εγ, γδ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβεδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ βδ, ἴσον ἐστὶ τὸ αβδ, τρίγ: τῷ δβε, τριγώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ καπὶ τὴν ἀνωτέρω πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ εβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸν ἐπίπεδόν περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. πάλιν ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζγβε, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ γε, ἴσον ἐστὶ καπὶ τὸ λδ': τῷ α': τὸ εγζ, τρίγωνον τῷ γβε, τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ βεγ, τρίγ: κορυφὴ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυρ: ἧς βάσις μὲν τὸ εγζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ βγε, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ γεζ, τρίγ: κορυφὴ

Euclid. Lib. 12. Fig. 9.



ρυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ αβγδεζ, πρίσμα, εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δεζ, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ αβγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δεζ.

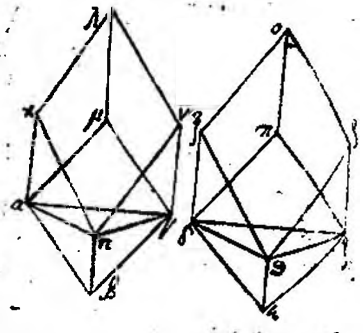
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι χῆμα ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι, καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω ὅτι ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. Συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ βημλ, εθπο, στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ πυραμὶς ἡ αβγη, πυραμίδι τῇ δεζθ, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ ηβγ, τῇ ὑπὸ θεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αβη, τῇ ὑπὸ δεθ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, καὶ ἡ βη, πρὸς τὴν εθ· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ βμ, παραλληλόγρ: τῷ επ, παραλληλογρ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν βν, τῷ εμ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ βη, τῷ εξ, τρία ἄρα παραλληλόγρ: τὰ βμ, κβ, βν, τρισὶ τοῖς επ, εξ, ερ, ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία ταῦτα καὶ τοῦ ηδ': τῶν ά: στερ: τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ὁμοιά τε καὶ ἴσα ἐστι. τὰ δὲ τρία επ, εξ, ερ, τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια. τὰ βημλ, εθπο, ἄρα στερ: ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τὸ πλῆθος περιέχονται. ὅμοιον ἄρα τὸ βημλ, στερ: τῷ εθπο, στερ: τὰ δὲ ὅμοια στερ: παρα-



Euel. Lib. 12. Fig. 10.

ραλληλεπίπ: καὶ τῷ λγ': τὸ παρεληθόντος, ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ βημλ, ἄρα στερ: πρὸς τὸ εθοπ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος βγ, πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον εζ, πλευράν, ὡς δὲ τὸ βημλ, στερ: πρὸς τὸ εθοπ, στερ: οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζϑ, πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, καὶ τὸν γ': τοῦ παραλληλεπιπ. διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπ: τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος, καὶ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἡ αβγη, ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν δεζϑ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ.

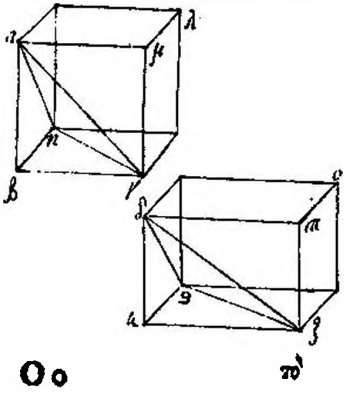
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἐχούσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν, διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ διὰ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ τὸν κ': τοῦ ς': καὶ εἰς ἴσα τὸ πλήθει, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσαι ὡς ἐν ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες, τριγώνους ἐχουσαι βάσεις, πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν τρίγ: βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἐχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

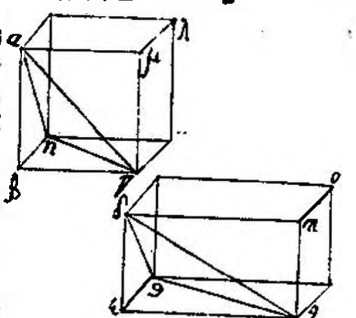
Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. *Euclid. Lib. 12. Fig. 13.*

Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι τριγώνους ἐχουσαι βάσεις τὰς αβγ, δεζ, κορυφαὶ δὲ τὰ η, ϑ, σημεῖα. λέγω, ὅτι τῶν αβγη, δεζϑ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δεζϑ, πυραμ: ὕψος, πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ βημλ, εθοπ, στερεὸν παραλληλεπ: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, πυρ: τῇ δεζϑ, πυρ: καὶ ἔστι τῆς μὲν αβγη, πυραμ: ἑξαπλάσιον τὸ βημλ, στερεὸν, τῆς δὲ δεζϑ,



τὸ επθο, στερεὸν καὶ τλὺ γ': καὶ ζ': τῷ παρόντος, ἴσον ἄρα τὸ βημλ, στερεὸν τῷ εθπο, στερεῷ, καὶ γὰρ τλὺ λδ': τῷ ιά: τῷ ἴσων στερεῶν παραλληλεπ: ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βμ, βάσις πρὸς τὴν επ, βάσιν, οὕτω τὸ τῷ εθπο, ὕψος, πρὸς τὸ τῷ βημλ, στερ: ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ βμ, βάσις πρὸς τὴν επ, βάσιν, οὕτω τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ, τρίγων: πρὸς τὸ δεζ, τρίγ: οὕτω τὸ τῷ εθπο, στερ: ὕψος πρὸς τὸ τῷ βημλ, στερ: ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τῷ εθπο, στερ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῇ τῆς δεζϑ, πυραμίδος ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δεζϑ, πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυραμίδος ὕψος, τῇ αβγη, δεζϑ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλὰ δὴ τῇ αβγη, δεζϑ, πυραμ: ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δεζϑ, πυραμ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, πυραμὶς τῇ δεζϑ, πυρ: τῇ γὰρ αὐτῇ καταστάσει νοείσθω, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δεζϑ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ βμ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ επ, παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ βμ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ επ, οὕτω τὸ τῆς δεζϑ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυραμ: ὕψος, ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς δεζϑ, πυραμ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῷ εθπο, παραλληλεπιπέδῳ ὕψει, τὸ δὲ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῷ βημλ, παραλληλεπιπέδῳ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βμ, βάσις πρὸς τὴν επ, βάσιν, οὕτω τὸ τῷ εθπο, παραλληλεπιπέδῳ ὕψος πρὸς τὸ τῷ βημλ, ὧν δὲ στερ: παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, καὶ τλὼ ῥηθεῖσαν. ἴσον ἄρα τὸ βημλ, στερ: παραλληλεπ: τῷ εθπο, στερ: παραλληλεπ: καὶ ἔστι τῷ μὲν βημλ, ἕκτον μέρος ἡ αβγη, πυραμὶς, τῷ δὲ εθπο, στερεῷ ὁμοίως ἕκτον μέρος ἡ δεζϑ, πυραμὶς· ἡ ἄρα αβγη, πυραμὶς τῇ δεζϑ, πυραμίδι ἴση ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 12. Fig. 12.



Πρότασις Ι': Θεώρημα.

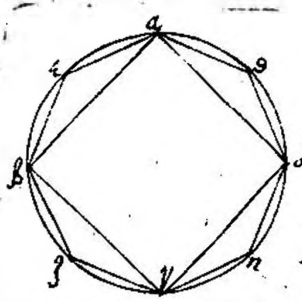
Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ, τῇ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν αβγδ, κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὁ κύλινδρος

τοῦ

τῆ κώνου ἐπιπλασίων ἔσαι· εἰ γὰρ μὴ, ἔσαι ἤτοι μείζων, ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάττων, ἔσω πρότερον μείζων, ἢ ἐπιπλασίων. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ δ, τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ τοῦτο δὴ μείζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ α β γ, κύκλυ, καὶ τὴν δεῖξιν τῆς β'· μὲ παρ· καὶ ἀνεσράφθω ἀπὸ τῆ α β γ δ, τετραγ· τετράγωνα ἰσοῦψῆς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνισάμενον, μείζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ κυλίνδρυ. ἐπειδήπερ καὶ περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον τετράγωνον περιγράφωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγων· ἥμισύ ἐστι τῆ περιγραφομένυ· καὶ ἔστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνισάμενα ἰσοῦψῆ σερεὰ παραλληλεπίπ· τετράγωνα· τὰ ἄρα τετράγωνα, ἐστὶν, ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τῆ α β γ δ, ἀνασαθὲν ἄρα τετράγωνυ τετράγωνα, ἥμισύ ἐστι τῆ ἀνασαθέντος τετράγωνα ἀπὸ τῆ περιγραφέντος τετραγώνυ, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τῆ τετράγωνα, τῆ ἀνασαθέντος ἀπὸ τῆ περιγραφέντος τετραγ· τὸ ἄρα τετράγωνα τὸ ἀνασαθὲν ἀπὸ τῆ α β γ δ, τετραγ· ἰσοῦψὲς τῷ κυλίνδρῳ, μείζόν ἐστι τῆ ἡμίσεως τῆ κυλίνδρου. Τετμήθωσαν αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, περιφέρειαι δίχα καὶ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, καὶ ἕκασον ἄρα τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων μείζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆ καθ' αὐτὸ τμήματος τῆ α β γ δ, κύκλυ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν κατὰ τὴν β': τῆ παράντος· ἀνεσάσθω ἐφ' ἑκάσυ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγ: τετράπλατα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἕκασον ἄρα τῶν ἀνασαθέντων τετραπλάτων μείζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ καθ' αὐτὸ τμήματος τῆ κυλίνδρυ. ἐπειδήπερ ἑαῦ διὰ τῶν ε, ζ, η, θ, σημείων, παραλλήλυς ἀγάγωμεν ταῖς α β, β γ, γ δ, δ α, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν α β, β γ, γ δ, δ α, παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀνασήσωμεν σερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάσου τῶν ἀνασαθέντων ἥμισύ ἐστι τὰ πρίσματα, τὰ ἐπὶ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων· καὶ ἔστι τὰ τῆ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασαθέντων σερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὥσε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων, πρίσματα μείζω ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τῆ κυλίνδρυ τμημάτων. τέμνοντες τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνισαύτις ἐφ' ἑκάσυ τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τῆ κυλίνδρου, ἃ ἔσαι ἐλάττω τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τῆ τριπλασίυ κώνου· λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ μείζόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῆ κώνυ· ἀλλὰ τοῦτο τὸ πρίσμα, καὶ τὸν ζ': τῆ παρ· τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγ· κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα

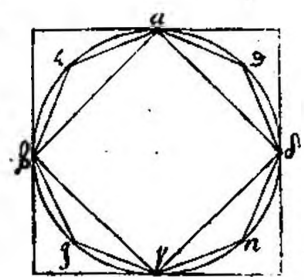
Euel. Lib. 12. Fig. 13.



ἄυτη καὶ τὸ πέρασμα τῆς ζ: τῆ παρ' μείζων ἐστὶ τῆ κώνου, τῆ βάσιν ἔχοντος τὸν αβγδ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων. ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτῆ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται ὁ κύλινδρος τῆ κώνου μείζων, ἢ τριπλασίων.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλασίων. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐλάττων, ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τῆ κυλίνδρε μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν αβγδ κύκλον τετράγ: τὸ αβγδ, καὶ ἔστω μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τῆ αβγδ τετραγ: πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τῆ κώνου. ἐπειδὴ περ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ αβγδ τετραγ: ἥμισυ τῆ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένε, καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων εἰρὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα. ἔσται τὸ ἀναστὰν ἀπὸ τῆ αβγδ τετραγώνε, ἥμισυ τῆ ἀναστάντος ἀπὸ τῆ περιγραφέντος τετραγώνου, φανερὸν ἄλλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ τὸν λβ': τῆ παρέλθ: ὥστε καὶ τὸ τρίτον, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ αβγδ τετράγ: ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀναστάσης ἀπὸ τῆ περιγραφέντος τετραγ: καὶ ἔστω ἡ πυραμὶς μείζων ἐστὶ τῆ κώνε, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτὸν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγδ τετράγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆ κώνε. Τετμήθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν αεβ, βζγ, γηδ, δθα τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τῆ καθ' αὐτὸ τμήματος τῆ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάθωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν αεβ, βζγ, γηδ, δθα τριγ: πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστάντων πυραμίδων, καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τῆ κώνε. Τέμνοντες δὴ πάλιν τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τῆ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τῆ τρίτῳ μέρους τῆ κυλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ τρίτον μέρος τῆ κυλίνδρε, ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμὶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τῆ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ὥστε καὶ τὸ πρίσμα ὅλον, μεῖζόν ἐστι τῆ κυλίνδρου, ἧ βάσις μέν ἐστιν ὁ αβγδ κύκλος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπε-

Euel. Lib. 12. Fig. 14.



ριέχε-

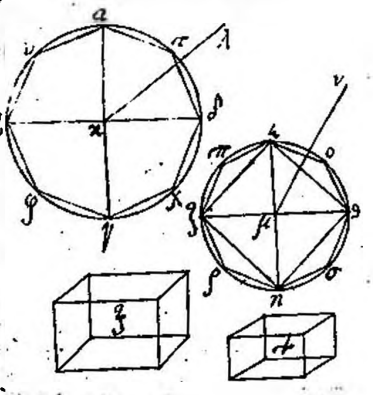
εἴχηται γὰρ ὑπ' αὐτῆς, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων, οὐκ ἄρα μείζων, ἀλλὰ ἴσος, ὡς ἐδείχθη, ὥστε ὁ κῶνος, ἕβδομον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι. ἄξονες δὲ οἱ κ λ, μ ν, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ α γ, ε η. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς τὸν ε ν. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, οὕτως ὁ α λ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ε ν, κώνου στερεόν, ἢ πρὸς μεῖζον, ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ᾧ ἔλασσον τὸ ξ, στερεὸν, τοῦτο τῷ ε ν, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ψ, στερεὸν, ὁ ε ν, κῶνος ἄρα ἴσός ἐστι τοῖς ξ, ψ, στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ε ζ η θ, κύκλον πολύγωνον: τὸ ε ζ η θ, ἄρα πολύγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ ε ζ η θ, πολυγώνου: πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. ἐπεὶ διπλασιάσαντες τὰς περιγραφομένας περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς, ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, κατὰ γὰρ τὸ ε': τοῦ παρόντος, τῶν ἀπολήγοντες, τῶν βάσεις, ἐλάττων δ' ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμ: ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ζ η θ, πολύγωνον: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήθωσαν αἱ ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, περιφέρειαι, καὶ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ ο, ο ε, ε π, π ζ, ζ ρ, ρ η, η σ, σ θ, ἕκαστον ἄρα τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ, τριγώνων, μείζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάθω ἐφ' ἑκάστου τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ, τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστᾶσῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύοντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες, ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ τῶν ἐλασσονα τοῦ ψ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν θ ο ε, ε π ζ, ζ ρ η, η σ θ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ θ ο ε π ζ ρ η σ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν

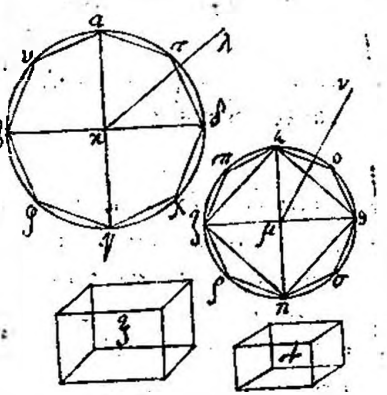
Euclid. Lib. 12. Fig. 15.



α β γ δ,

αβγδ, κύκλον τῆ θοεπζρησ, πολυγώνῳ ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολυγώνῳ τῷ δταυβφγχ, πολυγώνῳ δὲ ἐπεσάδια ἐπ' αὐτῆ πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῆ αλμνῳ. ἐπεὶ οὖν (1) ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτω τὸ δταυβφγχ, πολυγώνου πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολυγώνου· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος (2) πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον· καὶ ὡς ἄρα, ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτω τὸ δταυβφγχ, πολυγώνου καὶ τὸν αὐτὸν, πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολυγώνου· ὡς δὲ ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερεόν· καὶ δὴ καὶ ὡς τὸ δταυβφγχ, πολύγωνον πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δταυβφγχ, πολύγωνος κορυφὴ δὲ τὸ χ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δταυβφγχ, πολύγωνος κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, πολύγωνος κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ εν, κώνῳ πυραμίδα· μείζων δὲ ὁ αλ, κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερεὸν τῆς ἐν τῷ εν, κώνῳ πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἔστιν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ ξ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αλ, κῶνον· ἀλλ' ὡς τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αλ, κῶνον, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ, πρὸς ἔλασσον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸν εν, κῶνον· ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος

Euel. Lib. 12. Fig. 16.



πρὸς

(1) Κατὰ κβ τοῦ ε΄ τοῦ παρόντος.

(2) Κατὰ τὸν β΄ τοῦ αὐτοῦ.

πρὸς τὸν κῶνον, ἔστι καὶ ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ξιπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου, καὶ τὸν ἀνωτέρω, καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηϑ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοῦψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι. οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὰ ἑξῆς.

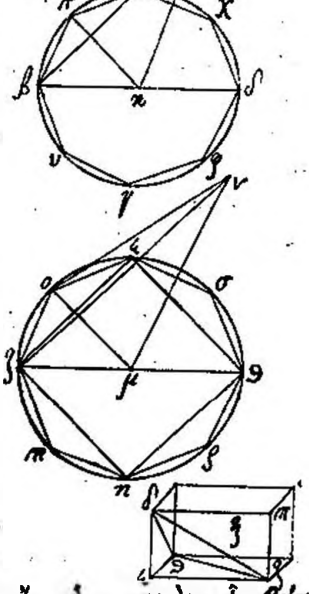
Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι οἱ ξιπλασίονι λόγῳ ἐσὶ τῆς ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρου.

Ἐ̓σωσαν ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ αβγδ, εζηϑ, κύκλοι, διάμετροι δὲ τῆς βάσεως αἱ βδ, ζϑ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων οἱ κλ, μν. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσεις μὲν ὁ εζηϑ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζϑ. εἰ γὰρ μή, ἕξει πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηϑν, κώνου στερεόν, ἢ ξιπλασίονα, ἢ πρὸς μεῖζον.

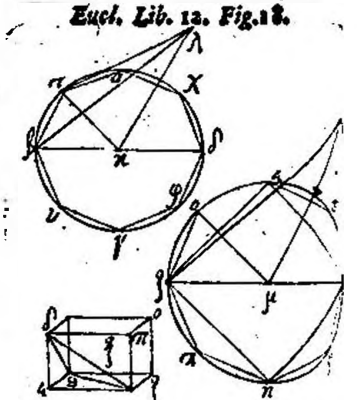
Eucl. Lib. 12. Fig. 17.

Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηϑ, κύκλον τετράγωνον τὸ εζηϑ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ εζηϑ, κύκλου. καὶ ἀνεσάδω ἀπὸ τοῦ εζηϑ, τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς, μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ εζ, ζη, ηϑ, ϑε, περιφέρειαι δίχα, καὶ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εο, οζ, ζπ, πη, ηρ, ρϑ, ϑσ, σε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν εο, ζπ, ηρ, ϑσ, σε, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ εζηϑ, κύκλου. καὶ ἀνεσάδω ἐφ' ἑκάστου τῶν εο, ζπ, ηρ, ϑσ, εζ, τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστάντων πυραμίδων, μεῖζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ εζηϑν, κῶνος τοῦ ξ, στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν εο, οζ, ζπ, πη, ηρ, ρϑ, ϑσ, σε, λοιπὰ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρϑσ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγδ, τὴν εοζπηρϑσ, πολυγ: ὅμοιον καὶ ὁμοίως



ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ α τ β υ γ φ δ χ· καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῆς πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῇ κώνῳ. καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α τ β υ γ φ δ χ, πολύγωνον· κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, εἰ ξίγωνον ἔστω τὸ λ β τ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ε ο ζ π ρ η θ σ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, εἰ ξίγωνον ἔστω τὸ ν ζ ο, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κ τ, μ ο. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ α β γ δ λ, κώνος τῷ ε ζ η θ ν, κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ, οὕτως ὁ κ λ, ἄξων πρὸς τὸν μ ν, ἄξονα, ὡς δὲ ἡ β δ, πρὸς τὴν ζ θ, οὕτως ἡ β κ, πρὸς τὴν ζ μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ β κ, πρὸς τὴν ζ μ, οὕτως ἡ κ λ, πρὸς τὴν μ ν, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ β κ, πρὸς τὴν κ λ, οὕτως ἡ ζ μ, πρὸς τὴν μ ν, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ β κ λ, ζ μ ν, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ β κ λ, ζ μ ν, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ β κ λ, ξίγωνον τῷ ζ μ ν, ξιγώνῳ: πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ β κ, πρὸς τὴν κ τ, οὕτως ἡ ζ μ, πρὸς τὴν μ ο, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ β κ τ, ζ μ ο. ἐπειδήπερ ἓν μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ β κ τ, τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζ μ ο, γωνία τῶν πρὸς τῷ μ, κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ β κ τ, ξίγων: τῷ ζ μ ο, ξιγ: πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ β κ, πρὸς τὴν κ λ, οὕτως ἡ ζ μ, πρὸς τὴν μ ν, ἴση δὲ ἡ μὲν β κ, τῇ κ τ, ἡ δὲ ζ μ, τῇ μ ο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κ τ, πρὸς τὴν κ λ, οὕτως ἡ μ ο, πρὸς τὴν μ ν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τ κ λ, ο μ ν, (ὀρθαὶ γὰρ) αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ λ κ τ, ξίγ: τῷ ν μ ο, ξιγ: καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν β κ λ, ζ μ ν, ξιγώνων, ἔστιν ὡς ἡ λ β, πρὸς τὴν β κ, οὕτως ἡ ν ζ, πρὸς τὴν ζ μ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν β κ τ, ζ μ ο, ἔστιν ὡς ἡ κ β, πρὸς τὴν β τ, οὕτως ἡ μ ζ, πρὸς τὴν ζ ο, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ β λ, πρὸς τὴν β τ, οὕτως ἡ ν ζ, πρὸς τὴν ζ ο. πάλιν ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν λ τ κ, ν ο μ, ξιγ: ἔστιν ὡς ἡ λ τ, πρὸς τὴν τ κ, ἡ ν ο, πρὸς τὴν ο μ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν κ β τ, ο μ ζ, ξιγ: ἔστιν ὡς ἡ κ τ, πρὸς τὴν τ β, οὕτως ἡ μ ο, πρὸς τὴν ο ζ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ λ τ, πρὸς τὴν τ β, οὕτως ἡ ν ο, πρὸς τὴν ο ζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ λ β, πρὸς τὴν β τ, οὕτως ἡ ν ζ, πρὸς τὴν ζ ο. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τ λ, πρὸς τὴν β τ, οὕτως ἡ ν ο, πρὸς τὴν ο ζ, τῶν λ τ β, ν ο ζ, ἄρα ξιγώνων: ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ λ τ β, ν ο ζ, ξίγ: ὥστε καὶ ὅμοια, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ β κ τ, ξίγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ζ μ ο, ξίγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται, ἴσων τὸ πλῆθος· αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ ξιγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν ξιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἡ

Eucl. Lib. 12. Fig. 18.



ἄρα

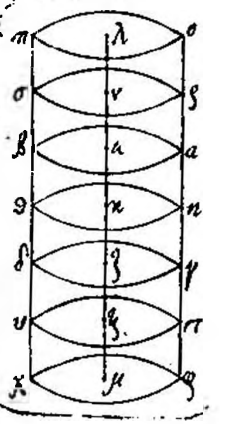
ἄρα βκτλ, πυραμὶς, πρὸς τὴν ζμον, πυραμίδα ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν α, χ, δ, φ, γ, υ, διὰ τῆς ἐπὶ τὸ κ, ἀπὸ τῶν ε, σ, θ, ρ, η, π, ἐπὶ τὸ μ, καὶ ὠισαύτως ἐπὶ τῶν ξιγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις. δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοπαγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοπαγῆ πυραμίδα ξιπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ βκ, ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ζμ, ὁμόλογον πλευρὰν· τοῦτο δὲ ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ τῶν ἡγουμένων πρὸς μίαν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βκτλ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζμον, πυραμ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγδχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ εοζπρθσ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. ὥστε καὶ ἡ ὅλη πυραμὶς πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ, κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸ ξ, στερ: ξιπλασίονα λόγον ἔχον, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδλ, κῶνος, πρὸς τὸ ξ, στερ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς αβυγφδχλ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα εοζπρθσν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ αβγδλ, κῶνος, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ αβυγφδχλ, πυραμίδα, οὕτως τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν εοζπρθσν, πυραμίδα, μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτὴν, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερ: τῆς εοζπρθσν, πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθν, κώνου στερεὸν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ εζηθν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδλ, κῶνος οὐδὲ πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζθην, κώνου στερεὸν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, ἐχέτω δηλονότι πρότερον ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου, τὸ ξ, ξιπλασίονα λόγον, ἀνάπαλιν ἄρα τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ὥστε ὡς τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ, κῶνον, οὕτως ὁ εζηθν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν, καὶ ὁ εζηθν, κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ξιπλασίονα λόγον ἔχει. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ αβγδλ, ἄρα κῶνος πρὸς τὸν εζηθν, κῶνον ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· ξιπλ: γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ, καὶ ἰσοῦψὴς αὐτῷ. ἐδείχθη γὰρ, ἐν τῷ ι: τοῦ παρόντος, πᾶς κῶνος κυλίνδρου ξίτου μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον ξιπλασίονα

λόγον ἔχει, ὅπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζϑ. Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ αδ, ἐπιπέδῳ τῷ ηϑ, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς αβ, γδ, καὶ συμβαλλέτω τῷ εζ, ἄξονι κατὰ τὸ κ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ βη, κύλινδρος πρὸς τὸν ηδ, κύλινδρον οὕτως ὁ εκ, ἄξων πρὸς τὸν κζ, ἄξονα. Ἐκβεβλήσθω ὁ εζ, ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ εἰλήφθω τῷ μὲν εκ, ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ εν, νλ, τῷ δὲ κζ, ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ζξ, ξμ· καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, σημείων, ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς αβ, γδ· καὶ γενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, ἐπιπέδοις περὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν τὰ λ, ν, ξ, μ, κύκλοι, οἱ ο π, ρ σ, τ υ, φ χ, ἴσοι τοῖς αβ, γδ· καὶ γενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ π ρ, ρ β, δ τ, τ χ· καὶ ἐπεὶ οἱ λ ν, ν ε, ε κ, ἄξονες, ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ κεῖται τὸν ιά: ἄρα τὸ παρόντος: οἱ π ρ, ρ β, β η, κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ π ρ, ρ β, β η, κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ λ ν, ν ε, ε κ, ἄξονες ἴσοι ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ π ρ, ρ β, β η, κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν λ ν, ν ε, ε κ, τῷ πλήθει τῶν π ρ, ρ β, β η, ἐσαπλασίων ἄρα ὁ κλ, ἄξων τοῦ εκ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ πη, κύλινδρος τοῦ βη, κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐσαπλασίων ἐστὶν ὁ μκ, ἄξων τοῦ κζ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶν καὶ ὁ χη, κύλινδρος τοῦ ηδ, κυλίνδρου· καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κλ, ἄξων τῷ κμ, ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ πη, κύλινδρος τῷ χη, κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν εκ, κζ, κυλίνδρων δὲ τῶν βη, ηδ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν εκ, ἄξονος, καὶ τοῦ βη, κυλίνδρου, ὅ, τε κλ, ἄξων καὶ ὁ πη, κύλινδρος, τοῦ δὲ κζ, ἄξονος καὶ ηδ, κυλίνδρου, ὅ, τε κμ, ἄξων, καὶ ὁ ηχ, κύλινδρος· καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ κλ, ἄξων τοῦ κμ, ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ πη, κύλινδρος τοῦ ηχ, κυλίνδρου· καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εκ, ἄξων πρὸς τὸν κζ, ἄξονα, οὕτως ὁ βη, κύλινδρος πρὸς τὸν ηδ, κύλινδρον· καὶ τὸν ε· ὅρον τοῦ ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Euc.Lib.12.Fig.19.

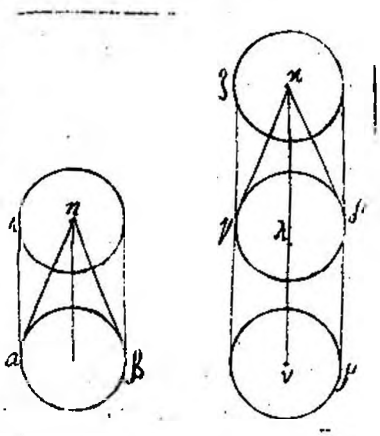
Πρό-

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κυλίνδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν α β, γ δ, κύλινδροι οἱ ζ δ, ε β. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ ε β, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ δ, κύλινδρος οὕτως ὁ η θ, ἄξων πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα. Ἐκβεβλήθω γὰρ ὁ κ λ, ἄξων ἐπὶ τὸ ν, σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ η θ, ἄξονι ἴσος ὁ λ ν, ἄξων. καὶ περὶ ἄξονα τὸν λ ν, κύλινδρος νενοήσθω ὁ γ μ. Ἐπεὶ οὖν οἱ ε β, γ μ, κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις ἀλλήλαις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ε β, γ μ, κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ζ μ, ἐπίπεδος τέτμηται τῷ γ δ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ τὴν αὐτερῶ, οὕτως ὁ γ μ, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ δ, κύλινδρον, οὕτως ὁ λ ν, ἄξων, πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα. Ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν γ μ, κύλινδρος τῷ ε β, κυλίνδρῳ· ὁ δὲ λ ν, ἄξων τῷ η θ, ἄξονι. ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ ε β, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ δ, κύλινδρον, οὕτως ὁ η θ, ἄξων πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ε β, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ δ, κύλινδρον, οὕτως ὁ α β κ, κῶνος πρὸς τὸν γ δ κ, κῶνον, ἐπιπλάσιοι γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων, καὶ τὸν ἴσ τῶ παρόντι· καὶ ὡς ἄρα ὁ η θ, ἄξων πρὸς τὸν κ λ, ἄξονα, οὕτως ὁ α β κ, κῶνος πρὸς τὸν γ δ κ, κῶνον, καὶ ὁ ε β, κύλινδρος πρὸς τὸν δ ζ, κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 12. Fig. 20.



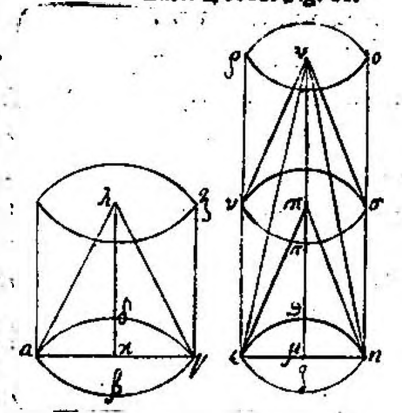
Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοί εἰσιν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ α γ, ε η, ἄξονες δὲ οἱ κ λ, μ ν, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων· καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ α ξ, ε ο, κύλινδροι. Λέγω, ὅτι τῶν α ξ, ε ο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ α β γ δ βάσις πρὸς τὴν ε ζ η θ, βάσιν, οὕτως τὸ μ ν, ὕψος πρὸς τὸ λ κ, ὕψος. τὸ γὰρ λ κ, ὕψος τῷ μ ν, ὕψει, ἤτοι ἴσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα καὶ ὁ α ξ, κύλινδρος τῷ ε ο, κυλίνδρῳ ἴσος, καὶ τὴν

εἰσὶ τῶν παρ' οἷς κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴση ἄρα ἡ αβγδ, βάσις τῇ εζηθ, βάσει, ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν. ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος.

Euel. Lib. 12. Fig. 21.



Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ κλ, ὕψος τῷ μν, ἴσον, ἀλλὰ μεῖζον. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μν, ὕψους τῷ κλ, ἴσον τὸ πμ· καὶ κείσθω τῷ κλ, ἴσον τὸ πμ· καὶ διὰ τοῦ π, σημείου, τετμήσθω ὁ εο, κύλινδρος τῷ τυσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῷ εζηθ, ρο, κύκλων. καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ εζηθ, κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ πμ, κυλίνδρου νενοήσθω ὁ εσ. καὶ ἐπεὶ ἴσός ἐστιν ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εο, κυλίνδρῳ· ἄλλος δέ τις ὁ εσ, κύλινδρος ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον οὕτως ὁ εο, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον· ἀλλ' ὡς μὲν ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, οὕτως ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ αξ, εσ, κύλινδροι· ὡς δὲ εο, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ πμ, ὕψος, ὁ γὰρ εο, κύλινδρος ἐπιπέδῳ πέτμηται τῷ υτσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ πμ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ πμ, ὕψος τῷ κλ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος. τῶν ἄρα αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ἀλλὰ δὴ τῶν αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσός ἐστιν ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εο, κυλίνδρῳ· τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ κλ, τῷ μπ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ μπ, ὕψος· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ βάσις πρὸς βάσιν, οὕτω ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, ὡς δὲ τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ μπ, οὕτως ὁ εο, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον οὕτως ὁ εο, πρὸς τὸν αὐτὸν εσ, ἴσος ἄρα ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εσ, κυλίνδρῳ· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

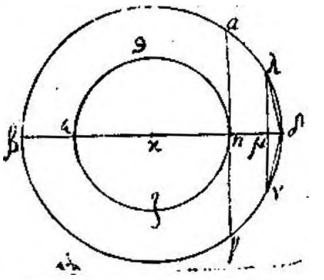
Πρό-

Πρότασις Ις': Πρόβλημα.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι, οἱ αβγδ, εζηθ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ κ. Δεῖδὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν αβγδ, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς εζηθ, κύκλου. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ, κέντρου διάμετρος ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ η, σημείου τῇ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ γ· ἡ αγ, ἄρα ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου. Τέμνοντες δὴ τὴν βα δ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τοῦ ἡμίσειαν αὖτις δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς αδ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ λδ· καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἐπὶ τοῦ βδ, κάθετος ἤχθω ἡ λμ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λδ, δν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ λδ, τῇ δν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ λν, τῇ αγ, ἡ δὲ αγ, ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου, ἡ λν, ἄρα καὶ ἐφάπτεται τοῦ αὐτοῦ κύκλου, πολλῷ ἄρα αἱ δλ, δν, οὐκ ἐφάπτονται τοῦ εζηθ, κύκλου. ἐὰν τῇ λδ, εὐθείᾳ ἴσας καὶ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου, τοῦ εζηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 12. Fig. 22.



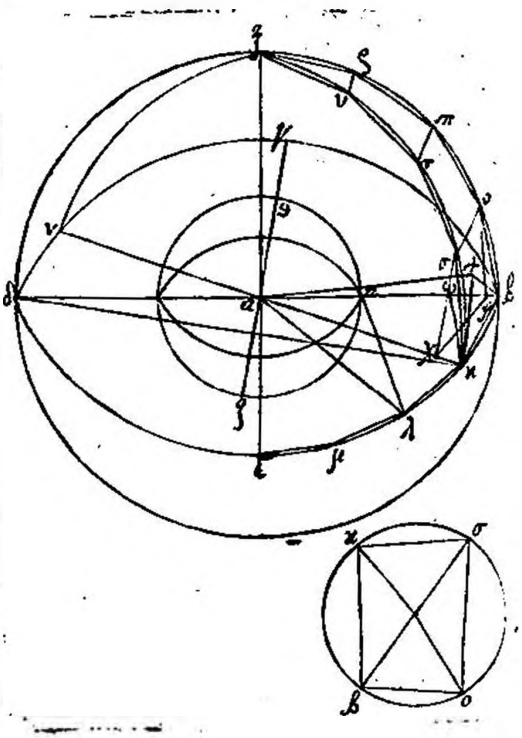
Πρότασις ΙΖ': Πρόβλημα.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ α, δεῖδὴ εἰς τὴν μείζονα στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· καὶ κατὰ τὸν ιδ': ὅρον τοῦ παρὰ τὸ θ: αἱ δὴ τομαὶ αὐτῶν κύκλοι ἔσονται, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου, καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ στερεὰ σφαῖρα. ὥστε καθ' οἵας δὴ θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον, ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον, καὶ φανερὸν, ὅτι καὶ μέγιστον. ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμι-

ἡμικυκλίου διάμετρος, δηλαδὴ ἡ τοῦ κύκλου, κατὰ τὸ ιε΄ τοῦ γ΄· μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὸν σφαῖραν διαγομένων ἀνίσων. ἔστω δὲ ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ βγδε, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι ὁ ζηθι, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ βδ, γε· καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν βγδε, ζηθι, εἰς τὸν μείζονα τῶν τὸν βγδε, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, καὶ τὴν ἀνωτέρω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, οὗ ζηθι, αἱ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ βε, περιφερείᾳ αἱ βκ, κλ, λμ, με, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κα, διήχθω ἐπὶ τὸ ν· καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ α σημείου τῷ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ αξ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ξ· καὶ διὰ τῶν αξ, καὶ ἑκατέρας τῶν βδ, κν, ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὲ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιγίστους κύκλους· ποιείτωσαν, ὧν τὰ ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν βδ, κν, διαμέτρων, τὰ βξδ, κξν· καὶ ἐπεὶ ἡ ξα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα, καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιλαμβανομένην γωνίαν· τὰ διὰ τῶν αξ, ἐπίπεδα, ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ βξδ, κξν, ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ξδ, κξν, ἡμικύκλια, ἐπὶ ἴσων γάρ εἰσι διαμέτρων τῶν βδ, κν, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ βε, βξ, περιφέρεια ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ βε, περιφερείᾳ πλευραὶ τῷ πολυγώνῳ, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τῇ βξ, κξ, περιφερείαις, ἴσαι καὶ αἱ βκ, κλ, λμ, με, ἀλλήλαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ βο, οπ, πρ, ρξ· κσ, στ, τυ, υξ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ σο, τπ, υρ, καὶ ἀπὸ τῶν ο, σ, ἐπὶ τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ καὶ τὴν λή. τοῦ παρειλθ. ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων, τὰς βδ, κν, ἐπειδήπερ καὶ τὸ βξδ, κξν, ἐπίπεδα, ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον· πεπτώκασι, καὶ ἔστωσαν αἱ οφ, σχ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φχ· καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις

Euclid. Lib. 12. Fig. 23.



κλίοις

κλίοις τοῖς βξ δ, κξ ν, ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν, αἱ βο, κσ, καὶ καθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ οφ, σχ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν οφ, τῇ σχ, ἡ δὲ βφ, τῇ κχ, ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βα, ὅλῃ τῇ κα, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ φα, λοιπῇ τῇ χα, ἐστὶν ἴση. ἄρα καὶ ὡς ἡ βφ, πρὸς τὴν φα, οὕτως ἡ κχ, πρὸς τὴν χα, καὶ κατὰ τλῆ β': ἄρα τὸ ς': παράλληλός ἐστιν ἡ φχ, τῇ κβ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν οφ, σχ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τὸ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστί, καὶ κατὰ τλῆ ς': τῷ δ: στερεὸν ἡ οφ, τῇ σχ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ φχ, σο, ἄρα ἴσαί εἰσι καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ χφ, τῇ σο, ἀλλ' ἡ χφ, τῇ κβ, καὶ κατὰ τλῆ θ': τὸ παρεμ: ἄρα καὶ ἡ σο, τῇ κβ, παράλληλός ἐστι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βο, κσ, τὸ κβσο, ἄρα τετράπλευρον. καὶ κατὰ τλῆ ζ': τὸ αὐτὸ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐπειδὴ περ ἑκάτεραι τῶν ὑπὸ δύο αἱρέσεις παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη αἱρέσις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἑκατέρα τῶν σοπτ, τπρυ, τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τλῆ β': τὸ αὐτὸ, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν ο, σ, π, τ, ρ, υ, σημείων ἐπὶ τὸ α, ἐπιζευγνυμένας αἱρέσεις, συστήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολυέδρον, μπαξὺ τῶν βξ, κξ, πεμφερειῶν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ κβοσ, σοπτ, τπρυ, τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἀφ' ἑκάστης τῶν κλ, λμ, με, πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς κβ, τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἓξ τῶν περιμορίων, καὶ ἐπὶ τῷ λοιπῷ ἡμισφαιρίῳ, συστήσεταί τι χῆμα πολυέδρον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις τὰ εἰρημένα τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον, καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον ἐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστὶν ὁ ζηθι, κύκλος. καὶ καὶ τὴν ι ἀ: τῷ αὐτῷ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὸ τῶν κβοσ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ αψ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ καὶ τὸ ψ, σημεῖον· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βψ, ψκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αψ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τῶν κβοσ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα, καὶ τὸν γ': ὄρον τῶν ι ἀ: τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αψ, καὶ πρὸς ἑκατέραν ἄρα τῶν βψ, ψκ, ὀρθή ἐστιν ἡ αὐτή. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ ακ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς ακ, καὶ κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς αψ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, ψα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ακ, ψα, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν αβ, ψα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βψ, ψα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ακ, ψα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κψ, ψα, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ψα, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βψ, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ψκ, ἴσον ἐστὶν, ἴση ἡ βψ, τῇ ψκ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ψ, ἐπὶ τὰ οσ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν βψ, ψκ, ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ψ, καὶ διαστήματι τῷ τῶν ψβ, ψκ, γραφόμενος κύκλος, ἥξει καὶ διὰ τῶν ο, σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ κβοσ, τετράπλευρον, καὶ

ἐπεὶ

ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ κβ, τῆς χφ, ἴση δὲ ἡ χφ, τῇ σο, μείζων ἄρα ἡ βκ, τῆς σο, ἴση δὲ ἡ κβ, ἑκατέρᾳ τῶν κσ, βο, τῇ ἑκατέρᾳ ἄρα τῶν κσ, βο, τῆς σο, μείζων ἐστίν. τῇ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ κβοσ, καὶ ἴσαι αἱ κβ, βο, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ ἐστὶν ἡ βψ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μείζων ἐστίν, ἢ διπλάσιον. τῇ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου ἐπὶ τὴν βφδ, κάθετος ἡ κω. τῇ ἐπεὶ ἡ βδ, τῆς δω, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δω, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, καὶ τὴν α: τοῦ ς: ἀναγεγράφωσαν δὴ ἀπὸ τῆς βω, τετράγωνον, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ἐπὶ τῆς ωδ, παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, τοῦ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἔτι τῆς κδ, ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν δβ, βω, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βκ, καὶ τὴν ιζ: τοῦ ς: καὶ γὰρ τὸ β: πόρισμ: τῆς η: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ κβ, πρὸς τὴν βω, ἡ γὰρ πρὸς τῷ κ, γωνία ἐν ἡμικυκλ: ὀρθή ἐστι, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς κω, καὶ τὸ α: πόρισμ: τῆς αὐτῆς, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κω, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσ: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσ: μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κω, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ κα, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τῷ ἀπὸ τῆς κα, καὶ ἔστι καὶ τὸν μζ: τοῦ α: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς βα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῆς κω, ωα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς βψ, ψα, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῆς κω, ωα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς κω, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ωα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ψα, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αω, πολλῷ ἄρα ἡ αψ, μείζων ἐστὶ τῆς αη, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αψ, ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ αη, ἐπὶ τὸ τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπιφάνειαν. ὥστε τὸ πολύεδρον τὴν ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας καὶ τὸ τῆς ἐπιφανείας. Ἄλλως.

Δεικτέον δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ αψ, τῆς αη. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ η, τῇ αη, πρὸς ὀρθὰς ἡ ηλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αλ. τέμνοντες δὴ τὸ εβ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέ τινα περιφέρειαν, ἥτις, ἔστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ βγ δ', κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ηλ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ κβ, περιφέρεια, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ κβ, εὐθείας τῆς ηλ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ βκσο, τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ βο, βκ, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βψκ, γωνία, μείζων ἄρα ἡ βκ, τῆς βψ. ἀλλὰ τῆς βκ, ἡ ηλ, πολλῷ ἄρα ἡ ηλ, μείζων τῆς βψ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηλ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ αβ, ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αλ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αλ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηλ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αη, ηλ, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς βψ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηλ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψα, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αη, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τὴν ἐν τῇ βγδε, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ βγδε, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆς βγδ, σφαίρας διάμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς πυραμίδας ἰσοπλεύρους, καὶ ὁμοπαγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβος, πρόπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιαγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ αβ, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ α, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κύκλου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὴ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον α, σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοιαγῆ πυραμίδα τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ, τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ α, στερεὸν πολύεδρον, πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἥπερ ἡ βδ, διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

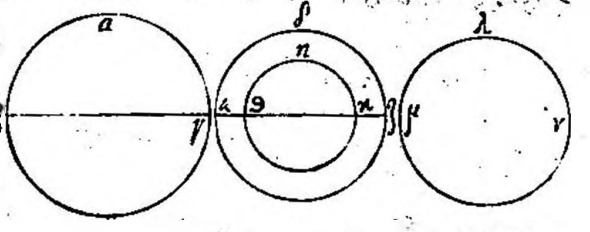
Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ αβγ, δεζ, διάμετροι δὲ αἱ βγ, εζ. Λέγω, ὅτι ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, σφαῖραν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰγὰρ μή, ἕξει ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας, τριπλασ: λόγον, ἢ πρὸς μείζονα, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. Ἐχέτω δὴ πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ηθκ, καὶ νενοήσθω ἡ δεζ, σφαῖρα τῇ ηθκ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν δεζ, στερεὸν πολύεδρον, μὴ ἁπτὸν τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ηθκ, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὴν αβγ, τῇ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον, τὸ ἄρα ἐν τῇ αβγ, στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, ἔχει δὲ καὶ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ, οὕτω τὸ ἐν τῇ αβγ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ηθκ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, μείζων δὲ ἡ αβγ, τῆς ἐν αὐτῇ πολυέδρου, μείζων

ζων ἄρα καὶ ἡ ΘΗΚ, σφαῖρα τῆ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ πολυέδρῳ, ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτῆ. οὐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάττονα τῆς δεζ, σφαῖραν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, διάμετρος πρὸς τὴν εζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, ξιπλασ. λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰγὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν λμν, ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, διάμετρος πρὸς τὴν βγ, διάμετρον, ὡς δὲ ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν, οὕτως ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς αβγ, σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. ἐπειδὴ περ μείζων ἐστὶν ἡ λμν, τῆς δεζ, καὶ ἡ δεζ, ἄρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, σφαῖραν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα, ἀλλ' οὐδὲ πρὸς ἐλάττονα, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἡ αβγ, ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 12. Fig. 24.



Τέλος τῆ Δωδεκάτῃ τῆ τῆ Εὐκλείδου Στοιχείων.

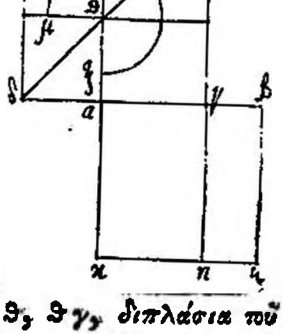
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ: ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΡΙΤΟΥ, ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ἐαν᾽ ἐυθεῖα γραμμὴ ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ ἐπιβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ αγ, εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ κείσθω τῆς αβ, ἡμίσεια ἡ αε. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς αε. Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν αβ, γδ, τετράγωνα, τὰ αζ, δζ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ δζ, τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζγ, ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, σημεῖον. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ζθ, ἴσον ἄρα τὸ γε, τῷ ζθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς αδ, ἴση δὲ ἡ μὲν βα, τῇ κα, ἡ δὲ αδ, τῇ αθ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κα, τῆς αθ, ὡς δὲ ἡ κα, πρὸς τὴν αθ, οὕτω τὸ γκ, πρὸς τὸ γθ, διπλάσιον ἄρα τὸ κγ, τοῦ γθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θγ, διπλάσια τοῦ γθ. ἴσον ἄρα τὸ κγ, τοῖς λθ, γθ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ γε, τῷ ζθ, ἴσον, ὅλον ἄρα τὸ αε, πεῖται: ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, πεῖαπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τουτέστι τὸ αε, τοῦ δθ, ἴσον. δὲ τὸ αε, τῷ μνξ, γνώμονι, καὶ ὁ μνξ, γνώμων πεῖαπλάσιός ἐστι τοῦ δθ, ὅλου ἄρα τὸ δζ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ δθ, καὶ ἔστι τὸ μὲν δζ, τὸ ἀπὸ

Eucl. Lib. 13. Fig. 1.



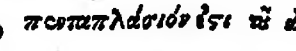
τῆς γδ, τὸ δὲ δθ, τὸ ἀπὸ δα, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τί;

Ἀνάλυσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου διὰ τοῦ ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τοῦ ἀκολούθων, ἐπὶ τέλει τοῦ ζητουμένου καταλῆψιν.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.



Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, ἴση ἡ αδ. Λέγω, ὅτι τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ δα. ἐπεὶ γὰρ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῆς γα, αδ, καὶ τοῦ δ': τοῦ β': μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν γα, αδ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν γα, αδ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, διπλόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ γα, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, καὶ τοῦ α': τοῦ ς': ἴσόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, διπλῆ γὰρ ἡ βα, τῆς αδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, καὶ τῶν ιζ': τοῦ ς': ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τῶν β': τοῦ β': ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἐστὶ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τῶν δ': τοῦ ς': διπλῆ γὰρ ἡ αβ, τῆς αδ.

Σύνθεσις, τοῦ αὐτοῦ.

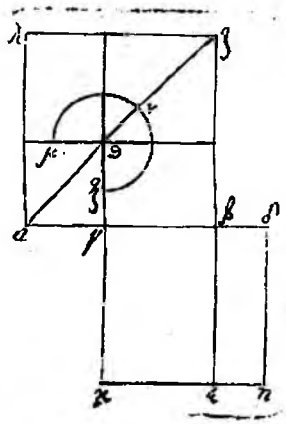
Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τῶν θ': τοῦ β': ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἐστὶ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὥστε καὶ τοῦ δ': τοῦ β': τὸ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πεντάπλάσιον δυνάται, τῆς διπλασίας τὸ εἰρημένου τμήματος ἄκρου καὶ μέσου λόγου τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν μέρος ἐστὶ τῆς ὅλης ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, τμήματος ἑαυτῆς τὸ αγ, πεντάπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ αγ, διπλῆ ἔστω ἡ γδ. Λέγω, ὅτι τῆς γδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν αβ, γδ, τετράγωνα τὰ αζ, γη, καὶ κατεγεγράφθω ἐν τῇ αζ, τὸ χῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζβ, ἐπὶ τὸ θ. καὶ ἐπεὶ πεντάπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, τοῦ αϑ, τετράπλάσιος ἄρα ὁ μυζ, γνώμων τοῦ αϑ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς γα, τετράπλ: ἄρα καὶ τὸ ά: πόλσμ: τῆς κ': τοῦ ς': τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, τετράκις τὸ γη, τοῦ αϑ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ μυξ, γνώμων τετράπλάσιος τοῦ αϑ, ἴσος ἄρα ὁ μυξ, γνώμων, τῷ γη, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς αγ, ἴση δὲ ἡ μὲν δγ, τῇ γκ, ἡ δὲ αγ, τῇ γϑ, διπλῆ ἄρα ἡ κγ, τῆς γϑ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ κβ, τοῦ βϑ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λϑ, ϑβ, διπλάσια τοῦ βϑ, ἴσα γὰρ ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ τὴν μγ': τοῦ ά: ἴσον ἄρα τὸ κβ, τοῖς λϑ, ϑβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ μυξ, γνώμων ὅλῳ τῷ γη, ἴσος, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ζϑ, τῷ βη, ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστι τὸ μὲν βη, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, βδ, ἴση γὰρ ἡ γδ, τῇ δη, τὸ δὲ ϑζ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, δβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, καὶ κῆ τὴν ιζ': ἄρα τοῦ ς': ἔστιν ὡς ἡ γδ, ὅλος τὴν γβ, οὕτως ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, μείζων. δὲ ἡ δγ, τῆς γβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ γβ, τῆς βδ. τῆς γδ, ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πεντάπλάσιον δυνῆται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ὅλης ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ΛΗ̃ΜΜΑ.

Eucl. Lib. 13. Fig. 2.



Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς αγ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ, ὕπω δεικτέον· εἰ γὰρ μὴ, ἔσω, εἰ δυνατὸν, ἡ βγ, τῆς γα, διπλῆ, τετράπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, πεντάπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν βγ, γα, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ὑπάκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, πεντάπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς γα, καὶ τὴν δ': ἄρα τοῦ β': τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν βγ, γα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ βγ, διπλασία τῆς αγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἡ ἐλάττων τῆς

βγ,

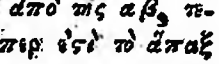
βγ, (διπλασίων ἐστὶ τῆς γα,) πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄπορον, ἡ ἄρα τῆς αγ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τῶ Εἰρημένω Θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ γδ, τμήματος ἑαυτῆς τὸ δα, τετραπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ δα, διπλῆ κείσθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ γα, σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γα, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, καὶ τιθῶ ιζ΄: ἄρα τὰ ς΄: τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. πεντάπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, πεντάπλάσιον ἄρα, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, δα, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιον δέ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, ἔστι δὲ διὰ τῶν ὑποθέσιν.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, πεντάπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πεντάπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, αγ, ὅπερ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γα, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τῶν βα, αγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βα, βγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βα, τῆς αγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αγ, τῆς γβ, ἡ αβ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γα, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ.



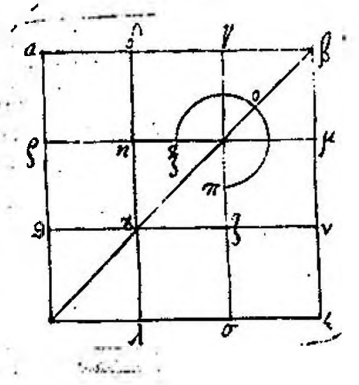
Πρότασις Γ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ δ. Λέγω, ὅτι πενταπλά-

πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τῷ ἀπὸ τῆς δ γ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α ε, καὶ καταγεγράφθω τὸ χῶμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ α γ, τῆς γ δ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, τουτέστι τὸ ρ σ, τῷ ζ η. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς α γ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν α β, β γ, τὸ γ ε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α γ, τὸ ρ σ, τὸ ἄρα γ ε, ἴσόν ἐστι τῷ ρ σ, τετραπλάσιον δὲ τὸ ρ σ, τῷ ζ η, τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ γ ε, τῷ ζ η. καὶ πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α δ, τῇ δ γ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θ κ, τῇ κ ζ, ὥστε καὶ τὸ η ζ, τετραγ: ἴσόν ἐστι τῷ θ λ, τετραγώνῳ, ἴση ἄρα ἡ η κ, τῇ κ λ, τουτέστιν ἡ μ ν, τῇ ν ε, ὥστε καὶ τὸ μ ζ, ἴσόν ἐστι τῷ ζ ε. ἀλλὰ τὸ μ ζ, ἔστι καὶ τῷ γ η, καὶ τὸ γ η, ἄρα τῷ ζ ε, ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ γ ν, ὁ ἄρα ξ ο π, γνώμων ἴσός ἐστι τῷ γ ε, ἀλλὰ τὸ γ ε, τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ η ζ, ἄρα καὶ ὁ ξ ο π, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ζ η, τὸ ἄρα δ ν, τετραπλάσιόν ἐστι τῷ η ζ, τετραγ: καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν δ ν, τὸ ἀπὸ τῆς δ β, τὸ δὲ η ζ, τὸ ἀπὸ τῆς δ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δ β, τετραπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 3.



Τῶ ἀναμέσου θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ α γ, καὶ τῆς α γ, ἡμίσεια ἡ γ δ. Λέγω, ὅτι τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τῷ ἀπὸ τῆς δ γ. ἐπεὶ γὰρ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς β δ, τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, β γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς α β, β γ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, ἡ γὰρ α β, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς α γ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, ἔστι γὰρ διπλῆ ἡ α γ, τῆς γ δ,

Συνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

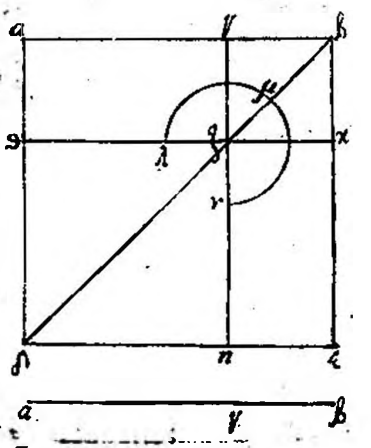
Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ α γ, τῆς γ δ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τοῦ ἀπὸ τῆς γ δ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, ἴσόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, β γ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δ β, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, καὶ τὸ ἐλάττονος τμήματος τὸ σύμπαν τετράγωνον, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ $\alpha\beta$, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ $\alpha\gamma$. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ τετράγωνον τὸ $\alpha\delta\epsilon\beta$, καὶ κατεσκευάσθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ $\alpha\beta$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ $\alpha\gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, τὸ $\alpha\kappa$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, τὸ $\vartheta\eta$, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\alpha\kappa$, τῷ $\vartheta\eta$, καὶ ἐπεὶ ἴσόν ἐστι τὸ $\alpha\zeta$, τῷ $\zeta\epsilon$, κοινὸν προσκείσθω τὸ $\gamma\kappa$, ὅλον ἄρα τὸ $\alpha\kappa$, ὅλῳ τῷ $\gamma\epsilon$, ἐστὶν ἴσον, τὰ ἄρα $\alpha\kappa$, $\gamma\epsilon$, τῷ $\alpha\kappa$, ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ $\alpha\kappa$, $\gamma\epsilon$, ὁ $\lambda\mu\nu$, γνώμων ἐστὶ, καὶ τὸ $\gamma\kappa$, παραλληλόγραμμον. ἄρα ὁ $\lambda\mu\nu$, γνώμων καὶ τὸ $\gamma\kappa$, παραλληλόγραμμον διπλάσιά ἐστι τοῦ $\alpha\kappa$, ἀλλὰ μὴν τὸ $\alpha\kappa$, τῷ $\vartheta\eta$, ἐδείχθη ἴσον, ὁ ἄρα $\lambda\mu\nu$, γνώμων, καὶ τὸ $\gamma\kappa$, παραλληλόγραμμον, διπλάσιά ἐστι τοῦ $\vartheta\eta$. ὥστε καὶ ὁ $\lambda\mu\nu$, γνώμων, καὶ τὰ $\gamma\kappa$, $\vartheta\eta$, παραλληλόγραμμα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ $\eta\vartheta$, παραλληλογράμμου, καὶ ἔστιν ὁ μὲν $\lambda\mu\nu$, γνώμων, καὶ τὰ $\gamma\kappa$, $\vartheta\eta$, παραλληλόγραμμα, ὅλον τὸ $\alpha\epsilon$, καὶ $\gamma\kappa$. ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, παραλληλόγραμμα· τὸ δὲ $\eta\vartheta$, τὸ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, παραλληλόγραμμα· τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, παραλληλογράμμου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 4.



Τοῦ αὐτοῦ Θεωρήματος ἡ αὐτὴ

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ $\alpha\beta$, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ $\alpha\gamma$. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, διπλάσιον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$. ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\alpha\gamma$, ἔστι δὲ, ἡ γὰρ $\alpha\beta$, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.

Σιμ.

Σωΐθεσις τῦ αὐτῦ.

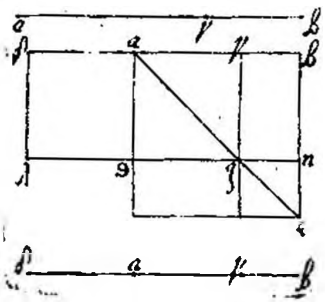
Ε΄πεὶ ὖν ἡ αβ, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον πέτμηται κ̀ τὸ γ, κ̀ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ῆς αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τ̃ῷ ἀπὸ τ̃ῆς αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τ̃ῆς αβ, βγ, διπλάσιόν ἐστι τ̃ῦ ἀπὸ τ̃ῆς αγ· σωῶθείτι, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τ̃ῆς αβ, βγ, μ̃ετὰ τ̃ῦ ἀπὸ τ̃ῆς αγ, τριπλάσιά ἐστι τ̃ῦ ἀπὸ τ̃ῆς αγ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τ̃ῆς αβ, βγ, μ̃ετὰ τ̃ῦ ἀπὸ τ̃ῆς αγ, τὸ ἀπὸ τ̃ῆς αβ, βγ, ἐστὶ τ̃ετράγωνα, τὸ ἄρα ἀπὸ τ̃ῆς αβ, βγ, τ̃ετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τ̃ῦ ἀπὸ τ̃ῆς αγ.

Πρότασις Ε΄: Θεώρημα.

Ε΄αν᾽ εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον κ̀ μέσον λόγον τμηθ̃ῇ, κ̀ προστεθ̃ῇ ἴση τ̃ῷ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον κ̀ μέσον λόγον τέτμηται, κ̀ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχ̃ῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον πετμήθω κ̀τὰ τὸ γ, κ̀ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, κ̀ τ̃ῇ αγ, ἴση κείσθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, εὐθεῖα, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον πέτμηται κ̀τὰ τὸ α, κ̀ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχ̃ῆς εὐθεῖα ἡ αβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τ̃ῆς αβ, τ̃ετράγωνον τὸ αε, κ̀ καταγεγράφθω τὸ χ̃ῆμα. ἐπεὶ ὖν ἡ αβ, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον πέτμηται, κ̀τὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τ̃ῷ ἀπὸ τ̃ῆς αγ, κ̀ ἔστι τὸ μεὶ ὑπὸ τ̃ῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τ̃ῆς αγ, τὸ γϑ. ἀλλὰ τὸ μεὶ γε, ἴσόν ἐστι τ̃ῷ ϑε, τὸ δὲ γϑ, ἴσον τ̃ῷ δϑ, κ̀ τὸ δϑ, ἄρα ἴσόν ἐστι τ̃ῷ ϑε, κοινὸν προσκείσθω τὸ ϑβ, ὅλον ἄρα τὸ δη, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τ̃ῷ αε, κ̀ ἔστι τὸ μεὶ δη, τὸ ὑπὸ τ̃ῶν βδ, δα, ἴση γὰρ ἡ δα, τ̃ῇ δλ, τὸ δὲ αε, τ̃ῷ ἀπὸ τ̃ῆς αβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ῶν βδ, δα, ἴσόν ἐστι τ̃ῷ ἀπὸ τ̃ῆς αβ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, μεῖζων δὲ ἡ δβ, τ̃ῆς βα, μεῖζων ἄρα κ̀ ἡ βα, τ̃ῆς αδ. ἡ ἄρα βδ, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον τέτμηται κ̀τὰ τὸ α, κ̀ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 5.



Ἀνάλυσις τ̃ῦ εἰρημένυ θεωρήματος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον πετμήθω κ̀τὰ τὸ γ, κ̀ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, κ̀ τ̃ῇ αγ, ἴση κείσθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἄκρον κ̀ μέσον λόγον πέτμηται κ̀τὰ τὸ α, κ̀ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ. ἀλλ᾽ ἡ αδ, ἐστὶν ἴση τ̃ῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ

βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, διελόντι ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αδ, τῇ αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ.

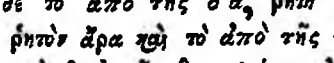
Σωσθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βγ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, ἡ ἄρα δβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ.

Πρότασις ς΄: Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

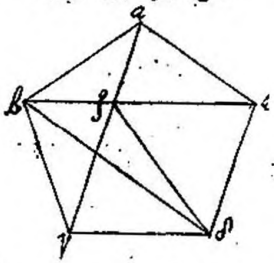
Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν αγ, γβ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, καὶ κείσθω τῆς βα, ἡμίσεια ἡ αδ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ τῇ μείζονι αγ, προσκειται ἡ αδ, ἡμίσεια ὅσα τῆς αβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, τῷ ἀπὸ τῆς δα, πενταπλάσιόν ἐστι, καὶ τῶν ἀ: τῷ παράντος, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τῷ ἀπὸ τῆς δα, καὶ τῶν ι γ΄: τῷ ί: ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δα, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ δα, ἡμίσεια ὅσα τῆς αβ, ῥητῆς οὔσης. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἄρα μήκει ἡ γδ, τῇ δα, αἱ γδ, δα, ἄρα ῥηταί, εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. πάλιν ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, ἀποτομῆς, παρὰ τὴν αβ, ῥητὴν παραβλῆσθαι, πλάτος ποιεῖ τὴν βγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς, κατὰ τὴν ιζ΄: τῶν ί: παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ γβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αγ, ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ αβγδε, αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, αἱ πρὸς τοῖς α, β, γ, δηλονότι ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγδε πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βε, ζδ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ γβ, βα, δυσὶ ταῖς βα, αε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ δ': τοῦ δ: καὶ τὸ αβγ, τριγώνου τῷ αβε, τριγ: ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ βεα, ἡ δὲ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ γαβ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αζ, πλευρᾷ τῇ βζ, ἐστὶν ἴση, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ αγ, ὅλῃ τῇ βε, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ζγ, λοιπῇ τῇ ζε, ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ ζγ, γδ, δυσὶ ταῖς ζε, εδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ζδ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ζγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεδ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βγα, γωνία τῇ ὑπὸ αεβ, ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αεδ, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς α, β, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς α, β, γωνίαις, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, β, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.



Euclid. lib. 13. Fig. 6.

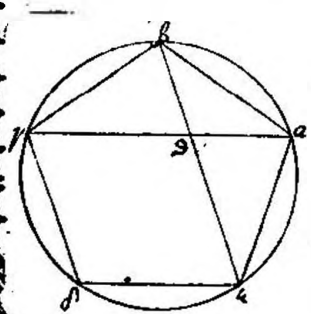
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι. ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι, αἱ πρὸς τοῖς α, γ, δ, σημείοις. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βα, αε, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ βδ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβε, τριγώνου, τῷ βγδ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ γδβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βεδ, γωνία τῇ ὑπὸ βδε, ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ βε, πλευρᾷ τῇ βδ, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ γδε, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γδε, ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, ἴση ἐστὶ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν πεντα γώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς ἀπὸ τῶν ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ αβγδε, δύο γωνίας τὰς ἀπὸ τῶν ἑξῆς τοῦ α, β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ αγ, βε, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ θ σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ αβγδε πεντάγωνον, κύκλος ὁ αβγδε, καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ αε, αβ, δυσὶ ταῖς αβ, βγ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ αγ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβε, τρίγωνον τῷ αβγ, τριγ: ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία τῇ ὑπὸ αβε. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αθε, τῇ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ, ἐστὶ τὸς γάρ ἐστι τῷ αβθ, τριγώνῳ, καὶ τριῶν λβ': τῷ δὲ ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαγ, τῇ ὑπὸ βαγ, δίπλη. ἐπεὶδὴ καὶ περιφέρεια ἡ εδγ, περιφερείᾳ τῇ γβ, διπλῆ ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ θαε, γωνία τῇ ὑπὸ αθε, ὥστε καὶ ἡ θε, εὐθεῖα τῇ εα, πέρας τῇ ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ αε, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βεα. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαθ, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βεα, ἄρα τῇ ὑπὸ βαθ, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν αβε, καὶ τοῦ αβθ, ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαε, γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ αθβ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβε, τρίγ: τῷ αβθ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βθ, ἴση δὲ ἡ βα, τῇ εθ. ὡς ἄρα ἡ βε, πρὸς τὴν εθ, οὕτως ἡ εθ, πρὸς τὴν θβ, μείζων δὲ ἡ βε, τῆς βα, μείζων ἄρα καὶ ἡ εθ, τῆς θβ, ἡ βε, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἴσόν ἐστι τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ γθ, ἴσόν ἐστι τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 7.

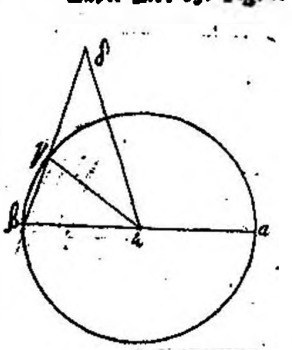


Πρότασις Θ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ἡ τῆ ἐξαγώνυ πλευρά, καὶ ἡ τῆ δεκαγώνυ, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ τῆ ἐξαγώνυ πλευρά.

Ε΄στω κύκλος ὁ α β γ, καὶ τῦ εἰς τὸν α β γ, κύκλον ἐγγραφομένων χωμάτων, δεκαγώνυ μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ β γ, ἑξαγώνυ δὲ ἡ γ δ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ β δ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ γ δ. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῦ κύκλυ, καὶ ἔστω τὸ ε, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε β, ε γ, ε δ, καὶ διήχθω ἡ β ε, ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεὶ δεκαγώνυ ἰσοπλεύρυ πλευρὰ, ἐστὶν ἡ β γ, πενταπλασίων ἄρα ἡ α γ β, περιφέρεια τῆς β γ, περιφερείας, πεξαπλασίων ἄρα ἡ α γ, περιφέρεια τῆς γ β, ὡς δὲ ἡ α γ, περιφέρεια πρὸς τὴν γ β, οὕτως ἡ ὑπὸ α ε γ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γ ε β, πεξαπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ α ε γ, τῆς ὑπὸ γ ε β, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε β γ, γωνία τῆ ὑπὸ ε γ β, ἡ ἄρα ὑπὸ α ε γ, γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ε γ β, καὶ τὴν λ β΄: τῆ δὲ καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ε γ, εὐθεῖα τῆ γ δ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῆ τῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τῆ εἰς τὸν α β γ, κύκλον ἐγγραφομένυ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γ ε δ, γωνίᾳ τῆ ὑπὸ γ δ ε, διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ε γ β, τῆς ὑπὸ ε δ γ. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ε γ β, διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ α ε γ, πεξαπλασία ἄρα τῆς ὑπὸ ε δ γ, ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ β ε γ, πεξαπλασία ἡ ὑπὸ α ε γ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ε δ γ, τῆ ὑπὸ β ε γ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τῦ τε β ε γ, καὶ τῦ β ε δ, ἡ ὑπὸ ε β δ, γωνία, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ β ε δ, λοιπῆ τῆ ὑπὸ ε γ β, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ ε β δ, τρίγωνον τῶ ε β γ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ δ β, πρὸς τὴν β ε, οὕτως ἡ ε β, πρὸς τὴν β γ, ἴση δὲ ἡ ε β, τῆ γ δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β δ, πρὸς τὴν δ γ, οὕτως ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ β, μείζων δὲ ἡ β δ, τῆς δ γ, μείζων ἄρα καὶ ἡ δ γ, τῆς γ β, ἡ β δ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς, ἐστὶν ἡ δ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 8.



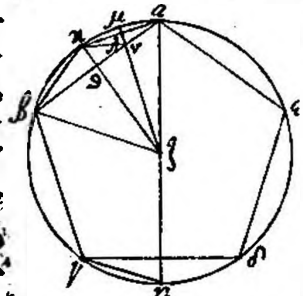
Πρότασις Ι΄: Πρόβλημα.

Ε΄αν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τῦ ἑξαγώνυ, καὶ τὴν τῦ δεκαγώνυ, τὴν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων.

Ε΄στω κύκλος ὁ α β γ δ ε, καὶ εἰς αὐτὸν πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ α β γ δ ε. Λέγω, ὅτι τῆ α β γ, δ ε, πενταγώνυ πλευρὰ δύναται τήν τε τῦ ἑξαγώνυ,

γώνε, καὶ τινὶ τῶν παραγώνε τῷ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, διήχθω ἐπὶ τὸ η, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω αἱ ζβ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τινὶ αβ, κάθετος ἐχθήτω αἱ ζθ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, κβ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τινὶ ακ, κάθετος ἤχθω αἱ ζλ. καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω αἱ κν, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, περιφέρεια τῇ αεδη, περιφέρεια, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, περιφέρεια λοιπῇ τῇ δη, ἐστὶν ἴση, παραγώνε γὰρ ἡ γδ, δεκαγώνε ἄρα ἡ γη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ζα, τῇ ζβ, καὶ κάθετος ἡ ζθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αζκ, γωνία τῇ ὑπὸ κζβ, ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ακ, τῇ κβ, ἐστὶν ἴση, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερείας, δεκαγώνε ἄρα πλευρὰ, ἐστὶν ἡ ακ, εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ακ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφ: ἴση δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῇ αβ, περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφ: ἔστι δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς γη, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ γη, περιφ: τῇ βκ, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ βκ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ακ, καὶ ἡ γη, ἄρα τῆς κμ, διπλῆ ἐστιν, ἴση γὰρ ἡ γβ, περιφέρεια, τῇ βα, περιφερ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ηβ, περιφέρεια τῆς βμ, ἐστὶ διπλῆ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηζβ, γωνίας τῆς ὑπὸ βζμ, διπλῆ ἐστι καὶ τινὶ λγ': τῇ ς': ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ηζβ, καὶ τῆς ὑπὸ ζαβ, διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ ὑπὸ βζν, ἄρα τῇ ὑπὸ ζαβ, ἐστὶν ἴση, λοιπὴ δὲ τῇ δύο ἐφιγώνων, τῇ τε αβζ, καὶ τῇ βζν, ἡ ὑπὸ αβζ, γωνία ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αζβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βνζ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα καὶ τὸ αβζ, ἐφίγωνον, τῷ βζν, ἐφιγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, εὐθεῖα πρὸς τινὰ βζ, οὕτως ἡ ζβ, πρὸς τινὰ βν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ λκ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ λν, βάσις ἄρα ἡ κν, βάσει τῇ αν, ἐστὶν ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λκν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λαν, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ λαν, τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ λκν, ἄρα τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο ἐφιγώνων, τοῦ τε ακβ, καὶ τοῦ ακν, ἡ ὑπὸ νακ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ακβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ κνα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ κβα, ἐφίγ: τῷ κνα, ἐφιγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ βα, εὐθεῖα πρὸς τινὰ ακ, οὕτως ἡ κα, πρὸς τινὰ αν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ακ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αν, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ακ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, πενταγώνε πλευρὰ, ἡ δὲ βζ, ἑξαγώνε, ἡ δὲ ακ, δεκαγώνε, ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνε πλευρὰ δυνάται τινὰ τῶν τοῦ ἑξαγώνε, καὶ τινὰ τοῦ δεκαγώνε, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclᵈ. Lib. 13. Fig. 9.



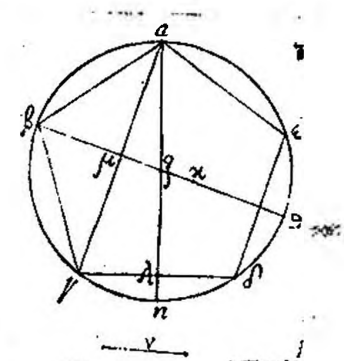
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ε'αν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγδε, ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ αβ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζβ, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, θ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ κείσθω τῆς αζ, πέμπτον μέρος ἡ ζκ, ῥητὴ δὲ ἡ αζ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ βζ, ῥητή, ὅλη ἄρα ἡ βκ, ῥητή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ η, περιφέρεια τῇ αδη, περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, λοιπῇ τῇ ηδ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐαν ἐπιζεύξωμεν τὴν αδ, συνάγονται ὀρθαὶ, πρὸς τὸ δ: πόρισμ: τῆς γ': τῶ γ': αἱ πρὸς τῷ λ, γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ γδ, τῆς γλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ μ, ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ αγ, τῆς γμ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αλγ, γωνία τῇ ὑπὸ αμζ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τῶν αλγ, καὶ τοῦ αμζ, ἡ ὑπὸ λαγ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ μζα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αγλ, τριγων: τῷ αμζ, τριγώνῳ, καὶ ἀλλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ λγ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζα, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ, διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ τῆς μζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζα, ἀλλ' ὡς ἡ τῆς μζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα, καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ, διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα, ὡς ἄρα ἡ τῆς γλ, διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὸ πέμπτον τῆς ζα, καὶ ἔστι τῆς μὲν λγ, διπλῆ ἡ δγ, τῆς δὲ γα, ἡμίσεια ἡ γμ, τῆς δὲ ζα, πέμπτον μέρος ἡ ζκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζκ. συνθέντι, ἄρα καὶ ὡς συναμφότερος ἡ δγμ, πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μκ, πρὸς τὴν ζκ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου δγμ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τῆς πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ δγ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, κατὰ τὴν δ: τῶ παρόντος, πεντάπλασιον δύναται, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς αγ, ἡμίσεια ἡ γμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς

Euc. Lib. 13. Fig. 10.



δγμ,

δ γ μ, ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γ μ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δ γ μ, ὡς μιᾶς, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ μ, ὅπως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς μ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ ζ, πεντάπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς μ κ, τοῦ ἀπὸ τῆς κ ζ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κ ζ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μ κ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μ κ, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ ἀπὸ τῆς μ κ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ ζ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ β ζ, τῆς ζ κ, τετραπλασία ἄρα ἡ β κ, τῆς κ ζ, εἰκοσιπεντάπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς β κ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζ κ, τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς μ κ, τοῦ ἀπὸ τῆς κ ζ, πεντάπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς β κ, τοῦ ἀπὸ τῆς κ μ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς β κ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ μ, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ β κ, τῇ κ μ, μήκει, καὶ ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν, αἱ β κ, κ μ, ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν, ἀποτομὴ ἄρα ἡ β μ. προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ μ κ. λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη, τῷ γὰρ μείζονι ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β κ, τὸ ἀπὸ τῆς κ μ, ἐαυτῷ ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ν, ἡ β κ, ἄρα τῆς κ μ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ κ ζ, τῇ ζ β, καὶ σωθήσεται σύμμετρός ἐστιν ἡ κ β, τῇ ζ β. ἀλλ' ἡ β ζ, τῇ β θ, σύμμετρός ἐστι μήκει, καὶ ἡ β κ, ἄρα τῇ β θ, σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β κ, τοῦ ἀπὸ τῆς κ μ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς β κ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ μ, λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς β κ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ν, λόγον ἔχει, ὃν ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον, οὐκ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ β κ, τῇ ν. ἡ β κ, ἄρα τῆς κ μ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ β κ, τῆς προσαρμοζούσης μ κ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ β κ, ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ β θ. ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ μ β, τὸ δὲ ἀπὸ ῥητῆς, καὶ ἀποτομῆς πέμπτης περιεχόμενον ἐρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων, δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν θ β, β μ, ἡ α β, διὰ τὸ, ἐπιζευγνυμένης τῆς α θ, ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ α β θ, ξίγωνον τῷ α β μ, καὶ εἶναι ὡς τὴν θ β, πρὸς τὴν β α, οὕτω τὴν α β, πρὸς τὴν β μ, ἡ ἄρα α β, τὴν περιεχόντα πλευρὰν, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

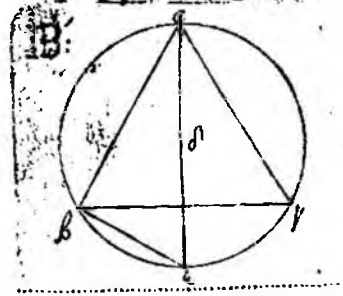
Ἐὰν εἰς κύκλον ξίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ ξιγώνου πλευρὰ δυνάμει ξιπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ, καὶ εἰς αὐτὸν ξίγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, τὸ α β γ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ α β γ, ξιγώνου πλευρὰ δυνάμει ξιπλασίων ἐστὶ τῆς ἐξῆς. Εἰλήφθω γὰρ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον τὸ δ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ α δ, διήχθω ἐπὶ

τὸ ε,

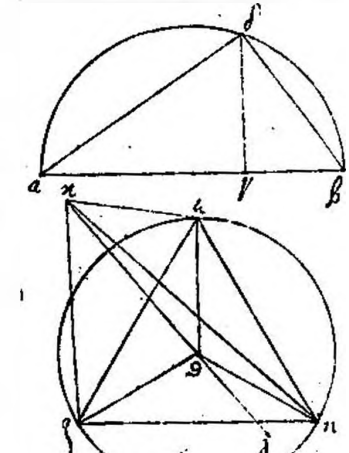
τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε, καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον ἡ βε γ, ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κύκλου περιφερείας, ἡ ἄρα βε, περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἑξάγωνον ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ βε, εὐθεῖα, ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αε, τῆς δε, τετράπλασιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βε, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βε, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἴση δὲ ἡ βε, τῇ δε, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δε, ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euc. Lib. xiii.



Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

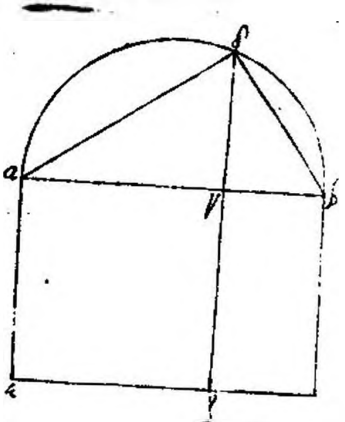
Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τὴν δοθεῖσαν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον. ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν αγ, τῆς βγ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δα, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζη, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζη, κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ εζη, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ, θζ, θη, καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ θ, σημείου τῷ τοῦ εζη, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ θκ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς θκ, τῇ αγ, εὐθείᾳ ἴση ἡ θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κε, κζ, κη, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ εζη, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ εζη, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν θε, θζ, θη, ἡ θκ, ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν θε, θζ, θη, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ θκ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ δα, βάσει τῇ κε, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν κζ, κη, τῇ δα, ἐστὶν ἴση, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ κε, κζ, κη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν

βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τὸ πόλισμα τῆς ιθ: τῶ ε: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται, ἐπιπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τῶ ἀπὸ τῆς δγ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζι, τῶ ἀπὸ τῆς ιθ, ἐπιπλάσιον, καὶ τὴν αὐτὴν, καὶ ἔστιν ἴση ἡ δγ, τῇ ιθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δα, τῇ εζ. ἀλλ' ἡ δα, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν εζ, ζη, ηε, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐστὶν ἴση, πυραμὶς ἄρα συνίσταται ἐκ τεσσάρων ἰσογωνίων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εζη, τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ θκ, εὐθεῖα ἡ θλ, καὶ κείσθω τῇ βγ, ἴση ἡ θλ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ. ἴση δὲ ἡ μὲν αγ, τῇ κθ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, ἡ δὲ γβ, τῇ θλ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κθ, πρὸς τὴν θε, οὕτως ἡ εθ, πρὸς τὴν θλ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν κθ, θλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θε. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ κθε, εθλ, γωνιῶν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κλ, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ελ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ λεκ, γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ελκ, τρίγ: ἑκατέρῳ τῶν ελθ, εθκ, τριγ: ἐὰν δὲ μενούσης τῆς κλ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ζλ, λη, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς ζ, η, γωνιῶν, καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ κλ, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ αβ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν αγ, ἴση κεῖται ἡ κθ, τῇ δὲ γβ, ἡ θλ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, ἐπιπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς αγ· ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αδ· ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς βδ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, διὰ τὸ ὁμοιότροπα τὰ δαβ, δαγ, τρίγωνα, καὶ εἶναι ὡς τὴν α: πρὸς τὴν γ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ αδ, ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 12.



ΛΗ΄Μ.

ΛΗΜΜΑ.

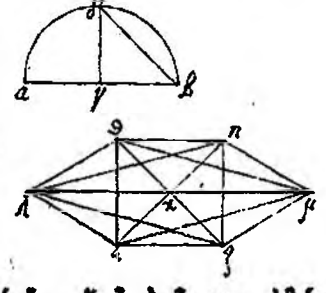
Δειχθήσεται δὴ, ὅτι ἔστιν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἐκκείσθω γὰρ ἡ τῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια ἡ δβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον τὸ εγ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζβ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ δαβ, τριγώνου τῷ δαγ, τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἐπεί ἐστιν. ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζβ, καὶ ἔστι τὸ μὲν εβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον γὰρ ἡ εα, τῇ αγ, τὸ δὲ βζ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δγ, ἡ γὰρ δγ, καθέτος τῆς τῆς βάσεως τετμημένων, τῶν αγ, γβ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ αδβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ.

Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

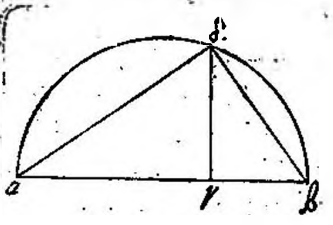
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηϑ, ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ϑζ, εη. καὶ αὐτῇ ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῆς τοῦ εζηϑ, τετραγώνου ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω εὐθεῖα ἡ κλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου, ὡς ἡ κμ, καὶ ἀφωρίσθω ἑφ' ἑκατέρας τῶν κλ, κμ, μιᾷ τῶν κε, κζ, κη, κϑ, ἴσαι ἑκατέρα τῶν κλ, κμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λε, λζ, λη, λϑ, με, μζ, μη, μϑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κε, τῇ κϑ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εκϑ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ϑε, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κε, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ λκε, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ελ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κε, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ϑε, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εϑ, ἴση ἄρα ἡ λε, τῇ εϑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λϑ, τῇ ϑε, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λεϑ, τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ εζηϑ, τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ λ, μ, σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν, ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται

Euclid. Lib. 13. Fig. 13.



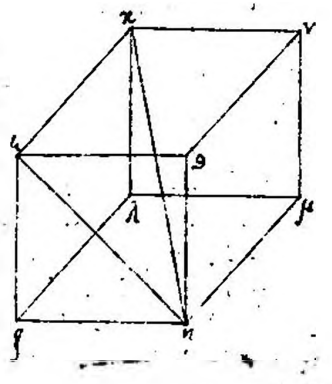
ὑπὸ ὀκτὼ ἰσογώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ἐπεὶ γὰρ αἱ ζξ αἱ λκ, κμ, νε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς λμ, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ἐὰν μενούσης τῆς λμ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, ν, θ, σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένου τοῦ ὀκταέδρου. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ, ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κμ, κοινὴ δὲ ἡ κε, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ λε, βάσει τῇ εμ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λεμ, γωνία, τῷ γὰρ ἡμικυκλίῳ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δβ, διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς λε, ἴση γὰρ κεῖται ἡ εθ, τῇ δβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς λμ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ λμ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ λμ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ, περιείληπται τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, καὶ συνάπτεδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Eucl. lib. 13. Fig. 14.



Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

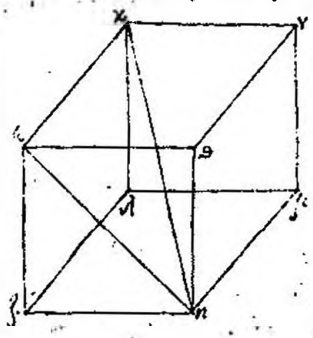


Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε διπλοῦν εἶναι τὸν αγ, τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ δβ, καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, τῷ τοῦ εζηθ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ κε, ζλ, ημ, θν, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀφ' ἑκάστης τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, μιᾷ τῶν εζ, ζη, ηθ, θε, ἴση ἑκάστη τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λμ, μν, νκ, κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ζν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος.

Δεῖ

Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ κη, ηε, καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ κεη, γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν κε, ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ εη, ἐπίπεδον, δηλ. καὶ πρὸς τὴν εη, διάμετρον, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κη, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τῆς ε, η, σημείων. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τὴν ζλ, ζε, καὶ πρὸς τὸ κζ, ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ζη, ὥστε καὶ ἐπιζευγνύουσα τὴν ζκ, ἡ ζη, ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ζκ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς κη, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει· ἐὰν δὴ μενούσης τῆς κη, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ καὶ τὴν δοθεῖσαν. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ζε, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἴση δὲ ἡ εζ, τῇ εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ηε, εκ, τετράκι τὸ ἀπὸ τῆς κη, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. καὶ ἐπεὶ τριπλάσιόν ἐστιν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς κη, τοῦ ἀπὸ τῆς κε, τριπλάσιον, καὶ κεῖται ἴση τῇ βδ, ἡ κε, ἴση ἄρα καὶ ἡ κη, τῇ αβ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ κη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος, καὶ συγκαταδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 13. Fig. 15.



Πρότασις Ιϛ′: Πρόβλημα.

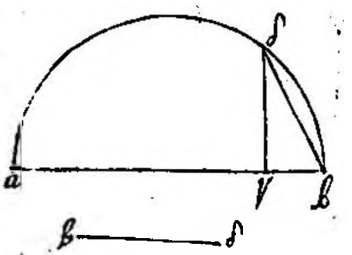
Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἡ καὶ τὰ ἐρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν αγ, τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας· αὐτῇ γραμμὴ ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζηθ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δβ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον, πενταγώνου ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ εζηθκ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ εζ, ζη, ηθ, θ4, κε, περιφέρειαι

δίχα

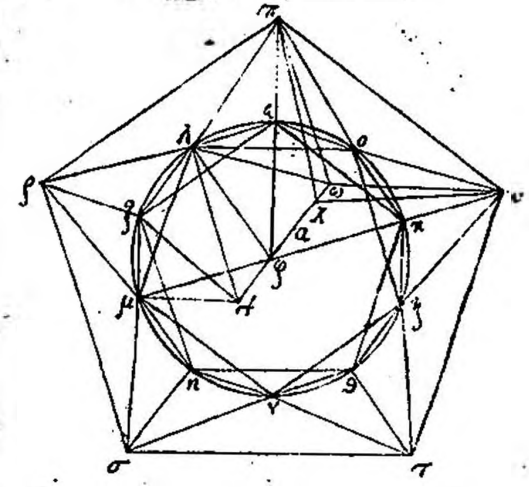
δίχα κατὰ τὰ λ, μ, ν, ξ, ο, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ελ, λζ, ζμ, μη, ην, νθ, θξ, ξκ, κο, οε· ὁμοίως δὴ καὶ αἱ λμ, μν, νξ, ξο, ολ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ λμνξοπεντάγωνον, καὶ δικαγώνιος ἡ εν, διάμετρος. καὶ ἀπειλήφθωσαν ἀπὸ τῆς ν, ζ, η, θ, κ, σημείων, πρὸς τῷ κύκλῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας διάμετροι αἱ επ, ζρ, ησ, θτ, κυ, ἴσαι δὲ καὶ τῷ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πρ, ρσ, στ, τυ, υπ, πλ, λρ, ρμ, μσ, σν, ντ, τξ, ξυ, υο, οπ· καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν επ, κυ, πρὸς ἀνίσους ἐστὶν ὀρθάς, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ επ τῇ κυ· ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, καὶ κατὰ τὰ λγ· τοῦ δ· αἱ πρὸς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι διθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ πυ, ἄρα τῇ εκ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, πεντάγωνον δὲ ἰσόπλευρον ἡ εκ, πεντάγωνον ἄρα ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πυ, εἰς τὸν εζηθκ, κύκλον ἐγγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν πρ, ρσ, στ, τυ, πεντάγωνός ἐστιν ἰσόπλευρον τε καὶ εἰς τὸν εζηθ, κύκλον ἐγγραφόμενον, ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ πρστυ, πεντάγωνον· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ ἱ· τοῦ παρόντος, ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ πε, δεκαγώνου δὲ ἡ εο, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ πεο, πεντάγωνος ἄρα ἐστὶν ἡ πο, ἡ γὰρ τοῦ πεντάγωνου πλευρά, δύναται τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τὴν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ου, πεντάγωνός ἐστι πλευρά, ἔστι δὲ καὶ ἡ πυ, πεντάγωνος, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ πουξ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν πλρ, ρμσ, σντ, τξυ, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πεντάγωνόν ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν πλ, πο, ἔστι δὲ καὶ ἡ λο, πεντάγωνος, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πλο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λρμ, μσν, ντξ, ξυο, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ εζηθκ, τὸ φ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ φ, τῷ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθω ἡ φω, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, ὡς ἡ φψ, καὶ ἀφηρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν φψ, χω. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πω, πχ, υχ, υω, εφ, λφ, λψ, ψμ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν φχ, πε, τῷ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ φχ τῇ πε, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, καὶ αἱ εφ, πχ, ἄρα ἴσαί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἑξαγώνου δὲ ἡ εφ, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ πχ, καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ πχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ πχω, γωνία, πεντάγωνος ἄρα ἐστὶν ἡ πω· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ υω, πεντάγωνος ἐστίν. Ἐπειδὴ οὖν ἐπεζεύξαμεν τὰς φχ, χυ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ φχ, ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα, ἑξαγώνου, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ χυ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ φχω, πεντάγωνος ἄρα ἡ υω, ἔστι δὲ καὶ ἡ πυ, πεντάγωνος, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πυω, τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων,

Eutl. lib. 13. Fig. 16.



των, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ πρ, ρσ, στ, τυ, εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ ω, σημεῖον ἰσόπλευρόν ἐστι. Πάλιν ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ φψ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λφψ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ λψ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν μφ, ἴσαν ἑξαγώνου, συνάγεται ἡ ἡ μψ, πενταγώνου, ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λμψ, τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ μν, νξ, ξο, οπ, κορυφὴ δὲ τὸ ψ, σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι. συνίσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. Ἐπειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, ἡ φω, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ τὸ χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ φχ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ, πρὸς τὴν χω, ἴση δὲ ἡ μὲν φχ, τῇ φλ, ἡ δὲ χω, τῇ φψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φλ, οὕτως ἡ φλ, πρὸς τὴν φψ, αἳ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ωφλ, λφψ γωνίαι. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν λω, εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ψλω, γωνία, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ψλφ, φλω, τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ, πρὸς τὴν χω, ἴση δὲ ἡ μὲν ωφ, τῇ ψχ, ἡ δὲ φχ, τῇ χπ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ψχ, πρὸς τὴν χω, οὕτως ἡ πχ, πρὸς τὴν χω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν πψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῇ π, γωνία, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ψω, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π, καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ φχ, δίχα κατὰ τὸ α, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ φω, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ωχ, ἡ ἄρα ωχ, προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν χα, τετράπλευρον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος. τετράπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωα, τοῦ ἀπὸ τῆς αχ, καὶ ἔστι τῆς μὲν αω, διπλῆ ἡ ωψ, τῆς δὲ αχ, διπλῆ ἡ χφ, τετράπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ, τοῦ ἀπὸ τῆς χφ, καὶ ἐπεὶ τετράπλευρόν

Euclid. Lib. 13. Fig. 17.



ἐστιν

ἐστὶν ἡ αγ, τῆς βγ, πεσσαπλασίων ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἐστὶν, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ. πεσσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ, πεσσαπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς φχ, καὶ ἔστιν ἡ δβ, ἴση τῇ φχ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ εζηθκ. ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ, τῇ ψω, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ ψω, ἄρα τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ ἴση ἐστί. Τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω, ὅτι καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πεσσαπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ εζηθκ, πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστὶν, ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πεσσαπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ἀφ' ἧς τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος συγκειται ἔκτε τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Πρότασις ΙΖ. Πρόβλημα.

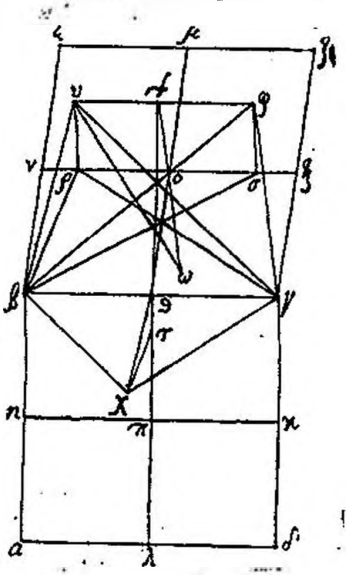
Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ πρότερον μέρη σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις, τὰ αβγδ, γβεζ. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν αβ, βγ, γδ, δα, εζ, εβ, ζγ, πλευρῶν, δίχα κατὰ τὰ η, θ, κ, λ, μ, ν, ξ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, θλ, μθ, νξ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ νο, οξ, θπ, διάμετροι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ ρ, σ, τ, σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ρο, οσ, τπ. καὶ ἀνεστάσθωσαν ἀπὸ τῶν ρ, σ, τ, σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τὰ ἐντὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ρυ, σφ, τχ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ρο, οσ, τπ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ υβ, βχ, χγ, γφ, φυ. Λέγω, ὅτι τὸ υβχγφ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ρβ, σβ, φβ. καὶ ἐπεὶ διάμετρος ἡ νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ον, νρ, ἕπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ορ, καπὶ τοῦ δ': τοῦ παρόντος, ἴση ἡ μὲν ον, τῇ νβ, ἡ δὲ ορ, τῇ ρυ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βν, νρ, ἕπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν βν,

νρ,

ν ρ, τὸ ἀπὸ τῆς β ρ, ἐστὶν ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς β ρ, ἑξαπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρ υ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς β ρ, ρ υ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρ υ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν β ρ, ρ υ, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β υ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς β υ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς υ ρ, διπλῆ ἄρα ἡ β υ, τῆς υ ρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ρ υ, τῆς ρ υ, διπλῆ, ἐπεὶ διπλῆ ἡ ρ σ, τῆς ρ ο, ὑπέστι καὶ τῆς ρ υ, ἐστὶ διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ β υ, τῇ υ φ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν β χ, χ γ, γ φ, ἑκατέρᾳ τῶν β υ, υ φ, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ β υ φ γ χ, πεντάγωνον. Λέγω, ὅτι καὶ ἐν σφαίρᾳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ο, ἑκατέρα τῶν ρ υ, σ φ, παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐντὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ ο ψ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ψ ϑ, ϑ χ. Λέγω, ὅτι ἡ ψ ϑ χ, διάμετρός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ϑ π, ἄκρον καὶ μέσον πέτμηται λόγον κατὰ τὸ τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστὶν ἡ π τ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ϑ π, πρὸς τὴν π τ, οὕτως ἡ π τ, πρὸς τὴν τ ϑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ϑ π, τῇ ϑ ο, ἡ δὲ π τ, ἑκατέρα τῶν τ χ, ο ψ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ϑ ο, πρὸς τὴν ο ψ, οὕτως ἡ χ τ, πρὸς τὴν τ ϑ, καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ϑ ο, τῇ τ χ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῇ β δ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ δὲ τ ϑ, τῇ ο ψ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῇ β ζ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο ξίγωνα συμπέσῃ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ψ ο ϑ, ϑ τ χ, πρὸς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ψ ϑ, τῇ ϑ χ, πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν σφαίρᾳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἐν σφαίρᾳ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ υ β χ γ φ, πεντάγωνον. Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν, ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ν ο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ο ρ. ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ν ο, ο ρ, πρὸς τὴν ο ν, οὕτως ἡ ν ο, πρὸς τὴν ο σ, ἴση δὲ ἡ ο ρ, τῇ ο σ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ σ ν, πρὸς τὴν ν ο, οὕτως ἡ ν ο, πρὸς τὴν ο σ, ἡ ν σ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον πέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ν ο. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ν σ, σ ο, ἑξαπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ο ν, ἴση δὲ ἡ μὲν ο ν, τῇ ν β, ἡ δὲ ο σ, τῇ σ φ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ν σ, σ φ, πεντάγωνα, κατὰ τὸν ῥηθέντα, ἑξαπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ν β, ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν φ σ, σ ν, ν β, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ν β, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν σ ν, ν β, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β σ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν β σ, σ φ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς φ β, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ φ σ β, γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ν β, διπλῆ ἄρα ἡ φ β, τῆς β ν, ἔστι δὲ καὶ ἡ β γ, τῆς β ν, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ φ β, τῇ β γ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ β υ, υ φ, δυσὶ ταῖς β χ, χ γ, ἴσαι εἰσὶ,

Euc. Lib. 13. Fig. 28.



ἡμι βάσις ἡ φβ, βάσει τῇ βγ, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βυφ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βχγ, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ υφγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βχγ· αἱ ἄρα ὑπὸ βχγ, βυφ, υφγ, τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἐὰν δὲ πεντάγωνα ἰσοπλεύρῳ αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ βυφχγ πεντάγωνον. δεδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ἄρα ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἔστιν ἐπὶ μιᾶς τῶν κύβου πλευρᾶς τῆς βγ, ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι χῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι καὶ τὰ ἑξῆς. Ἐκβεβλήθω γὰρ ἡ ψο, καὶ ἔστω ἡ ψω, συμβαλλέτω ἄρα ἡ ψω, τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τεμνέτω ἀλλήλας. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῇ παραπεμπτῇ θεωρήματι τοῦ ια βιβλίου, τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ω, τὸ ω, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ψω, ἡμίσεια τοῦ κύβου πλευρά. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ υω, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νσ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σο, ξιπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἴση δὲ ἡ μὲν νσ, τῇ ψο. ἐπειδὴ περ καὶ ἡ μὲν νο, τῇ οω, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ψο, τῇ οσ, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οσ, τῇ ψυ. ἐπεὶ καὶ τῇ ρο, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, ξιπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς υω, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς υω, ξιπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, δυνάμει ξιπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ξιπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰδὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας, καὶ ἔστιν ἡ νο, ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ἡ ἄρα υω, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἔστι τὸ ω, κέντρον τῆς περιλαμβανούσης σφαίρας τὸν κύβον, τὸ υ, ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκαέδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐπεὶ γὰρ τῆς νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ, ὅλης ἄρα τῆς νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ρσ, οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ νο, πρὸς τὴν ορ, ἡ ορ, πρὸς τὴν ρν, καὶ τὰ διπλάσια, τὰ γὰρ μέρη τῶν ὡσαύτως πολλαπλασίων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ νξ, πρὸς τὴν ρσ, οὕτως ἡ ρσ, πρὸς συναμφότερον τὴν νρ, σξ, μείζων δὲ ἡ νξ, τῆς ρσ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ρσ, συναμφοτέρου τῆς νρ, σξ, ἡ νξ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ρσ, ἴση δὲ ἡ ρσ, τῇ υφ, τῆς ἄρα νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμη-

μένης,

μενης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ υφ· ᾧ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ᾧ ἐστι δυνάμει ἑπτάπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ υ ξ, πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή, ἡ υφ, ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

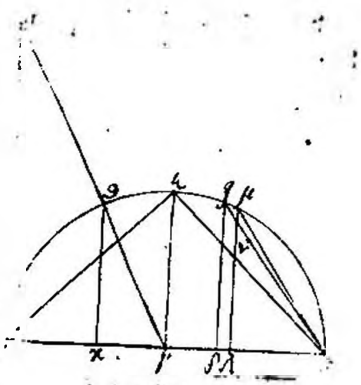
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι, καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν αγ, τῇ γβ, κατὰ δὲ τὸ δ, ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν αδ, τῆς δβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αεβ. καὶ ἀπὸ τῶν γ, δ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ γε, δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, αζ, ζβ, εβ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ, τῆς δβ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βδ. ἀνεστράφαντι, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ βα, τῆς αδ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ, ἰσογώνιον γὰρ ἐστὶ τὸ αζβ, τρίγωνον τῷ αζδ, τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ αβ, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ αζ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος πλευρᾷ. Πάλιν ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ δα, τῆς δβ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ αβ, τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ βζ, ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βε, διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. ἡ βε, ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, τῇ αβ, εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ κείσθω ἡ αη, τῇ αβ, ἴση,

Eucl. Lib. 13. Fig. 19.



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ, ἐπὶ τὴν αβ, κάθετος ἤχθω ἡ Θκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αη, τῆς αγ, ἴση γὰρ ἡ να, τῇ αβ, ὡς δὲ ἡ να, πρὸς τὴν αγ, οὕτως καὶ τὴν αδ: τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ Θκ, πρὸς τὴν κγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ Θκ, τῆς κγ, πεντάπλασιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Θκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Θκ, κγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Θγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, ἡ δὲ Θγ, ἴση ἐστὶ τῇ γβ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς βγ, ὧν ἡ αδ, τῆς δβ, ἐστὶ διπλῆ. λοιπὴ ἄρα ἡ βδ, λοιπῆς τῆς δγ, ἐστὶ διπλῆ, τριπλῆ ἄρα ἡ βγ, τῆς γδ, ἐννεαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ γκ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γκ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, μείζων ἄρα ἡ γκ, τῆς γδ. Κείσθω τῇ γκ, ἴση ἡ γλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ λμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἔστι τῆς μὲν βγ, διπλῆ ἡ αβ, τῆς δὲ γκ, ἡ κλ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κλ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ κλ, ἄρα ἐξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ, τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος σύγκειται, ἔκτε τῆς ἐξαγώνου, καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ κλ, ἐξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ αν, τῇ λβ, ἑκατέρα τῶν αν, λβ, τοῦ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ λβ, ἐξαγώνου δὲ ἡ μλ, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ κλ, ἐπεὶ καὶ τῇ Θκ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν Θκ, κλ, διπλασίων τῆς κγ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ, ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν, ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζβ, κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον τὸ ο, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ νβ, ἡ νβ, ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρὰ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν αζ, πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς βε, δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ζβ, δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἓξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τετράρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο, ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ, τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν χωμάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου, καὶ κύβου πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ, ἥτε τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ἥτε πρὸς ἀλλήλας, ἥτε πρὸς τὰς εἰρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή. Ὅτι δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ μβ, τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς νβ, δείξομεν ὧδε. ἐπεὶ γὰρ ἰσογωνίου ἐστὶ τὸ ζδβ, τριγώνου τῷ ζαβ, τριγώνῳ, ἀνάλο-

γόν

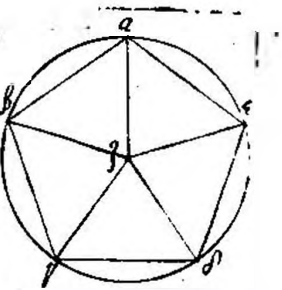
γόνειόν εἰσιν, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ βζ, πρὸς τὴν βα, καὶ ἐπεὶ ξεῖς δύο εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, διπλῆ δὲ ἡ αβ, τῆς βδ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, τετραπλάσιον, διπλῆ γὰρ ἡ αδ, τῆς δβ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αδ, τῆς βζ, πολλῷ ἄρα ἡ αλ, τῆς ζβ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ μὲν αλ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ κ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ κλ, ἑπτάπλευρον ἡ μὲν λκ, ἑξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ κα, δεκαγώνου. τῆς δὲ ζβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ νβ, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ λμ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς νβ, τῆς δὲ λμ, μείζων ἐστὶν ἡ μβ, πλευρὰ, πολλῷ ἄρα ἡ μβ, πλευρὰ ὑσα τῷ εἰκοσαέδρῳ μείζων ἐστὶ τῆς νβ, πλευρᾶς ὑσης τῷ δωδεκαέδρῳ.

Ἄλλως δὲ, ὅτι μείζων ἡ μβ, τῆς νβ. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ, τῆς δβ, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν δβ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ζαβ, τρίγωνον τῷ ζβδ, τρίγ: τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κλ, πενταπλάσιον, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κλ, ἴσοι τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, μεῖζόν ἐστι, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ λμ, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, πολλῷ ἡ μβ, τῆς νβ, μείζων ἐστὶν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ νβ, τῆς νζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζβ, νβ, μείζων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βζ, βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, μεῖζόν ἐστιν, ἡ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς νβ, ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ βζ, κατὰ τὸ ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ζβ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βν, ἡ διπλάσιον. τὰ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, δύο τῶν ἀπὸ τῶν βν, μεῖζόν ἐστι. Λέγω, ὅτι παρὰ τὴν εἰρημένην πεντε σχήματα, οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα, περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις, ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἀπὸ δύο ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται, ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων πρὸς σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, ὅσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας δίμοιρα ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, πᾶσα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπ' ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων, ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ

γωνία

γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριγώνων ἓξ μὲν αἱ περὶ κύβε γωνίαι περιέχονται, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ὀκτώ, ἑστοντι γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαὶ, ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μιᾶς ἓξ, αἱ τῶν δωδεκαέδρου, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ὀκτώ, ὕσπερ γὰρ τῆς τῶν ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς, καὶ πέμπτου ἐστοντι αἱ τέσσαρες γωνίαι, τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. ὥστε μηδὲ ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περιεχέσθαι συστήσεται γωνία, διὰ τὸ αὐτό. οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα σχήματα ἕτερον στερεὸν συστήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 20.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ τῶν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτω δεικτέον. Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε, δίχα ἄρα πέμπουσι τὰς πρὸς τοῖς α, β, γ, δ, ε, πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ ζ, πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ αζβ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ζαβ, αβζ, μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτης, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῶν πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

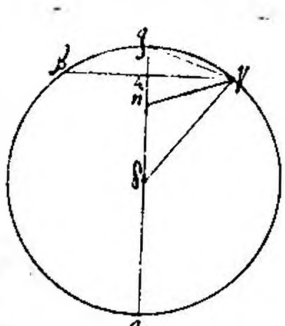
Τέλος τῦ Δεκάτου βίβλου τῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Η' ἀπὸ κέντρου κύκλου τινὸς, ἐπὶ τινὰ τῶν πενταγώνου πλευρὰν, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, καθετος ἀγομένη, ἡμίσεια ἐστὶ συναμφοτέρου, τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν αὐτῷ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ βγ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπὶ τινὰ τὸ βα, καθετος ἤχθω ἡ δε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ δε, εὐθεῖα ἡ αεζ. Λέγω, ὅτι ἡ δε, ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου πλευρᾶς τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ἐπεζεύχθωσαν αἱ δγ, δζ, καὶ κείσθω τῇ εζ, ἴση ἡ ηε, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ γ, ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. Ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς βζγ, περιφερείας, καὶ ἐστι τῆς μὲν ὅλης τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ αγζ, τῆς δὲ βζγ, ἡμίσεια ἡ ζγ, καὶ ἡ αγζ, ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ζγ, περιφερείας, πεξαπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῆς ζγ, ὡς δὲ ἡ αγ, πρὸς τὴν ζγ, οὕτως ἡ ὑπὸ αδγ, πρὸς τὴν ὑπὸ ζδγ, γωνίαν, πεξαπλῆ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ ζδγ, διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ εζγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εζγ, τῆς ὑπὸ ηδγ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ εζγ, ἴση τῇ ὑπὸ εηγ, διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ εηγ, τῆς ὑπὸ ηδγ, ἴση ἄρα ἡ δη, τῇ ηγ. ἀλλ' ἡ ηγ, τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση, ἄρα καὶ ἡ δη, τῇ ζγ, ἴση, ἐστι δὲ καὶ ἡ ηε, τῇ εζ, ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ δε, συναμφοτέρῳ τῇ εζ, ζγ, κοινὴ προσκείσθω ἡ δε, συναμφότερος ἄρα ἡ δζ, ζγ, διπλῆ ἐστὶ τῆς δε· καὶ ἔστιν ἡ μὲν δζ, ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ζγ, ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου, ἡ δε, ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ δεκαγώνου, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. φανερὸν δὲ ἐκ τῆς ἐν τῷ δωδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, (πόρισι ιβ': θεωρήματι) ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τινὰ πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου καθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Euclid. Lib. 14. Fig. 1.



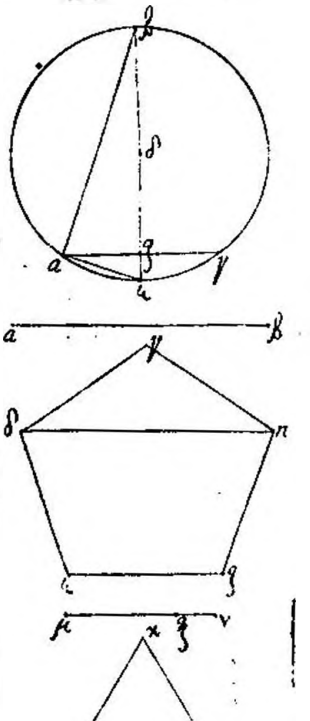
Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ο' αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πενταγώνου, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῇ εἰς τινὰ αὐτῶν σφαῖραν ἐγγραφομένῳ.

Τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀλεξέρου, ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ, πέντε χημάτων σύγκρισις, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῷ β': ἐκθέσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου.

δρε πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τῦ δωδεκαέδρε ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρε ἐπιφάνειαν, ὕπω καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον, πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. διὰ δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι καθετον ἀπὸ τῦ κέντρε τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρε πεντάγωνον, καὶ τὸ τῦ εἰκοσαέδρε βίγωνον. Γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τῦ δωδεκαέδρε πεντάγωνον, καὶ τὸ τῦ εἰκοσαέδρε βίγωνον, τῇ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Προγεγράφθω τοῦδε. ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν τὸ πενταγώνε ὑποτεινύσης δυθείας, πενταπλάσ: ἔσαι τῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τὸ κέντρε τὸ κύκλε.

Euclid. lib. 14. Fig. 2.



Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν τούτῳ πενταγώνε πλευρὰ ἔστω ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ κύκλε τὸ δ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ, καθετος ἡ δζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῆς βα, αγ, πεντάγωνα πενταπλάσια εἶναι τῦ ἀπὸ τῆς δε, πενταγώνε. ἐπεζεύχθω ἡ αε, πλευρὰ δεκαγώνου ἄρα ἡ αε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βε, τῆς δε, πεντάπλασιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βε, τῦ ἀπὸ τῆς δε, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς βε, ἴσα ἐστὶ τὰ ὑπὸ τὴν βα, αε, πεντάπλασια ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τὴν βα, αε, τῦ ἀπὸ τῆς δε, πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τὴν αβ, αε, καὶ δε, τῦ ἀπὸ τῆς δε, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δε, αε, ἴσα τῇ ἀπὸ τῆς αγ, τῇ ἰ: τῦ ιγ': πενταπλ: ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τὴν βα, αγ, τῦ ἀπὸ τῆς δε. Τούτε δεδειγμένε, δεικτέον, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος λαμβάνει τότε τῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τῦ εἰκοσαέδρε βίγωνον τὴν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομενῶν. Κείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ςὺ μὲν τὸ τῦ δωδεκαέδρε πεντάγωνον τὸ γδεζη. εἰκοσαέδρε δὲ βίγωνον τὸ κλθ. Λέγω, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε γδεζη, πεντάγ: καὶ τὸ κλθ, βίγ: Ἐπεζεύχθω ἡ δη, κύβε ἄρα πλευρὰ ἡ δη. ἐκκείσθω δή τις δυθεῖα ἡ μν, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῦ ἀπὸ τῆς μν, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δωδεκαπλασία τῆς ἐκ τὸ κέντρε τὸ κύκλε, ἀφ' ἧ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· τμηθήτω ἡ μν, κτ' τὸ ξ, καὶ ἔστω μειζον τμῆμα ἡ μξ, δεκαγώνε ἄρα ἡ μξ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῦ ἀπὸ τῆς μν, ἑξαπλάσιον δὲ τῦ ἀπὸ τῆς δη, τῇ ιέ: τοῦ ιγ': ἓξα ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς δη, ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ

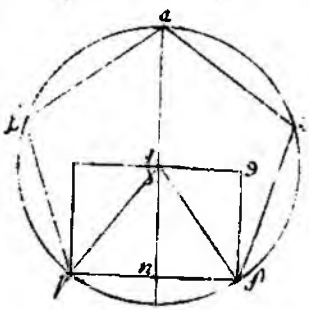
τῆς μν, ὡς δὲ ξία τὰ ἀπὸ τῆς δη, πρὸς πεύτε τὰ ἀπὸ τῆς μν, οὕτως ξία τὰ ἀπὸ τῆς γη, πρὸς πεύτε τὰ ἀπὸ τῆς μξ. ξία τοι γάρ τοι τὰ ἀπὸ τῆς γη, πεύτε τοῖς ἀπὸ τῆς μξ, ἰσά ἐστι, πεύτε δὲ τὰ ἀπὸ τῆς κλ, πεύτε τοῖς ἀπὸ τῆς μν, καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μξ, ἐστὶν ἴσα, πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἰσά ἐστι ξισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς δη, καὶ ξισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς γη, ξία δὲ ἀπὸ τῆς δη, καὶ ξία ἀπὸ τῆς γη, ἰσά ἐστι δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ γδεζη, προειδείχθη γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς δη, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γη, πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ γδεζη. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἰσά ἐστι δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ, ξίγωνον κύκλου. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κλ, ξιπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ, ξίγωνον κύκλου, δεκαπεύτε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ ἄρα διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ, ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τότε τὸ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου ξίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ᾖ περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ ξιακοντάκις τοῦ ὑπὸ μιᾶς τῆς πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου, ἰσόμετρον ἔσται τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦτο τὸ ζ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τινὰ γδ, κάθετος ἤχθω ἡ ζη. Λέγω, ὅτι τὸ ξιακοντάκις ὑπὸ τῆς γδ, ηζ, ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς αβγδε. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, ζδ. ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῆς γδ, ηζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ γδζ, (1) ξιγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ τῆς γδ, ηζ, δέκα ξίγωνά ἐστιν ἴσα, τὰ δὲ δέκα ξίγωνα, δύο ἐστὶ πενταγωνα, * καὶ πεύτε ἑξάκις, τὸ ἄρα ξιακοντάκις ὑπὸ τῆς γδ, ηζ, ἴσόν ἐστι δώδεκα πενταγώνοις, δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστι, τὸ ἄρα ξιακοντάκις ὑπὸ τῆς γδ, ηζ, ἴσόν ἐστι τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Eucl. Lib. 14. Fig. 3.



Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ ξίγωνον ἰσόπλευρον, ὡς τὸ αβγ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τοῦτο τὸ δ, κάθετος ἡ δε, τὸ ξιακοντάκις ὑπὸ τῆς βγ,

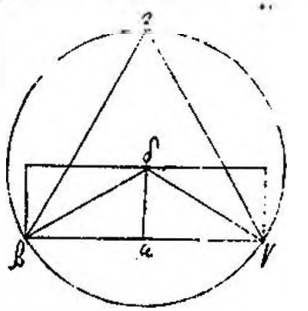
(1) Οἷον τὸ γθ, καὶ τὴν μά: τοῦ ά:

βγ, δε, ἴσόν ἐστι τῇ τῶ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν δε, βγ, διπλάσιόν ἐστι τῶ δβγ, τῇ αὐτῇ δύο ἄρα ἴσα ἐστί· ἴσά ἐστι τῇ ὑπὸ τῶν δε, βγ, δεκαπέντε ἴσα. ἓξ ἄρα ἰσόγωνα τὰ δβε, ἴσά ἐστι ἴσοι τοῖς ὑπὸ τῶν δε, βγ, ἓξ δὲ ἰσόγωνα, ὡς τὰ δεβ, ἴσά ἐστι δύο τοῖς αβγ, καὶ πενταδεκάκις, τὸ ἄρα ἰσακοντάκις ὑπὸ τῶν δε, βγ, ἴσόν ἐστιν εἴκοσι τοῖς αβγ, ἰσογώνοις, τετέστι τῇ τῶ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ὥστε ἔσαι ὡς ἡ τῶ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῶ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕπω τὸ ὑπὸ τῶν γδ, ζη, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δε,

ΠΟΡΙΣΜΑ.

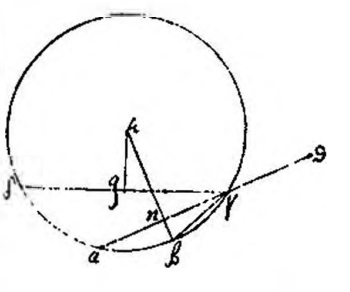
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὡς ἡ τῶ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῶ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕπω τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τῶ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τῶ κέντρου τῶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τῶ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τῶ κέντρου τῶ περὶ τὸ ἰσόγωνον κύκλου, ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῇ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, εἰκοσαέδρου, καὶ δωδεκαέδρου.

Eucl. Lib. 14. Fig. 4.



Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Τούτου δὴ λοιπὸν ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔσαι, ὡς ἡ τῶ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῶ εἰκοσαέδρου, οὕπως ἡ τῶ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τῶ εἰκοσαέδρου πλευράν.

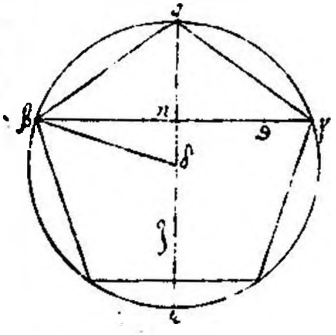


Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβανέτω τὸ, τι τῶ δωδεκαέδρου πενταγώνου, καὶ τὸ τῶ εἰκοσαέδρου ἰσόγωνον, τῇ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ δ αβγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν ἰσόγωνον μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ γδ, πενταγώνου δὲ ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῶ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τῶ ε, ἐπὶ τὰς γδ, γα, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ εζ, εη, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ εη, εὐθεῖα ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ αθ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τῶ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕπως ἡ αθ, πρὸς τὴν γδ. ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς εβγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ βε, καὶ ἔτι συναμφοτέρου μὲν τῆς εβγ, ἡμίσεια ἡ εη, τῆς δὲ βε, ἡμίσεια ἡ εζ, καὶ τῆς εη, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ εζ, ἔτι δὲ καὶ τῆς θγα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ γα, ὡς ἐν τῇ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη, ὡς ἄρα ἡ θα, πρὸς πρὸς τὴν γα, οὕπως ἡ εη, πρὸς τὴν εζ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θα, ζε, τῷ ὑπὸ τῆς γα, εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θα, πρὸς τὴν γδ, οὕπω τὸ ὑπὸ τῆς θα, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν

γδ, ζε, τῇ δὲ ὑπὸ θαε ζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν γα, ηε, ὡς ἄρα ἡ θα, πρὸς τὴν γδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς γα, ηε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς γδ, ζε, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ θα, πρὸς τὴν γδ.

Ἄλλως. Δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ, πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Προγεγραφέντος τοῦδε. Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ αβ, αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ δ, ἐπεζεύχθω διάμετρος ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ αδ, εὐθεῖα ἡ δε. καὶ κείσθω τῆς μὲν σδ, διάμετρος ἡμίσεια ἡ δζ. ἡ δὲ ηγ, τῆς γθ, ἕκτη ἔστω. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς αζ, βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ, ἀπὸ γὰρ τοῦ β, ἐπὶ τὸ δ, ἐπεζεύχθω ἡ βδ. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ, τῆς δζ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς αδ, ἡ αζ. πάλιν ἐπεὶ ἕκτη ἐστὶν ἡ ηγ, τῆς γθ, διπλῆ δὲ ἡ ηθ, τῆς θγ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ηγ, τῆς θη. καὶ τῶν ις: ἄρα τοῦ ς: ὡς ἡ ζα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ γη, πρὸς τὴν ηθ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς αζ, θη, τῷ ὑπὸ τῆς δα, γη, ἡ δὲ γη, ἴση ἐστὶ τῇ βη, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ, βη, ἴσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν αζ, θη, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αδ, βη, δύο ἐστὶ τρίγωνα: ὡς τὰ αβδ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αζ, ηθ, ἄρα δύο ἐστὶν, ὡς τὰ αβδ. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν αζ, ηθ, δέκα τρίγωνά ἐστι, δέκα δὲ τρίγωνα δύο ἐστὶ πενταγωνα, πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν αζ, ηθ, δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ηθ, τῆς θγ, τὸ ὑπὸ τῶν αζ, ηθ, διπλοῦν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν αζ, θγ, δύο ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν αζ, θγ, ἴσά ἐστιν ἑνὶ τῷ ὑπὸ τῶν αζ, θη, πέντε τοῖς ὑπὸ τῶν αζ, ηθ, τουτέστι δύο πενταγώνοις. ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ τῶν αζ, θγ, ἴσά ἐστιν ἑνὶ πενταγώνῳ, πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ τῶν αζ, θγ, ἴσά ἐστι τῷ ὑπὸ τῆς αζ, θβ. ἐπειδὴ πενταπλῆ ἐστιν ἡ θβ, τῆς θγ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αζ, θβ, ἴσόν ἐστιν ἑνὶ πενταγώνῳ. Τέτμηται ἄντος, νυνὶ ἐκκείσθω κύκλος, ὁ περιλαμβάνων τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῇ εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν αβγ, κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ βα, αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ ε, ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αε, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἔστω ἡ αε, τῆς εκ, διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ κγ, τῆς γθ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ αζ, πρὸς ὀρθὰς ἡ δμ, τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ δμ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδμ, τρίγωνον· καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αν, θβ, ἴσόν ἐστι τῷ πενταγ: τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αν, ηδ, τῷ αδμ, τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν αν, θβ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δν, ηα, οὕτω τὸ πενταγ: πρὸς τὸ τρίγων: ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αν, θβ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δν, ηα, ἡ βθ,

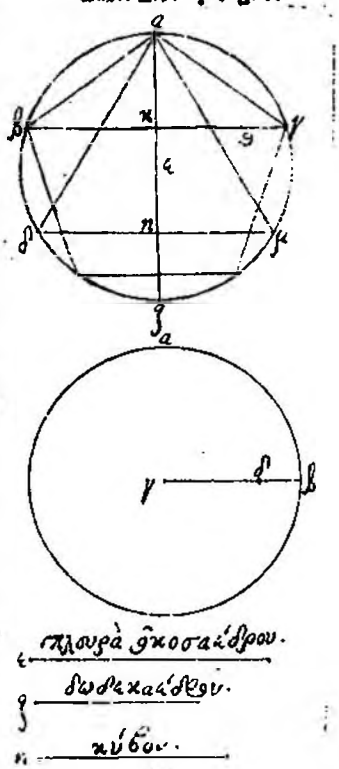
Eucl. Lib. 14. Fig. 5.



πρὸς

πρὸς τὴν δ η, καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ θ β, πρὸς εἴκοσι γ δ, οὕτω δώδεκα πεντάγωνα, πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τῆ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρυ. καὶ ἔστι δώδεκα μὲν αἱ β θ, δέκα δὲ αἱ β γ, ἡ μὲν γὰρ β θ, τῆς θ γ, ἐστὶ πενταπλῆ, ἡ δὲ β γ, τῆς θ γ, ἑξαπλῆ, δώδεκα ἄρα αἱ β θ, ἴσαι εἰσὶ δέκα ταῖς β γ, εἴκοσι δὲ αἱ δ η, δέκα εἰσὶν αἱ δ μ, διπλῆ γὰρ ἡ δ μ, τῆς δ η. ὡς ἄρα δέκα αἱ β γ, πρὸς δέκα τὰς δ μ, τουτέστιν ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν δ μ, οὕτως ἡ τῆ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρυ ἐπιφάνειαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν β γ, ἡ τῆ κύβυ πλευρὰ, ἡ δὲ δ μ, ἡ τῆ εἰκοσαέδρυ πλευρὰ, καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρυ ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν δ μ, τουτέστιν ἡ τῆ κύβυ πλευρὰ πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρυ πλευράν. Δεικτέον δή, ὅτι καὶ ἡ ἀθείας, οἱασδηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμοῦν τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμοῦν τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβυ πλευρὰ πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρυ πλευράν. Ἐν-

Eucl. Lib. 14. Fig. 6.



ςω κύκλος ὁ α β, περιλαμβάνων τό, τε τῆ δωδεκαέδρου πενταγωνον, καὶ τὸ τῆ εἰκοσαέδρυ ϗίγ: τῷ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐπεζεύχθω τὸ κοινὸν τῆ κύκλυ τὸ γ δ, καὶ προσκεβεβλήθω τις εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, ἀπὸ τοῦ γ, ἡ β γ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ γ δ, δικαγώνυ ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ γ δ, τῆ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένυ. Ἐγκεβεβλήθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ε, δωδεκαέδρυ δὲ ἡ ζ, κύβυ δὲ ἡ η. ἡ μὲν ἄρα ε, ϗιγώνυ ἰσοπλεύρυ ἐστὶ πλευρὰ, ἡ δὲ ζ, πενταγώνυ, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένυ. ἡ δὲ ζ, τῆς η, μεῖζόν ἐστι τμῆμα, καὶ ἐπεὶ ἡ ε, ἴσην ἐστὶ τῇ τῆ ἰσοπλεύρυ ϗιγ: πλευρᾷ, ἡ δὲ τῆ ϗιγώνυ τῆ ἰσοπλεύρυ πλευρὰ δυναμει ϗιπλασία ἐστὶ τῆς β γ, ϗιπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε, τοῦ ἀπὸ τῆς β γ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β γ, β δ, ϗιπλάσια τοῦ ἀπὸ γ δ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β γ, β δ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γ β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γ β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ, μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ ζ, τῆς η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ β, β δ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ, καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα τὸ

ἀπὸ

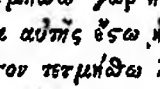
ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΡ· γ β, β δ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ζ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ β γ, γ δ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευράν, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτω τὰ ἀπὸ τῶν β γ, γ δ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γ δ, δ β, ὡς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν β γ, γ δ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γ δ, δ β, οὕτως εὐθεῖα, οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτως εὐθεῖα οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, καὶ ἔστιν ἡ μὲν η, κύβου πλευρὰ, ἡ δὲ ε, εἰκοσαέδρου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἕσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, ὧν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Δεικτέον δὴ, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαί τε εἰσὶ, καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό, τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τὸ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, ἴσαί εἰσι, πίπτουσι δὲ κάθετοι, ἰσοῦψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα, καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοῦψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν πυραμίδα ἧς βάσις μὲν τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πεντάγωνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας· καὶ δώδεκα πεντάγωνα, ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πεντάγωνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καί εἰσι δώδεκα μὲν πυραμίδες πεντάγωνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου. εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου, ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέ-

δρου

σαίδρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν αὐταλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτω. Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν αβ, εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ τὸ γ, μεῖζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ αγ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ δε, ἄκρον καὶ μέσον τετμήσθω λόγον κατὰ τὸ ζ, τὸ δὲ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἔστω ἡ δζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ ὅλη αβ, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν αγ, οὕτως ἡ ὅλη δε, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν δζ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν δε, εζ, τῷ ἀπὸ τῆς δζ, ἔστι δ' ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, οὕτω τὸ ὑπὸ δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, καὶ ὡς ὀκτάκις ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, οὕτω τὸ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. καὶ συνθέντι, ἔστιν, ὡς τὸ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, οὕτω τὸ ὀκτάκις ὑπὸ τῶν δε, εζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, οὕτω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ αβ, βγ, πρὸς τὴν αγ, οὕτω συναμφότερος ἡ δε, εζ, πρὸς τὴν δζ. συνθέντι, ὡς συναμφότεροι αἱ αβ, βγ, μετὰ τῆς αγ, πρὸς τὴν αβ, οὕτω συναμφότεροι αἱ δε, εζ, μετὰ τῆς δζ, πρὸς τὴν δζ, τετράκις ἄρα αἱ αβ, δε, πρὸς τὴν αγ, δζ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ, τετράκις ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δζ. Διὰ δὲ τοῦτο, ὅτι εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον τμηθείσης λόγον, ὃν ἔχει λόγον ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεδείγμεθα δὴ τοῦτο, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, ὧν εἰς τοὺς αὐτοὺς σφαῖραν ἐγγραφομένων. Προσαναγεγράφθω δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς αὐτὸ τὸ εἰκοσαέδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον.



ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου, λόγον ἔχουσιν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Τούτων δὲ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν

σφαῖ-

σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἔχει, ὃν ἡ Θείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ἡ δυναμένη τοῦ ὅλου καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τοῦ δυναμένου τοῦ ὅλου καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πρὸς τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἐστὶν ἡ Θείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τοῦ ὅλου καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, πρὸς τοῦ δυναμένου τοῦ ὅλου καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα, ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, τῶν εἰς τοὺς αὐτοὺς σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως ἡ Θείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τοῦ ὅλου καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, πρὸς τοῦ δυναμένου τοῦ ὅλου καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τῆς Δεκάτης τετάρτης τοῦ τῆς Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΥ P.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ, ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ,

Ὡς τισι δοκεῖ, ὡς ἄλλοις δὲ, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῆς πέντε σωμάτων πρώτης.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

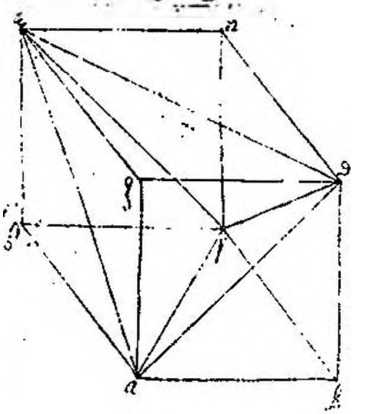
Βασιλείδης ὁ Τύριος, ὦ Πρόπαρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ συσταθεὶς τῷ περὶ ἡμῶν διὰ τὸν ἀπὸ τῶν μαθημάτων συγγενείαν σπουδαίως ἔσχεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε διαπλεύσας τὸ ὑπὸ Ἀπολλωνίου γραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τῶν δωδεκαέδρου, καὶ εἰκοσαέδρου, πρὸς εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ἔδοξαν πάντα μὴ ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν Ἀπολλώνιον. αὐτοὶ δὲ πάντα διακαθάραντες ἔγραψαν, ὡς ἐν ἀκολουθίᾳ τῷ πάντι. ἐγὼ δ' ὕστερον περιέτυχον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ, καὶ πειρώντι ἀποδεῖξαι ὑγιῶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου, καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην πρὸς τὸ προβλήματος ζητῆσαι. τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται, τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως, ὅσα δοκεῖν ὑπομνηματισάμενος ἔκεινα προσφωνῆσαί σοι διὰ τὸν ἐν ἅπασι Μαθήμασι, μάλιστα δὲ ἐν Γεωμετρίᾳ προκοπὸν, ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθησόμενα. διὰ τὸν πρὸς τὸν παρὰ συνήθειαν, καὶ τὸν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν δικαίως ἀκουμένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲν παύσασθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρξασθαι.

Πρό-

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ, ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ,

Ὡς τισι δοκεῖ, ὡς δ' ἄλλοις, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῶν πέντε σωμάτων δεύτερον.

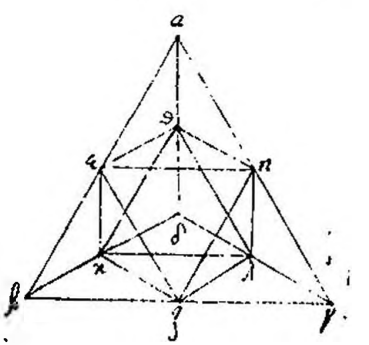
Eucl. lib. 15. Fig. 1.



Πρότασις Α': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁδοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, γε, αθ, εθ, θγ, φανερὸν δή, ὅτι τὰ αεγ, αθε, αθγ, γθε ἰσόπλευρά ἐστι, τετραγώνων γὰρ εἰσὶ διαμέτροι αἱ πλευραὶ, πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ αεγθ, ἣν ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον.



Πρότασις Β': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ αβγδ, καὶ πεπλάσθω δίχα ἑκάστη τῶν αὐτῆς πλευρῶν τοῖς ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θκ, θλ, εζ, ζη, καὶ αἱ λοιπαὶ, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῶν θκ, ηζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ θκ, τῇ ηζ, καὶ παράλληλος. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ θη, τῇ ζκ, ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ θηζκ. Λέγω,

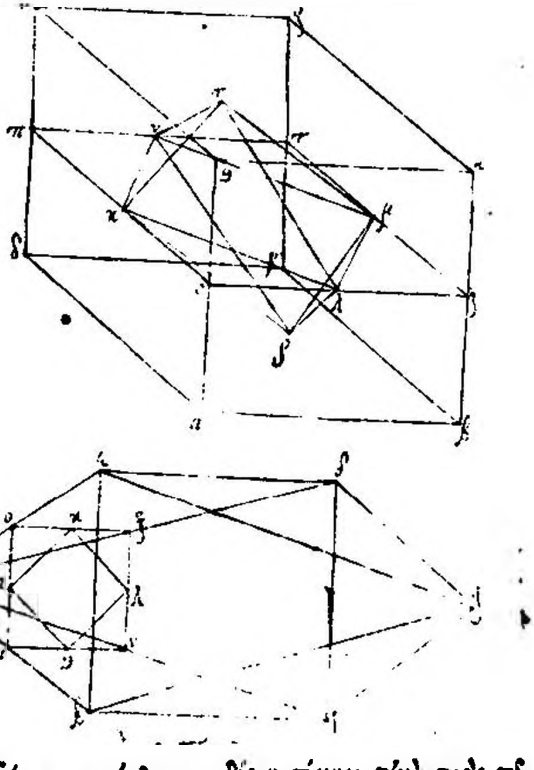
πρὸς ὀρθογώνιον, ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς κλ, κἀθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ εβζη, ζγεη, εζαη, θκζη. ὁμοίως δείξομεν καὶ τὰ παρὰ τὸ θκζη, πέντε γωνα ἰσόπλευρα εἶναι, καὶ ὀρθογώνια.

Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ἐφεστώτων τετραγώνων τὰ κ, λ, μ, ν. Λέγω, ὅτι τὸ κλμν, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθω διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, παραλληλόγραμμον τὸ ξοπτ. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν, ἡ μὲν πο, τῆς κο, ἡ δὲ ξο, τῆς ολ, ἴση ἐστὶν ἡ οπ, τῇ ξο, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ οκ, τῇ ολ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ολ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τῷ ἀπὸ τῆς μλ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ κν, νμ, τῇς πν, ντ, διπλάσιαι, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ κλμν, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον, εἰλήφθω τῶν βδ, εη, δύο πέντε γωνων τὰ κέντρα, τὰ ρ, σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρκ, ρν, σκ, σλ, σμ, σν, καὶ φανερὸν, ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα, τῇ γὰρ αὐτῇ λόγῳ ἀποδείξομεν καὶ ταῦτα.

Eucl. Lib. 15. Fig. 2.



Πρότ. Δ'. Πρόβ.

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ αβγ, αγδ, αβε, αδε, τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ η, θ, κ, λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ, ηκ, λκ, λθ. Λέγω, ὅτι τὸ ηθκλ, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθωσαν διὰ τῶν η, θ, κ, λ, ταῖς βγ, βε, γδ, δε, παράλληλοι αἱ μν, ξο, πρ, σμ. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ θ, κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον κύκλου, δίκα πέμνει τὴν πρὸς τῇ α, τῆς τοῦ αβγ, τριγώνου, ἴση ἄρα ἡ θν, τῇ μθ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ

μη,

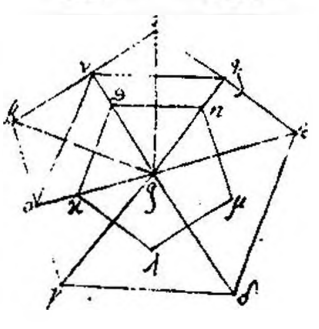
μη, τῇ πο, ἐπειδὴ δὲ ἡ μν, τῇ μο, ἴ τῇ οξ, ἔστιν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ νϑ, τῇ μπ, καὶ ἡ ϑμ, τῇ πο, καὶ ἡ μπ, τῇ οκ, αἱ δὲ ὑπὸ ϑμπ, καὶ ποκ, ὀρθαὶ, ὀξεῖα δὲ φανερὸν, ὅτι ἡ πϑ, ἴση ἐστὶ τῇ πκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ νϑκλ, ἐν σφαίρᾳ ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ ἡμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ μπϑ, οπκ, ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ϑπκ, ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ, τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ νϑκλ, δυνατὸν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ λαμβάνοντι τὸ νϑκλ, κοῦφα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντι τὰς μν, νξ, ξο, ομ, ἐπιζευχθείσας τὰς νϑ, ϑλ, λκ, κπ, καὶ εἰπεῖν τὸ νϑκλ, τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κοῦφα, καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἕξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Ε΄: Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

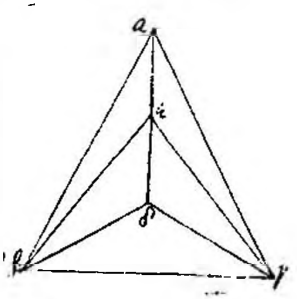
Ἐκκείσθω πενταγωνον τὸ εἰκοσαέδρου τὸ αβγδε, καὶ τὰ κοῦφα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ αζε, αζβ, βζγ, ζγδ, δζε, τρίγωνα, τὰ ηϑ, κ, λ, μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηϑ, ϑκ, κλ, λμ, μη, καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ζη, ζϑ, ζκ, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ ξ, ν, ο, δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ εα, αβ, βγ, τοῖς ξ, ν, ο, σημείοις, καὶ ὡς ἡ νξ, πρὸς τὴν νο, οὕτως ἡ ηϑ, πρὸς τὴν ϑκ, ἴση ἄρα ἡ ϑν, κο. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τῆ ηϑκλμ, πενταγώνῳ πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. Λέγω, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ νξ, νο, περὶ δύο τὰς ηϑ, ϑκ. ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερόν. Νενοήσθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ τοῦ αβγδε, πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κοῦφον τοῦ περὶ τὸ πενταγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ ν, σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ ζ, κάθετον ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ ϑ, παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ ζ, καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει, μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ ζ, καθέτου. Πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν ζη, ἐπὶ τὸ κοῦφον τοῦ περὶ τὸ αβγδε, πενταγώνου κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ ϑ, τῇ ἀπὸ τοῦ η, ἐπιζευγνυμένῃ ὀρθῇ, ᾧ περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς, δῆλον δὴ φανερὸν, ὅτι ἐν σφαίρᾳ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ηϑκλμ, πενταγωνον. Διὰ δὴ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἑκάτερος ἐρῇ ἡμῖν, πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν ὅτι, φανερὸν, ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται. δεῖ δὴ ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τρι-

Euclid. Lib. 15. Fig. 3.



γώνῳ, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ δωδεκαέδρου. Πάλιν ἐπεὶ δώδεκα πενταγώνους περιέχεται τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πενταγώνου ἔχει μοίρας ἑκατὸν ὀγδοήκοντα, ποιοῦσαι δωδεκάκις πέντε, γίνονται ἑξήκοντα. πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα, διὰ τί δὲ τὸ ἥμισυ ποιεῖ μοίρας; ἐπεὶ ἑκάστη πλευρὰ, κἂν τε ᾖ τριγώνου, ἢ τετραγώνου, ἢ πενταγώνου (ὡς ἐπὶ κύβου ἐκ δυοῖν λαμβάνεται.) ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου, καὶ πυραμίδος, καὶ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς. Εἰδὲ βέλτιον ἑκάστου τῶν πέντε χημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέρισε παρὰ τὸ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ. οἷον ἐπὶ τοῦ τὸ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι τρίγωνα, μέρισε παρὰ τὰ πέντε γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου, ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πενταγώνια περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέρισον παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις εἴκοσι γωνίας ὅσας τὸ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας. ἐξηπίδη πως ἑκάστου τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων σφαῖρα ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιωνοῦν δοθέντος, εὑρεῖα καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. Ἡ δὲ εὕρεσις ὡς Γεμῖνος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. Ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ' ὀρθὴν πέμπει γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος ἐκπεσόντος σφαίρας τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας, καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων, ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφούσης τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δ' ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαι περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζευγνυμένης κλίσεως, ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφούσης πενταγώνου, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῷ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκπεσόντος σφαίρας πενταγώνου ἐπιζευχθείσης, ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παρὰ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι, ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῷ ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου. Οὕτω μὲν οὖν ὁ εἰρημένος διακλίσεως αὐτῶν τῶν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστῳ φαινομένῳ.

νομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως, ἐπὶ δὲ τὸ τρόδηλον γενέσθαι τῷ ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικῷ θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστῃ σαφηνιστέον, καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος. Νοησάσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη, ἧς ἡ αβγδ, τὸ αβγ, βάσεως νοουμένου, κορυφῆς δὲ τὸ δ. καὶ τμηθείσης τῆς αδ, πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, εγ· καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ αδβ, αδγ, τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ αδ, αἱ βε, γε, ἄρα καθέτους εἰσὶν ἐπὶ τὴν αδ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βεγ, γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς αε, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εγ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δε, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ ἔστιν ἴση ἡ γε, τῇ εβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν βε, εγ, ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ βεγ. Ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν αβδ, αδγ, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αδ, καὶ ταύτῃ εἰσὶ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι αἱ βε, εγ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν, ἡ ὑπὸ βεγ, ἄρα γωνία ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ἐστί, καὶ ἔστι δεδομένη, δίδοται γὰρ ἡ βγ, πλευρὰ ἴσα τῷ τριγώνῳ, καὶ ἑκατέρα τῶν βε, εγ, κάθετος ἴσα τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ, κοίλοις πίνου τοῖς βγ, πέρασι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ βγ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. τοῦτο δ' ἦν τὸ εἰρημένον· καὶ ὅτι μὲν κοίλοις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν, ἑκατέρα γὰρ τῶν βε, εγ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βγ, οἱ δὲ κοίλοις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βγ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, εἴθ' ἐλάττων ᾖ, εἴθ' ἐφάπτωνται, εἴθ' τέμνωσιν, εἴθε μείζων παντὸς τέμνωσι, καὶ ὅπως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφὴς καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.



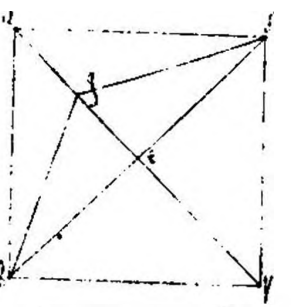
Eucl. Lib. 15. Fig. 4.

Σκοπείσθω πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ αβγδ, πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα. ἔστω δὲ ἡ αβγδε, πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. Τετμήσθω μία πλευρὰ οἱασοῦν τριγώνου ἡ αε, δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, δζ, ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ βζ, δζ, καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αε. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βζδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ τετραγώνου ἐστὶ τὸ αγ, διάμετρος δὲ ἡ βδ, τὸ ἀπὸ τῆς βδ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, λόγον ἔχει, ὡς ἐν τοῖς πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ, ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, ἴση δὲ ἡ δζ, τῇ ζβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ, τῶν ἀπὸ τῶν βζ, ζδ, μεῖζόν ἐστιν, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ

βζδ,

βζδ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν αβε, αδε, τεμνόντων ἀλλήλας, κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἡ αε, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐπιπέδων ἤμμεναι εἰσὶν, αἱ δὲ βζ, ζδ, περιέχουσαι ἀμβλεῖαν, ἡ ὑπὸ βζδ, ἄρα γωνία λειπτικὰ ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν αβε, αδε, ἐπιπέδων. ἐαν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ βζδ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. Ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τὸ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ αδ, καὶ ἀπ' αὐτῆς περάγωνον ἀναγέγραπται τὸ αγ, δέδοται καὶ ἡ βδ, διάμετρος οὖσα τοῦ περαγώνου, ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ βζ, ζδ, κάθετος τῶν τριγώνων. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βζε, γωνία δέδοται. ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ περαγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ὡς τὸ αγ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου, ὡς τῆς βδ, ἐαν κατὰ τοῖς τοῖς βδ, διαστήματι δὲ τῷ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλος ἐγγράφωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλας καὶ τὸ ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὰ κατὰ ἐπιζευγνύμεναι δύθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ βζδ, ἥτις ἐστὶν ἡ λειπτικὴ, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ φανερὸν δὲ σαφὲς μὲν, ὡς ἑκατέρα τῶν βζ, ζδ, ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ, μείζων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δζ, δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν ὁκτὼ πρὸς ἕξ, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς βδ, δυνάμει πεπλασία ἐστὶν, ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν βζ, ζδ, τῆς ἡμισείας τῆς βδ, καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

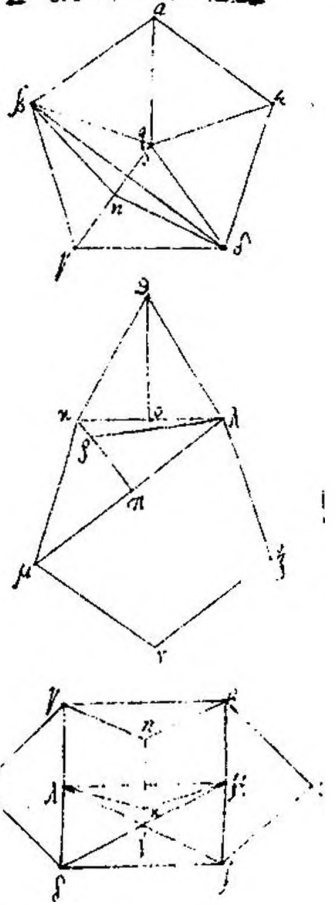
Euclid. Lib. 13. Fig. 5.



Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου τοιοῦτόν τι προτάγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος κορυφὴν ἔχουσα τὸ ζ, ὥστε τὰ περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι. ἔστω δὴ ἡ αβγδεζ, πυραμὶς μὲν εἰκοσαέδρου σχῆμα, πενταγώνου δὲ μία πλευρὰ εἶναι ἡ ζγ, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ βη, ηδ, ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ζγ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῇ φανερόν. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βδ, ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ βγδ, τοῦ προτάγωνου γωνίαν, ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ βηδ, ἐλάττονες γὰρ αἱ βη, δη, τῶν βγ, γδ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἡ λειπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῆς κλίσεως τῶν βζγ, γζδ, τριγώνων, ταύτης δοθείσης δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος προτάγωνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ προτάγωνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς τῆς βδ, δεδομένης. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν βη, ηδ, καθέτων, τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ βηδ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ προτάγωνου, ὡς τῆς βδ, διαστήματι δὲ τῷ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλας, ὡς κατὰ τὸ η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ

τὰ

τὸ β δ, ἐπιζευγνύμεναι διάμετροι περιέξουσι τὴν λειπομένην τῆς τε δύο ὀρθῆς τῆς πρὸς τῷ ἐπιπέδων κλίσεως, καὶ ἐπαύξει δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν, ὅτι ἑκατέρα τῶν β η, η δ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς β δ, εἶναι δὲ, καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθήσεται. Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲν τὸ θ κ λ, ἀπὸ δὲ τῆς κ λ, πενταγωνον ἀναγεγράφθω τὸ κ μ ν ξ λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μ λ, καὶ ἤχθω καθέτος τὸ θ κ λ, τριγώνου ἡ θ ο. Λέγω, ὅτι ἡ θ ο, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ λ, ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου. Ἀ΄χθείσης ἀπὸ τοῦ π, ἐπὶ τὴν μ λ, καθέτου τῆς κ π. Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κ λ π, μείζων ἐστὶ τριγώνου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς ὑπὸ κ θ ο. Συνεστάθω τῇ ὑπὸ κ θ ο, ἴση ἡ ὑπὸ π λ ρ, ἡ ἄρα π λ, καθέτος ἐστὶν ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἧς πλευρὰ ἡ ρ λ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ρ λ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ π, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, μείζων δὲ ἡ κ λ, τῆς λ ρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κ λ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ π, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ τέσσαρα πρὸς τρία, ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ ο, ὃν ὁ τέσσαρα πρὸς τρία, ἡ ἄρα κ λ, πρὸς τὴν λ π, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν θ ο, μείζων ἄρα ἡ θ ο, τῆς λ π.



Euclid. lib. 13. Fig. 8.

Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου ὕπω. Νενοήσθω σφαῖρα περιέχουσα τὸν κύβον, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκαέδρον ἀναγράφεται, τὸ α β γ δ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου, τὰ α ε β ζ η, η γ θ δ ζ. Λέγω δὴ ὅτι ἐπαύξει διεδομένῃ εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. Τετμήσθω ἡ ζ η, δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ ζ η, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ κ λ, κ μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μ λ. Λέγω δὴ πρῶτον, ὅτι ἡ ὑπὸ μ κ λ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, δέδεικται γὰρ ἐν τῇ ιγ΄. βιβλίῳ τῶν στοιχείων, ὅτι τῆς σφαίρας τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κ, καθέτος ἀγομένη, ἐπὶ τὸ α β γ δ, πεντάγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου. ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ λ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ μ κ λ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. σωματοδέδεικται δὲ ἐν τῇ αὐτῇ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς κ λ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

τῆς

τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε τὸν αὐτὸν καὶ τῶν κμ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς μλ, τῆς ἄρα ὑπὸ μκλ, γωνίας δοθείσης ἡ λειπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἔγκλισις ἔσται τῶν ἐπιπέδων, δηλονότι δεδομένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ αβγδ, πέραγ: ὑποτεινούσῃ τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου. δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον, δέδοται ἄρα καὶ μλ, δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν μκ, κλ, καθότι γάρ εἰσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αβ, ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης, ἐπὶ τοῦ παράλληλον αὐτῇ πλευρᾷ τοῦ πενταγώνου, ὡς τοῦ ζη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἡ λειπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως· καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἴπον, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου, ἐπιζευχθαι τοῦ ὑποτεινουσαν ὑπὸ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴσῃ γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου, καὶ κεκλιμένοις πρὸς πέρασιν αὐτοῖς, διασήματι δὲ τῷ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένῳ καθέτῳ, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πενταγώνου πλευρὰν, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, αἱ κλ, κμ, γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου, ἐπὶ τὰ κεκλιμένα ἐπιζευχθαι εὐθείας πεμφθείσας τοῦ λειπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων, ὅτι γὰρ ἡ κλ, καθότι μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις σωαποδέδεικται πρό.

Τέλος τοῦ Δεκάτου πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Ἐπειπερ δύο τῆς Ἐπιφανείας τὰ εἴδη, ἐπίπεδός φημι καὶ σφαιρικὴ, ὡς ἐν τῷ τῶν ὅρων Ἑρμηνείᾳ τῷ α: τῷ τῶ στοιχειωτῆ ἔφηται βιβλίων, καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος βάσις ἐστὶ καὶ ὑποκείμενον τῶν ἐπιπέδων παντων χημάτων, ἧς ἄνευ οὐδὲν τῶν πιπτων ὑφισασθαι δυνατα, καὶ τῇ αἰσθησει ὑποπίπτειν, ἡ δὲ σφαιρικὴ τῶν σφαιρικῶν. πρὸς γνῶσιν μὲν τῶν ἐν ἐπιπέδοις προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἱκανά εἰσι τὰ τῶ Εὐκλ: ἓξ βιβλία, ὡς εἰς λόγον στοιχείων πάντις ὅτι μάλισα συμβάλλονται, καὶ τὰ ἐν τῷ α: τμήματι τῆς Γεωμετρίας. πρὸς δὲ τὴν τῶν σφαιρικῶν κατάληψιν, εἰ καὶ πολλοὶ τῶν πάλαι Ἑλλήνων ἀμεθόδως στοιχειώδη τινὰ θεωρήματα καὶ προβλήματα ἐξέθεντο, καὶ πληρεσάτην περὶ αὐτῶν πεποιήκασιν Ἑρμηνείαν, ὧν εἷς καὶ Θεοδόσιος ὁ φιλόσοφος. Οἱ μακρὸς μέντοι χρόνος, καὶ αἱ τῶν γραμμάτων μέγισαι μεταβολαὶ, καὶ αὐτὴ ἡ τῆς γενέσεως τοιαύτη κατάπτωσις, καὶ παῦτα πάντα σωὶ τοῖς ἄλλοις, κατηναλώσαντό τε καὶ ἐξηφάνισαν, ὡς μηδὲ εἰ ὅλως ποτὲ γεγόνασι πιστεύεσθαι. Ἀνὴρ δέ τις τῶν ἐλλογίμων, καὶ τῆ ἱερᾶ τῶν καθ' ἡμᾶς καταλόγω ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμώμενος, ἐν ᾗ καὶ τὴν Ἑλλάδα φωνὴν ἐξέμαθεν, εἰς Ἑνετίας παρεγένετο, κἀκεῖ διὰ τῆς λατινίδος ἀκριβῶς τὴν μαθηματικὴν ἐκδιδαχθεὶς ἐπιστήμην, καὶ πολλὴ περὶ αὐτὴν τὴν σπουδὴν καταβαλόμενος, πρὸς τοῖς ἄλλοις αὐτῆ φιλοπονήμασι, καὶ τὰ παρὰ Θεοδοσίῳ περὶ σφαιρικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἓξ βιβλία ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλλάδα μετήνεγκεν, ὀξὺ ἀλλοβίων τὸ οἰκεῖα ἐρανισάμενος. Ἐπεὶ δὲ μεγίστης ἔχεται δυχερείας καὶ ἀσαφείᾳ πολλῇ ἐπισκιάζεται, ἠδοξίμοι καὶ παῦτα ἀνακαλῦψαί τε καὶ εἰς φῶς ἀγαγεῖν, ὥσπερ δὴ καὶ τ' ἄλλα τῶν αὐτῆ φιλοπονημάτων, καὶ τῦτο γένοι πρὸς χάριν τῶν φιλομαθῶν, καὶ γυμνάσιον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἕρασῶν. Τῇ γὰρ Ἀστρονομίᾳ, καὶ ἄλλοις τισὶ, περίτε τῆς ὕρανίᾳ καὶ ἐπιγείᾳ καταγινομένοις σφαίρας, ἡ τῦτων προθεωρία ἀναγκαία, ἡ τοῖς ἄλλοις τὰ τῶ Εὐκλ: στοι-

χεῖα. ἡμεῖς δὲ ἐν τῇ περὶ τῶν δυνατῶν προβαλλόμεθα πόνον πρὸς ἀκριβῆ ἑκάστων ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἀπάντησιν, τῷ ὑπεροχὴν ἑκατέρᾳ, τῇ τε γραφάδος ἕνεκα, καὶ οἱονεὶ συμφυομένῃ, καὶ ἀνεγμαπάδος συμπομπίας χάριν, καὶ τῇ λίαν ἀπεμφύτῳ καὶ ἐφαπλωμένῃ ἀποφέυγοντες, καὶ μέσῳ τινὰ τῶν ὁδὸν βαδίζοντες. ὅσοι δὲ τῶν ἑρασταὶ ἀκριβείας καὶ πᾶσα ὀφείλουσιν ἀποδέχεσθαι, καὶ τῷ δυνατῷ περὶ αὐτῶν καταβάλλεσθαι σπουδῇ, ὁ γὰρ ἐν αὐτοῖς ἀκριβῶς προγυμνασθεὶς, ἧττον δυσπόριστα τῶν ἄλλων ἀντιλαμβάνεσθαι, ὅσα τῶν ἐσφαίρᾳ ἁπλῶς θεωρημένων προβάλλονται.

Οἱ Ὅροι.

Α': Σφαῖρα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσί.

Β'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται.

Γ': Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, καὶ περατουμένη, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιφέρεσθαι δυνάται.

Δ': Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τοῦ ἄξονος πέρατα.

Ε': Πόλοι δὲ κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένου τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ς': Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Ζ': Κύκλοι μέγιστοί εἰσιν ἐν σφαίρᾳ, οἱ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενοι ἢ δίχα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Η': Κύκλοι ἐλάσσονες εἰσίν, οἱ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας, καὶ εἰς δύο ἄνισα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

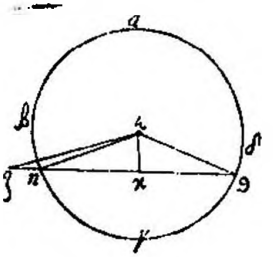
Θ': Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἐξ ἴσου τῷ οἰκείῳ ἀφιστάμενοι πόλῳ, ἢ ὧν ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τοῦ οἰκείου ἀφιστάμενος πόλου.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ε'αν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καθέτος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ, ἐντὸς πεσεῖται τῆς σφαίρας.

Τμηθέτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, τῷ τυχόντι ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένη καθετος ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ εζ, συμβαλλουσα τῷ πέμποντι τὸν σφαῖραν ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ζ. διήχθω γὰρ διὰ τοῦ ζ, ἡ ζηθ, διὰ δὲ τοῦ ε τῷ ζηθ, διάμετρος πέμπουσα τὴν σφαῖραν κατὰ τὰ η, θ· καὶ τῆς ηθ, διχα τμηθείσης κατὰ τὸ κ, ἐπεζεύχθω ἡ ηε, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τὰ παρ' αἱ εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, τῇ κθ, ἴση καὶ τῷ κατασκευῇ, τῶν ἄρα εηκ, εθκ, βιγώνων αἱ εη, ηκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς εθ, θκ, κοινὴ δὲ ἡ εκ, παίπερ καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι κατὰ τὴν ἡ: τὰ ἄρα στοιχεῖα τὰ, ὥστε ἡ ὑπὸ εκη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εκθ, ἔστι δὲ καὶ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ εζκ, ὀρθὴ, ἄρα αἱ δύο τὰ εζκ, βιγ: γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον καὶ τὴν εζ: τὰ αὐτὰ, οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται, ἀλλ' ἐντὸς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

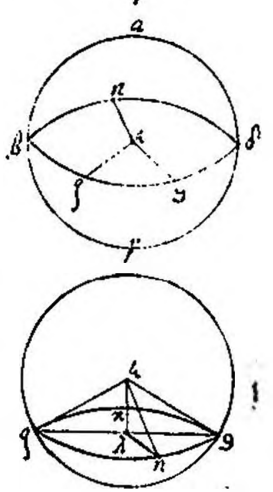
Theod. Sf. 3 Lib. 1. Fig. 1.



Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ε'αν σφαῖρα οἱῳδήποτε τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος ἐστί.

Τμηθέτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, ἐπιπέδῳ τῷ τυχόντι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας καὶ τοῦ πέμποντος αὐτὴν ἐπιπέδου τὸ βζδη, χῆμα. Λέγω δὴ τὸ βζδη, κύκλον εἶναι. ἐπεὶ δὲ τὸ πέμπον ἐπίπεδον, ἡ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται τῆς σφαίρας, ἡ ἐκτὸς τοῦ κέντρου, κείσθω ἀπ: διὰ τοῦ κέντρου διέρχεσθαι, ὡς τὸ βζδη. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ ε, ἀχθήτωσαν διάμετροι ἐπὶ τῆς βζδη, κοινῆς τομῆς, αἱ εζ, εθ, εη, καὶ γὰρ τὸν ἀπ: ὅρον τὰ παρόντος αἱ εζ, εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε καὶ τὸν ιε: ὅρον τὰ ἀπ: τὰ στοιχ: καὶ τὸν θ': τὰ γ': τὰ αὐτὰ ἡ βζδη, κοινὴ τομὴ, κύκλος ἐστί.



Κείσθω β': διέρχεσθαι τὸ πέμπον ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω κοινὴ αὐ-

αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας τομὴ τὸ ζηθκ, χῆμα, λέγω ὅτι, κύκλον εἶναι. πίπτω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου καθέτους ἐπὶ τὸ πέμνον ἐπίπεδον, ἥτις καὶ τῶν ἀνωτέρω ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἔστω δὴ αὕτη ἡ ελ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εζ, εη, εθ, λζ, λη, λθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ελ, καθετός ἐστι πρὸς τὸ πέμνον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας καὶ τὸν γ'. ὅρον τοῦ α. τοῦ στοιχ. ἅπτονται δὲ αὐτῆς, αἱ λζ, λη, λθ, ἄρα ἑκάστη τῶν ὑπὸ ελζ, ελη, ελθ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι, καὶ καὶ τῶν μζ'. τοῦ α. τοῦ αὐτοῦ, τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ελ, λζ, πλευρᾶς. ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εζ, πλευρᾶς· τὰ δὲ ἀπὸ τοῖς ελ, λη, τοῖς ἀπὸ τῆς εη, καὶ τὰ ἀπὸ τοῖς ελ, λθ, τοῖς ἀπὸ τῆς εθ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τοῖς εζ, εη, εθ, πλευρᾶς ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τὸ καὶ τὰς εζ, εη, εθ, ἴσας εἶναι καὶ τὸν α. ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τοῖς ελ, λζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τοῖς ελ, λη, καὶ τοῖς ἀπὸ τοῖς ελ, λθ, χωρὶς, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ελ, συναπολείπονται τὰ ἀπὸ τοῖς λζ, λη, λθ, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ λζ, λη, λθ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸν ῥηθέντα α. ὅρον ἡ ζηθκ, κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας, καὶ τοῦ πέμποντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δυνάμεθα σωματογεῖν, ὅτι τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου, τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ὡς ἐπὶ τοῦ α. δέδεικται χήματος.

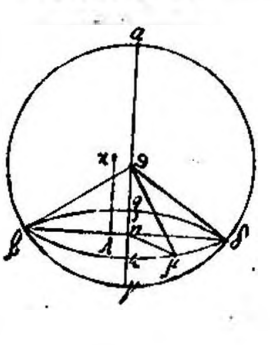
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι δὴ καθέτου ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ β'. χήματος.

Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 2.



Ζητήσω τὸ κέντρον τῆς αβγδ, δοθείσης σφαίρας, εἰς ἣν εὑρεῖν δὲ τέμνω τυχόντι ἡ αβγδ, σφαῖρα ἐπιπέδῳ τινί. καὶ ἐπεὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου, κύκλος ἐστὶ, καὶ τοῦ ἀνωτέρω, παντὸς γε καὶ τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ βεδζ, κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, δοθείσης σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. Εὑρεθήτω δὴ καὶ τοῦ γ'. τοῦ στοιχ. τὸ κέντρον τοῦ βεζδ, κύκλου, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ η, ἀφ' οὗ αὐξάσθω κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ, κύκλου ἡ ηα, περατωσάτω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ α, καὶ γ. εἶτα τμηθήτω ἡ αγ, δίχα καὶ τὸ θ, καὶ τὸ θ, σημ-

σημεῖον, ἔσαι κοῖλον τῆς αβγδ σφαίρας. ἡ γὰρ ἐκτὸς ἐστι τῆς αγ. εἰδὲ δυνατὸν, ἔστω τὸ κ, καὶ ἀπὸ τῆ κ, πίπτω κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἡ κλ, καὶ κῶ τὸ β: πόρισμα τῆς ιωστέρω, τὸ λ, ἐστὶ κοῖλον τῆ βεδζ, κύκλυ, ὅπερ ἄτοπον, εὕρηται γὰρ τὸ η, οὐκ ἄρα ἐκτὸς τῆς αγ, τὸ κοῖλον ἐστὶ τῆς αβγδ, σφαίρας, ὅτι δὲ τὸ θ, δῆλον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ θβ, θδ, θμ, ημ. καὶ ἐπεὶ ἡ θη, κάθετος ἐστι φρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆ βεδζ, κύκλυ, καὶ φρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, κῶ τὸν γ: ὅρον τοῦ ια: τῆ ϛοιχειωτῆ, αἱ ἄρα ὑπὸ θηβ, θηδ, θημ, ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ ἡ ηβ, ηδ, ημ, ἴσαι, ἄρα τῶν θηβ, θηδ, θημ, ϛιγώνων αἱ θη, ηβ, θη, ηδ, θη, ημ, ἴσαι εἰσι, καὶ γωνίας ἴσας περιέχυσιν. ἄρα καὶ τλὼ δ': τῆ α: τῆ ϛοιχειωτῆ αἱ θβ, θδ, θμ, ἴσαι εἰσι, καὶ κῶ τὸν α: ὅρον τῆ παρόντος, τὸ θ, κοῖλον ἐστὶ τῆς αβγδ, σφαίρας. ὅπερ ἰῶ τὸ φροσαχθέν.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τύτυ δῆλον, ὅτι τὸ τῆς σφαίρας κοῖλον ἐπὶ τῆς διὰ τῆ κοίλυ τοῦ ἐλάττονος ἐν αὐτῇ κύκλυ ἀγομένης καθέτυ ἐστί.

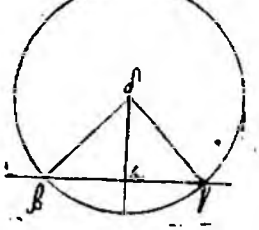
Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἐὰν ἡ τομὴ τῆς διὰ τῆ κοίλυ τῆ κύκλυ, δὸς εἰπεῖν τῆς αγ, συμπέσῃ τῇ κοίλῳ τῆ κύκλυ, τὸ αὐτὸ ἔσαι κοῖλον τῆς τε σφαίρας καὶ τῆ κύκλυ.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἡ σφαῖρα ὐχ ἅπτεται τῆ ἐπιπέδυ κῶ πλείοσι σημείοις, ἢ ἓν.

Σφαῖρα ἡ αβγ, ἁπτέσθω τοῦ τυχόντος ἐπιπέδυ. Λέγω, ὅτι ἅπτεται τύτυ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἁπτέσθω κατὰ δύο τὰ β, καὶ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἀπὸ τῆ δ, κοίλυ τῆς σφαίρας πίπτω κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, δγ, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν δεβ, δεγ, ϛιγώνων ὀρθογωνίόν ἐστι κῶ τὸ ε, παίπως γε ἡ εδ, ἐλάττων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν δβ, δγ, κατὰ γὰρ τλὼ ια: τῆ α: τῆ ια: τῆ αὐτῆ, ἄρα καὶ τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον ἐκτὸς τῆς σφαίρας πίπτει, ὥστε πέμνει τλὼ σφαῖραν, καὶ ὐχ ἅπτεται, ὑπετέθη δὲ ἅπτεσθαι ταύτης, ἄτοπον ἄρα. ὥστε δῆλον, ὅτι ὐ κῶ πλείοσα, ἢ εἷ σημεῖον ἡ σφαῖρα τῆ ἐπιπέδυ ἅπτεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 3.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

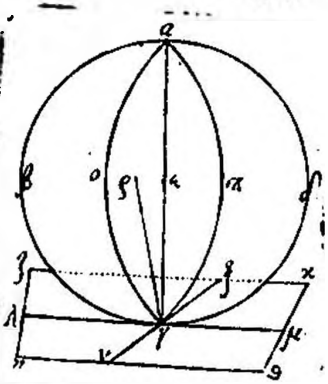
Δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡ δύο τινὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐδόθη ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα ἅπτηται ἐπιπέδου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἁφὴν ἀπὸ εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον.

Ἁπτέσθω ἡ αβγδ, σφαῖρα, ἧς κέντρον τὸ ε, τοῦ ζηθκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ, σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, κέντρου ἀχθήτω ἐπὶ τὸ γ, ἡ εγ. Λέγω, ὅτι ἡ εγ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ηκ, ἐπίπεδον. Τμηθήτω ἡ σφαῖρα δυσὶν ἐπιπέδοις διὰ τῆς εγ, διερχομένοις, ὥστε τὸν αγ, κοινὸν αὐτῶν εἶναι τομὸν, μηδὲ τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου κοινὰς εἶναι τομὰς τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τὰς λμ, νξ. ἡ δὲ ἐπὶ τὸν β': τοῦ παρόντος ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ πεμένοντος ἐπιπέδου τὸν σφαίραν, ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλος ἐστὶ, παίσως γὰρ τὸ, π αβγδ, ἡ αογπ, χῆμα κύκλος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἑκάτερος τῶν αβγδ, αογπ, κύκλων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ τοῦτο αβγδ, ἢ αογπ, κύκλου ἢ τὸ δ': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, ἡ εγ, ἡμιδιάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ἅπτεται δὲ ἡ σφαῖρα τοῦ ηκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ, διὰ τοῦ γ, διήκουσαι αἱ λμ, νξ, κοιναὶ τομαὶ τοῦτο ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας, καὶ τοῦ πεμένου αὐτοῦ, ἄρα ἡ μὲν λμ, ἅπτεται τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ· εἰ γὰρ μὴ ἅπτονται, ἀλλὰ τέμνουσι τὸν κύκλον, ἐντὸς πίπτουσι τῆς σφαίρας καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτοῦ, καὶ ἐπομένως ἐδείχθη τὸ ηκ, ἐπίπεδον ἅπτεται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἐναντίον ἐστὶ τῇ ὑποθέσει· ἅπτεται ἄρα ἡ μὲν λμ, τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ. καὶ καὶ τοῦ ιά: τοῦ γ': τοῦ στοιχείου, ἡ εγ, κάθετός ἐστιν ἐφ' ἑκατέρας τῶν λμ, νξ. ὥστε καὶ τοῦ δ': τοῦ ιά: τοῦ αὐτοῦ ἡ εγ, κάθετός ἐστὶ καὶ ἐπὶ τὸ ζηθκ, ἀπτόμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sph. Lib. 1. Fig. 4.



Η Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

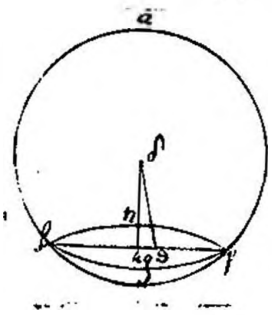
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἁφῆς τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀναχθῇ ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, ὡς ἡ γα, τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς ἀναχθείσης ἔσται καθέτου· εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη τούτου, ὥσπερ τὸ ρ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ργ, κάθετος

θεῖσα ἔσται, καὶ τὰ ἥδη εἰρημένα, ὑπὸ τὸ ηκ, ἐπίπεδον, ὑποπέσῃ δὲ καὶ ἡ εγ, ἄποπον ἄρα καὶ τῷ ιγ': τὸ ιά:

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ε'ὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν κέντρον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον.

Ἀ'χθήτω ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς αβγ, σφαίρας ἐπὶ τὸ ε, κέντρον τοῦ βζγη κύκλου ἐλάσσονος ἡ δε. Λέγω τῷ δε, κάθετον εἶναι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζγη, κύκλου, εἰ γὰρ μή, πιπτέτω ἡ δθ. καὶ ἐπεὶ ἡ δθ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζγη, κύκλου ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ βζγη, κύκλου, καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὑπεκείσθω τὸ ε, κέντρον εἶναι τοῦ βζθη, κύκλου, ἄποπον ἄρα. ὥστε ἡ δθ, οὐκ ἔστι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζγη, κύκλου ἐλάσσονος. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις, ἡ δε, ἄρα ἡ τὸ κέντρον ἐπιζευγνύουσα τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βζγη, κύκλου ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 5.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διήρχεται.

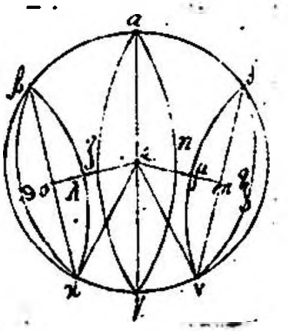
Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου, διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀμάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσὶ, καὶ ἀμάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, ἔτι δὲ οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τῷ ἐγγύτερον ἐλάσσονες εἰσί.

Ἔ'στωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλοι οἱ αζγη, βθκλ, δμνξ, ὧν ὁ μὲν αζγη, διὰ τοῦ ε, κέντρου διηρχέσθω τῆς σφαίρας, οἱ δὲ βθκλ, δμνξ, ἐκτὸς τοῦ κέντρου ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ὁ αζγη, κύκλος μέγιστός ἐστιν. Ἔ'στωσαν γὰρ κέντρα τῷ βθκλ, δμνξ, κύκλων τὰ ο, π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εο, επ, εκ, εν, εγ. καὶ ἐπεὶ καὶ τοῦ αὐτέρου, ἑκατέρα τῷ εο, επ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, παντωγε αἱ ὑπὸ εοκ, επν, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὥστε ἡ μὲν εκ, μείζων ἐστὶ τῆς εο, ἡ δὲ εν, τῆς επ, κατὰ τοῦ ιθ': τοῦ εἰς τοῦ

στοιχειωτῶ· ἀλλ' ἑκατέρα τῆς ε κ, ε ν, ἴση ἐστὶ τῇ ε γ, καὶ τὰ δ: ὅρον, ἄρα καὶ ἡ ε γ, μείζων ἐστὶ τῆς π κ ο, καὶ ν π. ἔστι δὲ ἡ μὲν ε γ, ἡμιδιάμετρος τῶ α ζ γ η, κύκλου, ἡ δὲ κ ο, τῶ β θ κ λ, καὶ ἡ ν π, τῶ δ μ ν ξ, ἄρα ὁ α ζ γ η, κύκλος ὁ διὰ τῶ ε, κέντρου διερχόμενος μείζων ἐστὶν ἑκατέρου τῶν β θ κ λ, δ μ ν ξ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὁ αὐτὸς α ζ γ η, μείζων καὶ παντὸς ἄλλου, μέγιστος ἄρα ὁ διὰ τοῦ κέντρου. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ α ζ γ η, κύκλος μέγιστος, λέγω ὅτι διὰ τῶ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται· εἰ γὰρ μή, ὁ διὰ τῶ κέντρου διερχόμενος μείζων ἔσται τοῦ α ζ γ η, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ μέγιστος, ἄτοπον ἄρα, οἱ μέγιστοι ἄρα κύκλοι διὰ τῶ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχονται.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 6.



Ἐστωσαν δὲ αἱ ε ο, ε π, ἴσαι, ὥστε τοὺς β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλους ἐξ ἴσου τῶ κέντρου ἀφίσασθαι. Λέγω ὅτι οἱ β θ κ λ, δ μ ν ζ, κύκλοι ἴσοί εἰσι, κατὰ γὰρ τὰ μζ: τῶ α: τοῦ στοιχειωτοῦ τὰ μὲν ἀπὸ τῆς κ ο, ο ε, πλευρὰ γωνια ἴσα εἰσὶ τῇ ἀπὸ τῆς ε κ, τὰ δὲ ἀπὸ τῆς ν π, π ε, τῇ ἀπὸ τῆς ε ν, ἀλλ' αἱ ε κ, ε ν, ἴσαι εἰσὶν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῆς κ ο, ο ε, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν π, π ε, ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ο ε, π ε, ἴσων πλευρῶν, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κ ο, ν π, καὶ ἑπομένως ἡ κ ο, τῇ ν π, ὁμοίως ἴση ἐστὶν, ἀλλ' ἡ μὲν κ ο, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ β θ κ λ, κύκλου, ἡ δὲ ν π, τοῦ δ μ ν ξ, ἄρα οἱ β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλοι ἴσοί εἰσιν. ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν, δῆλον, ἔσωσαν γὰρ ἴσοι οἱ β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἑκάτερος ἐξ ἴσου τῶ ε, κέντρου ἀφίσαται, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ καὶ τὰ ῥηθεῖσαν μζ: τὰ ἀπὸ τῶν κ ο, ο ε, πλευρὰ γωνια ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ε κ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ν π, π ε, τῇ ἀπὸ τῆς ε ν, αἱ δὲ ε κ, ε ν, ἴσαι εἰσὶ, παντὸς καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κ ο, ο ε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν π, π ε. ἀφαιρεμένων δὲ τῆς ἀπὸ τῶν κ ο, ν π, ἴσων, ἡμιδιάμετροι γὰρ ἴσων κύκλων, ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν ο ε, π ε, πλευρὰ γωνια ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ ο ε, π ε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα καὶ τὸν ς: ὅρον τοῦ παρόντος οἱ β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλοι ἐξ ἴσου τῶ ε, κέντρου ἀφίσανται.

Ἐστω πλευρὰ ὁ μὲν β η γ θ, ἀπώτερον τοῦ ζ, κέντρου τῆς α β γ δ ε, σφαίρας, ὁ δὲ ε λ δ μ, ἐγγύτερον, ὅπου ἔστω ἡ ζ κ, μείζων τῆς ζ ν. Λέγω, ὅτι ὁ β η γ θ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ε λ δ μ, καὶ γὰρ τὰ ῥηθεῖσαν μζ: τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, κ ζ, πλευρὰ γωνια ἴσα ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς γ ζ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δ ν, ν ζ, τῇ ἀπὸ τῆς ζ δ, ἴσαι δὲ αἱ ζ γ, ζ δ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, κ ζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δ ν, ν ζ. ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζ κ, ζ ν, ἀνίσων, ἐναπολείπεται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, δ ν, ἄνισα, μείζων δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡ ζ κ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζ ν, μείζων

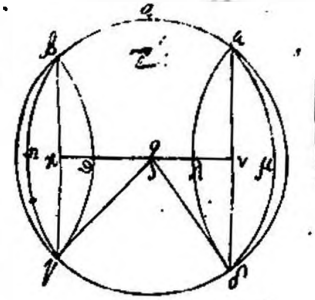
ζων ἄρα αὐτιπεπονθότως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δν, τῷ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἑπομένως ἡ δν, τῆς γκ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μὲν δν, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ ελδμ, ἡ δὲ γκ, βηϑ, ἄρα ὁ ελδμ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ βηγϑ, τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοι κεῖνται, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου ῥᾴστα σιωπᾶται, ὅτι πάντες οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι ἴσοι εἰσὶν εἰσιν, ἡ γὰρ τοῦ μεγίστου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ὡς δέδεικται. *Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 7.*

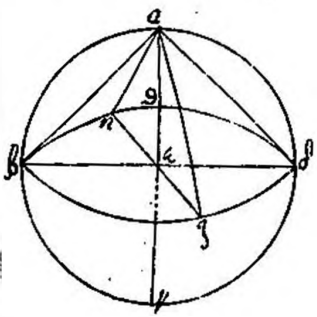
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι ἑκατέρωθεν τοῦ οἱασδήποτε ἐν σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου ἡ πλείους, ἢ δύο μόνον ἴσους εἶναι τῶν ἐλασσόνων ἐν αὐτῇ κύκλων.



Πρότασις Η': Θεώρημα.

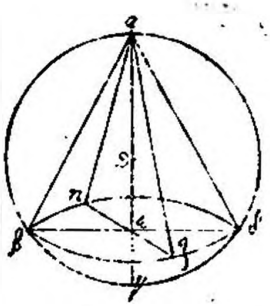
Ἐὰν παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ, διὰ τῆδε πόλων τοῦ κύκλου διελεύσεται, καὶ ἀμέτρητα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κάθετος ἀχθῇ, διά τε τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διελεύσεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ κύκλου.



Ἔστω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλος δὲ ἐν αὐτῇ ὁ βζδη. ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάσσονες, ἔστω πρότερον ὁ βζδη, μέγιστος, ὃς καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται καὶ τῶν αὐτέρων, καὶ ἀνεστάθω κάθετος πρὸς τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ εϑ, λέγω ὅτι ἡ εϑ, ἐκβαρωθεν ἐκτεινομένη διὰ τῶν πόλων τοῦ βζδη, διελεύσεται κύκλου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, ηζ, διάμετροι τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ α, πόλου ἀχθήτωσαν αἱ αβ, αη, αδ, αζ, καὶ ἐπεὶ ἡ αε, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ ι α': τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ πρὸς τὰς βδ, ηζ, ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ εβ, εζ, εδ, εη, ἴσαι, ἡμιδιάμετροι γὰρ τοῦ κύκλου εἰσὶ, καὶ κοινὴ ἡ αε, ἄρα τρίγωνα αεβ, αεη, αεδ, αεζ, ἰσογώνων καπὰ τὰς δ': τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ παρόντος τὸ

α, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ γ, πόλος τοῦ αὐτοῦ εἶναι κύκλου.

Εἰδὲ ὁ κύκλος ἐλάσσων ἦν, ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ θ, κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἡ θε. Λέγω ὅτι ἡ θε, ἐκβαλλομένη ἐκατέρωθεν, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διέρχεται. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ αθ ε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, ἀχθήσεται καὶ τὰ διὰ τοῦ αὐτοῦ, παίπος γε τὸ ἀνωτέρω, αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ἴσαι. ὥστε τὸ α, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου. Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 8.



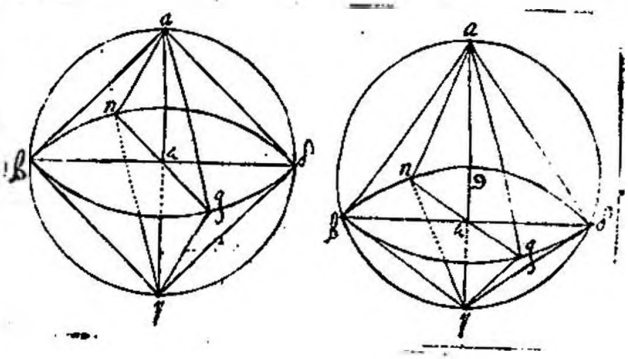
Ἀλλὰ δὴ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ α, πόλου τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ αε. Λέγω ὅτι ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τῶν γὰρ αβ, αη, αδ, αζ, ἀγομένων, καὶ τῶν βδ, εζ, ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ αε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῶν βε, ηε, δε, ζε, καὶ τὸν ῥηθέντα γ': ὅρον τοῦ ἀ: τοῦ στοιχειωτοῦ· παίπως γε καὶ τὸν μζ': τοῦ ἀ: τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῶν βε, εα. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αη, τῷ ἀπὸ τῶν ηε, εα· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αδ, τῷ ἀπὸ τῶν δε, εα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, τῷ ἀπὸ τῶν ζε, εα. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αη, αδ, αζ, ἴσα εἰσι, διὰ τὸ καὶ πάς αβ, αη, αδ, αζ, ἴσας εἶναι καὶ τὸν ε: ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν βε, εα, καὶ ηε, εα, καὶ δε, εα, καὶ ζε, εα, ἴσα εἰσι, κοινοῦ δὲ ἀφαιρημένου τοῦ ἀπὸ τῆς αε, λοιπὰ τὰ ἀπὸ τῶν βε, ηε, δε, ζε, ἴσα ἐστὶν, ὥστε καὶ αἱ βε, ηε, δε, ζε, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσι, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου καὶ τὸν ι': ὅρον τοῦ ἀ: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἡ αὐτὴ δεῖξις ἐφαρμόζει ἐφ' ἑκατέρου τῶν σχημάτων. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ ἀ: ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ὁ δὲ κύκλος μίγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ ἀνωτέρω. ἐπὶ δὲ τοῦ β': ἐπεὶ ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται, καὶ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον, παίπως γε τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς αε, ἐστὶ καὶ τὸ ἀ: πόρισμα τῆς γ': τοῦ παρόντος. Ὅτι δὲ ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ γ, ἕτερα διέρχεται πόλου, δέδεικται μικρὸν πρόσθεν. Ἐὰν ἄρα παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν διὰ τῆς πόλου τινὸς τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου εὐθεῖα ἀχθῇ, καθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, κύκλος ὁ β ζ δ η, οὗ πόλοι τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, καὶ διήχθω διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ἡ α γ. Λέγω ὅτι ἡ α γ, καθετός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχεται. Συμβαλλέτω γὰρ ἡ α γ, τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ β ζ δ η, κύκλου κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθωσαν αἱ β δ, η ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ὡς τυχόντων αἱ α β, α η, α δ, α ζ, καὶ ἔτι αἱ γ β, γ ζ, γ δ, γ η. καὶ ἐπεὶ αἱ α β, α η, α δ, α ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ε. ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ ἴσαι κατὰ τὸν αὐτὸν, καὶ αἱ γ β, γ ζ, γ δ, γ η, καὶ κοινὴ αἱ α γ. ἄρα κατὰ τὸ η'. τοῦ α'. τῶν στοιχειωτῶν, τὰ α β γ, α η γ, α ζ γ, καὶ α δ γ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶν, καὶ αἱ γωνίαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴσας ἔχουσιν, ὥστε αἱ ὑπὸ β α ε, η α ε, δ α ε, καὶ ζ α ε, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α β, α η, α δ, καὶ α ζ, ἴσαι, ὡς δέδεικται, καὶ κοινὴ ἡ α ε, ἄρα κατὰ τὸ δ'. τοῦ α'. τοῦ αὐτοῦ, αἱ β ε, η ε, δ ε, ζ ε, ἴσαι εἰσὶ, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ β ζ δ η, κύκλου, κατὰ τὸν ι'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἄρα κατὰ τὸ αὐωτέρω καθετός ἐστιν ἡ α ε, πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ δ η, κύκλου, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ'. τοῦ παρόντος, τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς α γ, ἐστὶν, ἀλλ' μὲν ὁ β ζ δ η, μέγιστός ἐστι, τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας καὶ τὸ α'. πορίσματος τοῦ β'. τοῦ παρόντος, εἰδὲ ἐλάσσων εἴη, ἴσαι δὲ εἰσὶν, τὸ θ. ὡς ἐπὶ τοῦ β'. χήματος. Ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ πόλου τινὸς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, καθετός, καὶ τὰ ἑξῆς.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 9.



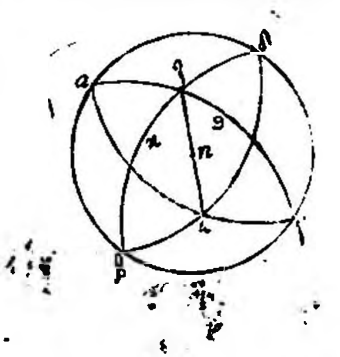
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς κύκλου καθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἀχθῇ, ἐπὶ τοῦ κέντρου πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ ἀνάπαλιν.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλους τέμνουσι, καὶ αἱ ἀπαλλάξεις, οἱ δίχα ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλους τεμνόμενοι κύκλοι, μέγιστοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, μέγιστοι κύκλοι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ. Λέγω ὅτι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλους, ἑκάτερος γὰρ τῶν ζ': τὸ παρόντος διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, διέρχεται σφαῖρα, δῆλον ἄρα παραλλήλον ἐστὶ πρὸς ἀλλήλους περὶν θέσιν, καὶ μὴ τέμνεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ δίχα, δῆλον. διήχθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ ζ, κοινῶν τομῶν ἡ ε ζ, ἥτις καὶ τῶν γ': τὸ δ: τὸ στοιχειωτὸ δῆθεν ἐστιν, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλων, παντως γε τὸ κέντρον ἑκατέρου τῶν κύκλων ἐπ' αὐτῆς ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη τῆς ε ζ, ἐπεὶ οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, ἤδη ἄλλο κοινὸν ἔχουσιν, ἢ τῶν ε ζ, κοινῶν αὐτῶν τομῶν. δῆλον, ὅτι ἤδη τὸ αὐτὸ ἔσαι κέντρον ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων, καὶ ἐπομένως ἤδη διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ζ': τὸ παρόντος. ἐκ ἄρα τὸ κέντρον τῇ α ε γ ζ, β ε δ ζ, ἐκτὸς ὡσι τῆς ε β, κοινῆς τομῆς, ἀλλ' ἐπ' αὐτῆς, καὶ κοινὸν ἑκατέρου. Ἔστω δὴ τοῦτο τὸ η, τὸ η, ἄρα ἔσαι κέντρον τῆς σφαίρας, ἐν τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, μεγίστων κύκλων, καὶ ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ὥστε δίχα ἀλλήλους τέμνονται, ὅπερ ἐδεῖ τὸ α:



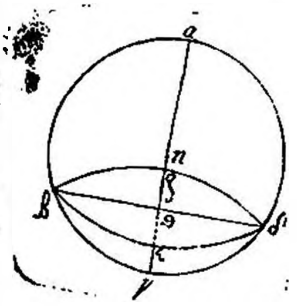
Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 10.

Ἀλλὰ δὴ τεμνέσθωσαν ἀλλήλους δίχα οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι μέγιστοί εἰσιν, ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται. Εἰλήφθω γὰρ ἡ ε ζ, κοινὴ τομὴ αὐτῶν, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τῶν ὑποθεσιν δίχα ἀλλήλους οἱ κύκλοι τέμνονται, παντως γε ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἑκατέρου τῶν κύκλων διέρχεται. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ τοῦτο α ε γ ζ, καὶ β ε δ ζ, κύκλου, ἡμιδιάμετρος γὰρ ἑκατέρα ἐστὶ ἥτις ηε, καὶ η ζ, ὡς δίχα τῆς ε ζ, διαμέτρου διαιρεμένης. Λέγω, ὅτι τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας. εἰ γὰρ μὴ, ἀφεστάτω ἡ μετὰ η θ, ἀπὸ ὀρθὰς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ α ε γ ζ, κύκλου, καὶ ἡ δὲ η κ, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ, καὶ κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τὸ παρόντος ἑκατέρα τῶν η θ, η κ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήρχεται, τῆς ἄρα α β γ δ, σφαίρας τὸ κέντρον ἐπί τε τῆς η θ, καὶ η κ, ἐστὶν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ η, ἄρα κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας, καὶ διὰ τοῦ ζ': τὸ παρόντος οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι μέγιστοί εἰσιν, ὅπερ ἐδεῖ τὸ β':

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλον ἐλάσσονα πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δίχα αὐτὸν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνει.

Τεμνέτω δὴ ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος τὸν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐλάσσονα, τὸν βεδζ, πρὸς ὀρθὰς, ποιείτω ἔσω τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. Λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὸν τέμνει. Εἰλήφθω δὴ κοινὴ τομὴ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἡ βδ, διὰ δὲ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω κάθετος ἐπὶ τῆς βδ, ἡ ηθ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς σφαίρας, καὶ ἐπεὶ τὸ η, σημεῖόν ἐστι κέντρον τῆς σφαίρας, πάντως ἐστὶ καὶ τοῦ ζ': τοῦ παρόντος τὸ αὐτὸ σημεῖόν ἐστι κέντρον καὶ τοῦ αβγδ, κύκλου. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ηθ, πρὸς ὀρθὰς πέπτωκε ἐπὶ τὴν βδ, καὶ τὸ αβγδ, ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ. δῆλον, ὅτι ἡ ηθ, πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ εἰς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον καὶ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ καὶ τὸ β': πορ: τῆς β': τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ βεδζ, κύκλου, ὥστε ἡ βδ, διάμετρός ἐστι. φανερὸν δὲ ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος δίχα τέμνει τὸν βεδζ. ὅπερ ἦν τὸ α: Ὅτι δὲ καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, δῆλον, καπὶ γὰρ τοῦ ι': τοῦ παρόντος ἡ αη θ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, κύκλου διέρχεται. ὥστε τὰ α, καὶ γ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ βεδζ, κύκλου, ἀλλ' ὅλη ἡ αγ, ἐν ᾗ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ καπὶ τοῦ α': τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, κύκλου διέρχεται, ὅπερ ἦν τὸ β':



Theod: Sf: Lib. 1. Fig. 11.

Ἀλλὰ δὴ τεμνέτω ὁ αβγδ, κύκλος τὸν βεδζ, δίχα καὶ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ βδ, ἥτις διάμετρός ἐστι τοῦ βεδζ, κύκλου καὶ τοῦ ὑποθέσιν, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ἔστω δὴ κέντρον τοῦ μὲν βεδζ, κύκλου τὸ θ, τῆς δὲ σφαίρας τὸ η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ηθ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, μέγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ η, σημεῖον κέντρον ὂν τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ καὶ αὐτοῦ τοῦ αβγδ, κύκλου, καὶ τοῦ ζ': τοῦ παρόντος, ἔστι δὲ καὶ τὸ θ, σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ αβγδ, κύκλου, ὅτι ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς, ἄρα ὅλη ἡ ηθ, ἐν ᾗ τοῦ αβγδ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. καὶ δὴ τοῦ ε': τοῦ παρόντος ἡ ηθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ἄρα καὶ τοῦ ια': τοῦ ια': τοῦ στοιχ: καὶ τὰ δι' αὐτῆς παντὰ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον, ὥστε ὁ αβγδ,

ὡς

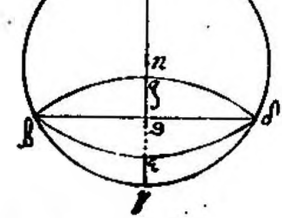
ὡς δὶ αὐτῆς διερχόμενος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διέρχεται, δίχα αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει.

Διελθέτω ὁ αβγδ μέγιστος κύκλος διὰ τῶν α, καὶ γ, πόλων τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ βεδζ κύκλου. Λέγω, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ, ἡ τοὺς πόλους συνδέουσα, συμβαλλουσα τῇ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἔστω ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομή. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, διέρχεται κύκλου, πάντως γε κατὰ τὸ θ': τοῦ παρόντος καθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ὥστε κατὰ τὸν ιή: τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ αβγδ, κύκλος, πρὸς τὸν βεδζ, κατὰ τὰ αὐτά. ἐπεὶ δὲ πάλιν κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου κύκλου, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ βεδζ. καὶ ἐπομένως ἡ βδ, διάμετρος τοῦ αὐτοῦ, ἡ γὰρ αγ, καὶ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχ: ἐπὶ τῆς κοινῆς πίπτει τομῆς, ὥστε ὁ βεδζ, δίχα τέμνεται. παρὰ τοῦ αβγδ, δέδεικται δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς. ἄρα ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Theod. Sf. Lib.1. Fig.12.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τῶν πόλων μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διέρχεται, κἀκεῖνος διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἑκάτερος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἕτερον.

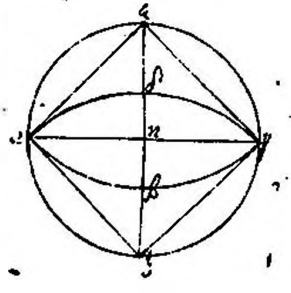
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι κύκλος ἐν σφαίρᾳ δι' ἑκατέρου τῶν πόλων ἑτέρου κύκλου διερχόμενος μέγιστός ἐστιν, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς πόλου μεγίστου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸν περιφέρειαν αὐτῆς εὐθεῖα ἀχθῇ, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ τῇ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς πόλου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸν περιφέρειαν αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ, μεγίστος ἐστὶν ἐκεῖνος.

Ἔστω κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ὁ αβγδ, ἧς πόλοι οἱ ε, ζ, καὶ ἀχθήτω ἀπὸ τῆς ε πόλου ἐπὶ τὸν αὐτῆς περιφέρειαν εὐθεῖα ἡ εα. Λέγω, ὅτι ἡ εα ἴση ἐστὶ πλευρᾷ τῆς ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγραφομένου τετραγώνου. Κείσθω γὰρ διήχθαι διὰ τῶν ε, καὶ ζ, πόλων τῆς αβγδ, μεγίστου κύκλου τὸν αζγ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εγ, αζ, γζ, εζ, αγ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, κύκλου διήρχεται, παύτως γε καὶ τὸν θ': τὸ παρόντος ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ἀλλὰ καὶ ὁ μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ τὸν ζ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ η, σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ εζ, τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ αβγδ, κύκλου, καὶ ἐπομένως ἡ αγ, διάμετρός ἐστιν αὐτοῦ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ εζ, ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, πρὸς τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον. δῆλον, ὅτι καὶ πρὸς τὴν αγ, ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ε ὁ τοῦ στοιχ: ὀρθὴ ἄρα ἔστι ὑπὸ αηε, γηε, καὶ αἱ τέσσαρες καὶ κορυφὴν, αἱ ἄρα αγ, εζ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνονται, καὶ αἱ αε, εγ, γζ, ζα, περιφέρειαι τεταρτημόρια εἰσι, καὶ ἐπομένως αἱ αε, εγ, γζ, ζα, ὑποτείνουσαι ἴσαι, καὶ τὸ αεγζ, τετράγωνόν ἐστιν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αεγζ, κύκλον, καὶ αἱ ηα, ηε, ηγ, ηζ, ἴσαι εἰσιν, ὡς δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνομένων ἀλλήλας τῶν αγ, εζ. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ αεγζ, κύκλου, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ αεγζ, κύκλος, καὶ ἴσος τῷ αβγδ, καὶ τὸ α: πόρ: τῆς ζ': τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ αε, πλευρά ἐστι τετραγώνου ἐγγραφομένου εἰς μέγιστον κύκλον τὸν ἐν ᾧ καὶ ὁ αβγδ, κύκλος σφαίρᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 13.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ αε, ἴση τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου πλευρᾷ. Λέγω ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος μέγιστός ἐστι. τῇ αὐτῇ γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ αζγε, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, διέρχεται, παύτως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει καὶ τοῦ ἀσωπέρω, ἡ αγ, ἄρα κοινὴ τομὴ διάμετρός ἐστι

τοῦ

τῦ αβγδ, κύκλυ, ἀλλ' ἡ αε, ἴση ἐστὶ τῇ τλω ὑποθεσιν τῇ τε τῆς ἀγώνυ πλευρᾷ τῦ ἐν μείζονι ἐγγραφομένυ κύκλῳ, καὶ παύτῃ ἴση ἐστὶν ἡ εγ, καὶ τὸν ε: ὅρον τῦ παρόντος, ἄρα τὸ αεγ, ἡμικύκλιόν ἐστι, καὶ ἡ αγ, διάμετρος τῦ αβγδ, κύκλυ, διάμετρος ἔτι ἐστὶ καὶ τῦ αεγζ. οἱ ἄρα αβγδ, αεγζ, κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ δίχα ἀλλήλους τέμνονται, καὶ καὶ τλω ε: τῦ παρόντος μέγιστοί εἰσι, μέγιστος ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β':

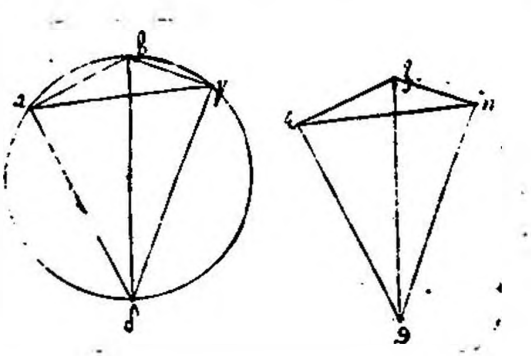
Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τύτυ δῆλον, ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι τεταρτημορίῳ ἀφίστανται τῆς ἰδίων πόλων, καὶ οἱ τεταρτημορίῳ ἀφεστάμενοι τῆς ἰδίων πόλων, μέγιστοί εἰσι.

Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλυ ἴσην ἀνθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος τυχὼν ὁ αβγδ. καὶ ζητείτω ἀνθεῖα ἴση τῇ αὐτῦ διαμέτρῳ. Ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς τῦ αβγδ, κύκλυ περιφερείας σημεῖα, ὡς ἔτυχε, τὰ α, β, γ, καὶ συνεστάσθω ἐκ ξιῶν ἀνθειῶν ἃ αἱ, εἰσὶν ἴσαι ταῖς ἔισὶν διαστήμασιν αβ, βγ, γα, ξίγωνον τὸ εζη. καὶ πρὸς μὲν τῇ ε, σημείῳ συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς εζ, ἡ εθ, πρὸς δὲ τῇ η, συνεστάσθω ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς ζη, ἡ ηθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζθ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητυμένη. Ἠχθω γὰρ ἀπὸ τῦ β, σημείυ ἡ βδ, διάμετρος τῦ αβγδ, κύκλυ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, γδ, αγ. καὶ ἐπεὶ τῇ αβ γ, εζη, ξιγώνων αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ, παύτως γε καὶ αἱ γωνίαι ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸ πόρισμα τῆς ς': τῦ ά: τῦ στοιχειώτυ, ὥστε ἡ ὑπὸ ζεη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζεθ, ἴση τῇ ὑπὸ βαδ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἡ μὲν καὶ τλω κατασκευῇ, ἡ δὲ καὶ τλω λά: τῦ γ': τῦ αὐτῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ηεθ, λοιπῇ τῇ γαδ, ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ εηθ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ εη, πλευρὰ τῇ αγ, ἴση, ἄρα καὶ τὴν κς': τῦ ά: τῦ αὐτῦ καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ εθ, θη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς αδ, δγ. ὥστε ὅλον τὸ εθη, ξίγωνον ὅλῳ τῷ αδγ, ξιγώνῳ ἴσόν ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ τὸ εζη, ἴσον τῷ αβγ, ξιγώνῳ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ εζηθ, ξαπέζιον ἴσόν ἐστι τῷ αβγδ, ξαπεζίῳ, ἐφαρμοττομένης οὖν τῆς εθ, ἐπὶ τῆς αδ, ἐφαρμοθήσεται



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 14.

παν-

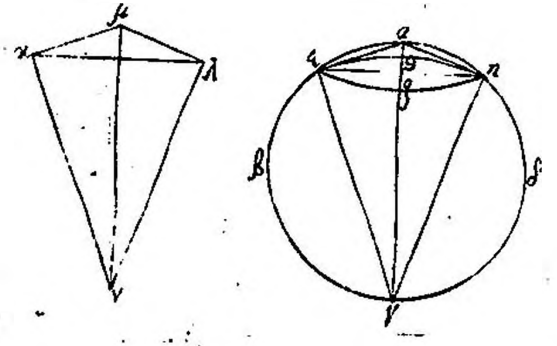
παίπως ἡ ε ζ, τῇ α β, ἡ δὲ ζ η, τῇ β γ, ἡ δὲ η θ, τῇ γ δ, ἴσα γὰρ, καὶ πὰς πλόρὰς κὴ μίαν ἴσας ἔχυσιν, ὡς δέδειπται, ὥστε ἐφαρμοστομένων τῶν ζ, η, θ, σημείων τοῖς β, γ, δ, ἐφαρμοδήσεται καὶ ἡ ζ θ, τῇ β δ, ἡ δὲ ζ θ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α β γ δ, κύκλυ διαμέτρῳ. ὅπερ ἰῶ τὸ ζητύμενον.

Πρότασις ΙΕ′: Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω σφαῖρα ἡ α β γ δ, καὶ ζητεῖπω ἡ παύτης διάμετρος. Ληφθήπω δὴ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, δὸς εἰπεῖν τὸ α, καὶ κεντρῳ μὲν τῷ α, διαςήματι δὲ τῷ τυχόντι γραφήπω κύκλος ὁ ε ζ η θ. ἔτινος εὑρεθήπω διὰ τῶν ἀνωτέρω ἡ διάμετρος, καὶ ἔςω αὕτη ἡ κ λ. ληφθεόπων δὲ δύο τυχόντων σημείων, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ε ζ η θ, κύκλυ φησὶ εἰπεῖν, τὰ ζ, καὶ θ, διαιρεθήπω ἑκάτερον τῶν ζ ε θ, ζ η θ, τόξων δίχα κὴ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ ε ζ η θ, δίχα. ὥστε τιλὼ τὰ ε, η, ἐπιζευγνύσαν σημεῖα διάμετρον εἶναι. εἶπα συνεςάθω ἐπὶ τῆς κ λ, ἡμίγωνον τὸ κ μ λ. ὥστε τιλὼ μὲν κ μ, ἴσιλον εἶναι τῇ ε α, διαςήματι, τιλὼ δὲ μ λ, τῇ α η, καὶ πρὸς μὲν τῇ κ, συνεςάσθω καθέτος ἐπὶ τῆς κ μ, ἡ κ ν, πρὸς δὲ τῇ λ, ὁμοίως συνεςάσθω καθέτος ἐπὶ τῆς μ λ, ἡ λ ν, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μ ν, καὶ αὕτη ἔσαι ἡ ζητυμένη. Κείσθω γὰρ τὸν α β γ δ, κύκλον, εἶναι τὸν διὰ τριῶν ε, α, η, διερχόμενον σημείων τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ διήχθω διὰ τοῦ κέντρυ τῆς σφαίρας ἡ α γ. εἶπα ἐπιζεύχθωσαν αἱ α η, ε η, ε γ, η γ. καὶ ἐπεὶ τὸ κ μ λ ν, τραπέζιον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ὅμοιον τῷ ε α η γ, τραπεζίῳ κὴ τιλὼ αὐτῷ, συνίςη γὰρ τό, τε κ μ λ, τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ ε α η, καὶ τὸ κ λ ν, τῷ ε η γ, παίπως γὰρ ἡ μ ν, διάμετρός ἐστι τοῦ α β γ δ, κύκλυ, κατὰ τιλὼ αὐτιλὼ, ἀλλ' ὁ α β γ δ, κύκλος μέγιστός ἐστι κὴ τὸ β′: πόρισμα τῆς ι β′: τοῦ παρόντος, ὅτι δίχα τέμνων τὸν ε ζ η θ, κύκλον κὴ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, ἡ δὲ τοῦ μεγίστυ κύκλυ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἄρα ἡ μ ν, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. ὅπερ ἰῶ τὸ προσαχθέν.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 15.

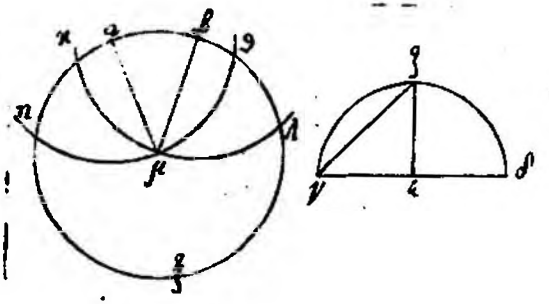


Πρότασις Ις′: Πρόβλημα.

Δύο, ὡς ἔτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν δι' αὐτῶν διερχόμενον μέγιστον κύκλον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας τυχόντα σημεῖα τὰ α, β, καὶ ζητείσθω ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος. Εὑρήσθω δὴ καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ γδ. διαιρεθείσης δὴ τῆς γδ, δίχα κατὰ τὸ ε, σημεῖον, ἀνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. εἰπὲ κενὸν τοῖς α, καὶ β, δοθεῖσι σημείοις, καὶ διαστήματι τῇ γζ, γεγράφθωσαν τόξα τὰ ηθ, κλ, τεμνόμενα ἀλλήλοις κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῇ μα, ἢ μβ, γεγράφθω κύκλος, ἐκείνος ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αμ, βμ, καὶ ἐπεὶ τὰ ηθ, κλ, τόξα ἴσῳ κατεγράφησαν διαστήματι, τουτέστι αἱ αμ, βμ, ἴσαι εἰσίν. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μα, γεγραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἐπεὶ δὲ ἑκατέρα τῶν αμ, βμ, ἴση ἐστὶ τῇ γζ, ἡ δὲ γζ, ἴση τῇ τοῦ πέριξ ἀγωνίου πλευρᾷ τοῦ εἰς μείζονα ἐγγραφομένου κύκλου. ὁ ἄρα αβξ, κύκλος ἁρμόσεται τοῦ μ, αὐτοῦ πόλου διαστήματι ἴσῃ τῇ πλευρᾷ τοῦ εἰς μείζονα κύκλον ἐγγραφομένου πέριξ ἀγωνίου, καὶ ἐπομένως μέγιστός ἐστι κατὰ τὸ ιγ′: τοῦ παρόντος. δύο ἄρα, ὡς ἔτυχε, δοθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εὕρηται ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 16.



Πρότασις ΙΖ′: Πρόβλημα.

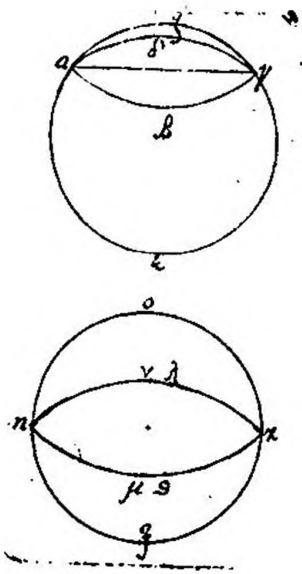
Παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου τοὺς πόλους εὑρεῖν.

Ἔστω δὴ κύκλος ἐν τῇ τυχούσῃ σφαίρᾳ ὁ αβγδ, ἐλάσσων, καὶ ζητείσθωσαν οἱ τοῦ πόλοι. Ληφθήσωσαν δὴ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου περιφερείας τὰ β, δύο εἰπεῖν, καὶ δι' αὐτῶν, βαδ, βγδ, τόξων δίχα διῃρημένων κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, εὑρήσθω διὰ τοῦ ἀσυμπτώτου ὁ διὰ τῶν α, καὶ γ, διερχόμενος κύκλος, καὶ ἔστω ἔστω ὁ αεγζ, τῶν δὲ αεγ, αζγ, τόξων διῃρημένων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, τὰ αὐτὰ σημεῖα ε, καὶ ζ, πόλοι ἔσονται τοῦ αβγδ,

κύ-

κύκλε. ἐπεὶ γὰρ τὰ α β, α δ, πέρατα ἴσα ἐστίν, ὥσπερ καὶ τὰ γ β, γ δ, παύσεται καὶ τὰ β': ἀξίωμα, τὰ α δ γ, α β γ, ἴσα ἐστίν, καὶ ὁ α ε γ ζ, κύκλος δίχα τὸν α β γ δ, τέμνει κύκλον. ὥστε καὶ τῶν ιβ': τὰ παρόντος ὁ α ε γ ζ, διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, διέρχεται κύκλε. ἀλλὰ τὰ ζ, καὶ ε, ἐξ ἴσου τῶν α, καὶ γ, ἀφέσαται, πέσει τὰ α ζ, ζ γ, διαστήματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὥσπερ καὶ τὰ α ε, ε γ· τὰ ζ, ἄρα καὶ ε, πόλος εἰσὶ τῶ α β γ δ, κύκλε, καὶ τὸν ε: ὅρον τῶ παρόντος.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 27.



Ἔστω β': κύκλος ἐν σφαίρᾳ μέγιστος ὁ η θ κ λ, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ τέτε πόλοι. Εἰλήφθωσαν, ὡς καὶ πρόπερον, ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶ η θ κ λ, κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα, ἅτε εἶπεῖν, τὰ θ, καὶ λ, καὶ διὰ θ λ, θ κ λ, δίχα τεμνόμενον, τῶ μὲν κατὰ τὸ η, τῶ δὲ κατὰ τὸ κ. δῆλον, ὅτι τὰ η θ κ, η λ κ, ἡμικύκλιά ἐστιν, ὧν ἑκάτερον δίχα τεμνέτω τὸ μὲν κατὰ τὸ μ, τὸ δὲ κατὰ τὸ ν. εἶτα κείσθω τῇ μ, ἡ τῇ ν, καὶ διαστήματι τῇ μ η, ἡ μ κ, ἴσα γάρ, γραφέτω ὁ ξ κ ο, ἕτερος ἑκάτερον τῶν η ξ κ, η ο κ, πόλων δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ ξ, καὶ ο, σημεῖα, καὶ τὰ ξ, ο, σημεῖα, πόλοι ἔσονται τῶ α θ κ λ, κύκλε. ἐπεὶ γὰρ ὁ η ξ κ ο, κύκλος, ὡς ἀπὸ κείσθω τῆ μ, γέγραπται, παύσεται καὶ τὸ μ, πόλος αὐτῶ ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ο, διὰ τὰ αὐτὰ πόλος ἐστὶ τῶ αὐτῶ. ἀλλὰ τὸ μ η, τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ μ κ, ἄρα ὁ η ξ κ ο, κύκλος τεταρτημορίῳ ἀφίσαται τῶ ἰδίῳ πόλῳ, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιγ': τῶ παρόντος, μέγιστός ἐστιν. ἀλλ' ὁ η θ κ λ, κύκλος διὰ τῶν μ, καὶ ν, πόλων τῶ η ξ κ ο, κύκλε διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὸ ιβ': τῶ παρόντος, καὶ ὁ η ξ κ ο, διὰ τῶν πόλων τῶ η θ κ λ, διέρχεται. ἑκάτερον δὲ τῶν ζ, καὶ ο, ἐξ ἴσου τῶν η, καὶ κ, ἀφέσαται, ἄρα τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῶ η θ κ λ, μεγίστε κύκλε, τῶ δηλονότι ἄρα ἐν σφαίρᾳ κύκλε οἱ πόλοι εὑρίσκονται.

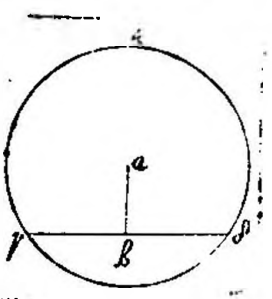
Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο εὐθεῖαί τινες διὰ τῶ κέντρε δύο εὐθείαν τινὰ μὴ διὰ τῶ κέντρε δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ τυχούσῃ, ἧς κείσθω τὸ α, δύο εὐθεῖαι διὰ μὲν τῶ κείσθω ἡ α β, μὴ διὰ τῶ κείσθω δὲ ἡ γ δ. καὶ τετμήσθω ἡ α β, τὴν γ δ, δίχα κατὰ τὸ β. Λέ-

γω, ὅτι ἡ ἀφὴ ὀρθὰς αὐτῇ πέμνει. Ἐκβεβλήσθω γὰρ τὸ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπίπεδον, ἡ κοινὴ ποιήσει τομὴ μὴ τῆς σφαίρας τὸν γ δ ε, κύκλον κατὰ τὸ β: τὸ παρόντος, ἡ ἐπεὶ ὁ γ δ ε, κύκλος διὰ τὸ κέντρου τῆς σφαίρας διήρχεται, μέγιστός ἐστι, καὶ τὸ α, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς γ δ ε, κύκλου. Αὐθις ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, διάμετρός ἐστι τῆς γ δ ε, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ ἡ μὲν α β, διὰ τὸ α, κέντρου τοῦ γ δ ε, κύκλου διερχομένη πέμνει δίχα τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὅπου τὴν γ δ, δῆλον, ὅτι ἡ α β, καὶ πρὸς ὀρθὰς πέμνει τὴν αὐτὴν γ δ. καὶ ἀνάπαλιν, κατὰ τὴν γ': τῆς γ': τοῦ στοιχείου. Ἐὰν ἄρα ἐν σφαίρᾳ διάμετρός τις διὰ τὸ κέντρου, διάμετρόν τινα μὴ διὰ τὸ κέντρου πέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ πέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ πέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν πέμνει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 18.



Τέλος τῆς Πρώτης τοῦ κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικοῦ.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Οἱ Ὅροι.

Α΄: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ παράλληλοί εἰσιν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτα.

Β΄: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλων ἐφάπτεσθαι λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῆς ἐπιπέδων τῆς κύκλων ἐφάπτηται ἑκατέρου τῆς κύκλου κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ καὶ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται.

Γ΄: Κύκλος πρὸς κύκλον ἐγκλίνειν λέγεται, ὅταν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων εὐθειῶν πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἑκατέρου τῆς κύκλου ὀξεῖα ᾖ, ἥτις δὲ κλίσις τῆς αὐτῆς κύκλου πρὸς ἀλλήλους λέγεται.

Δ΄: Κύκλος πρὸς κύκλον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἕτερος πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῆς κλίσεως γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Ε΄: Κλίσεως δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους μέτρον ἐστὶ τόξον μεγίστου κύκλου διὰ τῆς πόλων ἑκατέρου τῆς κύκλου διερχομένου, τὸ μεταξὺ τῆς κύκλων ἐμπολαμβανόμενον.

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Οἱ παράλληλοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους, καὶ οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐν σφαίρᾳ πόλους ἔχοντες κύκλοι, παράλληλοί εἰσιν.

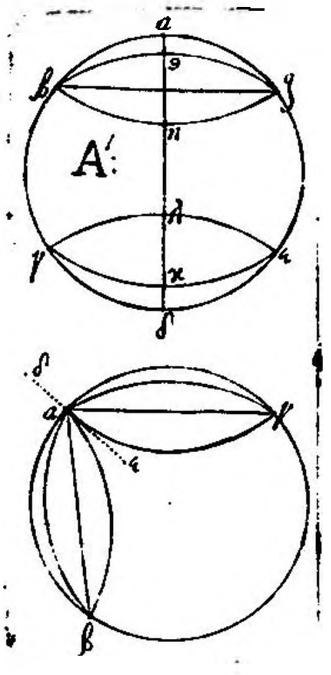
Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ αβγδ ζ, κύκλοι παράλληλοι οἱ βηζθ, γκελ. Λέγω, ὅτι οἱ βηζθ, γκελ, τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ βηζθ, οἱ α, δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βηζθ, διέρχεται κύκλου, παύτως γὰρ καὶ τῶν λοιπῶν παράντων καθάπερ ἐστὶ φανερὸν τοῦ βηζθ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ΄ τοῦ αὐτοῦ ἡ αδ, καὶ διὰ τοῦ τῆς σφαίρας κέντρου διέρχεται. λοιπὸν

ἐστὶ

ἐπεὶ οἱ βηζϑ, γκελ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, παύπως γε ἡ αδ, ὀρθὴ οὖσα πρὸς τὸ τῦ βηζϑ, κύκλου ἐπίπεδον, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ τοῦ γκελ, καὶ τῶν ιδ′: τῦ ιά: τῦ ϛοιχ: ἀλλ' ἡ αδ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήρχεται, ὡς δέδειπται, ἄρα καὶ τῶν η: τῦ ά: τοῦ παρόντος διὰ τῶν πόλων τῶ γκελ, διέρχεται. ὥστε τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῦ γκελ. ἀλλὰ τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ καὶ τῦ βηζϑ, κύκλου καὶ τῶν ὑπόθεσιν, οἱ ἄρα βηζϑ, γκελ, παράλληλοι κύκλοι τὰς αὐτὰς ἔχουσι πόλους.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτωσαν οἱ βηζϑ, γκελ, κύκλοι τὰς αὐτὰς πόλους α, καὶ δ, λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ αδ, καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν βηζϑ, γκελ, διήρχεται, παύπως γε καὶ τῶν ϑ′: τῦ ά: τῦ παρόντος ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν βηζϑ, γκελ, κύκλων, καὶ καὶ τῶν ιδ′: τῦ ιά: τῦ ϛοιχ: οἱ βηζϑ, γκελ, κύκλοι παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 1.



Πρότασις Β′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εἰς σφαίρας κύκλοι τῷ αὐτῷ συμπέσωσι σημείῳ, μεγίστω τινὸς κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου, οἱ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων.

Ἔστω κύκλος μέγιστος ὁ αβγ, καὶ συμπιπτέτωσαν οἱ αβ, αγ, κύκλοι τῷ α, σημείῳ, τὸ αβγ, κύκλου, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχόμενος. λέγω ὅτι οἱ αβ, αγ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν αβ, αγ, κύκλων ἡ δα, εὐθεῖα. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγ, κύκλος διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβ, αγ, διήρχεται κύκλων, παύπως γε καὶ τῶν ιβ′: τῦ ά: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, καὶ αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι διάμετροί εἰσι τῶν αβ, αγ, κύκλων. ὥστε καὶ ἑκάτερος τῶν αβ, αγ, κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν αβγ, μέγιστον κύκλον. ἔστι δὲ κοινὴ τομὴ τῶν αβ, αγ, κύκλων κατὰ τὸν ὑπόθεσιν ἡ δα, εὐθεῖα, ἄρα κατὰ τὸν ιϑ′: τῦ ιά: τοῦ ϛοιχ: ἡ δα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τῦ αβγ, κύκλου ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι, κατὰ τὸν γ′: ὅρον τῦ αὐτῦ, ἅπτονται δὲ τῆς δα, αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι, καὶ πάντα ἄρα ἐν τῷ τοῦ αβγ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ διὰ τὸ κοινὰς τομὰς εἶναι αὐτῶ τε καὶ τῶν ἐπιπέδων

τῶν

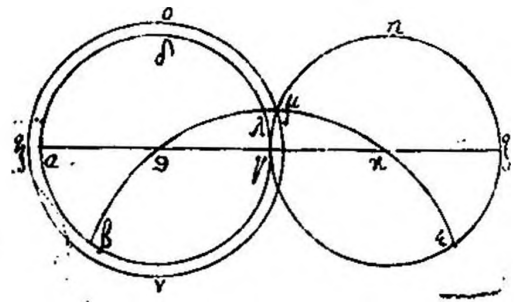
τῶν αβ, αγ, κύκλων, ἄρα ἡ δα ε, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν αβ, αγ, διαμέτρων, καὶ ἔστιν τὸ πόρισμα τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ ἅπτηται ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, κύκλων ἡ δα ε. ὥστε καὶ τὸν β': ὅρον τοῦ παρόντος, οἱ αβ, αγ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῆς πόλου αὐτῆς διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῆς διέρχεται.

Ἀπὸ δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ αβγδ, γεζη, καὶ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγδ, πόλος τὸ θ, σημεῖον, τοῦ δὲ γεζη, τὸ κ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος, διέρχεται καὶ διὰ τῆς γ, αὐτῶν ἁφῆς, ὡς ὁ αθγκζ.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 2.



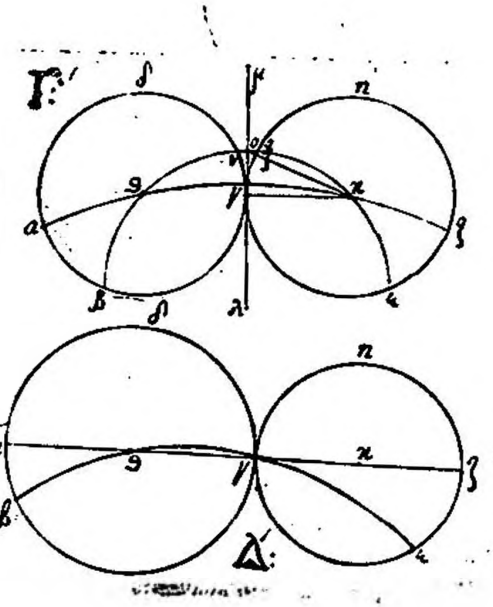
εἰ γὰρ μή, διελθέτω εἰ δυνατὸν, ἐκτὸς τοῦ γ, ὡς ὁ βθκι, τέμνων τὸν μὲν αβγδ, καὶ τὸ λ, τὸν δὲ γεζη, κατὰ τὸ μ. καὶ κείσθω μὲν τῇ θ, διαστήματι δὲ τῇ θμ, γεγράφθω κύκλος ὁ μνξο. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, ἅπτεται τοῦ γεζη, κατὰ τὸν ὑποθεσιν, ὁ μνξο, παντῶς γε ἅψεται αὐτοῦ, ὡς μείζονι γεγραφόμενος διαστήματι. ἁπτέσθω κατὰ τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθω πάλιν οἱ μνξο, γεζη, κύκλοι συμπιπτέτωσαν τῇ μ, σημείῳ, τοῦ βθκι, μείζονα κύκλου διὰ τῶν πόλων αὐτῶν θ, καὶ κ, διερχομένου κατὰ τὴν ὑποθεσιν, ἄρα κατὰ τὸ αὐτόρρωθεν οἱ μνξο, γεζη, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων, ἁλλὰ καὶ τέμνονται, ὡς δέδεικται, ἄρα ἄτοπον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ οὗ ἕπεται. ἄρα ὁ διὰ τῶν πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἁπτομένων δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. Ἀπὸ δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ γ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῆς γ, ἁφῆς, ὡς ὁ αγζ. εἰ γὰρ μή, διελθέτω ἐκτὸς τῆς ἁφῆς, ὡς ὁ βθκι, τέμνων τὸν μὲν αβγδ, κατὰ τὸ ν, τὸν δὲ γεζη, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν αβγδ, καὶ γεζη, ἡ λγμ, διάμετρος, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, κείσθω τοῦ γεζη, κύκλου ἡ κο, συμβαλλουσα τῇ λγμ, κοινῇ τομῇ κατὰ τὸ ο, (δυνατὸν γὰρ τὸ κ, σημεῖον καὶ αὐτὶ πόλου, καὶ αὐτὶ κείσθω τοῦ αὐτοῦ γεζη, κύκλου ληφθῆναι, συμπίπτουσι γὰρ οἱ πόλοι τῇ κείσθω ἐπὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ ὅλο-

κλω-

πλήρου καπγραφῆς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων.) ἐπιζεύχθω δ' ἔτι ἡ κγ, καὶ ἐπεὶ ὁ βθκε, μέγιστός ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων διέρχεται, παύπως γὰ κατὰ τὴν ε β': τὸ ά: τὸ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ἑκάτερος τῶν αβγδ, γεζη, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, μιγίστου κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τὴν ι δ': τοῦ ιά: τοῦ ςοιχειωτοῦ ἡ λγμ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, ἐπίπεδον, ὡς κοινὴ τομὴ τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων, καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας ἡ αὐτὴ λγμ, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ κο, καὶ ἔστιν ἐν τῷ τοῦ βθκε, ἐπιπέδῳ, ὡς ἐπιζευγνύουσα τὰ κ, καὶ ο, σημεῖα τοῦ αὐτοῦ βθκε, κύκλου, καὶ ὅσα κοινὴ τομὴ τοῦ τε βθκε, καὶ γεζη, κύκλου. ἄρα ἡ λγμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα γ': ὅρον ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς κο, ἡ ἄρα ὑπὸ κογ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ λγμ, ὀρθὴ ἐστι καὶ πρὸς τὴν γκ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τοῦ γκο, ξηγώνου αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἐκτὸς τῆς γ, διέρχεται ἁφῆς. Ἐὰν ἄρα δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 3.



Πρότ: Δ': Θεώρ:

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῆς πόλων τῆς ἑνὸς καὶ κοινῆς αὐτῶν ἁφῆς μέγιστος διελήθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῆς πόλων τῆς ἑτέρου.

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἐὰν μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς, δὸς εἶπεῖν τοῦ αβγδ, καὶ τῆς γ, κοι-

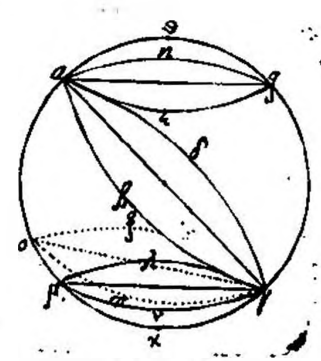
νῆς

σῆς ἀφῆς διήλθη, διιλλύσιται καὶ διὰ τῆ πόλων τῶ γεζη. εἰ γὰρ μόνον διὰ τῆ θ, πόλε τῆ αβγδ, καὶ τῆς γ, ἀφῆς διήλθη, ὡς ὁ βθγε, γραφήτω ἕτερος κύκλος μέγιστος διὰ τῆ θ, καὶ κ, πόλων τῆ αβγδ, γεζη, κύκλων καὶ τινὶ ις': τῶ δὲ τῶ παρόντος, ὡς ὁ αθκζ. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς αθκζ, μέγιστός ἐστι, καὶ διὰ τῆ πόλων ἑκατέρε τῆ αβγδ, γεζη, διέρχεται κύκλων, πάντως γε καὶ τινὶ ἀναπέρα καὶ διὰ τῆς γ, ἀφῆς αὐτῆ διέρχεται, ἀλλὰ καὶ ὁ βθγε, μέγιστος ὢν διὰ τῆ θ, καὶ γ, διέρχεται καὶ τινὶ ὑπόθεσιν, ἄρα οἱ αθγκζ, καὶ βθγε, μέγιστοι κύκλοι τέμνουσαι ἀλλήλοις καὶ τὰ θ, καὶ γ, σημεῖα. ὥστε καὶ δίχα καὶ τινὶ ι: τῶ δὲ: τῶ παρόντος, τὸ θγ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅπερ ἔπρεπον, τὸ γὰρ θγ, διάστημα ἐλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίε, πάντε γὰρ κύκλε οἱ πόλοι ἡμικυκλίῳ ἀφέσανται, τὸ δὲ ἀφ' ἑκατέρε τῆ πόλων μέχρι τῆς περιφερείας τῶ κύκλε ἐλαττόν ἐστι παντμορίε. ἐαν ἄρα ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἀπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῆ πόλων τῶ ἑνὸς καὶ τῆς κοινῆς ἀφῆς μέγιστος διήλθη κύκλος, διιλλύσιται καὶ διὰ τῆ πόλων τῶ ἑτέρε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ε'αν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἐλάσσονος ἐν τῆ αὐτῆ σφαίρᾳ κύκλε, δίχα τέμνεται ὁ αὐτὸς καὶ ἕτερος ἅπτεσθαι κύκλε ἴσε τε καὶ παραλλήλε τῷ προτέρῳ.

Ἁπτέσθω ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος τῶ αεζη, ἐλάσσονος καὶ τῶ α. λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, μέγιστος δίχα τέμνεται καὶ ἕτερος ἅπτεσθαι κύκλε ἴσε τε καὶ παραλλήλε τῷ αεζη. Εἴρωσαν γὰρ πόλοι τῶ αεζη, κύκλε τὸ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶ κ, πόλε διαστήματι τῷ κγ, γεγράφτω κύκλος ὁ γλμν, διὰ δὲ τῆ πόλων ἑκατέρε τῆ αβγδ, αεζη, διιλλθέτω ὁ θαμκγζ, μέγιστος κύκλος. καὶ ἐπεὶ ὁ γλμν, ἀπὸ τῶ κ, σημείε, ὡς ἀπὸ πόλε κατεγράπται, δῆλον, ὅτι τὰ κ, καὶ θ, σημεῖα πόλοι αὐτῶ εἰσιν, ἀλλὰ τὸ θ, καὶ κ, πόλοι εἰσὶ καὶ τῶ αεζη, καὶ τινὶ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τινὶ ἀπὸ τῶ παρόντος οἱ αεζη, γλμν, παράλληλοί εἰσιν. Διέρχεται δὲ ὁ αμγζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῆ πόλων τῶν αὐτῶν, ἄρα καὶ τινὶ ι β': τῶ ἀ: τῶ παρόντος, δίχα αὐτὸς τέμνει, εἰσὶ δὲ κοιναὶ τομαὶ αἱ αζ, γμ, ἄρα ἡ μὲν αζ, διάμετρός ἐστι τῶ αεζη, ἡ δὲ γμ, τῶ γλμν. Λοιπὸν ἐπεὶ οἱ αβγδ, αμγζ, μέγιστοι κύκλοι ἐν τῆ αὐτῆ εἰσι σφαίρᾳ, δῆλον, ὅτι δίχα ἀλλήλοις τέμνονται καὶ τινὶ ι: τῶ ἀ: τῶ παρόντος. ἄρα τὸ αζγ, τόξον ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ θζγκ, ἡμικυκλιόν ἐστιν, οἱ γὰρ



Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 4.

γὰρ πόλοι παντὸς κύκλου καὶ διαμέτρου ἀλλήλων ἀφίστανται, ἄρα καὶ αζ γ, θζ γκ, πέρατα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. κοινὴ δὲ ἀφῃρήσθω ἡ θζ γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ αθ, γκ. ὥστε καὶ τὰ ὑπὸ διπλάσια αθζ, γκμ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὁμοίως καὶ αἱ αζ, γμ, ὑποτείνουσαι ὁμοίας ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τῷ κθ: τῷ γ': τῷ στοιχείῳ. ἀλλ' ἡ μὲν αζ, διάμετρός ἐστι τῷ αιζπ, ἡ δὲ γμ, τῷ γλμν, ἄρα οἱ αιζπ, γλμν, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ αβγδ, γλμν, κύκλοι τὰς γ, συμπίπτουσι σημείῳ τῷ αμγζ, κύκλου μιγίστῳ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, δῆλον, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος ἅπτεται τοῦ γλμν, κύκλου κατὰ τὸ β': τῷ παρόντι, ἀλλ' ὁ γλμν, ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος τῷ αιζπ, ἄρα ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αιζπ, ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ὄντος τῷ αιζπ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ὁ αμγζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ τε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται, δῆλον, καὶ γὰρ τῷ ὑπόθεσιν διέρχεται διὰ τῶν πόλων τοῦ αιζπ, καὶ αβγδ. ἀλλ' οἱ πόλοι τοῦ αιζπ, εἰσὶν ἔτι πόλοι καὶ τοῦ γλμν, ὡς δέδεικται, ἄρα ὁ αμγζ, διὰ τῶν πόλων ἐστὶ τοῦ αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μίγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἑκατέρωθεν δύο ἐλαττόνων κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τὰ τῆς ἁφῆς σημεῖα καὶ διάμετρον ἀντίκεινται.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἔτι ἐὰν μίγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλαττόνων δύο ἅπτηται κύκλων, οἱ ἐλάττονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐλάσσονες ἴσοί τε καὶ παράλληλοι, ὁ τοὺς ἐμοὺς ἁπτόμενος μέγιστος κύκλος καὶ τοῦ ἑτέρου ἅπτεται.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι ἐλάσσονες οἱ αιζπ, γλμν, ἴσοί τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἁπτέσθω τοῦ αιζπ, ὁ αβγδ, κατὰ τὸ α. λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, εἰ γὰρ μή, ἅψεται πάντως ἑτέρου τινὸς μείζονος, ἢ ἐλάσσονος τοῦ γλμν. ἁπτέσθω δὴ τοῦ γξοπ, μείζονος, καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται τῶν αιζπ, γξοπ, ἐλασσόνων, πάντως γε κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς ἀποπέρω οἱ αιζπ, γξοπ, ἴσοί εἰσιν, ὑπεπέθη δὲ καὶ ὁ γλμν, ἴσος τῷ αιζπ, ἄρα ὁ γξοπ, ἴσος ἐστὶ τῷ γλμν, ἀλλὰ καὶ μείζων κατὰ τὸ ὑπόθεσιν, ὅπερ ἄρα, ὁ αβγδ, ἄρα οὐκ ἅπτεται μείζονος τοῦ γλμν. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται μὴ ἅπτεσθαι μηδὲ ἐλάσσονος, τὸ αὐτὸ γὰρ ἄτοπον ἕψεται, ὁ ἄρα αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αιζπ, ἅπτεται πάντως καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ἐκείνῳ ὄντος.

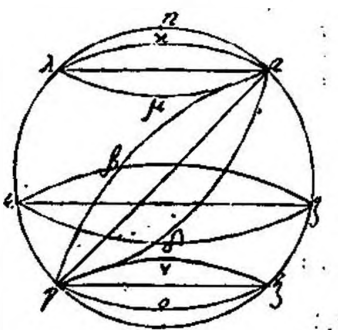
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν δύωνται ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλείονες, ἢ δύο ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοι τε ἀλλήλοις καὶ παράλληλοι εἶναι.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος κύκλου τινὰ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλαγίως τέμνῃ, δυώνται ὁ αὐτὸς δύο κύκλων ἅπτεσθαι ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ.

Κύκλος μέγιστος ὁ αβγδ, τεμνέτω κύκλον τὸν εβζδ, πλαγίως. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος δυώνται δύο τινῶν ἅπτεσθαι κύκλων, ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ εβζδ, κύκλῳ. Ἐπεὶ γὰρ πόλοι τοῦ εβζδ, τὸ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν η, καὶ θ, σημείων γεγράφθω κύκλος ὁ ηεθζ. ἀπὸ δὴ τῶν η, καὶ θ, σημείων ἐπὶ τὸν κύκλον, διαγεγράφθωσαν οἱ ακλμ, γνξο, κύκλοι. καὶ ἐπεὶ οἱ αβγδ, ηεθζ, μέγιστοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὸ ί: τοῦ δ: τοῦ παρόντος, δίχα ἀλλήλοις τέμνονται. ἔστι δὲ τὸ αζγ, τόξον ἡμικυκλίου ἔστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ ηζθ, ἡμικυκλίου ἐστί, διὰ τὸ τὰς πόλους πάντας κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἡμικυκλίῳ ἀφίσασθαι ἀλλήλων, ἄρα τὰ αζγ, ηζθ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, κοινοῦ ἀφαιρεμένου τοῦ αζθ, ὑπολείπονται τὰ ηα, θγ, τόξα ἴσα, ἄρα οἱ ακλμ, γνξο, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. ἔχουσι δὲ καὶ τὰς αὐτὰς πόλους η, θ, ἃς καὶ ὁ εβζδ, κατὰ τὸ κατασκεύιον, ἄρα κατὰ τὸ δ: τοῦ παρόντος, παράλληλοί εἰσι τῷ εβζδ. ἀλλ' ἑκάτερος τῶν ακλμ, γνξο, συμπίπτει μὴ τῷ αβγδ, μιγίσῃ κύκλῳ τῷ αὐτῷ σημείῳ, τοῦ ηεθζ, μιγίσου ὄντος καὶ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῶν πόλων τῶν αβγδ, ακλμ, γνξο, διηρχομένου, ἄρα κατὰ τὸ β': τοῦ παρόντος, ὁ αβγδ, ἑκατέρα τῶν ακλμ, γνξο, κύκλων ἅπτεται. οἱ δὲ ακλμ, γνξο, κύκλοι ἴσοι τε ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ παράλληλοι τῷ εβζδ, ὡς δέδεικται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sph. Lib. 2. Fig. 5.

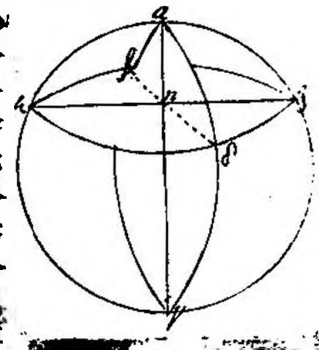
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ τῷ αὐτῷ κύκλῳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, οἱ γὰρ ακλμ, γνξο, παράλληλοι ὄντες τῷ εβζδ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, ὅτι γε τὰς αὐτὰς ἔχουσι πόλους.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων ἀλλήλοις τεμνομένων διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου κύκλος μέγιστος διέλθῃ, δίχα τὰ τμήματα ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων τέμνει.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ αβγδ, εβζδ, κύκλοι, καὶ τὰ β, δ σημεῖα, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχέσθω ὁ αεγζ, μέγιστος κύκλος. Λέγω, ὅτι ὁ αεγζ, μέγιστος κύκλος δίχα τέμνει τὰ βαδ, βγδ, βεδ, βζδ τμήματα ἑκατέρου τῶν αβγδ, εβζδ, κύκλων. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ κοιναὶ τομαὶ αγ, εζ, βδ. καὶ ἐπεὶ κύκλος ὁ αεγζ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, εβζδ, διέρχεται, παύπως γε καὶ τλω ιβ'. τὰ δ. τὰ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ἑκάτερος δηλαδὴ τῶν αβγδ, εβζδ, κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τὰ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τλω ιθ'. τὰ ι δ. τὰ στοιχειωτά, καὶ ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομὴ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τὰ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ αεγζ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, κατὰ τὸν γ'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ τῆς βδ, ἡ αγ, ὡς ὑφόμεθα, ἡ βδ, ἄρα ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἀνάπαλιν, αἱ ἄρα βηα, δηα, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ ἐπομένως ἴσαι, ἀλλ' ἡ αγ, διάμετρός ἐστι τοῦ αβγδ, κύκλου διὰ τὸ δίχα τέμνεσθαι τοὺς αβγδ, αεγζ, μεγίστους κύκλους, κατὰ τλω ι'. τὰ ά. τὰ παρόντος, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τλω βδ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τλω γ'. τὰ γ'. τὰ στοιχειωτά, καὶ δίχα τέμνει ἡ αγ, τλω βδ, ἴση ἄρα ἡ βη, τῇ ηδ, κοινὴ δὲ ἡ αη, δύο δὴ αἱ βη, ηα, δυσὶ ταῖς δη, ηα, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ βηα, τῇ δηα, γωνία ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ αδ, ἴση ἐστίν, καὶ ἐπομένως τὸ αβ, αδ, τόξα ἴσα ἐστὶ κατὰ τλω κ'. τὰ γ'. τὰ στοιχειωτά. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ μὲν βγ, τόξον τῷ γδ, ἴσον, τὸ δὲ βε, τῷ εδ, καὶ τὸ βζ, τῷ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 6.

Ὅτι δὲ ἡ αγ, ἅπτεται τῆς βδ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἡ αγ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων, παύπως γε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τοῦ αεγζ, ἔστι δὲ ὁ αβγδ, κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ τὰ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἡ βδ, ἄρα ἅπερ ἐν τῷ τὰ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τὰ αεγζ, ἐπίπεδον, ὥστε καὶ τὸν δ'. ὅρον τοῦ ι ά. τὰ στοιχ. ἡ βδ, ἐπὶ τῆς αγ, πίπτει, ἅπτεται ἄρα ἡ αγ, τῆς βδ.

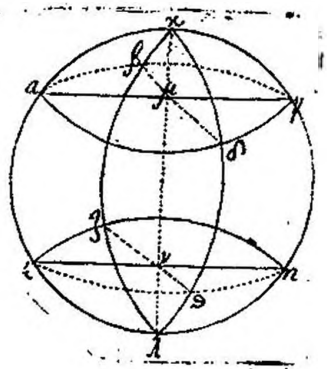
Ἀλλ.

Ἄλλως. Ἐπεὶ ὁ εβζδ, κύκλος δίχα τέμνεται ὑφ' ἑκατέρου τῶν αβγδ, αεγζ, μεγίστων κύκλων κατὰ τὸ ιβ': τοῦ δὲ παρόντος, παντῶς γε αἱ βδ, εζ, διάμετροι αὐτοῦ εἰσιν, ὥστε τὸ η, σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ εβζδ, κύκλου. ἀλλ' ὁ αβγδ, κύκλος καὶ τὸ αὐτὸ ιβ': δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸν εβζδ, κύκλον, ἄρα καὶ ἡ αγ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ εβζδ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ ιδ: τοῦ στοιχ: ἔστι δὲ ἡ αγ, διάμετρος, διὰ τὸ κοινὸν εἶναι τομὴν τῶν αβγδ, αεγζ, μεγίστων κύκλων, ἄρα διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ καὶ τὸ πάρ: τῆς ς': τοῦ ιδ: τοῦ παρ: διέρχεται ὅτι καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τοῦ αβζδ. ἀλλὰ καὶ ἡ βδ, διὰ τοῦ η, διέρχεται, ἅπτονται ἄρα ἀλλήλων καὶ ὦ η.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλοι μέγιστοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων παραλλήλων κύκλων διέλθωσι, τὰ μὲν τῶν παραλλήλων τόξα τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιλαμβανόμενα κύκλων, ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ τῶν μεγίστων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσα εἰσί.

Ἐ"στωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ αβγδ, εζηϑ, πόλοι δὲ τῶν αὐτῶν τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν κ, καὶ λ, σημείων διηρχέσθωσαν οἱ κζλδ, κελγ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω, ὅτι τὰ μὲν αβ, εζ, καὶ αδ, εϑ, τόξα τῶν αβγδ, εζηϑ, παραλλήλων ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ αε, βζ, ἴσα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ, εη, ζϑ, καὶ ἐπεὶ οἱ κελγ, κζλδ, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν αβγδ, εζηϑ, παραλλήλων κύκλων, παντῶς γε καὶ τὸ ιβ': τοῦ δ: τοῦ παρόντος, οἱ αβγδ, εζηϑ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπ' αὐτῶν τέμνονται, διάμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ αγ, βδ, εη, ζϑ, κοιναὶ τομαὶ, καὶ τὸ μν, σημεῖον κέντρον τῶν κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αβγδ, εζηϑ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, καὶ ὑπὸ τῶν κελγ, κζλδ, μεγίστων κύκλων τέμνονται, παντῶς γε καὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι καὶ τὸ ιε': τοῦ ιδ: τοῦ στοιχειωτοῦ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ μεν α με, τῇ εν, ἡ δὲ βμ, τῇ ζν, καὶ καὶ τὸ ιδ: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ αμβ, εν ζ, γωνίαι ἴσαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ πρὸς τοῖς κέντροις, καὶ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, ὁμοία ἄρα τὰ αβ, εζ, τόξα ὅμοιά εἰσι, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ αδ, εϑ, καὶ βγ, ζη, καὶ γδ, ηϑ, ὅπερ ἓν τῶν δύο. Ὅτι δὲ καὶ τὰ αε, βζ, ἴσα εἰσι, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ πόλος ἐστὶ τῶν αβγδ, εζηϑ, τὸ κ, σημεῖον, παντῶς γε καὶ τῶν ἐξ ὅρον τοῦ δ: τοῦ παρόντος αἱ κα, κβ,



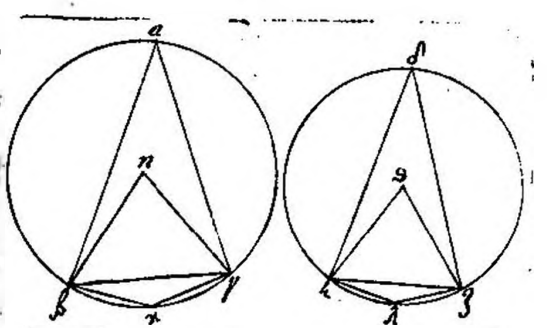
Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 7.

καὶ

καὶ κ ι, κ ζ, διαζευγνύουσι ἴσαι εἰσὶν, ὥστε καὶ αἱ κ α, κ β, καὶ κ ι, κ ζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ κθ' τοῦ γ' τῶν στοιχειωτοῦ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν κ α, κ β, ἴσων ἀπὸ τῶν κ ι, κ ζ, ἴσων καὶ αὐτῶν ἀλλήλων, ὡς δέδεικται, ἐγκαταλείπονται λοιπαὶ ἴσαι αἱ α ι, β ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ δ θ, γ η. Ὅτι δὲ αἱ πρὸς ταῖς κορυφαῖς ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, δῆλον. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ κύκλοι αὐτοῖς οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ συμπιπτέτωσαν πρὸς ταῖς η, καὶ θ, κορυφαῖς αὐτῶν ἴσαι γωνίαι αἱ ὑπὸ β η γ, ε θ ζ. Λέγω, ὅτι αἱ β κ γ, ε λ ζ, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν αἱ ῥηθεῖσαι γωνίαι ὅμοιαί εἰσιν.

Theod. Sf. Lib. a. Fig. 8.



Ἐπιζευχθείσαι γὰρ αἱ β γ, ε ζ, καὶ πρὸς μὲν ταῖς α, καὶ δ, συμπιπτέτωσαν αἱ ὑπὸ β α γ, ε δ ζ, γωνίαι, πρὸς δὲ ταῖς κ, καὶ λ, αἱ ὑπὸ β κ γ, ε λ ζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ β η γ, ε θ ζ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ β η γ, διπλασία τῆς ὑπὸ β α γ, ἡ δὲ ὑπὸ ε θ ζ, τῆς ὑπὸ ε δ ζ, κατὰ τὸ κ' τοῦ γ' τῶν στοιχειωτοῦ, παύπως γε αἱ ὑπὸ β α γ, ε δ ζ, ἴσαι εἰσὶν. Λοιπὸς ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν α β κ γ, δ ε λ ζ, τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι αἱ ὑπὸ β α γ, β κ γ, καὶ ε δ ζ, ε λ ζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ κβ' τοῦ αὐτοῦ, παύπως γε αἱ ὑπὸ β α γ, β κ γ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ε δ ζ, ε λ ζ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ β α γ, ἴση τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ β κ γ, ε λ ζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸν ι' ὅρον τοῦ αὐτοῦ, τὰ β κ γ, ε λ ζ, τμήματα ὅμοιά εἰσιν, αἱ ἄρα β κ γ, ε λ ζ, περιφέρειαι ὅμοιαί εἰσιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

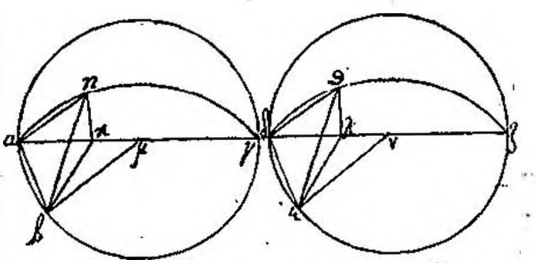
Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἴσου κύκλου ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλου ἐπιζευχθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῆς κύκλου ἐπίπεδα, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεθῇ πλῆθος ἴσα ἀλλήλοις ὑπερέχοντα, ἃ ἐλλείπουσι τοῦ ἡμίσεως τῆς τμηθείσης, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν διῆχθαι ἴσαι ἐπὶ τὰς τῆς κύκλου περιφερείας ἀχθῶσι, τὰ ἐμπολαμβανόμενα τῆς κύκλου τόξα μεταξὺ τῆς διαμέτρου, καὶ τῶν ἀγομένων διήκειν ἴσα ἔσονται.

Ἔστωσαν κύκλοι ἴσοι οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῶν α γ, δ ζ, διαμέτρων τῶν αὐτῶν κύκλων, τμήματα κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τὰ α η γ, δ θ ζ.

σαν δὲ ἔτι ἡ ὀρθὰ πρὸς τὰ ΖΗ α β γ, δ ε ζ, κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀφαιρεθήσεται ἀπὸ τῆς α η γ, δ Θ ζ, τμημάτων ἴσα τὰ ξα τὰ α η, δ Θ, ἐλλείποντα τῶν ἡμίσεων τῆς α η γ, δ Θ ζ, τὰ ξε, ἀπὸ δὲ τῆς τμημάτων η, καὶ Θ, ἀχθήσαν ἐπὶ τὰς τῆς α β γ, δ ε ζ, κύκλων περιφερείας ἴσαι αἱ η β, Θ ε. Λέγω, ὅτι τὰ α β, δ ε, ἐναπολαμβανόμενα τὰ ξα μεταξὺ τῆς α γ, δ ζ, διαμέτρων, καὶ η β, Θ ε, ἀγομένων ἀθροισμάτων ἴσά ἐστι. Πεπτώσαν γὰρ ἀπὸ τῆς η, καὶ Θ, κάθετοι πρὸς τὰ τῆς α β γ, δ ε ζ, κύκλων ἐπίπεδα αἱ η κ, Θ λ, αἵτινες καὶ πρὸς δ'; ὅρον τῶν ι δ': τῶν στοιχείων ἐπὶ τῆς α γ, δ ζ, πίπτουσαι. ἐπεὶ δὲ αἱ ἀπὸ τῆς τομῶν η, καὶ Θ, κάθετοι ἡ ἐντὸς πίπτουσι τῆς περιφερείας, ἡ ἐκτὸς, ἡ γὲν ἐπ' αὐτῆς, πεπτώσαν ἀ: ἐντὸς, καὶ συμβαλλέτωσαν ταῖς α γ, δ ζ, διαμέτροις καὶ τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α η, η β, β κ, β α, β μ, καὶ δ Θ, Θ ε, δ ε, ε λ, ε ν. καὶ ἐπεὶ τὰ α η γ, δ Θ ζ, ἴσά εἰσι, καὶ τῶν ἀφῃρηται ἴσα τὰ α η, δ Θ, παντως γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα η γ, Θ ζ, ἴσά εἰσιν, ὥστε αἱ ὑπὸ η α γ, Θ δ ζ, γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὸ κ ζ': τῶ γ': στοιχειωτῶ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ α κ η, δ λ Θ, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, τὰ ἄρα α κ η, δ λ Θ, ἕξ γωνια ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ η α κ, α κ η, δυσὶ ταῖς ὑπὸ Θ δ λ, δ λ Θ, ἴσας ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἔχουσι δ' ἔτι καὶ μίαν πλευρὰν τὸ α η, μιᾷ πλευρᾷ τῇ δ Θ, ἴσω καὶ τὸ κ Θ': τῶ γ': τῶν στοιχειωτῶ, τὸ ὑποτείνουσαν δηλ: ὑπὸ μίαν τῆς ἴσων γωνιῶν. ἄρα καὶ τὸ κ ς': τῶ δ': τῶ αὐτῶ καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν, ἴση ἄρα ἡ μὲν α κ, τῇ δ λ, ἡ δὲ η κ, τῇ Θ λ. ἀλλ' ἐπεὶ τὰ η κ β, Θ λ ε, ἕξ γωνια ὀρθὰς ἔχουσι τὰς ὑπὸ η κ β, Θ λ ε, γωνίας καὶ τὸ γ': ὅρον τῶ ι δ': τῶ στοιχειωτῶ, παντως γε καὶ τὸ μ ζ': τῶ δ': τῶ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς η β, πεζάγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν η κ, κ β, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Θ ε, τοῖς ἀπὸ τῶν Θ λ, λ ε. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς η β, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς η β, Θ ε, καὶ τὸ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν η κ, κ β, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Θ λ, λ ε. ὥστε ἀφαιρεμένων τῶν ἀπὸ τῶν η κ, Θ λ, ἴσων ὄντων ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν κ β, λ ε, ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ κ β, λ ε, ἴσαι εἰσιν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ α μ, δ ν, ἡμιδιάμετροι τῶν ἴσων κύκλων, ἴσαι εἰσὶν, ἀφαιρεμένων τῶν α κ, δ λ, ἴσων, ἐναπολείπονται παντως καὶ αἱ κ μ, λ ν, ἴσαι, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ β μ, ε ν, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τὰ β κ μ, κ λ ν, ἰσόπλευρά ἐστιν, ὥστε καὶ ἰσογώνια, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ α μ β, γωνία τῇ ὑπὸ δ ν ε, καὶ ἔστιν ἑκατέρα

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 9.

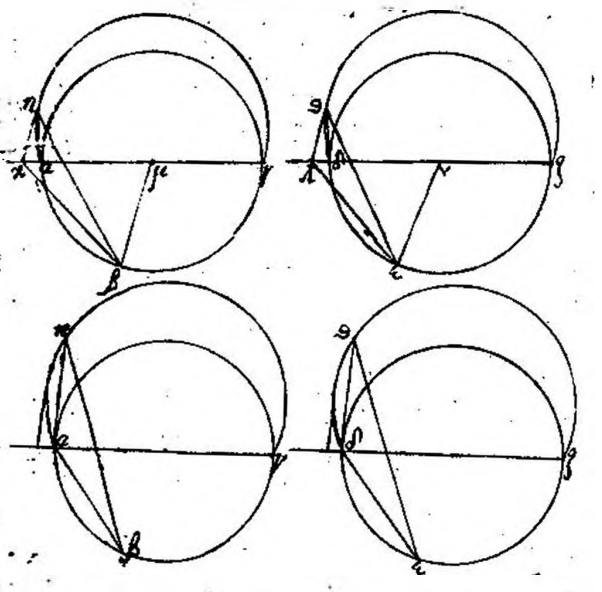


πρὸς

πρὸς ἢ κείφῳ, ἄρα καὶ τὴν κ ς΄: τοῦ γ΄: τῶν στοιχειωτῶν αἱ α β, δ ε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί.

Πιπτέτωσαν β΄: αἱ η κ, λ θ, καθετοι ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ η α, κ β, β μ, καὶ θ δ, λ ε, ε ν, καὶ ἐπεὶ τὸ α η γ, δ θ ζ, τμήματα ἴσά τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ ἀφῃρέθησαν τὰ α η, δ θ, πάλα ἴσα, πάντως γε καὶ τὸ ἐναπολειπόμενα η γ, θ ζ, ἴσά ἐστιν. αἱ ἄρα ὑπὸ γ α η, ζ δ θ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τὴν κ ζ΄: τῶν γ΄: τῶν στοιχειωτῶν. ὥστε καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ η α κ, θ δ λ, ὡς παραπληρώματα τῶν ὑπὸ γ α η, ζ δ θ, ἴσαι ὁμοίως εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν η κ α, θ λ δ, ὀρθή· ἄρα τῶν α η κ, δ θ λ, ἑξιγώνων αἱ δύο γωνίαι τὰς δύσὶν ἴσαί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ αἱ η α, θ δ, πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι καὶ τὴν κ θ΄: τῶν αὐτῶν, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς η α, θ δ, περιφερείας, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν η κ, τῇ θ λ, ἡ δὲ κ α, τῇ λ δ, εἰσὶ δὲ καὶ α μ, δ ν, ἡμισιδάμεξοι ἴσαι, ἀφαιρεθέντων ἄρα τῶν κ α, λ δ, ἴσων ταῖς α μ, δ ν, ἴσαις, ἴσαι ἔσονται αἱ κ μ, λ ν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ η κ, θ λ, ὀρθαί εἰσι πρὸς τὰς κ β, λ ε, καὶ τὸν γ΄: ὅρον τῶν ι ά: τῶν αὐτῶν, πάντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς η β, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν η κ, κ β, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θ ε, τοῖς ἀπὸ τῶν θ λ, λ ε. ἀλλ' αἱ η β, θ ε, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν η κ, κ β, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θ λ, λ ε. ἀφῃρημένων ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν η κ, θ λ, ἴσων, ἴση γὰρ ἡ η κ, τῇ θ λ, ὡς δέδεικται, ἐναπολείπεται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κ β, λ ε, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ κ β, λ ε, ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ κ μ, λ ν, ὡς δέδεικται, ἔτι δὲ καὶ αἱ μ β, ν ε, ἡμιδιάμεξοι, ἄρα τῶν κ μ β, λ ν ε, ἑξιγώνων αἱ ὑπὸ κ μ β, λ ν ε, γωνίαι ἴσαί εἰσι καὶ τὴν η΄: τῶν ά: τῶν στοιχειωτῶν, ὥστε καὶ αἱ α β, δ ε, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἴσαί εἰσι καὶ τὴν κ ς΄: τῶν γ΄: τῶν αὐτῶν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 10.



Πιπτέτωσαν πλάγιαι αἱ η α, θ δ, καθετοι ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, δ ε, καὶ ἐπεὶ αἱ η α, θ δ, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῶν α β, δ ε, καὶ τὸν γ΄: ὅρον τῶν ι ά: τοῦ στοιχειωτοῦ, πάντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς η β, τετράγωνον ἴσον

ἐστὶ

ἐστὶ τῆς ἀπὸ τῶν η α, α β, τετραγώνους, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θ ε, τῆς ἀπὸ τῶν θ δ, δ ε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν η β, θ ε, ἴσα ἐστὶ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς η β, θ ε, ἔστι καὶ τὸ ἀπὸ τῶν η α, α β, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θ δ, δ ε, συναμφότερα συναμφοτέροις, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν η α, θ δ, ἴσα ἐστὶν, ἴσαι γὰρ αἱ η α, θ δ, καὶ τὰς κ θ': τετράγωνα τὰ αὐτά. ἔστι ἀφαιρεμένων τῶν ἀπὸ τῶν η α, θ δ, ὑπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν α β, δ ε. ὥστε καὶ αἱ α β, δ ε, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ κή: τὰ αὐτὰ αἱ α β, δ ε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

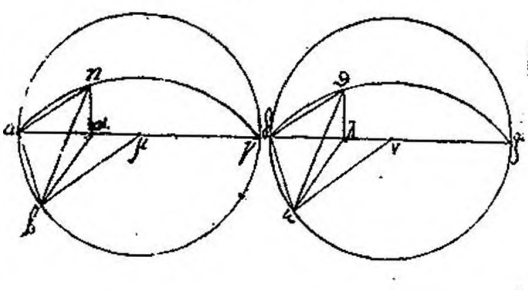
Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα εἶναι τὰ α β, δ ε, τόξα, ἂν τὰ ἀφαιρεθέντα α η, δ θ, ὑπερέχωσι τῆς ἡμισείας τῶν α η γ, δ θ ζ, τόξων.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπιζευχθῶσιν, ὥστε ὀρθὰς εἶναι πρὸς τὰς τῆς κύκλων ἐπιπέδα· ἀπὸ δὲ τῆς τμημάτων τε ἑκ κύκλων ἴσα τόξα ἀφαιρεθῇ, αἱ τὰς τομὰς τῆς τόξων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ συνεστάτωσαν ἐπὶ τῶν α γ, δ ζ, διαμέτρων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ α η γ, δ θ ζ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α η γ, δ θ ζ, τμημάτων ἀφῃρήσθωσαν ἴσα τόξα τὰ α η, δ θ, ἀπὸ δὲ τῶν κύκλων α β γ, δ ε ζ, τὰ α β, δ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ η β, θ ε. Λέγω τὰς η β, θ ε, ἴσας εἶναι, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὰ α β, δ ε, τόξα ἐπὶ τῶν κέντρων δήλον: τῆς δὲ δεῖξεως τῆς πρώτερον προτάσεως, ἴσαι ἐσὶ, πάντως γε αἱ α β, δ ε, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τὰς κ θ': τὰ γ': τοῖς στοιχείοις. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α κ, δ λ, ἴσαι, ὡς δέδεικται αὐτόθεν, ἄρα τῶν β α κ, ε δ λ, ξ γώνων αἱ δύο πλευραὶ β α, α κ, ε δ, δ λ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, εἰσὶ δὲ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ β α κ, ε δ λ, ἴσαι, ὡς ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν β γ, ε ζ, βεβηκυῖαι, καὶ κατὰ τὸ κζ': τὰ αὐτὰ τὰ, ἄρα καὶ βάσεις αἱ ὑπὸ β κ, ε λ, ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δ' ἔτι ἴσαι καὶ αἱ η κ, θ λ, κάθετοι, ὥσπερ καὶ αἱ ὑπὸ β κ η, ε λ θ, γωνίαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς ἐν τῷ αὐτόθεν δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ δ': τὰ ά: τὰ αὐτὰ αἱ β η, ε θ, ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἐδεῖ δεῖξαι.

Ἐπὶ δὲ τῶν ἡμάτων τῆς β': δείξεως, ἐπεὶ αἱ κ μ, μ β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς



Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 11.

λν, νε, ὡς δέδεικται ἐν τῇ αὐτῇρω, εἰσὶ δ' ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας ὑποτείνεσθαι πὰς αβ, δε, περιφερείας, ἐφ' ὧν αὐταὶ βεβήκασιν, ἄρα καὶ τῷ ρηθεῖσαι δ': αἱ κβλ, ἴσαι εἰσί. δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν κλ, κάθετος τῇ Θλ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ κλβ, γωνία τῇ ὑπὸ Θλε, ἄρα κατὰ τὸ αὐτὸ καὶ ἡ κβ, τῇ Θε, ἴση ἐστίν.

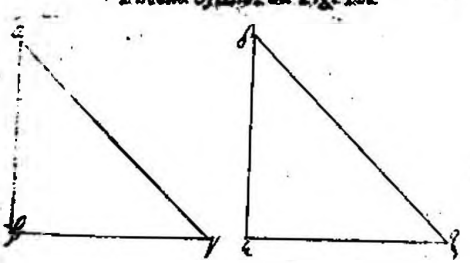
Ἐπὶ δὲ τῆς σχημάτων τῆς γ': δείξεως ὁμοίως, ἐπεὶ αἱ κα, Θδ, καὶ αβ, δε, ἴσαι εἰσί, δέδεικται δὲ ἐν τῇ αὐτῇρω καὶ ἡ ὑπὸ καβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ Θδε, ἄρα καὶ τῷ ρηθεῖσαι δ': καὶ αἱ κβ, Θε, ἴσαι εἰσίν. ἐαὰ ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρων τῆς ἴσων κύκλων ἴσά τε καὶ ὅμοια τμήματα. καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ Η Μ Μ Α.

Ἐὰν δύο ῥίγωμα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανοῦν γωνίᾳ ὁποιᾳοῦν ἴσην, καὶ τὴν λοιπὴν πλευρὰν τῇ λοιπῇ ἴσην ἕξει, καὶ ὅλον τὸ ῥίγωμον ὅλῳ τῷ ῥιγώμῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, ῥίγωνα τὰς δύο πλευρὰς αγ, γβ, δυσὶ ταῖς δζ, ζε, ἴσας, τὴν μὲν αγ, τῇ δζ, τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην. Λέγω, ὅτι καὶ τὴν αβ, τῇ δε, ἴσην ἔχει, καὶ ὅλον τὸ αβγ, ῥίγωνον ὅλῳ τῷ δεζ, ῥιγώνῳ ἰσόν ἐστι, καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ γβ, τῇ ζε, ἴση ἐστὶν, παύπως γε ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν δζ, ἔστι καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν ζε, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ δζ, πρὸς τὴν ζε, καὶ τὴν ις': τὰ δὲ τὰ στοιχεῖα τὰ, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα καὶ τὴν ζ': τὰ ς': τὰ αὐτὰ, τὰ αβγ, δεζ, ῥίγωνα ἰσογώνια ἐστίν. ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ τὴν δ': τὰ δ: τὰ αὐτὰ καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστὶ, καὶ ὅλον τὸ ῥίγωνον ὅλῳ τῷ ῥιγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

Theod. Sph. Lib. 2. Fig. 22.

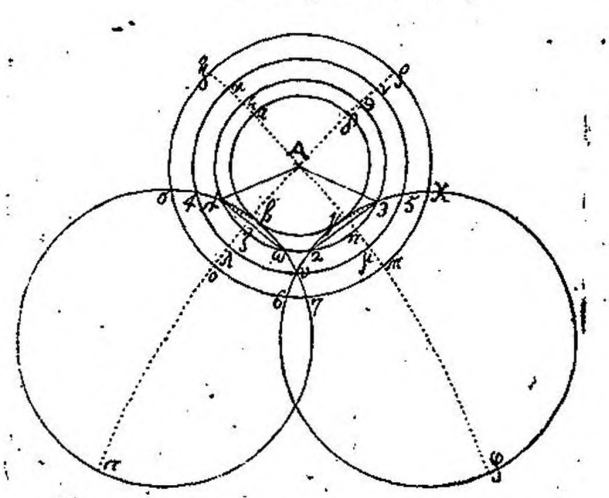


Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι, πολλῶν ὄντων παραλλήλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τὸν μὲν ἐλάσσονα ἅπτωνται, τὰς δὲ λοιπὰς τέμνωσι, τὰ τῷ μεγίστῳ τόξα, πάντα ὑφ' ἑκάστου τῷ παραλλήλῳ περιεχόμενα, ἢ τὰ μεταξὺ τῷ παραλλήλῳ ἐμπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τῷ παραλλήλῳ τὰ πρὸς τῷ μεγίστῳ περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ πάντων αὖθις ὅσα μὲν διὰ τῆς τομῆς τῷ μεγίστῳ διέρχεται κύκλων ἀφ' ἑνὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῷ ἀφ' ὧν τόξῳ, τὸν ὅπερ οἱ μέγιστοι παραλλήλου ἅπτονται, ὅσα δὲ διὰ τῆς καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται μέρων διέρχεται μὴ ἀφαιρέσεως, ὅσα δὲ διὰ τῆς πρὸς ἃ οὐ τέμνονται οἱ κύκλοι διαβαίνουσι μετὰ προσθήκης ἑκατέρῳ ὅμοια εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, κλμν, ξοπρ, καὶ τὸν μὲν αβγδ, ἐλάσσονος ἁπτέσθωσαν οἱ βστυ, γυφχ, καὶ τὰ β, καὶ γ, σημεῖα, τὰς δὲ λοιπὰς τεμνέτωσαν οἱ αὐτοὶ καὶ τὰ ψ, ω, 2, 3, 4, υ, υ, 5, σ, 6, 7, χ. Λέγω, ὅτι τὰ τὸν ψβω, 2γ3, 4βυ, υγ5, σβ7, 6γχ, τόξα τῷ μεγίστων κύκλων βστυ, γυφχ, τὰ ὑπὸ τῷ παραλλήλων περιεχόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ τὰ 4ψ, ωυ, υ2, 35, σ4, υ6, 7υ, 5χ, τὰ μεταξὺ τῷ παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα ὁμοίως ἴσα ἐστιν. ἔτι δὲ καὶ τὰ ψζω, 2η3, 4λυ, υμ5, σο7, 6πχ, τόξα τῶν παραλλήλων ἴσα καὶ αὐτὰ ἀλλήλοις εἰσί, καὶ πάντων αὖθις τὰ μὲν 4λυ, υμ5, ὅμοιά εἰσι τῷ βγ, ἀφ' ἑνὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως, τὰ δὲ σο7, 6πχ, μὴ ἀφαιρέσεως τὸν 6, 7, καὶ τὰ ψζω, 2η3, μὴ προσθήκης τὸν ω2,

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 23.



ὅμοιά εἰσι τῷ αὐτῷ β γ, τόξῳ, τῷ μεταξὺ τῶν β, καὶ γ, ἀφῶν. Διήχθωσαν γὰρ διὰ τῶ Α, πόλων τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, καὶ β, γ, ἀφῶν μέγιστοι κύκλοι οἱ ρ Α τ, ξ Α φ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ δ, β σ τ 7, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β, καὶ ὁ ρ Α τ, μέγιστος διὰ τῶ Α, πόλου τῶ α β γ δ, διέρχεται κύκλου, καὶ τῆς β, ἁφῆς, παύσεται καὶ τῶν δ': τῶ παρόντος ὁ ρ Α τ, διέρχεται καὶ διὰ τῶ πόλου τοῦ β σ τ 7, ὥστε καὶ τῶν ι β': τῶ α': τῶ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, τὸ ἄρα β τ, τμῆμα ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τῶ β σ τ 7, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ τῶν Α β, β ⊥, ὑποτεινουσῶν ἐπιζευχθεισῶν, ἔτι δὲ καὶ τῆς Α ⊥, ἡ ὑπὸ Α β ⊥, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ Α γ 3, ὀρθή. εἰσὶ δὲ καὶ τὸν ἐ: ὅρον τῶ αὐτῶ καὶ αἱ β Α, Α ⊥, ἴσαι ταῖς γ Α, Α 3, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἄρα κατὰ τὸ προκείμενον λῆμμα ἡ β ⊥, ὑποτείνουσα ἴση ἐστὶ τῇ γ 3, ὥστε καὶ αἱ β ⊥, γ 3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν κ ϑ': τῶ γ': τῶ στοιχειωτῶ, ἀλλ' ἑκάτερον τῶν ⊥ β ω, 2 γ 3, τμημάτων δίχα τέμνεται, ἄρα καὶ τὸ ⊥ β ω, 2 γ 3, ὡς διπλάσια τῶν β ⊥, γ 3, ἴσα ἐστὶ καὶ τὸ β': ἀξίωμα τῶ στοιχ: τὸν αὐτὸν ἔροπον δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ 4 β υ, υ γ 5, καὶ σ β 7, 6 γ χ. ἐπεὶ ἓν δέδεικται τὰ τε ⊥ β, β ω, καὶ 4 β, β υ, ἴσα, παύσεται καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν ἴσων 4 β, β υ, τὰ ἴσα ⊥ β, β ω, ἐναπολειφθήσεται τὰ 4 ⊥, ω υ, ἴσα καὶ τὸ γ': ἀξίωμα. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἔτι ἴσα καὶ τὰ σ 4, υ 7, καὶ υ 2, 3 5, καὶ 6 υ, 5 χ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ ⊥ β ω, 2 γ 3, ἴσά εἰσιν, ὡς δέδεικται, παύσεται καὶ τῶν ῥηθεῖσαι κ ϑ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτῶ αἱ ⊥ ω, 2 3, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶν, ὥστε καὶ τῶν κ η': τῶ αὐτῶ, καὶ αἱ ⊥ ζ ω, 2 η 3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ 4 λ υ, υ μ 5, καὶ σ ο 7, 6 π χ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἦν τὸ δ': Τελευταῖον ἐπεὶ τὰ 4 λ υ, υ μ 5, ἴσά ἐστι, καὶ τῶ μὲν 4 λ υ, ἥμισύ ἐστι τὸ 4 λ, τῶ δὲ υ μ 5, τὸ υ μ, καὶ τῶν η': τῶ παρόντος, ἄρα τὸ 4 λ, ἴσόν ἐστι τῷ υ μ. κοινὸ προσκείσθω τὸ λ υ, ὅλον, ὅτι τὸ 4 λ υ, ἴσόν ἐστι τῷ λ υ μ, ἀλλὰ τὸ λ υ μ, ὅμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ β γ, αὖθ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως. ὁμοίως δὲ πάλιν, ἐπεὶ τὸ σ ο 7, ἴσον ἐστὶ τῷ 6 π χ, ὡς δέδεικται, καὶ τῶ μὲν ἥμισύ ἐστι τὸ σ ο, κατὰ τὸν ῥηθεῖσαν η': τῶ δὲ τὸ 6 π, κοινὸ προσκείσθω τὸ ο 6, παύσεται τὰ σ ο 6, ο 6 π, ἴσά ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ο 6 π, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, ἄρα καὶ τὸ σ ο 6, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ 7 π χ, ὅμοιον τῷ β γ. ἄρα τὰ σ ο 7, 6 π χ, τόξα τὰ διὰ τῶν, καθ' ἃ τέμνονται οἱ μέγιστοι κύκλοι, μερῶν διερχόμενα τόξα ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν τομῶν μὴ ἀφαιρέσεως τῶ 6 7. Τὸν αὐτὸν ἔροπον δειχθήσεται καὶ τὰ ⊥ ζ ω, 2 η 3, ὅμοια εἶναι τῷ β γ, μὴ προσθήκης τῶ ω 2. δειχθήσεται γὰρ ὡς πρότερον τὸ ⊥ ζ, ἴσον τῷ 2 η. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ ζ ω, ἔσαι τὸ ⊥ ζ 2, ἴσον τῷ ζ 2 η, ἀλλὰ τὸ ζ 2 η, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, κατὰ τὸν ῥηθεῖσαν ϑ': τῶ παρόντος. ἄρα καὶ τὸ ⊥ ζ 2, ἢ τὸ ⊥ ζ ω, μὴ προσθήκης τῶ ω 2, ὅμοιόν ἐστι τῷ β γ, τῷ μεταξὺ τῶν ἀφῶν. ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ω η 3. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

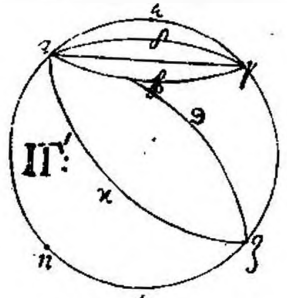
Πρό-

Πρότασις ΙΓ': Πρόβλημα.

Κύκλῳ ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ δοθέντος κύκλου μέγιστον καταγράψαι ἀπτόμενον τοῦ ἐλάσσονος κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον.

Δοθήτω ἐλάσσων κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητείσθω καταγραφῆναι μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, κατὰ τὸ α, σημεῖον. Εἰλήφθω δὴ κατὰ τυχὸν ι ζ': τοῦ παρόντος ὁ πόλος τοῦ δοθέντος α β γ δ, ἐλάσσονος κύκλου, καὶ ἔστω ἔστω ὁ ε, καὶ διὰ τοῦ ε, καὶ α, σημείων γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ ε α ζ γ, κατὰ τυχὸν ι ς': τοῦ αὐτοῦ. εἰλήφθω ἀφαιρεθήτω τὸ α η, περιφερείου τοῦ α ζ γ ε, μείζονος κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ὡς ἀπὸ πόλου διαστήματι τῷ η α, γεγράφθω ὁ α θ ζ κ, κύκλος, καὶ ἔστω ἔστω ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β γ δ, α θ ζ κ, κύκλοι συμπίπτουσι τῇ αὐτῇ α, σημείῳ τοῦ α η ζ γ, μείζονα κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διηρχομένου, πίπτουσι κατὰ τυχὸν β': τοῦ παρόντος οἱ α β γ δ, α θ ζ κ, ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἀλλ' ὁ α θ ζ κ, κύκλος ἀφίσταται τοῦ η, πόλου περιφερείᾳ, ἄρα καὶ τὸ πάχος τῆς ι γ': τοῦ παρόντος μείζονός ἐστι. κύκλου ἄρα ἐλάσσονος τοῦ α β γ δ, δοθέντος ἐν σφαίρᾳ, κύκλος μέγιστος καταγέγραπται ἁπτόμενος αὐτοῦ κατὰ τὸ δοθὲν α, σημεῖον ὁ α θ ζ κ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 14.



Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

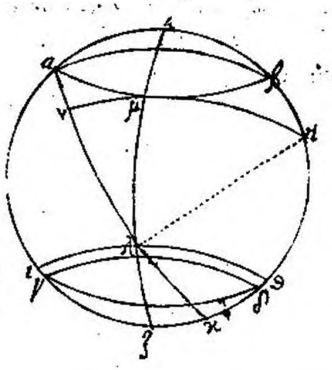
Δοθέντος σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλον μέγιστον διὰ τοῦ δοθέντος γράψαι σημείου ἁπτόμενον ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.

Ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι οἱ α β, γ δ, ὧν πόλοι τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ δοθήτω μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ η, καὶ ζητείσθω καταγραφῆναι κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ η, σημείου ἁπτόμενος ἑκατέρου τῶν α β, γ δ, κύκλων. Ἐπεὶ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐξ ἴσου ἀφίσταται τῶν παραλλήλων κύκλων, ἢ τοῦ μὲν πλησιέστερον, τοῦ δὲ ἀπώτερόν ἐστι. Κείσθω ἀφ: ἐξ ἴσου ἀφίσθαι τὸ η, σημεῖον τοῦ τε β, καὶ δ. διὰ τοῦ ε, τοίνυν πόλου καὶ η, δοθέντος σημείου γεγράφθω ὁ ε κ ζ η, μέγιστος κύκλος κατὰ τυχὸν ι ς': τοῦ παρόντος, τέμνων τὸν μὲν α β, παράλληλον κατὰ τὰ α, καὶ β, τὸν δὲ γ δ, κατὰ τὰ γ, καὶ δ. καὶ ἐπεζεύχθω τὰ β θ, η ζ, τόξα ἴσα τῇ τοῦ ε κ ζ η, κύκλου περιφερείᾳ, καὶ

ἀπὸ μὲν τῦ ζ, σημείυ διασήματι τῇ ζ θ, γραφήτω παράλληλος ὁ λ θ, ἀπὸ δὲ τῦ η, διασήματι τῇ η ζ, γραφήτω μέγιστος ὁ ζ ε, τέμνων τὸν μὲν λ θ, κῇ τὸ μ, τὸν δὲ α β, κῇ τὸ ν· εἴπα ἀπὸ τῦ μ, ὡς ἀπὸ πόλυ, διασήματι τῇ μ ν, γραφήτω ὁ κ ν η, κῇ ἔτος ἔσαι ὁ ζητήμενος. Ἐπεὶ γὰρ τὸ β θ, τεταρτημόριόν ἐσι, τῇ δὲ β θ, ἴσον ἐσὶ τὸ μ ν, κῇ τῷ θ ζ· τῦ παρόντος, ἄρα κῇ τὸ μ ζ, τεταρτημόριόν ἐσιν. ἀλλὰ κῇ τὸ η ζ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐσι, τῇ δὲ η ζ, ἴσόν ἐσι τῇ η μ, κῇ τὸν ἑ· ὅρον τῦ ά· τῦ παρόντος, ἄρα τὸ μ ν, διάσημα ἴσόν ἐσι τῇ μ η. ὁ ἄρα γραφόμενος κύκλος τῷ μ ν, διασήματι διέρχεται κῇ διὰ τῦ η, οἷος ὁ κ ν η, ἅπτεται δὲ ὁ κ ν η, κύκλος τῦ α β, παραλλήλυ, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς κῇ τῦ γ δ, κῇ τῷ ε· τῦ παρόντος, διέρχεται δὲ κῇ διὰ τῦ δοθέντος η, σημείυ, ὡς δέδεικται, δοθέντος ἄρα σημείυ ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε κῇ ἴσων, κύκλος μέγιστος διὰ τῦ δοθέντος γέγραπται σημείυ, ἁπτόμενος ἑκατέρα τῶν παραλλήλων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ δοθὲν η, σημεῖον ἐξ ἴσυ ἀφεστάμενον τῶν β, δ. πάλιν δὲ κειμένυ, γραφήτω διὰ τῦ ε, πόλυ, κῇ η, σημείυ μέγιστος κύκλος ὁ ε α γ δ β, κῇ τῷ ῥηθέντων ε ς· τῦ παρόντος, κῇ ἔστωσαν τὰ β θ, η κ, τόξα ἴσα τεταρτημορίῳ ἑκάτερον, κῇ ἀπὸ μὲν τῦ ζ, πόλυ διασήματι τῷ ζ θ, γραφήτω ὁ θ λ ι, παράλληλος, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διασήματι τῷ η κ, γραφήτω ὁ κ λ α, κύκλος τέμνων τὸν θ ι, παράλληλον κατὰ τὸ λ. διὰ δὴ τῶν ζ, κῇ λ, διήχθω ὁ ζ λ ε, μέγιστος, τέμνων τὸν α β, παράλληλον κῇ τὸ μ· εἴπα ἀπὸ τῦ λ, διασήματι τῷ λ μ, γραφήτω ὁ ν μ η, κῇ ἔτος ἔσαι ὁ ζητήμενος. ἐπεὶ γὰρ τὸ β θ, τεταρτημόριόν ἐσι, παντὸς γε κῇ τὸ μ λ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐσιν, ἴσα γὰρ κῇ τῷ θ· τῦ παρόντος, ὥσπερ κῇ τὸ α ι, ἀλλὰ κῇ τὸ η λ, τεταρτημόριόν ἐσι, γέγραπται γὰρ ὁ κ λ ν, τῷ η κ, διασήματι τεταρτημορίῳ ὄντι κῇ τῷ καπασκλίῳ, ἄρα ὁ κύκλος τῷ μὲν λ, διασήματι δὲ τῷ λ ν, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται κῇ διὰ τῦ η, ἔτος δ' ἐσιν ὁ ν μ, ἄρα ὁ ν μ, διέρχεται κῇ διὰ τῦ η, δοθέντος σημείυ. ἀλλ' ὁ ν μ η, ἅπτεται τῦ α β, κῇ τῷ καπασκλίῳ, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς κῇ τῦ γ δ, κῇ τῷ ῥηθέντων ε ς· τῦ παρόντος, διέρχεται δὲ κῇ διὰ τῦ η, ὡς δέδεικται, γέγονεν ἄρα τὸ προσαχθέν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 15.



Ὅτι δὲ ὁ κ λ ν, μέγιστος κύκλος τέμνει τὸν θ ι, δῆλον. τὸ γὰρ β θ, τεταρτημόριόν ἐσιν, ὥστε τὸ β κ, μειζόν ἐσι τεταρτημορίυ, ἀπώτερον ἄρα ἐσὶ τὸ κ, τῦ θ, διέρχεται δὲ ὁ μὲν θ ι, διὰ τῦ θ, ὁ δὲ κ λ ν, διὰ τῦ κ, κῇ τῦ μὲν θ ι, πόλος ἐσὶ τὸ ε, σημεῖον, ὅπερ κῇ τῦ α β, κῇ γ δ, τῦ δὲ κ λ ν, τὸ η, ὁ κ λ ν, ἄρα οὔτε παράλληλός ἐσι τῷ θ ι, ὡς μὴ ἔχων τὸν αὐτὸν πόλον, οὔ-

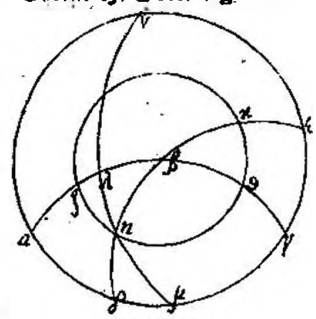
τε

τῶ μιὰ ἅπτεται αὐτοῦ, ὡς ἀφισαμένων τῶν θ, καὶ κ, σημείων ἀλλήλων, τέμνει ἄρα αὐτόν.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

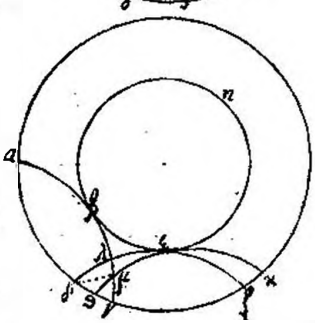
Δύο μέγιστοι μὲν σφαίρας κύκλοι, ἐαν ὅμοια τόξα παραλλήλων κύκλων ἐναπολαμβάνωσιν, καὶ ἀμφω διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν παραλλήλων, καὶ τῶ αὐτῶ ἑκάτερος ἅπτεται, καὶ γὰρ τὰς παραλλήλους ἑκάτερος τέμνει.

Κύκλοι μέγιστοι οἱ αβγ, δβε, ἀπολαμβανέτωσαν ὅμοια τόξα τῶν αδγε, ζηθκ, παραλλήλων τὰ αδ, ζη. καὶ κείσθω τὸν αβγ, κύκλον διὰ τῶν πόλων τῶν αδγε, ζηθκ, διέρχεσθαι παραλλήλων. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δβε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται, ἔστω τὸ β, σημεῖον, καθ' ὃ οἱ αβγ, δβε, τέμνονται κύκλοι, πόλος ἐστὶ τῶν αδγε, ζηθκ, παραλλήλων. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω πόλος τῶν αὐτῶν τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τῶν η, καὶ λ, γεγράφθω κύκλος ὁ μηλν, κατὰ τὴν ις'. τῶ δὲ τῶ παρόντος, καὶ ἐπεὶ οἱ αβγ, μλν, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τῶν αδγε, ζηθκ, παραλλήλων διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν θ'. τῶ παρόντος ὅμοια τόξα ἐναπολαμβάνουσιν, ἄρα τὰ αμ, ζη, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὴν αὐτὴν. ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅμοιά εἰσι καὶ τὰ αδ, ζη, ἄρα καὶ τὰ αμ, αδ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα τὸ λ, σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλο τι, ὃ αὐτὸ γὰρ ἔφηται ἄτοπον. τὸ β, ἄρα πόλος ἐστὶ τῶν αὐτῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Libr. Fig. 16.

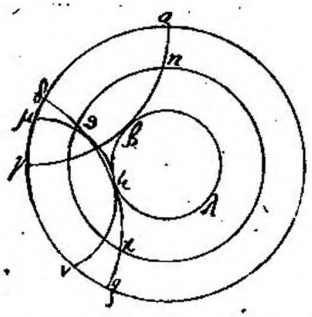
Ἀπολαμβανέτωσαν αὖθις οἱ αβγ, δεζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τῶν αγζ, βεη, παραλλήλων τὰ αδ, βε. καὶ κείσθω τὸν αβγ, ἅπτεσθαι τοῦ βεη, κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δεζ, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, εἰ γὰρ μὴ, ἁπτέσθω τοῦ βεη, κατὰ τὸ ε, ὁ θεκ, καὶ ἐπεὶ οἱ ζεδ, θεκ, μέγιστοί εἰσι, καὶ τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, παντως γε ὁ θεκ, διέρχεται διὰ τοῦ δ. εἰ γὰρ δυνατὸν, διελθέτω, ὡς ὁ δμεκ, κατὰ τὴν ιζ. ἄρα τοῦ παρόντος τὰ δλε, δμε, τόξα ἡμικύκλια αὐ εἰσιν. ἀλλὰ τὸ δε, ἴσον ἐστὶ τῷ αβ, διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ αβγ, δεζ, τόξα κατὰ τὴν ιβ'. τῶ παρόντος, ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν αβ, βγ, ἡμικυκλίου ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ, τόξον κύκλος, ὅπερ ἀδύνατον, ἄρα θεκ, οὐ διέρχεται διὰ



τοῦ

τῇ δ. ἐπεὶ δὲ ἅπτεται τῆ β ε η, κατὰ τὸ ε, ἅπτεται δὲ τῆ αὐτῆ ἡ ὁ α β γ, κατὰ τὸ β, ἄρα κατὰ τίνα ῥηθεῖσαν ι β': τὰ α Θ, β ε, πόλα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ α δ, β ε, ὅμοιά εἰσι κατὰ τίνα ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ α δ, α Θ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Θ ε κ, ἅπτεται τῆ β ε η, οὐδ' ἄλλος τις παρὰ τὸν δ ε ζ. ἄρα ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τῆ β ε η, καὶ τὸ ε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β':

Ἀπολαμβανέσθω πελάτειον οἱ α β γ, δ ε ζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια πόλα τῆ α γ ζ, η Θ κ, παραλλήλων τὰ α δ, η Θ. καὶ κείσθω τὸν α β γ, πέμπειν τὸν η Θ κ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δ ε ζ, πέμπει τὸν αὐτὸν η Θ κ. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α β γ, πλαγίως πέμπει τὸν η Θ κ, οὐ γὰρ διὰ τῶν πόλων αὐτῆ διήρχεται, πάντως γε καὶ τίνα ζ: τοῦ παρόντος, ἅπτεται δύο κύκλων ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ περιμόφῳ, ἀπτέσθω δὴ τοῦ β ε λ, καὶ τὸ β, διὰ δὲ τοῦ Θ, σημεῖα γραφήσω κύκλος μέγιστος ἁπτόμενος τοῦ β ε λ, καὶ τίνα ι δ': τοῦ παρόντος, καὶ πάντως γε συμπεσεῖται τῷ δ ε ζ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἅπτος ὁ μ Θ ε ν. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, μ Θ ε ν, μέγιστοι κύκλοι ἅπτονται τοῦ β ε λ, παραλλήλου, τὰς δὲ λοιπὰς η Θ κ, α γ ζ, τέμνουσι, πάντως γε κατὰ τίνα ι β': τὰ παρόντα τὰ α μ, η Θ, πόλα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ α δ, η Θ, ὅμοιά εἰσι καὶ τίνα ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ α δ, α μ, ὅμοιά εἰσι τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον, ὁ ἀπτόμενος ἄρα τοῦ β ε λ, παραλλήλου μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τοῦ Θ, διερχόμενος συμπίπτει τῷ δ ε ζ. ὥστε ὁ δ ε ζ, ἅπτεται τοῦ β ε λ, κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἅπτεται τοῦ ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων κύκλων, πάντως γε τέμνει τοὺς λοιπούς, τέμνει ἄρα τὸν η Θ κ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ γ':



Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 17.

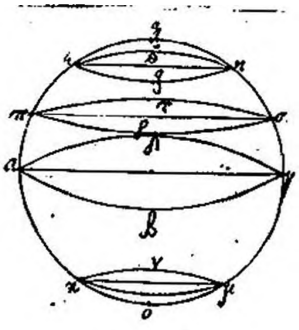
Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Τῶν ἐν σφαίρᾳ παραλλήλως κειμένων κύκλων μεγίστῳ τινὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, οἱ ἐξ ἴσου τοῦ μεγίστου ἀφιστάμενοι κύκλοι, καὶ ὧν μεταξὺ καὶ τὸ μεγίστου τὰ πόλα ἴσα ἐστίν, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν, ὁ δὲ ἔλαττον ἀφιστάμενος, καὶ ὁ μεταξὺ ὢν τοῦ μεγίστου ἔλαττον ἐμπεριλαμβάνεται πόλου, μείζων ἐστίν, ὃ δὲ μεταξὺ μείζονα ἐμπεριλαμβάνεται πόλου, ἐλάττων ἐστίν.

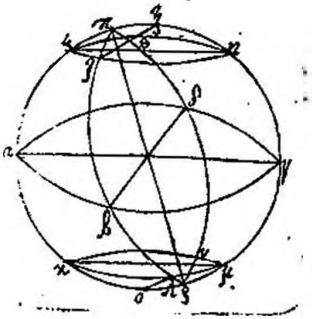
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος μέγιστος ὁ α β γ δ, καὶ πόλος παράλληλοι οἱ ε ζ η Θ, κ λ μ ν, ἐξ ἴσου ἑκάτερος τοῦ α β γ δ, ἀφεστάτω, ἤτοι ἔστωσαν τὰ α ε, α κ, πόλα, καὶ γ η, γ μ, ἴσα. Λέγω τοὺς ε ζ η Θ, κ λ μ ν, παραλλήλους κύκλους, ἴσους ἀλλήλοις εἶναι. Γεγράφθω κύκλος μέγιστος πέμπων τοὺς α β γ δ, ε ζ η Θ, κ λ μ ν, κύκλους. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς κύκλος ἤτοι διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν παραλλήλων διελεύσεται

σιται κύκλων, ἢ μὴ διὰ τῶν πόλων. Κείσθω δὲ διέρχεσθαι διὰ τῶν ξ, ηὶ ο, πόλων, ὡς ὁ ξ α ο γ. ἐπεὶ μέγιστος κύκλος ὁ ξ α ο γ, διὰ τῆς πόλων διέρχεται τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, παράλληλα γε ηὶ τιὼ ιβ'. τὰ δὲ τὰ παράλληλα δίχα ηὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, αἱ ἄρα ε η, α γ, κ μ, κοιναὶ τομαὶ τῶν παραλλήλων ηὶ μιγίστε τὰ ξ α ο γ, κύκλε διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α γ β δ, ξ α ο γ, κύκλοι μέγιστοί εἰσι, παάλληλα γε ηὶ τιὼ ι'. τοῦ δὲ τὰ παράλληλα δίχα ἀλλήλοις τέμνονται. ἴσον ἄρα τὸ α ξ γ, τῷ α ο γ, ἀλλὰ ηὶ τὸ α ε, τῷ α η, ἴσον ἐστίν, ὥσπερ ηὶ τὸ γ η, τῷ γ μ, ηὶ τιὼ ὑπόθεσιν, ἄρα ηὶ τὰ ε ξ η, κ ο μ, πλευρὰ ἴσα ἐστίν, ὥστε κατὰ τιὼ κθ'. τοῦ γ'. τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ ε η, κ μ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλ' αἱ ε η, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, ὡς δέδεικται, κύκλων, ἄρα οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοι εἰσίν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 28.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ α π, τόξον ἔλαττον τοῦ α κ. Λέγω, ὅτι ὁ π ρ σ τ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κ λ μ ν. τοῦ γὰρ ξ α ο γ, μιγίστε κύκλε, ὡς εἴρηται, γεγραμμένου, οἱ π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλοι δίχα τμηθήσονται, ὥστε αἱ π σ, α γ, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλων. ηὶ ἐπεὶ τὰ α ξ γ, α ο γ, τόξα ἴσα ἐστίν, ὡς δέδεικται, παντὸς γε ἀφαιρεμένων τῶν α π, α κ, ηὶ γ σ, γ μ, ἀνίσων τόξων, ἐναπολείπεται τὸ π ξ σ, μεῖζον τοῦ κ ο μ, ηὶ κατὰ τιὼ ῥηθεῖσαν κθ'. τοῦ γ'. ἡ π σ, μείζων ἐστὶ τῆς κ μ. ἀλλ' ἡ μὲν π σ, διάμετρός ἐστι τοῦ π ρ σ τ, ἡ δὲ κ μ, τοῦ κ λ μ ν, κύκλε, ἄρα ὁ π ρ σ τ, μείζων ἐστὶ τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Κείσθω δ' ἔτι τὸν π β ρ δ, γραφόμενον κύκλον, τὸν τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους τέμνοντα μὴ διὰ τῶν πόλων ξ, ο, αὐτῶν διέρχεσθαι. ηὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ζ, β λ, δ θ, δ ν, τόξα αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ηὶ τοῦ μιγίστε α β γ δ, κύκλε ἴσα. Λέγω ηὶ ὅτι τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους ἴσους εἶναι. Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν πόλων τῶν τε ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων, ηὶ τοῦ β π δ ρ, ὁ ξ α ο γ, κατὰ τὰ ις'. τοῦ α'. τοῦ παρόντος, ηὶ ἐπεὶ ὁ ξ α ο γ, διὰ τῶν πόλων τῶν τε παραλλήλων ηὶ τοῦ π β ρ δ, διέρχεται, παντὸς γε δίχα ηὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει, ἄρα ὁ ξ α ο γ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν β π δ ρ, ηὶ τὰ π α ρ, π γ ρ, τόξα ὅμοια ἐπὶ τῆς π ρ, ἐφίσαται διαμέτρε, κατὰ δὲ τὸ α'. πόρισμα τῆς ιβ'. τοῦ α'. τοῦ παρόντος, ηὶ οἱ π β ρ δ, α β γ δ, διὰ τῶν πόλων τοῦ ξ α ο γ, διέρχονται. ἔστι δὲ τὸ β, σημεῖον κοινὸν, καθ' ὃ τέμνονται οἱ β γ δ ε, π β ρ δ, μέγιστοι κύκλοι, ἄρα τὸ β,

πόλος ἐστὶ τοῦ ξ α ο γ, ὥστε καὶ β π, β ρ, τόξα ἴσα ἐστίν, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν β ζ, β λ, ἴσων, ἐναπολείπονται δηπουθεν καὶ ζ π, λ ρ, ἴσα. Αὖθις ἐπεὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται ὑπὸ τοῦ ι: τῶν ά: τῶν παρόντος, τὸ π γ ρ, ἡμικύκλιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ ξ γ ο, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἄρα καὶ π γ ρ, ξ γ ο, ἴσά ἐστιν, κοινοῦ γοῦν ἀφαιρουμένου τοῦ ξ γ ρ, ἐναπολείπονται ἴσα καὶ ξ π, ο ρ. δέδεικται δὲ ὅτι ἐπὶ τῆς π ρ, διαμέτρου ἐφίσταται ὅμοια τόξα καὶ π α ρ, π γ ρ, ὀρθὰ ὄντα πρὸς τὸ τοῦ π β ρ δ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀφῃρῆσθαι ἴσα τόξα ἀπὸ μὲν τοῦ π β ρ δ, κύκλου τὰ ζ π, λ ρ, ἀπὸ δὲ τῶν π α ρ, π γ ρ, τόξων τὰ π ξ, ο ρ, ἄρα καὶ τοῦ ι: τῶν παρόντος, τὰ ξ ζ, ο λ, διαστήματα ἴσά ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων, ἄρα καὶ τοῦ ε: ὅρου τοῦ ά: τῶν παρόντος οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν δὲ τὸ β ζ, ἔλαττον εἴη τοῦ β λ, παντὸς γε τοῦ ζ π, μεῖζον ἔσται τοῦ λ ρ, καὶ ἔτι τὸ ζ ξ, διάστημα τοῦ ο λ, ὁ δὲ μεῖζον ἀφιστάμενος τοῦ πόλου μείζων ἐστὶ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ε ζ η θ, τοῦ κ λ μ ν.

Πρότασις ΙΖ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι ἴσοι κύκλοι παράλληλοι μεγίστῳ τινὶ σφαίρας κύκλῳ, τὰ τοῦ μεγίστου κύκλου τόξα τὰ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τῶν, πρὸς οἷς παραλλήλως ἔχουσι, μεγίστου κύκλου ἐναπολαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστωσαν δὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς χηνάτων παράλληλοι οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι περὶ α β γ δ, μέγιστον κύκλον, καὶ κείσθω τοῦ ξ α ο γ, μέγιστον κύκλον πέμνειν τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους. Λέγω ὅτι α ε, α κ, καὶ γ η, γ μ, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τῶν α β γ δ, μεγίστου κύκλου ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μή, ἔσται τὸ α ε, φερ' εἰπεῖν ἔλαττον τοῦ α κ, καὶ τοῦ ι: τῶν αὐωπέρω ὁ ε ζ η θ, κύκλος μείζων ἂν εἴη τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

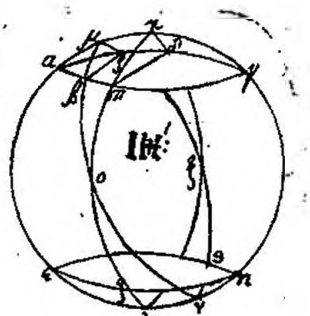
Πρότασις ΙΗ′: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος σφαίρας ἐλάσσονάς τε καὶ παραλλήλους τέμνῃ κύκλους μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος, καὶ τέμνει αὐτοὺς δίχα, καὶ τὰ τῶν παραλλήλων μείζονα τμήματα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορῶσι πόλον.

Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ, ὧν πόλοι τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτοὺς ὁ μ β ν ξ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων. Λέγω τὸν μ β ν ξ, μὴ δίχα τέμνειν τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, παραλλήλους. Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων ὁ κ ο λ ξ, μέγιστος, καὶ ἐπεὶ ὁ κ ο λ ξ, διὰ τῶν πόλων τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, διέρχεται κύκλων, παντως γε κατὰ τοῦ ι β′: τῶν ά: τῶν παρόντος

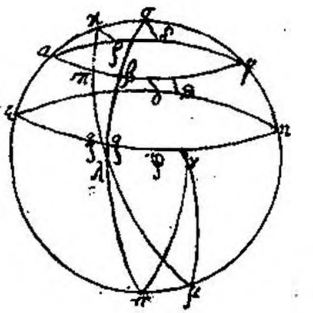
δίχα

δίχα αὐτὰς τέμνει, ὥστε τὸ πγδ, τόξον ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἄρα τὸ βγρ, μεῖζόν ἐστιν ἡμικυκλίου, τὸ δὲ βαρ, ἔλαττον, ἀλλ' ὁ αβγδ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ μβνξ, μεγίστου κύκλου κατὰ τὰ β, ῥ, ἄρα ὁ μβνξ, μέγιστος κύκλος μὴ διερχόμενος διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, οὐ τέμνει αὐτὸν δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 19.



Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες ἢ αφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τέμνωνται κύκλου, μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχομένου, ὁ ἐγγύτερος τῷ πόλῳ μᾶλλον αὐτοῦ τέμνεται.



Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ τεμνέτω ἑκάτερον αὐτῶν ὁ κλμν, μέγιστος κύκλος κατὰ τὰ ξο, πρ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν σ, τ, πόλων τῶν αὐτῶν. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, ἐγγύτερος ὢν τοῦ σ, πόλου μᾶλλον αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ κλμν, τέμνεται κύκλου, ἢ ὁ εζηθ. Ὑποκείσθω γὰρ τὸν σλτν, μέγιστον κύκλον διὰ τῶν σ, καὶ τ, διέρχεσθαι πόλων· καὶ ἐπεὶ ὁ σλτν, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, εζηθ, παραλλήλων διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν ζη, τόξον ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, καὶ τὸ ηθ, τῷ γδ, καὶ τιλῶ θ'. τῷ παρόντος. ὥστε ὅλον τὸ ζηθ, ὅλῳ τῷ βγδ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ξηο, οὐκ ἔστιν ὅμοιον τῷ πγρ, ἄλλως γὰρ ὁ κλμν, διὰ τῶν πόλων τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων διήρχετο, ὅπερ αὐτίκειται τῇ ὑποθέσει. ἀλλὰ τὸ, πξ, τῷ ζ, καὶ τὸ ο, τῷ θ, ἔλαττον ἀφίσανται, ἤπερ τὸ π, τῷ β, καὶ τὸ ρ, τῷ δ, ὡς δεικθήσεται, ἄρα τὸ ξηο, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ ξεο, ὡς ἔλαττον αὐτῷ προσλαμβανόμενον μέρος, ἤπερ τὸ πγρ, πρὸς τὸ παρ, τὸ ἄρα πγρ, ὡς μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ παρ, μείζονι αὐτῷ ὑπεροχὴ ὑπερέχει, ἢ τὸ ξηο, τῷ ξεο, καὶ ἑπαμφοτέρως μᾶλλον αὐτοῦ τέμνεται ὑπὸ τοῦ κλμν, μεγίστου κύκλου, ὅπερ ἐδεῖ τὸ ὑποκείσθαι. Ὅτι δὲ τὸ ξ, τῷ ζ,

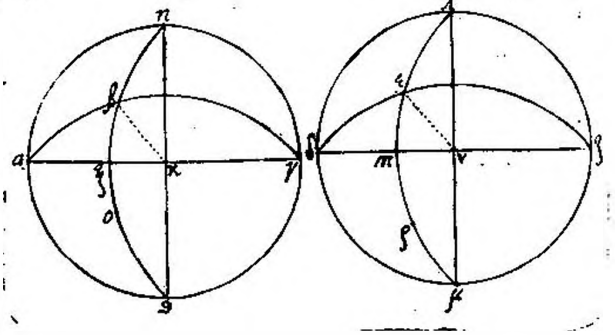
τῶ ζ, ἔλαττον ἀφίσαται, ὅπερ τὸ π, τῶ β, δῆλον. Γεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶ φ, πόλω τῶ σ κ τ μ, μεγίστω κύκλω οἱ α γ δ β, ε η θ ζ, παράλληλοι κύκλοι, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν κ λ μ ν, σ λ τ ν, διὰ τῶν πόλων τῶν σ κ τ μ, α γ δ β, ε η θ ζ, διέρχεται, πάντως γε καὶ τὰ διαμέτρους θ': τῶ παρόντος τὰ ε ζ, α β, κ σ, τόξα ὅμοιά εἰσιν. ὥστε ὁ μέρος τὸ ε ζ, τῶ ε η θ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ α β, τῶ α γ δ β, καὶ τὸ κ σ, τῶ κ τ μ σ, μείζων δὲ ὁ κ τ μ σ, τῶ α γ δ β, μείζον ἄρα καὶ τὸ κ σ, ὁμολόγου μέρος τῶ α β, καὶ τὸ α β, ὁμοίως τῶ ε ζ, μεῖζόν ἐστιν. ὥστε τῶν πλαγίως πεμνομένων κύκλων τὰ μὲν πρὸς τοῖς τομεῖς μέρη, ἔλαττον ἀφίσανται, τὰ δὲ ἀπώτερον ὄντα, μείζονα, καὶ μέγιστον μέν ἐστι τὸ διαμετρούμενον, ὡς τὸ κ σ. διαμετρούμενον γὰρ τὰ κ, σ, τῶν λ, καὶ ν, ἀφίσανται, καθ' ἃ οἱ κύκλοι πέμνονται, μείζον δὲ τὸ μᾶλλον ἀφεστάμενον. ἐλάττων δέ, π ξ, καὶ ζ, ἔλαττον τῶ λ, ἀφίσανται, ὅπερ τὸ π, καὶ β, μείζον ἄρα τὸ π, τῶ β, ὅπερ τὸ ξ, τοῦ ζ, ἀφίσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐπὶ τῶν ἴσων σφαιρῶν κύκλος κύκλῳ μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν, ὃν ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τῶ πόλω τῶ, ᾧ ἐγκλίνεται, κύκλω, ὧν δὲ οἱ πόλοι ἐξ ἴσου ἀφίστανται ἴσας πρὸς τὰς ἐγκλίσεις ἔχουσιν.

Ἔστωσαν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἐγκλινόμενοι κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ὁ μὲν τῶν α θ γ η, μείζω κύκλω, ὃ κείσθω τὸ κ, ὁ δὲ τῶν δ μ ζ λ, ὃ κείσθω τὸ κ, καὶ κείσθω τὸν πόλον τοῦ α β γ, ἔλαττον ἀφίσασθαι τοῦ πόλου τοῦ α θ γ η, ὅπερ ὁ πόλος τοῦ δ ε ζ, τοῦ πόλου τοῦ δ μ ζ λ. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ, κύκλος μᾶλλον ἐγκλίνεται τῶν α θ γ η. ὅπερ ὁ δ ε ζ, τῶν δ μ ζ λ. ἐπεὶ δὲ οἱ ἐγκλινόμενοι κύκλοι ἔστι μείζους εἰσὶν, ἢ ἐλάσσονες. Ἔστωσαν μείζους, καὶ ἀπὸ τῶν α, καὶ δ, σημείων, τῶν κοινῶν τομῶν τῶν α β γ, α θ γ η, καὶ δ ε ζ, δ μ ζ λ, ὡς ἀπὸ πόλων διαστήματι τετραγώνου γεγράφθωσαν οἱ η β θ, λ ε μ, κύκλοι, οἱ καὶ μείζους εἰσὶ καὶ τὸ πόρισμα τῆς ι γ': τοῦ ά: τοῦ παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, ν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, α θ γ η, μείζους κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦ η β θ, διέρχονται, πάντως γε καὶ ὁ η β θ, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται καὶ τὸ ά: πόρισμα τῆς ι β': τοῦ ά: τοῦ παρόντος, καὶ ἑκάτερον διχᾶ καὶ ὀρθὰς ὀρθὰς πέμνει

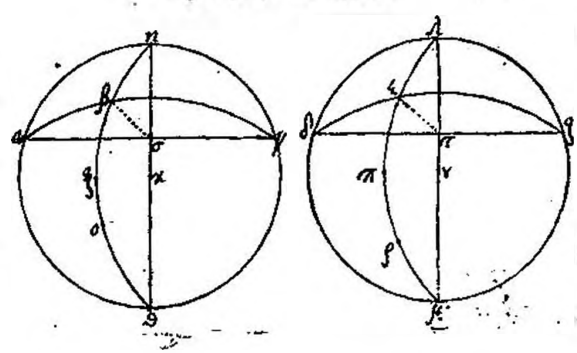
Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 20.



καὶ

καὶ τῷ αὐτῷ σφαίρᾳ. ὥστε οἱ πόλοι τοῦ αβγ, καὶ αθγη, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐσὶ τοῦ ηβθ, κύκλου. Ἔστω οὖν πόλος τοῦ μὲν αθγη, τὸ ξ, σημεῖον, τοῦ δὲ αβγ, τὸ ο. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν δ': ὅρον τοῦ ιά: τοῦ στοιχ: τότε λέγεται ἐπίπεδον σφαῖρας ἐπιπέδῳ ὀρθὸν εἶναι, ὅταν αἱ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων σφαῖρας ἀγόμεναι διάμετροι ἐν σὺ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ σφαῖρας ὀρθὰς ὦσιν, παντως γε ἡ γκ, ὀρθή ἐσι σφαῖρας τῷ τοῦ ηβθ, κύκλου ἐπίπεδον, διὰ τὸ ὀρθὸν εἶναι καὶ τὸν αθγη, κύκλον σφαῖρας τὸν ηβθ. ὥστε καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ γκ, ὀρθή ἐσι καὶ σφαῖρας τῷ κη, καὶ κβ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ζν, ὀρθή ἐσι σφαῖρας τῷ νλ, καὶ νε. ἄρα κατὰ τὸν ς': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ ὑπὸ βκη, γωνία κλίσις ἐσὶ τοῦ αβγ, κύκλου σφαῖρας τὸν αθγη, ἡ δὲ ὑπὸ ενλ, ὁμοίως κλίσις ἐσὶ τοῦ δεζ, σφαῖρας τὸν δμζλ, ἀλλὰ τὸ οβ, ἴσον ἐσι τῇ ξη, ἡμιπεριμέτρου γὰρ ἑκατέρου ἴσων κύκλων, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεμένου τοῦ ξβ, ὑπολείπεται τὸ οξ, ἴσον τῇ βη. ὡσαύτως ἀφαιρεμένου καὶ τοῦ πε, ὑπολείπεται τὸ ρπ, ἴσον τῷ ελ, ἀλλὰ τὸ οξ, ἐλάττον ἐσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ρπ, ἐλαττον. ἄρα ἐσὶ καὶ τὸ βη, τοῦ ελ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βκη, ἐλάττων ἐσὶ τῆς ὑπὸ ενλ, καί εἰσι τῶν κλίσεων γωνίαι, ὡς δέδεικται, ὁ ἄρα αβγ, κύκλος, ἢ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τοῦ πόλου τοῦ αθγη, κύκλου, μᾶλλον ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἐγκέκλιται κύκλου.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 22.



Ἔστωσαν δ' ἔτι οἱ αβγ, δεζ, ἐλάσσονες κύκλοι ἐγκλινόμενοι πρὸς τοὺς αθγη, δμζλ, καὶ τοῦ μὲν αβγ, ὁ πόλος ἀφιστάσθω ἧττον τοῦ πόλου τοῦ αθγη, κύκλου, ἤπερ ὁ τοῦ δεζ, πόλος τοῦ πόλου τοῦ δμζλ. Λέγω τὸν αβγ, κύκλον μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι τῷ αθγη, κύκλῳ, ἢ τὸν δεζ, τῷ δμζλ. Τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, καὶ τῶν σβ, τε, ἀθείων ἀχθεισῶν, ὁμοίως δειχθήσεται, ὡς πρότερον, τὸν ηξθ, εἶναι ὀρθὸν πρός τε τὸν αβγ, καὶ αθγη. ὁμοίως καὶ τὸν λπμ, πρός τε τὸν δεζ, καὶ δμζλ. ὥστε καὶ τοὺς πόλους τῶν μὲν αβγ, αθγη, ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τοῦ ηξθ, τοὺς δὲ πόλους τοῦ τε δεζ, καὶ δμζλ, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ λπμ. εἰπερ δειχθήσεται τῷ μὲν βκ, περιφέρειαν ἴσην εἶναι τὴν ξο, τῷ δὲ λε, τὴν πρ. ἀλλ' ἡ ξο, ὑπερέθη ἐλάττων τῆς πρ, τὸ γὰρ ξ, πόλος ἐσὶ τοῦ αθγη, ὡς καὶ πρότερον ὑπερέθη, τὸ δὲ ο, τοῦ αβγ. καὶ τὸ μὲν π, τοῦ δμζλ, τὸ δὲ ρ, τοῦ δεζ. δῆλον ἄρα ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ βσκ, γωνία ἐλάττων ἐσὶ τῆς ὑπὸ ενλ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα γωνία ἐγκλίσεως. ἄρα ὁ αβγ, ἢ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται, μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν,

τῶ δ ε ζ, ἡ δ πόλος μᾶλλον ἀφίσαται. ὥστε ἐαν αἱ ξ ο, π ρ, περιφέρειαι ἴσαι ὦσιν, ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ β η, ε λ. καὶ ὑπομένουσα γωνία ἡ ὑπὸ β σ η, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ε τ λ. ἆρα καὶ κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσιν, ἡ μὲν πρὸς τὸν α θ γ η, ἡ δὲ πρὸς τὸν δ μ ζ λ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

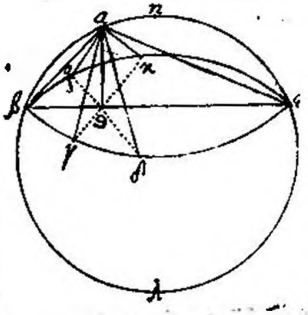
Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐαν διὰ τῶν πόλων τῶν ἐγκλινομένων, καὶ τοῦ, ᾧ ἐγκέκλιται ὁ αὐτὸς, μέγιστος διέλθῃ κύκλος, τὸ ἀναπολαμβανόμενον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ὑπό τε τῶν ἐγκλινομένων, καὶ ᾧ ἐγκέκλιται, μέγιστόν ἐστι τῆς τοῦ κύκλου κλίσεως.

Πρότασις ΚΑ′. Θεώρημα.

Ἐαν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν πόλος κύκλου τινός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διῆκται τινες ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μεγίστη μὲν ἐφ' ἑαυτὴν ἡ ὑπὸ τὸν πόλον τοῦ κύκλου, ὡς δι' αὐτοῦ ἀγομένη, ἐλαχίστη δὲ ἡ τῇ διαμέτρῳ ταύτῃ αὐτικειμένη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ὑπὸ τὸν πόλον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί, δύο δὲ μόναι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς τε μεγίστης καὶ ἐλαχίστης.

Ἀπὸ τοῦ α, σημείου μὴ ὄντος πόλου τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου πεπτώσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου διῆκται τινες αἱ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, καὶ ἔστω ἡ μὲν α ε, ὑπὸ τὸν κ, πόλον τοῦ β γ δ ε ζ, ὡς δὲ αὐτοῦ ἠγμένη, αὐτικείσθω δὲ ταύτῃ κατὰ διάμετρον ἡ α β, ὥστε καὶ τὸν β ε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεσθαι κύκλου. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστίν, ἡ δὲ α β, ἐλαχίστη, ἡ δὲ α δ, μείζων τῆς α γ. Πεπτώκω γὰρ κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον ἡ α θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ γ, θ δ. καὶ ἐπεὶ τὸ α, σημεῖον οὐκ ἔστι πόλος τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ θ, οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ αὐτοῦ, εἰ γὰρ ἦν, καὶ τὸ α, πάντως γε πόλος ἦν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς θ τοῦ α τοῦ παρόντος. ἀλλ' ἡ α θ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει, ὡς δεδόμεθα, ἆρα τὸ κέντρον τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπὶ τῆς θ ε, ἐστί, πρὸς ὀρθὰς ἄρα καὶ ὁ πόλος ἀφορᾷ, καὶ κατὰ τὸ ιζ′ τοῦ γ′ τῶν στοιχείων, ἡ μὲν θ ε, μεγίστη ἐστίν, ἡ δὲ θ β, ἐλαχίστη, καὶ ἡ θ δ, μείζων τῆς θ γ. ὥστε καὶ τὸ τετράγωνον τῆς θ ε, μέγιστόν ἐστι, τὸ δὲ τῆς θ β, ἐλάχιστον, καὶ τὸ τῆς θ δ, μείζον τοῦ τῆς θ γ. ἔστι δὲ ἡ α θ, πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑκάτερα τὴν θ β, θ γ, θ δ, θ ε, καὶ τὸν γ′ ὅρον τοῦ ια′ τοῦ αὐτοῦ, ἆρα κοινοῦ λαμβανομένου

Theod. Sf. Lib. a. Fig. 22.



μεῖον τοῦ ἀπὸ τῆς α Θ, τριγώνου, παντὸς γε τοῦ ἀπὸ τῆς α Θ, Θ ε, τριγώνου μείζονα εἶναι, ἐλάχιστα δὲ τὰ ἀπὸ τῆς α Θ, Θ β, καὶ τὰ ἀπὸ τῆς α Θ, Θ δ, μείζονα τῶν ἀπὸ τῆς α Θ, Θ γ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν α Θ, Θ ε, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α Θ, Θ β, τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α Θ, Θ δ, τὸ ἀπὸ τῆς α δ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α Θ, Θ γ, τὸ ἀπὸ τῆς α γ, ἄρα ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶ, καὶ διήρχεται ὑπὸ τὸν πόλον, ἡ δὲ α β, ἐλαχίστη, καὶ ἡ α δ, μείζων τῆς α γ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκείμενον τὸ δ:

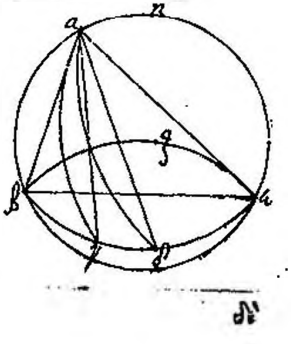
Ὅτι δὲ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς Θ ε, ἢ Θ β, μόνον εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσι σημείου ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δῆλον, καὶ γὰρ τῶν ῥηθεισῶν ζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης Θ β, ἀπὸ τοῦ Θ, σημείου μόνον προσπίπτουσιν εὐθεῖαι, ὡς αἱ Θ γ, Θ ζ, ὥστε κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ τῆς α Θ, τὰ ἀπὸ τῶν α Θ, Θ γ, τριγώνου ἴσα ἔσται τοῖς ἀπὸ τῶν α Θ, Θ ζ, καὶ κοινὰ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, α ζ, ἄρα καὶ ἡ α γ, ἴση ἐστὶ τῇ α ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ α δ, τῇ α κ, ἴση. ὅπερ ἦν τὸ β': Λείπεται ἔν δείξαι ὅτι καὶ ἡ α Θ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει.

Γεγράφθω δὴ διὰ τῶν α, καὶ κ, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ α β λ ε, καὶ τῶν ε ς': τοῦ δ: τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἡ β Θ ε, ἀλλ' ὁ α β λ ε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλον ἐπίπεδον κατὰ τὸν ι β': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς α Θ, διήρχεται. ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ πρὸς τὸν τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ α Θ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν β ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πέσῃ μεγίστῳ κύκλῳ ἀχθῶσι, μέγιστον μέν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπόν, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἀπώτερον μείζον ἐστί. δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τε μεγίστου καὶ ἐλαχίστου.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 23.



Ληφθήτω τὸ α, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπ' αὐτοῦ πέντε μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου, οὗ πόλος τὸ κ, σημεῖον, τὰ α β, α γ, α δ, α ε. Λέγω τὸ α ε, τὸ διὰ τοῦ κ, πόλου διερχόμενον μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ α β, ἐλάχιστον, καὶ τὸ α δ, τοῦ α γ, μεῖζον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β κ, γ κ, δ κ, ε κ, ὑποτείνουσαι. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν αὐτέρω ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ

δὲ αβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ αδ, μείζων τῆς αγ, κατὰ δὴ τὰ κη τῆ γ τοῦ τρισκαιδεκάτου, ἐπὶ τῶν ἴσων κύκλων αἱ ἴσαι αἰθεῖαι ἴσας περιφερείας ὑποτείνουσι· παύτως γε τὸ αηε τόξον μέγιστόν ἐστιν, ὅτι καὶ ἡ αε, ὑποτείνουσα μεγίστη, ὡς δέδεικται, τὸ δὲ αβ, ἐλάχιστον, ὅτι γε καὶ ἡ αβ, ἐλαχίστη, καὶ τὸ αδ, μεῖζον τῆ αγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, μείζων ἐστὶ τῆς αγ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑφ' ἑκάτερα τῆ αηε, μεγίστη τόξη, καὶ αβ, ἐλαχίστη δύο ἴσα τόξα μόνα ἀπὸ τῆ α, σημείου ἄγονται, ὅτι καὶ ἑφ' ἑκάτερα τῆς αε, ἡ αβ, ὑποτεινούσης δύο μόναι αἰθεῖαι ἀπὸ τῆ α, προσπίπτουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

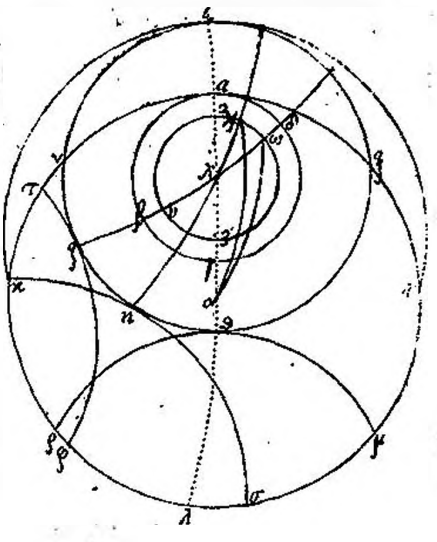
Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἅπτηται μὲν τῆ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παραλλήλων, τέμνῃ δὲ τὸν μείζονα, ὥστε τὸν πόλον αὐτῆ μεταξὺ εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἅπτωνται δὲ καὶ τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων κύκλοι μέγιστοι ὁσοιδήποτε, οἱ πόλοι τῶν ἁπτομένων τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ τῆ αὐτῆ εἰσι κύκλῳ, παραλλήλῳ ὄντος καὶ αὐτῆ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλοις, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρᾳ, καὶ πρὸς τὸν ἁπτόμενον τῆ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, ὁ μὲν τῆ μείζονος ἁπτόμενος, καθ' ὃ τὸ ἔλαττον αὐτῆ τμῆμα δίχα τέμνεται, μεγίστῳ ἔχει τῶν κλίσιν, ὁ δὲ, καθ' ὃ τὸ μεῖζον αὐτῆ τμῆμα δίχα τέμνεται ἁπτόμενος, ἐλαχίστῳ ἔχει τῶν κλίσιν πρὸς τὸν αὐτὸν, τῶν δ' ἄλλων ὁ ἐγγύτερον τῆ τῶν μεγίστῳ ἔχοντος κλίσιν τοῦ ἀπώτερον μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν.

Ἐ̓στωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ τῆ μὲν ἐλάττονος αβγδ, ἁπτέσθω ὁ ακλμ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α, τὸν δὲ μείζονα εζηθ, τεμνέτω κατὰ τὰ ν, ξ, σημεῖα, καὶ ἔστω ὁ τῆ εκλμ, κύκλου πόλος μεταξὺ τῆ αβγδ, εζηθ, δὸς εἰπεῖν, οὗτος τὸ ο, σημεῖον, ἁπτέσθωσαν δὲ καὶ τῆ εζηθ, μείζονος παραλλήλου οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω τὰς πόλους τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τῆ αὐτῆ κύκλου, παραλλήλου μὲν τοῖς αβγδ, καὶ εζηθ, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρᾳ, καὶ τὸν μὲν κεπ, μεγίστῳ ἔχειν τῶν κλίσιν πρὸς τὸν ακλμ, τὸν δὲ μθρ, ἐλαχίστῳ, καὶ τὸν τζφ, μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι πρὸς τὸν αὐτὸν ακλμ, ἢ τὸν κησ. Εὑρεθήτω δὴ ὁ πόλος τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων κατὰ τῶν ιζ': τῆ α: τῆ παρόντος, καὶ ἔστω ὕπος ὁ χ, καὶ διὰ τῶν α, καὶ θ, σημείων γραφήτω μέγιστος κύκλος κατὰ τῶν ις': τῆ αὐτῆ ὁ εαθλ, ὅστις καὶ διὰ τοῦ χ, διελεύσεται κατὰ τῶν γ': καὶ δ': τῆ παρόντος, γραφήτωσαν δ' ἔτι κατὰ τῶν ρκ-

θεῖ-

θείσαι ις': οἱ ν χ ψ, ζ χ ω, μέγιστοι κύκλοι. ἡ ἐπεὶ τὸ ο α, τόξον τεταρτημορίου ἐστὶ κατὰ τὸ πόρ: τῆς ι γ': τῷ ἀ: τῷ παρέντος, ληφθήσαται ἴσαι περ. ο α, τῷ ϑ 2, ν ψ, ζ ω, ἡ ε 3, τόξα. ὅτι μὲν οὖν οἱ κ ε π, μ ϑ ρ, κ ν σ, τ ζ φ, μέγιστοι κύκλοι ἐγκλινόμενοί εἰσι περ. α κ λ μ, δῆλον. ἀδείς γὰρ διὰ τῦ ο, πόλυ διέρχεται. ἐπεὶ τὰ ϑ 2, ν ψ, ζ ω, ἡ ε 3, τόξα τεταρτημόρια εἰσι καὶ τῦ καπασκιλίω, παύπως γε τὸ μὲν 2, σημεῖον πόλος ἐστὶ τῦ μ ϑ ρ, καὶ τὸ αὐτὸ πόρ: τὸ δὲ ψ, τοῦ κ ν σ, τὸ δὲ ω, τῦ τ ζ φ, ἡ τὸ 3, τῦ κ ε π. ἀλλὰ τὰ ϑ χ, ν χ, ζ χ, ε χ, ἴσα εἰσι καὶ τὸν ἑ: ὅρον τῦ ἀ: τῦ παρ: ἄρα καὶ τὸ γ': ἀξίωμα τῦ σοιχ: ἀφαιρεμένων περ ϑ χ, ν χ, ζ χ, ε χ, ἀπὸ περ ϑ 2, ν ψ, ζ ω, ε 3, ἐναπολειφθήσονται τὰ χ 2, χ ψ, χ ω, ἡ χ 3, ἴσα. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν περ χ, διαστήματι δὲ περ χ 2, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται ἡ διὰ περ λοιπῶν ψ, ω, 3, σημείων. ἔστι δὲ τὸ μὲν 2, πόλος τῦ μ ϑ ρ, τὸ δὲ ψ, τῦ κ ν σ, τὸ δὲ ω, τῦ τ ζ φ, ἡ τὸ 3, τῦ κ ε π, καὶ τὸ πόρ: τῆς ῥηθείσης ι γ': τῦ παρόντος, ἄρα οἱ πόλοι τῶν κ ε π, μ ϑ ρ, κ ν σ, τ ζ φ, ἐν τῇ περιφερείᾳ εἰσὶ τῦ αὐτοῦ 2 υ 3 ω, ὃς παραλλήλος τε ἐστὶ τοῖς α β γ δ, ε ζ η ϑ, διὰ τὸ ἔχειν τὸν αὐτὸν πόλον αὐτοῖς, καὶ ἐλάττων ἐκείνου, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ τόξον χ 2, τῦ τε χ α, ἡ χ ε. ὅπερ ἦν τὸ ἀ:

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 24.



Αὖθις ἐπεὶ τὸ ϑ 2, τεταρτημόριόν ἐστι, παύπως γε τὸ ο χ, ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίε. ὥστε τὸ ο, οὐκ ἔστιν ὁ ἕπερος πόλος τῦ 2 υ 3 ω. οἱ γὰρ πόλοι παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλυ ἡμικυκλίῳ ἀφίσανται, καὶ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τὸ ο 2, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ἐλάχιστον δὲ τὸ ο 3, καὶ τὸ ο ψ, μεῖζον τῦ ο ω. ἀλλὰ τὸ ο, πόλος ἐστὶ τῦ α κ λ μ, μεγίστε κύκλυ, τῦ ἁπτομένυ μὲν τῦ α β γ δ, πέμποντος δὲ τὸν ε ζ ϑ ξ, τὸ δὲ 2, ὁμοίως πόλος ἐστὶν τῦ μ ϑ ρ, ἁπτομένυ τῦ ε ζ ϑ ξ, μείζονος παραλλήλυ καὶ τὸ ϑ, τὸ δὲ 3, τῦ κ ε π, ἁπτομένυ τῦ αὐτῦ καὶ τὸ ε, τὸ δὲ ψ, τῦ κ ν σ, καὶ τὸ ω, τῦ τ ζ φ. ἄρα ὁ πόλος τῦ κ ε π, ἐλαχίστῳ ἔχει τινὰ ἀπόστασιν ἀπὸ τῦ ο, πόλυ τῦ α κ λ μ, ὁ δὲ πόλος τῦ μ ϑ ρ, μεγίστῳ, ὁ δὲ τοῦ κ ν σ, μείζονα, ἢ ὁ τῦ τ ζ φ, πόλος. ἀλλ' ὁ μὲν κ ε π, ἅπτεται τῦ α ζ ϑ ξ, μείζονος παραλλήλυ καὶ τὸ ε, καϑ' ὃ δίχα τέμνεται τὸ ν ε ξ, ἔλαττον αὐτῦ τμῆμα, ὁ δὲ μ ϑ ρ, ἅπτεται τῦ αὐτῦ καὶ τὸ ϑ, καϑ' ὃ δίχα τέμνεται τὸ ν ϑ ξ, μεῖζον τῦ αὐτῦ τμῆμα, καὶ ὁ τ ζ φ, ἐγγύτερός ἐστι τῦ κ ν σ.

Ὅτι δὲ τὸ ν ε ξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ν θ ξ, πάλιν δῆλον. ὁ γὰρ τοῦ ε ζ θ ξ, πόλος ἐντός ἐστι τοῦ α κ λ μ. ὥστε καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ τοῦ ι ε: τὸ ὅρυ τοῦ α: τοῦ στοιχειωτοῦ, τὸ μὲν ν ε ξ, τόξον ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ ν θ ξ, μεῖζον. Ὅτι δὲ καὶ δίχα ἑκάτερον πέμνεται, δείκνυται διὰ τῆς ἡ: τοῦ α: τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

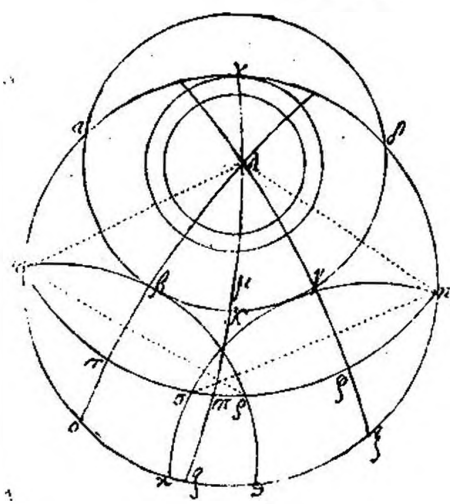
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἐξ ἴσου ἀφεστάμενοι τοῦ τοῦ μεγίστου κύκλου ἔχουσι κλίσιν, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι.

Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐλάσσονος ἡ σφαίρα τοῦ μεγίστου τεμνομένου κύκλου κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῆς ἁπτομένης τόξα τὰ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ κοινῆς τομῆς αὐτῆς τε καὶ τοῦ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Ἀπὸ τοῦ α β γ δ, ἐλάσσονος κύκλου, ὑπὸ τοῦ α ε ζ η δ, μεγίστου τεμνομένου, οἱ ε β θ, η γ κ, καὶ τὸ β, καὶ γ· καὶ ἔστωσαν τὰ ε β, γ η, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν τε β, καὶ γ, ἁφῶν, καὶ τῶν ε, καὶ η, κοινῶν τομῶν, τῶν τε ε β θ, η γ κ, καὶ α ζ δ, κύκλων ἴσα. Λέγω τοὺς ε β θ, η γ κ, ἐξ ἴσου εἶναι ἐγκλινομένους τῷ α ζ δ, τέμνοντι. Εὑρίσθησαν δὴ οἱ πόλοι τοῦ τε α β γ δ, καὶ α ζ δ, κύκλου καὶ τοῦ ι ζ: τοῦ α: τοῦ παρόντος. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ δ, πόλος τὸ λ, σημεῖον, τοῦ δὲ α ζ δ, τὸ μ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν λ, καὶ μ, κύκλος μέγιστος ὁ ζ μ λ ν, καὶ τοῦ ι ς': τοῦ αὐτοῦ. γεγράφθωσαν δ' ἔτι κατὰ τοῦ αὐτοῦ, καὶ οἱ λ γ ξ, λ β ο, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦτε α β γ δ, καὶ κ γ η, ε β θ, ἀπτόμενοι διηρχόμενοι. οἵτινες καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, ἁφῶν διελεύσονται καὶ τοῦ γ': τοῦ παρόντος. Δεικνύται.

Theod. Sf. Lib.a. Fig. 25.



Ἐπεὶ ἓν αἱ λ β ο, ε β θ, μέγιστοι κύκλοι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνουσι, καὶ τὸ πόρ: τῆς ι β': τοῦ παρόντος, παντὸς γε τοῦ τοῦ λ β ο, ἡμικυκλίου ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ε β θ, κύκλον. ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ λ γ ξ, ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν η γ κ, κύκλον, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λ β, λ γ, τόξα ἴσα καὶ τοῦ ε: ὅρου τοῦ α: τοῦ παρόντος,

ἄρα

ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν εβ θ, ηγ κ, μιγίσων κύκλων ἐφίπτανται ὅμοια τόξα ἀφὸς ὁρθάς, καὶ ἕλληπται ἀπ' αὐτῶν τόξα ἴσα τὰ βλ, γλ, ἕλληπται δὲ καὶ ἀπὸ τῶν εβ θ, ηγ κ, κύκλων ἴσα τόξα κατὰ τὰ ὑπάθεσιν τὰ εβ, γη, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τοῦ παρόντος, αἱ λε, λη, εὐθεῖαι ἐπιζευχθεῖσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ λ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῇ λε, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, καὶ παραλλήλος ἔσται τῇ αβγδ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ λβο, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν εβ θ, επ η, τεμνομένων ἀλλήλων, πάντως γε καὶ τὰ ἀπὸ τοῦ παρόντος τὰ εβρ, σρ, τμήματα δίχα τέμνει, ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ εβ, βρ, καὶ εκ, κρ. διὰ τὰ αὐτὰ ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ηγ, γσ, ηφ, φσ. ἀλλὰ τὰ εβ, ηγ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ὅλον εβρ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ηγσ, καὶ ἐπομένως αἱ ερ, ησ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τὰ ιθ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ δὲ ερ, ησ, ὑποτείνουσι καὶ τὰς επ, ηφ, περιφερείας, ἄρα καὶ τὰ ιη': τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ επ, ηφ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ εκ, ηφ, ἴσαι εἰσίν, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ ρ, φσ, ἴσαί εἰσι, κοινῆς συὸ ἀφαιρεμένης τῆς σρ, περιφερείας, ἐναπολείπεται τὰ τσ, ρφ, τόξα ἴσα, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ εκ, ηφ, ἴσα, ὡς ἤδη εἴρηται, ὅλον ἄρα τὸ ετσ, ὅλῳ τῷ ηφρ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὰ ῥηθεῖσαν ἐπὶ τοῦ παρόντος καὶ τὰ επ, πη, ἴσα ἐστίν, ὁ γὰρ νμζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν αζδ, επη, τεμνομένων κύκλων. ἄρα ἀφαιρεμένων τῶν ετσ, ηφρ, ἴσων, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ σπ, πρ, εἰσὶ δὲ ὡς δέδεικται καὶ τὰ στ, ρφ, ἴσα, ὅλον ἄρα τὸ τπ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ πφ, ἀλλὰ τὰ βχ, χγ, ὅμοιά εἰσι τοῖς τπ, πφ, τόξοις, διὰ τὸ ὁμοκέντρους εἶναι τοὺς αβγδ, επη, κύκλους, ἄρα καὶ τὰ βχ, χγ, ἴσα εἰσί, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνωτέρω οἱ εβ θ, ηγ κ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοι εἰσὶ τῷ αβγδ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τεμνομένου κύκλου, κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἁπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἀφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῆς κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῆς.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

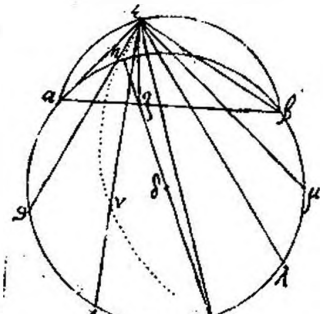
ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ἐὰν τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἢ ἐγκλινόμενον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑτέρου τινὸς κύκλου, τέμνῃ τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς δύο αὐτίσα, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ τμήματος περιφερείας, ὥστε τὸ τμῆμα εἰς δύο κατ' αὐτὸ αὐτίσα τέμνεσθαι, ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ κύκλου μείζονα περιφέρειαν δίχεσθαι ἀχθῶσιν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τὸ ἔλαττον τοῦ τμήματος ὑποτείνουσα τόξον, ἀφ' ἧς αὔξονται μὲν ἄχρι τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κάθετος πίπτει, ἐλαττοῦνται δὲ ἕως αὖ πρὸς τὴν αὐτὴν ἀποκαταστάθωσι. *Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 1.*

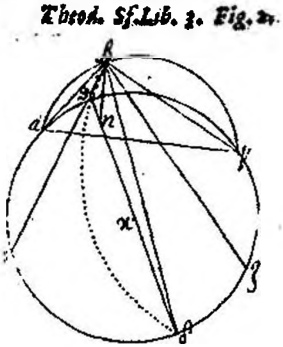


Ἔστω δὴ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ αβγ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, τμῆμα κύκλου ὀρθὸν τὸ αεβ, ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, καθ' ὃ τὸ αεβ τμῆμα εἰς δύο αὐτίσα τέμνεται τὴν αε, εβ, πρὸς μὲν τὸ ἐπίπεδον τοῦ αβγ, κύκλου πίπτουσα κάθετος ἡ εζ, πρὸς δὲ τὴν αγβ, μείζονα τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἀχθήσωσαν αἱ εθ, εκ, εγ, ελ, εμ, εν, εβ. καὶ διὰ τοῦ ζ, ἤχθω ἡ γζη. Λέγω τὴν μὲν εα, ἐλαχίστην εἶναι, τὰς δὲ λοιπὰς αὔξεσθαι μὲν ἀπὸ τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦσθαι. Γεγράφθω δὴ μεγίστου κύκλου τόξον διὰ τῶν εηγ, σημείων τὸ γνις, καὶ τὴν ις: τοῦ δὲ: τὰ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ἡ εζ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβγ, κύκλου ἐπί-

πε-

πεδον, καὶ τὴν κατασκευὴν, παύσομαι· ἡ δὲ γραφὴ, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβγ, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διέρχεται, τεμνομένου δὲ τοῦ γν, δίχα καὶ τὸ ρ, δῆλον, ὅτι τὸ ρ, πόλος ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, τὸ ε, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τοῦ αὐτοῦ, καὶ καὶ τὴν κβ΄: τοῦ β΄: τοῦ παρόντος, ἡ μὲν εν, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ εγ, ἡ δὲ εκ, ἡ ἐγγιον τῆς εγ, μείζων ἐστὶ τῆς εϑ, καὶ ἡ εϑ, τῆς εα. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μὲν ελ, μείζων ἐστὶ τῆς εμ, ἡ δὲ εμ, τῆς εβ, αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ἐπὶ τὴν αγ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ μὲν τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, αὔξονται, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦνται.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 2.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ αβγ, τμῆμα ἐγκλινόμενον πρὸς τὸ τοῦ αγδ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου, καθ' ὃ τὸ αβγ, τμῆμα εἰς οὐδὲν πέμνεται, ἀχθήσωσαν ἐπὶ τὴν αδγ, περιφέρειαν αἱ βα, βε, βδ, βζ, βγ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν βα, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ βδ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, μέχρι τοῦ δ, αὔξονται αἱ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὴν αδ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, μέχρι τοῦ γ, ἐλαττοῦνται. ἡ γὰρ τῶν κατασκευὴ τὰ μὲν ἄλλα ἡ αὐτή ἐστι τῇ τῶν ἀνωτέρω, διενήνοχε δὲ, ὅτι ἐπ' ἐκείνων μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν αβ, πίπτει, ὡς ἡ εζ. ἐπὶ τούτου δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ β, ἐκὸς πίπτειν τὴν αγ, ἐφ' ἣν τὸ αβγ, ἐφίσταται τμῆμα, ὡς ἡ βκ. ὥστε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κβ΄: δείκνυται ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου μέχρι τοῦ δ, αὔξεσθαι πᾶσι ἀπὸ τοῦ β, ληφθέντος σημείου ἀγομένας εὐθείας ἐπὶ τὴν αδγ, περιφέρειαν, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἄχρι τοῦ γ, ἐλαττοῦσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β΄: Θεώρημα.

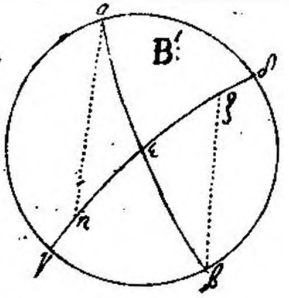
Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἴσαι ἐν ἑκατέρῳ τόξα ληφθῶσιν, αἱ τὰ τόξα αὐτοῖς ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται.

Ἐστωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ αβ, γδ, τεμνόμενοι ἀλλήλους κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ληφθήτωσαν ἴσα τόξα ἐν μὲν τῷ αβ, τὰ εα, εβ, ἐν δὲ τῷ γδ, τὰ εζ, εη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ζβ. Λέγω δὴ τὰς αη, ζβ, εὐθείας, τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰ αε, εη, καὶ βε, εζ, τόξα, ἴσας εἶναι. Ἀπὸ γὰρ τοῦ ε, ὡς ἀπὸ πόλου, διαστήματι τῷ εα, ἢ εβ, μείζονι τοῦ εη, καὶ εζ, γεγράφθω κύκλος ὁ αγβδ. καὶ ἐπεὶ οἱ αβ, γδ, διὰ τοῦ ε, πόλου τοῦ αγβδ, κύκλου διέρχονται, καὶ

μεν-

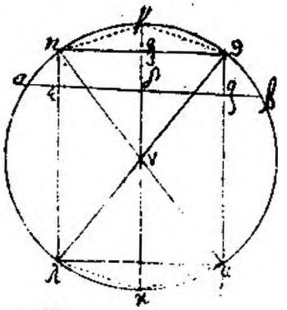
μενσιν, ὅτι τὰ μὲν α δ β, δ β γ, τόξα τῶ α γ β δ, κύκλω ἡμικύκλιά ἐστι, καὶ ἴσα ἀλλήλοις, κοινοῦ δὲ ἀφαιρεμένου τοῦ δ β, ἐναπολείπονται τὰ α δ, γ β, τόξα ἴσα, ἀλλὰ καὶ τὰ ε γ, ε δ, ἴσα εἰσὶ, καὶ τῶν ἐξ ὅρου τῶ παράντος, ἀφήρηται ἀπ' αὐτῶν τὰ ε η, ε ζ, ἴσα, καὶ τὸ γ ε δ, τμῆμα ὀρθὸν ὁρίσεται ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ α γ β δ, κύκλου, καὶ τῶν ι β': τῶ δὲ τὰ παράντος, ἄρα καὶ τῶν ι ά: τῶ β': τοῦ αὐτοῦ αἱ η α, ζ β, αἱ τὰς τομὰς ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 3.



ΛΗΜΜΑ, Α'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τοῦ τυχόντος τόξου δίχα τμηθείσης δύο ἑκατέρωθεν ληφθῶσι σημεῖα, ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφιστάμενα, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων καθῆται ἐπ' αὐτῆς ἀγομένας θῶσι τὰ ἐμπολαμβανόμενα μεταξὺ τῶν καθέτων τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.



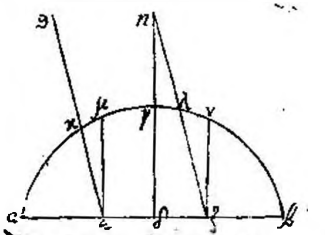
Τετμήσθω ἡ α β, ὑποτείνουσα τοῦ α γ β, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ληφθήσωσαν τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δ ε, δ ζ, διαστήματα ἴσα εἶναι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, δ, ζ, σημείων αὐτῆς ἀχθήσωσαν καθέτοι ἐπὶ τῆς α β, αἱ δ γ, ε η, ζ θ. Λέγω τὰ γ η, γ θ, τόξα ἴσα εἶναι. Ἀναπεπληρώσθω δὴ ὁ α γ β κ, κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ ν, καὶ ἐξαχθήτωσαν αἱ δ γ, ε η, ζ θ, διάμετροι καὶ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τῶν δ, ε ζ, σημείων ἐπὶ τὰ κ λ μ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κ μ, θ λ· καὶ ἐπεὶ αἱ δ γ, ε η, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῆς α β, παύσης γὰρ αἱ ὑπὸ η ε δ, γ δ ε, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσι, καὶ καὶ τῶν κ ή: τῶ δ: τῶ στοιχειωτῶ, αἱ γ δ, η ε, παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι παράλληλοί εἰσι καὶ αἱ γ δ, θ ζ. ὥστε καὶ τῶν κ ζ: τῶ δ: καὶ κ ζ: τῶ γ': τῶ στοιχ: τὰ γ η, λ κ, τόξα ἴσα ἐστὶν εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ γ θ, κ μ. (διὰ τὸ ὑποτείνεσθαι ἴσαις εὐθείαις, καὶ ὑποκεῖσθαι ἴσαις ταῖς πρὸς τῷ κέντρῳ ν, γωνίαις.) ἀλλ' αἱ ὑπὸ γ ν θ, κ ν λ, γωνίαι ἴσαί εἰσι, καὶ κορυφὴν γὰρ, καὶ εἰσι πρὸς τῷ κέντρῳ, ἄρα καὶ τῶν κ ζ: τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἡ γ θ, ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ κ λ, ἀλλὰ καὶ ἡ γ η, ἴση δέδεικται τῇ κ λ, ἡ γ η, ἄρα ἴση ἐστὶ γ θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ. Β'.

Ε'αν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τινὸς τόξου δίχα τμηθείσης κάθετος ἀπὸ τῆς τομῆς ἀφαρθῇ, ληφθῇ δὲ ἑκατέρωθεν δύο σημεῖα ἴσον τοῦ μέσου ἀφιςάμενα, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἑκάτερον ἡ μὲν συμπέσῃ τῇ καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, ἡ δὲ μὴ συμπέσῃ, ἡ συμπίπτουσα ἐλάττονα ἀφαιρεῖται τόξου.

Τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτεινουσα τὸ αγβ, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀνεσάθω κάθετος ἡ δγ· ληφθήτωσαν δὲ καὶ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δε, δζ, διαστήματα ἴσα εἶναι· καὶ ἀπὸ τῶν ε, καὶ ζ, ἀχθήτωσαν παράλληλοι αἱ ζη, εθ, ὧν ἡ μὲν ζη, συμπιπτέτω τῇ δγ, καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, κατὰ τὸ η, ἡ δὲ εθ, μὴ συμπιπτέτω. Λέγω τὸ γλ, τόξον ἔλαττον εἶναι τοῦ γκ. Ἀνεσάθωσαν γὰρ ἐπὶ τῆς αβ, κάθετοι αἱ εμ, ζν, καὶ παύτως γξ, κατὰ τὸ αὐτόρθωμα, τὰ γν, γμ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. ἀλλὰ τὸ γλ, ἔλαττόν ἐσι τοῦ γν, ἄρα τὸ αὐτὸ γλ, ἔλαττόν ἐσι καὶ τοῦ γμ, ἔσι δὲ καὶ τὸ γμ, ἔλαττον τοῦ γκ, τὸ γλ, ἄρα πολλῷ ἔλαττόν ἐσι τοῦ γκ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 4.



Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

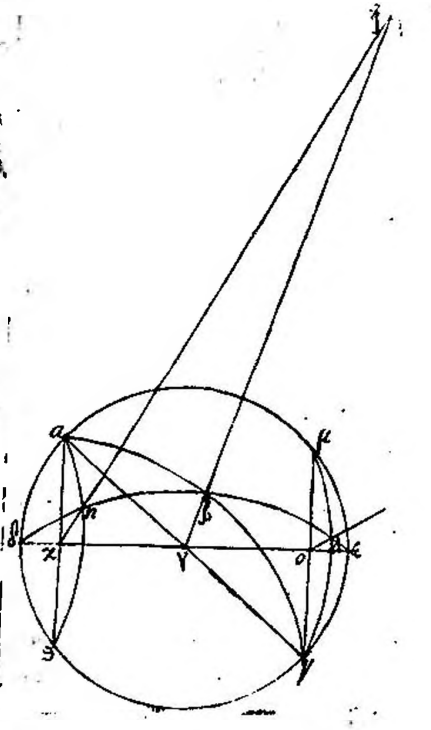
Ε'αν ὦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο κύκλοι μέγιστοι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δύο σημεῖα ληφθῶσιν, ἃ ἴσου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀφιςάμενα τομῆς, διὰ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διελθῶσι τέμνοντα τὸν ἕτερον τῶν μεγίςων κύκλων, καὶ τέμνων τὸ μὲν ἐκβαλλόμενον συμπέσῃ τῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ κοινῆς τομῆς τῶν μεγίςων κύκλων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ μὴ, τὸ συμπίπτον ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον ἀπὸ τοῦ τεμνομένου μεγίςου κύκλου.

Ε'ςωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι μέγιστοι οἱ αβγ, δβε, τεμνόμενοι κατὰ τὸ β. καὶ ληφθήτωσαν ἐπὶ τοῦ αβγ, τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, ὥστε τὰ βα, βγ, διαστήματα ἴσα εἶναι, διὰ δὲ τῶν α, καὶ γ, διελθέτωσαν ἐπίπεδα παράλληλα τέμνοντα τὸν δβε, κύκλον· καὶ ἐπεὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ μετὰ τῆς σφαίρας κύκλοι εἰσὶ, καὶ τινὸς β': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἔςωσαν ἔτι οἱ αηθ, γλμ· διὰ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν αβγ, δβε, μεγίςων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω ἡ νβξ, καὶ κείσθω τὸ μὲν διὰ τοῦ α, σημείου διερχόμενον ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτειν τῇ νβξ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μὴ συμπίπτειν.

Λέγω

Λέγω τὸ διὰ τοῦ α, ἔλαττον τοῦ δβε, ἀφαιρεῖν τόξον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μεῖζον, τουτέστι τὸ βη, ἔλαττον εἶναι τοῦ βλ. Γεγράφθω γὰρ ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ β, διὰ τῶν α, ϗ γ, σημείων ὁ αδγε, κύκλος, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, εδ, κη, ολ. ϗ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν αβγ, δβε, μεγίστων κύκλων διὰ τοῦ β, πόλου τοῦ αδγε, διέρχεται, παύσεις γε δίχα ϗ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, ϗ τὴν ιβ′: τοῦ ά: τοῦ παρόντος, ὥστε αἱ αγ, εδ. διάμετροί εἰσι τοῦ αδγε, κύκλου. ἐπεὶ δὲ ϗ ἡ νβξ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αὐτοῦ αδγε, διέρχεται, δῆλον, ὅτι καθετός ἐστιν ἐπὶ τοῦ αδγε, ϗ τιθῶ ϑ′: τοῦ αὐτοῦ, ϗ ἐπομένως διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεται κύκλος, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, τὸ ν, ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ αδγε. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αηϑ, γλμ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, ϗ τιθῶ ὑπόθεσιν, ϗ τέμνονται ὑπὸ τοῦ αδγε, παύσεις γε αἱ αϑ, γμ, κοιναὶ συνῇ τομαὶ παράλληλοί εἰσι. πίπτωσι δὲ εἰς αὐτὰς ἡ αγ, ἄρα κατὰ τιθῶ κ ϑ′: τοῦ ά: τοῦ στοιχειώτου αἱ ὑπὸ καν, ογν, ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ ϗ αἱ ὑπὸ ανκ, γνο, ϗ κορυφὴν ὁμοίως ἴσαι εἰσίν, ϗ ἡ αν, ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ γν, ἡμιδιαμέτρῳ, ἄρα ϗ τιθῶ κ ϛ′: τοῦ ά: τοῦ αὐτοῦ, ϗ ἡ νκ, ἴση ἐστὶ τῇ νο. ὥστε αἱ κηξ, ολ, ἐξ ἴσου ἀφίσανται τοῦ ν. Τελευταῖον, ἐπεὶ τὸ τοῦ αηϑ, κύκλου ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτει, ϗ τιθῶ ὑπόθεσιν τῇ νβξ, καθέτῳ, τὸ δὲ τοῦ γλμ, οὐ συμπίπτει, ἄρα τὸ ξ, σημεῖον ἐπὶ τῆς κη, κοινῆς ἐστι τομῆς τῶν αηϑ, ϗ δβε, κύκλων, ἑκατέρα γὰρ τῶν κη, ολ, ἐν τῷ τοῦ δβε, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἀλλ' ἡ κη, ϗ ἐν τῷ τοῦ αηϑ, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ὥσπερ ϗ ἡ ολ, ἐν τῷ τοῦ γλμ, ἄρα ἡ κη, ἐκβαλλομένη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αηϑ, συμπίπτει τῇ νβ, ἐκβαλλομένῃ ϗ αὐτῇ, κατὰ τὸ ξ, ἡ δὲ ολ, οὐ συμπίπτει ἀφίσανται δὲ ἑκατέρα ὄξ ἴσου τοῦ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὸ β′: λῆμμα, ἡ μὲν κη, ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξου τοῦ δβε, ἡ δὲ ολ. ἀφαιρεῖται δὲ ἡ μὲν κη, τὸ βη, ἡ δὲ ολ, τὸ βλ, τὸ βη, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ βλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δεῖ δὲ τὰ βη, βλ, διαστήματα ἐλάττονα εἶναι τῶν βα, βγ, ἑκάτερον ἑκατέρου.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 5.

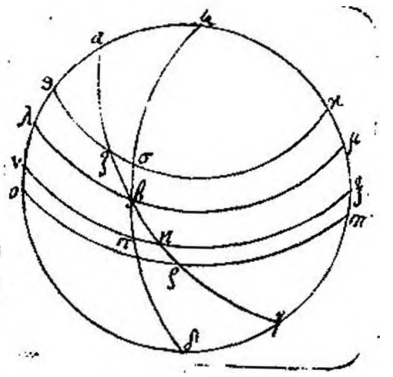


Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι, καὶ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν τόξα ἴσα λαμβάνωσιν, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ ἑτέρου σημεῖον, ὃ μή ἐστι πόλος τοῦ ὑπ' αὐτῶν τεμνομένου, καὶ ἀπὸ τοῦ λαμβανομένου σημείου κύκλοι παράλληλοι διὰ τῶν περάτων τῶν λαμβανομένων τόξων ἐπὶ τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὅτι τόξα ἀπολήψονται ἀφαιρέσεσιν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τῶν αὐτῶν κύκλων, ἀφ' ὧν τὰ σημεῖα εἴληπται, καὶ ὁ μείζονι γραφόμενος διαμέτρου, μείζονα καὶ τὸν τόξον ἀφαιρήσει.

Ἐ̓στωσαν κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι οἱ α β γ, α δ γ ε, καὶ τὰ α, γ. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας ληφθέντα τόξα ἴσα τὰ β ζ, β η, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ α δ γ ε, ληφθέντω σημεῖον τὸ ε, μὴ ὂν πόλος τοῦ α β γ. καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου γραφέντων διὰ τῶν ζ β η, σημείων κύκλοι παράλληλοι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ ὄντε π, εἶναι ἡμισφαιρίῳ, οἱ ϑ ζ κ, λ β μ, ν η ξ. Λέγω ὅτι οἱ αὐτοὶ παραλλήλους ἀφαιροῦσι τόξα ἀπὸ τῶν τοῦ α δ γ ε, περιφερειῶν, τὰ ϑ λ, λ ν. καὶ τὸ λ ν, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ϑ λ. Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ β, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ ε β δ. καὶ ἐπεὶ ὁ α δ γ ε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται παραλλήλων, ἄρα, κατὰ τὸ ιβ'. τοῦ α΄. δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸς τέμνει, καὶ ἐπομένως οἱ ϑ ζ κ, λ β μ, ν η ξ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸ τοῦ α δ γ ε, ἐπίπεδον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ ο ρ π, ὡς δίχα τοῦ σφαίρας τέμνων, ἄρα, κατὰ τὸ α΄. πόρισμα τῆς αὐτῆς διὰ τοῦ πόλου τοῦ α δ γ ε, διέρχεται. τὸ β, ἄρα ἐν ἔστι πόλος τοῦ α δ γ ε, καὶ τὸ α β, τόξον ἔλαττόν ἐστι τοῦ β γ, ὥστε ἐὰν ἐννοηθῇ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ β, σημείου καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεσθαι, παντὸς ἂν ἔστιν ὀρθὴ πρὸς τὸ τοῦ α δ γ ε, ἐπίπεδον, ἄλλως γὰρ οὐ τὸ β, πόλος ἔσται τοῦ α δ γ ε, καὶ τοῦ α΄. τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐγκλίνει μᾶλλον πρὸς τοῦ ο ε π, περιφέρειαν, ὥστε ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τῶν ϑ ζ κ, ν η ξ, παραλλήλων κύκλων, τὸ μὲν τοῦ ϑ ζ κ, ἐπίπεδον συμπεσεῖται τῇ διὰ τοῦ β, σημείου, καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ τοῦ ν η ξ, οὐ συμπεσεῖται. ἀλλὰ τῶν α β γ, ε β δ, μεγίστων κύκλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὄντων ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας εἴληπται δύο σημεῖα τὰ ζ, καὶ η, ἐξ ἴσου

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 6.



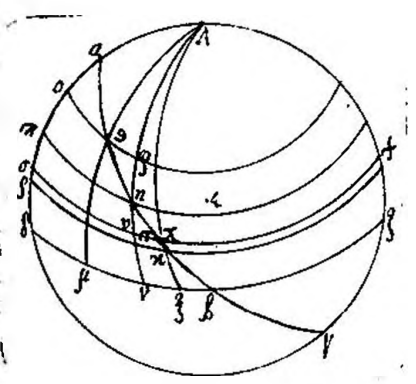
τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς, τὰ β, δηλ: σημεῖα, ἀφιςάμενα, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέρχονται, τὰ τῶν θ ζ κ, καὶ ν ξ, παραλλήλων, καὶ τόπων τὸ μὲν συμπίπτει τῇ διὰ τῶ β, κοινῆς τομῆς τῶν αὐτῶν μεγίςων κύκλων, καὶ τῶ κέντρῳ τῆς σφαίρας, ἄρα τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἄνισα ἀφαιρεῖται τόξα ἀπὸ τῆς τῶ ε β δ, κύκλου περιφερείας, ὥςτε τὰ β σ, β τ, τόξα καὶ τοῦ αὐωτέρω ἄνισά εἰσι, καὶ μεῖζον τὸ β τ, τῶ β σ. ἀλλὰ τὸ μὲν β τ, ἴσόν ἐςι τῇ λ ν, τὸ δὲ β σ, τῇ θ λ, καὶ τοῦ θ': τῶ β': τῶ παρ: ἄρα τὸ λ ν, μεῖζόν ἐςι τῶ θ λ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ε'αν δύο κύκλοι μέγιςοι πλαγίως ἀλλήλοις τέμνωνται, καὶ ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσι, διὰ δὲ τῶν πόλων τῶν ἑτέρου κύκλου καὶ τῶν περάτων τῶν εἰλημμένων τόξων κύκλοι μέγιςοι γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὑπὸ αὐτῶν ἴσα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας, οὗ πόλος ἐςὶ τὸ εἰλημμένον σημεῖον, καὶ τὸ ἀναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν περάτων τῶν ἐγγύτερον τῶν πόλου τμήματος ἀγομένων μεγίςων κύκλων μεῖζόν ἐςιν.

Ἐςωσαν κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ β ζ, πλαγίως ἀλλήλοις τεμνόμενοι· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς τῶ α β γ, περιφερείας τόξα ἴσα τὰ η θ, η κ. ἔςω δὲ πόλος τοῦ δ β ζ, τὸ λ, σημεῖον· ἀφ' οὗ γραφήτωσαν κύκλοι μέγιςοι διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων οἱ λ θ μ, λ η ν, λ κ ξ. Λέγω τὰ μ ν, ν ξ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ μεῖζον τὸ μ ν, τοῦ ν ξ, ὡς ἀναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν λ θ μ, λ η ν, τῶν διὰ τῶν περάτων τῶ η θ, τμήματος διερχομένων, τῶ ἐγγύτερον ὄντος τῇ λ, πόλῳ. Γεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶ λ, πόλου διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων παράλληλοι οἱ θ ο, η π, κ ρ. καὶ ἐπεὶ, καὶ τοῦ αὐωτέρω τὸ π ρ, τόξον μεῖζόν ἐςι τῶ π ο, ἀφῃρήσθω τὸ π σ, ἴσον τῇ π ο, καὶ διὰ τῶ σ, σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου τῶ λ, γεγράφθω παράλληλος ὁ σ τ, τέμνων τὸν λ η ν, κατὰ τὸ υ. Δείκνυται, ὅτι τὰ η φ, ο π, καὶ η υ, π σ, ἴσά εἰσι, καὶ τοῦ θ': τῶ β': τῶ παρόντος, ἀλλὰ καὶ τὰ ο π, π σ, ἴσά εἰσι, καὶ τοῦ καπσκδλιῶ, ἄρα καὶ τὰ η φ, η υ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν· εἴληπται δὲ, καὶ τοῦ ὑπεθεσιν καὶ τὰ η θ, η κ, ἴσα, ἄρα καὶ τοῦ β': τῶ παρόντος αἱ θ φ, υ κ, διῆσαι, αἱ τὰ ἴσα ἐπιζευγνύουσαι τόξα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Λοιπὸς ἐπεὶ ὁ λ κ ξ, μέγιςος κύκλος διὰ τῶ πόλου τῶ σ τ, παράλληλον διέρχεται, οἱ γὰρ ἐν τῇ αὐτῇ σφαί-

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 7.



σφαίρᾳ παράλληλοι τὸν αὐτὸν ἔχουσι πόλον, καὶ τῶν ά: τοῦ β': τὰ παρόντα, παύσομαι καὶ τῶν ι β': τοῦ ά: τὰ αὐτὰ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, ὥστε καὶ ὁ σ τ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν λ κ ξ. ἀλλὰ καὶ εἰς δύο ἄνισα αὐτὸν τέμνει (ἐὰν γὰρ ἑκάτερος τῶν λ κ ξ, σ τ, ὁλοκλήρως εἶναι γεγραμμένος ἐννοηθῇ, παύσομαι ὁ σ τ, εἰς δύο ἄνισα μέρη τὸν λ κ ξ, τέμνει κύκλον, καὶ τὸ χ, καὶ τὸ τότῳ καὶ διάμετρον αὐτικείμενον· καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ λ, χωρὸν, καὶ περατούμενον ὑπὸ τοῦ καὶ διαμέτρου αὐτικειμένου τῷ χ, ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ λοιπὸν τὸ ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ ξ, μεῖζον, ὅτι γε καὶ τὸ σ λ ψ, τμῆμα τῆς σφαίρας ἔλαττόν ἐστι τοῦ σ γ ψ, μέγιστος ὁ δ β ζ, ὑποτίθεται, καὶ εἰς δύο ἴσα τῶν σφαίραν τέμνει, τὰ δ λ ζ, δ γ ζ.) εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ χ σ, τμήματος τοῦ ψ χ σ, ὁλοκλήρου κύκλου, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ τμῆμα, ὅπερ ἀπὸ τοῦ χ, ἀρχόμενον σημείου καὶ χωρὸν ἐπὶ τὸ σ, περατοῦται ὑπὸ τοῦ καὶ διάμετρον αὐτικειμένου τῷ χ, εἰς ἄνισα τέμνεται· ἄρα, καὶ τῶν ά: τοῦ παρόντος ἡ υ χ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς υ κ, ἐννεμούσης, ἴση δὲ τῇ υ κ, δέδεικται ἡ θ φ, ἄρα ἡ υ χ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς θ φ. ἀλλ' ὁ φ θ ο, παράλληλος, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ σ τ ψ, καὶ τῶν ι ς': τοῦ β': τοῦ παρόντος, δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ φ θ, τόξον τὸ ὑπὸ τῆς φ θ, μείζονος ὑποτεινόμενον, μείζόν ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ υ χ, τόξου, τοῦ ὑπὸ τῆς ἐλάττονος υ χ, ὑποτεινομένης, ὁμοίως δὲ, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, ὅτι τὸ φ θ, τόξον πλειόνων ἐστὶ μοιρῶν, καθ' ἃς ὁ φ θ ο, ὁλόκληρος κύκλος εἰς 360 διαιρεῖται, τὸ δὲ υ χ, ἐλαττόνων, καθ' ἃς ὁ χ υ σ, ὁλόκληρος κύκλος εἰς τοσαύτας διαιρεῖται. ἔστι δὲ τῷ μὲν θ φ, ὅμοιον τὸ μ ν, καὶ τῶν ϑ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, τῷ δὲ υ χ, τὸ ν ξ, ἄρα τὸ μ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ, ὅπερ ἐδεῖ τὸ ὑποχεθέν. Δεῖ δὲ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, ὡς τὰ θ, η, κ.

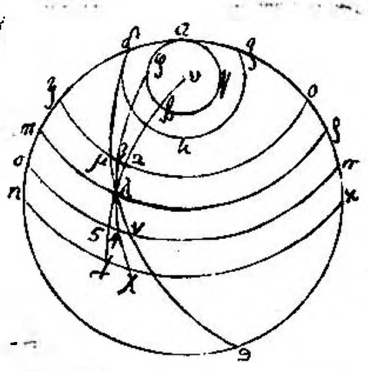
Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τοῦ δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὐθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων παράλληλοι κύκλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς ἀχθῶσιν, οἱ κύκλοι ὅτι αὐτοῖς τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, καὶ τὸ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων ἔλαττον ἔσται.

Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ ε ζ, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος α β γ, ἁπτέσθω ὁ α η θ κ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α. τὸν δὲ μείζονα δ ε ζ, τεμνέτω κατὰ τὸ δ, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ὁ δ λ θ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ λ μ, λ ν, καὶ διὰ τῶν μ, λ, ν, σημείων ἀχθήτωσαν

παράλληλοι οἱ ξμο, πλρ, σντ, τέμνοντες τὸν αηθκ, καὶ τὰ ξπσ, σημεῖα. Λέγω δὴ τὰ πξ, πσ, τόξα αὐίσα εἶναι, καὶ τοῦπον τὸ πξ, ἔλαττον εἶναι τοῦ πσ, ὡς ἐγγύτερον τοῦ υ, πόλου. Διὰ τοῦ λ, τοίνυν σημείου, τῆς κοινῆς τῶν ληφθέντων τόξων ἀφῆς γεγράφθωσαν δύο κύκλοι μέγιστοι, ὁ μὲν ἁπτόμενος τοῦ αβγ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, καὶ τὸ φ, ὁ δὲ διὰ τοῦ υ, πόλου τῶν αὐτῶν διερχόμενος, οἷοι οἱ φλχ, υλψ. καὶ ἐπεὶ ὁ υλψ, διὰ τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων διέρχεται, παύσεται καὶ τοῦτο τὸ ιβ': τοῦ ά: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸς τέμνει. εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτοῦ περιφερείας τὸ λ, σημεῖον, καὶ τοῦτο οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τῶν αὐτῶν παραλλήλων, διὰ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ μὴ τοῦ υ, πόλου, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον ἀλλήλοις αὐτικεῖσθαι, ἀπὸ δὲ τοῦ ληφθέντος λ, ἤχθησαν τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ πξμο, καὶ στ, παραλλήλω τὰ λ2, λ3, λμ, λν, λ4, λ5, ἄρα καὶ τοῦτο τὸ ιβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος τὸ λ2, ὡς διὰ τοῦ πόλου υ, διερχόμενον ἐλάχιστόν ἐστι, τὸ δὲ λ3, ἔλαττον τοῦ λμ. ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τὸ μὲν λν, μέγιστόν ἐστιν, ὡς διὰ τοῦ ἑτέρου πόλου τῶν αὐτῶν παραλλήλων διερχόμενον, τὸ δὲ λ4, ἔλαττον τοῦ λ5. Αὖθις ἐπεὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο εἰσὶ κύκλοι μέγιστοι οἱ δλϑ, φλχ, τεμνόμενοι, κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ δλϑ, περιφερείας εἴληπται τόξα ἴσα τὰ λμ, λν, καὶ διὰ τῶν μ, ν, παράλληλοι ἤχθησαν κύκλοι οἱ ξμο, στ, πάντως γε κατὰ τοῦτο γ': τοῦ παρόντος οἱ αὐτοὶ παράλληλοι κύκλοι ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ φλχ, τόξα αὐίσα τὰ λ3, λ4, καὶ τὸ λ3, ἔλαττόν ἐστι, τοῦ λ4. (ἐαν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀϑεῖα τις διὰ τοῦ λ, σημείου ἐπιζευχθῇ ἡμιεῖα, δῆλον, ὅτι τῷ υ, προσεγγίζει τῷ πόλῳ, καὶ τὸ τοῦ ξμο, ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπεσεῖται τῇ αὐτῇ ἀϑείᾳ,) ἀλλὰ τὸ μὲν λ3, ἴσον ἐστὶ τῷ πξ, τὸ δὲ λ4, τῷ πσ, κατὰ τοῦτο ιβ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ πξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ πσ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ ὑποκείμενον.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 8.

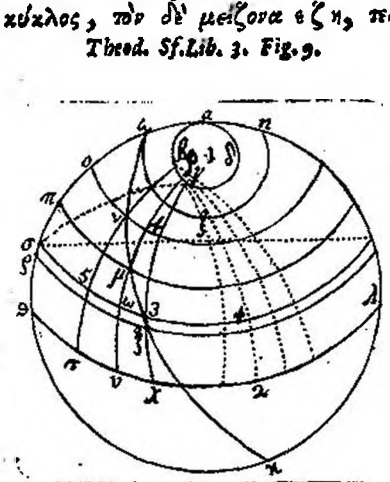


Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, ὧν τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τοῦ δὲ μείζονα τέμνῃ, ἢ τὸ τεμνόμενον αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον. ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων κύκλοι μέγιστοι ἀχθῶσιν ἁπτόμενοι τοῦ ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, οἱ κύκλοι ἴσοι αἰσα τόξα ἐναπολήψονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, ἢ τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν διερχομένων κύκλων διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου ὄντος τόξον μεῖζον ἔσται.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η. καὶ τοῦ μὲν α β γ, ἐλάττονος ἀπτέσθω ὁ α θ κ λ, μέγιστος κύκλος, τὸν δὲ μείζονα ε ζ η, τεμνέτω ὁ αὐτὸς κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ε ζ η, ὁ ε μ κ, μέγιστος, ἃ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ μ ν, μ ξ, ὥστε εἶναι ἄμφω τὰ ληφθέντα τόξα ἐν τῷ αὐτῷ θ α λ, ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν ν, μ, ξ, σημείων ἀχθήτωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, ἁπτόμενοι τοῦ α β γ δ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, καὶ τὰ β, φ, γ, σημεῖα. ἔστω δὲ καὶ μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ θ χ λ. λέγω τὰς τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, μεγίστους κύκλους αἴσα ἐναπολαμβάνειν τόξα ἐπὶ τῆς τοῦ θ χ λ, παραλλήλου τὰ τ υ, υ χ, καὶ τὸ τ υ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν τ ν β, υ μ φ, μεγίστων κύκλων τῶν διὰ τῶν μ, ν, σημείων διεχομένων τοῦ μ ν, τόξου, τοῦ ἐγγύτερον ὄντος τοῦ ι, πόλου μεῖζον εἶναι. Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν ν μ ξ, ληφθέντων σημείων κύκλοι παράλληλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς, οἱ ν ο, μ π, ξ ρ. καὶ ἐπεί, καὶ τῶν αὐτῶν ἐστιν, τὸ ρ π, μεῖζόν ἐστι τοῦ π ο, ἀφῃρήσθω τὸ σ π, ἴσον τῷ π ο, καὶ γεγράφθω ὁ ζ σ. Δείκνυται. Ἐπεὶ τὸ μὲν μ ψ, ἴσόν ἐστι τῷ π ο, τὸ δὲ μ ω, τῷ π σ, καὶ τῶν ι β': τοῦ β': τοῦ παράλληλος, τὰ δὲ π ο, π σ, ἴσά ἐστι, καὶ τῶν κατασκευῶν, ἄρα καὶ τὰ μ ψ, μ ω, ἴσά ἐστιν, ἐλήπται δὲ καὶ τὰ μ ν, μ ξ, ἴσα, ἄρα καὶ τῶν β': τοῦ παρ. αἱ ν ψ, ω ξ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσίν. Λύθις ἐπεὶ ὁ χ γ 2, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, παραλλήλου καὶ τοῦ γ, ἃ διέρχεται διὰ τοῦ ι, πόλου

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 9.



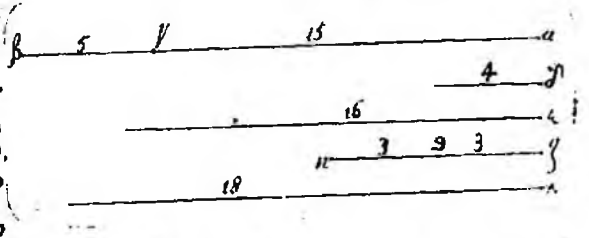
πόλυ τῆ αὐτῆ παραλλήλυ, δῆλον, ὅτι τὸ ζ σ γ, παράλληλον πλαγίως πέμνει, ὥστε ὁ ζ σ γ, παράλληλος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδυ τῆ χ γ 2, μεγίστυ κύκλυ ἐγκλινόμενός ἐστι πρὸς τὸ γ, σημεῖον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ θ χ λ, ἄρα ὁ χ γ 2, μέγιστος κύκλος δίχα ὑπ' αὐτῆ πέμνεται κῆ τὰ χ 2, σημεῖα, ὡς δέδεικται πρότ: ί: τῆ ά: τῆ παρόντος, κῆ τὸ χ γ 2, τόξον ἡμικυκλίου ἐστίν, ὥστε ζ γ 4. ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίυ, καὶ ἑπομένως ὁ ζ σ γ, παράλληλος εἰς δύο ἀΐσα τὸν χ γ 2, πέμνει κύκλον. εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ζ σ γ, τόξου τὸ ω, σημεῖον, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ ζ σ γ, τόξον εἰς ἄΐσα πέμνεται, ἄρα κῆ τίλω ά: τοῦ παρόντος, ἡ ω ζ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ω ξ. ἀλλὰ τῆ ω ξ, ἴση ἐστὶν ἡ ψ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ψ ν, μείζων ἐστὶ τῆς ω ζ. ἐπεὶ δὲ ὁ ψ ν ο, παράλληλος ἐλάττων ἐστὶ τῆ ζ σ γ, παντως γε ἡ ν ψ, ὑποτείνουσα, μεῖζον τῷ λόγῳ τόξον ὑποτείνει τῆ ψ ν ο, παραλλήλυ, ἥπερ ἡ ω ζ, τῆ ζ σ γ, παραλλήλυ· ὅμοιον ἄρα ὅμοιά εἰσι τὰ ν ψ, ω ζ, τόξα, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ ν ψ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ψ ν ο, κύκλον, ἢ τὸ ω ζ, πρὸς τὸν ζ σ γ. ἀλλὰ τὸ μὲν ν ψ, ὁμοιόν ἐστι τῷ τ υ, τὸ δὲ ω ζ, τῷ υ χ, κῆ τίλω ι β': τῆ β': τῆ παρ: ἄρα καὶ τὸ τ υ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν θ χ, κύκλον, ἢ τὸ υ χ, πρὸς δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκείνο μεῖζόν ἐστιν, ἄρα τὸ τ υ, μεῖζόν ἐστι τῆ υ χ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποκείμενόν.

Λ Η' Μ Μ Α.

Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων, μέσον τινὰ λόγον εὑρεῖν, συμμερῆ ἑτέρῳ τινὶ, μὴ ἴσῳ ὄντι τῷ τῆ μείζονος τοῦ δοθέντος πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾷ.

Ἔστωσαν αἱ ἄΐσα μεγέθη τὰ α β, α γ. καὶ ζητείσθω μεγέθος, ὥστε εἶναι μέσον μὲν τοῦ α β, α γ, σύμμετρον δὲ τῷ δοθέντι δ. Ἐπεὶ δὲ πῆ διχῶς ἐνδέχεται ὑποκεῖσθαι. ἢ γὰρ τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ δεῖ σύμμετρον εἶναι τὸ ζητούμενον, ἔλαττόν ἐστι τῆς β γ, διαφορᾶς, ἢ γοῦν μεῖζον. Κείσθω πρῶτον ἔλαττον, οἷον τὸ δ. Διπλασιασθήτω δὴ τὸ δ, ἔστω διπλασιασθὲν τὸ ε, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ πολλαπλασιασθήτω ἀριθμὸν, ὥστε γενέσθαι τὸ ε, μέγεθος πρώτως μεῖζον τῆ α γ, καὶ τύπο ἔσαι τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ μέσον ἐστὶ τῶν α β, α γ, δῆλον· εἰ γὰρ μή, ἔσαι παντως μεῖζον καὶ τῆ α β. ἀφαιρεθέντος δὲ ἀπ' αὐτῆ τῆ δ, ἅπαξ, τὸ ἐναπολειπόμενον μεῖζον ἔσαι τῆ α γ, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ δ, τῆς β γ, διαφορᾶς, καὶ ἑπομένως ἢ ἔσαι πρώτως μεῖζον τῆ α γ, τὸ δύρεθὲν ε, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ ἐναπολειπόμενον,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 10.



μεσον, ὑπεπέθη δὲ τὸ ε, καὶ πρώτως μεῖζον, κατὰ τὴν κατασκευήν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τῆ αβ, ἀλλ' ἔλαττον· τὸ αὐτὸ ε, γέγονε δὲ καὶ μεῖζον τῆ αγ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ε, τῶν αβ, αγ, δοθέντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ καὶ σύμμετρόν ἐστι τῷ δ, ὑδρμία ἐστὶν ἀμφιβολία, τὸ γὰρ ε, πολλαπλασιαζομένου τῆ δ, γέγονε, ὥστε τὸ αὐτὸ ἄμφω μετρεῖται μέτρῳ, καὶ πῶς ἐστι τὸ συγκριτικὸν τῶν συμμέτρων μεγεθῶν, καὶ τὸν β'. ὅρον τῆ ι'. τῆ στοιχειωτῆ. ἀλλὰ δὴ καὶ πάλιν τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ τινι δεῖ τὸ ζητούμενον σύμμετρον εἶναι, μεῖζον τῆς β γ, διαφορᾶς, οἷον τὸ ζη. καὶ διαιρεθήτω εἰς δύο, ἢ εἰς πέντε, ἢ εἰς ὁκτὼ, ἢ εἰς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, τῆς τομῆς ἀεὶ ἐν μέσῳ γινομένης, ἕως ἂν τὸ ἀναπολειφθὲν ἔλαττον ᾖ ἀφαιρεῖ τῆς βγ, διαφορᾶς. εἴπω δὴ πλασιαθήτω, ἑπλασιαθήτω τὸ αὐτὸ, ἢ ἄλλως πως αὐξηθήτω, ὥστε τὸ γενόμενον πρώτως μεῖζον εἶναι τῆ αγ, ὡς τὸ κ. καὶ τῆτο ἔσαι τὸ ζητούμενον κατὰ τὰ ἐδὴ εἰρημένα. ἔσαι γὰρ πάντως καὶ μέσον, τῶν αβ, αγ, εἰ γὰρ μὴ, τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον, ὃ καὶ πρότερον, καὶ πρὸς τοῦτο σύμμετρόν τῷ ζη. καὶ γὰρ τὰ ἤδη εἰρημένα, σύμμετρόν ἐστι πολλῷ τινὶ μέρει τῆ ζη, ᾧ τινι σύμμετρόν ἐστι, καὶ τὸ ζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

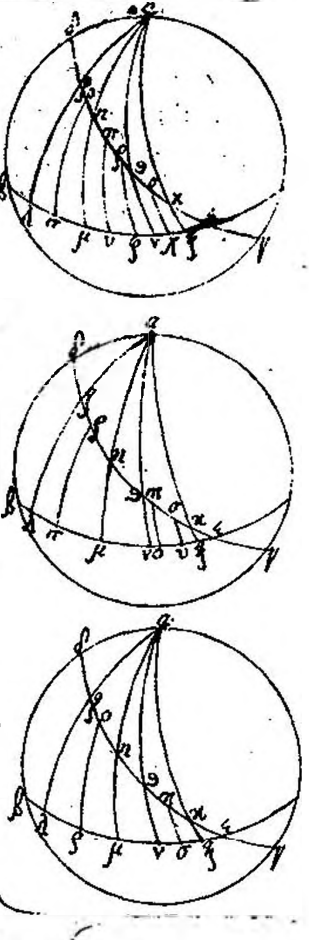
Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μείζου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῆς παραλλήλου, καὶ πέντε τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῆς παραλλήλου, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ἴσαι περιφέρειαι ἀπολήφθῶσι, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τῆ μείζονι τῆς παραλλήλου κύκλου. διὰ δὲ τῆς γεμομέρου σημείου, καὶ τῆ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας τῆ μείζονι τῆς παραλλήλου τὰς μεταξὺ αὐτῆς, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τῆ ἐξ ἀρχῆς μείζονι κύκλου τῆς πορρώτερον.

Ἐπὶ γὰρ μείζονι κύκλου περιφερείας τῆ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ δε γ, βε, πρὸς ὀρθὰς. ὧν ὁ μὲν βε, εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δε γ, λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους. ἀπὸ δὲ τῆ δε γ, λοξῆ, ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μείζονι τῶν παραλλήλων βε, αἱ ζη, θκ, καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, κ, σημείων, καὶ τῆ α, πόλῳ μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ αζλ, αημ, αθν, ακξ. Λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ λμ, περιφέρεια τῆς νξ, περιφερείας. Ἡ γὰρ ηθ, ἤτοι σύμμετρός ἐστι ταῖς ζη, θκ, ἢ ἄ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήθωσαν αἱ ζη, ηθ, θκ, εἰς μέρη ἴσα τῷ κοινῷ αὐτῶν μέτρῳ, καὶ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ διὰ ἑκάστε τόπων, καὶ τῆ α, πόλῳ γεγράφθωσαν κύκλοι μέγιστοι, οἱ οτ, πυ, ρφ, σχ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ζο, οη, ηπ, πρ,

πρ, ρϑ, ϑσ, σκ, περιφέρειαι ἐξῆς ἀλλήλαις ἴσαι εἰσί, καὶ τιὼ ε: τῶ παρ: παράπωσγε αἱ λτ, τμ, μυ, υφ, φρ, νχ, χξ, ἐξῆς μείζονες ἀλλήλων εἰσὶν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μιγίσης τῆς λτ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν λτ, τῆς νχ, ἡ δὲ τμ, τῆς χξ, ἡ ὅλη ἄρα μλ, ὅλης τῆς νξ, μείζων ἐστίν. Μὴ ἔστω δὴ ἡ κϑ, ταῖς ζκ, ϑκ, σύμμετρος. Λέγω ὁμοίως μείζονα εἶναι τιὼ λμ, τῆς νξ. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ἤτοι ἐλάσσων, ἢ ἴση. Ἔστω, εἰ δυνατὸν, πρότερον ἐλάσσων ἡ λμ, νξ. Καὶ κείσθω τῇ λμ, ἴση ἡ νο. καὶ διὰ τοῦ α, πόλου καὶ τοῦ ο, γεγράφθω μέγιστος ὁ πο. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τῶν περιφερειῶν ὁμοιογενῶν ἀνίσων, τῆς κϑ, ϑπ, ἡ ϑρ, ἀπειλήφθω τις περιφέρεια ἡ ϑρ, διὰ τοῦ ἀνωτέρω λήμματος, μείζων μὲν ἄρα τῆς ϑπ, ἐλάσσων δὲ τῆς ϑκ, σύμμετρος δὲ τῇ ηϑ. καὶ κείσθω τῇ ϑρ, ἴση ἡ σκ, καὶ διὰ τῶν ρ, σ, σημείων, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ συ, ρτ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ σκ, τῇ ϑρ, καὶ τιὼ δεῖξιν τὰ α: μέρος, καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ κϑ, ἑκατέρᾳ τῶν σκ, ϑρ, ἡ τμ, ἄρα τῆς νυ, μείζων ἐστὶν, ὥσπερ καὶ τῆς νο, ἡ νυ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ λμ, τῆς νο, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἡ λμ, τῆς νξ. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἴση. Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἴση, καὶ πεπιλήφθωσαν αἱ ζκ, ϑκ, δίχα καὶ τὰ ο, π, σημεῖα. καὶ διὰ τῶν ο, π, σημείων, καὶ τῶ α, πόλε, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ορ, πσ. ἐπεὶ οὖν αἱ ζο, οκ, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ἄρα λρ, ρμ, ἐξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσι, καὶ τιὼ ἀνωτέρω, καὶ τιὼ ε: τῶ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μιγίσης τῆς λρ, μείζων ἄρα ἡ λρ, τῆς ρμ. ἡ ἄρα λμ, τῆς μρ, μείζων ἐστὶν, ἢ διπλῆ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ ϑπ, πκ, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ νσ, σξ, ἄρα ἐξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μιγίσης τῆς νσ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ νσ, τῆς σξ. ὥστε ἡ νξ, τῆς νσ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ λμ, τῇ νξ, ὧν ἡ λμ, τῆς μρ, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ νξ, τῆς νσ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ρμ, τῆς νσ, ἴσων ὑποκειμένων τῶν σκ, ϑπ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἴση ἡ λμ, τῇ νξ. ἐδείχθη δὲ οὐδ' ἐλάσσων, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ λμ, περιφέρεια τῆς νξ, περιφερείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 11.

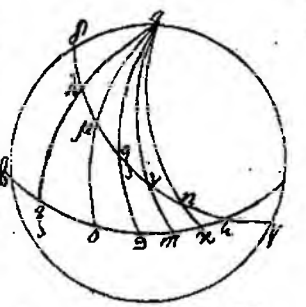


Πρό-

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῆς παραλλήλου, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἰς τὴν παραλλήλου, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου, διὰ δὲ τῆς σημείου καὶ τοῦ πόλου τῆς παραλλήλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἔσται ὡς ἡ τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ ἀπ' ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τοῦ πόλου, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς κύκλου, ὅπως ἡ ἐξῆς τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου, ἡ μεταξὺ τῆς διὰ τοῦ πόλου καὶ τῆς ληφθέντος σημείου, μεγίστου κύκλου, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῆς ληφθέντος σημείου.

Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, δύο κύκλοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς μέγιστοι οἱ δεγ, βε. ὧν ὁ μὲν βε, εἰς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεγ, λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους. ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου δεγ, εἰλήφθωσαν δύο τυχόντα σημεῖα τὰ ζ, η, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων βε, καὶ διὰ τῶν ζ, η, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ αζθ, αηκ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. ὅτι γὰρ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν εἰς τὰ μέρη τὰ μετροῦντα αἱ δζ, ζη, καὶ τὰ λ, μ, ν, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν ἑκάστου τούτων καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ λξ, μο, νπ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λμ, μζ, ζν, νη, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ἄρα βξ, ξο, οθ, θπ, πκ, ἐξῆς μείζους ἀλλήλων εἰσὶ, καὶ τῶν ἑ: τοῦ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς βξ. καὶ ἔστι τὸ μὲν πλῆθος τῶν βξ, ξο, οθ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν δλ, λμ, μζ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν θπ, πκ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν ζν, νη. ἡ βθ, ἄρα πρὸς τὴν δζ, μείζονα λόγον ἔχει, καὶ τῶν ζ': ὅρον τοῦ ἑ: τοῦ στοιχ: ἤπερ ἡ θκ, πρὸς τὴν ζη. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτω τὴν θκ, πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς ἐλάττονα τῆς ζη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη.

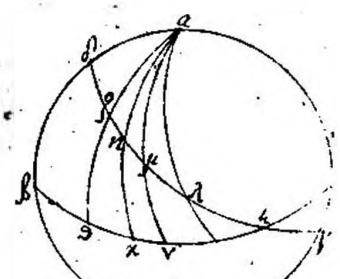


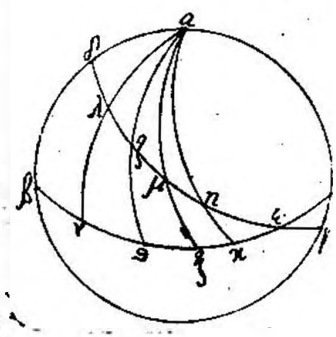
Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 13.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρος. Λέγω, ὅτι καὶ ἄπως ἐστὶν ὡς ἡ βϑ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, ἄπως ἡ ϑκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζη, περιφέρειας. εἰ γὰρ μή, ἔσται ἄπως πρὸς μείζονα τῆς ζη, ἢ πρὸς αὐτήν. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, πρὸς μείζονα τῆς ζη, τὴν λζ. καὶ ἔστιν ἴσων οὐσῶν αὐτῶν περιφερειῶν τῶν λζ, ζη, ζδ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ζμ, τῆς μὲν ζλ, ἔσα ἐλάσσων, τῆς δὲ ζη, μείζων, καὶ τῇ ζδ, σύμμετρος καὶ τὸ λῆμμα τῆς ἀνωτέρω. καὶ διὰ τὰ μ, καὶ τὰ α, πόλα γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ μν. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ζμ, τῇ ζδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, οὕπως ἡ ϑν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα ὅρον. ὡς δὲ ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, οὕπως ἐστὶν ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ζλ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ζλ, οὕπως ἐστὶν ἡ ϑν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ϑν, ἄπως ἡ ζλ, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, ἐλάσσων δὲ ἡ ϑκ, τῆς ϑν, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ λζ, τῆς ἐλάσσονος τῆς ζμ, ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. ἐ γὰρ ἐστιν ὡς ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, ἄπως ἡ ϑκ, πρὸς μείζονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. Λέγω δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς αὐτήν. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ὡς ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, ἄπως ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ζη.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν δζ, ζη, δίχα κατὰ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ διὰ ἑκατέρα τῶν καὶ τὰ α, πόλα γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι, οἱ αλν, αμξ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λζ, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ βν, ἄρα ν ϑ, κατὰ τὴν ε: τοῦ παράντος, ἐξῆς μείζως εἰσὶν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς βν. ἡ βϑ, ἄρα τῆς ϑν, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ κϑ, τῆς ϑξ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν βϑ, τῆς ϑν, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ ϑκ, τῆς ϑξ, ἐλάσσων ἢ διπλῆ, ἡ βϑ, ἄρα πρὸς τὴν ϑν, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κϑ, πρὸς τὴν ϑξ, καὶ τὸν ζ: ὅρον τοῦ ε: στοιχειωτοῦ, καὶ ἐναλλὰξ ἡ βϑ, ἄρα πρὸς τὴν ϑκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νϑ, πρὸς τὴν ϑξ. ὡς δὲ ἡ βϑ, πρὸς τὴν ϑν, ἄπως ἐστὶν ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ νϑ, ἄρα πρὸς τὴν ϑξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη. ὡς δὲ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζη, ἄπως ἐστὶν ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ, ἡ νϑ, ἄρα πρὸς τὴν ϑξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ ϑν, πρὸς τὴν λζ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ϑξ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 13.





πρὸς

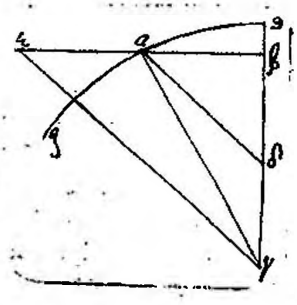
πρὸς τὴν ζ μ. ἐαν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν ν ϑ, πρὸς τὴν λ ζ, οὕτω τὴν ϑ ξ, πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζ μ, περιφερείας, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ β ϑ, πρὸς τὴν δ ζ, οὕτως ἡ ϑ κ, πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζ η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα τῆς ἑπομένης Γ: Προτάσεως.

Ἐὰν ἀπὸ ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς ϐιγώνου ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον αὐτῇ πλευρὰν, ὅλην αὐτην πλευρὰ, ἐφ' ἣν πίπτει ἡ ἀχθεῖσα κάθετος, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ μέρος τὴν ὀρθὴν γωνίαν μέρος, ἥπερ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Ἔστω δὴ ϐίγωνον ὀρθογώνιον τὸ α β γ, καὶ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ α, τυχούσης γωνίας ἀχθεῖσα κάθετος ἡ α δ, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν β γ. Λέγω τὴν β γ, ὅλην πλευρὰν τοῦ ϐιγώνου πρὸς τὴν β δ, μέρος ὄσαν αὐτῆς, μείζονα λόγον ἔχειν, ἥπερ τὴν ὑπὸ α δ β, γωνίαν πρὸς τὴν ὑπὸ α γ β. Ἀχθεῖσα ἡ γ ε, παράλληλος τῇ α δ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ὡς ἀπὸ κέντρου, διαστήματι τῷ α γ, ἀναγεγράφθω κύκλος ὁ ζ α ϑ, ὃς περιεῖ τὴν μὲν β γ, πλευρὰν, ἐμπεσοῦσαν ἐντὸς τοῦ β, δηλονότι κατὰ τὸ ϑ, διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν α γ, ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς β γ, ὑποτεινούσης τὴν ὀξεῖαν· τὴν δὲ γ ε, ὡς ὑποτείνουσαν τὴν ἀμβλεῖαν ὑπὸ ε α γ, καὶ μείζονα τῆς γ α, περιεῖ ἐπὶ αὐτὸς μεταξὺ τοῦ ε, καὶ γ, τὸ ἔστι κατὰ τὸ ζ. Δείκνυται, κατὰ γὰρ τὴν ἐχάτην τοῦ ε': τοῦ στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ὑπὸ ζ γ α, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ α γ ϑ, οὕτως ὁ ζ α γ, τοιμοῦς πρὸς τὸν α γ ϑ, τοιμέα, ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ε γ α, ϐίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ α γ, τοιμέως, ἄρα κατὰ τὴν ή: τοῦ ε: τοῦ αὐτοῦ, μείζονα λόγον ἔχει τὸ ε γ α, ϐίγωνον πρὸς τὸν α γ ϑ, τοιμέα, καὶ πολλῷ μείζονα πρὸς τὸ α γ β, ϐίγωνον, ἥπερ ἡ ὑπὸ ε γ α, πρὸς τὴν ὑπὸ α γ β, γωνίαν, καὶ συνθέσει ἄρα τὸ ὅλον ε γ β, ϐίγωνον πρὸς τὸ α γ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὑπὸ ε γ β, γωνία, ἥτοι ἡ ὑπὸ α δ β, (ἴσαι γὰρ καὶ τὴν κή: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ,) πρὸς τὴν ὑπὸ α γ β. ἀλλ' ὡς τὸ ϐίγωνον πρὸς τὸ ϐίγωνον, κατὰ τὴν α: τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, ἡ β ε, βάσις πρὸς τὴν α β, βάσιν. καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, παράλληλός ἐστι τῇ ε γ, ἔσται ὡς ἡ ε β, πρὸς τὴν α β, κατὰ τὴν δ': τοῦ ϑηθέντος, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν β δ, ἡ β γ, ἄρα πρὸς τὴν β δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὑπὸ α δ β, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ α γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 14.

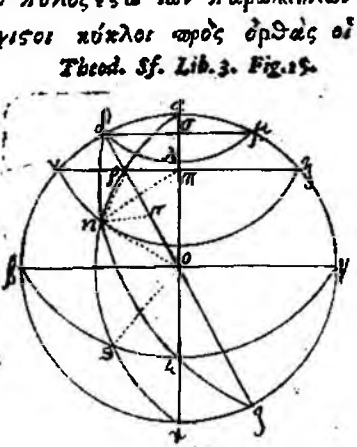


Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μείζονος κύκλου ὁ πόλος ᾖ τῆς παραλλήλου, ἢ τούτου τέμνωσι δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τὴν παραλλήλου, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῆς πόλου τῆς παραλλήλου διερχόμενος, τέμνῃ τὸν λοξόν, μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου, ἐν ᾧ ὁ λοξὸς ἅπτεται, καὶ τῆς σφαίρας διαμέτρου πρὸς τινὰ τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξός, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ καὶ τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου περιφέρεια, καὶ μεταξὺ τοῦ τε ἀπ' ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τῆς πόλου, πρός τινα τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τινὰ μεταξὺ τῆς αὐτῆς κύκλου.

Ἐπὶ γὰρ μείζονος κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς οἱ βεγ, δεζ, ὧν ὁ μὲν βεγ, μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεζ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ανκ, διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, τεμνέτω τὸν δεζ, μεταξὺ τοῦ τε βεγ, καὶ ἐφ' ἃ ἐφάπτεται ὁ δεζ, οὗ δὴ ἐφάπτεται ὁ δεζ, ἔστω ὁ δλμ. Λέγω, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος βγ, πρὸς τὴν τοῦ δλμ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βϑ, περιφέρεια πρὸς τὴν δη, περιφέρειαν. Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η, παράλληλος κύκλος ὁ νηξ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν κοιναὶ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν αι κ, δζ, βγ, νξ, δμ, ϑο, ηπ, οη, ηρ. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς δλμ, νηξ, βεγ, διὰ τῶν πόλων τέμνει δίχα πέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸν ιβ'· τοῦ δὲ τοῦ παρόντος, αἱ δμ, νξ, βγ, ἄρα διάμετροί εἰσι τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων, καὶ ὁ αβγ, ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ δλμ, νηξ, βεγ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν διῆκταί τις διάμετρος ἡ ανκ, ἡ ανκ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων, καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν πέφυκε τῆς σφαίρας ἐστὶ κατὰ τὸν ϑ'· τοῦ αὐτοῦ· τὰ σ, π, ο, ἄρα σημεῖα, κέντρα ἐστὶ τῶν δλμ, νηξ, βεγ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ δλμ, νηξ, βεγ, ὑπό τινος ἐπιπέδου τοῦ αβγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ τομαὶ ἄρα αὐτῶν παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἄρα δμ, νξ, βγ, παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, κατὰ τὸν ις'· τοῦ ια'· τοῦ στοιχειωτοῦ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ νηξ, βεγ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 15.



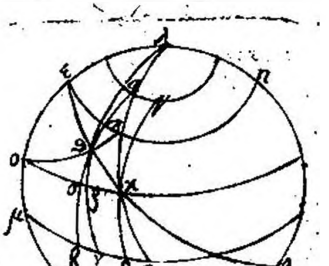
ὑπὸ

ὑπό τινος ἐπιπέδου τῶ α π κ, πέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ π π, τῇ θ ο. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ν π, π π, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς β ο, ο θ, εἰσὶ, μὴ οὔσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας γωνίας περιέχουσιν, καὶ τῶν ι ε: τῶ αὐτῶ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ν π π, γωνία τῇ ὑπὸ β ο θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ν π ξ, δ ε ζ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ ἡ τῆς ν π ξ, δ ε ζ, κοινὴ τομὴ πάντως ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ τῶν ι θ: τῶ αὐτῶ, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ π ρ. αὐτὴ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τῶ α β γ, κύκλω ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, καὶ τὸν γ': τῶ αὐτῶ ὅρον, ἅπτεται δὲ τῆς π ρ, ἑκατέρα τῶν π ρ, ρ ο, οὖσαι ἐν τῷ τῶ α β γ, κύκλω ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ π ρ π, π ρ ο, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ α π, τῇ ν ξ, ὀρθή ἐστιν, καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ρ π ο, γωνία ὀρθή ἐστι, παντὸς γε ἡ ὑπὸ π ο ρ, ὀξεῖά ἐστι. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ο ρ, τῆς ρ π. Κείσθω αὐτῇ τῇ π ρ, ἴση ἡ ρ τ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ π τ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ π ρ, τῇ ρ τ, κοινὴ δὲ ἡ π ρ, δύο δὴ αἱ π ρ, ρ π, δυσὶ ταῖς τ ρ, ρ π, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ π ρ π, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ τ ρ π, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ π π, βάσει τῇ π τ, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ π ρ π, τρίγωνον τῷ τ ρ π, τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ π π ρ, γωνία τῇ ὑπὸ π τ ρ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ π π ρ, τῇ ὑπὸ θ ο β, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ π τ ρ, τῇ ὑπὸ θ ο β, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον τὸ π ο ρ, ὀρθογώνιόν ἐστι καὶ τὸ ρ, καὶ διῆκταί τις ἡ π τ, ἡ ο ρ, ἄρα κατὰ τὸ αὐτέρω λῆμμα, πρὸς τὴν ρ τ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ ρ τ π, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο π, γωνίαν, ἴση δὲ ἡ μὲν ρ τ, τῇ ρ π, ἡ δὲ ὑπὸ ρ τ π, γωνία τῇ ὑπὸ θ ο β, καὶ ἡ ο ρ, ἄρα πρὸς τὴν ρ π, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ β ο θ, πρὸς τὴν ὑπὸ β ο ρ. ἀλλὰ καὶ τὴν δ': τοῦ ς': τῶ στοιχειωτῶ, ὡς μὲν ἡ ο ρ, πρὸς τὴν ο π, ἕπως ἐστὶν ἡ ο δ, πρὸς τὴν δ σ, τουτ' ἔστιν ἡ δ ζ, πρὸς τὴν δ μ, ὡς δὲ ἡ ὑπὸ β ο θ, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο π, γωνίαν, ἕπως ἐστὶν ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ π, περιφέρειαν, καὶ τὴν λγ': τῶ αὐτῶ, καὶ ἡ ζ δ, ἄρα πρὸς τὴν δ μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ π, περιφέρειαν, καὶ ἔστιν ἡ μὲν δ ζ, διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ δ μ, διάμετρος τοῦ δ λ μ, κύκλου, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ δ λ μ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ μ, περιφέρειαν.

Πρότασις ΙΑ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τῷ αὐτῷ τῶν παραλλήλων ἐφάπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνως ἐφάπτηται, ἢ ὧν οἱ ἀπ' ἀρχῆς ἐφήπτοντο, καὶ τέμνῃ τοὺς αὐτῷ ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, οὐ δὲ οἱ ἀπ' ἀρχῆς ἐφήπτοντο, ἢ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, ὃν ἐφάπτεται ὁ λοξός, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ λαμβανομένη τῶν αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ αβ, γδ, τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτέσθωσαν τοῦ αγ. καὶ τὰ α, γ, σημεῖα, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὁ εζ, μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν οἱ αβ, γδ, ἐφάπτονται. καὶ τεμνέτω τὰς αβ, γδ, μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ οὐ οἱ αβ, γδ, ἐφάπτονται, τοῦ αγ, κύκλου. Ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων ὁ μβξ. οὐ δὲ ἐφάπτεται ὁ εζ, ἔστω ὁ επ. Λέγω, ὅτι ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ επ, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν ϑκ, περιφέρειαν.



Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 16.

Ἔστω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων, τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ λ, καὶ ἑκάστου τῶν ε, ϑ, κ, σημείων, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ λεμ, λϑν, λκξ. διὰ δὲ τοῦ κ, παράλληλος κύκλος γεγράφθω ὁ οκ, διὰ δὲ τοῦ ϑ, μέγιστος ὁ ϑπο, ἐφαπτόμενος τοῦ επ, κατὰ τὸ π. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο παράλληλοί εἰσι κύκλοι οἱ οκ, επ. καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ εϑκζ, οϑπ, ἐφαπτόμενοι τοῦ επ, κατὰ τὰ ε, π. διὰ δὲ τοῦ ϑ, σημείου καὶ τοῦ λ, πόλου γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ λϑρ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ορ, τῇ ρκ, καὶ τῶν ιβ′: τοῦ β′: τοῦ παρ: καὶ ἡ ρσ, ἄρα τῆς ρκ, ἐλάττων ἐστὶν, ἡ σκ, ἄρα τῆς κρ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. ἀλλ' ἡ μὲν σκ, τῇ βδ, ἐστὶν ὁμοία, καὶ τῶν ϑ′: τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ κρ, τῇ νξ, καὶ τῶν αὐτῶν, καὶ ἡ βδ, ἄρα τῆς νξ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ επ, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μν, περιφέρεια πρὸς τὴν εϑ, περιφέρειαν καὶ τὴν αὐτῇ ἴσην, ἔχει δὲ ἡ μν, περιφέρεια πρὸς τὴν εϑ, περιφέρειαν μείζονα λόγον, ἤπερ

ἡ ν ξ,

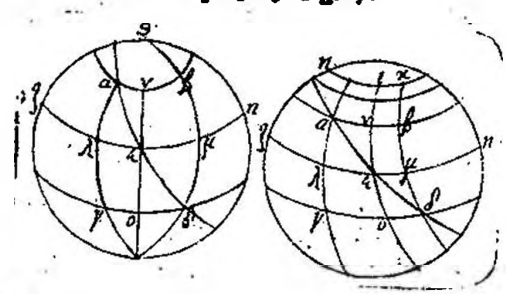
ἡ νξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν, καὶ τὴν θ'· τὰ παρ' ἃ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ επη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων· ἡ ἄρα διπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ επη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς νξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν, ἡ δὲ τῆς νξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν μείζω λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ. ἡ γὰρ τῆς νξ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βδ. πολλῷ ἄρα ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ επη, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι σφαῖρα παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τοὺς μέγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, οἱ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενοι, οἱ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἁπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, οἱ αβ, γδ, μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ αδ, περιφερείας τὰς αε, εδ, ἀφαιρήσωσαν ἴσας, πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ζεη. καὶ διὰ τῶν α, ε, δ, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν, οἱ ἥψουσι διὰ τοῦ θ, πόλου διαβαίνουσιν, οἱ ἅπτονται τοῦ κλ, παραλλήλου· καὶ πεπείσθωσαν τὸν μέγιστον παράλληλον ζεη, καὶ τὰ λε, εμ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τὰ λε, εμ, τόξα ἴσα ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ τὰ αε, εδ, τόξα ἴσα ἐστί, παντῶς γε καὶ τὰν ις'· τοῦ β'· τοῦ παρόντος, οἱ αβ, γδ, παράλληλοι, ἴσοι εἰσί, καὶ καὶ τὰν ιζ'· τοῦ αὐτοῦ, τὰ λα, βμ, δμ, λγ, εν, εο, τόξα, ἴσα ἐστί, καὶ καὶ τὰν β'· τοῦ παρόντος· αἱ αν, οδ, ἐπιζευγνύουσαι τὰ εα, εν, εδ, εο, τόξα ἴσα, ἴσαι εἰσί, καὶ ἑπομένως καὶ τὰν κά· τοῦ γ'· στοιχ· τὰ οδ, αν, τόξα ἴσα ἐστί. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τοῦ ά· κύκλου, τὰ οδ, εμ, ὥσπερ καὶ τὰ αν, λε, καὶ τὰν θ'· τοῦ β'· τοῦ παρόντος, ὅμοιά εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ λε, εμ, ὅμοιά εἰσι, καὶ ἐπεὶ εἰσι τμήματα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, παντῶς γέ εἰσι καὶ ἴσα. ἐπὶ δὲ τοῦ β'· κύκλου, τὰ αν, λε, καὶ ἔστι τὰ οδ, εμ, τόξα ὅμοιά εἰσι καὶ τὰν ιβ'· τοῦ αὐτοῦ. ἄρα τὰ λε, εμ, τόξα ἴσα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 17.



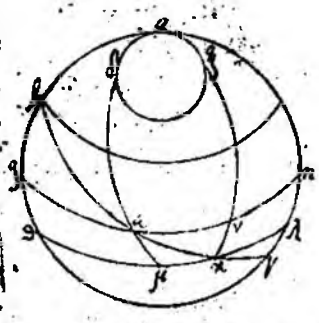
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ, αἱ ἔγγιον ὑποτεινοῦσαι τῶν πόλων τῆς πορρώτερον.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ αδξ, ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ βεγ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ αβγ, ἐφάπτεται. Λέγω, ὅτι ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ αἱ ἔγγιον ὑποτείνουσαι τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ βγ, λοξοῦ κύκλου δύο σημεῖα τυχόντα τὰ ε, κ, καὶ διὰ τῶν ε, κ, σημείων, γεγράφθωσαν κύκλοι παράλληλοι τῷ αδξ, οἱ ζεη, θκλ. Λέγω, ὅτι ἡ μετὰ εη, περιφέρεια τῆς κλ, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἢ δὲ θκ, περιφέρεια τῆς ζε, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν ε, κ, σημείων μέγιστοι κύκλοι, οἱ δεμ, ξνκ, ἁφαπτόμενοι τοῦ αδξ. ὥστε ἀσύμπτωτα εἶναι, τὸ μετὰ ἀπὸ τοῦ δ, ἡμικυκλίου ὡς ἐπὶ τὸ μ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὸ θ, μέρη, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ξ, ἡμικυκλίου ὡς ἐπὶ τὸ κ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὸ λ, μέρη. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμπτωτά ἐστι τὰ αλ, ξκ, ἡμικύκλια, καὶ μεταξὺ αὐτῶν, κύκλων περιφέρειαί εἰσιν αἱ νκ, κλ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ νη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ καὶ τῷ ιβ'. τοῦ β'. τοῦ παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζε, τῇ θμ, ἐστὶν ὁμοία, καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ νη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ, ἡ ἄρα εη, περιφέρεια, μείζων ἐστὶ τῆς κλ, περιφερείας, ἢ ὁμοία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ, τῆς ζε, μείζων ἐστὶν, ἢ ὁμοία. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 18.



Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ.

ΕΓΜΕΝΗΣ Α'ΝΑΓΝΩΣΤΑ.

ΟΡΑ, Α'ΝΑΠΟ'ΛΗΣΟΝ, ΚΑΙ' ΣΥ'ΓΓΝΩΘΙ.

Πέρας τῶ τυπῶσθαι τὴν παρόντα τόμον ἰδὼν, ἐπεμέλαβον, ὡ ὡς οἷόν τε ἐπιμελῶς διεξιὼν, ἐμέτυχόν τισι παραδράμασι περὶ τὴν διόρθωσιν, ἄτιμα, ὡς ὁρᾶς ἀμπαθοῖ τοῖς ἐπανορθωμένοις παρακείμενα, αὐτικρυς τῆς σελίδος καὶ ςίχε παρασεσημειωμένων, ἀπροδαιότερον φέρει συμβολὴν ἐπιμελείας δύκαιρον, ἢ ῥαθυμίας ἀκαίρου, ὕτε μὴν γραφίδος ἢ παρέψεως αἴτιον, ἀλλὰ τῆς τὴν ἐπόρτα, μᾶλλον Μήρης ἔρδα.

Σελ.	ςίχ.	Ε'σφαλμ.	Ε'πανορθωμ.
xxxiii	κ ἡ.	μωνίαν	γωνίαν,
1	22	κπορῶ	κπερῶ·
2	4	δ'θαλὴς	δ'θαλῆ,
2	30	κλεῖν,	κλεῖν·
10	9	ἐπιφανείας	ἐπιφανείας,
10	21	Ε'πίπεδος	ἐπίπεδος
11	12	ἐπὶπεδων	ἐπιπέδων.
11	12	εἰσιν	εἰσιν,
11	15	ὑπο	ὑπὸ,
11	24	περιφερῆς	περιφερῆς.
13	3	οἰκεῖα	οἰκεία.
13	16	πλειόπων	πλειόνων.
14	15	λαμβαμενὸς.	λαμβανομενὸς.
14	32	πρῶτόν φασὶ	πρῶτόν φασι,
15	7	πὸς	πρὸς
15	20	μεῖξόν	μεῖζον,
15	28	σφαῖρα	σφαῖρα
15	33	ὑπό τ	ὑπό τ
16	11	πραόδε	πρόδε
16	12	ὠείσαντε	ἀείσαντο
16	22	πξαπλδρᾶν	πξαπλάσιον,
16	23	καμπὶς	καμπὶς
16	31	ὑπ'	ὑπ'
20	22	πραγματδύται	πραγματδύεται.
21	5	πεπρασμενὸς	πεπερασμενὸς
22	28	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
22	31	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
23	21	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
24	3	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
24	12	ἄλλαι δύο δ-θεῖαι ἴσαι	ἄλλας δύο δ-θείας ἴσας,
24	12	ἑκατέρα	ἑκατέραν,
24	13	ἔχεσαι	ἐχέσας,
24	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
24	26	δ'θείαις	δ'θείας.
25	18	ἀνωτέρῳ	ἀνωτέρω.
27	18	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
27	33	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	2	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
30	7	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
32	15	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
32	26	ἀνωτέρῳ	ἀνωτέρω
33	11	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
35	6	μωνίαν τῆ	γωνίαν τῆ
35	21	εἶσαι	ἴσαι
35	21	ἴσαι εἰσὶ	ἴσαί εἰσι
35	24	δεῖζαι	δεῖξαι.
36	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
36	11	εἶσαί	ἴσαί
36	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα
37	24	ἀξιωμα	ἀξίωμα
39	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
39	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα
41	30	δοθείσει	δοθείσῃ
57	20	τὴν μζ, τῦ παρόντος,	τὴν μζ· παρελθόντος.
60	15	ὀεισκῶς	ὀεισικῶς

Σιλ.	στίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανορθωμ.
71	3	λιφθῇ	λιφθῇ
71	28	δεῖξαις	δεῖξαι
71	34	περόντος	παρόντος
72	22	μάλλαν	μᾶλλον
104	4	αἰ	φασι
113	31	ἐντῇ	ἐν τῇ
125	35	ὑποσαῦτ	ὑποσαῦτα.
126	29	δδίδιρον	δδιπορον
130	28	τὸ γ.	τῇ γ.
164	26	περαλληλό-γραμμον.	παραλληλό-γραμμον.
165	27	γώμων	γνώμων
165	31	γώμονι	γνώμονι,
166	29	γώμονι	γνώμονι.
179	16	ἀειθὸς ἀειθμῷ μέρη,	ἀειθμὸς ἀειθμῷ μέρος
179	17	τὰ αὐτὰ μέρη	τὸ αὐτὸ μέρος,
179	18	τὰ αὐτὰ μέρη ἔσαι, ὅπερ	τὸ αὐτὸ μέρος ἔσαι, ὅπερ
205	8	τὸν παρόντος	τῷ παρόντος
240	2	σωιεῖσ.	σωιεῖσθ.
244	4	τῦτο τὸ δὲ	τῦτο δὲ
250	7	ἀπομεσέας	ἀπόμεσα
250	7	περὶ	παρὰ
250	8	ἀπόμεσας	ἀπομεσέας
250	12	περὶ	παρὰ
251	2	τέτμηται	τέμνηται,
257	4	αἱ αβ,	ἡ αβ,
267	22	παραλληλεπί-δε.	παραλληλεπί-πεδα.
270	22	ἴσωται	ἴσωσαι,
279	30	τμήματα	τμήματα.
282	5	ἀπομεσέας	ἀπομεσέας,
288	1	πυραμίδι	πυραμίδε,
291	26	ἥμισή εἰσι	ἥμισυ εἰσὶ
335	20	τὸν παρὰ	τὸν πατέρα
336	7	τῷ βα,	τῷ βγ,
336	10	αἱ δγ, δζ,	αἱ δγ, γζ.
336	27	ἐισπαδιπάτω,	ἐισπαιδιπάτω,
339	25	ἐγγαγράφθω,	ἐγγιγράφθω,
354	25	τῷ κεῖξον	τῷ κεῖξαν.
363	28	κεῖξυ.	κεῖξον.
383	12	ἐναπολειπόμε-να.	ἐναπολειπόμε-να.
387	11	μέρων	μερῶν.
398	28	πόεισμα	πόρισμα.
415	18	τὰπων	τὰπον